การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว

นางสาววิลาสินี จันทราวุฒิ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาสถิติศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-3164-7

A COMPARISON OF PARAMETER-ESTIMATION METHODS FOR A FIXED-EFFECT RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN WITH LONGITUDINAL DATA

Miss Wilasinee Chantrawut

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Statistics

Department of Statistics
Faculty of Commerce and Accountancy
Chulalongkorn University

Academic Year 2002
ISBN 974-17-3164-7

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว

โดย นางสาววิลาสินี จันทราวุฒิ

สาขาวิชา สถิติ

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิรัช อภิเมธีธำรง)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ศิริพร สาเกทอง)

....อาจารย์ที่ปรึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ นพรัตน์ รุ่งอุทัยศิริ)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ผกาวดี ศิริรังษี)

วิลาสินี จันทราวุฒิ : การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว. (A COMPARISON OF PARAMETER-ESTIMATION METHODS FOR A FIXED-EFFECT RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN WITH LONGITUDIAL DATA) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา,185 หน้า. ISBN 974-17-3164-7

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว ด้วยวิธีการประมาณแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ วิธีแบบสองขั้น และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งตัวแบบที่ใช้คือ $Y_{ijk} = \tau_i + \beta_j + \alpha_k + \tau\alpha_{ik} + \varepsilon_{ijk}$ โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระกันและค่าความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันแบบอัตตสหสัมพันธ์ลำดับที่หนึ่ง อยู่ในรูป $\varepsilon_{ijk} = \phi\varepsilon_{ijk-1} + u_{ijk}$ การเปรียบเทียบกระทำภายใต้เงื่อนไขของค่าอัตตสหสัมพันธ์เป็น 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95 และ 0.99 ค่าความแปรปรวน เป็น 1, 25 และ 100 และแผนแบบการทดลองขนาด 3x3 4x4 และ 5x5 ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้จากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลและกระทำการทดลองซ้ำ ๆ กัน 500 ครั้ง ในสถานการณ์ที่กำหนด เพื่อคำนวณหาค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ย (Eu) ของตัวประมาณสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ และตัวประมาณสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอย $MSE(\hat{\phi})$ และค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณความแปรปรวน $MSE(\hat{\sigma}_e^2)$

ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

1) กรณีค่าความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระกัน

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญให้ค่า Eu ต่ำที่สุดและใกล้เคียงกับการประมาณค่าด้วยวิธีการประมาณแบบสองขั้นและวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ที่ไม่มีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยในทุกกรณี ทั้งนี้ค่า Eu และ $MSE(\hat{\sigma}_e^2)$ จะมีค่าลดลงเมื่อจำนวนซ้ำในการเก็บข้อมูลและขนาดตัวแบบเพิ่มขึ้น แต่จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าความแปรปรวนสูงขึ้น

2) กรณีค่าความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ที่มีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอย ให้ค่า Eu $MSE(\hat{\phi})$ และ $MSE(\hat{\sigma}_e^2)$ ต่ำที่สุดในทุกกรณี รองลงมาได้แก่ วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น ที่มีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอย และวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญจะเกิดค่าความผิดพลาดสูงที่สุด ความผิดพลาดในการประมาณค่าแปรผกผันกับระดับของค่าอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง และแปรผันตามจำนวนซ้ำในการเก็บข้อมูลและขนาดของตัวแบบ นั่นคือ การประมาณจะผิดพลาดมากขึ้นเมื่อระดับของค่าอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งมีค่ามากขึ้น หรือจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูลหรือขนาดของตัวแบบมีขนาดลดลง

ภาควิชา สถิติ ลายมือชื่อนิสิต

สาขาวิชา สถิติ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา

ปีการศึกษา 2545

4282408226 : MAJOR STATISTICS
KEY WORD: LONGITUDINAL DATA / AUTOREGRESSIVE / MAXIMUM LIKELIHOOD

WILASINEE CHANTRAWUT : A COMPARISON OF PARAMETER-ESTIMATION METHODS FOR A FIXED-EFFECT RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN WITH LONGITUDIAL DATA. THESIS ADVISOR: ASSOCIATE PROFESSOR. SUPOL DURONGWATTANA Ph.D. 185 pp. ISBN 974-17-3164-7

The objective of this research is to study and to compare the parameter-estimation methods for fixed-effect randomized complete block design with longitudinal data by the Ordinary Least Square estimation (OLS), Two-Stage estimation (TS) and Maximum Likelihood estimation (MLE). The model is $Y_{ijk} = \tau_i + \beta_j + \alpha_k + \tau\alpha_{ik} + \varepsilon_{ijk}$, which ε_{ijk} are independently distributed and ε_{ijk} follow the first-order autoregressive model, $\varepsilon_{ijk} = \phi\varepsilon_{ijk-1} + u_{ijk}$, The comparison is done when data were generated with ϕ are 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, and 0.99. The variances are 1, 25, and 100 with the 3x3, 4x4, and 5x5 designs. The data are simulated by Monte Carlo technique and repeated 500 times for each situation to calculate for the average of Euclidean distance (Eu) of parameter estimator in design and autoregressive parameter and Mean Square Error of variance.

The conclusions of this research are

1. Case of independently distributed errors.

   Euclidean distance by Ordinary Least Square estimators and Two-Stage estimators are almost the same as Maximum likelihood estimators with no estimation in autoregressive parameter in all cases. The value of Eu and $MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$ will decrease when collect the data for more replicate and size of design increasing. But Eu and $MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$ will decrease when the variance is increasing.

2. Case of first-order autoregressive errors.

   The Maximum likelihood estimators have minimum values of Eu, $MSE\left(\hat{\phi}\right)$ and $MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$ in all cases. The error of estimation will increase when the autoregressive parameter is increasing or the number of replicate is decreasing or the sample size is decreasing.

Department .... Statistics .... Student's signature ....

Field of study .... Statistics .... Advisor's signature ....

Academic year .... 2002 ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของรองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำตลอดจนช่วยเหลือแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยดีตลอดมา จนวิทยานิพนธ์นี้เสร็จสมบูรณ์ จึงใคร่ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณ กำลังใจอย่างดียิ่งจาก บิดา มารดา พร้อมทั้งเพื่อน ๆ ทั้งหลายที่มีให้ จนสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตาราง หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตาราง หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การวางแผนการทดลอง (Experimental Design) เป็นระเบียบวิธีการทางสถิติที่ถูกนำมาใช้เกี่ยวข้องกับการวิจัยเชิงทดลองหลายสาขา เช่น ทางด้านการแพทย์ การเกษตร จิตวิทยา การศึกษา วิศวกรรม ฯลฯ เนื่องมาจากการทดลอง (Experiment) เป็นกระบวนการศึกษาค้นคว้าหาข้อเท็จจริงอย่างเป็นระบบ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ได้ความรู้ ความเข้าใจใหม่ๆ หรือเพื่อเพิ่มเติมหรือยืนยันความรู้ ความเข้าใจจากเดิมที่มีอยู่ก่อนแล้ว ผลของการทดลองจะทำให้ทราบข้อเท็จจริง ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการตัดสินใจ การออกแบบการทดลองที่ดีและถูกต้องจะทำให้สามารถได้ข้อสรุปที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น

การออกแบบการทดลองถือว่าเป็นสิ่งสำคัญเบื้องต้นที่จะต้องพิจารณา โดยจะต้องเลือกใช้แผนแบบการทดลองที่เหมาะสม แผนแบบการทดลองที่เป็นที่นิยมใช้กันในทางปฏิบัติมากที่สุดแบบหนึ่งก็คือ แผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ (Randomized Complete Block Design : RCBD) ซึ่งเป็นแผนแบบการทดลองเพื่อทดสอบความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของปัจจัยทดลอง โดยที่หน่วยทดลองที่ใช้ไม่มีความสม่ำเสมอหรือคล้ายคลึงกัน ทั้งนี้จึงต้องมีการจัดหน่วยทดลองที่มีความคล้ายคลึงกันให้อยู่ในกลุ่มเดียวกัน เรียกว่าบล็อก (Block) ดังนั้นความแปรปรวนระหว่างหน่วยทดลองในบล็อกเดียวกันจะมีค่าต่ำ และความแปรปรวนระหว่างบล็อกมีค่าสูง เป็นการแยกผลอันเกิดจากความแปรปรวนระหว่างหน่วยทดลองออกจากความคลาดเคลื่อนของการทดลอง ทำให้ผลสรุปที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น

หลังจากทำการทดลองแล้ว งานในขั้นต่อไปคือการนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองมาวิเคราะห์ เพื่อทดสอบนัยสำคัญทางสถิติโดยใช้หลักการของ ANOVA (Analysis of Variance) ซึ่งมีข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption) ว่า ค่าความคลาดเคลื่อนจากแต่ละหน่วยทดลองจะต้องมีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าคาดหมาย (Expected value) เป็น 0 มีความแปรปรวนคงที่ และเป็นอิสระต่อกัน $\left(\varepsilon_{ij} \sim N\left(0,\sigma^2\right)\right)$ โดยจำนวนของหน่วยทดลองที่ใช้ควรมีขนาดมากพอสมควร แต่ในกรณีที่มีขนาดของหน่วยทดลองจำกัด อาจจะมีการเก็บข้อมูลซ้ำจากหน่วยทดลองเดิม (Repeated Measure) ข้อมูลที่ได้จากการเก็บข้อมูลในลักษณะนี้เรียกว่าข้อมูลระยะยาว (Longitudinal data) การเก็บข้อมูลในลักษณะนี้มีประโยชน์และจำเป็นอย่างมากในการศึกษาวิชาการแพทย์ และการ

เกษตรที่ต้องใช้ระยะเวลายาวนานในการศึกษาเป็นอย่างยิ่ง เช่น การศึกษาผลกระทบของยาในระยะยาว หรือ การเจริญเติบโตของปศุสัตว์ เป็นต้น แต่เนื่องจากเป็นการเก็บข้อมูลซ้ำจากหน่วยทดลองเดิม โดยข้อมูลที่ได้มานั้นอาจจะไม่เกิดสหสัมพันธ์กันเนื่องจากการทำการทดลองซ้ำ หรืออาจจะเกิดความสัมพันธ์ของข้อมูลเนื่องจากการทดลองซ้ำก็ได้ โดยลักษณะของข้อมูลที่ไม่มีสหสัมพันธ์กันนั้นจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อผู้วิจัยได้ทำการกำจัดอิทธิพลของปัจจัยที่ทดลองออกก่อนที่จะมีการวัดซ้ำ เช่นมีการสุ่มให้ปัจจัยทดลองใหม่กับหน่วยทดลองในการทดลองซ้ำ หรือมีการเว้นระยะเวลาของการทดลองซ้ำนานพอที่จะทำให้อิทธิพลจากปัจจัยทดลองในการทดลองครั้งก่อนไม่ส่งผลกระทบต่อหน่วยทดลองในการทดลองครั้งต่อมา ส่วนในกรณีที่ข้อมูลมีสหสัมพันธ์กัน จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อมีการเก็บข้อมูลซ้ำจากหน่วยทดลองเดิม โดยที่หน่วยทดลองนั้นได้รับปัจจัยทดลองใดปัจจัยหนึ่งตลอดช่วงระยะเวลาที่ทำการเก็บข้อมูล และมักจะพบว่าข้อมูลปัจจุบันจะมีความสหสัมพันธ์กับข้อมูลในอดีตที่มีระยะเวลาใกล้มากกว่าข้อมูลที่มีระยะไกลออกไป ดังนั้นการเก็บข้อมูลซ้ำจากหน่วยทดลองเดิมจึงอาจทำให้เกิดปัญหาความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์ต่อกัน เรียกสถานการณ์นี้ว่าอัตตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation) และรูปแบบที่พบโดยทั่วไปในอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนของข้อมูลคือ อัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง (First Order Autoregressive : AR1)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบการทดลองกรณีอิทธิพลคงที่นั้นประกอบไปด้วยการประมาณค่าอิทธิพลจากปัจจัยและการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน ซึ่งโดยส่วนใหญ่ผู้วิจัยมักเลือกใช้วิธีการกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ (Ordinary Least Square Estimation) เนื่องจากเป็นวิธีการที่ให้ตัวประมาณซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด (Best Linear Unbias Estimator : BLUE) ตามทฤษฎีเกาส์ – มาร์คอฟ (Gauss - Markov Theorem) เมื่ออยู่ภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น แต่เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์ขึ้น ทำให้คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อนไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น กล่าวคือ ความคลาดเคลื่อนจะไม่เป็นอิสระต่อกัน ถึงแม้ว่าจะยังมีค่าคาดหมายเป็นศูนย์และมีความแปรปรวนคงที่ การที่ผู้วิจัยยังคงใช้วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญในการประมาณค่าพารามิเตอร์ย่อมจะทำให้เกิดผลเสีย โดยเฉพาะในแง่คุณภาพของตัวประมาณ จะได้ตัวประมาณที่ไม่เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด เนื่องจากความแปรปรวนไม่ต่ำสุด ถึงแม้จะยังเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงก็ตาม โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเกิดอัตตสหสัมพันธ์ทางบวก (Positive Autocorrelation) ค่าความแปรปรวนของตัวประมาณจะมีค่าต่ำกว่าค่าแปรปรวนที่แท้จริง (Underestimate) จึงทำให้การอนุมานผิดพลาดได้

ถึงแม้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่นำมาใช้ จะไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น แต่เนื่องจากวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดสามัญเป็นการประมาณค่าที่ให้ตัว

ประมาณที่ดีในระดับหนึ่ง ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาตัวประมาณตัวใหม่ขึ้น โดยมีพื้นฐานการประมาณมาจากการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดสามัญ นั่นคือ การประมาณค่าแบบสองขั้น (Two - stage Estimation) ซึ่งวิธีการนี้จะหาค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นจากวิธีการกำลังสองต่ำสุดสามัญ แล้วนำใช้ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้นั้นไปหาค่าประมาณที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

วิธีการประมาณค่าอีกวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพในการการประมาณมาก ได้แก่ วิธีประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) เนื่องจากเป็นวิธีการประมาณค่าที่ได้นำลักษณะการแจกแจงของข้อมูลมาพิจารณาร่วมด้วย ค่าประมาณที่ได้จึงมีความถูกต้องมากขึ้น ซึ่งในกรณีของการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบการทดลองนั้น Hussein Mansour (1985) ได้ทำการศึกษาวิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน และสัมประสิทธิ์ในสมการอัตตถดถอยของแผนแบบการทดลองที่มีการวัดซ้ำ โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นแบบอัตตถดถอย ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ทำการเปรียบเทียบระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณที่ได้ พบว่าค่าประมาณความแปรปรวนที่ได้มีความเอนเอียงไม่มากนัก และค่าประมาณสัมประสิทธิ์ในสมการอัตตถดถอยที่เป็นค่าบวกมีความคงที่น้อยกว่าการประมาณสัมประสิทธิ์ในสมการอัตตถดถอยที่เป็นค่าลบเล็กน้อย

ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้มีความสนใจที่จะศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อข้อมูลที่นำมาศึกษาเป็นข้อมูลระยะยาว โดยแยกการหาตัวประมาณเป็น 2 กรณี คือ

1. กรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และค่าสังเกตจากการวัดแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน
2. กรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และค่าสังเกตจากการวัดแต่ละครั้งไม่เป็นอิสระกัน โดยกำหนดให้สหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูปแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

และสนใจที่จะศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธีคือ

1. วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ
2. วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น
3. วิธีการประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ซึ่งรายละเอียดสำหรับวิธีการประมาณค่าทั้ง 3 วิธี จะแสดงในบทที่ 2 ในบทที่ 3 จะกล่าวถึงวิธีดำเนินการวิจัย ส่วนผลการศึกษาโดยการจำลองข้อมูลขึ้นมาโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลนั้น แสดงในบทที่ 4 และในบทที่ 5 จะเป็นส่วนของการสรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะในการศึกษาครั้งนี้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับอิทธิพลคงที่ในแผนแบบการทดลองสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ เมื่อข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เป็นข้อมูลระยะยาว โดยแยกการหาตัวประมาณเป็น 2 กรณี คือ

1. กรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และค่าสังเกตจากการวัดแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน
2. กรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และค่าสังเกตจากการวัดแต่ละครั้งไม่เป็นอิสระต่อกัน โดยกำหนดให้สหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูปแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

และสนใจที่จะศึกษาวิธีการประมาณ 3 วิธี คือ

1. วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ
2. วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น
3. วิธีการประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

1.3 สมมติฐานของการวิจัย

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่กรณีข้อมูลระยะยาว เมื่อความคลาดเคลื่อนไม่มีสหสัมพันธ์กันการประมาณค่าด้วยวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญและวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นจะสอดคล้องกับวิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกกรณี แต่เมื่อสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูปแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง การประมาณค่าด้วยวิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะให้ผลดีที่สุดรองลงมาคือวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาภายใต้ลักษณะการแจกแจงของความคลาดเคลื่อน ที่มีการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

    1.1 U_{ijk} มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวนคงที่ เมื่อ U_{ijk} เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในตัวแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

    1.2 ε_{ijk} มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวนคงที่ เมื่อ ε_{ijk} เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิิทธิพลคงที่

2. กำหนดระดับของปัจจัยคือ

$i = 1, \ldots, a$

$j = 1, \ldots, b$

โดย a , b = 3 , 4 , 5 ดังนั้นขนาดตัวอย่างสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ เท่ากับ 9 , 16 และ 25 ตามลำดับ

3. กำหนดจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูล (k) เป็น 3 , 6 และ 12 ครั้ง
4. กำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง เป็น 0.01 , 0.05 , 0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.7 , 0.8 , 0.9 ,0.95 และ 0.99
5. การวิจัยครั้งนี้จำลองข้อมูลขึ้นตามสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา โดยใช้เทคนิคการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation Technique) ทำการจำลองซ้ำกันจำนวน 500 รอบในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด

1.5 ข้อตกลงเบื้องต้น

1. ศึกษาภายใต้แผนแบบการทดลองแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ ซึ่งไม่มีอันตรกิริยา (Interaction) เทอมระหว่างปัจจัยทดทองและปัจจัยแบ่งบล็อก
2. ข้อมูลมีการวัดซ้ำด้วยระยะห่างของเวลาเท่า ๆ กัน
3. ตัวแบบที่ใช้ในการศึกษา

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \alpha_k + (\tau\alpha)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, a \quad (1.1)$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

โดยกำหนดให้

a เป็นจำนวนปัจจัยทดลอง

b เป็นจำนวนบล็อก

p เป็นจำนวนครั้งของการเก็บข้อมูล

Y_{ijk} หมายถึง ค่าสังเกตที่ได้จากหน่วยทดลองที่ได้รับปัจจัยทดลองที่ i ในบล็อกที่ j และในซ้ำที่ k

μ หมายถึง ค่าเฉลี่ยรวมของประชากร

τ_i หมายถึง ผลกระทบจากปัจจัยทดลองที่ i

β_j หมายถึง ผลกระทบจากบล็อกที่ j

α_k หมายถึง ผลกระทบจากการวัดซ้ำที่ k

$(\tau\alpha)_{ik}$ หมายถึง ผลกระทบร่วมจากปัจจัยทดลองที่ i กับการวัดซ้ำที่ k

ε_{ijk} หมายถึง ความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตจากปัจจัยทดลองที่ i บล็อกที่ j และการวัดซ้ำที่ k

4. ทำการศึกษาภายใต้ตัวแบบอิทธิพลคงที่ (Fixed effect) และกำหนด $\sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0$ $\sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$ $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k = 0$ $\sum_{i=1}^{a}(\tau\alpha)_{ik} = 0$ และ $\sum_{k=1}^{p}(\tau\alpha)_{ik} = 0$

และสามารถเขียนตัวแบบอยู่ในรูป

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.2}$$

โดยที่

$$Y = (y_{111},..., y_{1b1}, y_{211},..., y_{2b1},..., y_{a11},...y_{ab1},..., y_{11p},..., y_{1bp},..., y_{abp})'$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{111},..., \varepsilon_{1b1}, \varepsilon_{211},..., \varepsilon_{2b1},..., \varepsilon_{a11},...\varepsilon_{ab1},..., \varepsilon_{11p},..., \varepsilon_{1bp},..., \varepsilon_{abp})'$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\mu, \tau_1,..., \tau_{a\text{-}1}, \beta_1,..., \beta_{b\text{-}1}, \alpha_1,..., \alpha_{p-1}, \tau\alpha_{11},..., \tau\alpha_{1(p-1)},..., \tau\alpha_{(a-1)(p-1)}\right)$$

$$
\mathbf{x}=\begin{bmatrix}
1 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 1 & . & 0 & -1 & . & -1 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 1 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 0 & . & 0 & -1 & . & -1 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & -1 & . & -1 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & -1 & . & 0 & -1 & . & 0 & -1 & . & 0\\
1 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 & -1 & . & 0 & -1 & . & 0 & -1 & . & 0\\
1 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & 1 & . & 0 & -1 & . & 0 & -1 & . & 0 & -1 & . & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
1 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 1 & . & 0 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 1 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & 0 & . & 0 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0\\
1 & -1 & . & -1 & 1 & . & 0 & -1 & . & -1 & 1 & . & 1 & 1 & . & 1 & 1 & . & 1\\
1 & -1 & . & -1 & 0 & . & 0 & -1 & . & -1 & 1 & . & 1 & 1 & . & 1 & 1 & . & 1\\
1 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & 1 & . & 1 & 1 & . & 1 & 1 & . & 1
\end{bmatrix}
$$

5. ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีเมตริกซ์ความแปรปรวน Σ โดยแบ่งเป็น 2 กรณี คือ

5.1 กรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และค่าสังเกตจากการวัดแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละการซ้ำเป็น σ_k^2

$$
\mathbf{v}(\underset{\sim}{\varepsilon})=\begin{bmatrix}
\sigma_1^2\mathbf{I} & 0 & \ldots & 0\\
0 & \sigma_2^2\mathbf{I} & \ldots & 0\\
\mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M}\\
0 & 0 & \ldots & \sigma_p^2\mathbf{I}
\end{bmatrix} \qquad (1.3)
$$

5.2 กรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และค่าสังเกตจากการวัดแต่ละครั้งไม่เป็นอิสระต่อกัน โดยกำหนดให้ความคลาดเคลื่อนมีอัตตสัมพันธ์ในรูปแบบอัตตถดถอยอันดับที่ 1 คือ

$$
\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \quad = \quad \phi\boldsymbol{\varepsilon}_{ij(k-1)} + u_{ijk} \qquad (1.4)
$$

โดยที่ u_{ijk} เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติที่เป็นอิสระต่อกัน มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน σ_e^2 ดังนั้นจะได้ว่า

$$V(\varepsilon_{ijk}) = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \tag{1.5}$$

$$COV(\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ij(k-m)}) = \phi^m \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \tag{1.6}$$

1.6 เกณฑ์ในการตัดสินใจ

ในการวิจัยครั้งนี้จะทำการเปรียบเทียบการประมาณค่าเป็นสามส่วนคือ การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยและการประมาณค่าความแปรปรวน โดยการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบจะใช้การคำนวณหาระยะทางยุคลิด (เฉลี่ย) ในการเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ โดยการคำนวณหาระยะทางยุคคลิด (เฉลี่ย) ของตัวประมาณแสดงได้ดังนี้

$$\overline{Eu} = \frac{\sum_{n=1}^{r} \left\| \lambda - \hat{\lambda} \right\|}{r}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{r} \sqrt{\sum\left(\tau_i - \hat{\tau}_i\right)^2 + \sum\left(\beta_j - \hat{\beta}_j\right)^2 + \sum\left(\alpha_k - \hat{\alpha}_k\right)^2 + \sum\left(\tau\alpha_{ik} - \widehat{\tau\alpha}_{ik}\right)^2}}{r} \tag{1.7}$$

เกณฑ์ในการตัดสินใจก็คือ วิธีการใดให้ค่าระยะทางยุคลิด (เฉลี่ย) ต่ำกว่า วิธีการนั้นก็จะถือว่าเป็นวิธีการที่เหมาะสมสำหรับการค่าประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ

ในส่วนของการประมาณค่าความแปรปรวนและสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยนั้น จะพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square of Error) โดยถ้าวิธีการประมาณค่าแบบใดมีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่า ก็จะเป็นวิธีที่มีความเหมาะสม โดยมีสูตรในการคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ดังนี้

$$MSE(\phi) = \frac{\sum_{n=1}^{r}\left(\phi - \hat{\phi}\right)^2}{r} \qquad (1.8)$$

และ

$$MSE\left(\sigma_e^2\right) = \frac{\sum_{n=1}^{r}\left(\sigma_e^2 - \hat{\sigma}_e^2\right)^2}{r} \qquad (1.9)$$

นอกจากนั้นเพื่อแสดงให้เห็นถึงความคลาดเคลื่อนในการประมาณที่อาจจะเกิดขึ้นจากการกำหนดตัวแบบจึงได้ทำการเปรียบเทียบค่าประมาณที่ได้จากวิธีการประมาณแบบสองขั้นและวิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเมื่อ

1. มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์ เมื่อข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน
2. ไม่มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์ $(\phi = 0)$ เมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน

โดยใช้เกณฑ์ในการเปรียบเทียบเช่นเดียวกันกับข้างต้น

1.7 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. ข้อมูลระยะยาว (Longitudinal data) คือ ข้อมูลที่มีการเก็บจากหน่วยทดลองเดิมมากกว่า 1 ครั้งขึ้นไป ในช่วงเวลาที่ต่างกัน
2. อัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation) คือเหตุการณ์ที่ตัวแปรสุ่ม ε มีความสัมพันธ์ต่อกัน กล่าวคือ COV $(\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}) \neq 0$ เมื่อ $k \neq k'$

1.8 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถใช้หลักการของภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและการประมาณค่าแบบสองขั้นมาประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับอิทธิพลคงที่ในแผนแบบการทดลองสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ เมื่อข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เป็นข้อมูลระยะยาว

2. สามารถเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับอิทธิพลคงที่ เมื่อข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เป็นข้อมูลระยะยาว ระหว่างวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและการประมาณค่าแบบสองขั้น ว่าวิธีการใดจะให้ค่าประมาณที่ดีกว่าในเชิงสถิติ

3. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบการทดลองอื่น หรือความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ในรูปแบบอื่นต่อไป

4. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีอื่น ๆ ที่สอดคล้องกับลักษณะข้อมูลต่อไป

บทที่ 2
ข้อมูลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษา การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว ซึ่งต้องมีศึกษาถึงลักษณะของข้อมูล รวมถึงวิธีการประมาณค่าที่นำมาใช้เป็นเบื้องต้นก่อน โดยในบทนี้จะกล่าวถึงลักษณะทั่วไปของความคลาดเคลื่อนทั้งในกรณีปกติ และกรณีที่ความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กัน และในจะกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นลำดับต่อไป

2.1 ตัวแบบที่ศึกษา

ตัวแบบที่ใช้สำหรับแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว เมื่อมีปัจจัยที่ต้องการศึกษา a ปัจจัย มีการแบ่งออกเป็น b บล็อก ทำการเก็บข้อมูลจากหน่วยทดลองเดิมซ้ำจำนวน p ครั้งที่มีระยะห่างของเวลาเท่ากัน และมีอิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัยที่ทำการศึกษากับคาบเวลาในการเก็บข้อมูล เป็นดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \alpha_k + (\tau\alpha)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, a \quad (2.1)$$
$$j = 1, 2, \ldots, b$$
$$k = 1, 2, \ldots, p$$

μ	หมายถึง	ค่าเฉลี่ยรวมของประชากร
τ_i	หมายถึง	ผลกระทบจากปัจจัยทดลองที่ i
β_j	หมายถึง	ผลกระทบจากบล็อกที่ j
α_k	หมายถึง	ผลกระทบจากการวัดซ้ำที่ k
$(\tau\alpha)_{ik}$	หมายถึง	ผลกระทบร่วมจากปัจจัยทดลองที่ i กับการวัดซ้ำที่ k
ε_{ijk}	หมายถึง	ความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตจากปัจจัยทดลองที่ i บล็อกที่ j และการวัดซ้ำที่ k

โดยที่ในกรณีปกติทั่วไปความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติที่เป็นอิสระกัน มีค่าคาดหวังเป็น 0 ความแปรปรวนคงที่ σ^2 แต่ในกรณีที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์ในรูปแบบอัตตถดถอยอันดับที่หนึ่ง ความคลาดเคลื่อนจะอยู่ในรูปแบบ

$$\varepsilon_{ijk} = \phi\varepsilon_{ijk-1} + u_{ijk} \qquad k = 1, 2, \ldots, p \tag{2.2}$$

u_{ijk} เป็นความคลาดเคลื่อนสุ่ม และมีข้อตกลงเบื้องต้นของ u_{ijk} คือ มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 มีความแปรปรวนคงที่และไม่มีความแปรปรวนร่วม

2.2 คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อน

การวิจัยนี้สนใจศึกษาค่าความคลาดเคลื่อนที่เป็นอิสระซึ่งเป็นกรณีปกติทั่วไป และค่าความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน โดยกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์เป็นอัตตถดถอยอันดับที่หนึ่ง (First Order Autoregressive Process) ซึ่งความคลาดเคลื่อนทั้งสองแบบจะมีคุณสมบัติที่ต่างกันดังนี้

2.2.1 กรณีความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระกัน

ในกรณีนี้ความคลาดเคลื่อนจะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และมีความคลาดเคลื่อนเป็น σ_e^2 และไม่มีความสัมพันธ์ต่อกัน กล่าวคือ $\left(\varepsilon_{ijk} \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma_e^2\right)\right)$

2.2.2 กรณีความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

ความคลาดเคลื่อนที่มีความสัมพันธ์ในรูปแบบอัตตถดถอยลำดับที่ 1 จะอยู่ในรูปแบบ

$$\varepsilon_{ijk} = \phi\varepsilon_{ijk-1} + u_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{array} \tag{2.3}$$

โดยที่ ϕ เป็นพารามิเตอร์ และ u_{ijk} เป็นความคลาดเคลื่อนสุ่ม และมีข้อตกลงเบื้องต้นของ u_{ijk} คือ มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 มีความแปรปรวนคงที่และไม่มีความแปรปรวนร่วม

พิจารณาสมการที่ 2.3 ข้างต้น จะได้ว่า

$$\varepsilon_{ijk-1} = \phi\varepsilon_{ijk-2} + u_{ijk-1} \tag{2.4}$$

แทนค่าใน ε_{ijk} จะได้

$$\varepsilon_{ijk} = \phi(\phi\varepsilon_{ijk-2} + u_{ijk-1}) + u_{ijk}$$

$$= \phi^2\varepsilon_{ijk-2} + \phi u_{ijk-1} + u_{ijk} \tag{2.5}$$

และสามารถแทนค่า ε_{ijk-2} ในเทอมของ $\phi\varepsilon_{ijk-3} + u_{ijk}$ จะได้

$$\varepsilon_{ijk} = \phi^3\varepsilon_{ijk-3} + \phi^2\varepsilon_{ijk-2} + \phi u_{ijk-1} + u_{ijk} \tag{2.6}$$

และทำในลักษณะเดิมจะได้ว่า

$$\varepsilon_{ijk} = \sum_{s=0}^{\infty}\phi^s u_{ijk-s} \tag{2.7}$$

พิจารณา ε_{ijk} จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับความคลาดเคลื่อนสุ่ม ในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ พิจารณา $0 < \phi < 1$ จะทำให้ ε_{ijk} มีความสัมพันธ์กับความคลาดเคลื่อนในเทอมก่อนหน้าลดน้อยลงเรื่อย ๆ

ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน

จาก
$$\varepsilon_{ijk} = \sum_{s=0}^{\infty}\phi^s u_{ijk-s}$$

$$= u_{ijk} + \phi u_{ijk-1} + \phi^2 u_{ijk-2} + \ldots$$

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_{ijk}) = E(u_{ijk}) + \phi E(u_{ijk-1}) + \phi^2 E(u_{ijk-2}) + \ldots \tag{2.8}$$

จากข้อตกลงเบื้องต้นของ u_{ijk} จะได้ E(u_{ijk}) = 0 , k = 1 , 2 , ... , p

ดังนั้น E(ε_{ijk}) = 0 , k = 1 , 2 , ... , p

ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

จาก
$$\varepsilon_{ijk} = \sum_{s=0}^{\infty}\phi^s u_{ijk-s}$$

$$E\left(\varepsilon_{ijk}{}^{2}\right)= \qquad E\left[u_{ijk}+\phi u_{ijk-1}+\phi^{2}u_{ijk-2}+\mathrm{K}\right]^{2}$$

$$=E\left[\left(u_{ijk}{}^{2}+\phi^{2}u_{ijk-1}{}^{2}+\phi^{4}u_{ijk-2}{}^{2}+\mathrm{K}\right)+\left(2\phi u_{ijk}u_{ijk-1}+2\phi u_{ijk}u_{ijk-2}+\Lambda\right)\right] \quad (2.9)$$

แต่ $E\left(u_{ijk}{}^{2}\right)=\sigma_{e}{}^{2}$ และ $E\left(u_{ijk}u_{ijk-s}\right)=0$, s = 2 , 3 , … p

ดังนั้น $E\left(\varepsilon_{ijk}{}^{2}\right) \quad = \quad \left(\sigma_{e}^{2}+\phi\sigma_{e}^{2}+\phi^{4}\sigma_{e}^{2}+\phi^{6}\sigma_{e}^{2}+\Lambda\right)+\left(0+\Lambda+0\right)$

$$= \quad \frac{\sigma_{e}^{2}}{1-\phi^{2}} \quad (2.10)$$

และฉะนั้น

$$V\left(\varepsilon_{ijk}\right) = \frac{\sigma_{e}^{2}}{1-\phi^{2}} \quad \text{เป็นค่าคงที่} \quad (2.11)$$

2.3 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในการวางแผนการทดลอง สามารถพิจารณาในรูปของสมการถดถอยได้ ทั้งนี้เนื่องมาจากทั้งการวิเคราะห์ความแปรปรวนและการถดถอยเชิงเส้นต่างก็เป็นตัวแบบเชิงเส้น ดังนั้นการประมาณค่าของพารามิเตอร์ในแผนแบบแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ในการวิจัยครั้งนี้ จึงใช้แนวคิดในการประมาณแบบการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในสมการถดถอย โดยสนใจที่จะทำการศึกษาการประมาณค่าจาก 3 วิธี คือ วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ การประมาณค่าแบบสองขั้น และการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งมีรายละเอียดของแต่ละวิธีดังนี้

การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในสมการถดถอยโดยทั่วไปจะใช้วิธีประมาณค่ากำลังสองต่ำที่สุด (Least square estimation) โดยในที่นี้จะแสดงให้เห็นการประมาณค่าของพารามิเตอร์ของแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์กรณีทั่วไปด้วยวิธีกำลังสองต่ำที่สุดดังนี้

จากตัวแบบ

$$y_{ij}=\mu+\tau_{i}+\beta_{j}+\varepsilon_{ij} \qquad \begin{cases} i=1,2,\ldots,a \\ j=1,2,\ldots,b \end{cases} \quad (2.12)$$

สามารถหาสมการปกติ (Normal equation) ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{ll}
\mu : ab\hat{\mu} + b\hat{\tau}_1 + b\hat{\tau}_2 + \ldots + b\hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_1 + a\hat{\beta}_2 + \ldots + a\hat{\beta}_b = y_{..} & \\
\tau_1 : b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_1 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_b = y_{1.} & \\
\tau_2 : b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_2 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_b = y_{2.} & \\
\vdots & \\
\tau_a : b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_a + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \ldots + \hat{\beta}_b = y_{a.} & \quad (2.13) \\
\beta_1 : a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_1 = y_{.1} & \\
\beta_2 : a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_2 = y_{.2} & \\
\vdots & \\
\beta_b : a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_b = y_{.b} &
\end{array}
$$

ซึ่งจะเห็นว่าสมการแรกเกิดจากผลรวมของสมการที่สองถึงสมการที่ a+1 ซึ่งเท่ากับผลรวมของ b สมการ ดังนั้นจึงมีสมการเชิงเส้นสองชุดที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน เพื่อให้หาค่าของสมการได้ จึงต้องใส่ข้อจำกัดเพิ่มเติมดังนี้

$$\sum_{i=1}^{a} \hat{\tau}_i = 0 \qquad \sum_{j=1}^{b} \hat{\beta}_j = 0$$

เมื่อพิจารณาข้อจำกัด สมการปกติเขียนได้เป็น

$$
\begin{array}{lll}
ab\hat{\mu} = y_{..} & & \\
b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_i = y_{i.} & i = 1,2,\ldots,a & \quad (2.14) \\
a\hat{\mu} + a\hat{\beta}_j = y_{.j} & j = 1,2,\ldots,b &
\end{array}
$$

จะได้ว่า

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \qquad i = 1,2,\ldots,a \tag{2.15}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \qquad j = 1,2,\ldots,b$$

และเมื่อใช้สมการนี้ร่วมกับสมการปกติ เราจะสามารถหาค่าประมาณของ y_{ij} ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ij} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j \\ &= \bar{y}_{..} + \left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right) + \left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right) \\ &= \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.3.1 การประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ

จากที่กล่าวมาข้างต้น ถ้าพิจารณาสมการถดถอยในรูปแบบเมตริกซ์ จะได้ว่า

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.17}$$

ถ้าให้ $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ เป็นเวกเตอร์ของตัวประมาณค่า $\boldsymbol{\lambda}$ ดังนั้น

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}} \tag{2.18}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{e}'\mathbf{e} \\ &= \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\right)'\left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\right) \\ &= \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}}\right)'\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}}\right) \\ &= \left(\mathbf{Y}' - \hat{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{X}'\right)\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}}\right) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}} + \hat{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \hat{\boldsymbol{\lambda}}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}} = 0$$

$$\mathbf{X'X\hat{\lambda}} = \mathbf{X'Y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{(X'X)^{-1}X'Y} \qquad (2.19)$$

และสามารถหาค่าประมาณของ σ^2 ได้จาก

$$\begin{aligned}
\mathbf{e'e} &= \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\lambda}\right)'\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\lambda}\right) \\
&= \left\{\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}\right\}'\left\{\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}\right\} \\
&= \mathbf{Y'}\left\{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right\}'\left\{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right\}\mathbf{Y} \\
&= \mathbf{Y'}\left\{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right\}\mathbf{Y} \\
&= \mathbf{Y'Y} - \mathbf{Y'X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y} \\
&= \mathbf{Y'Y} - \mathbf{Y'X}\hat{\lambda} \\
&= \mathbf{Y'Y} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{X'Y} \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ σ^2 คือ

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}^2 &= \mathbf{e'e}/\mathrm{df} \\
&= \left(\mathbf{Y'Y} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{X'Y}\right)/(n-k) \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

2.3.2 วิธีประมาณค่าแบบสองขั้น

การประมาณค่าแบบสองขั้นเป็นการประมาณค่าที่พัฒนามาจากการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ เพื่อให้ค่าประมาณมีความถูกต้องมากขึ้น โดยมีวิธีการ ดังนี้

ขั้นที่ 1

1. สร้างสมการถดถอยจากตัวประมาณค่าที่ได้จากวิธีกำลังสองต่ำสุด $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{OLS}}$

2. คำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อน $\hat{\varepsilon}_{ijk} = y_{ijk} - f\left(\mathbf{x}_{ijk};\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{OLS}}\right)$

3. คำนวณหาค่า $\hat{\phi}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณของ ϕ จาก $\{\varepsilon_{ijk}\}$

และคำนวณหา $\mathbf{V}_{\hat{\varphi}}^{-1}$ จาก

$$\mathbf{V}_{\hat{\varphi}}^{-1} = \frac{1}{1-\hat{\phi}^2}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{\phi} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\hat{\phi} & 1+\hat{\phi}^2 & -\hat{\phi} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\phi} & 1+\hat{\phi}^2 & -\hat{\phi} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{\phi} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

ขั้นที่ 2 เลือกตัวประมาณแบบสองขั้น $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{TS}}$ ที่ทำให้สมการต่อไปนี้มีค่าต่ำสุด

$$\{\mathbf{y}-\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda})\}'\mathbf{V}_{\hat{\varphi}}^{-1}\{\mathbf{y}-\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda})\} = \frac{S_1\left(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi}\right)}{1-\hat{\phi}^2} \tag{2.24}$$

เมื่อ

$$S_1\left(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi}\right) = \left(1-\hat{\phi}^2\right)\left\{y_1 - f\left(\mathbf{x}_{ij1};\boldsymbol{\lambda}\right)\right\}^2 + S_2\left(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi}\right)$$
$$S_2\left(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi}\right) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{2}}^{p}\left\{y_{ijk} - \hat{\phi}y_{ijk-1} - f\left(\mathbf{x}_{ijk};\boldsymbol{\lambda}\right) + \hat{\phi}f\left(\mathbf{x}_{ijk-1};\boldsymbol{\lambda}\right)\right\}^2$$

จากนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\phi}$ จาก

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{k=2}^{p}\hat{\varepsilon}_{ijk}\hat{\varepsilon}_{ijk-1}}{\sum_{k=2}^{p-1}\hat{\varepsilon}_{ijk}} \tag{2.25}$$

จากนั้นจึงทำการประมาณค่าของ σ_e^2 จาก

$$\hat{\sigma}_e{}^2 = \left(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\lambda}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right)/(n-k) \tag{2.26}$$

2.3.3 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีการหาตัวประมาณค่า โดยใช้ลักษณะการแจกแจงร่วมของข้อมูล

ในขั้นตอนแรก จะพิจารณาลักษณะการแจกแจงของข้อมูลดังนี้

พิจารณาตัวแบบ

$$Y_{ijk} \quad = \quad \mu + \tau_i + \beta_j + \alpha_k + (\tau\alpha)_{ik} + e_{ijk}$$

โดยที่ปัจจัยทดลองเป็นอิทธิพลคงที่

เมื่อกำหนดให้ e_{ijk} มีรูปแบบเป็นอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

$$e_{ijk} \quad = \quad \phi e_{ij(k-1)} + u_{ijk} \tag{2.27}$$

u_{ijk} เป็นค่าความคลาดเคลื่อนกำหนดให้มีการแจกแจงแบบ $N(0, \sigma_e^2)$ และเป็นอิสระกัน และ ϕ เป็นค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ สมาชิก $C_{kk'}$(k,k' = 1 , … , p) ของเมตริกซ์ค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างค่าสังเกตคือ

$$C_{kk'} \quad = \quad \sigma_e^2 \phi^{|j'-j|} \sum_{l=0}^{L-1} \phi^{2l} \tag{2.28}$$

เมื่อ L = min (j, j') สมมติให้มี 3 ค่าสังเกต จะได้เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \phi\sigma_e^2 & \phi^2\sigma_e^2 \\ \phi\sigma_e^2 & (1+\phi^2)\sigma_e^2 & \phi(1+\phi^2)\sigma_e^2 \\ \phi^2\sigma_e^2 & \phi(1+\phi^2)\sigma_e^2 & (1+\phi^2+\phi^4)\sigma_e^2 \end{bmatrix}$$

จากตัวแบบของความคลาดเคลื่อน เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{e_{ijk}} = \Phi \mathbf{u_{ijk}} \tag{2.29}$$

เมื่อ $\mathbf{e_{ij}}' = (e_{ij1}, e_{ij2}, \ldots, e_{ijp})$, $\mathbf{u_{ij}}' = (u_{ij1}, u_{ij2}, \ldots, u_{ijp})$ และ

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ \phi & 1 & \Lambda & 0 \\ \phi^2 & \phi & \Lambda & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \Lambda & \mathrm{M} \\ \phi^{p-1} & \phi^{p-2} & \Lambda & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

จากข้อตกลงเบื้องต้น $\mathbf{u} \sim \mathbf{N_p}\left(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}\right)$ กำหนดให้ $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi\Phi'}$ จะได้ $\mathbf{e_{ij}} \sim \mathbf{N_p}\left(0, \sigma_e^2 \mathbf{\Omega}\right)$ เวคเตอร์ของค่าสังเกตจากแต่ละหน่วยทดลองคือ $\mathbf{Y_{ij}}' = (Y_{ij1}\ ,\ Y_{ij2}\ ,\ \ldots\ ,\ Y_{ijp})$ จะมีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรที่มีค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}' = (\mu_1\ ,\ \mu_2\ ,\ \ldots\ ,\ \mu_p)$ และมีเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\mathbf{\Sigma} = \sigma_e^2 \mathbf{\Omega} + \sigma_a^2 \mathbf{1}\mathbf{1}'$ เมื่อ $\mathbf{1}' = (1\ ,\ 1\ ,\ \ldots,\ 1)$ ที่มีขนาด p และจะได้หาสมการภาวะน่าจะเป็นสูงสุดได้จาก

$$\mathbf{L} = \prod_{i=1}^{N} (2\pi)^{-p/2} |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Y_i} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y_i} - \boldsymbol{\mu})\right] \tag{2.31}$$

เมื่อ $|\mathbf{\Sigma}|$ เป็นค่าดีเทอร์มิแนนท์ของ $\mathbf{\Sigma}$ และ $\overline{\mathbf{Y}}$ และ $\mathbf{S}$ เป็นเวคเตอร์ของค่าเฉลี่ยตัวอย่างและเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมตามลำดับ ดังนั้น

$$\log \mathbf{L} \propto -\frac{N}{2} tr\left[\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{Y}} - \mu)(\overline{\mathbf{Y}} - \mu)'\right] - \frac{N}{2}\log|\Sigma| - \frac{N}{2} tr\left(\Sigma^{-1}\mathbf{S}\right)$$

ให้ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \equiv (\sigma_e^2, \phi)$ แทนเวคเตอร์ของพารามิเตอร์ log L สามารถหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \log \mathbf{L}}{\partial \theta_1} = -\frac{N}{2} tr\left(\Sigma^{-1}\Omega\right) + \frac{N}{2} tr\left(\Sigma^{-1}\Omega\Sigma^{-1}\mathbf{S}\right) \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \log \mathbf{L}}{\partial \theta_2} = -\frac{N}{2} tr\left(\Sigma^{-1}\Lambda\right) + \frac{N}{2} tr\left(\Sigma^{-1}\Lambda\Sigma^{-1}\mathbf{S}\right) \tag{2.33}$$

โดยที่ $\Lambda \equiv \theta_1(\Psi\Phi' + \Phi\Psi')$ เมื่อ $\Psi = \partial\Phi / \partial\theta_2$

หลังจากนั้นกำหนดให้สมการเป็นศูนย์ แล้วแก้สมการหาค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งวิธีการแก้สมการและสูตรในการคำนวณหาค่าประมาณในกรณีที่เก็บข้อมูลซ้ำจำนวน 3 ครั้ง สามารถแสดงได้ดังนี้

จาก

$$\Phi := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \phi & 1 & 0 \\ \phi^2 & \phi & 1 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

จะได้

$$\Phi' = \Phi2 := \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi^2 \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

$$\Phi\Phi' = \Omega := \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi^2 \\ \phi & \phi^2+1 & \phi^3+\phi \\ \phi^2 & \phi^3+\phi & \phi^4+\phi^2+1 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

กำหนด

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\,\phi & \sigma^2\,\phi^2 \\ \sigma^2\,\phi & \sigma^2\,(\phi^2+1) & \sigma^2\,(\phi^3+\phi) \\ \sigma^2\,\phi^2 & \sigma^2\,(\phi^3+\phi) & \sigma^2\,(\phi^4+\phi^2+1) \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

จะได้

$$\Sigma^{-1} = \Sigma2 := \begin{bmatrix} \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} & -\frac{\phi}{\sigma^2} & 0 \\ -\frac{\phi}{\sigma^2} & \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} & -\frac{\phi}{\sigma^2} \\ 0 & -\frac{\phi}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

และ $tr\left(\Sigma^{-1}\Omega\right) =$

$$\mathrm{tr}(\Sigma2\ \Omega) := \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} - \frac{2\,\phi^2}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2} - \frac{2\,\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2} + \frac{\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2} \tag{2.39}$$

กำหนดค่าเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่างเป็น

$$S := \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 \\ s4 & s5 & s6 \\ s7 & s8 & s9 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

จะได้ $tr\left(\Sigma^{-1}\Omega\Sigma^{-1}\mathbf{S}\right)$ เป็น

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\Sigma 2^2\, \Omega\, S) :=\; & \frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2} - \frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)\, s1}{\sigma^2} \\
& + \Bigg(- \frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2} - \frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} - \frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2} - \frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} \Bigg) s4 \\
& + \frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2} - \frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right) s7}{\sigma^2} \\
& + \Bigg(\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2} - \frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2} - \frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2} - \frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} \Bigg) s2 \\
& + \Bigg(- \frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2} - \frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} + \frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2} - \frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2} \\
& \quad - \frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)(\phi^3+\phi)}{\sigma^2} - \frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} \Bigg) s5 + \Bigg(\\
& \quad - \frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2} - \frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} \\
& \quad + \frac{-\frac{\phi^3}{\sigma^2} + \frac{(\phi^2+1)(\phi^3+\phi)}{\sigma^2} - \frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}}{\sigma^2} \Bigg) s8 - \frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2} + \frac{\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)\phi\, s3}{\sigma^2} \\
& + \Bigg(\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2} + \frac{\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2} - \frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2} + \frac{\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} \Bigg) s6
\end{aligned}
$$

$$+\left(-\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}}{\sigma^2}\right)s9 \qquad (2.41)$$

แทนค่าลงในสมการ 2.32 จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial \theta_1} = {} & \\
& LA := \frac{\phi^2+1}{\sigma^2}-\frac{2\,\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{2\,\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2} \\
& +\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2}-\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)\,s1}{\sigma^2} \\
& +\left(-\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2}-\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s4 \\
& +\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)s7}{\sigma^2} \\
& +\left(\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}-\frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s2 \\
& +\Bigg(-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}-\frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2} \\
& -\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)s5+\Bigg(\\
& -\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2} \\
& +\frac{-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\Bigg)s8-\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)\phi\,s3}{\sigma^2} \\
& +\left(\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s6 \\
& +\left(-\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}}{\sigma^2}\right)s9 \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

ลดรูปได้เป็น

$$R0 := \frac{3\,\sigma^2 + s1\,\phi^2 + s1 - \phi\,s4 - \phi\,s2 + s5\,\phi^2 + s5 - \phi\,s8 - \phi\,s6 + s9}{\sigma^4} \tag{2.43}$$

กำหนดให้ สมการ 2.40 = 0 ได้ค่าประมาณของ σ_e เป็น

$$R0 := \{\sigma = -\frac{s1\,\phi^2}{3} - \frac{s1}{3} + \frac{\phi\,s4}{3} + \frac{\phi\,s2}{3} - \frac{s5\,\phi^2}{3} - \frac{s5}{3} + \frac{\phi\,s8}{3} + \frac{\phi\,s6}{3} - \frac{s9}{3}\} \tag{2.44}$$

จาก

$$\Psi1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

และ

$$\Psi' = \Psi2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

จะได้ $\Lambda \equiv \theta_1(\Psi\Phi' + \Phi\Psi')$ เป็น

$$\Delta := \begin{bmatrix} 0 & \sigma & 2\,\sigma \\ \sigma & 2\,\sigma\,\phi & \sigma\,(\phi^2 + 2\,\phi + 1) \\ 2\,\sigma & \sigma\,(\phi^2 + 2\,\phi + 1) & \sigma\,(4\,\phi^2 + 2\,\phi) \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

จะได้ $tr(\Sigma^{-1}\Lambda)$

$$\mathrm{tr}(\Sigma2\;\Delta) := -\frac{2\,\phi}{\sigma} + \frac{2\,(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma} - \frac{2\,\phi\,(\phi^2 + 2\,\phi + 1)}{\sigma} + \frac{4\,\phi^2 + 2\,\phi}{\sigma} \tag{2.48}$$

และจะได้ $tr(\Sigma^{-1}\Lambda\Sigma^{-1}\mathbf{S})$ เป็น

$$\mathrm{tr}(\Sigma2^2\,\Delta\,S) := \left(-\frac{\phi\,(\phi^2+1)}{\sigma^3} - \frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma} - \frac{2\,\phi^2}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\right) s1 + \left(\frac{\phi^2}{\sigma^3} + \frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma} - \frac{2\,\phi^2}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2} - \frac{\left(\frac{2\,(\phi^2+1)}{\sigma} - \frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\right) s4$$

$$+\left(-\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma}-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\frac{2\,(\phi^2+1)}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}}{\sigma^2}\right)s7$$

$$+\left(\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma}-\frac{2\,\phi}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2\,(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s2+\Bigg($$

$$-\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma}-\frac{2\,\phi}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2\,(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{2\,\phi}{\sigma}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}-\frac{\phi\,(4\,\phi^2+2\,\phi)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)s5+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2\,(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{-\frac{2\,\phi}{\sigma}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}-\frac{\phi\,(4\,\phi^2+2\,\phi)}{\sigma}}{\sigma^2}\Bigg)s8$$

$$+\left(\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}+\frac{\phi^2+2\,\phi+1}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s3+\Bigg(-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}+\frac{\phi^2+2\,\phi+1}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}+\frac{4\,\phi^2+2\,\phi}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)s6$$

$$+\left(-\frac{\left(-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}+\frac{\phi^2+2\,\phi+1}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}+\frac{4\,\phi^2+2\,\phi}{\sigma}}{\sigma^2}\right)s9 \qquad (2.49)$$

แทนค่าลงในสมการ 2.33 จะได้

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_2}=$$

$$+\left(\frac{\phi^2}{\sigma^3}+\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma}-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{2\,(\phi^2+1)}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s4$$

$$+\left(-\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma}-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\frac{2\,(\phi^2+1)}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}}{\sigma^2}\right)s7$$

$$+\left(\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma}-\frac{2\,\phi}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2\,(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s2+\Bigg($$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma}-\frac{2\,\phi}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2\,(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}\\
&-\frac{\left(-\frac{2\,\phi}{\sigma}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}-\frac{\phi\,(4\,\phi^2+2\,\phi)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s5+\Bigg(\\
&-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2\,(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma}-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\\
&+\frac{-\frac{2\,\phi}{\sigma}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}-\frac{\phi\,(4\,\phi^2+2\,\phi)}{\sigma}}{\sigma^2}\Bigg)\,s8\\
&+\Bigg(\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}+\frac{\phi^2+2\,\phi+1}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s3+\Bigg(-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma}+\frac{2}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\\
&+\frac{\left(-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}+\frac{\phi^2+2\,\phi+1}{\sigma}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}+\frac{4\,\phi^2+2\,\phi}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s6\\
&+\Bigg(-\frac{\left(-\frac{2\,\phi^2}{\sigma}+\frac{\phi^2+2\,\phi+1}{\sigma}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^2+2\,\phi+1)}{\sigma}+\frac{4\,\phi^2+2\,\phi}{\sigma}}{\sigma^2}\Bigg)\,s9
\end{aligned}
\qquad (2.50)
$$

ลดรูปได้เป็น

$$
\begin{aligned}
R1 :=&-(2\,\phi\,s1-2\,s4\,\phi^2-s4+2\,\phi\,s4+2\,s7\,\phi-2\,s7-2\,s2\,\phi^2-s2+2\,\phi\,s2+2\,\phi\,s5\\
&-s8+2\,s3\,\phi-2\,s3-s6)\,/\,\sigma^3
\end{aligned}
\qquad (2.51)
$$

กำหนดให้ สมการ 2.51 = 0 ได้ค่าประมาณของ ϕ เป็น

$$
\begin{aligned}
R0 :=\phi=&(2\,s5+2\,s4+2\,s7+2\,s1+2\,s3+2\,s2+2\,(-2\,s4\,s6-2\,s4\,s3-2\,s4\,s8\\
&-2\,s4\,s2-2\,s4\,s7+2\,s5\,s3+2\,s5\,s1+2\,s5\,s2+2\,s5\,s7+2\,s5\,s4-2\,s2\,s6-2\,s2\,s8\\
&-2\,s3\,s2+2\,s1\,s3+2\,s1\,s2+2\,s1\,s7+2\,s1\,s4+2\,s7\,s3-2\,s7\,s2+s5^2+s1^2-s4^2\\
&+s7^2+s3^2-s2^2)^{(1/2)})/(2\,(2\,s2+2\,s4))
\end{aligned}
\qquad (2.52)
$$

ส่วนวิธีการแก้สมการเพื่อหาค่าประมาณในกรณีของจำนวนซ้ำเป็น 6 และ 12 ก็สามารถหาได้ดังวิธีเดียวกันนี้

และจะได้ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับ $\boldsymbol{\lambda}$ เป็น

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left(\mathbf{X}'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีลักษณะเป็นการวิจัยเชิงทดลอง เพื่อต้องการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว ด้วยการประมาณวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ วิธีประมาณค่าแบบสองขั้นและวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เพื่อศึกษาว่าวิธีการประมาณค่าวิธีใดจะให้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าเมื่อข้อมูลที่นำมาใช้วิเคราะห์นั้นเป็นข้อมูลระยะยาว มีการวัดค่าซ้ำจากหน่วยทดลองเดิม โดยแบ่งเป็นกรณีความคลาดเคลื่อนของข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน และกรณีความคลาดเคลื่อนของข้อมูลมีอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งได้กล่าวถึงวิธีการประมาณแล้วในบทที่ 2 ดังนั้น ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีดำเนินการวิจัยตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1. แผนการดำเนินงาน
2. การผลิตเลขสุ่มจากรูปแบบการแจกแจง
3. การสร้างข้อมูลที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง
4. การคำนวณค่าประมาณของพารามิเตอร์
5. การเปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์
6. ขั้นตอนการดำเนินงานของโปรแกรม

3.1 แผนการดำเนินงาน

ในการวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว ด้วยโปรแกรมภาษา S-plus 2000 และประมวลผลด้วยเครื่อง pc โดยได้กำหนดสถานการณ์ในการวิจัยดังต่อไปนี้

3.1.1 ทำการทดลองกับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ โดยที่แต่ละปัจจัยเป็นปัจจัยที่มีอิทธิพลคงที่ มีขนาด 3x3 , 4x4 และ 5x5 ตามลำดับ

3.1.2 กำหนดจำนวนครั้งของการเก็บข้อมูลซ้ำเป็น 3 , 6 และ 12 ครั้ง

3.1.3 กำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตถดถอยลำดับที่เป็น 0.01 , 0.05 , 0.1, 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.7 , 0.8 , 0.9 , 0.95 และ 0.99

3.1.4 กำหนดค่าความคลาดเคลื่อน σ_e^2 เป็น 1 , 25 , 100

3.2 การผลิตเลขสุ่มจากรูปแบบการแจกแจง

การวิจัยครั้งนี้ได้ทำการสร้างข้อมูลจากการแจกแจงของประชากรแบบปกติ ด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation) ซึ่งเป็นเทคนิคที่ใช้สำหับแก้ปัญหาในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้เลขสุ่ม (Random Number) มาช่วยหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการศึกษา มีขั้นตอนที่สำคัญ 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การสร้างเลขสุ่ม (generate random number) การสร้างเลขสุ่มจะกำหนดให้มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง [0,1] และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน จากนั้นนำเลขสุ่มนี้ไปสร้างตัวแปรตามลักษณะการแจกแจงที่ต้องการในปัญหาที่ศึกษา เพื่อเป็นข้อมูลของปัญหานั้นๆ

ขั้นตอนที่ 2 การประยุกต์ปัญหาที่ต้องการศึกษาโดยใช้เลขสุ่ม ขั้นตอนนี้ขึ้นอยู่กับปัญหาที่ศึกษา ซึ่งเป็นขั้นตอนที่นำเลขสุ่มมาใช้ในการหาค่าต่าง ๆ ตามปัญหาที่ต้องการตามสูตรการคำนวณในปัญหาที่ศึกษา บางปัญหาอาจใช้เลขสุ่มได้โดยตรง ในขณะที่บางปัญหาอาจต้องใช้ขั้นตอนอื่นอีกหลายขั้นตอน โดยที่มีการใช้เลขสุ่มในบางขั้นตอนเท่านั้น

ขั้นตอนที่ 3 การทดลองกระทำ เมื่อประยุกต์ปัญหาที่ต้องการศึกษาโดยใช้เลขสุ่มแล้ว ขั้นต่อไปคือการทดลอง โดยใช้กระบวนการของเลขสุ่ม (Random Process) มากระทำวิธีการนั้นซ้ำ ๆ กัน (replication) จำนวนหลาย ๆ ครั้ง โดยถือว่าการทำซ้ำ ๆ กันนั้นเป็นวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลให้มีจำนวนมากเพื่อลดความไม่แน่นอนของคำตอบ

เลขสุ่มที่ผลิตได้จากเทคนิคมอนติคาร์โล จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. ตัวเลขที่ได้มีการกระจายของความน่าจะเป็นแบบสม่ำเสมอและเป็นอิสระซึ่งกันและกัน
2. อนุกรมของตัวเลขที่ได้สามารถสร้างซ้ำเติมได้ (reproducible)
3. อนุกรมของตัวเลขไม่ซ้ำเดิมในช่วงที่ต้องการใช้ตัวเลขแบบสุ่ม
4. ใช้ระยะเวลาสั้น ๆ ในการสร้างตัวเลขแบบสุ่ม
5. ใช้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์น้อย

จากหลักการของเทคนิคมอนติคาร์โล จะเห็นว่าจากใช้เลขสุ่มเพื่อเป็นพื้นฐานในการหาคำตอบของปัญหา เป็นวิธีการที่จะนำไปสู่แนวคิดในทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณโดยเฉพาะ ทฤษฎีความน่าจะเป็นที่จะนำไปสู่การอ้างอิงผลสรุปในสถานการณ์ของข้อมูลจริง เพราะไม่มีผลกระทบจากเรื่องอื่น ๆ เข้ามาเกี่ยวข้องในการทดลองเมื่อทำซ้ำ ๆ กันเป็นจำนวนมากแล้ว

ความคลาดเคลื่อนอย่างสุ่มที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์หาค่าต่าง ๆ ในแต่ละครั้งจะหมดไป (Counter babiance)

3.3 การสร้างข้อมูลที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง

การสร้างข้อมูลกรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และข้อมูลจากการวัดซ้ำแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกันมีขั้นตอนดังนี้

1. สร้างค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงแบบปกติ
2. สร้างค่าตัวแปรตาม Y ตามรูปแบบดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \alpha_k + (\tau\alpha)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad (3.1)$$

การสร้างข้อมูลกรณีข้อมูลมีการวัดซ้ำ และข้อมูลจากการวัดซ้ำแต่ละครั้งไม่เป็นอิสระต่อกันมีขั้นตอนดังนี้

1. สร้างค่าความคลาดเคลื่อนตามรูปแบบที่กำหนด ซึ่งมีตัวแบบดังนี้

$$\varepsilon_{ijk} = \phi\varepsilon_{ij(k-1)} + u_{ijk} \quad k = 1, 2 \ldots, p \quad (3.2)$$

โดยมีค่าของพารามิเตอร์ในตัวแบบ 6 ระดับ คือ 0.1 , 0.3 , 0.5 , 0.7 , 0.9 และ 0.99 ซึ่ง u_{ijk} เป็นค่าความคลาดเคลื่อนสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น 5

2. สร้างค่าตัวแปรตาม Y ตามรูปแบบดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \alpha_k + (\tau\alpha)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad (3.3)$$

3.4 การคำนวณค่าประมาณของพารามิเตอร์

เมื่อสร้างข้อมูล Y_{ijk} ให้เป็นไปตามข้อกำหนดข้างต้นได้แล้ว ขั้นต่อไปคือการนำข้อมูลที่ได้ไปประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ไว้ 2 วิธีคือ

3.4.1 วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ

ในการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดมีสูตรการคำนวณเพื่อหาตัวประมาณดังนี้

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{3.4}$$

จากนั้นจึงนำค่าประมาณที่ได้แทนลงในสมการถดถอย

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\lambda}} \tag{3.5}$$

หาค่าความคลาดเคลื่อนของเนื่องมาจากการประมาณค่าโดย

$$\varepsilon_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} \tag{3.6}$$

หาตัวประมาณของ ϕ จาก

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{k=2}^{n} \hat{\varepsilon}_{ijk}\hat{\varepsilon}_{ijk-1}}{\sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_{ijk}^{2}} \tag{3.7}$$

และหาตัวประมาณของ σ_e^2 จาก

$$\hat{\sigma}_e{}^2 = \left(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right)/(n-k) \tag{3.8}$$

3.4.2 วิธีประมาณค่าแบบสองขั้น

วิธีการประมาณค่าวิธีนี้ต้องมีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดก่อน แล้วจึงนำค่าประมาณที่ได้นั้นมาใช้ในการประมาณค่าขั้นที่ 2 ต่อไป ซึ่งหลังจากได้ค่าประมาณ $\hat{\phi}$ จากวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญแล้ว นำค่าที่ได้ไปหา $\mathbf{V}_{\hat{\phi}}^{-1}$ จาก

$$\mathbf{V}_{\hat{\phi}}^{-1} = \frac{1}{1-\hat{\phi}^2}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{\phi} & 0 & 0 & \mathrm{K} & 0 & 0 \\ -\hat{\phi} & 1+\hat{\phi}^2 & -\hat{\phi} & 0 & \mathrm{K} & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\phi} & 1+\hat{\phi}^2 & -\hat{\phi} & \mathrm{K} & 0 & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{K} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{K} & -\hat{\phi} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

หลังจากนั้นเลือกตัวประมาณแบบสองขั้น $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{TS}$ ที่ทำให้สมการต่อไปนี้มีค่าต่ำสุด

$$\{\mathbf{y}-\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda})\}'\mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}^{-1}\{\mathbf{y}-\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda})\}=\frac{S_1(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi})}{1-\hat{\phi}^2} \tag{3.10}$$

เมื่อ

$$S_1(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi})=(1-\hat{\phi}^2)\{y_{ij1}-f(\mathbf{x}_{ij1};\boldsymbol{\lambda})\}^2+S_2(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi})$$
$$S_2(\boldsymbol{\lambda},\hat{\phi})=\sum_{k=2}^{p}\{y_{ijk}-\hat{\phi}y_{ijk-1}-f(\mathbf{x}_{ijk};\boldsymbol{\lambda})+\hat{\phi}f(\mathbf{x}_{ijk-1};\boldsymbol{\lambda})\}^2$$

หาตัวประมาณของ ϕ จาก

$$\hat{\phi}=\frac{\sum_{k=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{ijk}\hat{\varepsilon}_{ijk-1}}{\sum_{k=2}^{n-1}\hat{\varepsilon}_{ijk}^2} \tag{3.11}$$

จากนั้นจึงทำการประมาณค่าของ σ_e^2 จาก

$$\hat{\sigma}_e{}^2=(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}-\hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{X}'\mathbf{Y})/(n-k) \tag{3.12}$$

3.4.3 วิธีประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

มีสูตรการคำนวณหาค่า $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2)\equiv(\sigma_e^2,\phi)$ ดังนี้

$$\frac{\partial\log\mathbf{L}}{\partial\theta_1}=-\frac{N}{2}tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Omega})+\frac{N}{2}tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}) \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial\log\mathbf{L}}{\partial\theta_2}=-\frac{N}{2}tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Lambda})+\frac{N}{2}tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}) \tag{3.14}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Lambda}\equiv\theta_1(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}'+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}')$ เมื่อ $\boldsymbol{\Psi}=\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\theta_2$

และ $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}'$

หลังจากนั้นกำหนดให้สมการเป็นศูนย์ แล้วแก้สมการหาค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดได้ดังในภาคผนวก ข

และจะได้ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับ $\boldsymbol{\lambda}$ เป็น

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y} \qquad (3.13)$$

3.5 การเปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์

ในการวิจัยครั้งนี้จะทำการเปรียบเทียบการประมาณค่าเป็นสามส่วนคือ การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยและการประมาณค่าความแปรปรวน โดยการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบจะใช้การคำนวณหาระยะทางยุคลิด (เฉลี่ย) ในการเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ โดยการคำนวณหาระยะทางยุคคลิด (เฉลี่ย) ของตัวประมาณแสดงได้ดังนี้

$$\overline{Eu} = \frac{\sum_{n=1}^{r}\left\|\lambda-\hat{\lambda}\right\|}{r}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{r}\sqrt{\sum\left(\tau_i-\hat{\tau}_i\right)^2+\sum\left(\beta_j-\hat{\beta}_j\right)^2+\sum\left(\alpha_k-\hat{\alpha}_k\right)^2+\sum\left(\tau\alpha_{ik}-\widehat{\tau\alpha}_{ik}\right)^2}}{r} \qquad (3.14)$$

เกณฑ์ในการตัดสินใจก็คือ วิธีการใดให้ค่าระยะทางยุคลิด (เฉลี่ย) ต่ำกว่า วิธีการนั้นก็จะถือว่าเป็นวิธีการที่เหมาะสมสำหรับการค่าประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ

ในส่วนของการประมาณค่าความแปรปรวนและสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยนั้น จะพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square of Error) โดยถ้าวิธีการประมาณค่าแบบใดมีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่า ก็จะเป็นวิธีที่มีความเหมาะสม โดยมีสูตรในการคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ดังนี้

$$MSE\left(\hat{\phi}\right) = \frac{\sum_{n=1}^{r}\left(\phi - \hat{\phi}\right)^2}{r} \tag{3.15}$$

และ

$$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right) = \frac{\sum_{n=1}^{r}\left(\sigma_e^2 - \hat{\sigma}_e^2\right)^2}{r} \tag{3.16}$$

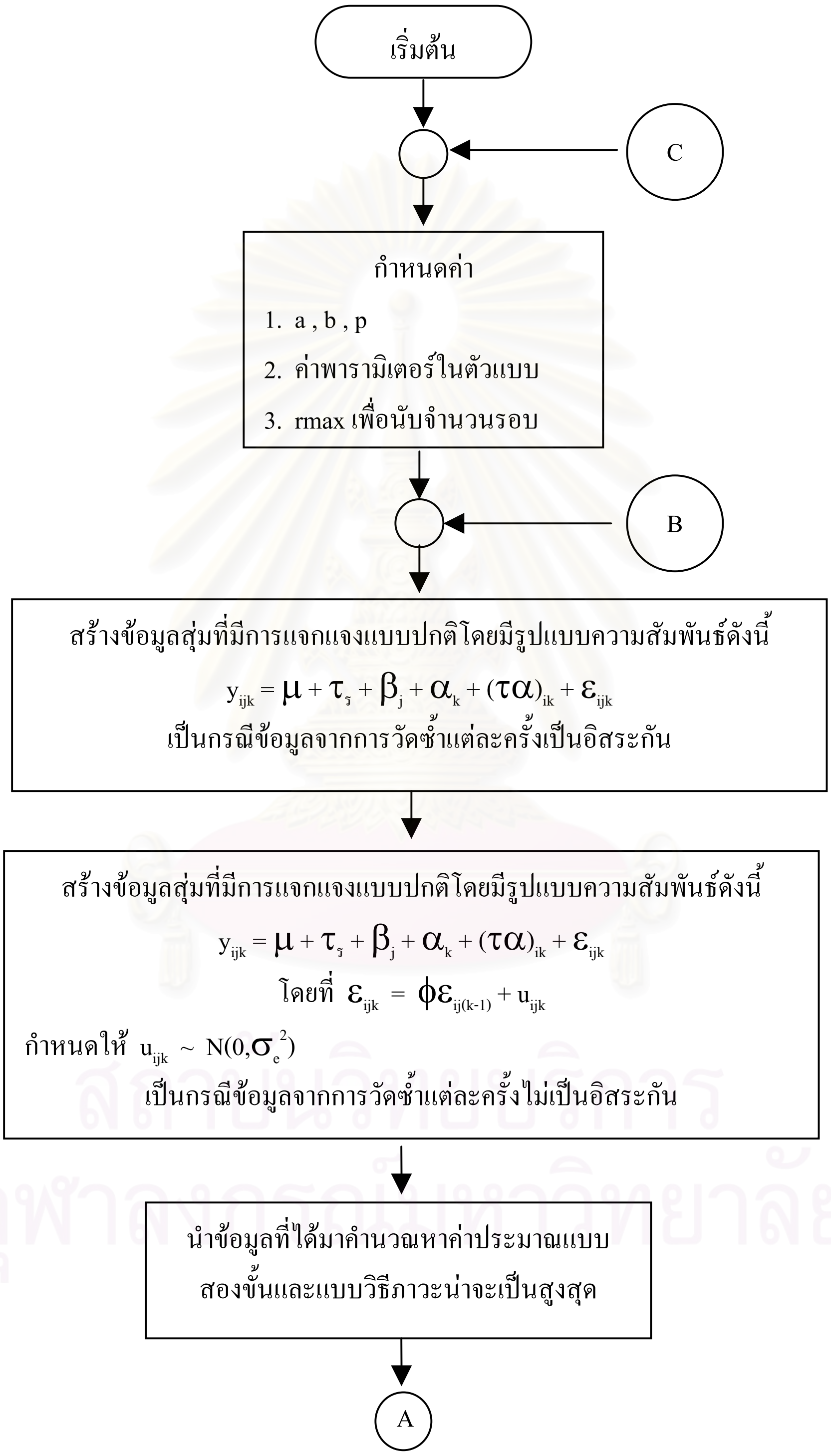
นอกจากนั้นเพื่อแสดงให้เห็นถึงความคลาดเคลื่อนในการประมาณ ที่อาจจะเกิดขึ้นจากการกำหนดตัวแบบจึงได้ทำการเปรียบเทียบค่าประมาณที่ได้จากวิธีการประมาณแบบสองขั้นและวิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเพื่อตรวจสอบการเบี่ยงเบนเมื่อ

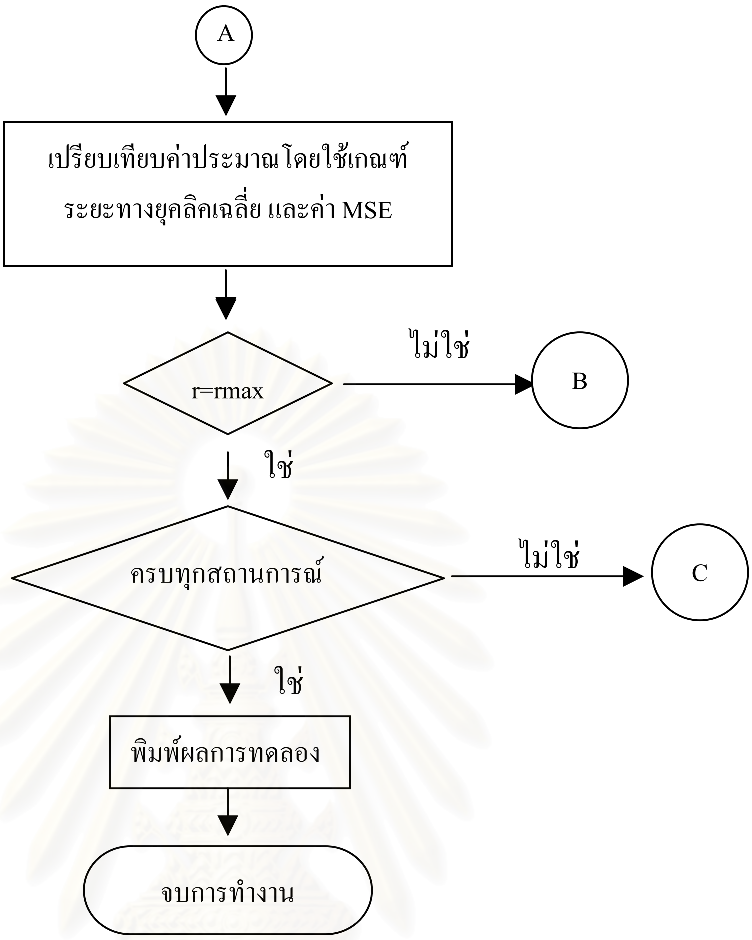
1. มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์เมื่อข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน
2. ไม่มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์ $(\phi = 0)$ เมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน

3.6 ขั้นตอนการดำเนินงานของโปรแกรม

จากแผนการดำเนินงานข้างต้นที่ได้กล่าวมาแล้ว สามารถเขียนเป็นแผนผังสรุปขั้นตอนการดำเนินงานได้ดังต่อไปนี้

แผนผังแสดงขั้นตอนการดำเนินงาน




A
เปรียบเทียบค่าประมาณโดยใช้เกณฑ์
ระยะทางยุคลิคเฉลี่ย และค่า MSE
r=rmax
ไม่ใช่
B
ใช่
ครบทุกสถานการณ์
ไม่ใช่
C
ใช่
พิมพ์ผลการทดลอง
จบการทำงาน

บทที่ 4
ผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุด วิธีประมาณค่าแบบสองขั้น และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์จะแยกออกเป็นสามส่วน คือ การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ การประมาณค่าความแปรปรวน และการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง โดยที่ผู้วิจัยได้ทำการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในการเปรียบเทียบการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ และใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยในการเปรียบเทียบการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน และค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยออกเป็น 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในกรณีความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

ส่วนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในกรณีความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่ 1

ผู้วิจัยได้นำเสนอตารางในรูปแบบตารางและกราฟ โดยใช้สัญลักษณ์แทนค่าต่าง ๆ ดังนี้

ϕ แทน สัมประสิทธิ์ในสมการอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

$\hat{\phi}$ แทน ค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ในสมการอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

σ_e^2 แทน ค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$\hat{\sigma}_e^2$ แทน ค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$MSE(\hat{\phi})$ แทน ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณของ ϕ

$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$ แทน ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณของ σ_e^2

Eu แทน ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ย

OLS แทน การประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ

TS แทน การประมาณค่าด้วยวิธีแบบสองขั้น

MLE แทน การประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็น

4.1 การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระกัน

ผู้วิจัยทำการศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว เมื่อแผนแบบการทดลองมีขนาด 3x3, 4x4 และ 5x5 มีการเก็บข้อมูลซ้ำจำนวน 3, 6 และ 12 ครั้ง ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเป็น 1, 25 และ 100 โดยในกรณีที่ค่าความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กันนี้ จะทำการเปรียบเทียบค่าประมาณโดยใช้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย และค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย รวมทั้งมีการเปรียบเทียบระหว่างการหาค่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ เมื่อมีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในสมการอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งและเมื่อไม่มีการหาค่าประมาณดังกล่าวอีกด้วย แต่เนื่องจากในวิธีการกำลังสองต่ำที่สุดแบบสามัญ การคำนวณหาค่า ϕ ไม่มีผลต่อการประมาณค่าของพารามิเตอร์ตัวอื่น ๆ จึงไม่จำเป็นต้องนำเสนอผลในที่นี้ โดยในตารางที่ 4.1.1 – 4.1.3 เป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์ในตัวแบบ 3x3 ที่มีจำนวนซ้ำเป็น 3, 6 และ 12 ครั้ง ตามลำดับ ตารางที่ 4.1.4 – 4.1.6 เป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์ในตัวแบบ 4x4 ที่มีจำนวนซ้ำเป็น 3, 6 และ 12 ครั้ง ตามลำดับ และตารางที่ 4.1.7 – 4.1.9 เป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์ในตัวแบบ 5x5 ที่มีจำนวนซ้ำเป็น 3, 6 และ 12 ครั้ง ตามลำดับ

จากตาราง 4.1.1 – 4.1.9 พบว่าในกรณีที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กันนั้น เมื่อพิจารณาเกณฑ์ในการเปรียบเทียบค่าประมาณทั้งสามค่า ค่าประมาณที่ได้จากวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญให้ค่าประมาณที่มีระยะทางยุคลิดเฉลี่ยและค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดและเท่ากับวิธีแบบสองขั้นและวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ไม่มีการประมาณค่า ϕ ในทุกกรณี

เมื่อพิจารณาเฉพาะค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยจากการประมาณแต่ละกรณี พบว่า ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยนี้จะมีค่าลดลงเมื่อจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูลในแต่ละตัวแบบเพิ่มมากขึ้น รวมทั้งมีค่าลดลงเมื่อขนาดของตัวแบบใหญ่ขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่า ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยนี้มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความแปรปรวนของข้อมูลมากขึ้น

เมื่อพิจารณาเฉพาะค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณความแปรปรวนพบว่า ที่ระดับความแปรปรวนหนึ่ง ๆ ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะแปรผกผันกับจำนวนซ้ำและขนาดของตัวแบบ นั่นคือ เมื่อจำนวนซ้ำมากขึ้นหรือตัวแบบมีขนาดใหญ่ขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณความแปรปรวนจะลดลง

ส่วนการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยนั้น วิธีการประมาณแบบกำลังสองแบบต่ำสุดให้ค่าประมาณที่ดีที่สุด รองลงมาคือ วิธีการประมาณแบบสองขั้นและวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดตามลำดับ

นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบระหว่างการประมาณค่าที่มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ϕ และไม่มีการประมาณค่า การประมาณค่าที่มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ϕ จะให้ค่าที่มีความคลาดเคลื่อนมากกว่าในทุกกรณี

ตารางที่ 4.1.1 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2117	1.1952	1.2284
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2117	-	1.2284
		ประมาณค่า ϕ	0.2400	1.3600	1.4000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2117	-	1.2284
		ประมาณค่า ϕ	0.2980	1.6975	1.7363
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2796	2.0377	4.4779
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2796	-	4.4779
		ประมาณค่า ϕ	0.2900	2.1658	5.1000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2796	-	4.4779
		ประมาณค่า ϕ	0.3422	2.2240	6.3493
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3650	2.0211	20.1899
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.3650	-	20.1899
		ประมาณค่า ϕ	0.3795	2.3000	23.0000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.3650	-	20.1899
		ประมาณค่า ϕ	0.4033	2.8637	28.6108

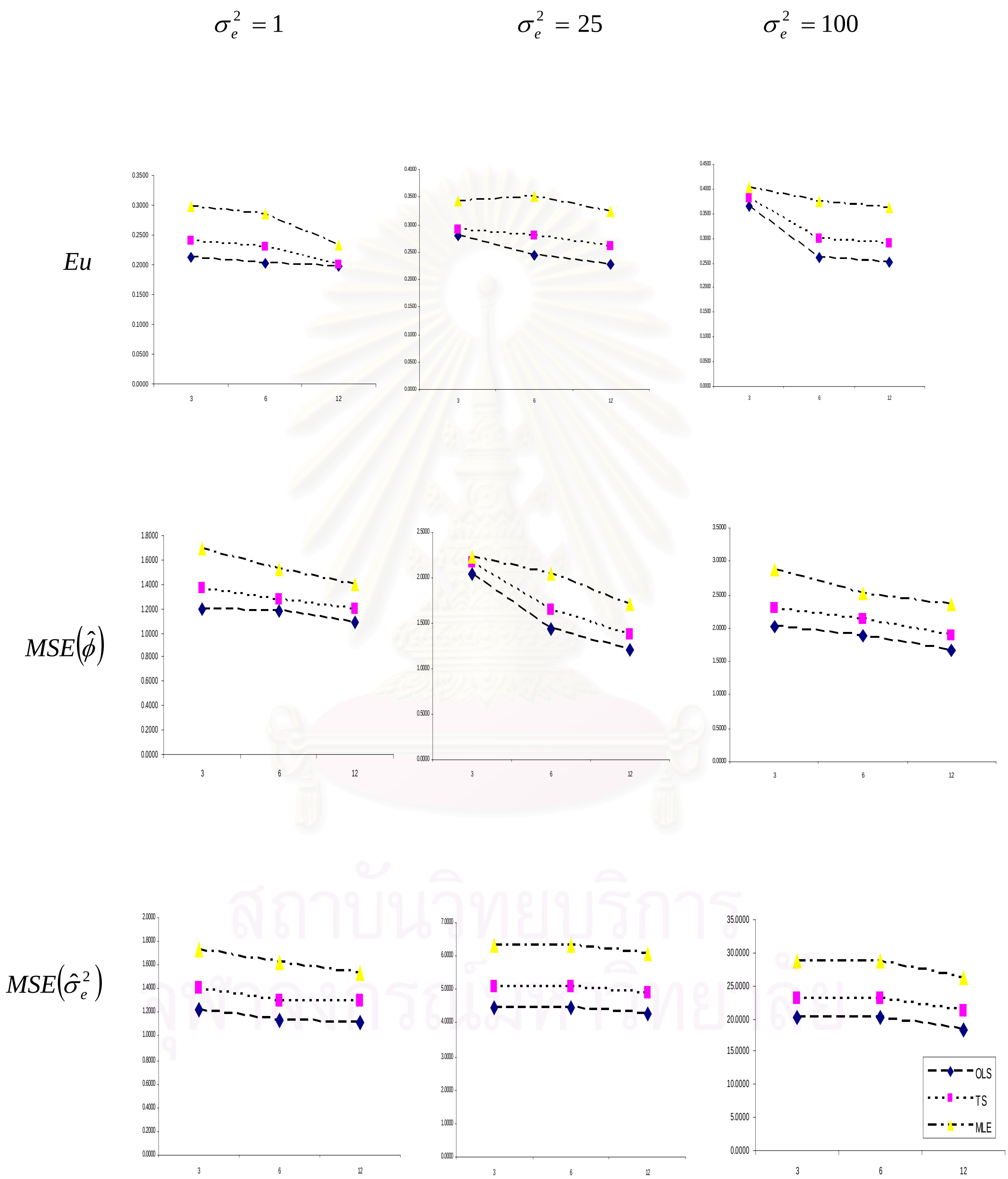
ตารางที่ 4.1.2 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE\left(\hat{\phi}\right)$	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
$\sigma_e^2=1$	OLS	_	0.2034	1.1859	1.1413
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2034	-	1.1413
		ประมาณค่า ϕ	0.2300	1.2654	1.3000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2034	-	1.1413
		ประมาณค่า ϕ	0.2851	1.5270	1.6197
$\sigma_e^2=25$	OLS	_	0.2449	1.4401	4.4779
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2449	-	4.4779
		ประมาณค่า ϕ	0.2800	1.6400	5.1000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2449	-	4.4779
		ประมาณค่า ϕ	0.3499	2.0344	6.3493
$\sigma_e^2=100$	OLS	_	0.2615	1.8996	20.1899
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2615	-	20.1899
		ประมาณค่า ϕ	0.3000	2.1451	23.0000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2615	-	20.1899
		ประมาณค่า ϕ	0.3758	2.5214	28.6108

ตารางที่ 4.1.3 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.1977	1.0790	1.1194
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1977	-	1.1194
		ประมาณค่า ϕ	0.2000	1.2000	1.3000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1977	-	1.1194
		ประมาณค่า ϕ	0.2322	1.3931	1.5275
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2283	1.2035	4.3036
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2283	-	4.3036
		ประมาณค่า ϕ	0.2600	1.3700	4.9000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2283	-	4.3036
		ประมาณค่า ϕ	0.3239	1.7104	6.0902
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.2532	1.6683	18.4344
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2532	-	18.4344
		ประมาณค่า ϕ	0.2900	1.9000	21.0000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2532	-	18.4344
		ประมาณค่า ϕ	0.3628	2.3583	26.1229

รูปที่ 4.1.1 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) เมื่อความคลาดเคลื่อนไม่มีสหสัมพันธ์กัน และจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูลเปลี่ยนแปลง



ตารางที่ 4.1.4 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu		
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2241	1.7638	0.9670
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2241	-	0.9670
		ประมาณค่า ϕ	0.2553	2.0100	1.1000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2241	-	0.9670
		ประมาณค่า ϕ	0.3181	2.5009	1.3735
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2565	1.9263	4.3990
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2565	-	4.3990
		ประมาณค่า ϕ	0.2922	2.1916	5.0100
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2565	-	4.3990
		ประมาณค่า ϕ	0.3641	2.7233	6.2327
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.2905	2.0211	22.8251
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2905	-	22.8251
		ประมาณค่า ϕ	0.3300	2.3000	26.0000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2905	-	22.8251
		ประมาณค่า ϕ	0.4146	2.8637	32.3427

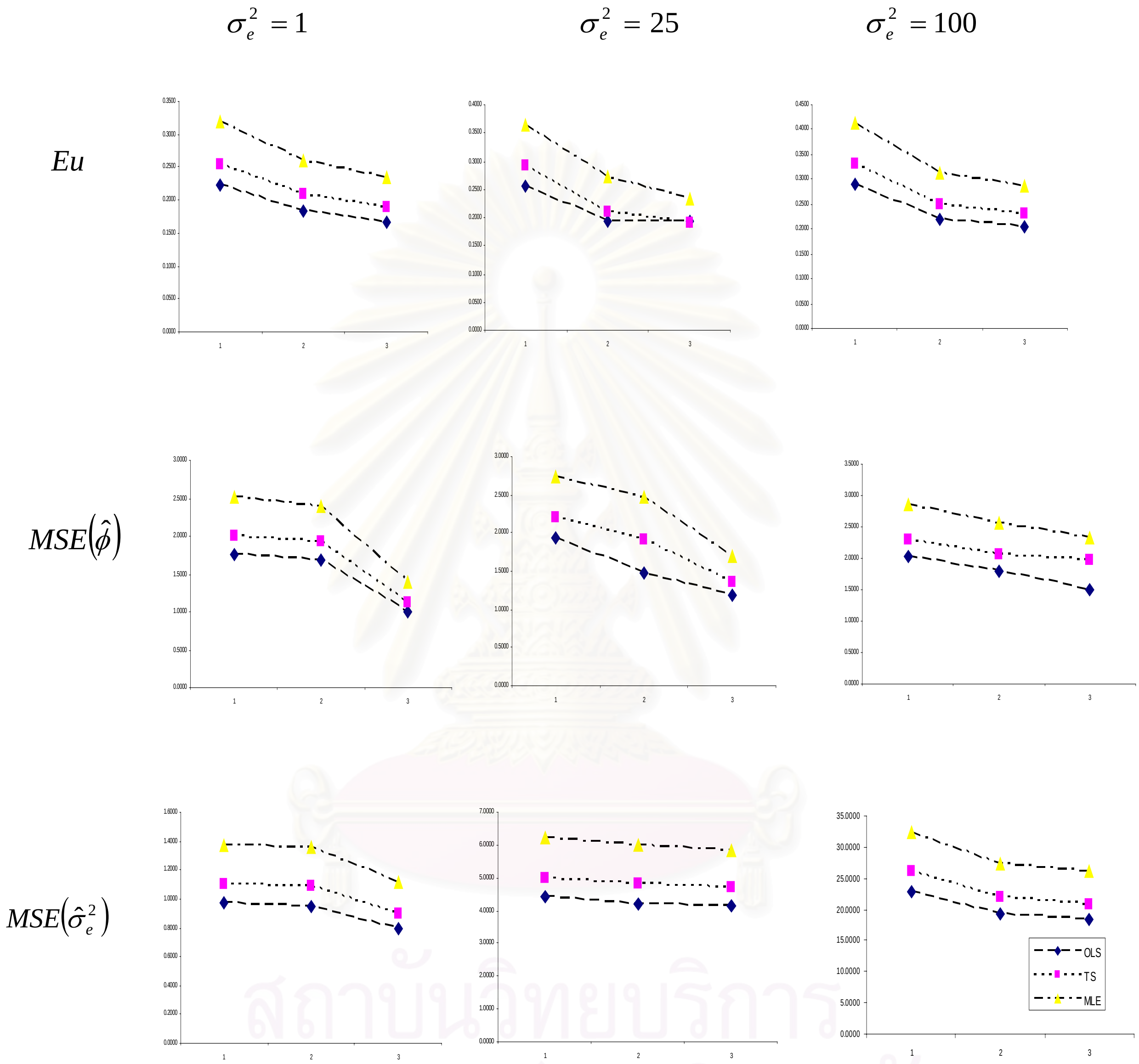
ตารางที่ 4.1.5 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.1826	1.6831	0.9535
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1826	-	0.9535
		ประมาณค่า ϕ	0.2100	1.9149	1.0872
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1826	-	0.9535
		ประมาณค่า ϕ	0.2592	2.3795	1.3557
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.1951	1.4871	4.2226
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1951	-	4.2226
		ประมาณค่า ϕ	0.2200	1.9060	4.8105
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1951	-	4.2226
		ประมาณค่า ϕ	0.2721	2.4630	5.9809
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.2199	1.8011	19.3142
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2199	-	19.3142
		ประมาณค่า ϕ	0.2500	2.0500	22.0000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2199	-	19.3142
		ประมาณค่า ϕ	0.3110	2.5527	27.3669

ตารางที่ 4.1.6 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$
$\sigma_e^2=1$	OLS	_	0.1660	0.9919	0.7885
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1660	-	0.7885
		ประมาณค่า ϕ	0.1900	1.1300	0.9000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1660	-	0.7885
		ประมาณค่า ϕ	0.2332	1.3994	1.1144
$\sigma_e^2=25$	OLS	_	0.1951	1.1952	4.1251
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1951	-	4.1251
		ประมาณค่า ϕ	0.2200	1.3600	4.7000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1951	-	4.1251
		ประมาณค่า ϕ	0.2721	1.6975	5.8440
$\sigma_e^2=100$	OLS	_	0.2034	1.5020	18.3505
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2034	-	18.3505
		ประมาณค่า ϕ	0.2300	1.9765	20.9038
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2034	-	18.3505
		ประมาณค่า ϕ	0.2851	2.3310	25.9968

รูปที่ 4.1.2 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) เมื่อความคลาดเคลื่อนไม่มีสหสัมพันธ์กัน และจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูลเปลี่ยนแปลง



ตารางที่ 4.1.7 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2785	1.5921	1.0636
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2785	-	1.0636
		ประมาณค่า ϕ	0.3190	1.9690	1.2100
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2785	-	1.0636
		ประมาณค่า ϕ	0.3991	2.5086	1.5109
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2876	1.6134	4.1541
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2876	-	4.1541
		ประมาณค่า ϕ	0.3300	1.9800	4.7300
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2876	-	4.1541
		ประมาณค่า ϕ	0.4134	2.5138	5.8867
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3195	2.0792	18.8671
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.3195	-	18.8671
		ประมาณค่า ϕ	0.3630	2.3700	21.4938
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.3195	-	18.8671
		ประมาณค่า ϕ	0.4561	2.9544	26.7395

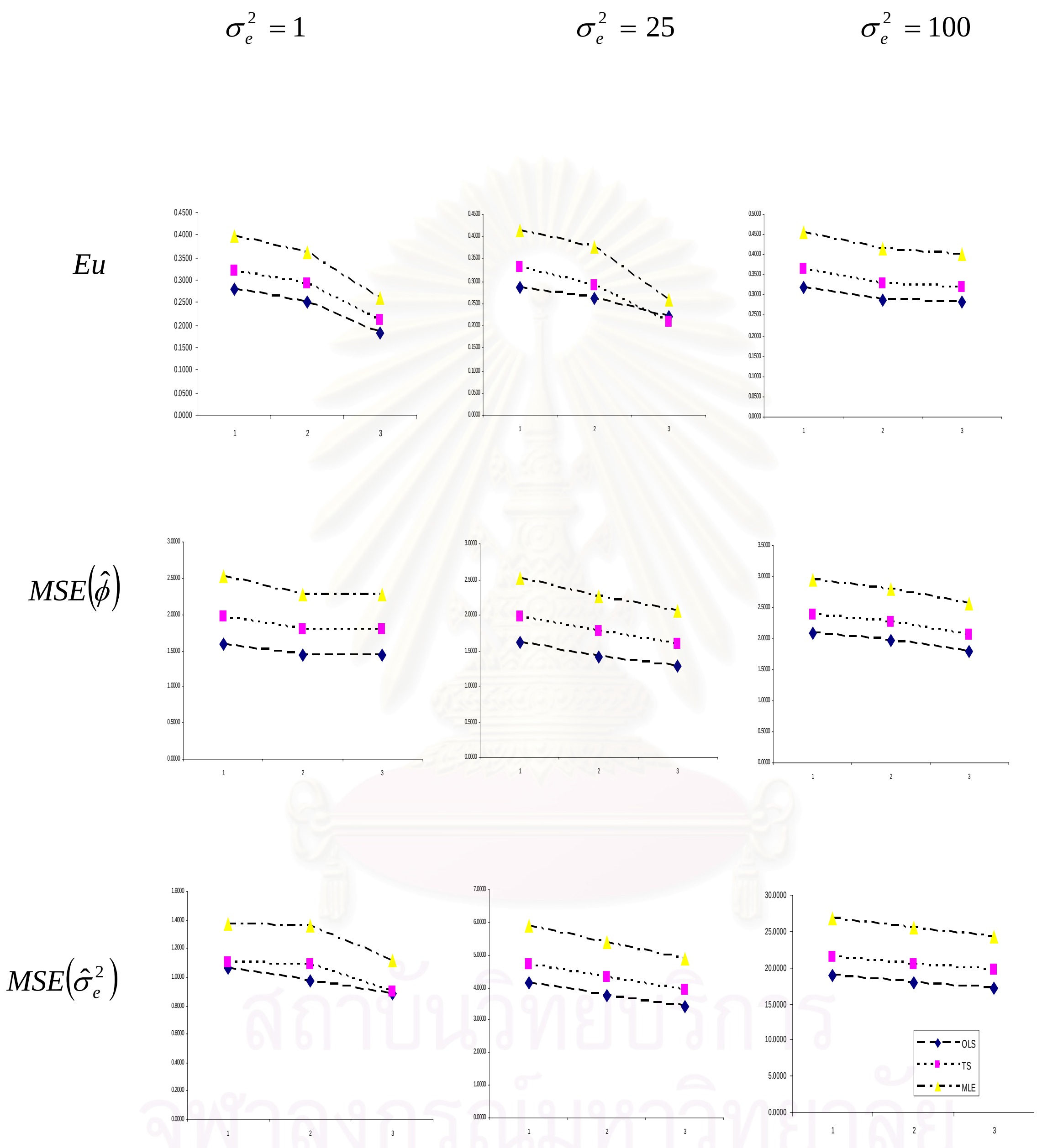
ตารางที่ 4.1.8 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2532	1.4474	0.9670
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2532	-	0.9670
		ประมาณค่า ϕ	0.2900	1.7900	1.1000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2532	-	0.9670
		ประมาณค่า ϕ	0.3628	2.2806	1.3735
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2615	1.4095	3.7765
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2615	-	3.7765
		ประมาณค่า ϕ	0.3000	1.7600	4.3000
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2615	-	3.7765
		ประมาณค่า ϕ	0.3758	2.2520	5.3516
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.2905	1.9812	18.0250
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2905	-	18.0250
		ประมาณค่า ϕ	0.3300	2.2550	20.5345
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2905	-	18.0250
		ประมาณค่า ϕ	0.4146	2.8079	25.5460

ตารางที่ 4.1.9 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ		
			Eu	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.1826	1.4391	0.8789
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1826	-	0.8789
		ประมาณค่า ϕ	0.2100	1.7800	0.9998
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1826	-	0.8789
		ประมาณค่า ϕ	0.2592	2.2676	1.2485
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2200	1.2814	3.4327
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2200	-	3.4327
		ประมาณค่า ϕ	0.2500	1.6000	3.9085
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2200	-	3.4327
		ประมาณค่า ϕ	0.3110	2.0473	4.8643
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.2822	1.8011	17.1520
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2822	-	17.1520
		ประมาณค่า ϕ	0.3200	2.0500	19.5400
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2822	-	17.1520
		ประมาณค่า ϕ	0.4017	2.5527	24.3088

รูปที่ 4.1.3 การเปรียบเทียบค่าประมาณในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) เมื่อความคลาดเคลื่อนไม่มีสหสัมพันธ์กัน และจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูลเปลี่ยนแปลง



4.2 การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

ผู้วิจัยทำการศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว เมื่อแผนแบบการทดลองมีขนาด 3x3, 4x4 และ 5x5 มีการเก็บข้อมูลซ้ำจำนวน 3, 6 และ 12 ครั้ง ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเป็น 1, 25 และ 100 โดยในกรณีที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งนี้ จะทำการเปรียบเทียบค่าประมาณโดยใช้ระยะทางยุคลิกเฉลี่ย และค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย รวมทั้งมีการเปรียบเทียบระหว่างการหาค่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ เมื่อมีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในสมการอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งและเมื่อไม่มีการหาค่าประมาณดังกล่าวอีกด้วย แต่เนื่องจากในวิธีการกำลังสองต่ำที่สุดแบบสามัญ การคำนวณหาค่า ϕ ไม่มีผลต่อการประมาณค่าของพารามิเตอร์ตัวอื่น ๆ จึงไม่จำเป็นต้องนำเสนอผลในที่นี้ โดยในตารางที่ 4.2.1 – 4.2.9 เป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ในตัวแบบโดยใช้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในตัวแบบ 3x3, 4x4 และ 5x5 ที่มีจำนวนซ้ำเป็น 3, 6 และ 12 ครั้ง ตามลำดับ ตารางที่ 4.2.10 – 4.2.18 เป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง โดยใช้เกณฑ์ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองในตัวแบบ 3x3, 4x4 และ 5x5 ที่มีจำนวนซ้ำเป็น 3, 6 และ 12 ครั้ง ตามลำดับ แต่เนื่องจากในกรณีที่ไม่มีการหาค่าประมาณของ ϕ จะไม่สามารถหาค่า MSE ของตัวประมาณได้ ดังนั้นในตารางจึงนำเสนอผลเฉพาะในกรณีที่มีการประมาณค่า ϕ เท่านั้น และตารางที่ 4.2.19 – 4.2.27 เป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณของความแปรปรวนโดยใช้เกณฑ์ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองในตัวแบบ 3x3, 4x4 และ 5x5 ที่มีจำนวนซ้ำเป็น 3, 6 และ 12 ครั้ง ตามลำดับ ซึ่งสรุปรายละเอียดในการนำเสนอตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 4.2 รายละเอียดตารางแสดงการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

ตารางที่	ตัวแบบ	จำนวนซ้ำ	เปรียบเทียบค่า
4.2.1	3x3	3	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.2	3x3	6	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.3	3x3	12	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.4	4x4	3	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.5	4x4	6	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.6	4x4	12	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.7	5x5	3	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.8	5x5	6	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.9	5x5	12	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
4.2.10	3x3	3	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.11	3x3	6	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.12	3x3	12	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.13	4x4	3	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.14	4x4	6	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.15	4x4	12	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.16	5x5	3	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.17	5x5	6	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.18	5x5	12	$MSE(\hat{\phi})$
4.2.19	3x3	3	$MSE(\hat{\sigma}_e^2)$

ตารางที่ 4.2 รายละเอียดตารางแสดงการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง(ต่อ)

ตารางที่	ตัวแบบ	จำนวนซ้ำ	เปรียบเทียบค่า
4.2.20	3x3	6	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
4.2.21	3x3	12	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
4.2.22	4x4	3	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
4.2.23	4x4	6	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
4.2.24	4x4	12	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
4.2.25	5x5	3	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
4.2.26	5x5	6	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$
4.2.27	5x5	12	$MSE\left(\hat{\sigma}_e^2\right)$

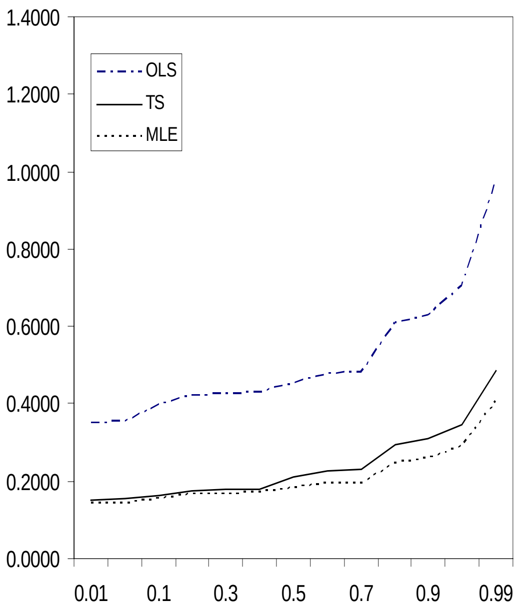
สำหรับผลการวิจัยในกรณีที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันนี้ จากตาราง 4.2.1 – 4.2.27 พบว่าในกรณีที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งนั้น การประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ที่มีการประมาณค่า ϕ ให้ค่าประมาณที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดในทุกกรณี รองลงมาคือวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น ที่มีการประมาณค่า ϕ และวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ เป็นวิธีการประมาณที่มีความคลาดเคลื่อนมากที่สุด โดยจะสังเกตเห็นว่าค่าที่ประมาณทุกตัวที่ได้จะมีค่าความคลาดเคลื่อนมากขึ้นตามลำดับเมื่อค่า ϕ มากขึ้นหรือความแปรปรวนสูงขึ้น แต่ค่าประมาณจะมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยลงเมื่อจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูลหรือขนาดของตัวแบบมากขึ้น และพบว่าค่าประมาณของวิธีกำลังแบบสองขั้น และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะมีค่าใกล้เคียงกันในช่วง ϕ อยู่ระหว่าง 0.01 – 0.4 หลังจากนั้นค่าประมาณของจะมีความแตกต่างกันมากขึ้นเรื่อย ๆ

ส่วนการเปรียบเทียบระหว่างวิธีการประมาณค่าที่มีการประมาณค่า ϕ และไม่มีการประมาณค่า ϕ พบว่า การประมาณค่าที่ไม่การประมาณค่า ϕ จะมีความคลาดเคลื่อนมากกว่าในทุกกรณี

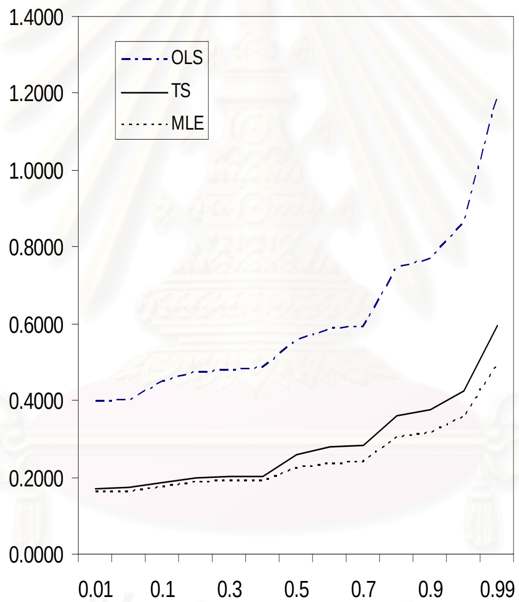
ตารางที่ 4.2.1 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.3520	0.3555	0.3978	0.4212	0.4253	0.4293	0.4535	0.4781	0.4825	0.6068	0.6291	0.7026	0.9730
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1653	0.1669	0.1863	0.1971	0.1990	0.2009	0.2573	0.2734	0.2784	0.3518	0.3677	0.4195	0.5813
		ประมาณค่า ϕ	0.1522	0.1537	0.1649	0.1763	0.1780	0.1797	0.2125	0.2279	0.2320	0.2931	0.3084	0.3476	0.4844
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1617	0.1633	0.1746	0.1861	0.1879	0.1897	0.2016	0.2136	0.2156	0.2777	0.2888	0.3203	0.4451
		ประมาณค่า ϕ	0.1427	0.1441	0.1552	0.1665	0.1681	0.1697	0.1814	0.1933	0.1951	0.2469	0.2578	0.2893	0.4037
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3960	0.4006	0.4483	0.4747	0.4793	0.4838	0.5550	0.5851	0.5905	0.7426	0.7699	0.8598	1.1908
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1860	0.1881	0.2100	0.2221	0.2243	0.2264	0.3149	0.3346	0.3407	0.4305	0.4500	0.5134	0.7114
		ประมาณค่า ϕ	0.1712	0.1732	0.1859	0.1987	0.2006	0.2025	0.2601	0.2789	0.2839	0.3587	0.3774	0.4254	0.5929
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1819	0.1841	0.1968	0.2098	0.2118	0.2138	0.2467	0.2614	0.2638	0.3399	0.3534	0.3920	0.5447
		ประมาณค่า ϕ	0.1605	0.1624	0.1749	0.1877	0.1895	0.1913	0.2220	0.2365	0.2387	0.3021	0.3155	0.3541	0.4940
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.4455	0.4515	0.5052	0.5350	0.5484	0.5776	0.6792	0.7160	0.7227	0.9088	0.9422	1.0523	1.2819
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2092	0.2120	0.2367	0.2503	0.2527	0.2596	0.3853	0.4095	0.4260	0.5268	0.5507	0.6283	0.8706
		ประมาณค่า ϕ	0.1926	0.1952	0.2095	0.2240	0.2261	0.2283	0.3183	0.3413	0.3475	0.4390	0.4618	0.5206	0.7255
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2047	0.2074	0.2218	0.2364	0.2493	0.2577	0.3019	0.3199	0.3229	0.4159	0.4325	0.4797	0.6666
		ประมาณค่า ϕ	0.1806	0.1830	0.1972	0.2115	0.2135	0.2156	0.2717	0.2895	0.2921	0.3697	0.3862	0.4333	0.6046

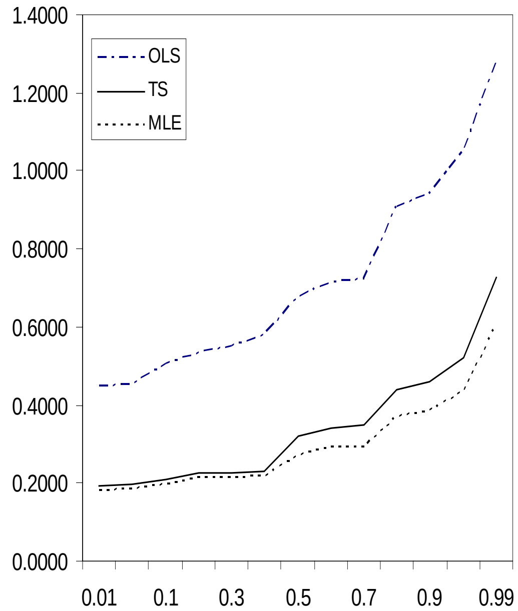
รูปที่ 4.2.1 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

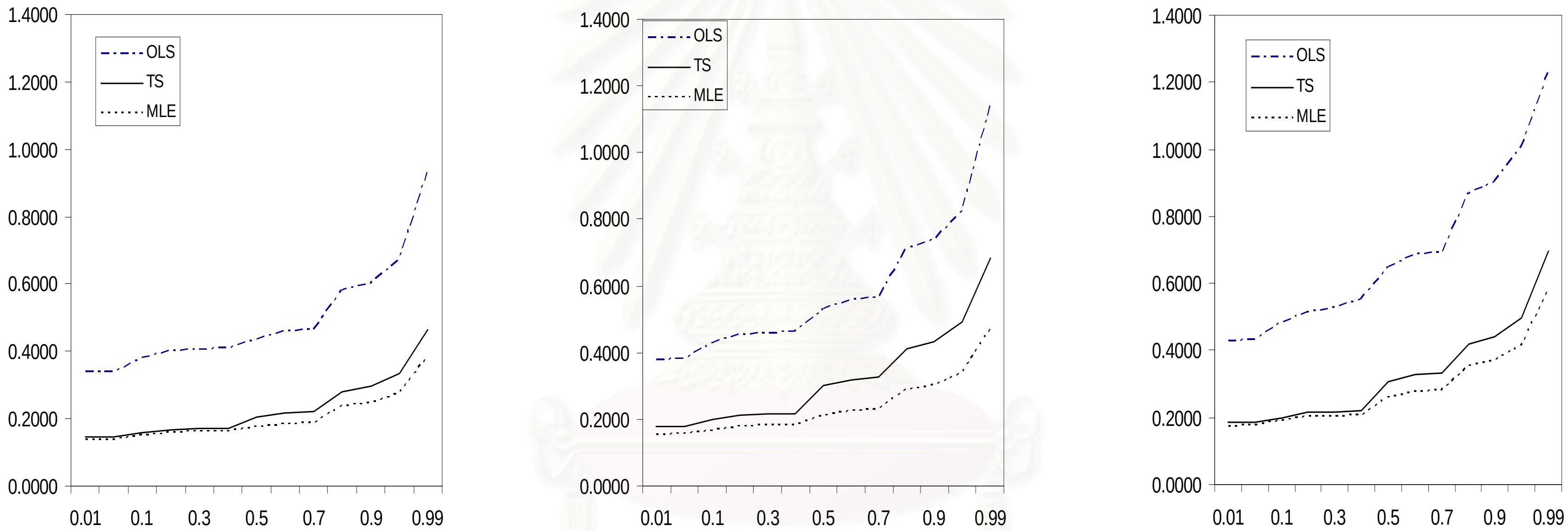


$\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.2 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2=1$	OLS	_	0.3369	0.3403	0.3808	0.4032	0.4071	0.4110	0.4342	0.4577	0.4619	0.5809	0.6023	0.6726	0.9315
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1583	0.1598	0.1783	0.1888	0.1906	0.1924	0.2463	0.2618	0.2665	0.3369	0.3520	0.4016	0.5565
		ประมาณค่า ϕ	0.1457	0.1472	0.1579	0.1688	0.1704	0.1720	0.2035	0.2182	0.2222	0.2806	0.2952	0.3328	0.4637
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1548	0.1564	0.1672	0.1782	0.1799	0.1816	0.1930	0.2046	0.2064	0.2659	0.2765	0.3066	0.4261
		ประมาณค่า ϕ	0.1366	0.1379	0.1486	0.1594	0.1610	0.1625	0.1737	0.1850	0.1867	0.2363	0.2468	0.2770	0.3864
$\sigma_e^2=25$	OLS	_	0.3791	0.3835	0.4291	0.4545	0.4589	0.4632	0.5314	0.5601	0.5653	0.7109	0.7370	0.8232	1.1400
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1781	0.1801	0.2011	0.2126	0.2146	0.2167	0.3014	0.3203	0.3262	0.4121	0.4308	0.4914	0.6811
		ประมาณค่า ϕ	0.1639	0.1659	0.1779	0.1902	0.1920	0.1939	0.2491	0.2670	0.2718	0.3435	0.3613	0.4072	0.5676
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1741	0.1762	0.1884	0.2008	0.2028	0.2047	0.2361	0.2502	0.2526	0.3253	0.3384	0.3753	0.5215
		ประมาณค่า ϕ	0.1537	0.1554	0.1675	0.1796	0.1813	0.1831	0.2125	0.2265	0.2286	0.2892	0.3021	0.3390	0.4730
$\sigma_e^2=100$	OLS	_	0.4264	0.4322	0.4837	0.5121	0.5250	0.5529	0.6502	0.6855	0.6918	0.8700	0.9020	1.0074	1.2271
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.2003	0.2030	0.2266	0.2396	0.2419	0.2485	0.3689	0.3920	0.4078	0.5043	0.5271	0.6015	0.8335
		ประมาณค่า ϕ	0.1844	0.1870	0.2005	0.2143	0.2164	0.2185	0.3048	0.3266	0.3326	0.4203	0.4421	0.4983	0.6946
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1959	0.1986	0.2123	0.2263	0.2387	0.2467	0.2889	0.3063	0.3091	0.3981	0.4140	0.4592	0.6381
		ประมาณค่า ϕ	0.1728	0.1751	0.1888	0.2025	0.2044	0.2064	0.2601	0.2771	0.2797	0.3539	0.3697	0.4148	0.5788

รูปที่ 4.2.2 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

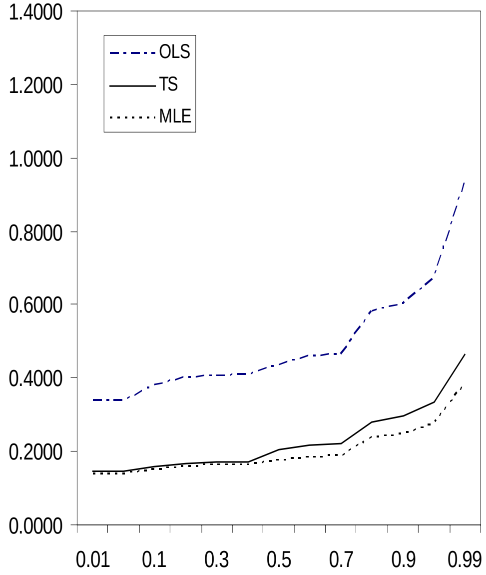


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

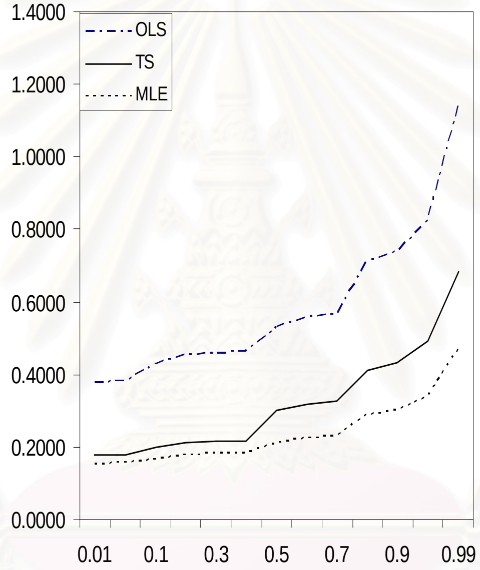
ตารางที่ 4.2.3 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.3171	0.3203	0.3584	0.3796	0.3833	0.3869	0.4087	0.4308	0.4348	0.5469	0.5670	0.6332	0.8768
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1488	0.1502	0.1677	0.1774	0.1791	0.1808	0.2317	0.2462	0.2507	0.3166	0.3309	0.3777	0.5232
		ประมาณค่า ϕ	0.1369	0.1382	0.1483	0.1585	0.1600	0.1615	0.1911	0.2049	0.2086	0.2637	0.2773	0.3125	0.4355
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1457	0.1472	0.1574	0.1678	0.1694	0.1710	0.1816	0.1925	0.1942	0.2503	0.2603	0.2886	0.4011
		ประมาณค่า ϕ	0.1287	0.1299	0.1399	0.1501	0.1515	0.1530	0.1635	0.1742	0.1758	0.2224	0.2324	0.2608	0.3638
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3568	0.3611	0.4040	0.4278	0.4319	0.4360	0.5001	0.5273	0.5321	0.6693	0.6938	0.7748	1.0731
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1676	0.1695	0.1892	0.2002	0.2021	0.2041	0.2837	0.3016	0.3071	0.3879	0.4055	0.4627	0.6411
		ประมาณค่า ϕ	0.1543	0.1562	0.1675	0.1791	0.1808	0.1825	0.2345	0.2514	0.2559	0.3232	0.3401	0.3833	0.5341
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1639	0.1659	0.1774	0.1890	0.1908	0.1926	0.2223	0.2355	0.2377	0.3063	0.3185	0.3532	0.4909
		ประมาณค่า ϕ	0.1446	0.1464	0.1577	0.1691	0.1707	0.1724	0.2000	0.2132	0.2152	0.2722	0.2843	0.3191	0.4452
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.4015	0.4069	0.4553	0.4821	0.4942	0.5205	0.6121	0.6453	0.6513	0.8190	0.8491	0.9482	1.1553
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1885	0.1910	0.2133	0.2256	0.2277	0.2339	0.3473	0.3690	0.3839	0.4748	0.4963	0.5661	0.7846
		ประมาณค่า ϕ	0.1736	0.1760	0.1887	0.2019	0.2038	0.2057	0.2868	0.3075	0.3131	0.3956	0.4162	0.4692	0.6538
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1844	0.1869	0.1999	0.2131	0.2247	0.2322	0.2720	0.2884	0.2910	0.3749	0.3898	0.4323	0.6007
		ประมาณค่า ϕ	0.1627	0.1649	0.1777	0.1905	0.1924	0.1942	0.2448	0.2608	0.2632	0.3332	0.3480	0.3905	0.5449

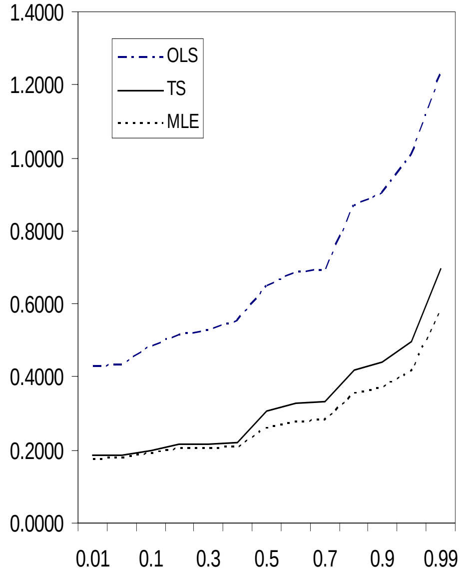
รูปที่ 4.2.3 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

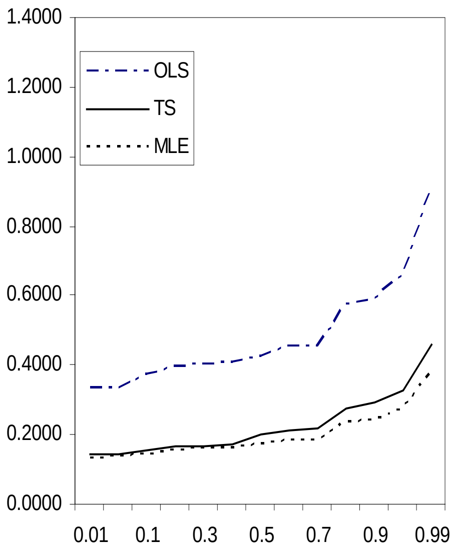


$\sigma_e^2 = 100$

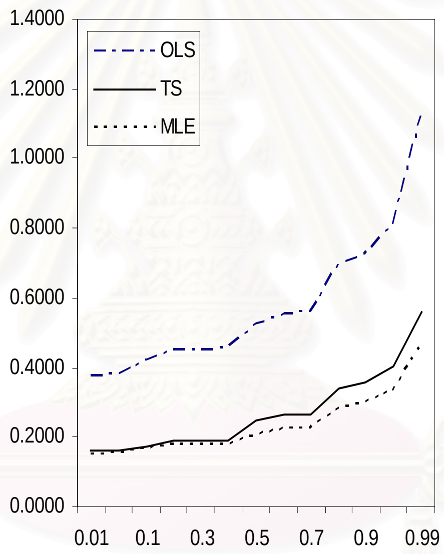
ตารางที่ 4.2.4 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.3317	0.3350	0.3748	0.3969	0.4008	0.4046	0.4274	0.4505	0.4547	0.5719	0.5929	0.6621	0.9170
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1558	0.1573	0.1756	0.1857	0.1875	0.1893	0.2425	0.2577	0.2624	0.3315	0.3465	0.3953	0.5478
		ประมาณค่า ϕ	0.1434	0.1449	0.1554	0.1662	0.1678	0.1694	0.2003	0.2147	0.2187	0.2762	0.2906	0.3276	0.4565
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1524	0.1539	0.1646	0.1754	0.1771	0.1788	0.1899	0.2013	0.2032	0.2617	0.2721	0.3018	0.4195
		ประมาณค่า ϕ	0.1345	0.1358	0.1463	0.1569	0.1584	0.1599	0.1710	0.1821	0.1838	0.2326	0.2430	0.2726	0.3804
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3732	0.3775	0.4224	0.4473	0.4517	0.4560	0.5230	0.5514	0.5565	0.6998	0.7256	0.8103	1.1221
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1753	0.1773	0.1979	0.2093	0.2113	0.2133	0.2967	0.3153	0.3211	0.4057	0.4240	0.4838	0.6704
		ประมาณค่า ϕ	0.1614	0.1633	0.1752	0.1873	0.1891	0.1909	0.2451	0.2628	0.2676	0.3381	0.3556	0.4009	0.5587
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1715	0.1735	0.1855	0.1977	0.1996	0.2015	0.2325	0.2464	0.2486	0.3203	0.3330	0.3694	0.5133
		ประมาณค่า ϕ	0.1513	0.1531	0.1649	0.1769	0.1786	0.1803	0.2092	0.2229	0.2250	0.2847	0.2974	0.3336	0.4656
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.4198	0.4255	0.4761	0.5042	0.5168	0.5443	0.6401	0.6748	0.6810	0.8565	0.8879	0.9916	1.2080
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1972	0.1998	0.2230	0.2359	0.2382	0.2446	0.3631	0.3859	0.4015	0.4965	0.5189	0.5921	0.8205
		ประมาณค่า ϕ	0.1815	0.1840	0.1974	0.2110	0.2131	0.2151	0.3000	0.3216	0.3275	0.4137	0.4352	0.4906	0.6837
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1929	0.1955	0.2090	0.2228	0.2349	0.2429	0.2845	0.3015	0.3043	0.3919	0.4076	0.4521	0.6282
		ประมาณค่า ϕ	0.1702	0.1725	0.1858	0.1993	0.2012	0.2032	0.2560	0.2728	0.2753	0.3484	0.3639	0.4083	0.5698

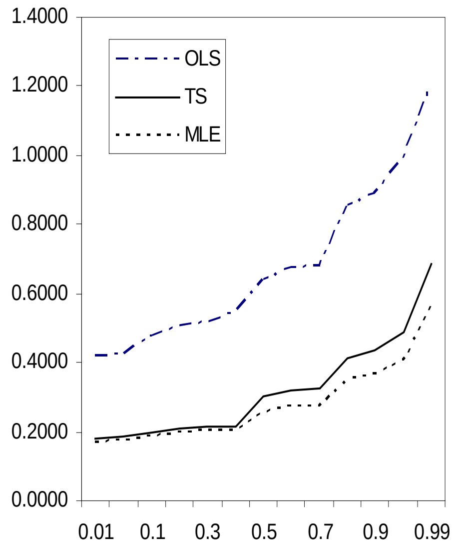
รูปที่ 4.2.4 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

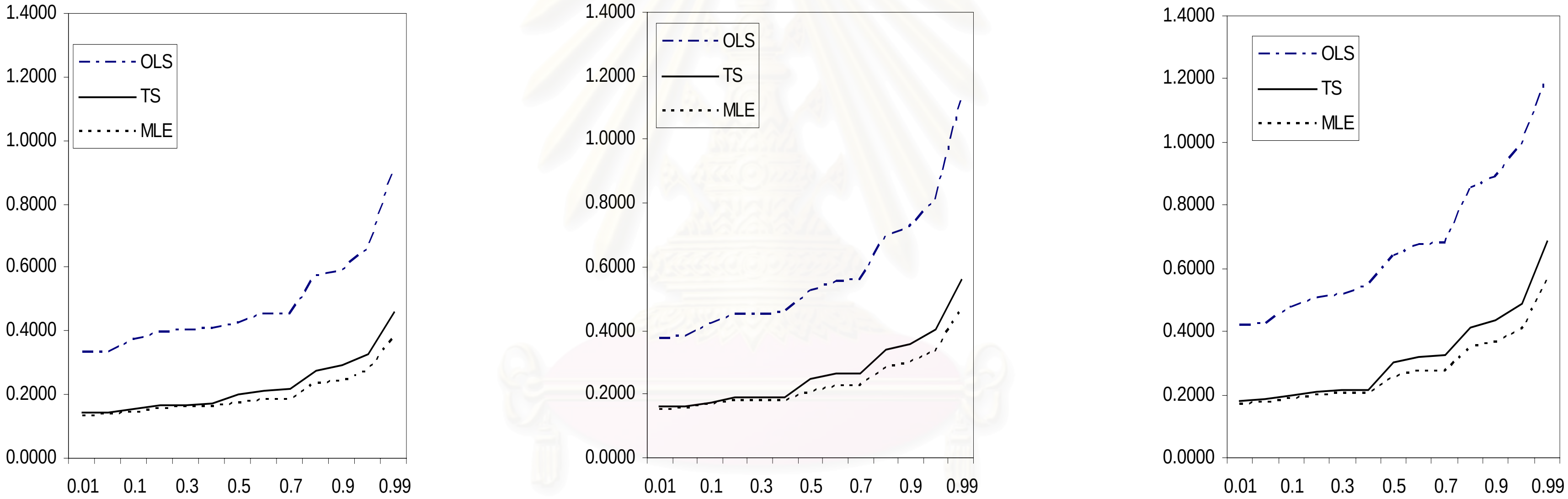


$\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.5 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.3165	0.3197	0.3577	0.3788	0.3824	0.3861	0.4079	0.4300	0.4339	0.5457	0.5658	0.6319	0.8751
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1487	0.1501	0.1676	0.1772	0.1790	0.1807	0.2314	0.2459	0.2504	0.3163	0.3307	0.3773	0.5228
		ประมาณค่า ϕ	0.1369	0.1382	0.1483	0.1586	0.1601	0.1616	0.1911	0.2049	0.2087	0.2636	0.2773	0.3126	0.4357
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1454	0.1469	0.1570	0.1674	0.1690	0.1706	0.1813	0.1921	0.1939	0.2497	0.2597	0.2880	0.4003
		ประมาณค่า ϕ	0.1283	0.1296	0.1396	0.1498	0.1512	0.1526	0.1631	0.1738	0.1754	0.2220	0.2319	0.2602	0.3630
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3561	0.3603	0.4031	0.4269	0.4310	0.4351	0.4991	0.5262	0.5310	0.6679	0.6924	0.7733	1.0709
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1672	0.1692	0.1888	0.1998	0.2017	0.2036	0.2832	0.3009	0.3064	0.3871	0.4046	0.4617	0.6398
		ประมาณค่า ϕ	0.1540	0.1558	0.1672	0.1787	0.1804	0.1821	0.2339	0.2508	0.2553	0.3226	0.3394	0.3825	0.5331
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1636	0.1655	0.1770	0.1886	0.1904	0.1923	0.2218	0.2351	0.2373	0.3056	0.3178	0.3525	0.4899
		ประมาณค่า ϕ	0.1444	0.1461	0.1573	0.1688	0.1704	0.1720	0.1996	0.2127	0.2147	0.2717	0.2838	0.3184	0.4443
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.4006	0.4060	0.4543	0.4811	0.4932	0.5194	0.6108	0.6439	0.6499	0.8173	0.8473	0.9463	1.1528
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1882	0.1907	0.2128	0.2251	0.2273	0.2335	0.3465	0.3683	0.3831	0.4738	0.4952	0.5650	0.7830
		ประมาณค่า ϕ	0.1732	0.1756	0.1884	0.2014	0.2033	0.2053	0.2863	0.3069	0.3125	0.3948	0.4153	0.4681	0.6525
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1841	0.1866	0.1995	0.2126	0.2242	0.2318	0.2715	0.2877	0.2904	0.3740	0.3889	0.4314	0.5995
		ประมาณค่า ϕ	0.1624	0.1646	0.1773	0.1902	0.1920	0.1939	0.2443	0.2603	0.2627	0.3325	0.3473	0.3897	0.5437

รูปที่ 4.2.5 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

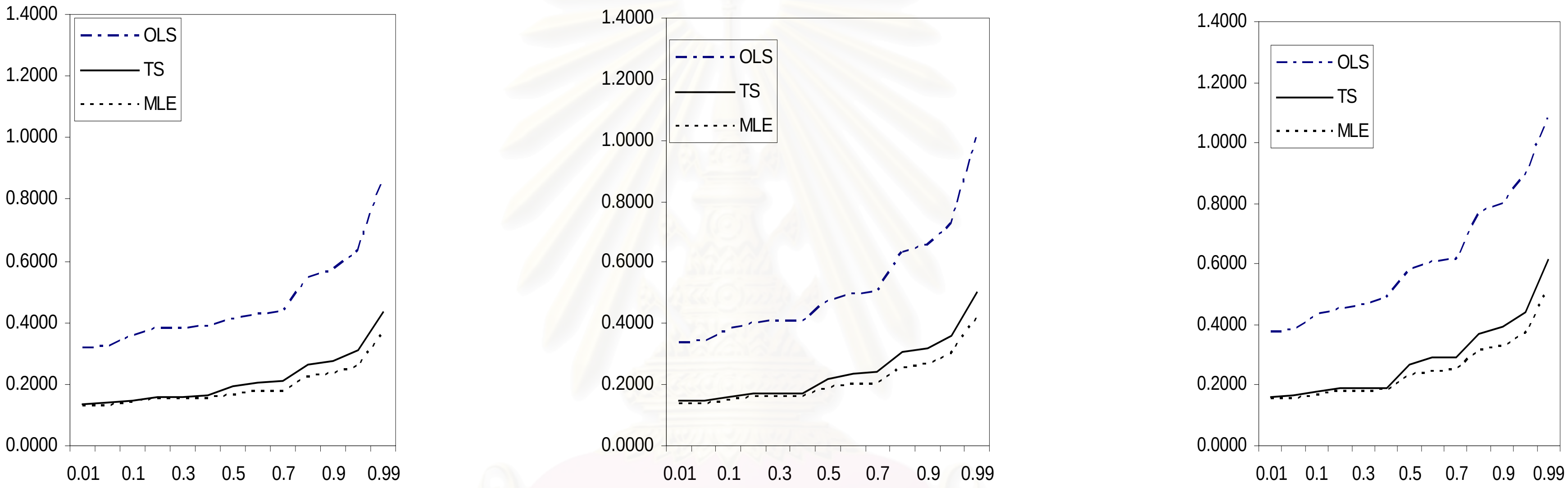


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.6 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2985	0.3015	0.3373	0.3572	0.3607	0.3641	0.3846	0.4055	0.4092	0.5147	0.5336	0.5959	0.8252
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1400	0.1414	0.1579	0.1670	0.1686	0.1702	0.2180	0.2317	0.2359	0.2980	0.3115	0.3554	0.4925
		ประมาณค่า ϕ	0.1288	0.1301	0.1396	0.1492	0.1506	0.1521	0.1799	0.1928	0.1964	0.2481	0.2610	0.2941	0.4100
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1372	0.1385	0.1481	0.1578	0.1594	0.1609	0.1709	0.1812	0.1829	0.2355	0.2449	0.2717	0.3775
		ประมาณค่า ϕ	0.1210	0.1222	0.1316	0.1412	0.1426	0.1439	0.1539	0.1639	0.1654	0.2094	0.2187	0.2454	0.3424
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3358	0.3398	0.3802	0.4026	0.4065	0.4103	0.4707	0.4962	0.5008	0.6298	0.6530	0.7292	1.0099
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1577	0.1596	0.1781	0.1884	0.1902	0.1920	0.2670	0.2838	0.2890	0.3651	0.3816	0.4354	0.6034
		ประมาณค่า ϕ	0.1452	0.1469	0.1576	0.1685	0.1702	0.1718	0.2206	0.2365	0.2408	0.3042	0.3201	0.3608	0.5028
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1543	0.1561	0.1669	0.1779	0.1796	0.1813	0.2092	0.2217	0.2238	0.2882	0.2997	0.3324	0.4620
		ประมาณค่า ϕ	0.1362	0.1377	0.1484	0.1592	0.1607	0.1622	0.1883	0.2006	0.2025	0.2562	0.2676	0.3003	0.4190
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3778	0.3829	0.4285	0.4537	0.4651	0.4898	0.5760	0.6073	0.6129	0.7708	0.7991	0.8924	1.0872
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1774	0.1798	0.2007	0.2123	0.2144	0.2202	0.3268	0.3473	0.3613	0.4468	0.4670	0.5328	0.7384
		ประมาณค่า ϕ	0.1634	0.1656	0.1777	0.1899	0.1918	0.1936	0.2700	0.2894	0.2947	0.3723	0.3917	0.4415	0.6153
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1736	0.1759	0.1881	0.2005	0.2114	0.2186	0.2560	0.2713	0.2738	0.3527	0.3668	0.4068	0.5654
		ประมาณค่า ϕ	0.1532	0.1552	0.1672	0.1794	0.1811	0.1828	0.2304	0.2455	0.2478	0.3135	0.3275	0.3675	0.5128

รูปที่ 4.2.6 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

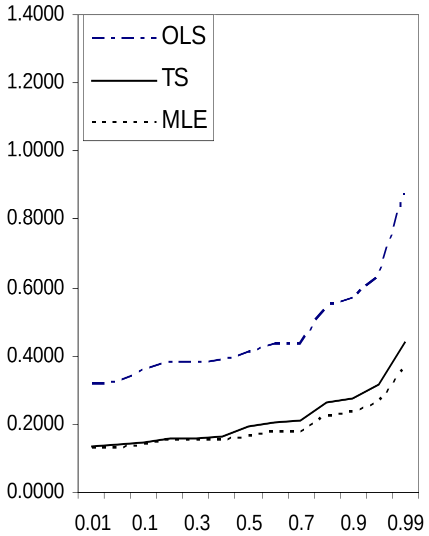


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

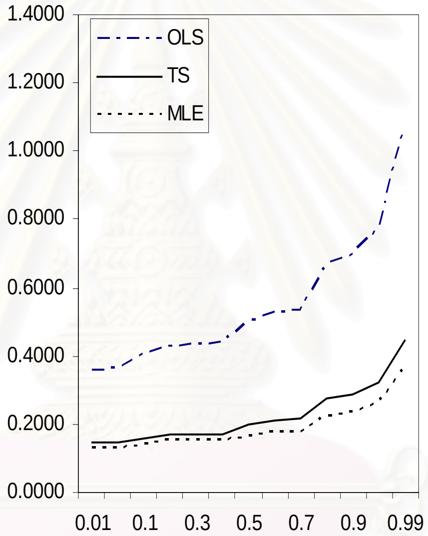
ตารางที่ 4.2.7 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.3175	0.3206	0.3588	0.3799	0.3836	0.3873	0.4091	0.4313	0.4353	0.5474	0.5675	0.6338	0.8777
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1491	0.1506	0.1681	0.1778	0.1795	0.1812	0.2321	0.2466	0.2512	0.3173	0.3317	0.3784	0.5244
		ประมาณค่า ϕ	0.1373	0.1387	0.1488	0.1590	0.1606	0.1621	0.1917	0.2055	0.2093	0.2644	0.2782	0.3135	0.4370
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1459	0.1473	0.1575	0.1679	0.1695	0.1711	0.1818	0.1927	0.1945	0.2505	0.2605	0.2889	0.4015
		ประมาณค่า ϕ	0.1287	0.1300	0.1400	0.1502	0.1517	0.1531	0.1636	0.1743	0.1760	0.2227	0.2326	0.2610	0.3642
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3572	0.3614	0.4044	0.4282	0.4323	0.4364	0.5006	0.5278	0.5327	0.6699	0.6945	0.7756	1.0741
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1678	0.1697	0.1894	0.2004	0.2023	0.2042	0.2840	0.3018	0.3074	0.3883	0.4059	0.4631	0.6417
		ประมาณค่า ϕ	0.1545	0.1563	0.1677	0.1792	0.1810	0.1827	0.2346	0.2515	0.2561	0.3236	0.3404	0.3837	0.5348
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1641	0.1660	0.1775	0.1892	0.1910	0.1928	0.2225	0.2358	0.2380	0.3066	0.3188	0.3536	0.4913
		ประมาณค่า ϕ	0.1448	0.1465	0.1578	0.1693	0.1709	0.1725	0.2003	0.2134	0.2153	0.2725	0.2846	0.3194	0.4456
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.4018	0.4073	0.4557	0.4826	0.4947	0.5210	0.6127	0.6459	0.6519	0.8198	0.8499	0.9492	1.1563
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1887	0.1913	0.2135	0.2258	0.2280	0.2342	0.3476	0.3694	0.3843	0.4752	0.4967	0.5667	0.7853
		ประมาณค่า ϕ	0.1738	0.1761	0.1890	0.2020	0.2040	0.2059	0.2871	0.3078	0.3134	0.3960	0.4166	0.4696	0.6544
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1846	0.1871	0.2001	0.2132	0.2248	0.2325	0.2723	0.2886	0.2913	0.3752	0.3901	0.4327	0.6013
		ประมาณค่า ϕ	0.1629	0.1651	0.1778	0.1908	0.1926	0.1945	0.2451	0.2611	0.2635	0.3335	0.3483	0.3908	0.5454

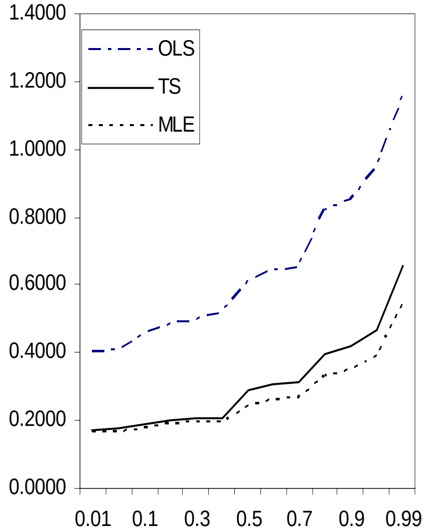
รูปที่ 4.2.7 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

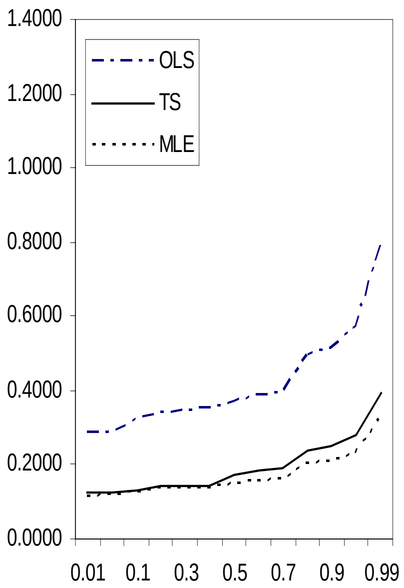


$\sigma_e^2 = 100$

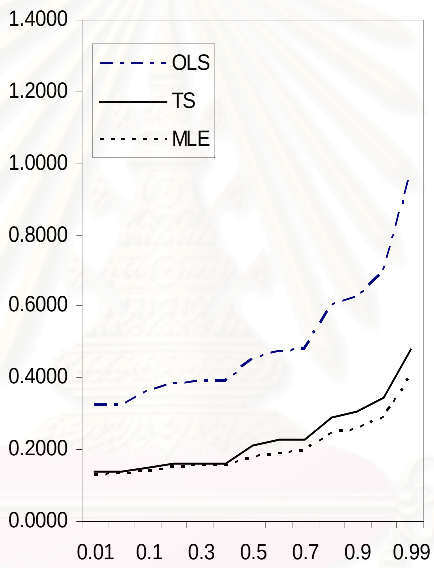
ตารางที่ 4.2.8 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2857	0.2886	0.3229	0.3419	0.3452	0.3485	0.3682	0.3881	0.3917	0.4926	0.5107	0.5704	0.7899
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1341	0.1354	0.1511	0.1598	0.1614	0.1629	0.2086	0.2217	0.2258	0.2853	0.2982	0.3402	0.4714
		ประมาณค่า ϕ	0.1233	0.1245	0.1336	0.1428	0.1442	0.1456	0.1722	0.1846	0.1879	0.2374	0.2498	0.2816	0.3924
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1313	0.1326	0.1418	0.1511	0.1525	0.1540	0.1636	0.1734	0.1750	0.2254	0.2344	0.2600	0.3613
		ประมาณค่า ϕ	0.1158	0.1170	0.1260	0.1352	0.1365	0.1378	0.1473	0.1569	0.1584	0.2004	0.2093	0.2349	0.3277
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3215	0.3252	0.3639	0.3854	0.3891	0.3928	0.4506	0.4750	0.4794	0.6029	0.6250	0.6980	0.9667
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1510	0.1527	0.1705	0.1803	0.1821	0.1838	0.2556	0.2716	0.2766	0.3495	0.3653	0.4168	0.5775
		ประมาณค่า ϕ	0.1390	0.1406	0.1509	0.1613	0.1629	0.1644	0.2112	0.2264	0.2305	0.2912	0.3064	0.3453	0.4813
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1477	0.1494	0.1598	0.1703	0.1719	0.1736	0.2002	0.2122	0.2142	0.2759	0.2869	0.3182	0.4422
		ประมาณค่า ϕ	0.1303	0.1318	0.1420	0.1524	0.1538	0.1553	0.1802	0.1920	0.1938	0.2452	0.2562	0.2874	0.4011
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3616	0.3665	0.4101	0.4343	0.4452	0.4689	0.5514	0.5813	0.5867	0.7378	0.7649	0.8542	1.0407
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1698	0.1721	0.1921	0.2032	0.2052	0.2107	0.3128	0.3324	0.3459	0.4277	0.4470	0.5100	0.7068
		ประมาณค่า ϕ	0.1564	0.1585	0.1701	0.1818	0.1836	0.1853	0.2584	0.2770	0.2821	0.3564	0.3749	0.4226	0.5890
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1662	0.1684	0.1801	0.1919	0.2024	0.2092	0.2451	0.2597	0.2621	0.3376	0.3511	0.3894	0.5412
		ประมาณค่า ϕ	0.1466	0.1486	0.1601	0.1717	0.1734	0.1750	0.2206	0.2350	0.2372	0.3001	0.3135	0.3517	0.4908

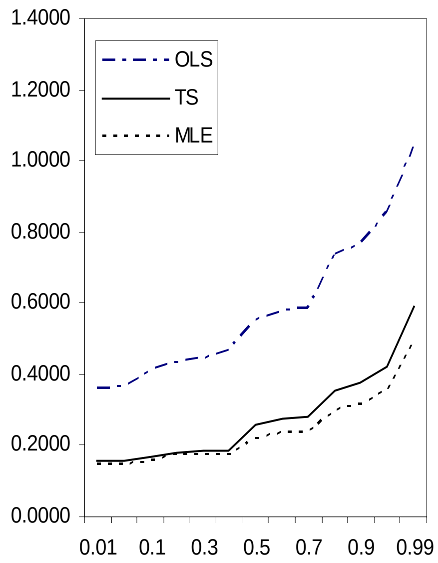
รูปที่ 4.2.8 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

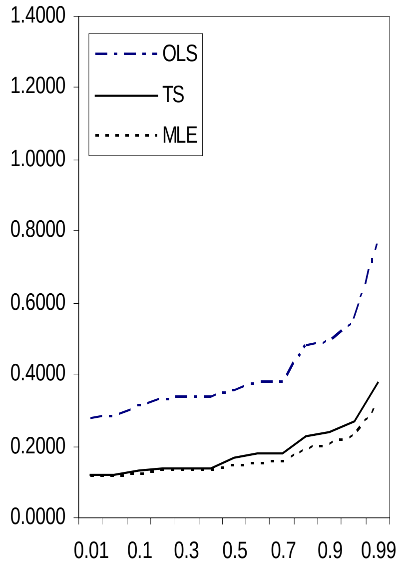


$\sigma_e^2 = 100$

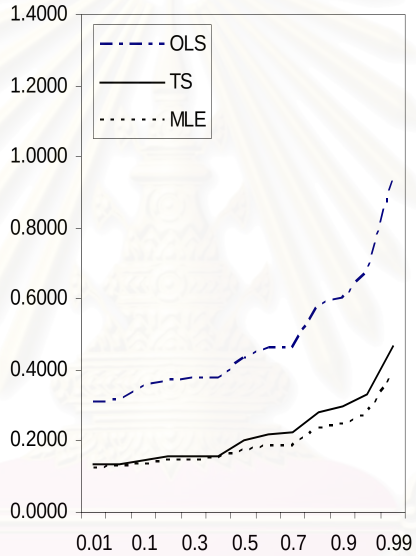
ตารางที่ 4.2.9 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2760	0.2787	0.3119	0.3302	0.3334	0.3366	0.3556	0.3748	0.3783	0.4758	0.4933	0.5509	0.7629
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1295	0.1307	0.1459	0.1544	0.1558	0.1573	0.2015	0.2141	0.2181	0.2755	0.2880	0.3285	0.4553
		ประมาณค่า ϕ	0.1191	0.1203	0.1290	0.1379	0.1393	0.1406	0.1663	0.1783	0.1815	0.2293	0.2412	0.2719	0.3790
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1268	0.1281	0.1369	0.1459	0.1473	0.1487	0.1580	0.1675	0.1690	0.2177	0.2264	0.2511	0.3490
		ประมาณค่า ϕ	0.1119	0.1130	0.1217	0.1306	0.1318	0.1331	0.1422	0.1515	0.1529	0.1935	0.2022	0.2268	0.3165
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3105	0.3141	0.3515	0.3722	0.3758	0.3793	0.4351	0.4587	0.4630	0.5823	0.6036	0.6741	0.9336
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1458	0.1475	0.1646	0.1742	0.1758	0.1775	0.2469	0.2624	0.2671	0.3375	0.3528	0.4025	0.5578
		ประมาณค่า ϕ	0.1343	0.1358	0.1457	0.1558	0.1573	0.1588	0.2039	0.2186	0.2226	0.2813	0.2959	0.3335	0.4648
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1426	0.1443	0.1543	0.1645	0.1660	0.1676	0.1934	0.2050	0.2069	0.2665	0.2771	0.3073	0.4271
		ประมาณค่า ϕ	0.1259	0.1273	0.1372	0.1471	0.1486	0.1500	0.1741	0.1854	0.1872	0.2368	0.2474	0.2776	0.3873
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3493	0.3540	0.3961	0.4195	0.4300	0.4528	0.5325	0.5614	0.5666	0.7126	0.7387	0.8250	1.0051
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1640	0.1662	0.1855	0.1963	0.1982	0.2035	0.3021	0.3211	0.3340	0.4130	0.4317	0.4926	0.6826
		ประมาณค่า ϕ	0.1510	0.1531	0.1642	0.1756	0.1773	0.1790	0.2496	0.2676	0.2724	0.3442	0.3621	0.4081	0.5688
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	0.1605	0.1626	0.1739	0.1853	0.1954	0.2021	0.2367	0.2508	0.2532	0.3261	0.3391	0.3761	0.5226
		ประมาณค่า ϕ	0.1416	0.1435	0.1546	0.1658	0.1674	0.1690	0.2130	0.2269	0.2290	0.2899	0.3028	0.3397	0.4740

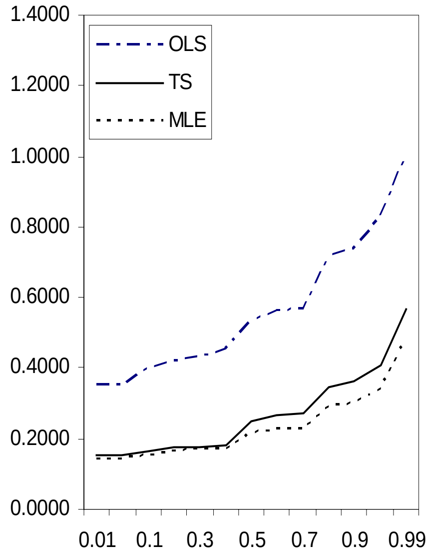
รูปที่ 4.2.9 การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

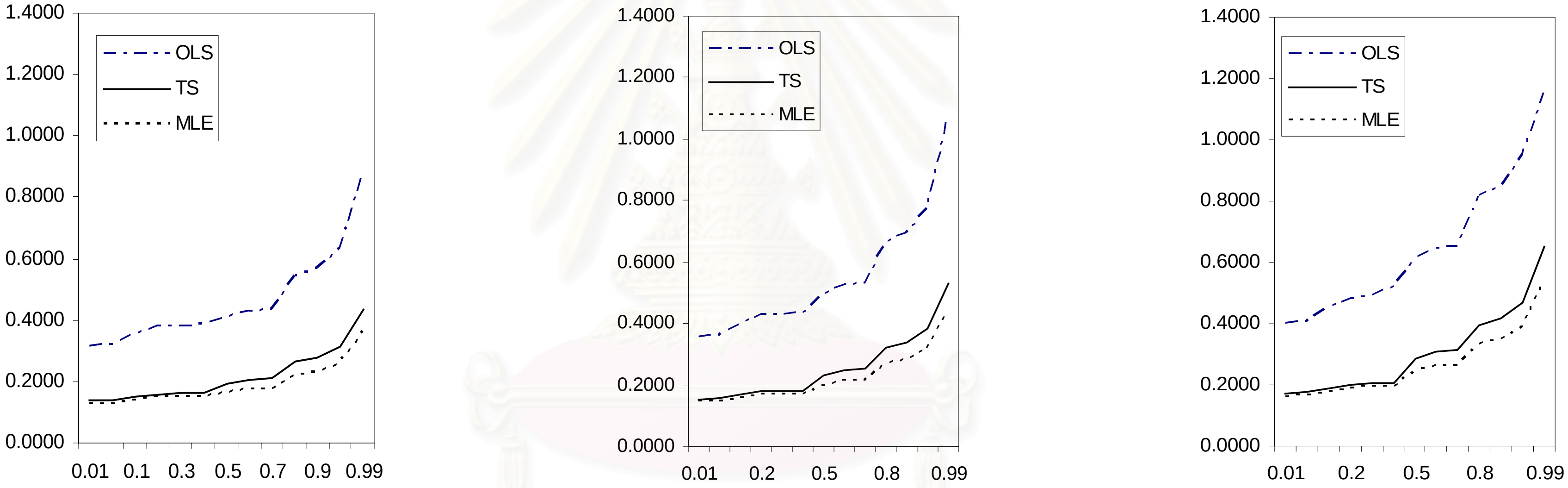


$\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.10 **การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน**

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2=1$	OLS	_	0.3164	0.3196	0.3576	0.3787	0.3823	0.3859	0.4077	0.4298	0.4338	0.5455	0.5656	0.6316	0.8747
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1368	0.1382	0.1482	0.1585	0.1600	0.1616	0.1911	0.2048	0.2086	0.2635	0.2773	0.3124	0.4356
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1283	0.1295	0.1395	0.1497	0.1511	0.1526	0.1631	0.1738	0.1754	0.2220	0.2318	0.2601	0.3629
$\sigma_e^2=25$	OLS	_	0.3560	0.3601	0.4030	0.4268	0.4309	0.4349	0.4989	0.5260	0.5309	0.6676	0.6921	0.7730	1.0705
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1539	0.1557	0.1671	0.1786	0.1803	0.1820	0.2338	0.2508	0.2553	0.3225	0.3394	0.3825	0.5329
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1443	0.1460	0.1572	0.1687	0.1704	0.1720	0.1996	0.2126	0.2146	0.2716	0.2836	0.3183	0.4441
$\sigma_e^2=100$	OLS	_	0.4005	0.4059	0.4542	0.4810	0.4930	0.5193	0.6106	0.6437	0.6497	0.8170	0.8470	0.9460	1.1524
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1731	0.1755	0.1883	0.2014	0.2033	0.2052	0.2862	0.3068	0.3123	0.3947	0.4152	0.4681	0.6523
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1624	0.1645	0.1773	0.1901	0.1919	0.1938	0.2443	0.2603	0.2626	0.3324	0.3472	0.3895	0.5435

รูปที่ 4.2.10 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมี สหสัมพันธ์กัน

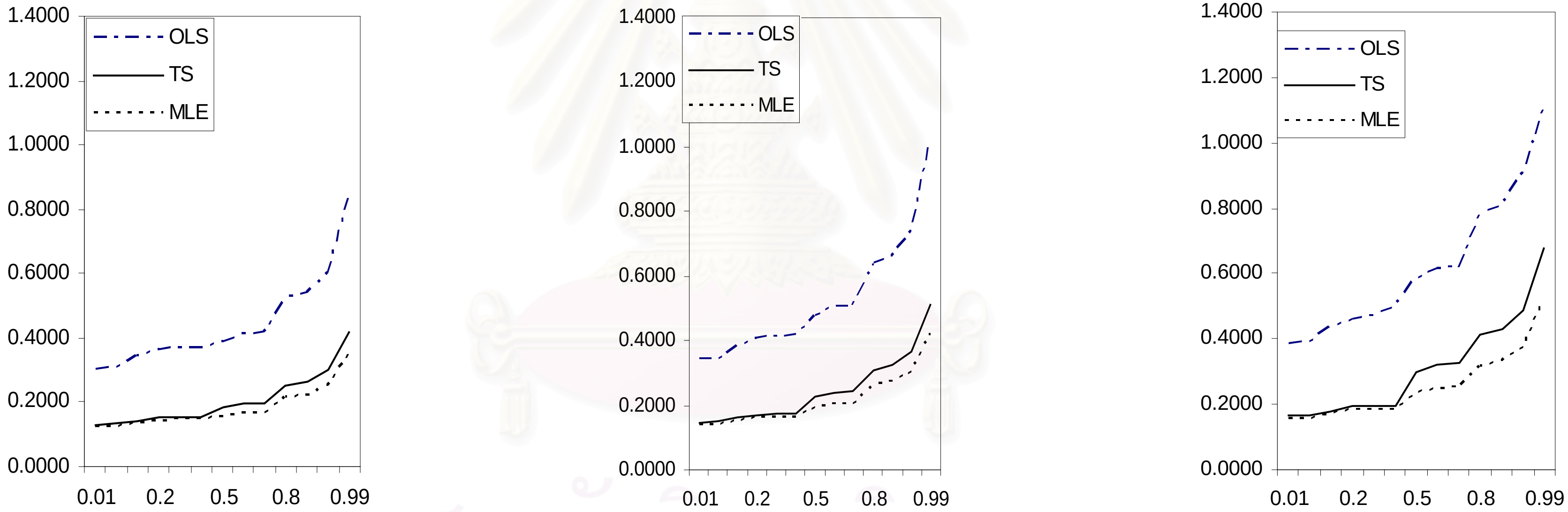


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.11 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.3025	0.3056	0.3420	0.3621	0.3656	0.3691	0.3899	0.4110	0.4148	0.5216	0.5409	0.6040	0.8365
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1308	0.1322	0.1418	0.1516	0.1530	0.1545	0.1827	0.1959	0.1994	0.2519	0.2651	0.2988	0.4164
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1227	0.1238	0.1334	0.1431	0.1446	0.1459	0.1560	0.1661	0.1677	0.2122	0.2216	0.2487	0.3470
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3404	0.3444	0.3853	0.4081	0.4121	0.4160	0.4772	0.5030	0.5076	0.6384	0.6618	0.7392	1.0237
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1472	0.1490	0.1598	0.1708	0.1724	0.1741	0.2237	0.2398	0.2442	0.3085	0.3245	0.3656	0.5097
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1380	0.1395	0.1504	0.1613	0.1628	0.1644	0.1908	0.2034	0.2053	0.2597	0.2713	0.3044	0.4248
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3829	0.3881	0.4344	0.4599	0.4715	0.4965	0.5839	0.6156	0.6212	0.7813	0.8100	0.9046	1.1019
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1656	0.1679	0.1800	0.1924	0.1943	0.1962	0.2984	0.3195	0.3251	0.4106	0.4316	0.4861	0.6770
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1552	0.1572	0.1695	0.1818	0.1836	0.1853	0.2336	0.2488	0.2512	0.3178	0.3320	0.3725	0.5198

รูปที่ 4.2.11 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

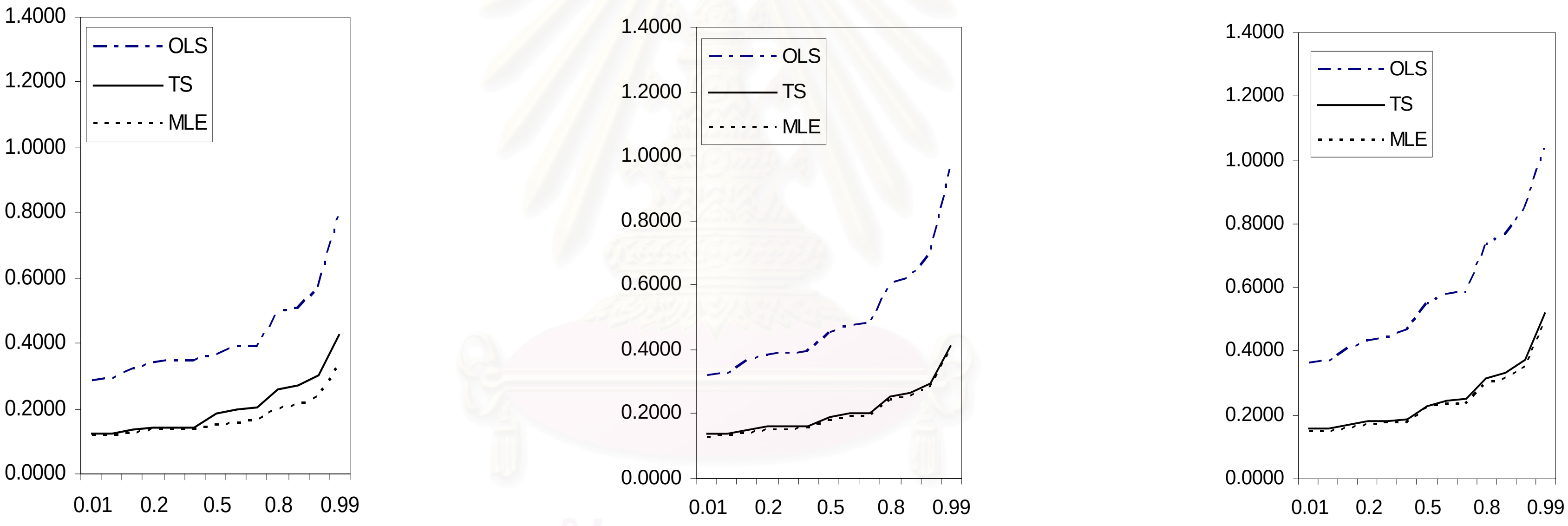


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.12 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2844	0.2873	0.3215	0.3405	0.3438	0.3470	0.3666	0.3864	0.3900	0.4906	0.5086	0.5680	0.7865
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1228	0.1240	0.1330	0.1422	0.1435	0.1449	0.1869	0.2003	0.2037	0.2573	0.2704	0.3045	0.4241
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1154	0.1165	0.1255	0.1346	0.1359	0.1372	0.1467	0.1563	0.1577	0.1995	0.2085	0.2339	0.3263
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3200	0.3239	0.3624	0.3837	0.3874	0.3911	0.4486	0.4730	0.4773	0.6004	0.6223	0.6950	0.9626
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1384	0.1401	0.1502	0.1607	0.1622	0.1637	0.1894	0.2013	0.2032	0.2543	0.2653	0.2964	0.4095
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1297	0.1313	0.1415	0.1517	0.1531	0.1546	0.1794	0.1912	0.1930	0.2442	0.2550	0.2862	0.3993
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3601	0.3650	0.4084	0.4324	0.4433	0.4669	0.5491	0.5788	0.5842	0.7346	0.7616	0.8505	1.0363
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1557	0.1579	0.1693	0.1811	0.1828	0.1845	0.2292	0.2456	0.2499	0.3153	0.3316	0.3735	0.5201
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1459	0.1479	0.1594	0.1709	0.1726	0.1742	0.2196	0.2339	0.2361	0.2989	0.3122	0.3503	0.4888

รูปที่ 4.2.12 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

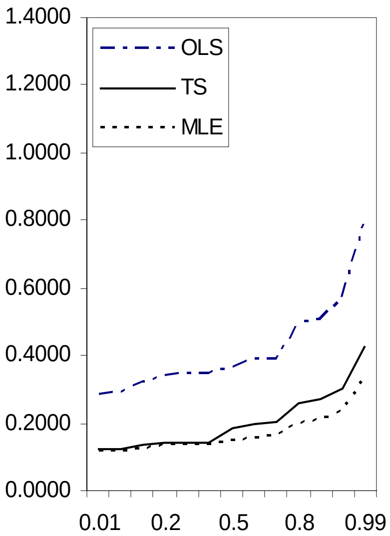


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

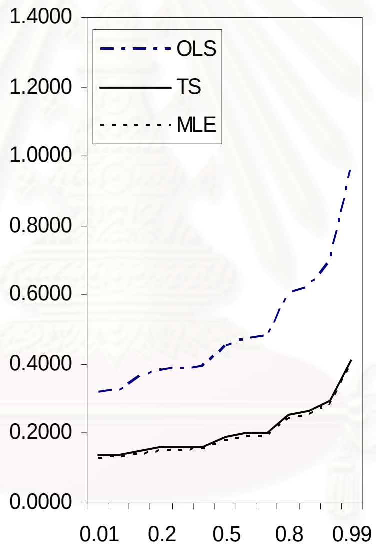
ตารางที่ 4.2.13 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2972	0.3002	0.3358	0.3556	0.3591	0.3625	0.3830	0.4036	0.4074	0.5124	0.5312	0.5932	0.8216
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1285	0.1298	0.1392	0.1489	0.1503	0.1518	0.1957	0.2096	0.2133	0.2692	0.2830	0.3188	0.4440
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1205	0.1217	0.1311	0.1406	0.1419	0.1433	0.1532	0.1632	0.1647	0.2084	0.2177	0.2442	0.3408
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3344	0.3382	0.3785	0.4008	0.4047	0.4086	0.4686	0.4941	0.4986	0.6270	0.6501	0.7260	1.0054
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1446	0.1463	0.1570	0.1678	0.1694	0.1710	0.2217	0.2564	0.2610	0.3295	0.3464	0.3902	0.5433
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1356	0.1372	0.1478	0.1585	0.1600	0.1615	0.1874	0.1997	0.2016	0.2551	0.2665	0.2989	0.4172
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3761	0.3812	0.4266	0.4518	0.4631	0.4877	0.5735	0.6046	0.6102	0.7674	0.7956	0.8885	1.0824
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1626	0.1649	0.1769	0.1891	0.1909	0.1927	0.2738	0.2912	0.2942	0.3688	0.3849	0.4304	0.5953
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1525	0.1546	0.1665	0.1786	0.1803	0.1821	0.2294	0.2444	0.2467	0.3122	0.3261	0.3658	0.5105

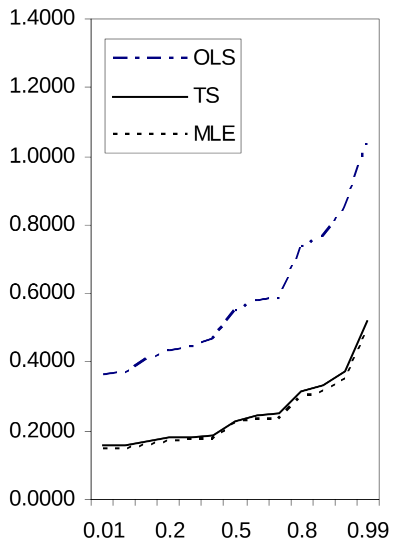
รูปที่ 4.2.13 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

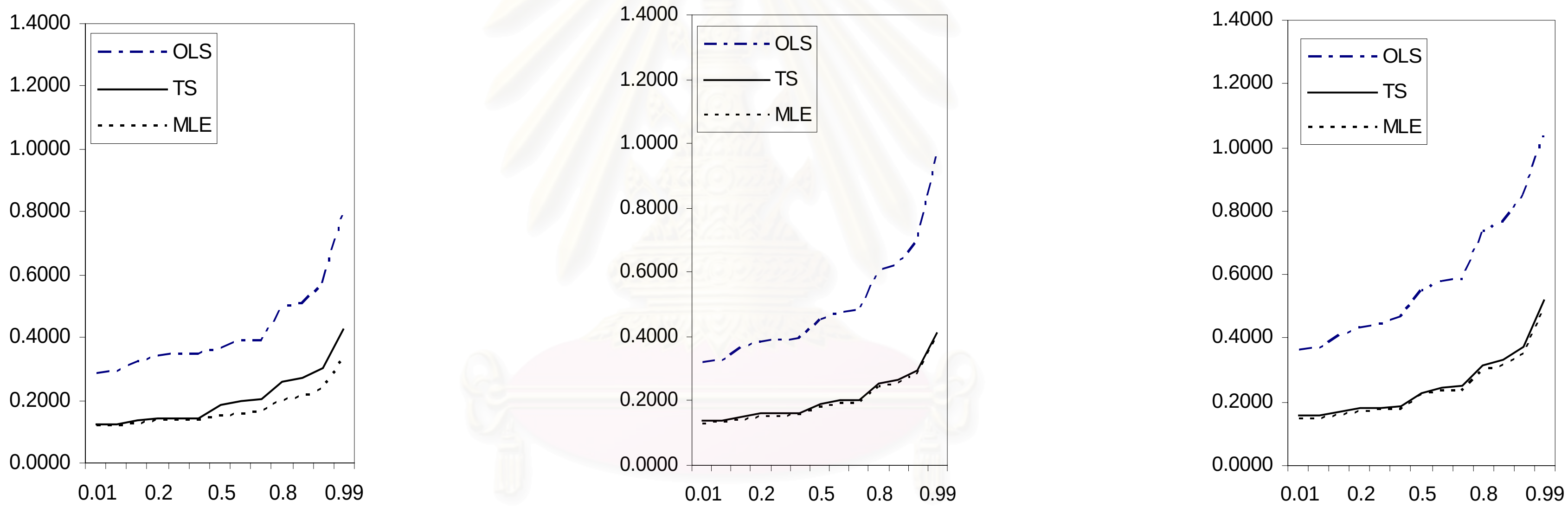


$\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.14 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2833	0.2861	0.3202	0.3390	0.3423	0.3456	0.3650	0.3848	0.3884	0.4884	0.5064	0.5655	0.7832
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1225	0.1237	0.1327	0.1419	0.1433	0.1446	0.1711	0.1833	0.1868	0.2360	0.2482	0.2798	0.3900
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1149	0.1160	0.1249	0.1340	0.1353	0.1366	0.1460	0.1556	0.1570	0.1987	0.2075	0.2329	0.3249
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3187	0.3224	0.3608	0.3821	0.3858	0.3894	0.4467	0.4709	0.4753	0.5977	0.6197	0.6921	0.9584
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1378	0.1394	0.1496	0.1599	0.1615	0.1630	0.2114	0.2445	0.2487	0.3141	0.3301	0.3718	0.5179
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1292	0.1307	0.1408	0.1511	0.1525	0.1540	0.1787	0.1904	0.1921	0.2431	0.2540	0.2850	0.3976
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3586	0.3634	0.4066	0.4306	0.4414	0.4649	0.5467	0.5763	0.5816	0.7315	0.7584	0.8469	1.0318
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1551	0.1571	0.1686	0.1803	0.1820	0.1837	0.2610	0.2776	0.2804	0.3515	0.3668	0.4103	0.5675
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1454	0.1473	0.1587	0.1702	0.1719	0.1735	0.2187	0.2330	0.2351	0.2976	0.3108	0.3487	0.4866

รูปที่ 4.2.14 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

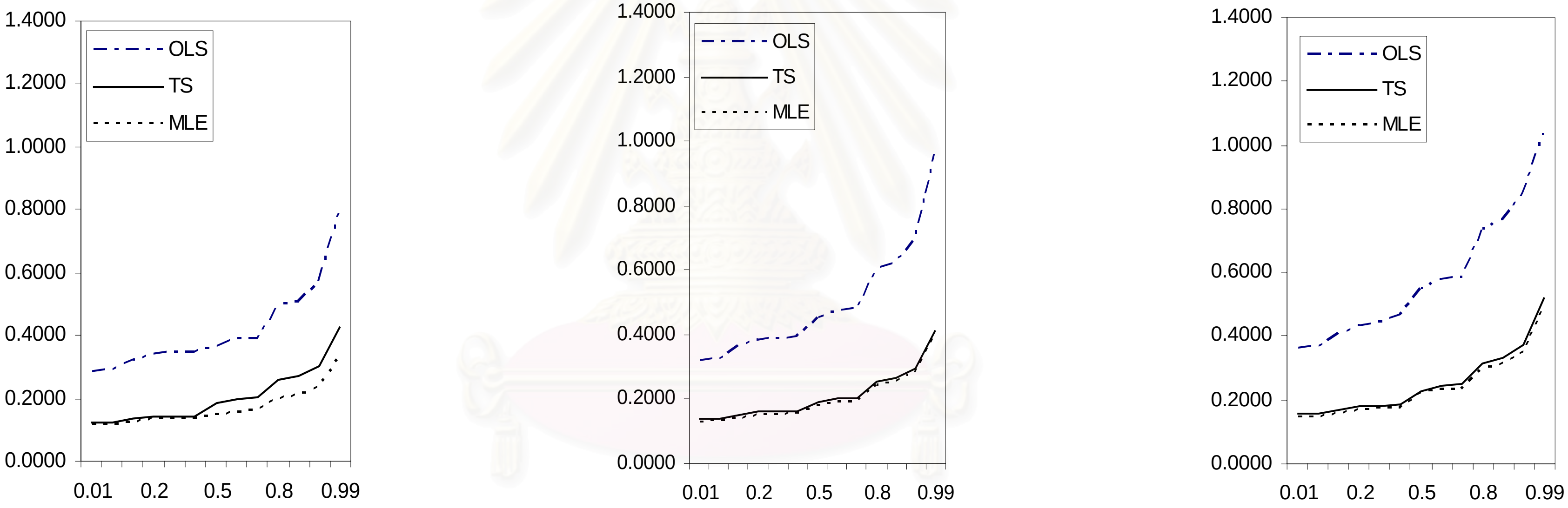


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.15 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2669	0.2695	0.3015	0.3193	0.3225	0.3255	0.3438	0.3625	0.3658	0.4601	0.4770	0.5327	0.7377
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1151	0.1163	0.1248	0.1334	0.1346	0.1360	0.1607	0.1724	0.1756	0.2217	0.2332	0.2630	0.3666
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1082	0.1092	0.1177	0.1262	0.1275	0.1286	0.1376	0.1465	0.1479	0.1872	0.1955	0.2194	0.3061
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3002	0.3038	0.3399	0.3599	0.3634	0.3668	0.4208	0.4436	0.4477	0.5630	0.5838	0.6519	0.9029
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1298	0.1313	0.1409	0.1506	0.1522	0.1536	0.1991	0.2303	0.2343	0.2959	0.3110	0.3503	0.4879
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1218	0.1231	0.1327	0.1423	0.1437	0.1450	0.1683	0.1793	0.1810	0.2290	0.2392	0.2685	0.3746
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3378	0.3423	0.3831	0.4056	0.4158	0.4379	0.5149	0.5429	0.5479	0.6891	0.7144	0.7978	0.9720
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1461	0.1480	0.1589	0.1698	0.1715	0.1731	0.2459	0.2615	0.2642	0.3311	0.3456	0.3866	0.5346
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1370	0.1387	0.1495	0.1604	0.1619	0.1634	0.2060	0.2195	0.2215	0.2803	0.2928	0.3285	0.4584

รูปที่ 4.2.15 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

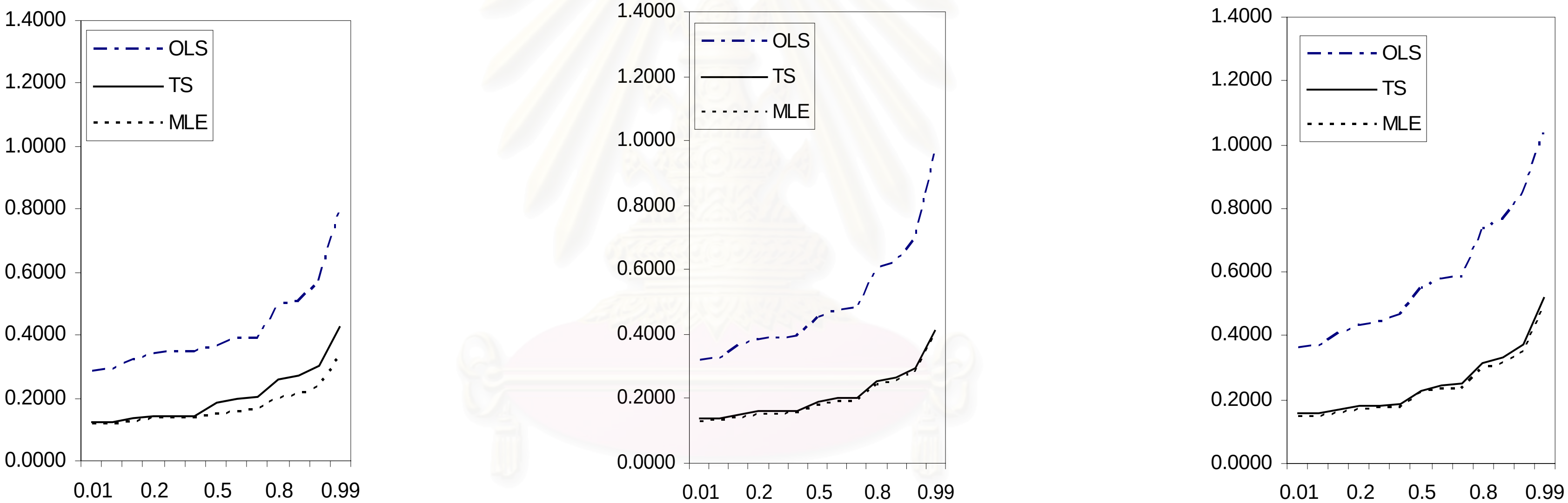


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.16 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2835	0.2863	0.3204	0.3393	0.3426	0.3459	0.3653	0.3852	0.3887	0.4888	0.5068	0.5660	0.7838
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1226	0.1239	0.1329	0.1420	0.1434	0.1448	0.1712	0.1836	0.1869	0.2361	0.2484	0.2800	0.3902
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1149	0.1161	0.1250	0.1341	0.1355	0.1367	0.1461	0.1556	0.1572	0.1989	0.2077	0.2331	0.3252
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.3190	0.3227	0.3611	0.3824	0.3860	0.3897	0.4470	0.4713	0.4757	0.5982	0.6202	0.6926	0.9592
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1380	0.1396	0.1498	0.1600	0.1616	0.1632	0.2116	0.2447	0.2490	0.3142	0.3304	0.3722	0.5184
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1293	0.1308	0.1409	0.1512	0.1526	0.1540	0.1789	0.1906	0.1923	0.2433	0.2541	0.2852	0.3979
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3588	0.3637	0.4069	0.4310	0.4418	0.4653	0.5471	0.5768	0.5821	0.7321	0.7590	0.8476	1.0326
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1552	0.1573	0.1688	0.1804	0.1822	0.1839	0.2613	0.2778	0.2806	0.3518	0.3672	0.4107	0.5679
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1455	0.1474	0.1588	0.1704	0.1720	0.1737	0.2189	0.2332	0.2353	0.2978	0.3110	0.3490	0.4870

รูปที่ 4.2.16 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

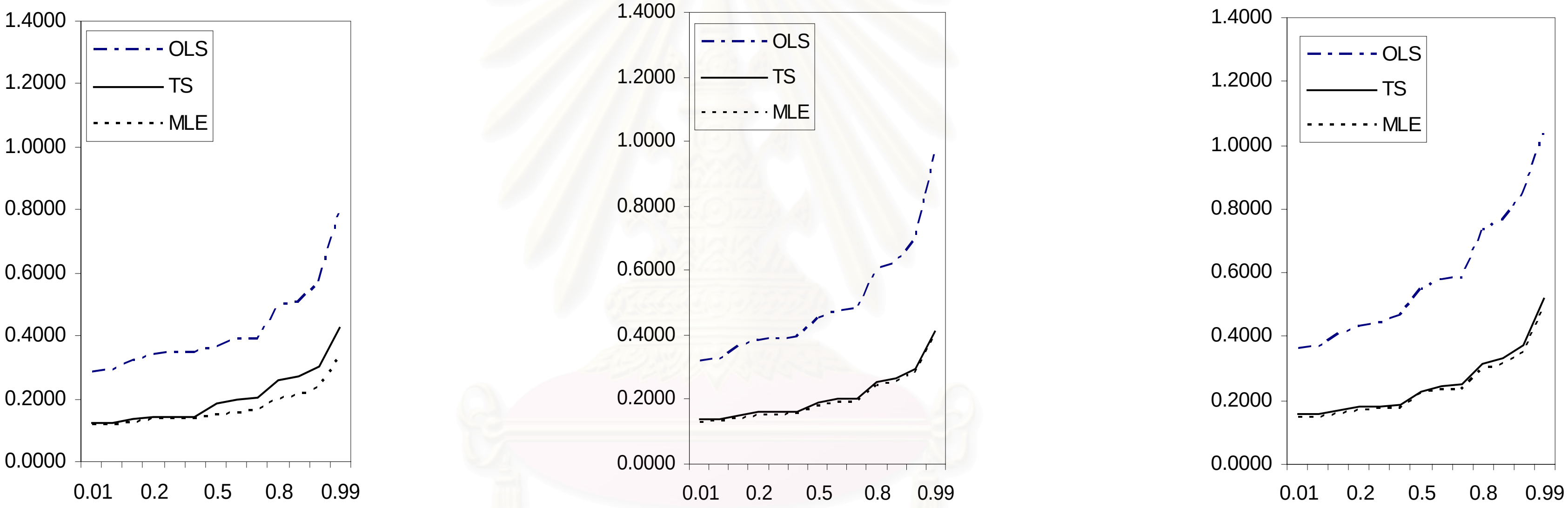


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.17 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2548	0.2574	0.2880	0.3050	0.3079	0.3109	0.3284	0.3462	0.3494	0.4394	0.4555	0.5088	0.7046
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1100	0.1111	0.1192	0.1274	0.1286	0.1299	0.1535	0.1646	0.1676	0.2118	0.2228	0.2511	0.3501
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1033	0.1044	0.1124	0.1206	0.1218	0.1229	0.1314	0.1400	0.1413	0.1788	0.1867	0.2095	0.2923
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2868	0.2901	0.3246	0.3438	0.3471	0.3504	0.4019	0.4237	0.4276	0.5378	0.5575	0.6226	0.8623
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1240	0.1254	0.1346	0.1439	0.1453	0.1466	0.1902	0.2200	0.2239	0.2826	0.2970	0.3345	0.4661
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1162	0.1176	0.1267	0.1359	0.1372	0.1385	0.1607	0.1713	0.1729	0.2187	0.2285	0.2564	0.3578
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3225	0.3269	0.3658	0.3874	0.3971	0.4183	0.4918	0.5185	0.5233	0.6581	0.6823	0.7619	0.9283
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1395	0.1414	0.1517	0.1622	0.1638	0.1653	0.2349	0.2498	0.2522	0.3162	0.3301	0.3692	0.5105
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1308	0.1326	0.1428	0.1532	0.1547	0.1561	0.1968	0.2096	0.2116	0.2677	0.2796	0.3137	0.4378

รูปที่ 4.2.17 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

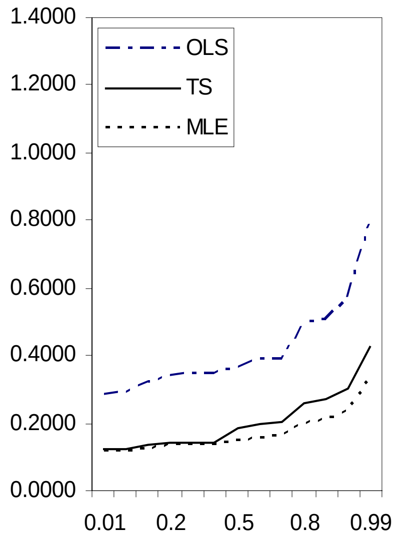


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

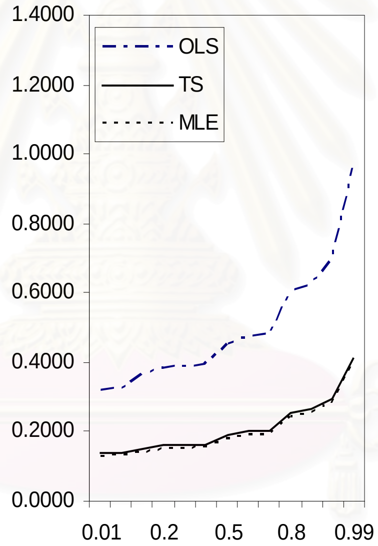
ตารางที่ 4.2.18 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	0.2459	0.2483	0.2779	0.2942	0.2971	0.2999	0.3168	0.3340	0.3371	0.4239	0.4395	0.4908	0.6797
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1061	0.1071	0.1150	0.1229	0.1241	0.1253	0.1482	0.1588	0.1617	0.2043	0.2149	0.2423	0.3377
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.0997	0.1007	0.1084	0.1163	0.1174	0.1186	0.1267	0.1350	0.1363	0.1724	0.1801	0.2021	0.2820
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	0.2766	0.2799	0.3132	0.3316	0.3348	0.3380	0.3877	0.4087	0.4125	0.5188	0.5378	0.6007	0.8318
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1196	0.1210	0.1298	0.1388	0.1402	0.1415	0.1835	0.2122	0.2159	0.2726	0.2865	0.3228	0.4496
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1121	0.1135	0.1222	0.1311	0.1324	0.1336	0.1551	0.1652	0.1668	0.2110	0.2204	0.2473	0.3451
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	0.3112	0.3154	0.3529	0.3737	0.3831	0.4035	0.4745	0.5002	0.5048	0.6349	0.6582	0.7351	0.8955
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1346	0.1364	0.1463	0.1564	0.1580	0.1595	0.2265	0.2409	0.2434	0.3050	0.3184	0.3561	0.4925
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		ประมาณค่า ϕ	0.1262	0.1279	0.1377	0.1478	0.1492	0.1506	0.1898	0.2022	0.2041	0.2583	0.2698	0.3027	0.4224

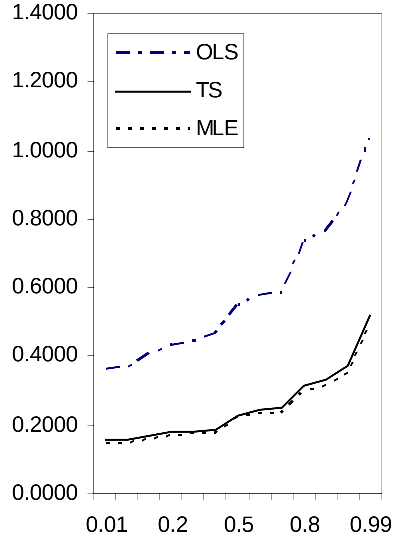
รูปที่ 4.2.18 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ ϕ ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

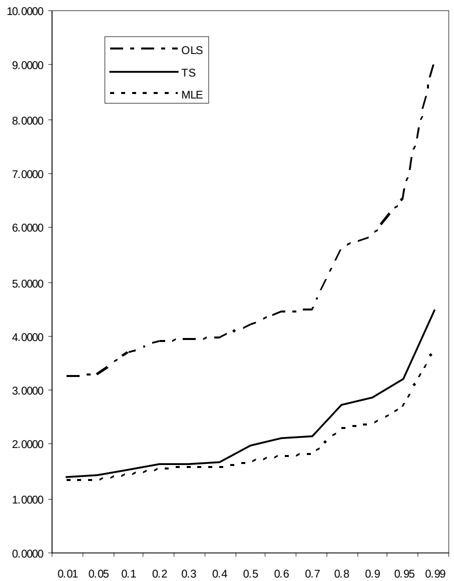


$\sigma_e^2 = 100$

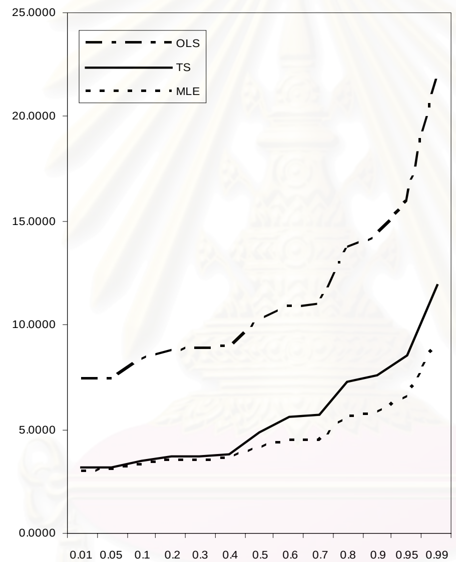
ตารางที่ 4.2.19 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	3.2590	3.2920	3.6840	3.9000	3.9380	3.9750	4.1990	4.4270	4.4680	5.6190	5.8250	6.5060	9.0100
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.5310	1.5450	1.7250	1.8250	1.8430	1.8600	2.3821	2.5312	2.5787	3.2581	3.4040	3.8837	5.3832
		ประมาณค่า ϕ	1.4090	1.4230	1.5270	1.6320	1.6480	1.6640	1.9680	2.1090	2.1481	2.7143	2.8555	3.2178	4.4858
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.4970	1.5120	1.6170	1.7230	1.7400	1.7570	1.8670	1.9780	1.9960	2.5710	2.6740	2.9660	4.1210
		ประมาณค่า ϕ	1.3210	1.3340	1.4370	1.5420	1.5570	1.5710	1.6800	1.7900	1.8070	2.2860	2.3870	2.6790	3.7380
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	7.3340	7.4180	8.3020	8.7920	8.8760	8.9600	10.2780	10.8360	10.9360	13.7520	14.2580	15.9220	22.0520
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.4440	3.4840	3.8900	4.1140	4.1540	4.1920	5.8897	6.7515	6.8683	8.6701	9.0575	10.3270	14.3027
		ประมาณค่า ϕ	3.1700	3.2080	3.4420	3.6800	3.7140	3.7500	4.8651	5.6266	5.7244	7.2267	7.5975	8.5579	11.9177
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.3680	3.4100	3.6440	3.8860	3.9220	3.9600	4.5680	4.8400	4.8860	6.2940	6.5440	7.2600	10.0880
		ประมาณค่า ϕ	2.9720	3.0080	3.2400	3.4760	3.5100	3.5420	4.1120	4.3800	4.4200	5.5940	5.8420	6.5580	9.1480
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	20.6250	20.9050	23.3900	24.7700	25.3900	26.7400	31.4450	33.1500	33.4600	42.0750	43.6200	48.7200	59.3500
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	9.6850	9.8150	10.9600	11.5900	11.7000	12.0200	18.1808	19.1591	19.7765	24.2619	25.1630	28.4852	39.1697
		ประมาณค่า ϕ	8.9150	9.0350	9.7000	10.3700	10.4700	10.5700	15.0197	15.9669	16.1283	20.2192	21.1053	23.6061	32.6433
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	9.4750	9.6000	10.2700	10.9450	11.5400	11.9300	13.9800	14.8100	14.9500	19.2550	20.0250	22.2100	30.8650
		ประมาณค่า ϕ	8.3600	8.4750	9.1300	9.7900	9.8850	9.9800	12.5800	13.4050	13.5250	17.1150	17.8800	20.0600	27.9900

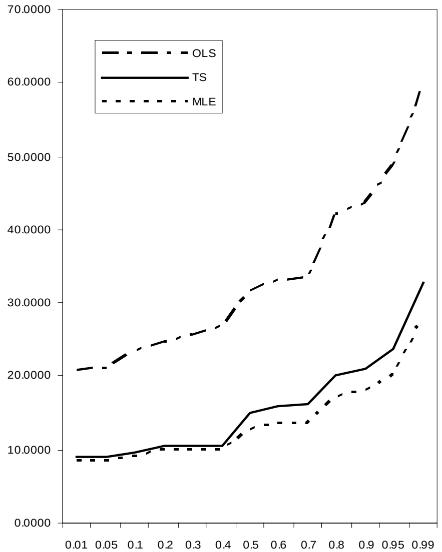
รูปที่ 4.2.19 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

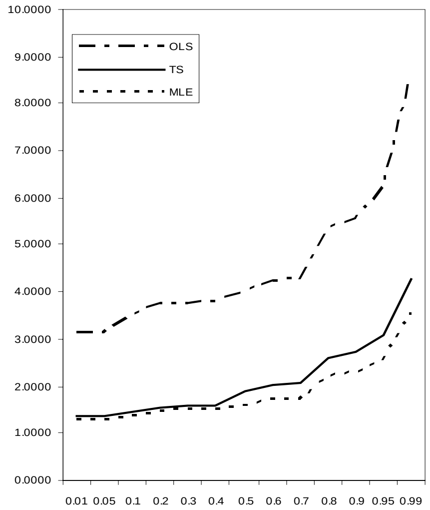


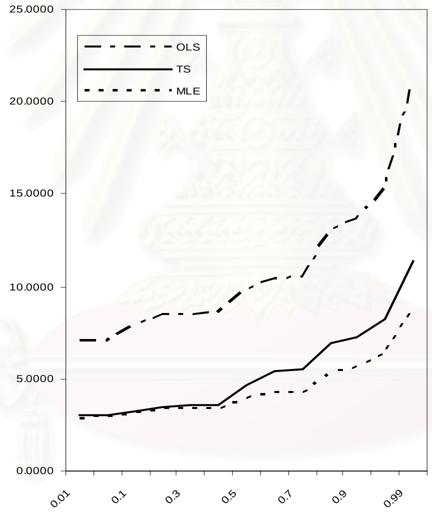
$\sigma_e^2 = 100$

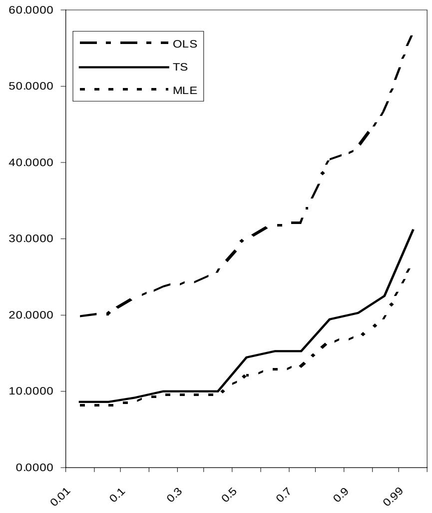
ตารางที่ 4.2.20 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	3.1130	3.1450	3.5190	3.7260	3.7620	3.7980	4.0120	4.2290	4.2680	5.3680	5.5660	6.2150	8.6070
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.4630	1.4770	1.6480	1.7450	1.7610	1.7780	2.2755	2.4181	2.4634	3.1133	3.2522	3.7108	5.1422
		ประมาณค่า ϕ	1.3460	1.3600	1.4590	1.5600	1.5750	1.5890	1.8803	2.0160	2.0532	2.5924	2.7278	3.0752	4.2845
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.4300	1.4450	1.5450	1.6470	1.6620	1.6780	1.7830	1.8910	1.9070	2.4570	2.5550	2.8330	3.9370
		ประมาณค่า ϕ	1.2620	1.2740	1.3730	1.4730	1.4880	1.5020	1.6050	1.7090	1.7250	2.1840	2.2810	2.5600	3.5700
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	7.0060	7.0880	7.9300	8.4000	8.4800	8.5600	9.8200	10.3520	10.4480	13.1380	13.6200	15.2140	21.0680
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.2920	3.3280	3.7160	3.9300	3.9660	4.0040	5.6274	6.4489	6.5608	8.2832	8.6525	9.8658	13.6627
		ประมาณค่า ϕ	3.0300	3.0660	3.2880	3.5160	3.5480	3.5840	4.6499	5.3753	5.4686	6.9043	7.2575	8.1724	11.3868
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.2180	3.2560	3.4820	3.7100	3.7480	3.7840	4.3640	4.6240	4.6680	6.0120	6.2540	6.9360	9.6380
		ประมาณค่า ϕ	2.8400	2.8720	3.0960	3.3200	3.3500	3.3840	3.9280	4.1860	4.2240	5.3440	5.5840	6.2660	8.7420
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	19.7000	19.9700	22.3500	23.6600	24.2550	25.5450	30.0400	31.6700	31.9650	40.1950	41.6750	46.5450	56.6950
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	9.2550	9.3800	10.4700	11.0700	11.1750	11.4800	17.3665	18.3044	18.8928	23.1790	24.0393	27.2186	37.4244
		ประมาณค่า ϕ	8.5200	8.6400	9.2650	9.9000	10.0000	10.0950	14.3467	15.2537	15.4031	19.3177	20.1633	22.5496	31.1879
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	9.0500	9.1750	9.8100	10.4550	11.0300	11.4000	13.3500	14.1500	14.2800	18.3950	19.1300	21.2150	29.4800
		ประมาณค่า ϕ	7.9850	8.0900	8.7250	9.3550	9.4450	9.5350	12.0150	12.8050	12.9250	16.3500	17.0800	19.1650	26.7400

รูปที่ 4.2.20 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน





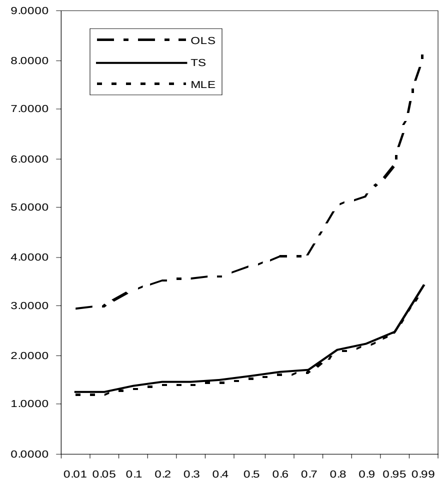


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

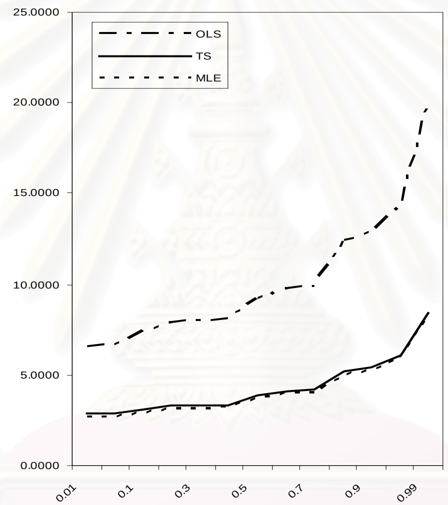
ตารางที่ 4.2.21 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	2.9240	2.9540	3.3050	3.5000	3.5340	3.5680	3.7690	3.9720	4.0090	5.0430	5.2280	5.8390	8.0850
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.3720	1.3850	1.5460	1.6360	1.6520	1.6670	1.9250	2.0270	2.0450	2.5610	2.6540	3.0020	4.1240
		ประมาณค่า ϕ	1.2620	1.2740	1.3670	1.4620	1.4750	1.4890	1.5880	1.6870	1.7020	2.1330	2.2230	2.4840	3.4320
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.3440	1.3570	1.4510	1.5470	1.5620	1.5770	1.6750	1.7750	1.7910	2.3080	2.4000	2.6610	3.6990
		ประมาณค่า ϕ	1.1870	1.1980	1.2900	1.3840	1.3970	1.4110	1.5080	1.6060	1.6210	2.0510	2.1430	2.4050	3.3550
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	6.5800	6.6600	7.4500	7.8900	7.9660	8.0400	9.2240	9.7240	9.8140	12.3440	12.7960	14.2900	19.7900
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.0900	3.1260	3.4900	3.6920	3.7280	3.7640	4.7140	4.9640	5.0100	6.2760	6.5020	7.3560	10.1060
		ประมาณค่า ϕ	2.8460	2.8800	3.0900	3.3040	3.3340	3.3660	3.8960	4.1380	4.1780	5.2280	5.4560	6.0940	8.4180
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.0220	3.0600	3.2720	3.4860	3.5180	3.5520	4.1000	4.3440	4.3840	5.6480	5.8740	6.5140	9.0540
		ประมาณค่า ϕ	2.6660	2.7000	2.9080	3.1180	3.1480	3.1800	3.6880	3.9320	3.9680	5.0200	5.2440	5.8840	8.2100
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	18.5100	18.7600	20.9900	22.2300	22.7850	24.0000	28.2200	29.7500	30.0300	37.7600	39.1500	43.7200	53.2650
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.6900	8.8050	9.8350	10.4000	10.5000	10.7850	14.4250	15.1900	15.6650	19.2050	19.8950	22.5050	30.9200
		ประมาณค่า ϕ	8.0050	8.1150	8.7000	9.3100	9.3950	9.4850	11.9150	12.6550	12.7750	16.0000	16.6850	18.6500	25.7650
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.5000	8.6150	9.2150	9.8250	10.3600	10.7050	12.5400	13.2950	13.4150	17.2850	17.9700	19.9300	27.6950
		ประมาณค่า ϕ	7.5000	7.6050	8.1950	8.7850	8.8700	8.9550	11.2850	12.0250	12.1350	15.3600	16.0450	18.0050	25.1250

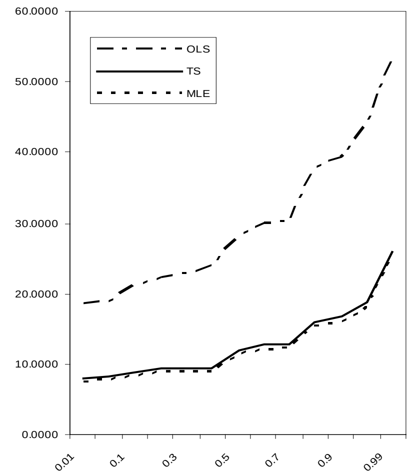
รูปที่ 4.2.21 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 3 ปัจจัย 3 บล็อก (3x3) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

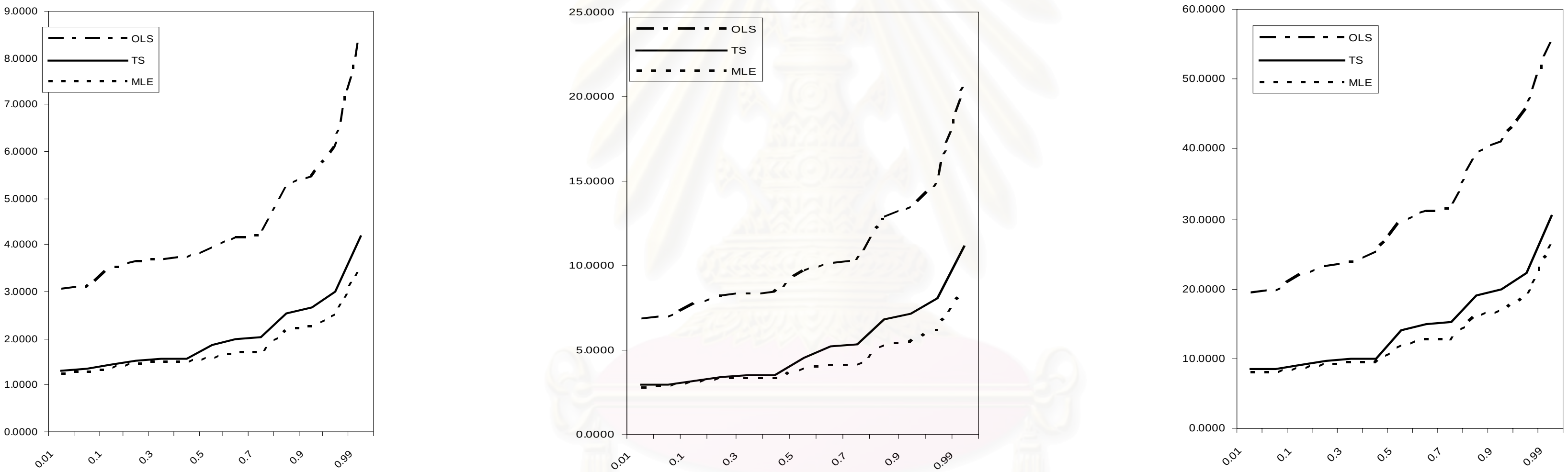


$\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.22 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	3.0520	3.0830	3.4490	3.6520	3.6880	3.7230	3.9330	4.1450	4.1840	5.2630	5.4560	6.0930	8.4380
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.4340	1.4470	1.6160	1.7090	1.7250	1.7420	2.2311	2.3710	2.4148	3.0506	3.1890	3.6378	5.0404
		ประมาณค่า ϕ	1.3200	1.3330	1.4300	1.5290	1.5440	1.5590	1.8437	1.9757	2.0125	2.5422	2.6738	3.0148	4.2015
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.4020	1.4160	1.5150	1.6140	1.6300	1.6450	1.7470	1.8520	1.8700	2.4080	2.5040	2.7770	3.8600
		ประมาณค่า ϕ	1.2380	1.2500	1.3460	1.4440	1.4580	1.4710	1.5740	1.6760	1.6910	2.1400	2.2360	2.5080	3.5000
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	6.8680	6.9480	7.7740	8.2320	8.3140	8.3920	9.6260	10.1480	10.2420	12.8800	13.3540	14.9120	20.6500
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.2260	3.2640	3.6420	3.8520	3.8880	3.9260	5.5153	6.3220	6.4329	8.1220	8.4825	9.6718	13.3934
		ประมาณค่า ϕ	2.9700	3.0060	3.2240	3.4480	3.4800	3.5140	4.5557	5.2680	5.3603	6.7654	7.1150	8.0136	11.1608
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.1560	3.1940	3.4140	3.6380	3.6740	3.7080	4.2780	4.5340	4.5760	5.8940	6.1280	6.7980	9.4460
		ประมาณค่า ϕ	2.7840	2.8180	3.0340	3.2560	3.2860	3.3180	3.8500	4.1020	4.1400	5.2400	5.4740	6.1400	8.5680
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	19.3150	19.5750	21.9050	23.2000	23.7800	25.0450	29.4500	31.0450	31.3350	39.4050	40.8500	45.6250	55.5800
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	9.0750	9.1950	10.2600	10.8550	10.9600	11.2550	17.0216	17.9479	18.5189	22.7197	23.5626	26.6790	36.6796
		ประมาณค่า ϕ	8.3500	8.4650	9.0800	9.7100	9.8050	9.8950	14.0583	14.9537	15.1086	18.9321	19.7660	22.1009	30.5739
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.8750	8.9950	9.6150	10.2500	10.8100	11.1750	13.0900	13.8700	14.0000	18.0300	18.7550	20.8000	28.9050
		ประมาณค่า ϕ	7.8300	7.9350	8.5500	9.1700	9.2550	9.3500	11.7800	12.5500	12.6650	16.0300	16.7450	18.7850	26.2150

รูปที่ 4.2.22 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

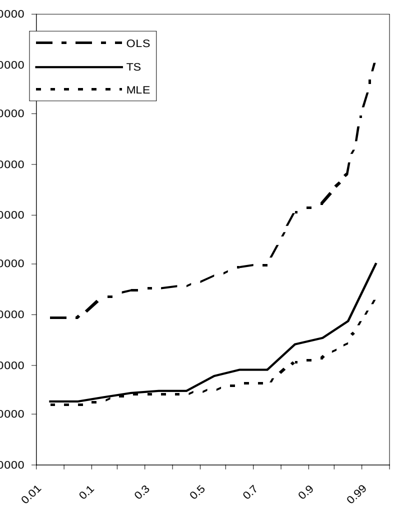


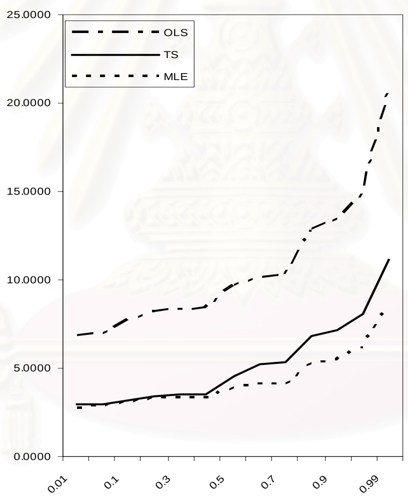
$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

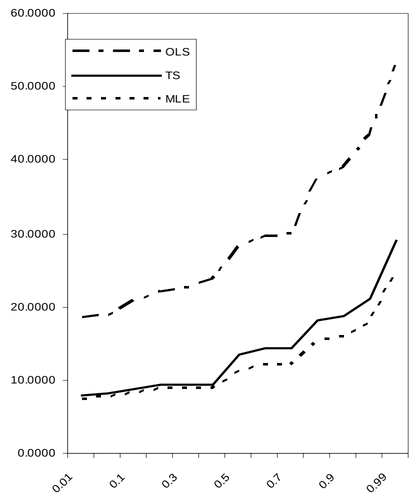
ตารางที่ 4.2.23 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2=1$	OLS	_	2.9070	2.9360	3.2850	3.4780	3.5120	3.5450	3.7450	3.9480	3.9850	5.0110	5.1960	5.8020	8.0350
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.3650	1.3790	1.5390	1.6280	1.6430	1.6590	2.1245	2.2579	2.2996	2.9047	3.0360	3.4638	4.8005
		ประมาณค่า ϕ	1.2570	1.2690	1.3620	1.4560	1.4700	1.4840	1.7549	1.8816	1.9165	2.4202	2.5461	2.8698	4.0002
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.3350	1.3490	1.4420	1.5370	1.5520	1.5660	1.6640	1.7640	1.7800	2.2930	2.3850	2.6450	3.6760
		ประมาณค่า ϕ	1.1780	1.1900	1.2820	1.3750	1.3880	1.4020	1.4980	1.5960	1.6110	2.0380	2.1290	2.3890	3.3340
$\sigma_e^2=25$	OLS	_	6.5400	6.6160	7.4040	7.8400	7.9160	7.9900	9.1660	9.6640	9.7520	12.2660	12.7160	14.2020	19.6660
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.0720	3.1080	3.4680	3.6680	3.7040	3.7400	5.2530	6.0195	6.1254	7.7326	8.0775	9.2106	12.7533
		ประมาณค่า ϕ	2.8280	2.8620	3.0700	3.2820	3.3140	3.3460	4.3383	5.0166	5.1045	6.4455	6.7750	7.6306	10.6274
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.0040	3.0400	3.2500	3.4640	3.4980	3.5300	4.0740	4.3180	4.3580	5.6120	5.8360	6.4740	8.9960
		ประมาณค่า ϕ	2.6520	2.6820	2.8900	3.1000	3.1300	3.1600	3.6660	3.9060	3.9420	4.9900	5.2120	5.8480	8.1600
$\sigma_e^2=100$	OLS	_	18.3950	18.6400	20.8600	22.0900	22.6450	23.8500	28.0450	29.5650	29.8400	37.5250	38.9050	43.4500	52.9300
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.6400	8.7550	9.7700	10.3350	10.4350	10.7200	16.2129	17.0875	17.6351	21.6367	22.4390	25.4066	34.9343
		ประมาณค่า ϕ	7.9550	8.0600	8.6500	9.2450	9.3350	9.4250	13.3910	14.2406	14.3834	18.0306	18.8183	21.0501	29.1129
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.4500	8.5650	9.1600	9.7600	10.2900	10.6400	12.4650	13.2100	13.3300	17.1750	17.8600	19.8050	27.5250
		ประมาณค่า ϕ	7.4550	7.5600	8.1400	8.7350	8.8150	8.9000	11.2200	11.9500	12.0650	15.2650	15.9450	17.8900	24.9650

รูปที่ 4.2.23 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน





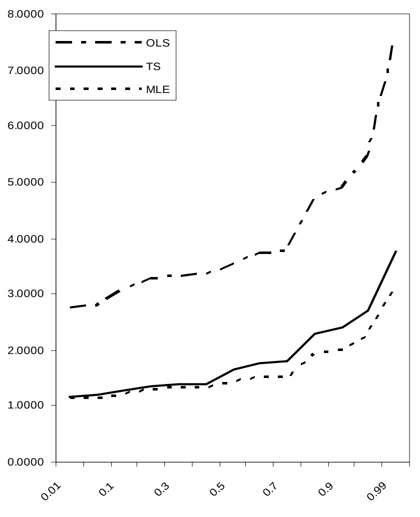


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

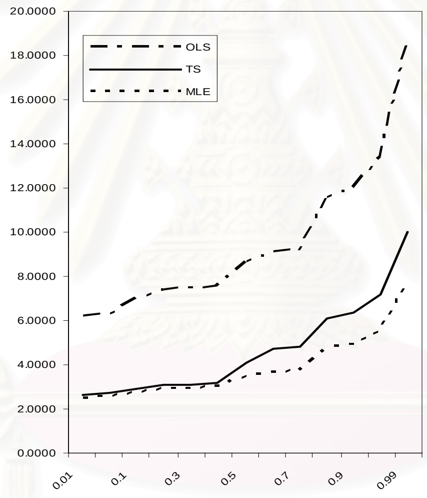
ตารางที่ 4.2.24 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	2.7350	2.7630	3.0910	3.2730	3.3050	3.3360	3.5240	3.7160	3.7500	4.7160	4.8900	5.4610	7.5620
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.2830	1.2960	1.4470	1.5300	1.5450	1.5600	1.9980	2.1224	2.1606	2.7303	2.8543	3.2573	4.5127
		ประมาณค่า ϕ	1.1800	1.1920	1.2790	1.3670	1.3800	1.3940	1.6472	1.7674	1.8001	2.2732	2.3909	2.6958	3.7569
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.2570	1.2690	1.3570	1.4460	1.4610	1.4740	1.5660	1.6600	1.6760	2.1580	2.2440	2.4900	3.4590
		ประมาณค่า ϕ	1.1090	1.1200	1.2060	1.2940	1.3070	1.3190	1.4100	1.5020	1.5160	1.9190	2.0040	2.2490	3.1380
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	6.1540	6.2280	6.9680	7.3780	7.4500	7.5200	8.6260	9.0940	9.1780	11.5420	11.9680	13.3640	18.5080
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	2.8900	2.9240	3.2640	3.4520	3.4860	3.5180	4.9436	5.6657	5.7638	7.2788	7.6000	8.6663	12.0040
		ประมาณค่า ϕ	2.6620	2.6920	2.8880	3.0880	3.1200	3.1480	4.0827	4.7214	4.8044	6.0661	6.3750	7.1820	10.0025
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	2.8280	2.8600	3.0580	3.2600	3.2920	3.3220	3.8340	4.0640	4.1020	5.2820	5.4920	6.0920	8.4680
		ประมาณค่า ϕ	2.4960	2.5240	2.7200	2.9180	2.9460	2.9720	3.4500	3.6760	3.7120	4.6960	4.9040	5.5040	7.6800
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	17.3100	17.5450	19.6350	20.7850	21.3100	22.4400	26.3900	27.8250	28.0800	35.3150	36.6150	40.8900	49.8150
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.1300	8.2400	9.1950	9.7250	9.8250	10.0900	15.2572	16.0857	16.5985	20.3610	21.1167	23.9071	32.8764
		ประมาณค่า ϕ	7.4850	7.5850	8.1400	8.7000	8.7900	8.8700	12.6050	13.4029	13.5394	16.9703	17.7117	19.8118	27.3960
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	7.9550	8.0600	8.6200	9.1850	9.6850	10.0150	11.7300	12.4300	12.5450	16.1600	16.8050	18.6400	25.9050
		ประมาณค่า ϕ	7.0200	7.1100	7.6600	8.2200	8.3000	8.3750	10.5550	11.2500	11.3550	14.3650	15.0050	16.8400	23.4950

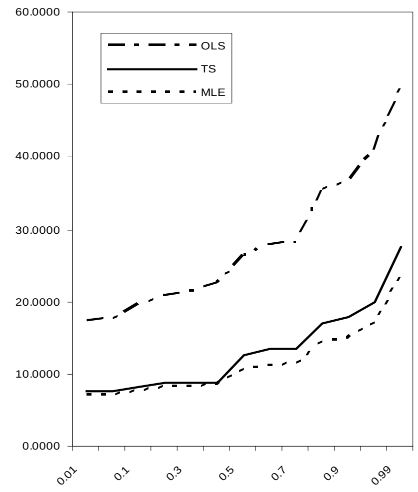
รูปที่ 4.2.24 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 4 ปัจจัย 4 บล็อก (4x4) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

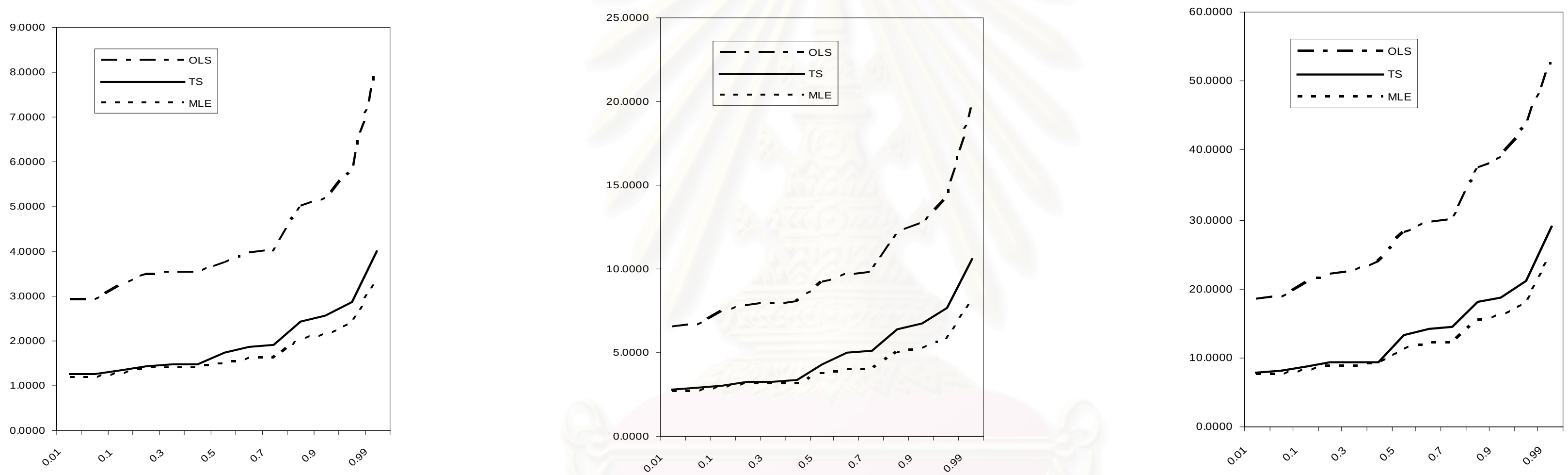


$\sigma_e^2 = 100$

ตารางที่ 4.2.25 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	2.9030	2.9320	3.2810	3.4740	3.5080	3.5420	3.7410	3.9440	3.9810	5.0060	5.1890	5.7960	8.0260
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.3630	1.3770	1.5370	1.6260	1.6410	1.6570	2.1223	2.2557	2.2973	2.9013	3.0326	3.4603	4.7947
		ประมาณค่า ϕ	1.2560	1.2680	1.3610	1.4540	1.4690	1.4820	1.7527	1.8794	1.9142	2.4179	2.5438	2.8675	3.9956
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.3340	1.3470	1.4400	1.5350	1.5500	1.5650	1.6620	1.7620	1.7790	2.2910	2.3820	2.6420	3.6710
		ประมาณค่า ϕ	1.1770	1.1890	1.2800	1.3730	1.3870	1.4000	1.4960	1.5940	1.6090	2.0360	2.1270	2.3870	3.3300
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	6.5320	6.6100	7.3960	7.8320	7.9060	7.9820	9.1560	9.6520	9.7420	12.2520	12.7020	14.1840	19.6440
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.0680	3.1040	3.4640	3.6660	3.7000	3.7340	5.2463	6.0122	6.1180	7.7252	8.0675	9.1980	12.7406
		ประมาณค่า ϕ	2.8260	2.8580	3.0680	3.2780	3.3100	3.3420	4.3338	5.0118	5.0996	6.4356	6.7675	7.6230	10.6172
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	3.0020	3.0360	3.2460	3.4600	3.4940	3.5260	4.0700	4.3120	4.3520	5.6080	5.8300	6.4660	8.9860
		ประมาณค่า ϕ	2.6480	2.6800	2.8860	3.0960	3.1260	3.1540	3.6640	3.9020	3.9380	4.9840	5.2040	5.8420	8.1500
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	18.3700	18.6200	20.8350	22.0650	22.6200	23.8200	28.0150	29.5300	29.8050	37.4850	38.8600	43.4000	52.8700
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.6300	8.7450	9.7600	10.3250	10.4250	10.7100	16.1903	17.0706	17.6182	21.6084	22.4106	25.3726	34.8945
		ประมาณค่า ϕ	7.9450	8.0500	8.6400	9.2350	9.3250	9.4150	13.3797	14.2236	14.3721	18.0136	18.8013	21.0274	29.0788
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	8.4400	8.5550	9.1500	9.7500	10.2800	10.6300	12.4500	13.1950	13.3200	17.1550	17.8350	19.7850	27.4900
		ประมาณค่า ϕ	7.4500	7.5500	8.1300	8.7250	8.8050	8.8950	11.2050	11.9400	12.0500	15.2500	15.9250	17.8700	24.9350

รูปที่ 4.2.25 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

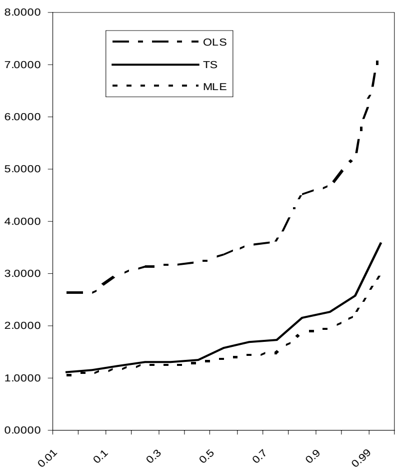


$\sigma_e^2 = 1$ $\sigma_e^2 = 25$ $\sigma_e^2 = 100$

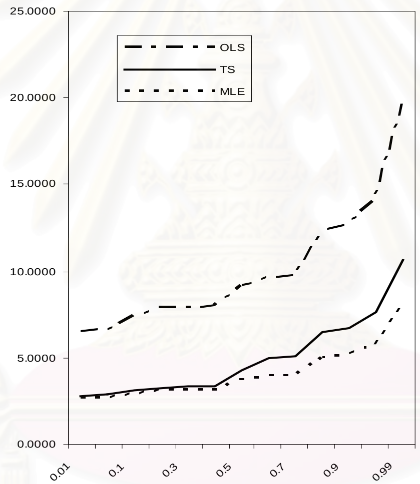
ตารางที่ 4.2.26 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	2.6070	2.6340	2.9470	3.1200	3.1500	3.1800	3.3600	3.5410	3.5740	4.4950	4.6600	5.2050	7.2080
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.2240	1.2360	1.3790	1.4580	1.4730	1.4860	1.9048	2.0238	2.0600	2.6026	2.7209	3.1042	4.3021
		ประมาณค่า ϕ	1.1250	1.1360	1.2190	1.3030	1.3160	1.3290	1.5707	1.6845	1.7153	2.1671	2.2793	2.5694	3.5814
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.1980	1.2100	1.2940	1.3790	1.3920	1.4050	1.4930	1.5820	1.5970	2.0570	2.1390	2.3730	3.2970
		ประมาณค่า ϕ	1.0570	1.0680	1.1500	1.2340	1.2460	1.2570	1.3440	1.4320	1.4450	1.8290	1.9100	2.1440	2.9900
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	5.8680	5.9360	6.6420	7.0340	7.1020	7.1680	8.2240	8.6680	8.7500	11.0040	11.4060	12.7380	17.6420
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	2.7560	2.7860	3.1120	3.2900	3.3240	3.3540	4.7127	5.3997	5.4956	6.9366	7.2450	8.2631	11.4402
		ประมาณค่า ϕ	2.5360	2.5660	2.7540	2.9440	2.9720	3.0000	3.8921	4.4994	4.5805	5.7809	6.0775	6.8468	9.5352
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	2.6960	2.7260	2.9160	3.1080	3.1380	3.1680	3.6540	3.8720	3.9100	5.0360	5.2360	5.8080	8.0700
		ประมาณค่า ϕ	2.3780	2.4060	2.5920	2.7820	2.8060	2.8340	3.2880	3.5040	3.5360	4.4740	4.6760	5.2460	7.3200
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	16.5000	16.7200	18.7100	19.8150	20.3150	21.3950	25.1600	26.5200	26.7700	33.6650	34.9000	38.9750	47.4850
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	7.7450	7.8500	8.7650	9.2700	9.3600	9.6150	14.5390	15.3273	15.8223	19.4084	20.1292	22.7882	31.3414
		ประมาณค่า ϕ	7.1350	7.2300	7.7600	8.2950	8.3750	8.4550	12.0112	12.7803	12.9049	16.1765	16.8831	18.8803	26.1169
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	7.5850	7.6850	8.2150	8.7550	9.2350	9.5450	11.1850	11.8500	11.9600	15.4050	16.0200	17.7650	24.6950
		ประมาณค่า ϕ	6.6900	6.7800	7.3050	7.8350	7.9100	7.9850	10.0650	10.7200	10.8200	13.6900	14.3050	16.0450	22.3950

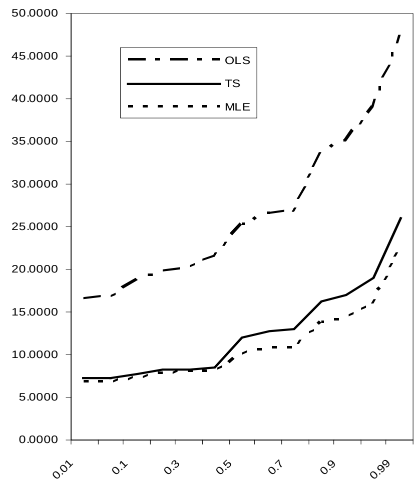
รูปที่ 4.2.26 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$

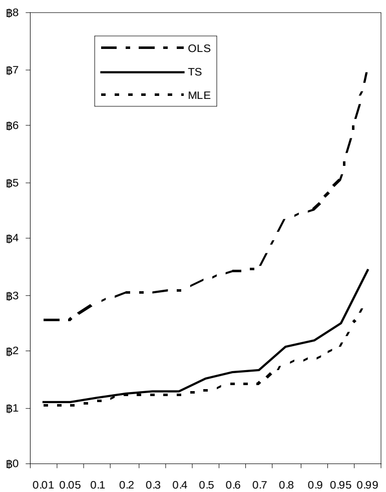


$\sigma_e^2 = 100$

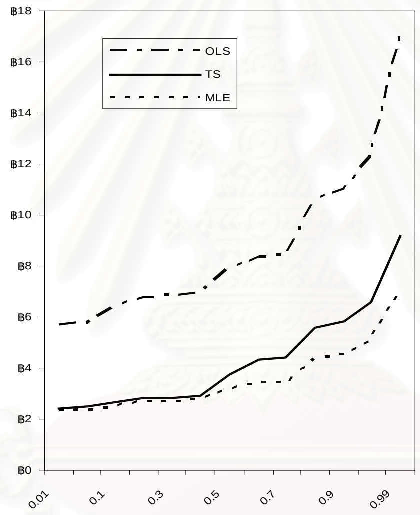
ตารางที่ 4.2.27 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน

σ_e^2	วิธีการประมาณค่า		ϕ												
			0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$\sigma_e^2 = 1$	OLS	_	2.513	2.5380	2.8400	3.0070	3.0360	3.0650	3.2380	3.4130	3.4450	4.3320	4.4920	5.0160	6.9470
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.179	1.1910	1.3290	1.4060	1.4190	1.4330	1.8348	1.9499	1.9854	2.5091	2.6220	2.9916	4.1453
		ประมาณค่า ϕ	1.084	1.0950	1.1750	1.2560	1.2680	1.2800	1.5140	1.6229	1.6532	2.0885	2.1965	2.4766	3.4515
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	1.155	1.1660	1.2470	1.3290	1.3420	1.3540	1.4390	1.5250	1.5390	1.9830	2.0620	2.2870	3.1780
		ประมาณค่า ϕ	1.019	1.0290	1.1080	1.1890	1.2000	1.2120	1.2950	1.3800	1.3930	1.7620	1.8410	2.0660	2.8820
$\sigma_e^2 = 25$	OLS	_	5.654	5.7200	6.4000	6.7780	6.8440	6.9080	7.9240	8.3540	8.4320	10.6040	10.9940	12.2780	17.0020
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	2.656	2.6860	2.9980	3.1720	3.2020	3.2320	4.5401	5.2045	5.2964	6.6861	6.9825	7.9632	11.0261
		ประมาณค่า ϕ	2.446	2.4740	2.6540	2.8380	2.8640	2.8920	3.7509	4.3383	4.4132	5.5726	5.8575	6.5974	9.1897
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	2.598	2.6280	2.8100	2.9960	3.0240	3.0520	3.5220	3.7320	3.7680	4.8520	5.0460	5.5980	7.7780
		ประมาณค่า ϕ	2.292	2.3200	2.4980	2.6800	2.7060	2.7320	3.1700	3.3780	3.4080	4.3140	4.5060	5.0560	7.0540
$\sigma_e^2 = 100$	OLS	_	15.9	16.1150	18.0350	19.1000	19.5750	20.6200	24.2450	25.5600	25.7950	32.4450	33.6350	37.5650	45.7600
	TS	ไม่ประมาณค่า ϕ	7.47	7.5700	8.4500	8.9350	9.0200	9.2650	14.0131	14.7726	15.2502	18.7053	19.4028	21.9646	30.2044
		ประมาณค่า ϕ	6.875	6.9700	7.4800	7.9950	8.0700	8.1500	11.5758	12.3105	12.4347	15.5868	16.2702	18.1987	25.1675
	MLE	ไม่ประมาณค่า ϕ	7.305	7.4050	7.9200	8.4400	8.9000	9.2000	10.7750	11.4200	11.5250	14.8450	15.4400	17.1250	23.7950
		ประมาณค่า ϕ	6.445	6.5350	7.0400	7.5500	7.6250	7.6950	9.7000	10.3350	10.4300	13.1950	13.7850	15.4650	21.5850

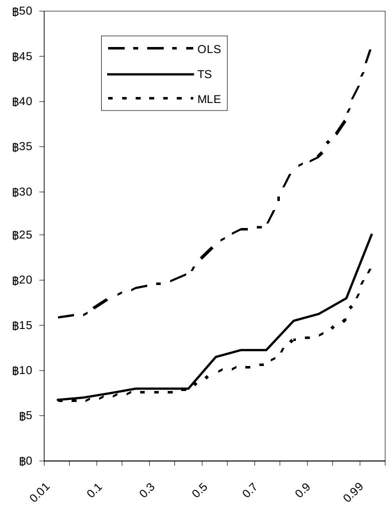
รูปที่ 4.2.27 การเปรียบเทียบค่า MSE ของค่าประมาณ σ_e^2 ในกรณี 5 ปัจจัย 5 บล็อก (5x5) และเก็บข้อมูลซ้ำ 12 ครั้ง โดยที่ความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน



$\sigma_e^2 = 1$



$\sigma_e^2 = 25$



$\sigma_e^2 = 100$

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ กรณีข้อมูลระยะยาว โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุด ซึ่งเป็นวิธีการมาตรฐานที่ใช้ในการประมาณค่าได้ดีในกรณีที่ข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน เทียบกับวิธีประมาณค่าแบบสองขั้น ที่ได้พัฒนาจากวิธีประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุด เพื่อให้มีประสิทธิภาพในการประมาณค่ามากขึ้นเมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นการหาตัวประมาณที่ใช้การแจกแจงของข้อมูลเป็นพื้นฐาน ซึ่งน่าจะเป็นตัวประมาณที่มีความถูกต้องมากที่สุดเมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน ดังนั้น ผู้วิจัยจึงสนใจทำการเปรียบเทียบค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการดังกล่าวข้างต้น ว่าวิธีใดมีความสามารถในการประมาณค่าได้ถูกต้องมากที่สุด

สำหรับงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนดขึ้น ดังนี้

1. แผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์อิทธิพลคงที่ขนาด 3x3, 4x4 และ 5x5
2. มีการเก็บข้อมูลซ้ำจำนวน 3, 6 และ 12 ครั้ง
3. ค่าความแปรปรวนเป็น 1, 25 และ 100
4. ค่าอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งเป็น 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95 และ 0.99

ซึ่งการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์จะแยกออกเป็นสามส่วน คือ การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ การประมาณค่าความแปรปรวน และการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง โดยที่ผู้วิจัยได้ทำการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยในการเปรียบเทียบการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบ และใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยในการเปรียบเทียบการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน และค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบอัตตถดถอย

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1 ผลการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระกัน

จากการเปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์โดยใช้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยและค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเมื่อค่าความคลาดเคลื่อนไม่มีสหสัมพันธ์กัน พบว่า วิธีการประมาณค่ากำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ วิธีการประมาณค่าแบบสองขั้นและการประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ไม่มีการประมาณค่า ϕ จะให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยและค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเท่ากัน เนื่องจากสูตรในการประมาณค่าเป็นสูตรเดียวกัน ทั้งนี้ค่าประมาณค่าที่ได้จากวิธีการทั้งสาม จะมีความผิดพลาดน้อยกว่าวิธีการประมาณค่าที่มีการประมาณค่า ϕ เนื่องจากการเพิ่มค่า ϕ ลงไปในสูตรการประมาณจะทำให้ค่าประมาณที่ได้เบี่ยงเบนจากความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น

ความผิดพลาดของการประมาณขึ้นอยู่กับค่าความแปรปรวนของข้อมูล โดยการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบเมื่อค่าความแปรปรวนต่ำจะมีความผิดพลาดน้อยกว่าเมื่อค่าความแปรปรวนสูง และเมื่อข้อมูลมีการเก็บข้อมูลซ้ำมากขึ้นการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบก็จะมีความผิดพลาดน้อยลง ทั้งนี้ เนื่องมาจากข้อมูลที่นำมาใช้คำนวณมีจำนวนมากขึ้น

5.1.2 ผลการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง

จากการเปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์โดยใช้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยและค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง พบว่า วิธีการประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ที่มีการประมาณค่า ϕ เป็นวิธีการประมาณค่าที่ดีที่สุด ในทุกกรณี รองลงมาคือ การประมาณค่าแบบสองขั้น ที่มีการประมาณค่า ϕ โดยวิธีการทั้งสองจะให้ค่าประมาณใกล้เคียงกันเมื่อค่าอัตตสหสัมพันธ์มีค่าอยู่ระหว่าง 0.01 และ 0.4 และจะมีค่าประมาณต่างกันมากขึ้นเมื่อค่าอัตตสหสัมพันธ์มากขึ้น

ความผิดพลาดของการประมาณขึ้นอยู่กับค่าความแปรปรวนของข้อมูล จำนวนซ้ำของการเก็บ และค่าอัตตถดถอย โดยการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบเมื่อค่าความแปรปรวนต่ำจะมีความผิดพลาดน้อยกว่าเมื่อค่าความแปรปรวนสูง และเมื่อมีการเก็บข้อมูลซ้ำมากขึ้นการ

ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในตัวแบบก็จะมีความผิดพลาดน้อยลง แต่เมื่อค่าอัตตถดถอยมากขึ้น การประมาณค่าก็จะยิ่งมีความผิดพลาดมากยิ่งขึ้นด้วย

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ด้านการศึกษา

จากการศึกษาผู้ทำการศึกษาพบว่ายังมีการเปรียบเทียบที่ไม่เพียงพอ เมื่อมีการศึกษาในครั้งต่อไปควรที่ทำการศึกษาเพิ่มเติมดังนี้

- ควรศึกษาเพิ่มเติมในกรณีจำนวนซ้ำของการเก็บข้อมูลมากกว่านี้

- ควรศึกษาเพิ่มเติมในกรณีค่าอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งมีระยะห่างของแต่ละค่าที่แคบกว่านี้ และยังควรทำการศึกษาในกรณีที่ค่าอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่งมีค่าเป็นลบ

- ควรศึกษาเพิ่มเติมในกรณีค่าความแปรปรวนมีความผันแปรมากกว่านี้

- ควรมีการศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับคุณลักษณะของตัวประมาณ เช่น ความแปรปรวนของตัวประมาณ เพื่อหาตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดต่อไป

- การคำนวณค่าของโปรแกรมได้กระทำกับข้อมูลที่เป็นเมตริกซ์ ทำให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อนในการปัดเศษได้ ดังนั้นในการคำนวณจึงอาจจะจำเป็นต้องเพิ่มโปรแกรมในส่วนของการปัดเศษ เพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น

- ในส่วนของโปรแกรมที่ใช้จำลองและคำนวณค่า ควรที่จะเลือกใช้โปรแกรมที่มีลักษณะเปิด เนื่องจากโปรแกรม S-plus ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ พบว่ามีข้อจำกัดในการใช้ทำงานของโปรแกรมที่เขียนขึ้นค่อนข้างมาก กล่าวคือ ยิ่งมีความซับซ้อนของโปรแกรมสูงมากขึ้นเท่าไหร่ยิ่งทำให้ตัวโปรแกรม ทำงานได้ช้ามากขึ้น รวมไปถึงการที่โปรแกรมจะหยุดทำงาน ซึ่งทำให้โปรแกรมไม่สามารถที่จะทำงานต่อเนื่องได้เท่าที่ควร

2. ด้านการนำไปใช้ประโยชน์

- ควรตรวจสอบลักษณะของข้อมูลความคลาดเคลื่อนเบื้องต้นก่อนว่ามีลักษณะอย่างไร ตรงตามข้อตกลงเบื้องต้นหรือไม่ เพื่อที่จะได้พิจารณาว่าวิธีใดเป็นวิธีที่เหมาะสม

- การประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดนั้น ถึงแม้ว่าในการวิจัยครั้งนี้จะให้ค่าประมาณที่ดีที่สุดเมื่อข้อมูลมีสหสัมพันธ์กันแบบอัตตถดถอยลำดับที่หนึ่ง แต่ยังไม่ได้มีการทดสอบคุณสมบัติที่ดีของตัวประมาณในส่วนอื่น ๆ การนำไปใช้จึงควรมีการศึกษาเพิ่มเติมหรือมีการดัดแปลงตัวประมาณ เพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น

- การประมาณค่าด้วยวิธีแบบสองขั้น ให้ผลในการประมาณค่าด้อยกว่าวิธีการภาวะน่าจะเป็นสูงสุดไม่มากนัก ซึ่งอยู่ในเกณฑ์ที่สามารถยอมรับได้ แต่วิธีการคำนวณสามารถกระทำได้ง่ายกว่า เนื่องจากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดไม่มีตัวประมาณที่เป็นรูปแบบมาตรฐาน ดังนั้น ในการนำไปใช้งานจริงจึงควรที่จะเลือกใช้วิธีการประมาณแบบสองขั้น

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

เกษศิริ โมรา. การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ เพื่อการพยากรณ์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาสถิติ พาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2535.

ธีระพร วีระถาวร. การอนุมานเชิงสถิติขั้นกลาง. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2536.

ฝน เทพวัฒนะ. การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ เพื่อการพยากรณ์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาสถิติ พาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2535.

อโนทัย ตรีวานิช. ทฤษฎีการอนุมานทางสถิติ. พิมพ์ครั้งที่ 1.ขอนแก่น : ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539.

ภาษาอังกฤษ

Jones, R.H.. Longitudinal data with serial correlation: a state-space approach. London : Chapman & Hall, 1993.

Liang, K.Y. and Zeger, S.L.. Longitudinal data analysis using generalized linear models. Biometrika 73 : 13-22.

Littell, R.C., Pendergast, J., and Natarajan, R.. Modelling covariance structure in the analysis of repeated measures data. Statistics in Medicine 2000;19 : 1793-1819.

Mansour, H., Nordheim, E.V., and Rutledge,J.J.. Maximum likelihood estimation of variance components in repeated measures design assuming autoregressive errors. Biometrics 41 (March 1985) : 287-294.

Montgomery, D. C.. Design and analysis of experiments. 4th ed.. New York : John Wiley & Son Inc, 1997.

Rochon, J. Maximum likelihood estimation for incomplete repeated-measures experiments under an ARMA covariance structure. Biometrics 45 (March 1989) : 207-218.

Schaalje, B., Zhang, J., Pantula, S.G. and Pollock, K.H.. Analysis of repeated-measurements data from randomized block experiments. Biometrics 47 (September 1991) : 813-824.

Seber,G.A.F., Wild, C.J.. Nonlinear regression. New York : John Wiley & Son Inc, 1989.

Shumway, R. H.. Applied statistical time series analysis. Englewood Cliffs NJ : Prentice Hall, 1988.

Ware, J.H.. Linear models for the analysis of longitudinal studies. The American Statistician 39 (May 1985) : 95-101.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย

โปรแกรมสร้าง Y 3x3

```
rn0<-function(rn01){
	r1<-P*RN0[1]+RN[1]
	r2<-P*RN0[2]+RN[2]
	r3<-P*RN0[3]+RN[3]
	r4<-P*RN0[4]+RN[4]
	r5<-P*RN0[5]+RN[5]
	r6<-P*RN0[6]+RN[6]
	r7<-P*RN0[7]+RN[7]
	r8<-P*RN0[8]+RN[8]
	r9<-P*RN0[9]+RN[9]
	rn01<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
	rn01
}
rn1<-function(rn2){
	r1<-P*RN[1]+RN[10]
	r2<-P*RN[2]+RN[11]
	r3<-P*RN[3]+RN[12]
	r4<-P*RN[4]+RN[13]
	r5<-P*RN[5]+RN[14]
	r6<-P*RN[6]+RN[15]
	r7<-P*RN[7]+RN[16]
	r8<-P*RN[8]+RN[17]
	r9<-P*RN[9]+RN[18]
	rn2<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
	rn2
}
rn2<-function(rn3){
	r1<-P*RN[10]+RN[19]
	r2<-P*RN[11]+RN[20]
	r3<-P*RN[12]+RN[21]
	r4<-P*RN[13]+RN[22]
	r5<-P*RN[14]+RN[23]
	r6<-P*RN[15]+RN[24]
	r7<-P*RN[16]+RN[25]
	r8<-P*RN[17]+RN[26]
	r9<-P*RN[18]+RN[27]
	rn3<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
```

```
        rn3
}
 rn3<-function(rn4){
        r1<-P*RN[19]+RN[28]
        r2<-P*RN[20]+RN[29]
        r3<-P*RN[21]+RN[30]
        r4<-P*RN[22]+RN[31]
        r5<-P*RN[23]+RN[32]
        r6<-P*RN[24]+RN[33]
        r7<-P*RN[25]+RN[34]
        r8<-P*RN[26]+RN[35]
        r9<-P*RN[27]+RN[36]
        rn4<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn4
}
rn4<-function(rn5){
        r1<-P*RN[28]+RN[37]
        r2<-P*RN[29]+RN[38]
        r3<-P*RN[30]+RN[39]
        r4<-P*RN[31]+RN[40]
        r5<-P*RN[32]+RN[41]
        r6<-P*RN[33]+RN[42]
        r7<-P*RN[34]+RN[43]
        r8<-P*RN[35]+RN[44]
        r9<-P*RN[36]+RN[45]
        rn5<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn5
}
rn5<-function(rn1){
        r1<-P*RN[37]+RN[46]
        r2<-P*RN[38]+RN[47]
        r3<-P*RN[39]+RN[48]
        r4<-P*RN[40]+RN[49]
        r5<-P*RN[41]+RN[50]
        r6<-P*RN[42]+RN[51]
        r7<-P*RN[43]+RN[52]
        r8<-P*RN[44]+RN[53]
        r9<-P*RN[45]+RN[54]
        rn6<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn6
}
```

```
rn6<-function(rn7){
        r1<-P*RN[46]+RN[55]
        r2<-P*RN[47]+RN[56]
        r3<-P*RN[48]+RN[57]
        r4<-P*RN[49]+RN[58]
        r5<-P*RN[50]+RN[59]
        r6<-P*RN[51]+RN[60]
        r7<-P*RN[52]+RN[61]
        r8<-P*RN[53]+RN[62]
        r9<-P*RN[54]+RN[63]
        rn7<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn7
}
rn7<-function(rn8){
        r1<-P*RN[55]+RN[64]
        r2<-P*RN[56]+RN[65]
        r3<-P*RN[57]+RN[66]
        r4<-P*RN[58]+RN[67]
        r5<-P*RN[59]+RN[68]
        r6<-P*RN[60]+RN[69]
        r7<-P*RN[61]+RN[70]
        r8<-P*RN[62]+RN[71]
        r9<-P*RN[63]+RN[72]
        rn8<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn8
}
rn8<-function(rn9){
        r1<-P*RN[64]+RN[73]
        r2<-P*RN[65]+RN[74]
        r3<-P*RN[66]+RN[75]
        r4<-P*RN[67]+RN[76]
        r5<-P*RN[68]+RN[77]
        r6<-P*RN[69]+RN[78]
        r7<-P*RN[70]+RN[79]
        r8<-P*RN[71]+RN[80]
        r9<-P*RN[72]+RN[81]
        rn9<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn9
}
rn9<-function(rn10){
        r1<-P*RN[73]+RN[82]
```

```
        r2<-P*RN[74]+RN[83]
        r3<-P*RN[75]+RN[84]
        r4<-P*RN[76]+RN[85]
        r5<-P*RN[77]+RN[86]
        r6<-P*RN[78]+RN[87]
        r7<-P*RN[79]+RN[88]
        r8<-P*RN[80]+RN[89]
        r9<-P*RN[81]+RN[90]
        rn10<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn10
}
rn10<-function(rn11){
        r1<-P*RN[82]+RN[91]
        r2<-P*RN[83]+RN[92]
        r3<-P*RN[84]+RN[93]
        r4<-P*RN[85]+RN[94]
        r5<-P*RN[86]+RN[95]
        r6<-P*RN[87]+RN[96]
        r7<-P*RN[88]+RN[97]
        r8<-P*RN[89]+RN[98]
        r9<-P*RN[90]+RN[99]
        rn11<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9))
        rn11
}
yt01<-function(yt01){
        y111 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[1] + tab3[1, 1] + RN0[1]
        y121 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[1] + tab3[1, 1] + RN0[2]
        y131 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[1] + tab3[1, 1] + RN0[3]
        y211 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[1] + tab3[2, 1] + RN0[4]
        y221 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[1] + tab3[2, 1] + RN0[5]
        y231 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[1] + tab3[2, 1] + RN0[6]
        y311 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[1] + tab3[3, 1] + RN0[7]
        y321 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[1] + tab3[3, 1] + RN0[8]
        y331 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[1] + tab3[3, 1] + RN0[9]
        yt01 <- matrix(c(y111, y121, y131, y211, y221, y231, y311,y321, y331))
        yt01
}
yt02<-function(yt02){
        y112 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[2] + tab3[1, 2] + (RN1[1])
        y122 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[2] + tab3[1, 2] + (RN1[2])
        y132 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[2] + tab3[1, 2] + (RN1[3])
```

```
            y212 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[2] + tab3[2, 2] + (RN1[4])
            y222 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[2] + tab3[2, 2] + (RN1[5])
            y232 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[2] + tab3[2, 2] + (RN1[6])
            y312 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[2] + tab3[3, 2] + (RN1[7])
            y322 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[2] + tab3[3, 2] + (RN1[8])
            y332 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[2] + tab3[3, 2] + (RN1[9])
            yt02 <- matrix(c(y112, y122, y132, y212, y222, y232, y312,y322, y332))
            yt02
}
yt03<-function(yt03){
            y113 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[3] + tab3[1, 3] + (RN2[1])
            y123 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[3] + tab3[1, 3] + (RN2[2])
            y133 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[3] + tab3[1, 3] + (RN2[3])
            y213 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[3] + tab3[2, 3] + (RN2[4])
            y223 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[3] + tab3[2, 3] + (RN2[5])
            y233 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[3] + tab3[2, 3] + (RN2[6])
            y313 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[3] + tab3[3, 3] + (RN2[7])
            y323 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[3] + tab3[3, 3] + (RN2[8])
            y333 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[3] + tab3[3, 3] + (RN2[9])
            yt03 <- matrix(c(y113, y123, y133, y213, y223, y233, y313,y323, y333))
            yt03
}
yt04<-function(yt04){
            y111 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[4] + tab3[1, 4] + RN3[1]
            y121 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[4] + tab3[1, 4] + RN3[2]
            y131 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[4] + tab3[1, 4] + RN3[3]
            y211 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[4] + tab3[2, 4] + RN3[4]
            y221 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[4] + tab3[2, 4] + RN3[5]
            y231 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[4] + tab3[2, 4] + RN3[6]
            y311 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[4] + tab3[3, 4] + RN3[7]
            y321 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[4] + tab3[3, 4] + RN3[8]
            y331 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[4] + tab3[3, 4] + RN3[9]
            yt04 <- matrix(c(y111, y121, y131, y211, y221, y231, y311,y321, y331))
            yt04
}
yt05<-function(yt05){
            y112 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[5] + tab3[1, 5] + (RN4[1])
            y122 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[5] + tab3[1, 5] + (RN4[2])
            y132 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[5] + tab3[1, 5] + (RN4[3])
            y212 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[5] + tab3[2, 5] + (RN4[4])
            y222 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[5] + tab3[2, 5] + (RN4[5])
```

```
        y232 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[5] + tab3[2, 5] + (RN4[6])
        y312 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[5] + tab3[3, 5] + (RN4[7])
        y322 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[5] + tab3[3, 5] + (RN4[8])
        y332 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[5] + tab3[3, 5] + (RN4[9])
        yt05 <- matrix(c(y112, y122, y132, y212, y222, y232, y312,y322, y332))
        yt05
}
yt06<-function(yt6){
        y113 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[6] + tab3[1, 6] + (RN5[1])
        y123 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[6] + tab3[1, 6] + (RN5[2])
        y133 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[6] + tab3[1, 6] + (RN5[3])
        y213 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[6] + tab3[2, 6] + (RN5[4])
        y223 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[6] + tab3[2, 6] + (RN5[5])
        y233 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[6] + tab3[2, 6] + (RN5[6])
        y313 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[6] + tab3[3, 6] + (RN5[7])
        y323 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[6] + tab3[3, 6] + (RN5[8])
        y333 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[6] + tab3[3, 6] + (RN5[9])
        yt6 <- matrix(c(y113, y123, y133, y213, y223, y233, y313,y323, y333))
        yt6
}
yt07<-function(yt07){
        y111 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[7] + tab3[1, 7] + RN6[1]
        y121 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[7] + tab3[1, 7] + RN6[2]
        y131 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[7] + tab3[1, 7] + RN6[3]
        y211 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[7] + tab3[2, 7] + RN6[4]
        y221 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[7] + tab3[2, 7] + RN6[5]
        y231 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[7] + tab3[2, 7] + RN6[6]
        y311 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[7] + tab3[3, 7] + RN6[7]
        y321 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[7] + tab3[3, 7] + RN6[8]
        y331 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[7] + tab3[3, 7] + RN6[9]
        yt07 <- matrix(c(y111, y121, y131, y211, y221, y231, y311,y321, y331))
        yt07
}
yt08<-function(yt08){
        y112 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[8] + tab3[1, 8] + (RN7[1])
        y122 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[8] + tab3[1, 8] + (RN7[2])
        y132 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[8] + tab3[1, 8] + (RN7[3])
        y212 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[8] + tab3[2, 8] + (RN7[4])
        y222 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[8] + tab3[2, 8] + (RN7[5])
        y232 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[8] + tab3[2, 8]+ (RN[76])
        y312 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[8] + tab3[3, 8] + (RN7[7])
```

```
        y322 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[8] + tab3[3, 8] + (RN7[8])
        y332 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[8] + tab3[3, 8] + (RN7[9])
        yt08 <- matrix(c(y112, y122, y132, y212, y222, y232, y312,y322, y332))
        yt08
}
yt09<-function(yt09){
        y113 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[9] + tab3[1, 9] + (RN8[1])
        y123 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[9] + tab3[1, 9] + (RN8[2])
        y133 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[9] + tab3[1, 9] + (RN8[3])
        y213 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[9] + tab3[2, 9] + (RN8[4])
        y223 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[9] + tab3[2, 9] + (RN8[5])
        y233 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[9] + tab3[2, 9] + (RN8[6])
        y313 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[9] + tab3[3, 9] + (RN8[7])
        y323 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[9] + tab3[3, 9] + (RN8[8])
        y333 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[9] + tab3[3, 9] + (RN8[9])
        yt09 <- matrix(c(y113, y123, y133, y213, y223, y233, y313,y323, y333))
        yt09
}
yt010<-function(yt010){
        y111 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[10] + tab3[1, 10] + RN9[1]
        y121 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[10] + tab3[1, 10] + RN9[2]
        y131 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[10] + tab3[1, 10] + RN9[3]
        y211 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[10] + tab3[2, 10] + RN9[4]
        y221 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[10] + tab3[2, 10] + RN9[5]
        y231 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[10] + tab3[2, 10] + RN9[6]
        y311 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[10] + tab3[3, 10] + RN9[7]
        y321 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[10] + tab3[3, 10] + RN9[8]
        y331 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[10] + tab3[3, 10] + RN9[9]
        yt010 <- matrix(c(y111, y121, y131, y211, y221, y231, y311,y321, y331))
        yt010
}
yt011<-function(yt011){
        y112 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[11] + tab3[1, 11] + (RN10[1])
        y122 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[11] + tab3[1, 11] + (RN10[2])
        y132 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[11] + tab3[1, 11] + (RN10 [3])
        y212 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[11] + tab3[2, 11] + (RN10 [4])
        y222 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[11] + tab3[2, 11] + (RN10 [5])
        y232 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[11] + tab3[2, 11] + (RN10 [6])
        y312 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[11] + tab3[3, 11] + (RN10 [7])
        y322 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[11] + tab3[3, 11] + (RN10 [8])
        y332 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[11] + tab3[3, 11] + (RN10 [9])
```

```
        yt011 <- matrix(c(y112, y122, y132, y212, y222, y232, y312,y322, y332))
        yt011
}
yt012<-function(yt012){
        y113 <- M+tb3[1] + bb3[1] + ab3[12] + tab3[1, 12] + (RN11[1])
        y123 <- M+tb3[1] + bb3[2] + ab3[12] + tab3[1, 12] + (RN11[2])
        y133 <- M+tb3[1] + bb3[3] + ab3[12] + tab3[1, 12] + (RN11[3])
        y213 <- M+tb3[2] + bb3[1] + ab3[12] + tab3[2, 12] + (RN11[4])
        y223 <- M+tb3[2] + bb3[2] + ab3[12] + tab3[2, 12] + (RN11[5])
        y233 <- M+tb3[2] + bb3[3] + ab3[12] + tab3[2, 12] + (RN11[6])
        y313 <- M+tb3[3] + bb3[1] + ab3[12] + tab3[3, 12] + (RN11[7])
        y323 <- M+tb3[3] + bb3[2] + ab3[12] + tab3[3, 12] + (RN11[8])
        y333 <- M+tb3[3] + bb3[3] + ab3[12] + tab3[3, 12] + (RN11[9])
        yt12 <- matrix(c(y113, y123, y133, y213, y223, y233, y313,y323, y333))
        yt12
}
```

โปรแกรมสร้าง Y 5x5

```
b5rn1001<-function(b5rn1001){
        r1<-P*B5RN0001[1]+B5RN1[1]
        r2<-P*B5RN0001[2]+B5RN1[2]
        r3<-P*B5RN0001[3]+B5RN1[3]
        r4<-P*B5RN0001[4]+B5RN1[4]
        r5<-P*B5RN0001[5]+B5RN1[5]
        r6<-P*B5RN0001[6]+B5RN1[6]
        r7<-P*B5RN0001[7]+B5RN1[7]
        r8<-P*B5RN0001[8]+B5RN1[8]
        r9<-P*B5RN0001[9]+B5RN1[9]
        r10<-P*B5RN0001[10]+B5RN1[10]
        r11<-P*B5RN0001[11]+B5RN1[11]
        r12<-P*B5RN0001[12]+B5RN1[12]
        r13<-P*B5RN0001[13]+B5RN1[13]
        r14<-P*B5RN0001[14]+B5RN1[14]
        r15<-P*B5RN0001[15]+B5RN1[15]
        r16<-P*B5RN0001[16]+B5RN1[16]
        r17<-P*B5RN0001[17]+B5RN1[17]
        r18<-P*B5RN0001[18]+B5RN1[18]
        r19<-P*B5RN0001[19]+B5RN1[19]
        r20<-P*B5RN0001[20]+B5RN1[20]
        r21<-P*B5RN0001[21]+B5RN1[21]
        r22<-P*B5RN0001[22]+B5RN1[22]
```

```
            r23<-P*B5RN0001[23]+B5RN1[23]
            r24<-P*B5RN0001[24]+B5RN1[24]
            r25<-P*B5RN0001[25]+B5RN1[25]

b5rn1001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
            b5rn1001
}
b5rn2001<-function(b5rn2001){
            r1<-P*B5RN1[1]+B5RN2[1]
            r2<-P*B5RN1[2]+B5RN2[2]
            r3<-P*B5RN1[3]+B5RN2[3]
            r4<-P*B5RN1[4]+B5RN2[4]
            r5<-P*B5RN1[5]+B5RN2[5]
            r6<-P*B5RN1[6]+B5RN2[6]
            r7<-P*B5RN1[7]+B5RN2[7]
            r8<-P*B5RN1[8]+B5RN2[8]
            r9<-P*B5RN1[9]+B5RN2[9]
            r10<-P*B5RN1[10]+B5RN2[10]
            r11<-P*B5RN1[11]+B5RN2[11]
            r12<-P*B5RN1[12]+B5RN2[12]
            r13<-P*B5RN1[13]+B5RN2[13]
            r14<-P*B5RN1[14]+B5RN2[14]
            r15<-P*B5RN1[15]+B5RN2[15]
            r16<-P*B5RN1[16]+B5RN2[16]
            r17<-P*B5RN1[17]+B5RN2[17]
            r18<-P*B5RN1[18]+B5RN2[18]
            r19<-P*B5RN1[19]+B5RN2[19]
            r20<-P*B5RN1[20]+B5RN2[20]
            r21<-P*B5RN1[21]+B5RN2[21]
            r22<-P*B5RN1[22]+B5RN2[22]
            r23<-P*B5RN1[23]+B5RN2[23]
            r24<-P*B5RN1[24]+B5RN2[24]
            r25<-P*B5RN1[25]+B5RN2[25]

b5rn2001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
            b5rn2001
}
b5rn3001<-function(b5rn3001){
            r1<-P*B5RN2[1]+B5RN3[1]
            r2<-P*B5RN2[2]+B5RN3[2]
            r3<-P*B5RN2[3]+B5RN3[3]
```

```
        r4<-P*B5RN2[4]+B5RN3[4]
        r5<-P*B5RN2[5]+B5RN3[5]
        r6<-P*B5RN2[6]+B5RN3[6]
        r7<-P*B5RN2[7]+B5RN3[7]
        r8<-P*B5RN2[8]+B5RN3[8]
        r9<-P*B5RN2[9]+B5RN3[9]
        r10<-P*B5RN2[10]+B5RN3[10]
        r11<-P*B5RN2[11]+B5RN3[11]
        r12<-P*B5RN2[12]+B5RN3[12]
        r13<-P*B5RN2[13]+B5RN3[13]
        r14<-P*B5RN2[14]+B5RN3[14]
        r15<-P*B5RN2[15]+B5RN3[15]
        r16<-P*B5RN2[16]+B5RN3[16]
        r17<-P*B5RN2[17]+B5RN3[17]
        r18<-P*B5RN2[18]+B5RN3[18]
        r19<-P*B5RN2[19]+B5RN3[19]
        r20<-P*B5RN2[20]+B5RN3[20]
        r21<-P*B5RN2[21]+B5RN3[21]
        r22<-P*B5RN2[22]+B5RN3[22]
        r23<-P*B5RN2[23]+B5RN3[23]
        r24<-P*B5RN2[24]+B5RN3[24]
        r25<-P*B5RN2[25]+B5RN3[25]

b5rn3001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
        b5rn3001
}
b5rn4001<-function(b5rn4001){
        r1<-P*B5RN3[1]+B5RN4[1]
        r2<-P*B5RN3[2]+B5RN4[2]
        r3<-P*B5RN3[3]+B5RN4[3]
        r4<-P*B5RN3[4]+B5RN4[4]
        r5<-P*B5RN3[5]+B5RN4[5]
        r6<-P*B5RN3[6]+B5RN4[6]
        r7<-P*B5RN3[7]+B5RN4[7]
        r8<-P*B5RN3[8]+B5RN4[8]
        r9<-P*B5RN3[9]+B5RN4[9]
        r10<-P*B5RN3[10]+B5RN4[10]
        r11<-P*B5RN3[11]+B5RN4[11]
        r12<-P*B5RN3[12]+B5RN4[12]
        r13<-P*B5RN3[13]+B5RN4[13]
        r14<-P*B5RN3[14]+B5RN4[14]
```

```
            r15<-P*B5RN3[15]+B5RN4[15]
            r16<-P*B5RN3[16]+B5RN4[16]
            r17<-P*B5RN3[17]+B5RN4[17]
            r18<-P*B5RN3[18]+B5RN4[18]
            r19<-P*B5RN3[19]+B5RN4[19]
            r20<-P*B5RN3[20]+B5RN4[20]
            r21<-P*B5RN3[21]+B5RN4[21]
            r22<-P*B5RN3[22]+B5RN4[22]
            r23<-P*B5RN3[23]+B5RN4[23]
            r24<-P*B5RN3[24]+B5RN4[24]
            r25<-P*B5RN3[25]+B5RN4[25]
b5rn4001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
            b5rn4001
}
b5rn5001<-function(b5rn5001){
            r1<-P*B5RN4[1]+B5RN5[1]
            r2<-P*B5RN4[2]+B5RN5[2]
            r3<-P*B5RN4[3]+B5RN5[3]
            r4<-P*B5RN4[4]+B5RN5[4]
            r5<-P*B5RN4[5]+B5RN5[5]
            r6<-P*B5RN4[6]+B5RN5[6]
            r7<-P*B5RN4[7]+B5RN5[7]
            r8<-P*B5RN4[8]+B5RN5[8]
            r9<-P*B5RN4[9]+B5RN5[9]
            r10<-P*B5RN4[10]+B5RN5[10]
            r11<-P*B5RN4[11]+B5RN5[11]
            r12<-P*B5RN4[12]+B5RN5[12]
            r13<-P*B5RN4[13]+B5RN5[13]
            r14<-P*B5RN4[14]+B5RN5[14]
            r15<-P*B5RN4[15]+B5RN5[15]
            r16<-P*B5RN4[16]+B5RN5[16]
            r17<-P*B5RN4[17]+B5RN5[17]
            r18<-P*B5RN4[18]+B5RN5[18]
            r19<-P*B5RN4[19]+B5RN5[19]
            r20<-P*B5RN4[20]+B5RN5[20]
            r21<-P*B5RN4[21]+B5RN5[21]
            r22<-P*B5RN4[22]+B5RN5[22]
            r23<-P*B5RN4[23]+B5RN5[23]
            r24<-P*B5RN4[24]+B5RN5[24]
            r25<-P*B5RN4[25]+B5RN5[25]
b5rn5001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
```

```
	b5rn5001
}
b5rn6001<-function(b5rn6001){
	r1<-P*B5RN5[1]+B5RN6[1]
	r2<-P*B5RN5[2]+B5RN6[2]
	r3<-P*B5RN5[3]+B5RN6[3]
	r4<-P*B5RN5[4]+B5RN6[4]
	r5<-P*B5RN5[5]+B5RN6[5]
	r6<-P*B5RN5[6]+B5RN6[6]
	r7<-P*B5RN5[7]+B5RN6[7]
	r8<-P*B5RN5[8]+B5RN6[8]
	r9<-P*B5RN5[9]+B5RN6[9]
	r10<-P*B5RN5[10]+B5RN6[10]
	r11<-P*B5RN5[11]+B5RN6[11]
	r12<-P*B5RN5[12]+B5RN6[12]
	r13<-P*B5RN5[13]+B5RN6[13]
	r14<-P*B5RN5[14]+B5RN6[14]
	r15<-P*B5RN5[15]+B5RN6[15]
	r16<-P*B5RN5[16]+B5RN6[16]
	r17<-P*B5RN5[17]+B5RN6[17]
	r18<-P*B5RN5[18]+B5RN6[18]
	r19<-P*B5RN5[19]+B5RN6[19]
	r20<-P*B5RN5[20]+B5RN6[20]
	r21<-P*B5RN5[21]+B5RN6[21]
	r22<-P*B5RN5[22]+B5RN6[22]
	r23<-P*B5RN5[23]+B5RN6[23]
	r24<-P*B5RN5[24]+B5RN6[24]
	r25<-P*B5RN5[25]+B5RN6[25]
b5rn6001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
	b5rn6001
}
b5rn7001<-function(b5rn7001){
	r1<-P*B5RN6[1]+B5RN7[1]
	r2<-P*B5RN6[2]+B5RN7[2]
	r3<-P*B5RN6[3]+B5RN7[3]
	r4<-P*B5RN6[4]+B5RN7[4]
	r5<-P*B5RN6[5]+B5RN7[5]
	r6<-P*B5RN6[6]+B5RN7[6]
	r7<-P*B5RN6[7]+B5RN7[7]
	r8<-P*B5RN6[8]+B5RN7[8]
	r9<-P*B5RN6[9]+B5RN7[9]
```

```
            r10<-P*B5RN6[10]+B5RN7[10]
            r11<-P*B5RN6[11]+B5RN7[11]
            r12<-P*B5RN6[12]+B5RN7[12]
            r13<-P*B5RN6[13]+B5RN7[13]
            r14<-P*B5RN6[14]+B5RN7[14]
            r15<-P*B5RN6[15]+B5RN7[15]
            r16<-P*B5RN6[16]+B5RN7[16]
            r17<-P*B5RN6[17]+B5RN7[17]
            r18<-P*B5RN6[18]+B5RN7[18]
            r19<-P*B5RN6[19]+B5RN7[19]
            r20<-P*B5RN6[20]+B5RN7[20]
            r21<-P*B5RN6[21]+B5RN7[21]
            r22<-P*B5RN6[22]+B5RN7[22]
            r23<-P*B5RN6[23]+B5RN7[23]
            r24<-P*B5RN6[24]+B5RN7[24]
            r25<-P*B5RN6[25]+B5RN7[25]
b5rn7001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
            b5rn7001
}
b5rn8001<-function(b5rn8001){
            r1<-P*B5RN7[1]+B5RN8[1]
            r2<-P*B5RN7[2]+B5RN8[2]
            r3<-P*B5RN7[3]+B5RN8[3]
            r4<-P*B5RN7[4]+B5RN8[4]
            r5<-P*B5RN7[5]+B5RN8[5]
            r6<-P*B5RN7[6]+B5RN8[6]
            r7<-P*B5RN7[7]+B5RN8[7]
            r8<-P*B5RN7[8]+B5RN8[8]
            r9<-P*B5RN7[9]+B5RN8[9]
            r10<-P*B5RN7[10]+B5RN8[10]
            r11<-P*B5RN7[11]+B5RN8[11]
            r12<-P*B5RN7[12]+B5RN8[12]
            r13<-P*B5RN7[13]+B5RN8[13]
            r14<-P*B5RN7[14]+B5RN8[14]
            r15<-P*B5RN7[15]+B5RN8[15]
            r16<-P*B5RN7[16]+B5RN8[16]
            r17<-P*B5RN7[17]+B5RN8[17]
            r18<-P*B5RN7[18]+B5RN8[18]
            r19<-P*B5RN7[19]+B5RN8[19]
            r20<-P*B5RN7[20]+B5RN8[20]
            r21<-P*B5RN7[21]+B5RN8[21]
```

```
        r22<-P*B5RN7[22]+B5RN8[22]
        r23<-P*B5RN7[23]+B5RN8[23]
        r24<-P*B5RN7[24]+B5RN8[24]
        r25<-P*B5RN7[25]+B5RN8[25]
b5rn8001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
        b5rn8001
}
b5rn9001<-function(b5rn9001){
        r1<-P*B5RN8[1]+B5RN9[1]
        r2<-P*B5RN8[2]+B5RN9[2]
        r3<-P*B5RN8[3]+B5RN9[3]
        r4<-P*B5RN8[4]+B5RN9[4]
        r5<-P*B5RN8[5]+B5RN9[5]
        r6<-P*B5RN8[6]+B5RN9[6]
        r7<-P*B5RN8[7]+B5RN9[7]
        r8<-P*B5RN8[8]+B5RN9[8]
        r9<-P*B5RN8[9]+B5RN9[9]
        r10<-P*B5RN8[10]+B5RN9[10]
        r11<-P*B5RN8[11]+B5RN9[11]
        r12<-P*B5RN8[12]+B5RN9[12]
        r13<-P*B5RN8[13]+B5RN9[13]
        r14<-P*B5RN8[14]+B5RN9[14]
        r15<-P*B5RN8[15]+B5RN9[15]
        r16<-P*B5RN8[16]+B5RN9[16]
        r17<-P*B5RN8[17]+B5RN9[17]
        r18<-P*B5RN8[18]+B5RN9[18]
        r19<-P*B5RN8[19]+B5RN9[19]
        r20<-P*B5RN8[20]+B5RN9[20]
        r21<-P*B5RN8[21]+B5RN9[21]
        r22<-P*B5RN8[22]+B5RN9[22]
        r23<-P*B5RN8[23]+B5RN9[23]
        r24<-P*B5RN8[24]+B5RN9[24]
        r25<-P*B5RN8[25]+B5RN9[25]
b5rn9001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
        b5rn9001
}
b5rn10001<-function(b5rn10001){
        r1<-P*B5RN9[1]+B5RN10[1]
        r2<-P*B5RN9[2]+B5RN10[2]
        r3<-P*B5RN9[3]+B5RN10[3]
        r4<-P*B5RN9[4]+B5RN10[4]
```

```
            r5<-P*B5RN9[5]+B5RN10[5]
            r6<-P*B5RN9[6]+B5RN10[6]
            r7<-P*B5RN9[7]+B5RN10[7]
            r8<-P*B5RN9[8]+B5RN10[8]
            r9<-P*B5RN9[9]+B5RN10[9]
            r10<-P*B5RN9[10]+B5RN10[10]
            r11<-P*B5RN9[11]+B5RN10[11]
            r12<-P*B5RN9[12]+B5RN10[12]
            r13<-P*B5RN9[13]+B5RN10[13]
            r14<-P*B5RN9[14]+B5RN10[14]
            r15<-P*B5RN9[15]+B5RN10[15]
            r16<-P*B5RN9[16]+B5RN10[16]
            r17<-P*B5RN9[17]+B5RN10[17]
            r18<-P*B5RN9[18]+B5RN10[18]
            r19<-P*B5RN9[19]+B5RN10[19]
            r20<-P*B5RN9[20]+B5RN10[20]
            r21<-P*B5RN9[21]+B5RN10[21]
            r22<-P*B5RN9[22]+B5RN10[22]
            r23<-P*B5RN9[23]+B5RN10[23]
            r24<-P*B5RN9[24]+B5RN10[24]
            r25<-P*B5RN9[25]+B5RN10[25]
b5rn10001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
            b5rn10001
}
b5rn11001<-function(b5rn11001){
            r1<-P*B5RN10[1]+B5RN11[1]
            r2<-P*B5RN10[2]+B5RN11[2]
            r3<-P*B5RN10[3]+B5RN11[3]
            r4<-P*B5RN10[4]+B5RN11[4]
            r5<-P*B5RN10[5]+B5RN11[5]
            r6<-P*B5RN10[6]+B5RN11[6]
            r7<-P*B5RN10[7]+B5RN11[7]
            r8<-P*B5RN10[8]+B5RN11[8]
            r9<-P*B5RN10[9]+B5RN11[9]
            r10<-P*B5RN10[10]+B5RN11[10]
            r11<-P*B5RN10[11]+B5RN11[11]
            r12<-P*B5RN10[12]+B5RN11[12]
            r13<-P*B5RN10[13]+B5RN11[13]
            r14<-P*B5RN10[14]+B5RN11[14]
            r15<-P*B5RN10[15]+B5RN11[15]
            r16<-P*B5RN10[16]+B5RN11[16]
```

```
            r17<-P*B5RN10[17]+B5RN11[17]
            r18<-P*B5RN10[18]+B5RN11[18]
            r19<-P*B5RN10[19]+B5RN11[19]
            r20<-P*B5RN10[20]+B5RN11[20]
            r21<-P*B5RN10[21]+B5RN11[21]
            r22<-P*B5RN10[22]+B5RN11[22]
            r23<-P*B5RN10[23]+B5RN11[23]
            r24<-P*B5RN10[24]+B5RN11[24]
            r25<-P*B5RN10[25]+B5RN11[25]
b5rn11001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
            b5rn11001
}
b5rn12001<-function(b5rn12001){
            r1<-P*B5RN11[1]+B5RN12[1]
            r2<-P*B5RN11[2]+B5RN12[2]
            r3<-P*B5RN11[3]+B5RN12[3]
            r4<-P*B5RN11[4]+B5RN12[4]
            r5<-P*B5RN11[5]+B5RN12[5]
            r6<-P*B5RN11[6]+B5RN12[6]
            r7<-P*B5RN11[7]+B5RN12[7]
            r8<-P*B5RN11[8]+B5RN12[8]
            r9<-P*B5RN11[9]+B5RN12[9]
            r10<-P*B5RN11[10]+B5RN12[10]
            r11<-P*B5RN11[11]+B5RN12[11]
            r12<-P*B5RN11[12]+B5RN12[12]
            r13<-P*B5RN11[13]+B5RN12[13]
            r14<-P*B5RN11[14]+B5RN12[14]
            r15<-P*B5RN11[15]+B5RN12[15]
            r16<-P*B5RN11[16]+B5RN12[16]
            r17<-P*B5RN11[17]+B5RN12[17]
            r18<-P*B5RN11[18]+B5RN12[18]
            r19<-P*B5RN11[19]+B5RN12[19]
            r20<-P*B5RN11[20]+B5RN12[20]
            r21<-P*B5RN11[21]+B5RN12[21]
            r22<-P*B5RN11[22]+B5RN12[22]
            r23<-P*B5RN11[23]+B5RN12[23]
            r24<-P*B5RN11[24]+B5RN12[24]
            r25<-P*B5RN11[25]+B5RN12[25]
b5rn12001<-matrix(c(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r21,r22,r23,r24,r25))
            b5rn12001
}
```

```
y5t1001<-function(y5t1001){
        y111 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[1]
        y121 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[2]
        y131 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[3]
        y141 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[4]
        y151 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[5]
        y211 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[6]
        y221 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[7]
        y231 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[8]
        y241 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[9]
        y251 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[10]
        y311 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[11]
        y321 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[12]
        y331 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[13]
        y341 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[14]
        y351 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[15]
        y411 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[16]
        y421 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[17]
        y431 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[18]
        y441 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[19]
        y451 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[20]
        y511 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[21]
        y521 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[22]
        y531 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[23]
        y541 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[24]
        y551 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[1] + tab3[1, 1] + B5RN0001[25]
        y5t1001 <- matrix(c(y111, y121, y131,y141,y151, y211, y221, y231,y241,y251, y311,y321,
y331,y341,y351,y411,y421,y431,y441,y451,y511,y521,y531,y541,y551))
        y5t1001
}
y5t2001<-function(y5t2001){
        y112 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[1]
        y122 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[2]
        y132 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[3]
        y142 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[4]
        y152 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[5]
        y212 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[6]
        y222 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[7]
        y232 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[8]
        y242 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[9]
        y252 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[10]
```

```
        y312 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[11]
        y322 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[12]
        y332 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[13]
        y342 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[14]
        y352 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[15]
        y412 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[16]
        y422 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[17]
        y432 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[18]
        y442 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[19]
        y452 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[20]
        y512 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[21]
        y522 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[22]
        y532 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[23]
        y542 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[24]
        y552 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[2] + tab3[1,2] + B5RN1[25]
        y5t2001 <- matrix(c(y112, y122, y132,y142,y152, y212, y222, y232,y242,y252, y312,y322,
y332,y342,y352,y412,y422,y432,y442,y452,y512,y522,y532,y542,y552))
        y5t2001
}
Y5t3001<-function(y5t3001){
        y113 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[1]
        y123 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[2]
        y133 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[3]
        y143 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[4]
        y153 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[5]
        y213 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[6]
        y223 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[7]
        y233 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[8]
        y243 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[9]
        y253 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[10]
        y313 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[11]
        y323 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[12]
        y333 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[13]
        y343 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[14]
        y353 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[15]
        y413 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[16]
        y423 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[17]
        y433 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[18]
        y443 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[19]
        y453 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[20]
        y513 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[21]
```

```
        y523 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[22]
        y533 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[23]
        y543 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[24]
        y553 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[3] + tab3[1,3] + B5RN2[25]
        y5t2001 <- matrix(c(y113, y123, y133,y143,y153, y213, y223, y233,y243,y253, y313,y323,
y333,y343,y353,y413,y423,y433,y443,y453,y513,y523,y533,y543,y553))
        y5t2001
}
y5t4001<-function(y5t4001){
        y114 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[1]
        y124 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[2]
        y134 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[3]
        y144 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[4]
        y154 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[5]
        y214 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[6]
        y224 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[7]
        y234 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[8]
        y244 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[9]
        y254 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[10]
        y314 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[11]
        y324 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[12]
        y334 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[13]
        y344 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[14]
        y354 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[15]
        y414 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[16]
        y424 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[17]
        y434 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[18]
        y444 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[19]
        y454 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[20]
        y514 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[21]
        y524 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[22]
        y534 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[23]
        y544 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[24]
        y554 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[4] + tab3[1,4] + B5RN3[25]
        y5t4001 <- matrix(c(y114, y124, y134,y144,y154, y214, y224, y234,y244,y254, y314,y324,
y334,y344,y354,y414,y424,y434,y444,y454,y514,y524,y534,y544,y554))
        y5t4001
}
y5t5001<-function(y5t5001){
        y115 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[1]
        y125 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[2]
```

```
	y135 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[3]
	y145 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[4]
	y155 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[5]
	y215 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[6]
	y225 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[7]
	y235 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[8]
	y245 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[9]
	y255 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[10]
	y315 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[11]
	y325 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[12]
	y335 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[13]
	y345 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[14]
	y355 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[15]
	y415 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[16]
	y425 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[17]
	y435 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[18]
	y445 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[19]
	y455 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[20]
	y515 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[21]
	y525 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[22]
	y535 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[23]
	y545 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[24]
	y555 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[5] + tab3[1,5] + B5RN4[25]
	y5t5001 <- matrix(c(y115, y125, y135,y145,y155, y215, y225, y235,y245,y255, y315,y325,
y335,y345,y355,y415,y425,y435,y445,y455,y515,y525,y535,y545,y555))
	y5t5001
}
Y5t6001<-function(y5t6001){
	y116 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[1]
	y126 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[2]
	y136 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[3]
	y146 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[4]
	y156 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[5]
	y216 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[6]
	y226 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[7]
	y236 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[8]
	y246 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[9]
	y256 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[10]
	y316 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[11]
	y326 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[12]
	y336 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[13]
```

```
        y346 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[14]
        y356 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[15]
        y416 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[16]
        y426 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[17]
        y436 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[18]
        y446 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[19]
        y456 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[20]
        y516 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[21]
        y526 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[22]
        y536 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[23]
        y546 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[24]
        y556 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[6] + tab3[1,6] + B5RN5[25]
        y5t6001 <- matrix(c(y116, y126, y136,y146,y156, y216, y226, y236,y246,y256, y316,y326,
y336,y346,y356,y416,y426,y436,y446,y456,y516,y526,y536,y546,y556))
        y5t6001
}
y5t7001<-function(y5t7001){
        y117<- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[1]
        y127<- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[2]
        y137<- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[3]
        y147<- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[4]
        y157<- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[5]
        y217<- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[6]
        y227<- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[7]
        y237<- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[8]
        y247<- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[9]
        y257<- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[10]
        y317 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[11]
        y327 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[12]
        y337 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[13]
        y347 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[14]
        y357 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[15]
        y417 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[16]
        y427 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[17]
        y437 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[18]
        y447 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[19]
        y457 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[20]
        y517 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[21]
        y527 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[22]
        y537 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[23]
        y547 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[24]
```

```
        y557 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[7] + tab3[1,7] + B5RN6[25]
        y5t7001 <- matrix(c(y117, y127, y137,y147,y157, y217, y227, y237,y247,y257, y317,y327,
y337,y347,y357,y417,y427,y437,y447,y457,y517,y527,y537,y547,y557))
        y5t7001
}
y5t8001<-function(y5t8001){
        y118 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[1]
        y128 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[2]
        y138 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[3]
        y148 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[4]
        y158 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[5]
        y218 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[6]
        y228 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[7]
        y238 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[8]
        y248<- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[9]
        y258 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[10]
        y318 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[11]
        y328 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[12]
        y338 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[13]
        y348 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[14]
        y358 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[15]
        y418 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[16]
        y428 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[17]
        y438 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[18]
        y448 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[19]
        y458 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[20]
        y518 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[21]
        y528 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[22]
        y538 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[23]
        y548 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[24]
        y558 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[8] + tab3[1,8] + B5RN7[25]
        y5t8001 <- matrix(c(y118, y128, y138,y148,y158, y218, y228, y238,y248,y258, y318,y328,
y338,y348,y358,y418,y428,y438,y448,y458,y518,y528,y538,y548,y558))
        y5t8001
}
y5t9001<-function(y5t9001){
        y119 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[1]
        y129 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[2]
        y139 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[3]
        y149 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[4]
        y159 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[5]
```

```
        y219 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[6]
        y229 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[7]
        y239 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[8]
        y249 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[9]
        y259 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[10]
        y319 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[11]
        y329 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[12]
        y339 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[13]
        y349 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[14]
        y359 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[15]
        y419 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[16]
        y429 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[17]
        y439 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[18]
        y449 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[19]
        y459 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[20]
        y519 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[21]
        y529 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[22]
        y539 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[23]
        y549 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[24]
        y559 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[9] + tab3[1,9] + B5RN8[25]
        y5t9001 <- matrix(c(y119, y129, y139,y149,y159, y219, y229, y239,y249,y259, y319,y329,
y339,y349,y359,y419,y429,y439,y449,y459,y519,y529,y539,y549,y559))
        y5t9001
}
y5t10001<-function(y5t10001){
        y111 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[1]
        y121 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[2]
        y131 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[3]
        y141 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[4]
        y151 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[5]
        y211 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[6]
        y221 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[7]
        y231 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[8]
        y241 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[9]
        y251 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[10]
        y311 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[11]
        y321 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[12]
        y331 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[13]
        y341 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[14]
        y351 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[15]
        y411 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[16]
```

```
	y421 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[17]
	y431 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[18]
	y441 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[19]
	y451 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[20]
	y511 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[21]
	y521 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[22]
	y531 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[23]
	y541 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[24]
	y551 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[10] + tab3[1,10] + B5RN9[25]
	y5t10001 <- matrix(c(y111, y121, y131,y141,y151, y211, y221, y231,y241,y251, y311,y321,
y331,y341,y351,y411,y421,y431,y441,y451,y511,y521,y531,y541,y551))
	y5t10001
}
y5t11001<-function(y5t11001){
	y111 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[1]
	y121 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[2]
	y131 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[3]
	y141 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[4]
	y151 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[5]
	y211 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[6]
	y221 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[7]
	y231 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[8]
	y241 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[9]
	y251 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[10]
	y311 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[11]
	y321 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[12]
	y331 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[13]
	y341 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[14]
	y351 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[15]
	y411 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[16]
	y421 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[17]
	y431 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[18]
	y441 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[19]
	y451 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[20]
	y511 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[21]
	y521 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[22]
	y531 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[23]
	y541 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[24]
	y551 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[11] + tab3[1,11] + B5RN10[25]
	y5t11001 <- matrix(c(y111, y121, y131,y141,y151, y211, y221, y231,y241,y251, y311,y321,
y331,y341,y351,y411,y421,y431,y441,y451,y511,y521,y531,y541,y551))
```

```
            y5t11001
}
y5t12001<-function(y5t12001){
            y111 <- M+tb5[1] + bb5[1] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[1]
            y121 <- M+tb5[1] + bb5[2] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[2]
            y131 <- M+tb5[1] + bb5[3] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[3]
            y141 <- M+tb5[1] + bb5[4] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[4]
            y151 <- M+tb5[1] + bb5[5] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[5]
            y211 <- M+tb5[2] + bb5[1] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[6]
            y221 <- M+tb5[2] + bb5[2] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[7]
            y231 <- M+tb5[2] + bb5[3] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[8]
            y241 <- M+tb5[2] + bb5[4] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[9]
            y251 <- M+tb5[2] + bb5[5] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[10]
            y311 <- M+tb5[3] + bb5[1] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[11]
            y321 <- M+tb5[3] + bb5[2] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[12]
            y331 <- M+tb5[3] + bb5[3] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[13]
            y341 <- M+tb5[3] + bb5[4] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[14]
            y351 <- M+tb5[3] + bb5[5] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[15]
            y411 <- M+tb5[4] + bb5[1] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[16]
            y421 <- M+tb5[4] + bb5[2] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[17]
            y431 <- M+tb5[4] + bb5[3] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[18]
            y441 <- M+tb5[4] + bb5[4] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[19]
            y451 <- M+tb5[4] + bb5[5] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[20]
            y511 <- M+tb5[5] + bb5[1] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[21]
            y521 <- M+tb5[5] + bb5[2] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[22]
            y531 <- M+tb5[5] + bb5[3] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[23]
            y541 <- M+tb5[5] + bb5[4] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[24]
            y551 <- M+tb5[5] + bb5[5] + ab5[12] + tab3[1,12] + B5RN11[25]
            y5t12001 <- matrix(c(y111, y121, y131,y141,y151, y211, y221, y231,y241,y251, y311,y321,
y331,y341,y351,y411,y421,y431,y441,y451,y511,y521,y531,y541,y551))
            y5t12001
}
```

โปรแกรมหาค่า MSE ของ ϕ

```
MsePhiOLS<-function(){
sum(0.01-Phi01Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Phi05Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Phi10Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi01Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi05Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi10Y005[1,1:500])/(r),
```

```
sum(0.1-Phi01Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi05Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi10Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi01Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi05Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi10Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi01Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi05Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi10Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi01Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi05Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi10Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi01Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi05Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi10Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi01Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi05Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi10Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi01Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi05Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi10Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi01Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi05Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi10Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi01Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi05Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi10Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi01Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi05Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi10Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi01Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi05Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi10Y099[1,1:500])/(r)
}
```

```
MsePhiMLE<-function(){
sum(0.01-Phi01Y001[1,1:500])/(r),
```

```
sum(0.01-Phi05Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Phi10Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi01Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi05Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi10Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi01Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi05Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi10Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi01Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi05Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi10Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi01Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi05Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi10Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi01Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi05Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi10Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi01Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi05Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi10Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi01Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi05Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi10Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi01Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi05Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi10Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi01Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi05Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi10Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi01Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi05Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi10Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi01Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi05Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi10Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi01Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi05Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi10Y099[1,1:500])/(r)
}
```

```
MsePhiTS<-function(){
sum(0.01-Phi01Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Phi05Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Phi10Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi01Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi05Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Phi10Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi01Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi05Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Phi10Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi01Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi05Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Phi10Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi01Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi05Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Phi10Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi01Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi05Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Phi10Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi01Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi05Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Phi10Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi01Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi05Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Phi10Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi01Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi05Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Phi10Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi01Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi05Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Phi10Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi01Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi05Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Phi10Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi01Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi05Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Phi10Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi01Y099[1,1:500])/(r),
```

```
sum(0.99-Phi05Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Phi10Y099[1,1:500])/(r)
}
```

โปรแกรมหาค่า MSE ของ σ

```
MseSigmaOLS<-function(){
sum(0.01-Sigma01Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Sigma05Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Sigma10Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma01Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma05Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma10Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma01Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma05Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma10Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma01Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma05Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma10Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma01Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma05Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma10Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma01Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma05Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma10Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma01Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma05Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma10Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma01Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma05Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma10Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma01Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma05Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma10Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma01Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma05Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma10Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma01Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma05Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma10Y09[1,1:500])/(r),
```

```
sum(0.95-Sigma01Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma05Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma10Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma01Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma05Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma10Y099[1,1:500])/(r)
}
```

```
MseSigmaMLE<-function(){
sum(0.01-Sigma01Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Sigma05Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Sigma10Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma01Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma05Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma10Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma01Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma05Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma10Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma01Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma05Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma10Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma01Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma05Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma10Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma01Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma05Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma10Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma01Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma05Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma10Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma01Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma05Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma10Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma01Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma05Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma10Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma01Y08[1,1:500])/(r),
```

```
sum(0.8-Sigma05Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma10Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma01Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma05Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma10Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma01Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma05Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma10Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma01Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma05Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma10Y099[1,1:500])/(r)
}
```

```
MseSigmaTS<-function(){
sum(0.01-Sigma01Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Sigma05Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.01-Sigma10Y001[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma01Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma05Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.05-Sigma10Y005[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma01Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma05Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.1-Sigma10Y01[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma01Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma05Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.2-Sigma10Y02[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma01Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma05Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.3-Sigma10Y03[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma01Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma05Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.4-Sigma10Y04[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma01Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma05Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.5-Sigma10Y05[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma01Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.6-Sigma05Y06[1,1:500])/(r),
```

```
sum(0.6-Sigma10Y06[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma01Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma05Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.7-Sigma10Y07[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma01Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma05Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.8-Sigma10Y08[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma01Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma05Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.9-Sigma10Y09[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma01Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma05Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.95-Sigma10Y095[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma01Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma05Y099[1,1:500])/(r),
sum(0.99-Sigma10Y099[1,1:500])/(r)
}
```

ภาคผนวก ข
ตัวอย่างการคำนวณหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

กรณีเก็บข้อมูลซ้ำ 6 ครั้ง

$$\Phi := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi^2 & \phi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \phi^3 & \phi^2 & \phi & 1 & 0 & 0 \\ \phi^4 & \phi^3 & \phi^2 & \phi & 1 & 0 \\ \phi^5 & \phi^4 & \phi^3 & \phi^2 & \phi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi 2 := \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 & \phi^5 \\ 0 & 1 & \phi & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 0 & 0 & 1 & \phi & \phi^2 & \phi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \phi & \phi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S := \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 & s4 & s5 & s6 \\ s7 & s8 & s9 & s10 & S11 & S12 \\ s13 & s14 & s15 & s16 & s17 & s18 \\ s19 & s20 & s21 & s22 & s23 & s24 \\ s25 & s26 & s27 & s28 & S29 & S30 \\ s31 & s32 & s33 & s34 & S35 & S36 \end{bmatrix}$$

$\Omega :=$

$$[1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5]$$
$$[\phi, \phi^2+1, \phi^3+\phi, \phi^4+\phi^2, \phi^5+\phi^3, \phi^6+\phi^4]$$
$$[\phi^2, \phi^3+\phi, \phi^4+\phi^2+1, \phi^5+\phi^3+\phi, \phi^6+\phi^4+\phi^2, \phi^7+\phi^5+\phi^3]$$
$$[\phi^3, \phi^4+\phi^2, \phi^5+\phi^3+\phi, \phi^6+\phi^4+\phi^2+1, \phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi, \phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2]$$
$$[\phi^4, \phi^5+\phi^3, \phi^6+\phi^4+\phi^2, \phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi, \phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1, \phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi]$$
$$[\phi^5, \phi^6+\phi^4, \phi^7+\phi^5+\phi^3, \phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2, \phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi, \phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1]$$

$$\Sigma :=$$

$$[\sigma^2, \sigma^2 \phi, \sigma^2 \phi^2, \sigma^2 \phi^3, \sigma^2 \phi^4, \sigma^2 \phi^5]$$

$$[\sigma^2 \phi, \sigma^2 (\phi^2+1), \sigma^2 (\phi^3+\phi), \sigma^2 (\phi^4+\phi^2), \sigma^2 (\phi^5+\phi^3), \sigma^2 (\phi^6+\phi^4)]$$

$$[\sigma^2 \phi^2, \sigma^2 (\phi^3+\phi), \sigma^2 (\phi^4+\phi^2+1), \sigma^2 (\phi^5+\phi^3+\phi), \sigma^2 (\phi^6+\phi^4+\phi^2), \sigma^2 (\phi^7+\phi^5+\phi^3)]$$

$$[\sigma^2 \phi^3, \sigma^2 (\phi^4+\phi^2), \sigma^2 (\phi^5+\phi^3+\phi), \sigma^2 (\phi^6+\phi^4+\phi^2+1), \sigma^2 (\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi), \sigma^2 (\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)]$$

$$[\sigma^2 \phi^4, \sigma^2 (\phi^5+\phi^3), \sigma^2 (\phi^6+\phi^4+\phi^2), \sigma^2 (\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi), \sigma^2 (\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1), \sigma^2 (\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)]$$

$$[\sigma^2 \phi^5, \sigma^2 (\phi^6+\phi^4), \sigma^2 (\phi^7+\phi^5+\phi^3), \sigma^2 (\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2), \sigma^2 (\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi), \sigma^2 (\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)]$$

$$\Sigma 2 := \begin{bmatrix} \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} & -\frac{\phi}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\phi}{\sigma^2} & \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} & -\frac{\phi}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\phi}{\sigma^2} & \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} & -\frac{\phi}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\phi}{\sigma^2} & \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} & -\frac{\phi}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi}{\sigma^2} & \frac{\phi^2+1}{\sigma^2} & -\frac{\phi}{\sigma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(\Sigma 2\ \Omega) := -\frac{\phi^2+1}{\sigma^2} + \frac{2\phi^2}{\sigma^2} - \frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2} + \frac{2\phi(\phi^3+\phi)}{\sigma^2} - \frac{(\phi^2+1)(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}$$
$$+ \frac{2\phi(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2} - \frac{(\phi^2+1)(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2} + \frac{2\phi(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}$$
$$- \frac{(\phi^2+1)(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2} + \frac{2\phi(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}$$
$$- \frac{\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}$$

$$\mathrm{tr}(\Sigma 2^2\,\Omega) :=$$

$$\left(\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s13$$

$$+\left(-\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2}-\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s7$$

$$+\left(-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\frac{(\phi^2+1)\,\phi^5}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\right)s31+\left(\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^5}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s25+\left(-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s19$$

$$+\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2}-\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)\,s1}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{\phi^6+\phi^4}{\sigma^2}\right)\phi\,s6}{\sigma^2}$$

$$+\left(\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}-\frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s2$$

$$+\left(-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}-\frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s8+\left(\right.$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s14+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^5}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s20+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi^5}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^6}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s26+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^5}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{-\frac{\phi^6}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\Bigg)\, s32+\Bigg($$

$$\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi^4}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s3+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi^4}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s9+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s15+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s21+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s27+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\Bigg)\,s33+\Bigg($$

$$\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi^5}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s4+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi^5}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s10+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s16$$

$$+\Bigg(-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+$$

$$\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-$$

$$\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)$$

$$s22+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{\prime}\right.}{}$$

$$-$$

$$\left.\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)$$

$$s28+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$\left.+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\right)$$

$$s34+\left(\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi^6}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s5+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi^6}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)S11+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\Bigg)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-$$

$$\frac{\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\Bigg)\phi}{\sigma^2}\Bigg)$$

$$s17+\Bigg(-\frac{\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\Bigg)\phi}{\sigma^2}+\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^6}{}$$

$$-\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\Bigg)\phi\Big/\sigma^2\Bigg)\,s23+\Bigg($$

$$-\frac{\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\Bigg)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\Bigg)(\phi^2+1)\Big/\sigma^2-\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}$$

$$+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\Bigg)\phi\Big/\sigma^2\Bigg)\,S29$$

$$+\Bigg(-\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\Bigg)\phi\Big/\sigma^2+\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}$$

$$+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\Bigg)\Big/\sigma^2\Bigg)\,S35+$$

$$\Bigg(\frac{\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{\phi^6+\phi^4}{\sigma^2}\Bigg)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{\phi^7+\phi^5+\phi^3}{\sigma^2}\Bigg)\phi}{\sigma^2}\Bigg)$$

$$S12+\Bigg(-\frac{\Bigg(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{\phi^6+\phi^4}{\sigma^2}\Bigg)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{\phi^7+\phi^5+\phi^3}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s18+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{\phi^7+\phi^5+\phi^3}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,s24+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\,S30+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}}{\sigma^2}\Bigg)\,S36$$

$$LA:=\left(\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s13$$

$$-\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}+\frac{2\,\phi^2}{\sigma^2}+\frac{2\,\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}$$

$$+\left(-\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2}-\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s7-\frac{\phi^2+1}{\sigma^2}$$

$$-\frac{\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1}{\sigma^2}+\frac{2\,\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$+\frac{2\,\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$+\frac{2\,\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$+\left(-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\frac{(\phi^2+1)\,\phi^5}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\right)s31+\left(\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^5}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s25+\left(-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^3}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s19$$

$$+\frac{\left(\frac{\phi^2+1}{\sigma^2}-\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)\,s1}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{\phi^6+\phi^4}{\sigma^2}\right)\phi\;s6}{\sigma^2}$$

$$+\left(\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}-\frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s2$$

$$+\left(-\frac{\left(-\frac{\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}-\frac{\phi^3}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s8+\left(\right.$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)^2}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right) s14+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^3}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi^5}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right) s20+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi^5}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi^6}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right) s26+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^5}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$\left.+\frac{-\frac{\phi^6}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\right) s32+\Bigg($$

$$\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi^4}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right) s3+\Bigg($$

$$
-\frac{\left(-\frac{\phi^2}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^2}{\sigma^2}-\frac{\phi^4}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}
+\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}
-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s9+\Bigg(
$$

$$
-\frac{\left(-\frac{(\phi^2+1)\,\phi}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}
+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}
-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s15+\Bigg(
$$

$$
-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}
+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}
-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s21+\Bigg(
$$

$$
-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}
+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}
-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\Bigg)\, s27+\Bigg(
$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{5}+\phi^{3})}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}$$

$$+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^{6}+\phi^{4})}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3})}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}}{\sigma^{2}}\Bigg)\,s33+\Bigg($$

$$\frac{\left(-\frac{\phi^{3}}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,\phi^{3}}{\sigma^{2}}-\frac{\phi^{5}}{\sigma^{2}}\right)(\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{5}+\phi^{3})}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\Bigg)\,s4+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^{3}}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,\phi^{3}}{\sigma^{2}}-\frac{\phi^{5}}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{5}+\phi^{3})}{\sigma^{2}}\right)(\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\Bigg)\,s10+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{5}+\phi^{3})}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}\right)(\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\Bigg)\,s16$$

$$+\Bigg(-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}+$$

$$\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{(\phi^{2}+1)\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}-\frac{\phi\,(\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}\right)(\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}$$

$$-$$

$$\left.\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)$$

$$s22+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\Big(-\frac{\phi\,(\phi^{\cdot}}{}}{}$$

$$-$$

$$\left.\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)$$

$$s28+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$\left.+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}}{\sigma^2}\right)$$

$$s34+\left(\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi^6}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)s5+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi^4}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,\phi^4}{\sigma^2}-\frac{\phi^6}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}$$

$$\left.-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)S11+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-$$

$$\left.\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)$$

$$s17+\left(-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6\right.}{}}{}\right.$$

$$-\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi\Big/\sigma^2\right)s23+\Bigg($$

$$-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}$$

$$+\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)\Big/\sigma^2-\left(-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\phi\Big/\sigma^2\right)S29$$

$$+\left(-\left(-\frac{\phi\,(\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\phi\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}\right)\phi\Big/\sigma^2+\left(-\frac{\phi\,(\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\phi^2+1)\,(\phi^9+\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi)}{\sigma^2}-\frac{\phi\,(\phi^{10}+\phi^8+\phi^6+\phi^4+\phi^2+1)}{\sigma^2}\right)\Big/\sigma^2\right)S35+$$

$$\left(\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^5+\phi^3)}{\sigma^2}+\frac{\phi^6+\phi^4}{\sigma^2}\right)(\phi^2+1)}{\sigma^2}-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^6+\phi^4+\phi^2)}{\sigma^2}+\frac{\phi^7+\phi^5+\phi^3}{\sigma^2}\right)\phi}{\sigma^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
& S12+\left(-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{5}+\phi^{3})}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{6}+\phi^{4}}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\right.\\
&+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}}{\sigma^{2}}\right)(\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}\\
&\left.-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\right) s18+\left(\right.\\
&-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2})}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\\
&+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}}{\sigma^{2}}\right)(\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}\\
&\left.-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{9}+\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\right) s24+\left(\right.\\
&-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\\
&+\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{9}+\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi}{\sigma^{2}}\right)(\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}\\
&\left.-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{9}+\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{10}+\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}+1}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\right) S30+\left(\right.\\
&-\frac{\left(-\frac{\phi\,(\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}+1)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{9}+\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi}{\sigma^{2}}\right)\phi}{\sigma^{2}}\\
&\left.+\frac{-\frac{\phi\,(\phi^{9}+\phi^{7}+\phi^{5}+\phi^{3}+\phi)}{\sigma^{2}}+\frac{\phi^{10}+\phi^{8}+\phi^{6}+\phi^{4}+\phi^{2}+1}{\sigma^{2}}}{\sigma^{2}}\right) S36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R0 := {} & (s1+s22-\phi\,s7-\phi\,s9-\phi\,s14-\phi\,s2-\phi\,s16-\phi\,s21-\phi\,s28-\phi\,s23-\phi\,S35\\
&+s8\,\phi^{2}+s1\,\phi^{2}+s15\,\phi^{2}+s22\,\phi^{2}+S29\,\phi^{2}-\phi\,S30-6\,\sigma^{2}+S29+s8+s15+S36)\\
&/\,\sigma^{4}
\end{aligned}
$$

$$R3 := \{\sigma^2 = \frac{s1}{6} + \frac{s22}{6} - \frac{\phi\, s7}{6} - \frac{\phi\, s9}{6} - \frac{\phi\, s14}{6} - \frac{\phi\, s2}{6} - \frac{\phi\, s16}{6} - \frac{\phi\, s21}{6} - \frac{\phi\, s28}{6} - \frac{\phi\, s23}{6} - \frac{\phi\, S35}{6} + \frac{s8\,\phi^2}{6} + \frac{s1\,\phi^2}{6} + \frac{s15\,\phi^2}{6} + \frac{s22\,\phi^2}{6} + \frac{S29\,\phi^2}{6} - \frac{\phi\, S30}{6} + \frac{S29}{6} + \frac{s8}{6} + \frac{s15}{6} + \frac{S36}{6}\}$$

$$\Psi1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta :=$

$$[0, (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36) / \sigma^4, 2\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36) / \sigma^4, 3\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36) / \sigma^4, 4\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36) / \sigma^4, 5\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36) / \sigma^4]$$

$$[(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36) / \sigma^4, 2\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15$$

$$+ S36)\,\phi \,/\, \sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28$$
$$- \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29$$
$$+ s8 + s15 + S36)\,(\phi^2 + 2\,\phi + 1)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2$$
$$- \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2$$
$$- \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(\phi^3 + 3\,\phi + 2)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9$$
$$- \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2$$
$$+ s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(\phi^4 + 4\,\phi + 3)\,/\,\sigma^4,\ (s1$$
$$+ s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2$$
$$+ s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$(\phi^5 + 5\,\phi + 4)\,/\,\sigma^4]$$
$$[2\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35$$
$$+ s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23$$
$$- \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15$$
$$+ S36)\,(\phi^2 + 2\,\phi + 1)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21$$
$$- \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2$$
$$+ S29 + s8 + s15 + S36)\,(4\,\phi^2 + 2\,\phi)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2$$
$$- \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2$$
$$- \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(2\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22$$
$$- \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2$$
$$+ s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$(2\,\phi^4 + \phi^3 + 4\,\phi^2 + 3\,\phi + 2)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16$$
$$- \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30$$
$$- 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(2\,\phi^5 + \phi^4 + 5\,\phi^2 + 4\,\phi + 3)\,/\,\sigma^4]$$
$$[3\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35$$
$$+ s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23$$
$$- \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15$$
$$+ S36)\,(\phi^3 + 3\,\phi + 2)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21$$
$$- \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2$$
$$+ S29 + s8 + s15 + S36)\,(2\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1)\,/\,\sigma^4,\ (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9$$
$$- \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2$$

$$+ s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi)\,/\,\sigma^4\,,$$
$$(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35$$
$$+ s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$(3\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16$$
$$- \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30$$
$$- 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(3\,\phi^5 + 2\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 3\,\phi + 2)\,/\,\sigma^4]$$
$$[4\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35$$
$$+ s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23$$
$$- \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15$$
$$+ S36)\,(\phi^4 + 4\,\phi + 3)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21$$
$$- \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2$$
$$+ S29 + s8 + s15 + S36)\,(2\,\phi^4 + \phi^3 + 4\,\phi^2 + 3\,\phi + 2)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9$$
$$- \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2$$
$$+ s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$(3\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16$$
$$- \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30$$
$$- 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(8\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7$$
$$- \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2$$
$$+ s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$(4\,\phi^5 + 8\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1)\,/\,\sigma^4]$$
$$[5\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35$$
$$+ s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23$$
$$- \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15$$
$$+ S36)\,(\phi^5 + 5\,\phi + 4)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21$$
$$- \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2$$
$$+ S29 + s8 + s15 + S36)\,(2\,\phi^5 + \phi^4 + 5\,\phi^2 + 4\,\phi + 3)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9$$
$$- \phi\,s14 - \phi\,s2 - \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2$$
$$+ s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\,S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)$$
$$(3\,\phi^5 + 2\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 3\,\phi + 2)\,/\,\sigma^4\,,\,(s1 + s22 - \phi\,s7 - \phi\,s9 - \phi\,s14 - \phi\,s2$$
$$- \phi\,s16 - \phi\,s21 - \phi\,s28 - \phi\,s23 - \phi\,S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2$$

$$- \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(4\,\phi^5 + 8\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1) \,/\, \sigma^4, (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(10\,\phi^5 + 8\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi) \,/\, \sigma^4]$$

$$\mathrm{tr}(\Sigma2\ \Delta) := 2\,\phi\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36) \,/\, \sigma^6 - 2\,(\phi^2 + 1)\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,\phi \,/\, \sigma^6 + 2\,\phi\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(\phi^2 + 2\,\phi + 1) \,/\, \sigma^6 - (\phi^2 + 1)\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(4\,\phi^2 + 2\,\phi) \,/\, \sigma^6 + 2\,\phi\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(2\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1) \,/\, \sigma^6 - (\phi^2 + 1)\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi) \,/\, \sigma^6 + 2\,\phi\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(3\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1) \,/\, \sigma^6 - (\phi^2 + 1)\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(8\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi) \,/\, \sigma^6 + 2\,\phi\,(s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(4\,\phi^5 + 8\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi + 1) \,/\, \sigma^6 - (s1 + s22 - \phi\, s7 - \phi\, s9 - \phi\, s14 - \phi\, s2 - \phi\, s16 - \phi\, s21 - \phi\, s28 - \phi\, s23 - \phi\, S35 + s8\,\phi^2 + s1\,\phi^2 + s15\,\phi^2 + s22\,\phi^2 + S29\,\phi^2 - \phi\, S30 - 6\,\sigma^2 + S29 + s8 + s15 + S36)\,(10\,\phi^5 + 8\,\phi^4 + 6\,\phi^3 + 4\,\phi^2 + 2\,\phi) \,/\, \sigma^6$$

$$
\begin{aligned}
R2 := -(&4 s25 \phi s7 + 8 s31 \phi s15 + 2 s34 \phi s7 + 2 s2 \phi S29 - 8 s26 \phi^2 s9 - 8 S11 \phi^2 s14 \\
&+ 2 s7 \phi S36 - 8 s4 \phi^2 s28 - 6 s32 \phi^2 s23 + 6 s17 s22 \phi^3 + 6 s32 s8 \phi^3 - 5 s27 \phi^2 s28 \\
&- 8 s26 \phi^2 s14 - 8 S11 \phi^2 s9 + 10 S11 s15 \phi^3 - 5 s20 \phi^2 s7 + 4 s10 \phi^3 s21 \\
&- s13 \phi^4 s7 + 2 s7 \phi s15 + 10 S11 S29 \phi^3 - 8 s19 \phi^2 s16 - 5 s27 \phi^2 s23 \\
&- 5 s27 \phi^2 S35 + 6 s27 s8 \phi^3 + 6 s27 s1 \phi^3 + 6 s27 s15 \phi^3 + 2 s2 \phi s8 - 6 s32 \phi^2 S35 \\
&+ 3 s26 \phi s7 + 6 s32 S29 \phi^3 - 5 s20 \phi^2 S30 + 5 s20 \phi S29 + 5 s20 \phi s8 \\
&+ 10 s25 \phi^3 s16 - 5 \phi^2 s8 s21 + 10 s25 \phi^3 s2 - 3 s33 s8 - 3 s33 S36 - 3 s33 s15 \\
&- 8 s6 \phi^2 s28 + 4 s13 \phi^3 S30 - 6 S12 S29 \phi^2 + 6 s20 S29 \phi^3 - s13 \phi^4 s9 \\
&+ 10 S11 s22 \phi^3 + 8 s31 \phi S36 - 48 s31 \sigma^2 \phi + 18 s31 \sigma^2 \phi^2 - 8 s19 \phi^2 s2 \\
&+ 2 s28 \phi S36 - 12 s28 \sigma^2 \phi + 12 s28 \sigma^2 \phi^2 - 5 \phi^2 s8 s28 + 2 s7 \phi s8 - 6 s32 \phi^2 S30 \\
&+ 6 s32 \phi S29 + 6 s32 \phi s8 - 4 s13 S29 \phi^4 - 5 \phi^2 s8 s23 - 3 \phi^2 s8 S35 + 2 \phi^3 s8^2 \\
&+ 4 s21 \phi^3 s16 + 4 s21 \phi^3 s28 + 4 s21 \phi^3 s23 + 5 s17 \phi S29 + 5 s17 \phi s8 \\
&+ 5 s17 \phi s15 + 5 s17 \phi S36 - 30 s17 \sigma^2 \phi + 24 s17 \sigma^2 \phi^2 - 8 s6 \phi^2 s23 - 8 s6 \phi^2 S35 \\
&+ 8 s6 s8 \phi^3 + 6 s32 s1 \phi^3 + 6 s32 s15 \phi^3 + 6 s32 s22 \phi^3 + 2 s27 \phi s9 + 4 S12 \phi s9 \\
&+ 2 \phi^3 s7^2 - s7 s8 - s7 s15 - s7 S36 + 10 s4 s8 \phi^3 + 10 s4 s1 \phi^3 + 10 s4 s15 \phi^3 \\
&+ 6 s7 \sigma^2 - s7 S29 - 2 \phi^2 s7^2 - 5 \phi^2 s1 s7 - 5 \phi^2 s1 s9 - 5 \phi^2 s1 s14 - 5 \phi^2 s1 s2 \\
&- 5 \phi^2 s1 s16 - 5 \phi^2 s1 s21 - 5 \phi^2 s1 s28 - 5 \phi^2 s1 s23 - 3 \phi^2 s1 S35 + 4 \phi^3 s1 s8 \\
&+ 4 \phi^3 s1 s15 + 4 \phi^3 s1 s22 + 4 \phi^3 s1 S29 - 3 \phi^2 s1 S30 - 12 \phi s1 \sigma^2 + 4 \phi s1 s22 \\
&+ 4 \phi s1 S29 + 4 \phi s1 s8 + 4 \phi s1 s15 + 2 \phi s1 S36 + 2 s7 \phi s9 + 2 s7 \phi s14 \\
&+ 2 s7 \phi s2 + 2 s7 \phi s16 + 2 s7 \phi s21 + 2 s7 \phi s28 + 2 s7 \phi s23 + 2 s7 \phi S35 \\
&- 5 s7 s8 \phi^2 - 5 s7 s15 \phi^2 - 5 s7 s22 \phi^2 - 5 s7 S29 \phi^2 + 2 s7 \phi S30 + 2 s7 \phi s1 \\
&+ 2 s7 \phi s22 - 4 s7 \phi^2 s9 - 4 s7 \phi^2 s14 - 2 s7 S36 \phi^2 + 4 s7 \phi^3 s9 + 4 s7 \phi^3 s14 \\
&+ 4 s7 \phi^3 s2 + 4 s7 \phi^3 s16 + 4 s7 \phi^3 s21 + 4 s7 \phi^3 s28 + 4 s7 \phi^3 s23 + 2 s7 \phi^3 S35 \\
&- 2 s7 s8 \phi^4 - 2 s7 s1 \phi^4 - 2 s7 s15 \phi^4 - 2 s7 s22 \phi^4 - 2 s7 S29 \phi^4 + 2 s7 \phi^3 S30 \\
&- 4 s7 \phi^2 s2 - 4 s7 \phi^2 s16 - 4 s7 \phi^2 s21 - 4 s7 \phi^2 s28 - 4 s7 \phi^2 s23 - 2 s7 \phi^2 S35 \\
&+ 2 s7 s8 \phi^3 + 2 s7 s1 \phi^3 + 2 s7 s15 \phi^3 + 2 s7 s22 \phi^3 + 2 s7 S29 \phi^3 - 2 s7 \phi^2 S30 \\
&+ 2 s7 \phi S29 - 3 s26 s1 - 3 s26 s22 + 18 s26 \sigma^2 - 3 s26 S29 - 3 s26 s8 - 3 s26 s15 \\
&- 3 s26 S36 - 2 s26 \phi^4 S35 + 2 s26 s8 \phi^5 + 2 s26 s1 \phi^5 + 2 s26 s15 \phi^5 + 2 s26 s22 \phi^5 \\
&+ 2 s26 S29 \phi^5 - 2 s26 \phi^4 S30 + 2 s26 \phi^3 S36 - 7 s26 S36 \phi^2 + 7 s26 \phi^3 s7 \\
&+ 7 s26 \phi^3 s9 + 7 s26 \phi^3 s14 + 7 s26 \phi^3 s2 + 7 s26 \phi^3 s16 + 7 s26 \phi^3 s21 \\
&+ 7 s26 \phi^3 s28 + 7 s26 \phi^3 s23 + 7 s26 \phi^3 S35 - 7 s26 s8 \phi^4 - 7 s26 s1 \phi^4 \\
&- 7 s26 s15 \phi^4 - 7 s26 s22 \phi^4 - 7 s26 S29 \phi^4 + 7 s26 \phi^3 S30 - 2 s26 \phi^4 s7 \\
&- 2 s26 \phi^4 s9 - 2 s26 \phi^4 s14 - 2 s26 \phi^4 s2 - 2 s26 \phi^4 s16 - 2 s26 \phi^4 s21 \\
&- 8 s26 \phi^2 s2 - 8 s26 \phi^2 s16 - 8 s26 \phi^2 s21 - 8 s26 \phi^2 s28 - 8 s26 \phi^2 s23 \\
&- 8 s26 \phi^2 S35 + 10 s26 s8 \phi^3 + 10 s26 s1 \phi^3 + 10 s26 s15 \phi^3 + 10 s26 s22 \phi^3 \\
&+ 10 s26 S29 \phi^3 - 8 s26 \phi^2 S30 + 8 s26 \phi S29 + 8 s26 \phi s8 + 8 s26 \phi s15
\end{aligned}
$$

$$+ 8\, s26\, \phi\, S36 - 48\, s26\, \sigma^2\, \phi + 42\, s26\, \sigma^2\, \phi^2 - 12\, s26\, \sigma^2\, \phi^3 + 2\, s27\, \phi\, s14$$
$$+ 2\, s27\, \phi\, s2 + 2\, s27\, \phi\, s16 + 2\, s27\, \phi\, s21 + 2\, s27\, \phi\, s28 + 2\, \phi\, s1^2 + 2\, \phi^3\, s1^2 - s7\, s1$$
$$- s7\, s22 + \phi\, s7^2 - s2\, s22 + \phi\, s2^2 + 6\, s2\, \sigma^2 - s2\, S29 + 2\, \phi^3\, s2^2 - 2\, \phi^2\, s2^2 - s2\, s8$$
$$- s2\, s15 - s2\, S36 - 3\, s18\, s1 - 3\, s18\, s22 + 18\, s18\, \sigma^2 - 3\, s18\, S29 - s2\, s1$$
$$+ 4\, S12\, \phi\, S30 + 6\, S12\, \phi\, s22 - 6\, S12\, \phi^2\, s7 - 6\, S12\, \phi^2\, s9 - 6\, S12\, \phi^2\, s14$$
$$- 2\, S12\, S36\, \phi^2 + 2\, S12\, \phi^3\, s7 + 2\, S12\, \phi^3\, s9 + 2\, S12\, \phi^3\, s14 + 2\, S12\, \phi^3\, s2$$
$$+ 2\, S12\, \phi^3\, s16 + 2\, S12\, \phi^3\, s21 + 2\, S12\, \phi^3\, s28 + 2\, S12\, \phi^3\, s23 + 2\, S12\, \phi^3\, S35$$
$$- 2\, S12\, s8\, \phi^4 - 2\, S12\, s1\, \phi^4 - 2\, S12\, s15\, \phi^4 - 2\, S12\, s22\, \phi^4 - 2\, S12\, S29\, \phi^4$$
$$+ 2\, S12\, \phi^3\, S30 - 6\, S12\, \phi^2\, s2 - 6\, S12\, \phi^2\, s16 - 6\, S12\, \phi^2\, s21 - 6\, S12\, \phi^2\, s28$$
$$- 6\, S12\, \phi^2\, s23 - 6\, S12\, \phi^2\, S35 + 6\, S12\, s8\, \phi^3 + 6\, S12\, s1\, \phi^3 + 6\, S12\, s15\, \phi^3$$
$$+ 6\, S12\, s22\, \phi^3 + 6\, S12\, S29\, \phi^3 - 6\, S12\, \phi^2\, S30 + 6\, S12\, \phi\, S29 + 6\, S12\, \phi\, s8$$
$$+ 6\, S12\, \phi\, s15 + 6\, S12\, \phi\, S36 - 36\, S12\, \sigma^2\, \phi + 12\, S12\, \sigma^2\, \phi^2 + 2\, S30\, \phi\, s9$$
$$+ 2\, S30\, \phi\, s14 + 2\, S30\, \phi\, s2 + 2\, S30\, \phi\, s16 + 2\, S30\, \phi\, s21 + 2\, S30\, \phi\, s28 + 2\, S30\, \phi\, s23$$
$$+ 2\, S30\, \phi\, S35 - 3\, S30\, s8\, \phi^2 - 3\, S30\, s15\, \phi^2 - 3\, S30\, s22\, \phi^2 - 3\, S30\, S29\, \phi^2$$
$$+ 2\, s2\, \phi\, s9 + 2\, s2\, \phi\, s14 + 2\, s2\, \phi\, s16 + 2\, s2\, \phi\, s21 + 2\, s2\, \phi\, s28 + 2\, s2\, \phi\, s23$$
$$+ 6\, S12\, \phi\, s1 + 24\, S12\, \sigma^2 - 4\, S12\, S29 + 4\, S12\, \phi\, s7 + 8\, s6\, s1\, \phi^3 + 8\, s6\, s15\, \phi^3$$
$$+ 8\, s6\, s22\, \phi^3 + 8\, s6\, S29\, \phi^3 - 8\, s6\, \phi^2\, S30 + 8\, s6\, \phi\, S29 + 8\, s6\, \phi\, s8 + 8\, s6\, \phi\, s15$$
$$+ 8\, s6\, \phi\, S36 - 48\, s6\, \sigma^2\, \phi + 18\, s6\, \sigma^2\, \phi^2 + 4\, S12\, \phi\, s14 + 4\, S12\, \phi\, s2 + 4\, S12\, \phi\, s16$$
$$+ 4\, S12\, \phi\, s21 + 4\, S12\, \phi\, s28 + 4\, S12\, \phi\, s23 + 4\, S12\, \phi\, S35 - 6\, S12\, s8\, \phi^2 - 6\, S12\, s1\, \phi^2$$
$$- 6\, S12\, s15\, \phi^2 - 6\, S12\, s22\, \phi^2 - 4\, S12\, s8 - 4\, S12\, s15 - 4\, S12\, S36 - S30\, s1$$
$$- S30\, s22 + \phi\, S30^2 + 6\, S30\, \sigma^2 - S30\, S29 - S30\, s8 - S30\, s15 - S30\, S36 + 5\, s6\, \phi\, s7$$
$$+ 5\, s6\, \phi\, s9 + 5\, s6\, \phi\, s14 + 5\, s6\, \phi\, s2 + 5\, s6\, \phi\, s16 + 5\, s6\, \phi\, s21 + 5\, s6\, \phi\, s28$$
$$+ 5\, s6\, \phi\, s23 + 5\, s6\, \phi\, S35 - 8\, s6\, s8\, \phi^2 - 8\, s6\, s1\, \phi^2 - 8\, s6\, s15\, \phi^2 - 8\, s6\, s22\, \phi^2$$
$$- 8\, s6\, S29\, \phi^2 + 5\, s6\, \phi\, S30 + 8\, s6\, \phi\, s1 + 8\, s6\, \phi\, s22 - 8\, s6\, \phi^2\, s7 - 8\, s6\, \phi^2\, s9$$
$$- 8\, s6\, \phi^2\, s14 - 3\, s6\, S36\, \phi^2 + 3\, s6\, \phi^3\, s7 + 3\, s6\, \phi^3\, s9 + 3\, s6\, \phi^3\, s14 + 3\, s6\, \phi^3\, s2$$
$$+ 3\, s6\, \phi^3\, s16 + 3\, s6\, \phi^3\, s21 + 3\, s6\, \phi^3\, s28 + 3\, s6\, \phi^3\, s23 + 3\, s6\, \phi^3\, S35 - 3\, s6\, s8\, \phi^4$$
$$- 3\, s6\, s1\, \phi^4 - 3\, s6\, s15\, \phi^4 - 3\, s6\, s22\, \phi^4 - 3\, s6\, S29\, \phi^4 + 3\, s6\, \phi^3\, S30 - 8\, s6\, \phi^2\, s2$$
$$- 8\, s6\, \phi^2\, s16 - 8\, s6\, \phi^2\, s21 + 30\, s31\, \sigma^2 - 5\, s31\, S29 - 5\, s31\, s8 - 5\, s31\, s15$$
$$- 5\, s31\, S36 - 5\, s6\, s1 - 5\, s6\, s22 + 30\, s6\, \sigma^2 - 5\, s6\, S29 - 5\, s6\, s8 - 5\, s6\, s15$$
$$- 5\, s6\, S36 - 4\, S12\, s1 - 4\, S12\, s22 + 10\, s25\, \phi^3\, s23 - 10\, s25\, s8\, \phi^4 - 10\, s25\, s1\, \phi^4$$
$$- 10\, s25\, s15\, \phi^4 - 10\, s25\, s22\, \phi^4 - 10\, s25\, S29\, \phi^4 + 10\, s25\, \phi^3\, S30 - 3\, s25\, \phi^4\, s7$$
$$- 3\, s25\, \phi^4\, s9 - 3\, s25\, \phi^4\, s14 - 3\, s25\, \phi^4\, s2 - 3\, s25\, \phi^4\, s16 - 3\, s25\, \phi^4\, s21$$
$$- 11\, s25\, \phi^2\, s2 - 11\, s25\, \phi^2\, s16 - 11\, s25\, \phi^2\, s21 - 11\, s25\, \phi^2\, s28 - 11\, s25\, \phi^2\, s23$$
$$- 11\, s25\, \phi^2\, S35 + 14\, s25\, s8\, \phi^3 + 14\, s25\, s1\, \phi^3 + 14\, s25\, s15\, \phi^3 + 14\, s25\, s22\, \phi^3$$
$$+ 14\, s25\, S29\, \phi^3 - 11\, s25\, \phi^2\, S30 + 11\, s25\, \phi\, S29 + 11\, s25\, \phi\, s8 + 11\, s25\, \phi\, s15$$
$$+ 11\, s25\, \phi\, S36 - 66\, s25\, \sigma^2\, \phi + 60\, s25\, \sigma^2\, \phi^2 - 18\, s25\, \sigma^2\, \phi^3 + 5\, s31\, \phi\, s7$$

$$
\begin{aligned}
&+5\,s31\,\phi\,s9+5\,s31\,\phi\,s14+5\,s31\,\phi\,s2+5\,s31\,\phi\,s16+5\,s31\,\phi\,s21+5\,s31\,\phi\,s28\\
&+5\,s31\,\phi\,s23+5\,s31\,\phi\,S35-8\,s31\,s8\,\phi^2-8\,s31\,s1\,\phi^2-8\,s31\,s15\,\phi^2-8\,s31\,s22\,\phi^2\\
&-8\,s31\,S29\,\phi^2+5\,s31\,\phi\,S30+8\,s31\,\phi\,s1+8\,s31\,\phi\,s22-8\,s31\,\phi^2\,s7-8\,s31\,\phi^2\,s9\\
&-8\,s31\,\phi^2\,s14-3\,s31\,S36\,\phi^2+3\,s31\,\phi^3\,s7+3\,s31\,\phi^3\,s9+3\,s31\,\phi^3\,s14\\
&+3\,s31\,\phi^3\,s2+3\,s31\,\phi^3\,s16+3\,s31\,\phi^3\,s21+3\,s31\,\phi^3\,s28+3\,s31\,\phi^3\,s23\\
&+3\,s31\,\phi^3\,S35-3\,s31\,s8\,\phi^4-3\,s31\,s1\,\phi^4-3\,s31\,s15\,\phi^4-3\,s31\,s22\,\phi^4\\
&-3\,s31\,S29\,\phi^4+3\,s31\,\phi^3\,S30-8\,s31\,\phi^2\,s2-8\,s31\,\phi^2\,s16-8\,s31\,\phi^2\,s21\\
&-8\,s31\,\phi^2\,s28-8\,s31\,\phi^2\,s23-8\,s31\,\phi^2\,S35+8\,s31\,s8\,\phi^3+8\,s31\,s1\,\phi^3\\
&+8\,s31\,s15\,\phi^3+8\,s31\,s22\,\phi^3+8\,s31\,S29\,\phi^3-8\,s31\,\phi^2\,S30+8\,s31\,\phi\,S29\\
&+8\,s31\,\phi\,s8+10\,s25\,\phi^3\,S35-8\,s19\,\phi^2\,s21-8\,s19\,\phi^2\,s23-8\,s19\,\phi^2\,S35\\
&+10\,s19\,s8\,\phi^3+10\,s19\,s1\,\phi^3+10\,s19\,s15\,\phi^3+10\,s19\,s22\,\phi^3+10\,s19\,S29\,\phi^3\\
&-8\,s19\,\phi^2\,S30+8\,s19\,\phi\,S29+8\,s19\,\phi\,s8+8\,s19\,\phi\,s15+8\,s19\,\phi\,S36-48\,s19\,\sigma^2\,\phi\\
&+42\,s19\,\sigma^2\,\phi^2-12\,s19\,\sigma^2\,\phi^3+4\,s25\,\phi\,s9+4\,s25\,\phi\,s14+4\,s25\,\phi\,s2+4\,s25\,\phi\,s16\\
&+4\,s25\,\phi\,s21+4\,s25\,\phi\,s28+4\,s25\,\phi\,s23+4\,s25\,\phi\,S35-14\,s25\,s8\,\phi^2\\
&-14\,s25\,s1\,\phi^2-14\,s25\,s15\,\phi^2-14\,s25\,s22\,\phi^2-14\,s25\,S29\,\phi^2+4\,s25\,\phi\,S30\\
&+11\,s25\,\phi\,s1+11\,s25\,\phi\,s22-11\,s25\,\phi^2\,s7-11\,s25\,\phi^2\,s9-11\,s25\,\phi^2\,s14\\
&-3\,s25\,\phi^4\,s28-3\,s25\,\phi^4\,s23-3\,s25\,\phi^4\,S35+3\,s25\,s8\,\phi^5+3\,s25\,s1\,\phi^5\\
&+3\,s25\,s15\,\phi^5+3\,s25\,s22\,\phi^5+3\,s25\,S29\,\phi^5-3\,s25\,\phi^4\,S30+3\,s25\,\phi^3\,S36\\
&-10\,s25\,S36\,\phi^2+10\,s25\,\phi^3\,s7+10\,s25\,\phi^3\,s9+10\,s25\,\phi^3\,s14-8\,s19\,\phi^2\,s28\\
&+3\,s19\,\phi\,s7-3\,s19\,s8-3\,s19\,s15-3\,s19\,S36+6\,s27\,s22\,\phi^3-5\,s27\,\phi^2\,S30\\
&+5\,s27\,\phi\,S29+5\,s27\,\phi\,s8+5\,s27\,\phi\,s15+5\,s27\,\phi\,S36-30\,s27\,\sigma^2\,\phi+24\,s27\,\sigma^2\,\phi^2\\
&-6\,s27\,\sigma^2\,\phi^3+3\,s19\,\phi\,s9+3\,s19\,\phi\,s14+3\,s19\,\phi\,s2+3\,s19\,\phi\,s16+3\,s19\,\phi\,s21\\
&+3\,s19\,\phi\,s28+3\,s19\,\phi\,s23+3\,s19\,\phi\,S35-10\,s19\,s8\,\phi^2-10\,s19\,s1\,\phi^2\\
&-10\,s19\,s15\,\phi^2-10\,s19\,s22\,\phi^2-10\,s19\,S29\,\phi^2+3\,s19\,\phi\,S30+8\,s19\,\phi\,s1\\
&+8\,s19\,\phi\,s22-8\,s19\,\phi^2\,s7-8\,s19\,\phi^2\,s9-8\,s19\,\phi^2\,s14-2\,s19\,\phi^4\,s28\\
&-2\,s19\,\phi^4\,s23-2\,s19\,\phi^4\,S35+2\,s19\,s8\,\phi^5+2\,s19\,s1\,\phi^5+2\,s19\,s15\,\phi^5\\
&+2\,s19\,s22\,\phi^5+2\,s19\,S29\,\phi^5-2\,s19\,\phi^4\,S30+2\,s19\,\phi^3\,S36-7\,s19\,S36\,\phi^2\\
&+7\,s19\,\phi^3\,s7+7\,s19\,\phi^3\,s9+7\,s19\,\phi^3\,s14+7\,s19\,\phi^3\,s2+7\,s19\,\phi^3\,s16\\
&+7\,s19\,\phi^3\,s21+7\,s19\,\phi^3\,s28+7\,s19\,\phi^3\,s23+7\,s19\,\phi^3\,S35-7\,s19\,s8\,\phi^4\\
&-7\,s19\,s1\,\phi^4-7\,s19\,s15\,\phi^4-7\,s19\,s22\,\phi^4-7\,s19\,S29\,\phi^4+7\,s19\,\phi^3\,S30\\
&-2\,s19\,\phi^4\,s7-2\,s19\,\phi^4\,s9-2\,s19\,\phi^4\,s14-2\,s19\,\phi^4\,s2-2\,s19\,\phi^4\,s16\\
&-2\,s19\,\phi^4\,s21+6\,s27\,S29\,\phi^3-2\,s27\,s8-2\,s27\,s15-2\,s27\,S36-3\,s19\,s1\\
&-3\,s19\,s22+18\,s19\,\sigma^2-3\,s19\,S29+2\,s27\,\phi\,s23+2\,s27\,\phi\,S35-6\,s27\,s8\,\phi^2\\
&-6\,s27\,s1\,\phi^2-6\,s27\,s15\,\phi^2-6\,s27\,s22\,\phi^2-6\,s27\,S29\,\phi^2+2\,s27\,\phi\,S30\\
&+5\,s27\,\phi\,s1+5\,s27\,\phi\,s22-5\,s27\,\phi^2\,s7-5\,s27\,\phi^2\,s9-5\,s27\,\phi^2\,s14-s27\,\phi^4\,s28\\
&-s27\,\phi^4\,s23-s27\,\phi^4\,S35+s27\,s8\,\phi^5+s27\,s1\,\phi^5+s27\,s15\,\phi^5+s27\,s22\,\phi^5
\end{aligned}
$$

$$+ s27\, S29\, \phi^5 - s27\, \phi^4\, S30 + s27\, \phi^3\, S36 - 4\, s27\, S36\, \phi^2 + 4\, s27\, \phi^3\, s7 + 4\, s27\, \phi^3\, s9$$
$$+ 4\, s27\, \phi^3\, s14 + 4\, s27\, \phi^3\, s2 + 4\, s27\, \phi^3\, s16 + 4\, s27\, \phi^3\, s21 + 4\, s27\, \phi^3\, s28$$
$$+ 4\, s27\, \phi^3\, s23 + 4\, s27\, \phi^3\, S35 - 4\, s27\, s8\, \phi^4 - 4\, s27\, s1\, \phi^4 - 4\, s27\, s15\, \phi^4$$
$$- 4\, s27\, s22\, \phi^4 - 4\, s27\, S29\, \phi^4 + 4\, s27\, \phi^3\, S30 - s27\, \phi^4\, s7 - s27\, \phi^4\, s9 - s27\, \phi^4\, s14$$
$$- s27\, \phi^4\, s2 - s27\, \phi^4\, s16 - s27\, \phi^4\, s21 - 5\, s27\, \phi^2\, s2 - 5\, s27\, \phi^2\, s16 - 5\, s27\, \phi^2\, s21$$
$$+ 2\, s27\, \phi\, s7 - 2\, s27\, s1 - 2\, s27\, s22 + 12\, s27\, \sigma^2 - 2\, s27\, S29 + 10\, s25\, \phi^3\, s21$$
$$+ 10\, s25\, \phi^3\, s28 - 4\, s25\, s1 - 4\, s25\, s22 + 24\, s25\, \sigma^2 - 4\, s25\, S29 - 4\, s25\, s8$$
$$- 4\, s25\, s15 - 4\, s25\, S36 - 5\, s31\, s1 - 5\, s31\, s22 - 2\, s26\, \phi^4\, s28 - 2\, s26\, \phi^4\, s23$$
$$- 12\, s7\, \sigma^2\, \phi + 12\, s7\, \sigma^2\, \phi^2 + 3\, s26\, \phi\, s9 + 3\, s26\, \phi\, s14 + 3\, s26\, \phi\, s2 + 3\, s26\, \phi\, s16$$
$$+ 3\, s26\, \phi\, s21 + 3\, s26\, \phi\, s28 + 3\, s26\, \phi\, s23 + 3\, s26\, \phi\, S35 - 10\, s26\, s8\, \phi^2$$
$$- 10\, s26\, s1\, \phi^2 - 10\, s26\, s15\, \phi^2 - 10\, s26\, s22\, \phi^2 - 10\, s26\, S29\, \phi^2 + 3\, s26\, \phi\, S30$$
$$+ 8\, s26\, \phi\, s1 + 8\, s26\, \phi\, s22 - 8\, s26\, \phi^2\, s7 - s21\, s1 - s21\, s22 + \phi\, s21^2 + 6\, s21\, \sigma^2$$
$$- s21\, S29 + 2\, \phi^3\, s21^2 - 2\, \phi^2\, s21^2 - s21\, s8 - s21\, s15 - s21\, S36 + s33\, \phi^3\, s28$$
$$+ s33\, \phi^3\, s23 + s33\, \phi^3\, S35 - s33\, s8\, \phi^4 - s33\, s1\, \phi^4 - s33\, s15\, \phi^4 - s33\, s22\, \phi^4$$
$$- s33\, S29\, \phi^4 + s33\, \phi^3\, S30 - 4\, s33\, \phi^2\, s2 - 4\, s33\, \phi^2\, s16 - 4\, s33\, \phi^2\, s21 - 4\, s33\, \phi^2\, s28$$
$$- 4\, s33\, \phi^2\, s23 - 4\, s33\, \phi^2\, S35 + 4\, s33\, s8\, \phi^3 + 4\, s33\, s1\, \phi^3 + 4\, s33\, s15\, \phi^3$$
$$+ 4\, s33\, s22\, \phi^3 + 4\, s33\, S29\, \phi^3 - 4\, s33\, \phi^2\, S30 + 4\, s33\, \phi\, S29 + 4\, s33\, \phi\, s8$$
$$+ 4\, s33\, \phi\, s15 + 4\, s33\, \phi\, S36 - 24\, s33\, \sigma^2\, \phi + 6\, s33\, \sigma^2\, \phi^2 + 2\, s21\, \phi\, s16 + 2\, s21\, \phi\, s28$$
$$+ 2\, s21\, \phi\, s23 + 2\, s21\, \phi\, S35 - 5\, s21\, s22\, \phi^2 - 5\, s21\, S29\, \phi^2 + 2\, s21\, \phi\, s1 + 2\, s21\, \phi\, s22$$
$$- 2\, s21\, S36\, \phi^2 - 2\, s3\, s8 - 2\, s3\, s15 - 2\, s3\, S36 - 3\, s33\, s1 - 3\, s33\, s22 + 18\, s33\, \sigma^2$$
$$- 3\, s33\, S29 + 5\, s20\, \phi\, s15 - 30\, s20\, \sigma^2\, \phi + 24\, s20\, \sigma^2\, \phi^2 - 6\, s20\, \sigma^2\, \phi^3 + 2\, s3\, \phi\, s9$$
$$+ 2\, s3\, \phi\, s14 + 2\, s3\, \phi\, s2 + 2\, s3\, \phi\, s16 + 2\, s3\, \phi\, s21 + 2\, s3\, \phi\, s28 + 2\, s3\, \phi\, s23$$
$$+ 2\, s3\, \phi\, S35 - 6\, s3\, s8\, \phi^2 - 6\, s3\, s1\, \phi^2 - 6\, s3\, s15\, \phi^2 - 6\, s3\, s22\, \phi^2 - 6\, s3\, S29\, \phi^2$$
$$+ 2\, s3\, \phi\, S30 + 5\, s3\, \phi\, s1 + 5\, s3\, \phi\, s22 - 5\, s3\, \phi^2\, s7 - 5\, s3\, \phi^2\, s9 - 5\, s3\, \phi^2\, s14$$
$$- s3\, \phi^4\, s28 - s3\, \phi^4\, s23 - s3\, \phi^4\, S35 + s3\, s8\, \phi^5 + s3\, s1\, \phi^5 + s3\, s15\, \phi^5 + s3\, s22\, \phi^5$$
$$+ s3\, S29\, \phi^5 - s3\, \phi^4\, S30 + s3\, \phi^3\, S36 - 4\, s3\, S36\, \phi^2 + 4\, s3\, \phi^3\, s7 + 4\, s3\, \phi^3\, s9$$
$$+ 4\, s3\, \phi^3\, s14 + 4\, s3\, \phi^3\, s2 + 4\, s3\, \phi^3\, s16 + 4\, s3\, \phi^3\, s21 + 4\, s3\, \phi^3\, s28 + 4\, s3\, \phi^3\, s23$$
$$+ 4\, s3\, \phi^3\, S35 - 4\, s3\, s8\, \phi^4 - 4\, s3\, s1\, \phi^4 - 4\, s3\, s15\, \phi^4 - 4\, s3\, s22\, \phi^4 - 4\, s3\, S29\, \phi^4$$
$$+ 4\, s3\, \phi^3\, S30 - s3\, \phi^4\, s7 - s3\, \phi^4\, s9 - s3\, \phi^4\, s14 - s3\, \phi^4\, s2 - s3\, \phi^4\, s16 - s3\, \phi^4\, s21$$
$$- 5\, s3\, \phi^2\, s2 - 5\, s3\, \phi^2\, s16 - 5\, s3\, \phi^2\, s21 - 5\, s3\, \phi^2\, s28 - 5\, s3\, \phi^2\, s23 - 5\, s3\, \phi^2\, S35$$
$$+ 6\, s3\, s8\, \phi^3 + 6\, s3\, s1\, \phi^3 + 6\, s3\, s15\, \phi^3 + 6\, s3\, s22\, \phi^3 + 6\, s3\, S29\, \phi^3 - 5\, s3\, \phi^2\, S30$$
$$+ 5\, s3\, \phi\, S29 + 5\, s3\, \phi\, s8 + 5\, s3\, \phi\, s15 + 5\, s3\, \phi\, S36 - 30\, s3\, \sigma^2\, \phi + 24\, s3\, \sigma^2\, \phi^2$$
$$- 6\, s3\, \sigma^2\, \phi^3 + 3\, s33\, \phi\, s7 + 3\, s33\, \phi\, s9 + 3\, s33\, \phi\, s14 + 3\, s33\, \phi\, s2 + 3\, s33\, \phi\, s16$$
$$+ 3\, s33\, \phi\, s21 + 3\, s33\, \phi\, s28 + 3\, s33\, \phi\, s23 + 3\, s33\, \phi\, S35 - 4\, s33\, s8\, \phi^2 - 4\, s33\, s1\, \phi^2$$
$$- 4\, s33\, s15\, \phi^2 - 4\, s33\, s22\, \phi^2 - 4\, s33\, S29\, \phi^2 + 3\, s33\, \phi\, S30 + 4\, s33\, \phi\, s1$$
$$+ 4\, s33\, \phi\, s22 - 4\, s33\, \phi^2\, s7 - 4\, s33\, \phi^2\, s9 - 4\, s33\, \phi^2\, s14 - s33\, S36\, \phi^2 + s33\, \phi^3\, s7$$

$$+ s33\,\phi^3\,s9 + s33\,\phi^3\,s14 + s33\,\phi^3\,s2 + s33\,\phi^3\,s16 + s33\,\phi^3\,s21 + 5\,s20\,\phi\,S36$$
$$- 2\,s20\,s8 - 2\,s20\,s15 - 2\,s20\,S36 - 2\,s3\,s1 - 2\,s3\,s22 + 12\,s3\,\sigma^2 - 2\,s3\,S29$$
$$- 5\,s20\,\phi^2\,s9 - 5\,s20\,\phi^2\,s14 - s20\,\phi^4\,s28 - s20\,\phi^4\,s23 - s20\,\phi^4\,S35 + s20\,s8\,\phi^5$$
$$+ s20\,s1\,\phi^5 + s20\,s15\,\phi^5 + s20\,s22\,\phi^5 + s20\,S29\,\phi^5 - s20\,\phi^4\,S30 + s20\,\phi^3\,S36$$
$$- 4\,s20\,S36\,\phi^2 + 4\,s20\,\phi^3\,s7 + 4\,s20\,\phi^3\,s9 + 4\,s20\,\phi^3\,s14 + 4\,s20\,\phi^3\,s2$$
$$+ 4\,s20\,\phi^3\,s16 + 4\,s20\,\phi^3\,s21 + 4\,s20\,\phi^3\,s28 + 4\,s20\,\phi^3\,s23 + 4\,s20\,\phi^3\,S35$$
$$- 4\,s20\,s8\,\phi^4 - 4\,s20\,s1\,\phi^4 - 4\,s20\,s15\,\phi^4 - 4\,s20\,s22\,\phi^4 - 4\,s20\,S29\,\phi^4$$
$$+ 4\,s20\,\phi^3\,S30 - s20\,\phi^4\,s7 - s20\,\phi^4\,s9 - s20\,\phi^4\,s14 - s20\,\phi^4\,s2 - s20\,\phi^4\,s16$$
$$- s20\,\phi^4\,s21 - 5\,s20\,\phi^2\,s2 - 5\,s20\,\phi^2\,s16 - 5\,s20\,\phi^2\,s21 - 5\,s20\,\phi^2\,s28$$
$$- 5\,s20\,\phi^2\,s23 - 5\,s20\,\phi^2\,S35 + 6\,s20\,s8\,\phi^3 + 6\,s20\,s1\,\phi^3 + 6\,s20\,s15\,\phi^3$$
$$+ 6\,s20\,s22\,\phi^3 + 2\,s20\,\phi\,s7 - 2\,s20\,s1 - 2\,s20\,s22 + 12\,s20\,\sigma^2 - 2\,s20\,S29 - s9\,s1$$
$$- s9\,s22 + \phi\,s9^2 + 6\,s9\,\sigma^2 - s9\,S29 - 2\,\phi^2\,s9^2 + 2\,\phi^3\,s9^2 - s9\,s8 - s9\,s15 - s9\,S36$$
$$+ 2\,s3\,\phi\,s7 - 3\,s4\,s1 - 3\,s4\,s22 + 18\,s4\,\sigma^2 - 3\,s4\,S29 - 3\,s4\,s8 - 3\,s4\,s15 - 3\,s4\,S36$$
$$+ 10\,s4\,s22\,\phi^3 + 10\,s4\,S29\,\phi^3 - 8\,s4\,\phi^2\,S30 - 5\,\phi^2\,s8\,s16 - 2\,s34\,s1 - 2\,s34\,s22$$
$$+ 12\,s34\,\sigma^2 - 2\,s34\,S29 - 2\,s34\,s8 - 2\,s34\,s15 - 2\,s34\,S36 - 2\,s24\,s1 - 2\,s24\,s22$$
$$+ 12\,s24\,\sigma^2 - 2\,s24\,S29 - 2\,s24\,s8 - 2\,s24\,s15 - 2\,s24\,S36 + 2\,\phi^3\,s15^2 + 2\,\phi\,s15^2$$
$$+ 2\,s34\,\phi\,s2 + 2\,s34\,\phi\,s21 + 2\,s34\,\phi\,s28 + 2\,s34\,\phi\,s23 + 2\,s34\,\phi\,S35 - 2\,s34\,s8\,\phi^2$$
$$- 2\,s34\,s1\,\phi^2 - 2\,s34\,s15\,\phi^2 - 2\,s34\,s22\,\phi^2 - 2\,s34\,S29\,\phi^2 + 2\,s34\,\phi\,S30$$
$$+ 2\,s34\,\phi\,s1 + 2\,s34\,\phi\,s22 - 2\,s34\,\phi^2\,s7 - 2\,s34\,\phi^2\,s9 - 2\,s34\,\phi^2\,s14 - 2\,s34\,\phi^2\,s2$$
$$- 2\,s34\,\phi^2\,s16 - 2\,s34\,\phi^2\,s21 - 2\,s34\,\phi^2\,s28 - 2\,s34\,\phi^2\,s23 - 2\,s34\,\phi^2\,S35$$
$$+ 2\,s34\,s8\,\phi^3 + 2\,s34\,s1\,\phi^3 + 2\,s34\,s15\,\phi^3 + 2\,s34\,s22\,\phi^3 + 2\,s34\,S29\,\phi^3$$
$$- 2\,s34\,\phi^2\,S30 + 2\,s34\,\phi\,S29 + 2\,s34\,\phi\,s8 + 2\,s34\,\phi\,s15 + 2\,s34\,\phi\,S36 - 12\,s34\,\sigma^2\,\phi$$
$$+ 2\,s24\,\phi\,s7 + 2\,s24\,\phi\,s9 + 2\,s24\,\phi\,s14 + 2\,s24\,\phi\,s2 + 2\,s24\,\phi\,s16 + 2\,s24\,\phi\,s21$$
$$+ 2\,s24\,\phi\,s28 + 2\,s24\,\phi\,s23 + 2\,s24\,\phi\,S35 - 2\,s24\,s8\,\phi^2 - 2\,s24\,s1\,\phi^2 - 2\,s24\,s15\,\phi^2$$
$$- 2\,s24\,s22\,\phi^2 - 2\,s24\,S29\,\phi^2 + 2\,s24\,\phi\,S30 + 2\,s24\,\phi\,s1 + 2\,s24\,\phi\,s22 - 2\,s24\,\phi^2\,s7$$
$$- 2\,s24\,\phi^2\,s9 - 2\,s24\,\phi^2\,s14 - 2\,s24\,\phi^2\,s2 - 2\,s24\,\phi^2\,s16 - 2\,s24\,\phi^2\,s21$$
$$- 2\,s24\,\phi^2\,s28 - 2\,s24\,\phi^2\,s23 - 2\,s24\,\phi^2\,S35 + 2\,s24\,s8\,\phi^3 + 2\,s24\,s1\,\phi^3$$
$$+ 2\,s24\,s15\,\phi^3 + 2\,s24\,s22\,\phi^3 + 2\,s24\,S29\,\phi^3 - 2\,s24\,\phi^2\,S30 + 2\,s24\,\phi\,S29$$
$$+ 2\,s24\,\phi\,s8 + 2\,s24\,\phi\,s15 + 2\,s24\,\phi\,S36 - 12\,s24\,\sigma^2\,\phi - 5\,\phi^2\,s15\,s9 - 5\,\phi^2\,s15\,s14$$
$$- 5\,\phi^2\,s15\,s16 - 5\,\phi^2\,s15\,s21 - 5\,\phi^2\,s15\,s28 - 5\,\phi^2\,s15\,s23 - 3\,\phi^2\,s15\,S35$$
$$+ 4\,\phi^3\,s15\,s8 + 4\,\phi^3\,s15\,s22 + 4\,\phi^3\,s15\,S29 - 12\,\phi\,s15\,\sigma^2 + 4\,\phi\,s15\,s22$$
$$+ 4\,\phi\,s15\,S29 + 4\,\phi\,s15\,s8 + 2\,\phi\,s15\,S36 - 5\,\phi^2\,s8\,s9 - 5\,\phi^2\,s8\,s14 + 2\,s34\,\phi\,s16$$
$$- 3\,s18\,s8 - 3\,s18\,s15 - 3\,s18\,S36 + 4\,\phi^3\,s8\,s22 + 4\,\phi^3\,s8\,S29 - 12\,\phi\,s8\,\sigma^2$$
$$+ 4\,\phi\,s8\,s22 + 4\,\phi\,s8\,S29 + 2\,\phi\,s8\,S36 + 2\,s14\,\phi\,s9 + 2\,s14\,\phi\,s16 + 2\,s14\,\phi\,s21$$
$$+ 2\,s14\,\phi\,s28 + 2\,s14\,\phi\,s23 + 2\,s14\,\phi\,S35 - 5\,s14\,s22\,\phi^2 - 5\,s14\,S29\,\phi^2 + 2\,s14\,\phi\,s1$$
$$+ 2\,s14\,\phi\,s22 - 4\,s14\,\phi^2\,s9 - 2\,s14\,S36\,\phi^2 + 4\,s14\,\phi^3\,s9 + 4\,s14\,\phi^3\,s16$$

$$+ 4\, s14\, \phi^3\, s21 + 4\, s14\, \phi^3\, s28 + 4\, s14\, \phi^3\, s23 + 2\, s14\, \phi^3\, S35 - 2\, s14\, s8\, \phi^4$$
$$- 2\, s14\, s1\, \phi^4 - 2\, s14\, s15\, \phi^4 - 2\, s14\, s22\, \phi^4 - 2\, s14\, S29\, \phi^4 + 2\, s14\, \phi^3\, S30$$
$$- 4\, s14\, \phi^2\, s16 - 4\, s14\, \phi^2\, s21 - 4\, s14\, \phi^2\, s28 - 4\, s14\, \phi^2\, s23 - 2\, s14\, \phi^2\, S35$$
$$+ 2\, s14\, s8\, \phi^3 + 2\, s14\, s1\, \phi^3 + 2\, s14\, s15\, \phi^3 + 2\, s14\, s22\, \phi^3 + 2\, s14\, S29\, \phi^3$$
$$- 2\, s14\, \phi^2\, S30 + 2\, s14\, \phi\, S29 + 2\, s14\, \phi\, s8 + 2\, s14\, \phi\, s15 + 2\, s14\, \phi\, S36 - 12\, s14\, \sigma^2\, \phi$$
$$+ 12\, s14\, \sigma^2\, \phi^2 + 2\, s9\, \phi\, s16 + 2\, s9\, \phi\, s21 + 2\, s9\, \phi\, s28 + 2\, s9\, \phi\, s23 + 2\, s9\, \phi\, S35$$
$$- 5\, s9\, s22\, \phi^2 - 5\, s9\, S29\, \phi^2 + 2\, s9\, \phi\, s1 + 2\, s9\, \phi\, s22 - 2\, s9\, S36\, \phi^2 + 4\, s9\, \phi^3\, s16$$
$$+ 4\, s9\, \phi^3\, s21 + 4\, s9\, \phi^3\, s28 + 4\, s9\, \phi^3\, s23 + 2\, s9\, \phi^3\, S35 - 2\, s9\, s8\, \phi^4 - 2\, s9\, s1\, \phi^4$$
$$- 2\, s9\, s15\, \phi^4 - 2\, s9\, s22\, \phi^4 - 2\, s9\, S29\, \phi^4 + 2\, s9\, \phi^3\, S30 - 4\, s9\, \phi^2\, s16 - 4\, s9\, \phi^2\, s21$$
$$- 4\, s9\, \phi^2\, s28 - 4\, s9\, \phi^2\, s23 - 2\, s9\, \phi^2\, S35 + 2\, s9\, s8\, \phi^3 + 2\, s9\, s1\, \phi^3 + 2\, s9\, s15\, \phi^3$$
$$+ 2\, s9\, s22\, \phi^3 + 2\, s9\, S29\, \phi^3 - 2\, s9\, \phi^2\, S30 + 2\, s9\, \phi\, S29 + 2\, s9\, \phi\, s8 + 2\, s9\, \phi\, s15$$
$$+ 2\, s9\, \phi\, S36 - 12\, s9\, \sigma^2\, \phi + 12\, s9\, \sigma^2\, \phi^2 + 2\, s20\, \phi\, s9 + 2\, s20\, \phi\, s14 + 2\, s20\, \phi\, s2$$
$$+ 2\, s20\, \phi\, s16 + 2\, s20\, \phi\, s21 + 2\, s20\, \phi\, s28 + 2\, s20\, \phi\, s23 + 2\, s20\, \phi\, S35 - 6\, s20\, s8\, \phi^2$$
$$- 6\, s20\, s1\, \phi^2 - 6\, s20\, s15\, \phi^2 - 6\, s20\, s22\, \phi^2 - 6\, s20\, S29\, \phi^2 + 2\, s20\, \phi\, S30$$
$$+ 5\, s20\, \phi\, s1 + 5\, s20\, \phi\, s22 + 2\, \phi\, s8^2 - s14\, s1 - s14\, s22 + \phi\, s14^2 + 6\, s14\, \sigma^2$$
$$- s14\, S29 - 2\, \phi^2\, s14^2 + 2\, \phi^3\, s14^2 - s14\, s8 - s14\, s15 - s14\, S36 + 2\, s2\, \phi\, S35$$
$$- 5\, s2\, s15\, \phi^2 - 5\, s2\, s22\, \phi^2 - 5\, s2\, S29\, \phi^2 + 2\, s2\, \phi\, s1 + 2\, s2\, \phi\, s22 - 4\, s2\, \phi^2\, s9$$
$$- 4\, s2\, \phi^2\, s14 - 2\, s2\, S36\, \phi^2 + 4\, s2\, \phi^3\, s9 + 4\, s2\, \phi^3\, s14 + 4\, s2\, \phi^3\, s16 + 4\, s2\, \phi^3\, s21$$
$$+ 4\, s2\, \phi^3\, s28 + 4\, s2\, \phi^3\, s23 + 2\, s2\, \phi^3\, S35 - 2\, s2\, s8\, \phi^4 - 2\, s2\, s1\, \phi^4 - 2\, s2\, s15\, \phi^4$$
$$- 2\, s2\, s22\, \phi^4 - 2\, s2\, S29\, \phi^4 + 2\, s2\, \phi^3\, S30 - 4\, s2\, \phi^2\, s16 - 4\, s2\, \phi^2\, s21 - 4\, s2\, \phi^2\, s28$$
$$- 4\, s2\, \phi^2\, s23 - 2\, s2\, \phi^2\, S35 + 2\, s2\, s8\, \phi^3 + 2\, s2\, s1\, \phi^3 + 2\, s2\, s15\, \phi^3 + 2\, s2\, s22\, \phi^3$$
$$+ 2\, s2\, S29\, \phi^3 - 2\, s2\, \phi^2\, S30 - 5\, s2\, s8\, \phi^2 + 2\, s2\, \phi\, s15 + 2\, s2\, \phi\, S36 - 12\, s2\, \sigma^2\, \phi$$
$$+ 12\, s2\, \sigma^2\, \phi^2 + 3\, s18\, \phi\, s7 + 3\, s18\, \phi\, s9 + 3\, s18\, \phi\, s14 + 3\, s18\, \phi\, s2 + 3\, s18\, \phi\, s16$$
$$+ 3\, s18\, \phi\, s21 + 3\, s18\, \phi\, s28 + 3\, s18\, \phi\, s23 + 3\, s18\, \phi\, S35 - 4\, s18\, s8\, \phi^2 - 4\, s18\, s1\, \phi^2$$
$$- 4\, s18\, s15\, \phi^2 - 4\, s18\, s22\, \phi^2 - 4\, s18\, S29\, \phi^2 + 3\, s18\, \phi\, S30 + 4\, s18\, \phi\, s1$$
$$+ 4\, s18\, \phi\, s22 - 4\, s18\, \phi^2\, s7 - 4\, s18\, \phi^2\, s9 - 4\, s18\, \phi^2\, s14 - s18\, S36\, \phi^2 + s18\, \phi^3\, s7$$
$$+ s18\, \phi^3\, s9 + s18\, \phi^3\, s14 + s18\, \phi^3\, s2 + s18\, \phi^3\, s16 + s18\, \phi^3\, s21 + s18\, \phi^3\, s28$$
$$+ s18\, \phi^3\, s23 + s18\, \phi^3\, S35 - s18\, s8\, \phi^4 - s18\, s1\, \phi^4 - s18\, s15\, \phi^4 - s18\, s22\, \phi^4$$
$$- s18\, S29\, \phi^4 + s18\, \phi^3\, S30 - 4\, s18\, \phi^2\, s2 - 4\, s18\, \phi^2\, s16 - 4\, s18\, \phi^2\, s21 - 4\, s18\, \phi^2\, s28$$
$$- 4\, s18\, \phi^2\, s23 - 4\, s18\, \phi^2\, S35 + 4\, s18\, s8\, \phi^3 + 4\, s18\, s1\, \phi^3 + 4\, s18\, s15\, \phi^3$$
$$+ 4\, s18\, s22\, \phi^3 + 4\, s18\, S29\, \phi^3 - 4\, s18\, \phi^2\, S30 + 4\, s18\, \phi\, S29 + 4\, s18\, \phi\, s8$$
$$+ 4\, s18\, \phi\, s15 + 4\, s18\, \phi\, S36 - 24\, s18\, \sigma^2\, \phi + 6\, s18\, \sigma^2\, \phi^2 + 2\, s34\, \phi\, s9 + 2\, s34\, \phi\, s14$$
$$- 2\, \phi^2\, s28^2 - s28\, s8 - s28\, s15 - s28\, S36 - 2\, s10\, s1 + 2\, \phi^3\, s28^2 - 8\, S11\, \phi^2\, S30$$
$$+ 8\, S11\, \phi\, S29 + 8\, S11\, \phi\, s8 + 8\, S11\, \phi\, s15 + 8\, S11\, \phi\, S36 - 48\, S11\, \sigma^2\, \phi$$
$$+ 42\, S11\, \sigma^2\, \phi^2 - 12\, S11\, \sigma^2\, \phi^3 + 2\, s28\, \phi\, s23 + 2\, s28\, \phi\, S35 - 5\, s28\, s22\, \phi^2$$
$$- 5\, s28\, S29\, \phi^2 + 2\, s28\, \phi\, s1 + 2\, s28\, \phi\, s22 - 2\, s28\, S36\, \phi^2 + 4\, s28\, \phi^3\, s23$$

$$+ 2\, s28\, \phi^3\, S35 - 2\, s28\, s8\, \phi^4 - 2\, s28\, s1\, \phi^4 - 2\, s28\, s15\, \phi^4 - 2\, s28\, s22\, \phi^4$$
$$- 2\, s28\, S29\, \phi^4 + 2\, s28\, \phi^3\, S30 - 4\, s28\, \phi^2\, s23 - 2\, s28\, \phi^2\, S35 + 2\, s28\, s8\, \phi^3$$
$$+ 2\, s28\, s1\, \phi^3 + 2\, s28\, s15\, \phi^3 + 2\, s28\, s22\, \phi^3 + 2\, s28\, S29\, \phi^3 - 2\, s28\, \phi^2\, S30$$
$$+ 2\, s28\, \phi\, S29 + 2\, s28\, \phi\, s8 + 2\, s28\, \phi\, s15 - 3\, S11\, s8 - 3\, S11\, s15 - 3\, S11\, S36$$
$$- s28\, s1 - s28\, s22 + \phi\, s28^2 + 6\, s28\, \sigma^2 - s28\, S29 - 2\, S11\, \phi^4\, s28 - 2\, S11\, \phi^4\, s23$$
$$- 2\, S11\, \phi^4\, S35 + 2\, S11\, s8\, \phi^5 + 2\, S11\, s1\, \phi^5 + 2\, S11\, s15\, \phi^5 + 2\, S11\, s22\, \phi^5$$
$$+ 2\, S11\, S29\, \phi^5 - 2\, S11\, \phi^4\, S30 + 2\, S11\, \phi^3\, S36 - 7\, S11\, S36\, \phi^2 + 7\, S11\, \phi^3\, s7$$
$$+ 7\, S11\, \phi^3\, s9 + 7\, S11\, \phi^3\, s14 + 7\, S11\, \phi^3\, s2 + 7\, S11\, \phi^3\, s16 + 7\, S11\, \phi^3\, s21$$
$$+ 7\, S11\, \phi^3\, s28 + 7\, S11\, \phi^3\, s23 + 7\, S11\, \phi^3\, S35 - 7\, S11\, s8\, \phi^4 - 7\, S11\, s1\, \phi^4$$
$$- 7\, S11\, s15\, \phi^4 - 7\, S11\, s22\, \phi^4 - 7\, S11\, S29\, \phi^4 + 7\, S11\, \phi^3\, S30 - 2\, S11\, \phi^4\, s7$$
$$- 2\, S11\, \phi^4\, s9 - 2\, S11\, \phi^4\, s14 - 2\, S11\, \phi^4\, s2 - 2\, S11\, \phi^4\, s16 - 2\, S11\, \phi^4\, s21$$
$$- 8\, S11\, \phi^2\, s2 - 8\, S11\, \phi^2\, s16 - 8\, S11\, \phi^2\, s21 - 8\, S11\, \phi^2\, s28 - 8\, S11\, \phi^2\, s23$$
$$- 8\, S11\, \phi^2\, S35 + 10\, S11\, s8\, \phi^3 + 10\, S11\, s1\, \phi^3 + 18\, S11\, \sigma^2 - 3\, S11\, S29 + 3\, S11\, \phi\, s7$$
$$- 3\, S11\, s1 - 3\, S11\, s22 + 3\, S11\, \phi\, s9 - 2\, s10\, s8 - 2\, s10\, s15 - 2\, s10\, S36 - 4\, s5\, s1$$
$$- 4\, s5\, s22 + 24\, s5\, \sigma^2 - 4\, s5\, S29 + 2\, s23\, \phi\, S35 - 5\, s23\, S29\, \phi^2 + 2\, s23\, \phi\, s1$$
$$+ 2\, s23\, \phi\, s22 - 2\, s23\, S36\, \phi^2 + 2\, s23\, \phi^3\, S35 - 2\, s23\, s8\, \phi^4 - 2\, s23\, s1\, \phi^4$$
$$- 2\, s23\, s15\, \phi^4 - 2\, s23\, s22\, \phi^4 - 2\, s23\, S29\, \phi^4 + 2\, s23\, \phi^3\, S30 - 2\, s23\, \phi^2\, S35$$
$$+ 2\, s23\, s8\, \phi^3 + 2\, s23\, s1\, \phi^3 + 2\, s23\, s15\, \phi^3 + 2\, s23\, s22\, \phi^3 + 2\, s23\, S29\, \phi^3$$
$$- 2\, s23\, \phi^2\, S30 + 2\, s23\, \phi\, S29 + 2\, s23\, \phi\, s8 + 2\, s23\, \phi\, s15 + 2\, s23\, \phi\, S36 - 12\, s23\, \sigma^2\, \phi$$
$$+ 12\, s23\, \sigma^2\, \phi^2 - 3\, \phi^2\, S29\, S35 - 12\, \phi\, S29\, \sigma^2 + 2\, \phi\, S29\, S36 + 2\, s17\, \phi\, s7 + 2\, s17\, \phi\, s9$$
$$+ 2\, s17\, \phi\, s14 + 2\, s17\, \phi\, s2 + 2\, s17\, \phi\, s16 + 2\, s17\, \phi\, s21 + 2\, s17\, \phi\, s28 + 2\, s17\, \phi\, s23$$
$$+ 2\, s17\, \phi\, S35 - 6\, s17\, s8\, \phi^2 - 6\, s17\, s1\, \phi^2 - 6\, s17\, s15\, \phi^2 - 6\, s17\, s22\, \phi^2$$
$$- 6\, s17\, S29\, \phi^2 + 2\, s17\, \phi\, S30 + 5\, s17\, \phi\, s1 + 5\, s17\, \phi\, s22 - 5\, s17\, \phi^2\, s7 - 5\, s17\, \phi^2\, s9$$
$$- 5\, s17\, \phi^2\, s14 - s17\, \phi^4\, s28 - s17\, \phi^4\, s23 - s17\, \phi^4\, S35 + s17\, s8\, \phi^5 + s17\, s1\, \phi^5$$
$$+ s17\, s15\, \phi^5 + s17\, s22\, \phi^5 + s17\, S29\, \phi^5 - s17\, \phi^4\, S30 + s17\, \phi^3\, S36 - 4\, s17\, S36\, \phi^2$$
$$+ 4\, s17\, \phi^3\, s7 + 4\, s17\, \phi^3\, s9 + 4\, s17\, \phi^3\, s14 + 4\, s17\, \phi^3\, s2 + 4\, s17\, \phi^3\, s16$$
$$+ 4\, s17\, \phi^3\, s21 + 4\, s17\, \phi^3\, s28 + 4\, s17\, \phi^3\, s23 + 4\, s17\, \phi^3\, S35 - 4\, s17\, s8\, \phi^4$$
$$- 4\, s17\, s1\, \phi^4 - 4\, s17\, s15\, \phi^4 - 4\, s17\, s22\, \phi^4 - 4\, s17\, S29\, \phi^4 + 4\, s17\, \phi^3\, S30$$
$$- s17\, \phi^4\, s7 - s17\, \phi^4\, s9 - s17\, \phi^4\, s14 - s17\, \phi^4\, s2 - s17\, \phi^4\, s16 - s17\, \phi^4\, s21$$
$$- 5\, s17\, \phi^2\, s2 - 5\, s17\, \phi^2\, s16 - 5\, s17\, \phi^2\, s21 - 5\, s17\, \phi^2\, s28 - 5\, s17\, \phi^2\, s23$$
$$- 5\, s17\, \phi^2\, S35 + 6\, s17\, s8\, \phi^3 + 6\, s17\, s1\, \phi^3 + 6\, s17\, s15\, \phi^3 - 2\, s17\, s1 - 2\, s17\, s22$$
$$+ 12\, s17\, \sigma^2 - 2\, s17\, S29 - 2\, s17\, s8 - 2\, s17\, s15 - 2\, s17\, S36 + 2\, s13\, \phi\, s14$$
$$+ 2\, s13\, \phi\, s2 + 2\, s13\, \phi\, s16 + 2\, s13\, \phi\, s21 + 2\, s13\, \phi\, s28 + 2\, s13\, \phi\, s23 + 2\, s13\, \phi\, S35$$
$$- 6\, s13\, s8\, \phi^2 - 6\, s13\, s1\, \phi^2 - 6\, s13\, s15\, \phi^2 - 6\, s13\, s22\, \phi^2 - 6\, s13\, S29\, \phi^2$$
$$+ 2\, s13\, \phi\, S30 + 5\, s13\, \phi\, s1 + 5\, s13\, \phi\, s22 - 5\, s13\, \phi^2\, s7 - 5\, s13\, \phi^2\, s9 - 5\, s13\, \phi^2\, s14$$
$$- s13\, \phi^4\, s28 - s13\, \phi^4\, s23 - s13\, \phi^4\, S35 + s13\, s8\, \phi^5 + s13\, s1\, \phi^5 + s13\, s15\, \phi^5$$

$$+ s13\ s22\ \phi^5 + s13\ S29\ \phi^5 - s13\ \phi^4\ S30 + s13\ \phi^3\ S36 - 4\ s13\ S36\ \phi^2 + 4\ s13\ \phi^3\ s7$$
$$+ 4\ s13\ \phi^3\ s9 + 4\ s13\ \phi^3\ s14 + 4\ s13\ \phi^3\ s2 + 4\ s13\ \phi^3\ s16 + 4\ s13\ \phi^3\ s21$$
$$+ 4\ s13\ \phi^3\ s28 + 4\ s13\ \phi^3\ s23 + 4\ s13\ \phi^3\ S35 - 4\ s13\ s8\ \phi^4 - 4\ s13\ s1\ \phi^4$$
$$- 4\ s13\ s15\ \phi^4 - 4\ s13\ s22\ \phi^4 - s13\ \phi^4\ s14 - s13\ \phi^4\ s2 - s13\ \phi^4\ s16 - s13\ \phi^4\ s21$$
$$- 5\ s13\ \phi^2\ s2 - 5\ s13\ \phi^2\ s16 - 5\ s13\ \phi^2\ s21 - 5\ s13\ \phi^2\ s28 - 5\ s13\ \phi^2\ s23$$
$$- 5\ s13\ \phi^2\ S35 + 6\ s13\ s8\ \phi^3 + 6\ s13\ s1\ \phi^3 + 6\ s13\ s15\ \phi^3 + 6\ s13\ s22\ \phi^3$$
$$+ 6\ s13\ S29\ \phi^3 - 5\ s13\ \phi^2\ S30 + 5\ s13\ \phi\ S29 + 5\ s13\ \phi\ s8 + 5\ s13\ \phi\ s15$$
$$+ 5\ s13\ \phi\ S36 - 30\ s13\ \sigma^2\ \phi + 24\ s13\ \sigma^2\ \phi^2 - 6\ s13\ \sigma^2\ \phi^3 + 3\ S11\ \phi\ s14 + 3\ S11\ \phi\ s2$$
$$+ 3\ S11\ \phi\ s16 + 3\ S11\ \phi\ s21 + 3\ S11\ \phi\ s28 + 3\ S11\ \phi\ s23 + 3\ S11\ \phi\ S35$$
$$- 10\ S11\ s8\ \phi^2 - 10\ S11\ s1\ \phi^2 - 10\ S11\ s15\ \phi^2 - 10\ S11\ s22\ \phi^2 - 10\ S11\ S29\ \phi^2$$
$$+ 3\ S11\ \phi\ S30 + 8\ S11\ \phi\ s1 + 8\ S11\ \phi\ s22 - 8\ S11\ \phi^2\ s7 + 2\ s13\ \phi\ s7 - 2\ s13\ s1$$
$$- 2\ s13\ s22 + 12\ s13\ \sigma^2 - 2\ s13\ S29 - 2\ s13\ s8 - 2\ s13\ s15 - 2\ s13\ S36 + 2\ \phi^3\ s16^2$$
$$- 2\ \phi^2\ s16^2 - s16\ s8 - s16\ s15 - s16\ S36 - s16\ s1 - s16\ s22 + \phi\ s16^2 + 6\ s16\ \sigma^2$$
$$- s16\ S29 + 8\ s4\ \phi\ S29 + 8\ s4\ \phi\ s8 + 8\ s4\ \phi\ s15 + 8\ s4\ \phi\ S36 - 48\ s4\ \sigma^2\ \phi$$
$$+ 42\ s4\ \sigma^2\ \phi^2 - 12\ s4\ \sigma^2\ \phi^3 + 2\ s16\ \phi\ s28 + 2\ s16\ \phi\ s23 + 2\ s16\ \phi\ S35 - 5\ s16\ s22\ \phi^2$$
$$- 5\ s16\ S29\ \phi^2 + 2\ s16\ \phi\ s1 + 2\ s16\ \phi\ s22 - 2\ s16\ S36\ \phi^2 + 4\ s16\ \phi^3\ s28$$
$$+ 4\ s16\ \phi^3\ s23 + 2\ s16\ \phi^3\ S35 - 2\ s16\ s8\ \phi^4 - 2\ s16\ s1\ \phi^4 - 2\ s16\ s15\ \phi^4$$
$$- 2\ s16\ s22\ \phi^4 - 2\ s16\ S29\ \phi^4 + 2\ s16\ \phi^3\ S30 - 4\ s16\ \phi^2\ s28 - 4\ s16\ \phi^2\ s23$$
$$- 2\ s16\ \phi^2\ S35 + 2\ s16\ s8\ \phi^3 + 2\ s16\ s1\ \phi^3 + 2\ s16\ s15\ \phi^3 + 2\ s16\ s22\ \phi^3$$
$$+ 2\ s16\ S29\ \phi^3 - 2\ s16\ \phi^2\ S30 + 2\ s16\ \phi\ S29 + 2\ s16\ \phi\ s8 + 2\ s16\ \phi\ s15$$
$$+ 2\ s16\ \phi\ S36 - 12\ s16\ \sigma^2\ \phi + 12\ s16\ \sigma^2\ \phi^2 + 2\ s13\ \phi\ s9 - 8\ s4\ \phi^2\ s23 - 8\ s4\ \phi^2\ S35$$
$$+ 2\ s21\ \phi^3\ S35 - 2\ s21\ s1\ \phi^4 - 2\ s21\ s15\ \phi^4 - 2\ s21\ s22\ \phi^4 - 2\ s21\ S29\ \phi^4$$
$$+ 2\ s21\ \phi^3\ S30 - 4\ s21\ \phi^2\ s16 - 4\ s21\ \phi^2\ s28 - 4\ s21\ \phi^2\ s23 - 2\ s21\ \phi^2\ S35$$
$$+ 2\ s21\ s8\ \phi^3 + 2\ s21\ s1\ \phi^3 + 2\ s21\ s15\ \phi^3 + 2\ s21\ s22\ \phi^3 + 2\ s21\ S29\ \phi^3$$
$$- 2\ s21\ \phi^2\ S30 + 2\ s21\ \phi\ S29 + 2\ s21\ \phi\ s8 + 2\ s21\ \phi\ s15 + 2\ s21\ \phi\ S36 - 12\ s21\ \sigma^2\ \phi$$
$$+ 12\ s21\ \sigma^2\ \phi^2 + 3\ s4\ \phi\ s7 + 3\ s4\ \phi\ s9 + 3\ s4\ \phi\ s14 + 3\ s4\ \phi\ s2 + 3\ s4\ \phi\ s16$$
$$+ 3\ s4\ \phi\ s21 + 3\ s4\ \phi\ s28 + 3\ s4\ \phi\ s23 + 3\ s4\ \phi\ S35 - 10\ s4\ s8\ \phi^2 - 10\ s4\ s1\ \phi^2$$
$$- 10\ s4\ s15\ \phi^2 - 10\ s4\ s22\ \phi^2 - 10\ s4\ S29\ \phi^2 + 3\ s4\ \phi\ S30 + 8\ s4\ \phi\ s1 + 8\ s4\ \phi\ s22$$
$$- 8\ s4\ \phi^2\ s7 - 8\ s4\ \phi^2\ s9 - 8\ s4\ \phi^2\ s14 - 2\ s4\ \phi^4\ s28 - 2\ s4\ \phi^4\ s23 - 2\ s4\ \phi^4\ S35$$
$$+ 2\ s4\ s8\ \phi^5 + 2\ s4\ s1\ \phi^5 + 2\ s4\ s15\ \phi^5 + 2\ s4\ s22\ \phi^5 + 2\ s4\ S29\ \phi^5 - 2\ s4\ \phi^4\ S30$$
$$+ 2\ s4\ \phi^3\ S36 - 7\ s4\ S36\ \phi^2 + 7\ s4\ \phi^3\ s7 + 7\ s4\ \phi^3\ s9 + 7\ s4\ \phi^3\ s14 + 7\ s4\ \phi^3\ s2$$
$$+ 7\ s4\ \phi^3\ s16 + 7\ s4\ \phi^3\ s21 + 7\ s4\ \phi^3\ s28 + 7\ s4\ \phi^3\ s23 + 7\ s4\ \phi^3\ S35 - 7\ s4\ s8\ \phi^4$$
$$- 7\ s4\ s1\ \phi^4 - 7\ s4\ s15\ \phi^4 - 7\ s4\ s22\ \phi^4 - 7\ s4\ S29\ \phi^4 + 7\ s4\ \phi^3\ S30 - 2\ s4\ \phi^4\ s7$$
$$- 2\ s4\ \phi^4\ s9 - 2\ s4\ \phi^4\ s14 - 2\ s4\ \phi^4\ s2 - 2\ s4\ \phi^4\ s16 - 2\ s4\ \phi^4\ s21 - 8\ s4\ \phi^2\ s2$$
$$- 8\ s4\ \phi^2\ s16 - 8\ s4\ \phi^2\ s21 - 2\ s21\ s8\ \phi^4 - 6\ s17\ \sigma^2\ \phi^3 + 6\ s17\ S29\ \phi^3 - 5\ s17\ \phi^2\ S30$$
$$+ \phi\ s23^2 + 6\ s23\ \sigma^2 - s23\ S29 + 2\ \phi^3\ s23^2 - 2\ \phi^2\ s23^2 - s23\ s8 - s23\ s15 - s23\ S36$$

$$+ 2\,\phi^3\,S29^2 + 2\,\phi\,S29^2 - s23\,s1 - s23\,s22 + 4\,s10\,\phi^3\,s28 + 4\,s10\,\phi^3\,s23$$
$$+ 4\,s10\,\phi^3\,S35 - 4\,s10\,s8\,\phi^4 - 4\,s10\,s1\,\phi^4 - 4\,s10\,s15\,\phi^4 - 4\,s10\,s22\,\phi^4$$
$$- 4\,s10\,S29\,\phi^4 + 4\,s10\,\phi^3\,S30 - s10\,\phi^4\,s7 - s10\,\phi^4\,s9 - s10\,\phi^4\,s14 - s10\,\phi^4\,s2$$
$$- s10\,\phi^4\,s16 - s10\,\phi^4\,s21 - 5\,s10\,\phi^2\,s2 - 5\,s10\,\phi^2\,s16 - 5\,s10\,\phi^2\,s21 - 5\,s10\,\phi^2\,s28$$
$$- 5\,s10\,\phi^2\,s23 - 5\,s10\,\phi^2\,S35 + 6\,s10\,s8\,\phi^3 + 6\,s10\,s1\,\phi^3 + 6\,s10\,s15\,\phi^3$$
$$+ 6\,s10\,s22\,\phi^3 + 6\,s10\,S29\,\phi^3 - 5\,s10\,\phi^2\,S30 + 5\,s10\,\phi\,S29 + 5\,s10\,\phi\,s8$$
$$+ 5\,s10\,\phi\,s15 + 5\,s10\,\phi\,S36 - 30\,s10\,\sigma^2\,\phi + 24\,s10\,\sigma^2\,\phi^2 - 6\,s10\,\sigma^2\,\phi^3 + 4\,s5\,\phi\,s9$$
$$+ 4\,s5\,\phi\,s14 + 4\,s5\,\phi\,s2 + 4\,s5\,\phi\,s16 + 4\,s5\,\phi\,s21 + 4\,s5\,\phi\,s28 + 4\,s5\,\phi\,s23$$
$$+ 4\,s5\,\phi\,S35 - 14\,s5\,s8\,\phi^2 - 14\,s5\,s1\,\phi^2 - 14\,s5\,s15\,\phi^2 - 14\,s5\,s22\,\phi^2 - 14\,s5\,S29\,\phi^2$$
$$+ 4\,s5\,\phi\,S30 + 11\,s5\,\phi\,s1 + 11\,s5\,\phi\,s22 - 11\,s5\,\phi^2\,s7 - 11\,s5\,\phi^2\,s9 - 11\,s5\,\phi^2\,s14$$
$$- 3\,s5\,\phi^4\,s28 - 3\,s5\,\phi^4\,s23 - 3\,s5\,\phi^4\,S35 + 3\,s5\,s8\,\phi^5 + 3\,s5\,s1\,\phi^5 + 3\,s5\,s15\,\phi^5$$
$$+ 3\,s5\,s22\,\phi^5 + 3\,s5\,S29\,\phi^5 - 3\,s5\,\phi^4\,S30 + 3\,s5\,\phi^3\,S36 - 10\,s5\,S36\,\phi^2 + 10\,s5\,\phi^3\,s7$$
$$+ 10\,s5\,\phi^3\,s9 + 10\,s5\,\phi^3\,s14 + 10\,s5\,\phi^3\,s2 + 10\,s5\,\phi^3\,s16 + 10\,s5\,\phi^3\,s21$$
$$+ 10\,s5\,\phi^3\,s28 + 10\,s5\,\phi^3\,s23 + 10\,s5\,\phi^3\,S35 - 10\,s5\,s8\,\phi^4 - 10\,s5\,s1\,\phi^4$$
$$- 10\,s5\,s15\,\phi^4 - 10\,s5\,s22\,\phi^4 - 10\,s5\,S29\,\phi^4 + 10\,s5\,\phi^3\,S30 - 3\,s5\,\phi^4\,s7 - 3\,s5\,\phi^4\,s9$$
$$- 3\,s5\,\phi^4\,s14 - 3\,s5\,\phi^4\,s2 - 3\,s5\,\phi^4\,s16 - 3\,s5\,\phi^4\,s21 - 11\,s5\,\phi^2\,s2 - 11\,s5\,\phi^2\,s16$$
$$- 11\,s5\,\phi^2\,s21 - 11\,s5\,\phi^2\,s28 - 11\,s5\,\phi^2\,s23 - 11\,s5\,\phi^2\,S35 + 14\,s5\,s8\,\phi^3$$
$$+ 14\,s5\,s1\,\phi^3 + 14\,s5\,s15\,\phi^3 + 14\,s5\,s22\,\phi^3 + 14\,s5\,S29\,\phi^3 - 11\,s5\,\phi^2\,S30$$
$$+ 11\,s5\,\phi\,S29 + 11\,s5\,\phi\,s8 + 11\,s5\,\phi\,s15 + 11\,s5\,\phi\,S36 - 66\,s5\,\sigma^2\,\phi + 60\,s5\,\sigma^2\,\phi^2$$
$$- 18\,s5\,\sigma^2\,\phi^3 - 5\,\phi^2\,s22\,s23 - 3\,\phi^2\,s22\,S35 + 4\,\phi^3\,s22\,S29 - 12\,\phi\,s22\,\sigma^2$$
$$+ 4\,\phi\,s22\,S29 + 2\,\phi\,s22\,S36 + 4\,s5\,\phi\,s7 - 4\,s5\,s8 - 4\,s5\,s15 - 4\,s5\,S36 + 2\,\phi\,s22^2$$
$$+ 2\,\phi^3\,s22^2 + 2\,s10\,\phi\,s9 + 2\,s10\,\phi\,s2 + 2\,s10\,\phi\,s16 + 2\,s10\,\phi\,s21 + 2\,s10\,\phi\,s28$$
$$+ 2\,s10\,\phi\,s23 + 2\,s10\,\phi\,S35 - 6\,s10\,s8\,\phi^2 - 6\,s10\,s1\,\phi^2 - 6\,s10\,s15\,\phi^2 - 6\,s10\,s22\,\phi^2$$
$$- 6\,s10\,S29\,\phi^2 + 2\,s10\,\phi\,S30 + 5\,s10\,\phi\,s1 + 5\,s10\,\phi\,s22 - 5\,s10\,\phi^2\,s7 - 5\,s10\,\phi^2\,s9$$
$$- 5\,s10\,\phi^2\,s14 - s10\,\phi^4\,s28 - s10\,\phi^4\,s23 - s10\,\phi^4\,S35 + s10\,s8\,\phi^5 + s10\,s1\,\phi^5$$
$$+ s10\,s15\,\phi^5 + s10\,s22\,\phi^5 + s10\,S29\,\phi^5 - s10\,\phi^4\,S30 + s10\,\phi^3\,S36 - 4\,s10\,S36\,\phi^2$$
$$+ 4\,s10\,\phi^3\,s7 + 4\,s10\,\phi^3\,s9 + 4\,s10\,\phi^3\,s14 + 4\,s10\,\phi^3\,s2 + 4\,s10\,\phi^3\,s16 + 2\,s10\,\phi\,s14$$
$$- 2\,s10\,s22 + 2\,s10\,\phi\,s7 + 12\,s10\,\sigma^2 - 2\,s10\,S29 + 6\,s32\,\phi\,s15 - 36\,s32\,\sigma^2\,\phi$$
$$+ 12\,s32\,\sigma^2\,\phi^2 + 6\,s32\,\phi\,S36 - 4\,s32\,s1 - 4\,s32\,s22 + 24\,s32\,\sigma^2 - 4\,s32\,S29$$
$$- 4\,s32\,s8 - 4\,s32\,s15 - 4\,s32\,S36 + 4\,s32\,\phi\,s7 + 4\,s32\,\phi\,s9 + 4\,s32\,\phi\,s14$$
$$+ 4\,s32\,\phi\,s2 + 4\,s32\,\phi\,s16 + 4\,s32\,\phi\,s21 + 4\,s32\,\phi\,s28 + 4\,s32\,\phi\,s23 + 4\,s32\,\phi\,S35$$
$$- 6\,s32\,s8\,\phi^2 - 6\,s32\,s1\,\phi^2 - 6\,s32\,s15\,\phi^2 - 6\,s32\,s22\,\phi^2 - 6\,s32\,S29\,\phi^2$$

$$+ 4\, s32\, \phi\, S30 + 6\, s32\, \phi\, s1 + 6\, s32\, \phi\, s22 - 6\, s32\, \phi^2\, s7 - 6\, s32\, \phi^2\, s9 - 6\, s32\, \phi^2\, s14$$
$$- 2\, s32\, S36\, \phi^2 + 2\, s32\, \phi^3\, s7 + 2\, s32\, \phi^3\, s9 + 2\, s32\, \phi^3\, s14 + 2\, s32\, \phi^3\, s2$$
$$+ 2\, s32\, \phi^3\, s16 + 2\, s32\, \phi^3\, s21 + 2\, s32\, \phi^3\, s28 + 2\, s32\, \phi^3\, s23 + 2\, s32\, \phi^3\, S35$$
$$- 2\, s32\, s8\, \phi^4 - 2\, s32\, s1\, \phi^4 - 2\, s32\, s15\, \phi^4 - 2\, s32\, s22\, \phi^4 - 2\, s32\, S29\, \phi^4$$
$$+ 2\, s32\, \phi^3\, S30 - 6\, s32\, \phi^2\, s2 - 6\, s32\, \phi^2\, s16 - 6\, s32\, \phi^2\, s21 - 6\, s32\, \phi^2\, s28 - S35\, s1$$
$$- S35\, s22 + \phi\, S35^2 + 6\, S35\, \sigma^2 - S35\, S29 - S35\, s8 - S35\, s15 - S35\, S36) \big/ \sigma^8$$

$$R0 := -(3\, s5\, S29 + 2\, s19\, s22 + s27\, S29 + s3\, s15 + 3\, s25\, s22 + s3\, s8 + 2\, s19\, s1 + s10\, s1$$
$$+ s13\, s8 + s17\, s15 + 3\, s25\, s15 + s13\, S29 + s20\, s22 + s10\, s15 + 3\, s25\, S29 + s10\, S29$$
$$+ 2\, S11\, s8 + s27\, s1 + s13\, s15 + 3\, s5\, s8 + s20\, S29 + s17\, S29 + 2\, s4\, S29 + s3\, s22$$
$$+ s27\, s15 + s17\, s8 + s13\, s1 + s20\, s8 + 3\, s5\, s22 + s10\, s22 + s10\, s8 + 2\, s19\, s15$$
$$+ 2\, S11\, s1 + s27\, s8 + 3\, s25\, s8 + s20\, s1 + 2\, s4\, s8 + 2\, s4\, s1 + s13\, s22 + 2\, S11\, s22$$
$$+ 2\, S11\, S29 + 3\, s5\, s1 + s17\, s22 + 2\, s19\, s8 + 2\, S11\, s15 + 3\, s25\, s1 + s17\, s1 + s3\, S29$$
$$+ 2\, s19\, S29 + 2\, s26\, s15 + 2\, s26\, s8 + 2\, s26\, S29 + 2\, s26\, s22 + 2\, s26\, s1 + s3\, s1$$
$$+ 3\, s5\, s15 + 2\, s4\, s15 + 2\, s4\, s22 + s27\, s22 + s20\, s15)\, \phi^5 \big/ \sigma^8 - (-s13\, S30 - s13\, s14$$
$$- s13\, s2 - s13\, s16 - s13\, s23 - 3\, s25\, s14 - s13\, S35 - 2\, s32\, s1 - 2\, s19\, s21 - 2\, s7\, s1$$
$$- 3\, s25\, s28 - 2\, s7\, s22 - 3\, s25\, s21 - 3\, s25\, s16 - 3\, s25\, s2 - 10\, s5\, S29 - 3\, s25\, s9$$
$$- 2\, S11\, s7 - s13\, s7 - 2\, S11\, s9 - 7\, s19\, s22 - 4\, s27\, S29 - 2\, s2\, s22 - s17\, S35$$
$$- 3\, s25\, S35 - 3\, s25\, s23 - 2\, s2\, S29 - 4\, s3\, s15 - 3\, s25\, S30 - 2\, s2\, s8 - 3\, s31\, s1$$
$$- 2\, s2\, s15 - 10\, s25\, s22 - 4\, s3\, s8 - 7\, s19\, s1 - 2\, S12\, s1 - 4\, s10\, s1 - s33\, S29$$
$$- 4\, s13\, s8 - 2\, s2\, s1 - s20\, s9 - 4\, s17\, s15 - 10\, s25\, s15 - 2\, S12\, s22 - s20\, s14$$
$$- s20\, s2 - s20\, s16 - 4\, s13\, S29 - s20\, s21 - s20\, s28 - s33\, s8 - s20\, s23 - 3\, s6\, s15$$
$$- s20\, S35 - s20\, S30 - 3\, s6\, s22 - 4\, s20\, s22 - 4\, s10\, s15 - 10\, s25\, S29 - 4\, s10\, S29$$
$$- 7\, S11\, s8 - 3\, s25\, s7 - 4\, s27\, s1 - 2\, S11\, S35 - s3\, s28 - s3\, s21 - s3\, s16 - s3\, s2$$
$$- s3\, s14 - s3\, s9 - s17\, S30 - 4\, s13\, s15 - s27\, s23 - 2\, s32\, S29 - s3\, S30 - 10\, s5\, s8$$
$$- 4\, s20\, S29 - 3\, s31\, s8 - 4\, s17\, S29 - 7\, s4\, S29 - s3\, S35 - s3\, s23 - 2\, s32\, s15 - s17\, s2$$
$$- 4\, s3\, s22 - 4\, s27\, s15 - 3\, s5\, s7 - 4\, s17\, s8 - 4\, s13\, s1 - s13\, s21 - 4\, s20\, s8 - 3\, s6\, s1$$
$$- 3\, s31\, S29 - 10\, s5\, s22 - 2\, s19\, s2 - 4\, s10\, s22 - 2\, s7\, s15 - 2\, s32\, s22 - 4\, s10\, s8$$
$$- 3\, s6\, s8 - 2\, s32\, s8 - 2\, s26\, s16 - 7\, s19\, s15 - s33\, s1 - s3\, s7 - s18\, s15 - 2\, s26\, s7$$
$$- 7\, S11\, s1 - 2\, s26\, S35 - 2\, s26\, s23 - 4\, s27\, s8 - 2\, s26\, s21 - 2\, s26\, S30 - 10\, s25\, s8$$
$$- s27\, s9 - 4\, s20\, s1 - 7\, s4\, s8 - 3\, s31\, s15 - s17\, s21 - 7\, s4\, s1 - s13\, s28 - s17\, s23$$
$$- 3\, s31\, s22 - 4\, s13\, s22 - s10\, s9 - 7\, S11\, s22 - 2\, s26\, s9 - s27\, s7 - 7\, S11\, S29$$
$$- 3\, s6\, S29 - 2\, s26\, s2 - 10\, s5\, s1 - 4\, s17\, s22 - s17\, s16 - s18\, s8 - 2\, s26\, s14$$
$$- 7\, s19\, s8 - 7\, S11\, s15 - 10\, s25\, s1 - 2\, s21\, s1 - s20\, s7 - 4\, s17\, s1 - 2\, s9\, s1$$
$$- 4\, s3\, S29 - 2\, S11\, s16 - 2\, S11\, s2 - 2\, S11\, s14 - 7\, s19\, S29 - 2\, s7\, S29 - 2\, s7\, s8$$
$$- 2\, s21\, s15 - 2\, s21\, s8 - 2\, s21\, S29 - 2\, s21\, s22 - 2\, s23\, s22 - 2\, s23\, s1 - 2\, s23\, s15$$
$$- 2\, s23\, s8 - 2\, s23\, S29 - s27\, S30 - 2\, s16\, S29 - 2\, s16\, s22 - s17\, s9 - 2\, s16\, s1$$

$- 2\, s16\, s15 - 2\, s16\, s8 - 2\, s28\, S29 - 2\, s28\, s22 - 2\, s28\, s1 - 2\, s28\, s15 - 2\, s28\, s8$
$- s27\, S35 - 2\, s14\, s15 - 2\, s14\, s8 - 2\, s14\, S29 - 2\, S11\, s21 - 2\, s14\, s22 - 2\, s14\, s1$
$- 2\, s9\, s15 - 2\, s9\, s8 - 2\, s9\, S29 - 2\, s9\, s22 - 2\, s26\, s28 - 2\, S12\, s15 - 2\, S12\, s8$
$- 2\, S12\, S29 - s18\, S29 - s18\, s22 - s18\, s1 - 7\, s26\, s15 - 7\, s26\, s8 - 7\, s26\, S29$
$- 7\, s26\, s22 - 7\, s26\, s1 - 2\, S11\, s28 - s17\, s14 - 4\, s3\, s1 - 2\, S11\, S30 - 10\, s5\, s15$
$- 2\, S11\, s23 - s17\, s28 - s33\, s22 - 7\, s4\, s15 - s33\, s15 - 7\, s4\, s22 - s17\, s7 - 4\, s27\, s22$
$- 4\, s20\, s15 - 2\, s19\, s7 - 2\, s19\, s9 - 2\, s19\, s16 - 2\, s19\, s14 - 2\, s19\, S35 - 2\, s19\, s23$
$- 2\, s19\, s28 - 2\, s19\, S30 - s27\, s2 - s27\, s14 - s27\, s16 - s27\, s21 - 3\, s5\, S30 - s27\, s28$
$- s13\, s9 - 2\, s4\, s7 - 2\, s4\, s9 - 2\, s4\, s14 - 2\, s4\, s2 - 2\, s4\, s16 - 2\, s4\, s21 - 2\, s4\, s28$
$- 2\, s4\, s23 - 2\, s4\, S35 - 2\, s4\, S30 - 3\, s5\, s9 - 3\, s5\, s14 - 3\, s5\, s2 - 3\, s5\, s16 - 3\, s5\, s21$
$- 3\, s5\, s28 - 3\, s5\, s23 - 3\, s5\, S35 - s10\, s2 - s10\, s16 - s10\, s21 - s10\, s28 - s10\, s23$
$- s10\, S35 - s10\, S30 - s10\, s14 - s10\, s7)\, \phi^4 / \sigma^8 - (4\, s13\, S30 + 4\, s7\, s9 + 4\, s13\, s14$
$+ 4\, s13\, s2 + 4\, s13\, s16 + 4\, s13\, s23 + 10\, s25\, s14 + 4\, s13\, S35 + 2\, s7\, S35 + 6\, s32\, s1$
$+ 7\, s19\, s21 + 4\, s2\, s14 + 2\, s7\, s1 + 2\, s7\, S30 + 10\, s25\, s28 + 2\, s7\, s22 + 10\, s25\, s21$
$+ 10\, s25\, s16 + 2\, s19\, S36 + 10\, s25\, s2 + 14\, s5\, S29 + 10\, s25\, s9 + 7\, S11\, s7 + 4\, s13\, s7$
$+ 7\, S11\, s9 + 10\, s19\, s22 + 6\, s27\, S29 + 2\, s2\, s22 + 2\, S12\, s9 + 4\, s17\, S35 + 10\, s25\, S35$
$+ 10\, s25\, s23 + 2\, s2\, S29 + 6\, s3\, s15 - 6\, s17\, \sigma^2 + 10\, s25\, S30 + 2\, s2\, s8 + 8\, s31\, s1$
$+ 2\, s2\, s15 + 14\, s25\, s22 + 6\, s3\, s8 + 10\, s19\, s1 + 2\, s24\, s1 + 6\, S12\, s1 + s33\, s14$
$+ s33\, s9 + 2\, s34\, s8 + 6\, s10\, s1 + 4\, s33\, S29 + 6\, s13\, s8 + s33\, s7 - 12\, s4\, \sigma^2 - 6\, s3\, \sigma^2$
$+ 4\, s28\, s23 + 2\, s28\, S35 + s33\, s23 + s33\, s21 + s18\, s9 + s18\, s14 + s18\, s2 + s18\, s16$
$+ s18\, s21 + s18\, s28 + s18\, s23 + s33\, s16 + s18\, S35 + s33\, s2 + 2\, s2\, s1 + s18\, S30$
$+ 4\, s20\, s9 + 6\, s17\, s15 + 14\, s25\, s15 + 6\, S12\, s22 + 4\, s20\, s14 + 4\, s20\, s2 + 4\, s20\, s16$
$+ 6\, s13\, S29 + 4\, s20\, s21 + 4\, s20\, s28 + 4\, s33\, s8 + 4\, s20\, s23 + 2\, s24\, s15 + 8\, s6\, s15$
$+ 4\, s20\, S35 + s33\, S35 + 4\, s20\, S30 - 18\, s5\, \sigma^2 + s33\, S30 - 6\, s10\, \sigma^2 + 2\, S12\, s21$
$+ 8\, s6\, s22 + 2\, S12\, S30 + 3\, s31\, s2 + 3\, s31\, s14 + 3\, s31\, s9 + 3\, s31\, s7 + 6\, s20\, s22$
$+ 6\, s10\, s15 + 4\, s9\, s28 + 4\, s9\, s23 + 14\, s25\, S29 + 2\, s9\, S35 + 6\, s10\, S29 + 2\, s34\, s1$
$+ 10\, S11\, s8 + 2\, s34\, s15 + 10\, s25\, s7 + 6\, s27\, s1 + 3\, s31\, S30 + 7\, S11\, S35 + 3\, s31\, S35$
$+ 3\, s31\, s23 + 3\, s31\, s28 + 3\, s31\, s21 + 3\, s31\, s16 + 4\, s3\, s28 + 3\, s6\, s21 + 4\, s3\, s21$
$+ 3\, s6\, s16 + 2\, s4\, S36 + 3\, s6\, s2 + 3\, s6\, s14 + 4\, s3\, s16 + 3\, s6\, s9 + 3\, s6\, s7 + 4\, s3\, s2$
$+ 4\, s3\, s14 - 6\, s13\, \sigma^2 + 4\, s3\, s9 + 2\, S12\, S35 + 2\, S12\, s23 + 4\, s17\, S30 + 2\, S12\, s28$
$+ 2\, S12\, s16 + 6\, s13\, s15 + 4\, s27\, s23 + 4\, s9\, s16 + 6\, s32\, S29 + 4\, s9\, s21 + 4\, s14\, s23$
$+ 4\, s3\, S30 + 2\, s14\, S35 + 14\, s5\, s8 + s13\, S36 + 2\, s24\, s8 + 6\, s20\, S29 + 8\, s31\, s8$
$+ 6\, s17\, S29 + 10\, s4\, S29 + 4\, s3\, S35 + 3\, s6\, S35 + 4\, s3\, s23 + 3\, s5\, S36 + 3\, s6\, s23$
$+ 3\, s25\, S36 + 3\, s6\, s28 + 2\, s2\, S35 + 6\, s32\, s15 + 4\, s8\, s22 + 4\, s8\, S29 - 12\, s19\, \sigma^2$
$+ 4\, s17\, s2 + 4\, s14\, s9 + 6\, s3\, s22 + 4\, s14\, s16 + 4\, s14\, s21 + 6\, s27\, s15 + 3\, s6\, S30$
$+ 10\, s5\, s7 + 4\, s15\, s22 + 4\, s15\, S29 + 4\, s15\, s8 + 6\, s17\, s8 + 6\, s13\, s1 + 4\, s13\, s21$
$+ 6\, s20\, s8 + 8\, s6\, s1 + 8\, s31\, S29 + 14\, s5\, s22 + s17\, S36 + 7\, s19\, s2 + 6\, s10\, s22$

$$+ 2\, S11\, S36 + s20\, S36 + 2\, s7\, s15 + 6\, s32\, s22 - 6\, s27\, \sigma^2 + 6\, s10\, s8 + 2\, s21\, S35$$
$$+ 8\, s6\, s8 + 4\, s21\, s23 + s33\, s28 + 4\, s21\, s28 + 4\, s21\, s16 + 6\, s32\, s8 + 7\, s26\, s16$$
$$+ 10\, s19\, s15 + 4\, s33\, s1 + 4\, s3\, s7 + 2\, s8^2 + 4\, s18\, s15 + 4\, s22\, S29 + 2\, s24\, s22$$
$$+ 7\, s26\, s7 + 2\, s24\, S29 - 18\, s25\, \sigma^2 - 6\, s20\, \sigma^2 + 10\, S11\, s1 + 7\, s26\, S35 + 7\, s26\, s23$$
$$+ 6\, s27\, s8 + 7\, s26\, s21 + 7\, s26\, S30 + 14\, s25\, s8 + 4\, s27\, s9 + 6\, s20\, s1 + 10\, s4\, s8$$
$$+ 8\, s31\, s15 + 4\, s17\, s21 - 12\, S11\, \sigma^2 + 10\, s4\, s1 + 2\, S12\, s2 + 4\, s13\, s28 + 4\, s17\, s23$$
$$+ 8\, s31\, s22 + 6\, s13\, s22 + 4\, s10\, s9 + 10\, S11\, s22 + s27\, S36 + 2\, s34\, s22 + 7\, s26\, s9$$
$$+ s10\, S36 + 4\, s27\, s7 + 10\, S11\, S29 + 4\, s1\, s8 + 4\, s1\, s15 + 8\, s6\, S29 + 2\, s34\, S29$$
$$+ 7\, s26\, s2 + 14\, s5\, s1 + 6\, s17\, s22 + 4\, s17\, s16 + 4\, s18\, s8 + 7\, s26\, s14 + 10\, s19\, s8$$
$$+ 10\, S11\, s15 + 14\, s25\, s1 + 2\, s21\, s1 + 4\, s20\, s7 + 6\, s17\, s1 + 2\, s9\, s1 + 6\, s3\, S29$$
$$+ 7\, S11\, s16 + 7\, S11\, s2 + 7\, S11\, s14 + 10\, s19\, S29 + 2\, s7\, S29 + 2\, s7\, s8 + 2\, s21\, s15$$
$$+ 2\, s21\, s8 + 2\, s21\, S29 + 2\, s21\, s22 + 2\, s23\, s22 + 2\, s23\, s1 + 2\, s23\, s15 + 2\, s23\, s8$$
$$+ 2\, S30\, s9 + 2\, s23\, S29 + 4\, s27\, S30 + 2\, s16\, S29 + 2\, s16\, s22 + 4\, s17\, s9 + 2\, s16\, s1$$
$$+ 2\, s16\, s15 + 2\, s16\, s8 + 2\, s28\, S29 + 2\, s28\, s22 + 2\, s28\, s1 + 2\, s28\, s15 + 2\, s28\, s8$$
$$+ 4\, s27\, S35 + 2\, s14\, s15 + 2\, s14\, s8 + 2\, s14\, S29 + 7\, S11\, s21 + 2\, s14\, s22 + 2\, s14\, s1$$
$$+ 2\, s9\, s15 + 2\, s9\, s8 + 2\, s9\, S29 + 2\, s9\, s22 + 7\, s26\, s28 + 6\, S12\, s15 + 6\, S12\, s8$$
$$+ 6\, S12\, S29 + 2\, S30\, s23 + 4\, s18\, S29 + 2\, S30\, s28 + 4\, s18\, s22 + 4\, s18\, s1 + 2\, s26\, S36$$
$$+ 10\, s26\, s15 + 10\, s26\, s8 + 10\, s26\, S29 + 2\, S30\, s21 + 2\, S30\, s16 - 12\, s26\, \sigma^2$$
$$+ 10\, s26\, s22 + 2\, S30\, s2 + 10\, s26\, s1 + 2\, S30\, s14 + 7\, S11\, s28 + 4\, s17\, s14 + 4\, s7\, s14$$
$$+ 6\, s3\, s1 + 4\, s2\, s9 + 7\, S11\, S30 + 14\, s5\, s15 + 7\, S11\, s23 + 4\, s2\, s21 + 4\, s17\, s28$$
$$+ 4\, s14\, s28 + 4\, s2\, s16 + 2\, S12\, s7 + 4\, s33\, s22 + 4\, s2\, s23 + 4\, s2\, s28 + 10\, s4\, s15$$
$$+ 4\, s1\, S29 + 4\, s33\, s15 + s3\, S36 + 10\, s4\, s22 + 4\, s17\, s7 + 2\, S12\, s14 + 2\, s16\, S35$$
$$+ 4\, s16\, s23 + 4\, s16\, s28 + 6\, s27\, s22 + 6\, s20\, s15 + 7\, s19\, s7 + s18\, s7 + 7\, s19\, s9$$
$$+ 7\, s19\, s16 + 7\, s19\, s14 + 2\, s7^2 + 2\, s2^2 + 2\, s21^2 + 2\, s9^2 + 2\, s14^2 + 2\, s28^2 + 2\, s16^2$$
$$+ 2\, s23^2 + 2\, S29^2 + 2\, s15^2 + 7\, s19\, S35 + 7\, s19\, s23 + 7\, s19\, s28 + 7\, s19\, S30$$
$$+ 4\, s27\, s2 + 4\, s27\, s14 + 4\, s27\, s16 + 2\, s22^2 + 4\, s1\, s22 + 4\, s27\, s21 + 10\, s5\, S30$$
$$+ 4\, s27\, s28 + 2\, s1^2 + 4\, s13\, s9 + 7\, s4\, s7 + 7\, s4\, s9 + 7\, s4\, s14 + 7\, s4\, s2 + 7\, s4\, s16$$
$$+ 7\, s4\, s21 + 7\, s4\, s28 + 7\, s4\, s23 + 7\, s4\, S35 + 7\, s4\, S30 + 10\, s5\, s9 + 10\, s5\, s14$$
$$+ 10\, s5\, s2 + 10\, s5\, s16 + 10\, s5\, s21 + 10\, s5\, s28 + 10\, s5\, s23 + 10\, s5\, S35 + 4\, s10\, s2$$
$$+ 4\, s10\, s16 + 4\, s10\, s21 + 4\, s10\, s28 + 4\, s10\, s23 + 4\, s10\, S35 + 4\, s10\, S30 + 4\, s10\, s14$$
$$+ 4\, s10\, s7 + 2\, s32\, s7 + 2\, s32\, s9 + 2\, s32\, s14 + 2\, s32\, s2 + 2\, s32\, s16 + 2\, s32\, s21$$
$$+ 2\, s32\, s23 + 2\, s32\, S35 + 2\, s32\, S30 + 4\, s7\, s2 + 2\, s23\, S35 + 4\, s7\, s21 + 4\, s7\, s16$$
$$+ 4\, s7\, s28 + 4\, s7\, s23 + 2\, s32\, s28)\, \phi^3 / \sigma^8 - (-5\, s13\, S30 - 4\, s7\, s9 - 5\, s13\, s14$$
$$- 5\, s13\, s2 - 5\, s13\, s16 - 5\, s13\, s23 - 11\, s25\, s14 - 5\, s13\, S35 + 12\, s14\, \sigma^2 - 2\, s7\, S35$$
$$- 6\, s32\, s1 - 8\, s19\, s21 - 4\, s2\, s14 - 5\, s7\, s1 - 2\, s32\, S36 - 2\, s7\, S30 - 11\, s25\, s28$$
$$- 5\, s7\, s22 - 11\, s25\, s21 - 11\, s25\, s16 - 7\, s19\, S36 - 11\, s25\, s2 - 14\, s5\, S29$$
$$- 11\, s25\, s9 - 2\, s34\, s14 - 8\, S11\, s7 - 5\, s13\, s7 - 8\, S11\, s9 - 10\, s19\, s22 - 6\, s27\, S29$$
$$- 5\, s2\, s22 - 6\, S12\, s9 - 5\, s17\, S35 - s18\, S36 - 11\, s25\, S35 - 11\, s25\, s23 - 5\, s2\, S29$$

$$- 6\ s3\ s15 + 24\ s17\ \sigma^2 - 11\ s25\ S30 - 2\ s34\ s2 - 5\ s2\ s8 - 8\ s31\ s1 - 5\ s2\ s15$$
$$- 14\ s25\ s22 - 6\ s3\ s8 - 10\ s19\ s1 - 2\ s24\ s1 - 6\ S12\ s1 - 4\ s33\ s14 - 4\ s33\ s9$$
$$- 2\ s34\ s8 - 6\ s10\ s1 - 4\ s33\ S29 - 6\ s13\ s8 - 4\ s33\ s7 + 42\ s4\ \sigma^2 + 24\ s3\ \sigma^2$$
$$- 2\ s2\ S36 - 4\ s28\ s23 - 2\ s28\ S35 - 4\ s33\ s23 - 4\ s33\ s21 - 4\ s18\ s9 - 4\ s18\ s14$$
$$- 4\ s18\ s2 - 3\ S30\ s1 - 4\ s18\ s16 - 4\ s18\ s21 - 4\ s18\ s28 - 4\ s18\ s23 - 4\ s33\ s16$$
$$- 4\ s18\ S35 - 4\ s33\ s2 - 5\ s2\ s1 - 4\ s18\ S30 - 3\ S30\ s22 + 12\ s32\ \sigma^2 - 5\ s20\ s9$$
$$- 6\ s17\ s15 - 14\ s25\ s15 - 6\ S12\ s22 - 5\ s20\ s14 - 5\ s20\ s2 - 5\ s20\ s16 - 6\ s13\ S29$$
$$- 5\ s20\ s21 - 5\ s20\ s28 - 4\ s33\ s8 - 5\ s20\ s23 - 2\ s24\ s15 - 8\ s6\ s15 - 5\ s20\ S35$$
$$- 4\ s33\ S35 - 5\ s20\ S30 - 3\ s31\ S36 + 60\ s5\ \sigma^2 - 4\ s33\ S30 + 24\ s10\ \sigma^2 - 6\ S12\ s21$$
$$- 8\ s6\ s22 - 6\ S12\ S30 - 8\ s31\ s2 - 8\ s31\ s14 - 8\ s31\ s9 - 8\ s31\ s7 + 18\ s6\ \sigma^2$$
$$- 6\ s20\ s22 - 6\ s10\ s15 - 4\ s9\ s28 - 4\ s9\ s23 - 14\ s25\ S29 - 2\ s9\ S35 - 6\ s10\ S29$$
$$- 2\ s34\ s1 - 10\ S11\ s8 - 2\ s34\ s15 - 3\ S30\ S29 - 3\ s6\ S36 - 11\ s25\ s7 - 6\ s27\ s1$$
$$- 8\ s31\ S30 - 8\ S11\ S35 + 12\ s2\ \sigma^2 - 8\ s31\ S35 - 8\ s31\ s23 - 8\ s31\ s28 - 8\ s31\ s21$$
$$- 8\ s31\ s16 - 5\ s3\ s28 - 8\ s6\ s21 - 5\ s3\ s21 - 8\ s6\ s16 - 7\ s4\ S36 - 8\ s6\ s2$$
$$- 8\ s6\ s14 - 5\ s3\ s16 - 8\ s6\ s9 - 8\ s6\ s7 - 5\ s3\ s2 - 5\ s3\ s14 + 24\ s13\ \sigma^2 - 5\ s3\ s9$$
$$- 6\ S12\ S35 - 6\ S12\ s23 - 5\ s17\ S30 - 6\ S12\ s28 - 6\ S12\ s16 - 6\ s13\ s15$$
$$- 5\ s27\ s23 - 4\ s9\ s16 - 6\ s32\ S29 - 4\ s9\ s21 - 4\ s14\ s23 - 5\ s3\ S30 - 2\ s14\ S35$$
$$- 14\ s5\ s8 - 4\ s13\ S36 - 2\ s24\ s8 - 6\ s20\ S29 - 8\ s31\ s8 - 6\ s17\ S29 - 10\ s4\ S29$$
$$- 5\ s3\ S35 - 8\ s6\ S35 - 5\ s3\ s23 - 10\ s5\ S36 - 8\ s6\ s23 - 10\ s25\ S36 - 8\ s6\ s28$$
$$- 3\ S30\ s8 - 2\ s2\ S35 - 6\ s32\ s15 + 42\ s19\ \sigma^2 - 5\ s17\ s2 - 4\ s14\ s9 - 6\ s3\ s22$$
$$- 4\ s14\ s16 - 4\ s14\ s21 - 6\ s27\ s15 - 8\ s6\ S30 + 18\ s31\ \sigma^2 - 11\ s5\ s7 - 6\ s17\ s8$$
$$- 6\ s13\ s1 - 5\ s13\ s21 - 6\ s20\ s8 - 2\ s34\ s16 - 8\ s6\ s1 + 12\ s23\ \sigma^2 - 8\ s31\ S29$$
$$- 14\ s5\ s22 - 4\ s17\ S36 - 8\ s19\ s2 - 6\ s10\ s22 - 7\ S11\ S36 - 4\ s20\ S36 - 5\ s7\ s15$$
$$- 6\ s32\ s22 + 24\ s27\ \sigma^2 - 3\ S30\ s15 - 6\ s10\ s8 - 2\ s21\ S35 - 8\ s6\ s8 - 4\ s21\ s23$$
$$- 4\ s33\ s28 - 4\ s21\ s28 - 4\ s21\ s16 - 6\ s32\ s8 + 12\ s16\ \sigma^2 - 8\ s26\ s16 - 10\ s19\ s15$$
$$- 4\ s33\ s1 - 5\ s3\ s7 - 4\ s18\ s15 - 2\ s24\ s16 - 2\ s24\ s22 - 8\ s26\ s7 - 2\ s24\ S29$$
$$+ 60\ s25\ \sigma^2 + 24\ s20\ \sigma^2 - 10\ S11\ s1 - 8\ s26\ S35 - 8\ s26\ s23 - 6\ s27\ s8 - 8\ s26\ s21$$
$$- 8\ s26\ S30 - 2\ s24\ s23 - 14\ s25\ s8 + 6\ s33\ \sigma^2 - s33\ S36 - 5\ s27\ s9 - 6\ s20\ s1$$
$$- 10\ s4\ s8 - 8\ s31\ s15 - 5\ s17\ s21 + 42\ S11\ \sigma^2 + 12\ s7\ \sigma^2 - 10\ s4\ s1 - 6\ S12\ s2$$
$$- 5\ s13\ s28 - 5\ s17\ s23 - 8\ s31\ s22 - 6\ s13\ s22 - 5\ s10\ s9 - 10\ S11\ s22 - 4\ s27\ S36$$
$$- 2\ s34\ s22 - 8\ s26\ s9 + 12\ s21\ \sigma^2 + 12\ s9\ \sigma^2 - 4\ s10\ S36 - 5\ s27\ s7 - 10\ S11\ S29$$
$$- 2\ s24\ s7 - 8\ s6\ S29 - 2\ s24\ s28 - 2\ s34\ S29 - 2\ s24\ S30 - 8\ s26\ s2 - 14\ s5\ s1$$
$$- 6\ s17\ s22 - 5\ s17\ s16 - 4\ s18\ s8 - 8\ s26\ s14 - 10\ s19\ s8 - 10\ S11\ s15 - 14\ s25\ s1$$
$$- 5\ s21\ s1 - 5\ s20\ s7 - 6\ s17\ s1 - 5\ s9\ s1 - 6\ s3\ S29 - 8\ S11\ s16 - 8\ S11\ s2$$
$$- 8\ S11\ s14 - 10\ s19\ S29 - 5\ s7\ S29 - 2\ s24\ S35 - 5\ s7\ s8 - 2\ s21\ S36 - 5\ s21\ s15$$
$$- 5\ s21\ s8 - 5\ s21\ S29 - 5\ s21\ s22 - 3\ S35\ s22 - 3\ S35\ s1 - 5\ s23\ s22 - 5\ s23\ s1$$
$$- 2\ s23\ S36 - 5\ s23\ s15 - 5\ s23\ s8 - 2\ S30\ s9 - 5\ s23\ S29 - 2\ s34\ s23 - 5\ s27\ S30$$

$$
\begin{aligned}
&- 5\, s16\, S29 - 5\, s16\, s22 - 5\, s17\, s9 - 5\, s16\, s1 - 2\, s16\, S36 - 5\, s16\, s15 - 2\, s34\, s28 \\
&- 5\, s16\, s8 - 5\, s28\, S29 - 5\, s28\, s22 - 5\, s28\, s1 - 2\, s28\, S36 - 5\, s28\, s15 - 5\, s28\, s8 \\
&- 2\, s14\, S36 - 5\, s27\, S35 - 5\, s14\, s15 - 5\, s14\, s8 - 5\, s14\, S29 - 8\, S11\, s21 - 5\, s14\, s22 \\
&- 5\, s14\, s1 - 2\, s9\, S36 - 5\, s9\, s15 - 5\, s9\, s8 - 5\, s9\, S29 - 5\, s9\, s22 - 2\, S12\, S36 \\
&- 2\, s34\, S30 - 8\, s26\, s28 - 6\, S12\, s15 - 6\, S12\, s8 - 6\, S12\, S29 + 12\, S12\, \sigma^2 - 2\, S30\, s23 \\
&- 2\, s7\, S36 - 4\, s18\, S29 + 6\, s18\, \sigma^2 - 2\, S30\, s28 - 4\, s18\, s22 - 4\, s18\, s1 - 7\, s26\, S36 \\
&- 10\, s26\, s15 - 10\, s26\, s8 - 10\, s26\, S29 - 2\, S30\, s21 - 2\, S30\, s16 + 42\, s26\, \sigma^2 \\
&- 10\, s26\, s22 - 2\, S30\, s2 - 10\, s26\, s1 - 3\, S35\, s15 - 2\, S30\, s14 - 3\, S35\, s8 - 8\, S11\, s28 \\
&- 3\, S35\, S29 - 2\, s34\, S35 - 5\, s17\, s14 - 4\, s7\, s14 - 6\, s3\, s1 - 4\, s2\, s9 - 8\, S11\, S30 \\
&- 14\, s5\, s15 - 8\, S11\, s23 - 4\, s2\, s21 - 5\, s17\, s28 - 4\, s14\, s28 - 4\, s2\, s16 + 12\, s28\, \sigma^2 \\
&- 6\, S12\, s7 - 4\, s33\, s22 - 4\, s2\, s23 - 2\, s24\, s2 - 4\, s2\, s28 - 10\, s4\, s15 - 2\, s24\, s9 \\
&- 4\, s33\, s15 - 4\, s3\, S36 - 10\, s4\, s22 - 5\, s17\, s7 - 2\, s24\, s21 - 6\, S12\, s14 - 2\, s16\, S35 \\
&- 4\, s16\, s23 - 4\, s16\, s28 - 6\, s27\, s22 - 6\, s20\, s15 - 8\, s19\, s7 - 4\, s18\, s7 - 8\, s19\, s9 \\
&- 2\, s34\, s7 - 8\, s19\, s16 - 8\, s19\, s14 - 2\, s7^2 - 2\, s2^2 - 2\, s21^2 - 2\, s9^2 - 2\, s14^2 - 2\, s28^2 \\
&- 2\, s16^2 - 2\, s23^2 - 8\, s19\, S35 - 8\, s19\, s23 - 8\, s19\, s28 - 2\, s34\, s21 - 8\, s19\, S30 \\
&- 2\, s34\, s9 - 5\, s27\, s2 - 5\, s27\, s14 - 5\, s27\, s16 - 5\, s27\, s21 - 11\, s5\, S30 - 5\, s27\, s28 \\
&- 5\, s13\, s9 - 8\, s4\, s7 - 8\, s4\, s9 - 8\, s4\, s14 - 8\, s4\, s2 - 8\, s4\, s16 - 8\, s4\, s21 - 8\, s4\, s28 \\
&- 8\, s4\, s23 - 8\, s4\, S35 - 8\, s4\, S30 - 11\, s5\, s9 - 11\, s5\, s14 - 11\, s5\, s2 - 11\, s5\, s16 \\
&- 11\, s5\, s21 - 11\, s5\, s28 - 11\, s5\, s23 - 11\, s5\, S35 - 5\, s10\, s2 - 5\, s10\, s16 - 5\, s10\, s21 \\
&- 5\, s10\, s28 - 5\, s10\, s23 - 5\, s10\, S35 - 5\, s10\, S30 - 5\, s10\, s14 - 5\, s10\, s7 - 6\, s32\, s7 \\
&- 6\, s32\, s9 - 6\, s32\, s14 - 6\, s32\, s2 - 6\, s32\, s16 - 6\, s32\, s21 - 6\, s32\, s23 - 6\, s32\, S35 \\
&- 6\, s32\, S30 - 4\, s7\, s2 - 2\, s24\, s14 - 2\, s23\, S35 - 4\, s7\, s21 - 4\, s7\, s16 - 4\, s7\, s28 \\
&- 4\, s7\, s23 - 6\, s32\, s28)\, \phi^2 \big/ \sigma^8 - (2\, s13\, S30 + 2\, s7\, s9 + 2\, s13\, s14 + 2\, s13\, s2 \\
&+ 2\, s13\, s16 + 2\, s13\, s23 + 4\, s25\, s14 + 2\, s13\, S35 - 12\, s14\, \sigma^2 + 2\, s7\, S35 + 6\, s32\, s1 \\
&+ 3\, s19\, s21 + 2\, s2\, s14 + 2\, s7\, s1 + 6\, s32\, S36 + 2\, s7\, S30 + 4\, s25\, s28 + 2\, s7\, s22 \\
&+ 4\, s25\, s21 + 4\, s25\, s16 + 8\, s19\, S36 + 4\, s25\, s2 + 11\, s5\, S29 + 4\, s25\, s9 + 2\, s34\, s14 \\
&+ 3\, S11\, s7 + 2\, s13\, s7 + 3\, S11\, s9 + 8\, s19\, s22 + 5\, s27\, S29 + 2\, s2\, s22 + 4\, S12\, s9 \\
&+ 2\, s17\, S35 + 4\, s18\, S36 + 4\, s25\, S35 + 4\, s25\, s23 + 2\, s2\, S29 + 5\, s3\, s15 - 30\, s17\, \sigma^2 \\
&+ 4\, s25\, S30 + 2\, s34\, s2 + 2\, s2\, s8 + 8\, s31\, s1 + 2\, s2\, s15 + 11\, s25\, s22 + 5\, s3\, s8 \\
&+ 8\, s19\, s1 + 2\, s24\, s1 + 6\, S12\, s1 + 3\, s33\, s14 + 3\, s33\, s9 + 2\, s34\, s8 + 5\, s10\, s1 \\
&+ 4\, s33\, S29 + 5\, s13\, s8 + 3\, s33\, s7 - 48\, s4\, \sigma^2 - 30\, s3\, \sigma^2 + 2\, s2\, S36 + 2\, s28\, s23 \\
&+ 2\, s28\, S35 + 3\, s33\, s23 + 3\, s33\, s21 + 3\, s18\, s9 + 3\, s18\, s14 + 3\, s18\, s2 + 3\, s18\, s16 \\
&+ 3\, s18\, s21 + 3\, s18\, s28 + 3\, s18\, s23 + 3\, s33\, s16 + 3\, s18\, S35 + 3\, s33\, s2 + 2\, s2\, s1 \\
&+ 3\, s18\, S30 - 36\, s32\, \sigma^2 + 2\, s20\, s9 + 5\, s17\, s15 + 11\, s25\, s15 + 6\, S12\, s22 + 2\, s20\, s14 \\
&+ 2\, s20\, s2 + 2\, s20\, s16 + 5\, s13\, S29 + 2\, s20\, s21 + 2\, s20\, s28 + 4\, s33\, s8 + 2\, s20\, s23 \\
&+ 2\, s24\, s15 + 8\, s6\, s15 + 2\, s20\, S35 + 3\, s33\, S35 + 2\, s20\, S30 + 8\, s31\, S36 - 66\, s5\, \sigma^2 \\
&+ 3\, s33\, S30 - 30\, s10\, \sigma^2 + 4\, S12\, s21 + 8\, s6\, s22 + 4\, S12\, S30 + 5\, s31\, s2 + 5\, s31\, s14 \\
&+ 5\, s31\, s9 + 5\, s31\, s7 - 48\, s6\, \sigma^2 + 5\, s20\, s22 + 5\, s10\, s15 + 2\, s9\, s28 + 2\, s9\, s23
\end{aligned}
$$

$$+ 11\, s25\, S29 + 2\, s9\, S35 + 5\, s10\, S29 + 2\, s34\, s1 + 8\, S11\, s8 + 2\, s34\, s15 + 8\, s6\, S36$$
$$+ 4\, s25\, s7 + 5\, s27\, s1 - 12\, s24\, \sigma^2 + 5\, s31\, S30 + 3\, S11\, S35 - 12\, s2\, \sigma^2 + 5\, s31\, S35$$
$$+ 5\, s31\, s23 + 5\, s31\, s28 + 5\, s31\, s21 + 5\, s31\, s16 + 2\, s3\, s28 + 5\, s6\, s21 + 2\, s3\, s21$$
$$+ 5\, s6\, s16 + 8\, s4\, S36 + 5\, s6\, s2 + 5\, s6\, s14 + 2\, s3\, s16 + 5\, s6\, s9 + 5\, s6\, s7 + 2\, s3\, s2$$
$$+ 2\, s3\, s14 - 30\, s13\, \sigma^2 + 2\, s3\, s9 + 4\, S12\, S35 + 4\, S12\, s23 + 2\, s17\, S30 + 4\, S12\, s28$$
$$+ 4\, S12\, s16 + 5\, s13\, s15 + 2\, s27\, s23 + 2\, s9\, s16 + 6\, s32\, S29 + 2\, s9\, s21 + 2\, s14\, s23$$
$$+ 2\, s3\, S30 + 2\, s14\, S35 + 11\, s5\, s8 + 5\, s13\, S36 + 2\, s24\, s8 + 5\, s20\, S29 + 8\, s31\, s8$$
$$+ 5\, s17\, S29 + 8\, s4\, S29 + 2\, s3\, S35 + 5\, s6\, S35 + 2\, s3\, s23 + 11\, s5\, S36 + 5\, s6\, s23$$
$$+ 11\, s25\, S36 + 5\, s6\, s28 - 12\, s8\, \sigma^2 + 2\, s2\, S35 + 6\, s32\, s15 + 4\, s8\, s22 + 4\, s8\, S29$$
$$- 48\, s19\, \sigma^2 + 2\, s17\, s2 + 2\, s8\, S36 + 2\, s14\, s9 + 5\, s3\, s22 + 2\, s14\, s16 + 2\, s14\, s21$$
$$+ 5\, s27\, s15 + 5\, s6\, S30 - 48\, s31\, \sigma^2 + 4\, s5\, s7 - 12\, s15\, \sigma^2 + 4\, s15\, s22 + 4\, s15\, S29$$
$$+ 4\, s15\, s8 + 5\, s17\, s8 + 2\, s15\, S36 + 5\, s13\, s1 + 2\, s13\, s21 + 5\, s20\, s8 + 2\, s34\, s16$$
$$+ 8\, s6\, s1 - 12\, s23\, \sigma^2 + 8\, s31\, S29 + 11\, s5\, s22 + 5\, s17\, S36 + 3\, s19\, s2 + 5\, s10\, s22$$
$$+ 8\, S11\, S36 + 5\, s20\, S36 + 2\, s7\, s15 + 6\, s32\, s22 - 30\, s27\, \sigma^2 + 5\, s10\, s8 + 2\, s21\, S35$$
$$+ 8\, s6\, s8 + 2\, s21\, s23 + 3\, s33\, s28 + 2\, s21\, s28 + 2\, s21\, s16 + 6\, s32\, s8 - 12\, s16\, \sigma^2$$
$$+ 3\, s26\, s16 + 8\, s19\, s15 + 4\, s33\, s1 + 2\, S29\, S36 + 2\, s3\, s7 + 2\, s8^2 + 4\, s18\, s15$$
$$+ 2\, s24\, s16 + 4\, s22\, S29 + 2\, s24\, s22 + 3\, s26\, s7 + 2\, s24\, S29 - 66\, s25\, \sigma^2 - 12\, S29\, \sigma^2$$
$$- 30\, s20\, \sigma^2 + 8\, S11\, s1 + 3\, s26\, S35 + 3\, s26\, s23 + 5\, s27\, s8 + 3\, s26\, s21 + 3\, s26\, S30$$
$$+ 2\, s24\, s23 + 11\, s25\, s8 - 24\, s33\, \sigma^2 + 4\, s33\, S36 + 2\, s27\, s9 + 2\, s22\, S36 + 5\, s20\, s1$$
$$+ 8\, s4\, s8 + 8\, s31\, s15 + 2\, s17\, s21 - 48\, S11\, \sigma^2 - 12\, s7\, \sigma^2 + 8\, s4\, s1 + 4\, S12\, s2$$
$$+ 2\, s13\, s28 - 12\, s22\, \sigma^2 + 2\, s17\, s23 + 8\, s31\, s22 + 5\, s13\, s22 + 2\, s10\, s9 + 8\, S11\, s22$$
$$+ 5\, s27\, S36 + 2\, s34\, s22 + 3\, s26\, s9 - 12\, s21\, \sigma^2 - 12\, s9\, \sigma^2 + 5\, s10\, S36 + 2\, s27\, s7$$
$$+ 8\, S11\, S29 + 4\, s1\, s8 + 2\, s24\, s7 + 4\, s1\, s15 + 8\, s6\, S29 + 2\, s24\, s28 + 2\, s34\, S29$$
$$+ 2\, s24\, S30 + 3\, s26\, s2 + 11\, s5\, s1 + 5\, s17\, s22 + 2\, s17\, s16 + 4\, s18\, s8 + 3\, s26\, s14$$
$$+ 8\, s19\, s8 + 2\, s34\, S36 + 8\, S11\, s15 + 2\, s1\, S36 + 11\, s25\, s1 + 2\, s21\, s1 + 2\, s20\, s7$$
$$+ 5\, s17\, s1 + 2\, s9\, s1 + 5\, s3\, S29 + 3\, S11\, s16 + 3\, S11\, s2 + 3\, S11\, s14 - 12\, s34\, \sigma^2$$
$$+ 8\, s19\, S29 + 2\, s7\, S29 + 2\, s24\, S35 + 2\, s7\, s8 + 2\, s21\, S36 + 2\, s21\, s15 + 2\, s21\, s8$$
$$+ 2\, s21\, S29 + 2\, s21\, s22 + 2\, s23\, s22 + 2\, s23\, s1 + 2\, s23\, S36 + 2\, s23\, s15 + 2\, s23\, s8$$
$$+ 2\, S30\, s9 + 2\, s23\, S29 + 2\, s34\, s23 + 2\, s27\, S30 + 2\, s16\, S29 + 2\, s16\, s22 + 2\, s17\, s9$$
$$+ 2\, s16\, s1 + 2\, s16\, S36 + 2\, s16\, s15 + 2\, s34\, s28 + 2\, s16\, s8 + 2\, s28\, S29 + 2\, s28\, s22$$
$$+ 2\, s28\, s1 + 2\, s28\, S36 + 2\, s28\, s15 + 2\, s28\, s8 + 2\, s14\, S36 + 2\, s27\, S35 + 2\, s14\, s15$$
$$+ 2\, s14\, s8 + 2\, s14\, S29 + 3\, S11\, s21 + 2\, s14\, s22 + 2\, s14\, s1 + 2\, s9\, S36 + 2\, s9\, s15$$
$$+ 2\, s9\, s8 + 2\, s9\, S29 + 2\, s9\, s22 + 6\, S12\, S36 + 2\, s34\, S30 + 3\, s26\, s28 + 6\, S12\, s15$$
$$+ 2\, S30\, S35 + 6\, S12\, s8 + 6\, S12\, S29 - 36\, S12\, \sigma^2 + 2\, S30\, s23 + 2\, s7\, S36 + 4\, s18\, S29$$
$$- 24\, s18\, \sigma^2 + 2\, S30\, s28 + 4\, s18\, s22 + 4\, s18\, s1 + 8\, s26\, S36 + 8\, s26\, s15 + 8\, s26\, s8$$
$$+ 8\, s26\, S29 + 2\, S30\, s21 + 2\, S30\, s16 - 48\, s26\, \sigma^2 + 8\, s26\, s22 + 2\, S30\, s2 + 8\, s26\, s1$$
$$+ 2\, S30\, s14 + 3\, S11\, s28 + 2\, s34\, S35 + 2\, s17\, s14 + 2\, s7\, s14 + 5\, s3\, s1 + 2\, s24\, S36$$
$$+ 2\, s2\, s9 + 3\, S11\, S30 + 11\, s5\, s15 + 3\, S11\, s23 + 2\, s2\, s21 + 2\, s17\, s28 + 2\, s14\, s28$$

$$+ 2\, s2\, s16 - 12\, s28\, \sigma^2 + 4\, S12\, s7 - 12\, s1\, \sigma^2 + 4\, s33\, s22 + 2\, s2\, s23 + 2\, s24\, s2$$
$$+ 2\, s2\, s28 + 8\, s4\, s15 + 2\, s24\, s9 + 4\, s1\, S29 + 4\, s33\, s15 + 5\, s3\, S36 + 8\, s4\, s22$$
$$+ 2\, s17\, s7 + 2\, s24\, s21 + 4\, S12\, s14 + 2\, s16\, S35 + 2\, s16\, s23 + 2\, s16\, s28 + 5\, s27\, s22$$
$$+ 5\, s20\, s15 + 3\, s19\, s7 + 3\, s18\, s7 + 3\, s19\, s9 + 2\, s34\, s7 + 3\, s19\, s16 + 3\, s19\, s14 + s7^2$$
$$+ s2^2 + S30^2 + s21^2 + s9^2 + s14^2 + s28^2 + s16^2 + s23^2 + S35^2 + 2\, S29^2 + 2\, s15^2$$
$$+ 3\, s19\, S35 + 3\, s19\, s23 + 3\, s19\, s28 + 2\, s34\, s21 + 3\, s19\, S30 + 2\, s34\, s9 + 2\, s27\, s2$$
$$+ 2\, s27\, s14 + 2\, s27\, s16 + 2\, s22^2 + 4\, s1\, s22 + 2\, s27\, s21 + 4\, s5\, S30 + 2\, s27\, s28$$
$$+ 2\, s1^2 + 2\, s13\, s9 + 3\, s4\, s7 + 3\, s4\, s9 + 3\, s4\, s14 + 3\, s4\, s2 + 3\, s4\, s16 + 3\, s4\, s21$$
$$+ 3\, s4\, s28 + 3\, s4\, s23 + 3\, s4\, S35 + 3\, s4\, S30 + 4\, s5\, s9 + 4\, s5\, s14 + 4\, s5\, s2 + 4\, s5\, s16$$
$$+ 4\, s5\, s21 + 4\, s5\, s28 + 4\, s5\, s23 + 4\, s5\, S35 + 2\, s10\, s2 + 2\, s10\, s16 + 2\, s10\, s21$$
$$+ 2\, s10\, s28 + 2\, s10\, s23 + 2\, s10\, S35 + 2\, s10\, S30 + 2\, s10\, s14 + 2\, s10\, s7 + 4\, s32\, s7$$
$$+ 4\, s32\, s9 + 4\, s32\, s14 + 4\, s32\, s2 + 4\, s32\, s16 + 4\, s32\, s21 + 4\, s32\, s23 + 4\, s32\, S35$$
$$+ 4\, s32\, S30 + 2\, s7\, s2 + 2\, s24\, s14 + 2\, s23\, S35 + 2\, s7\, s21 + 2\, s7\, s16 + 2\, s7\, s28$$
$$+ 2\, s7\, s23 + 4\, s32\, s28)\, \phi \Big/ \sigma^8 - (6\, s14\, \sigma^2 - 4\, s32\, s1 - s7\, s1 - 4\, s32\, S36 - s7\, s22$$
$$- 3\, s19\, S36 - 4\, s5\, S29 - 3\, s19\, s22 - 2\, s27\, S29 - s2\, s22 - 3\, s18\, S36 - s2\, S29$$
$$- 2\, s3\, s15 + 12\, s17\, \sigma^2 - s2\, s8 - 5\, s31\, s1 - s2\, s15 - 4\, s25\, s22 - 2\, s3\, s8 - 3\, s19\, s1$$
$$- 2\, s24\, s1 - 4\, S12\, s1 - 2\, s34\, s8 - 2\, s10\, s1 - 3\, s33\, S29 - 2\, s13\, s8 + 18\, s4\, \sigma^2$$
$$+ 12\, s3\, \sigma^2 - s2\, S36 - S30\, s1 - s2\, s1 - S30\, s22 + 24\, s32\, \sigma^2 - 2\, s17\, s15 - 4\, s25\, s15$$
$$- 4\, S12\, s22 - 2\, s13\, S29 - 3\, s33\, s8 - 2\, s24\, s15 - 5\, s6\, s15 - 5\, s31\, S36 + 24\, s5\, \sigma^2$$
$$+ 12\, s10\, \sigma^2 - 5\, s6\, s22 + 30\, s6\, \sigma^2 - 2\, s20\, s22 - 2\, s10\, s15 - 4\, s25\, S29 - 2\, s10\, S29$$
$$- 2\, s34\, s1 - 3\, S11\, s8 - 2\, s34\, s15 - S30\, S29 - 5\, s6\, S36 - 2\, s27\, s1 + 12\, s24\, \sigma^2$$
$$+ 6\, s2\, \sigma^2 + 6\, S35\, \sigma^2 - 3\, s4\, S36 + 12\, s13\, \sigma^2 - 2\, s13\, s15 - 4\, s32\, S29 - 4\, s5\, s8$$
$$- 2\, s13\, S36 - 2\, s24\, s8 - 2\, s20\, S29 - 5\, s31\, s8 - 2\, s17\, S29 - 3\, s4\, S29 - 4\, s5\, S36$$
$$- 4\, s25\, S36 - S30\, s8 - 4\, s32\, s15 + 18\, s19\, \sigma^2 - 2\, s3\, s22 - 2\, s27\, s15 + 30\, s31\, \sigma^2$$
$$- 2\, s17\, s8 - 2\, s13\, s1 - 2\, s20\, s8 - 5\, s6\, s1 + 6\, s23\, \sigma^2 - 5\, s31\, S29 - 4\, s5\, s22$$
$$- 2\, s17\, S36 - 2\, s10\, s22 - 3\, S11\, S36 - 2\, s20\, S36 - s7\, s15 - 4\, s32\, s22 + 12\, s27\, \sigma^2$$
$$- S30\, s15 - 2\, s10\, s8 - 5\, s6\, s8 - 4\, s32\, s8 + 6\, s16\, \sigma^2 - 3\, s19\, s15 - 3\, s33\, s1$$
$$- 3\, s18\, s15 - 2\, s24\, s22 - 2\, s24\, S29 + 24\, s25\, \sigma^2 + 12\, s20\, \sigma^2 - 3\, S11\, s1 - 2\, s27\, s8$$
$$- 4\, s25\, s8 + 18\, s33\, \sigma^2 - 3\, s33\, S36 - 2\, s20\, s1 - 3\, s4\, s8 - 5\, s31\, s15 + 18\, S11\, \sigma^2$$
$$+ 6\, s7\, \sigma^2 - 3\, s4\, s1 - 5\, s31\, s22 - 2\, s13\, s22 - 3\, S11\, s22 - 2\, s27\, S36 - 2\, s34\, s22$$
$$+ 6\, s21\, \sigma^2 + 6\, s9\, \sigma^2 - 2\, s10\, S36 - 3\, S11\, S29 - 5\, s6\, S29 - 2\, s34\, S29 - 4\, s5\, s1$$
$$- S30\, S36 - 2\, s17\, s22 - 3\, s18\, s8 - 3\, s19\, s8 - 2\, s34\, S36 - 3\, S11\, s15 - 4\, s25\, s1$$
$$- s21\, s1 - 2\, s17\, s1 - s9\, s1 - 2\, s3\, S29 + 12\, s34\, \sigma^2 - 3\, s19\, S29 - s7\, S29 - s7\, s8$$

$$- s21\,S36 - s21\,s15 - s21\,s8 - s21\,S29 - s21\,s22 - S35\,s22 - S35\,s1 - s23\,s22$$
$$- s23\,s1 - s23\,S36 - s23\,s15 - s23\,s8 - s23\,S29 - s16\,S29 - s16\,s22 - s16\,s1$$
$$- s16\,S36 - s16\,s15 - s16\,s8 - s28\,S29 - s28\,s22 - s28\,s1 - s28\,S36 - s28\,s15$$
$$- s28\,s8 - s14\,S36 - s14\,s15 - s14\,s8 - s14\,S29 - s14\,s22 - s14\,s1 - s9\,S36$$
$$- s9\,s15 - s9\,s8 - s9\,S29 - s9\,s22 + 6\,S30\,\sigma^2 - 4\,S12\,S36 - 4\,S12\,s15 - 4\,S12\,s8$$
$$- 4\,S12\,S29 + 24\,S12\,\sigma^2 - s7\,S36 - 3\,s18\,S29 + 18\,s18\,\sigma^2 - 3\,s18\,s22 - 3\,s18\,s1$$
$$- 3\,s26\,S36 - 3\,s26\,s15 - 3\,s26\,s8 - 3\,s26\,S29 + 18\,s26\,\sigma^2 - 3\,s26\,s22 - 3\,s26\,s1$$
$$- S35\,S36 - S35\,s15 - S35\,s8 - S35\,S29 - 2\,s3\,s1 - 2\,s24\,S36 - 4\,s5\,s15 + 6\,s28\,\sigma^2$$
$$- 3\,s33\,s22 - 3\,s4\,s15 - 3\,s33\,s15 - 2\,s3\,S36 - 3\,s4\,s22 - 2\,s27\,s22 - 2\,s20\,s15)\Big/$$
$$\sigma^8$$

>

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาววิลาสินี จันทราวุฒิ เกิดเมื่อวันที่ 8 พฤศจิกายน พ.ศ. 2521 ที่จังหวัดฉะเชิงเทรา สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (สถิติ) จากภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เมื่อปีการศึกษา 2541 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรสถิติศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2542