

การสร้างและปรับขนาดขึ้นส่วนโดยอัตโนมัติ  
ด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



นายสุรชาญ แซ่ลี

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

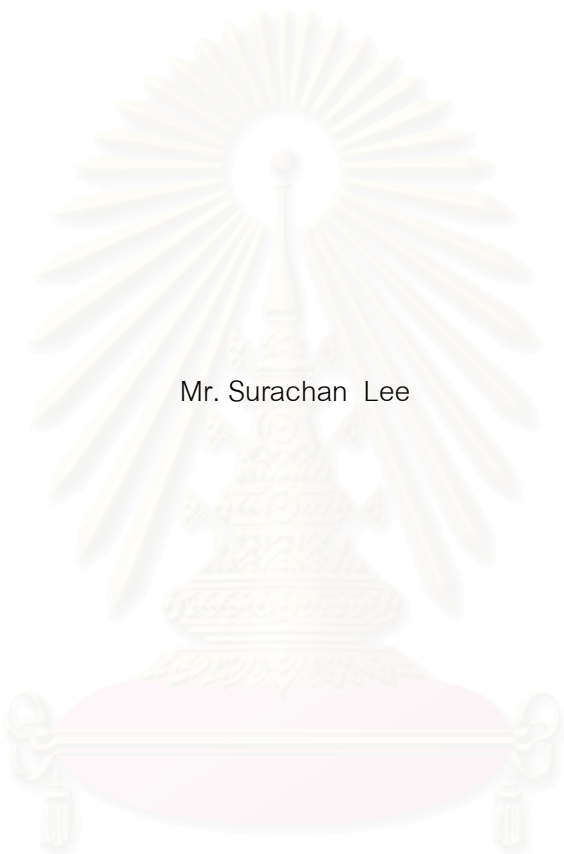
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-2656-2

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING  
USING SWAP AND ADVANCING FRONT TECHNIQUES



Mr. Surachan Lee

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2002

ISBN 974-17-2656-2



นายสุรชาญ แซ่ลี : การสร้างและปรับขนาดชิ้นส่วนโดยอัตโนมัติด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า. (AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING USING SWAP AND ADVANCING FRONT TECHNIQUES) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร. ทักษิณ เทพชาติ, 108 หน้า. ISBN 974-17-2656-2.

การศึกษานี้ ได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ร่วมกับวิธีการปรับขนาดชิ้นส่วนโดยอัตโนมัติในการวิเคราะห์โครงสร้าง โดยในระหว่างการวิเคราะห์หาผลลัพธ์นั้นขนาดและรูปร่างของชิ้นส่วนจะถูกจัดใหม่โดยอัตโนมัติ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องและแม่นยำขึ้น โดยการสร้างชิ้นส่วนจะพิจารณาจากการกระจายความคลาดเคลื่อนให้เท่า ๆ กันทุกบริเวณในขอบเขตของปัญหา โดยในงานวิจัยนี้ ได้ทำการปรับปรุงวิธีการสร้างชิ้นส่วนด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับการสร้างชิ้นส่วนด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้า เพื่อลดขั้นตอนในการสร้างชิ้นส่วนใหม่ในการวิเคราะห์แต่ละรอบ กล่าวคือ เมื่อมีการเพิ่มจุดเพื่อลดขนาดของชิ้นส่วนในบริเวณที่ผลลัพธ์ยังมีความคลาดเคลื่อนสูง จะทำโดยการแทรกจุดใหม่ขึ้นที่ตำแหน่งศูนย์กลางของสามเหลี่ยมเดิม แล้วสร้างชิ้นส่วนใหม่จากจุดที่แทรกกับชิ้นส่วนที่รอบจุดดังกล่าวอยู่ จากนั้นจะใช้สมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอนีย์ในการตรวจสอบและแลกเปลี่ยนชิ้นส่วนเพื่อให้ได้ชิ้นส่วนที่มีรูปร่างที่ดีและเหมาะสม การศึกษาพบว่า วิธีการดังกล่าวจะทำให้ได้โครงข่ายที่มีความต่อเนื่องของผลเฉลยดีขึ้น และได้ผลการวิเคราะห์ที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่ในช่วงความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 1-5 % ได้อย่างมีประสิทธิภาพและรวดเร็ว

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา .....วิศวกรรมโยธา.....

ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา ...วิศวกรรมโยธา.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....

ปีการศึกษา 2545

## 4270615821 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: FEM / ADAPTIVE / MESH-GENERATION / DELAUNAY TRIANGULATION

SURACHAN LEE : AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING USING SWAP AND  
ADVANCING FRONT TECHNIQUES. THESIS ADVISOR : PROF. THAKSIN  
THEPCHATRI, Ph.D., 108 pp. ISBN 974-17-2656-2.

The study uses the finite element method in conjunction with an automatic adaptive remeshing technique to analyze structures. In the analysis, the proposed method will automatically resize and remesh the element shapes to obtain better solution accuracy. The method will construct appropriate mesh size that distributes the error equally in every zone thus resulting in a total relative error smaller than the specified error. In this research, a swap technique and the advancing front technique are combined to construct triangular meshes in the domain. This technique will reduce time used in constructing triangular meshes in each analysis loop. When smaller mesh sizes are required in a particular zone due to excessive error, new interior points will be created within the existing triangular meshes. Each new point is located at the center of gravity of each triangle. A more refined mesh is then generated by joining the lines between the new interior points and the existing vertices of the triangles. Incorporation of the Delaunay Triangle condition then leads to a more refined mesh with better continuity of the results. Numerical analyses using selected plane stress problems show that the method can quickly and effectively control the result accuracy to within 1-5 percent of the relative error.

Department .....Civil Engineering..... Student's signature .....

Field of study .....Civil Engineering..... Advisor's signature .....

Academic year 2002

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ทักษิณ เทพชาตรี อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้คำแนะนำ ตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นตลอดระยะเวลาในการวิจัย พร้อมทั้งขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เรืองเดช รัชตโพธิ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัชชาติ สิทธิพันธุ์ ที่ได้กรุณาสนใจในการเป็นคณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์ และวิทยานิพนธ์นี้ไม่อาจจะสำเร็จลงได้ หากปราศจากความอนุเคราะห์จากคุณ เทอดเกียรติ จันทวัชรกร ที่คอยแนะนำและให้คำปรึกษาอันเป็นประโยชน์

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครูบาอาจารย์ทุกท่าน ที่ให้การดูแล อบรม สั่งสอนประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ต่าง ๆ ให้กับผู้เขียนตลอดมา ขอขอบคุณสมาชิกในครอบครัว และเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้อำนาจใจผู้เขียนเสมอมา



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญ

บทที่	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ฌ
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	2
1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	6
1.4 ขอบเขตของการวิจัย.....	6
บทที่ 2 แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย	
2.1 ความนำ.....	7
2.2 การสร้างชิ้นส่วนโดยอัตโนมัติ.....	7
2.3 การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีพิกัดเดียนหน้า.....	8
2.4 การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการแลกเปลี่ยน.....	9
2.5 การพิจารณาเงื่อนไขในการแลกเปลี่ยน.....	10
2.6 การหาค่าความคลาดเคลื่อนและการประมาณขนาดชิ้นส่วน.....	12
บทที่ 3 การพัฒนาโปรแกรม	
3.1 ภาษาคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในโปรแกรม.....	26
3.2 การเลือกใช้โครงสร้างข้อมูล.....	27
3.3 ชนิดของข้อมูล.....	29
3.4 โครงสร้างและลำดับการทำงานของโปรแกรม.....	32
3.5 การแสดงผล.....	34

## สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
บทที่ 4 ตัวอย่างการวิเคราะห์	
4.1 ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาแผนบางรับแรงดึง.....	44
4.2 ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาแผนวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด.....	46
4.3 ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ.....	47
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ	
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	100
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	101
รายการอ้างอิง.....	102
ภาคผนวก	
การใช้งานโปรแกรม.....	106
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	108

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## สารบัญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 2.1 : รูปโครงข่ายโหนดและสามเหลี่ยมเดอลอนีย์.....	21
รูปที่ 2.2 : การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	22
รูปที่ 2.3 : การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยการแทรกจุดในสามเหลี่ยม.....	23
รูปที่ 2.4 : เงื่อนไขการพิจารณาการแลกเปลี่ยนด้านร่วมของสามเหลี่ยม.....	24
รูปที่ 2.5 : เงื่อนไขการพิจารณาคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอนีย์.....	25
รูปที่ 2.6 : การประมาณคำตอบจากตำแหน่งเกาส์ในชิ้นส่วนของปัญหามิติเดียว.....	25
รูปที่ 3.1 โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ.....	36
รูปที่ 3.2 โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงค์ลิสต์.....	36
รูปที่ 3.3 การจัดเก็บข้อมูลในโครงสร้างข้อมูลแบบ ADT.....	37
รูปที่ 3.4 การจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์.....	38
รูปที่ 3.5 แผนภูมิสายงานของโปรแกรมหลัก.....	39
รูปที่ 3.6 แผนภูมิสายงานของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม.....	40
รูปที่ 3.7 แผนภูมิสายงานของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	41
รูปที่ 3.8 แผนภูมิสายงานของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีแทรกจุดและแลกเปลี่ยน.....	42
รูปที่ 3.9 แผนภูมิสายงานของการพิจารณาเงื่อนไขการแลกเปลี่ยน.....	43
รูปที่ 4.1.1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงและแบบจำลองการวิเคราะห์.....	49
รูปที่ 4.1.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	50
รูปที่ 4.1.3 การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	51
รูปที่ 4.1.4 การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	52
รูปที่ 4.1.5 การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	53
รูปที่ 4.1.6 กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	54
รูปที่ 4.1.7 กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	55

## สารบัญญภาพ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 4.1.8 กราฟแสดงค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่ง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	56
รูปที่ 4.1.9 เปรียบเทียบโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่ง.....	57
รูปที่ 4.1.10 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่ง.....	58
รูปที่ 4.1.11 เปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่ง.....	59
รูปที่ 4.1.12 เปรียบเทียบอัตราการใช้เวลาในการวิเคราะห์หาคำตอบ ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่ง.....	60
รูปที่ 4.2.1 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์.....	61
รูปที่ 4.2.2 (ก.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	62
รูปที่ 4.2.2 (ข.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	63
รูปที่ 4.2.3 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	64
รูปที่ 4.2.3 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	65
รูปที่ 4.2.4 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	66
รูปที่ 4.2.4 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	67
รูปที่ 4.2.5 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	68
รูปที่ 4.2.5 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	69
รูปที่ 4.2.6 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	70
รูปที่ 4.2.6 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	71

## สารบัญญภาพ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 4.2.7 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	72
รูปที่ 4.2.7 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	73
รูปที่ 4.2.8 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	74
รูปที่ 4.2.8 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	75
รูปที่ 4.2.9 เปรียบเทียบโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบาง.....	76
รูปที่ 4.2.10 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง.....	77
รูปที่ 4.2.11 เปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาแผ่นวงกลมบาง.....	78
รูปที่ 4.2.12 เปรียบเทียบอัตราการใช้เวลาในการวิเคราะห์หาคำตอบ ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง.....	79
รูปที่ 4.3.1 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระและแบบจำลองการวิเคราะห์.....	80
รูปที่ 4.3.2 (ก.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	81
รูปที่ 4.3.2 (ข.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	82
รูปที่ 4.3.3 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	83
รูปที่ 4.3.3 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $x$ ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	84
รูปที่ 4.3.4 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	85
รูปที่ 4.3.4 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง $y$ ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	86
รูปที่ 4.3.5 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	87

## สารบัญญภาพ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 4.3.5 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	88
รูปที่ 4.3.6 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรง กระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	89
รูปที่ 4.3.6 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรง กระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	90
รูปที่ 4.3.7 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรง กระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	91
รูปที่ 4.3.7 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรง กระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	92
รูปที่ 4.3.8 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	93
รูปที่ 4.3.8 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	94
รูปที่ 4.3.9 กราฟค่าการเคลื่อนที่ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า.....	95
รูปที่ 4.3.10 เปรียบเทียบโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระ.....	96
รูปที่ 4.3.11 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ.....	97
รูปที่ 4.3.12 เปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำ ที่ปลายอิสระ.....	98
รูปที่ 4.3.13 เปรียบเทียบอัตราการใช้เวลาในการวิเคราะห์หาคำตอบของปัญหาคานยื่น รับแรงกระทำที่ปลายอิสระ.....	99
รูป ผ.ก.1 ตัวอย่างแฟ้มนำเข้าข้อมูล.....	107

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การวิเคราะห์หาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัจจุบันถูกใช้อย่างแพร่หลาย เนื่องจากสามารถนำไปประยุกต์ได้กับปัญหาหลาย ๆ ลักษณะ หลักการสำคัญของการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวคือ จะต้องทำการแบ่งสนามที่วิเคราะห์ออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ เรียกว่าเอลิเมนต์ แล้วสร้างสมการของระบบชิ้นส่วนนี้ขึ้นมาโดยใช้ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม และสอดคล้องกับสมบัติของปัญหา ประกอบกับการพิจารณาเงื่อนไขต่าง ๆ ที่จำเป็น จากนั้นจึงนำระบบปัญหาทั้งหมดไปวิเคราะห์หาผลเฉลย

เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แม่นยำ เราสามารถใช้วิธีเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา โดยใช้ชิ้นส่วนที่เล็กลง ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยที่ได้มีความต่อเนื่องมากขึ้น และแม่นยำมากขึ้น หรือเราอาจใช้วิธีเพิ่มความซับซ้อนของความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาก็คได้ ซึ่งจะทำให้สมการที่ใช้มีความสอดคล้องกับสภาพจริงของปัญหามากขึ้น ทำให้ได้คำตอบที่ดีขึ้น

แต่เนื่องจากวิธีหลังต้องอาศัยความรู้ในการวิเคราะห์มาก ทำให้ไม่เป็นที่นิยมสำหรับงานทั่วไป ดังนั้นคนส่วนใหญ่จึงเลือกใช้วิธีเพิ่มจำนวนและลดขนาดของชิ้นส่วน ซึ่งทำได้ง่ายกว่า แต่ก็ยังมีความยุ่งยากอยู่บ้างในการสร้างชิ้นส่วนและระบบของชิ้นส่วนที่จะนำไปวิเคราะห์

ในปัจจุบัน ได้มีผู้นำเอาคอมพิวเตอร์ซึ่งมีความสามารถในการคิดคำนวณปัญหาขนาดใหญ่และซับซ้อนได้ดีมาช่วยในการสร้างระบบชิ้นส่วนให้ทำได้ง่ายขึ้นและประหยัดเวลามากขึ้น อีกทั้งเมื่อต้องการปรับแก้ระบบชิ้นส่วน ก็สามารถทำได้ง่าย สะดวกและให้ความถูกต้องเที่ยงตรงมากกว่าการใช้แรงงานของมนุษย์โดยตรง

ในที่นี้ การศึกษาและพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มี 2 องค์ประกอบที่สำคัญ ได้แก่

1. วิธีแบ่งและสร้างชิ้นส่วนย่อยของปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์



2. วิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์เพื่อใช้ในการตรวจสอบความถูกต้อง และใช้ในการปรับแก้ระบบเพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุด และใกล้ค่าคำตอบที่แท้จริงมากที่สุด

โดยแต่ละส่วนดังกล่าวจะมีผลโดยตรงต่อประสิทธิภาพของโปรแกรมที่จะนำไปใช้งานกับปัญหาต่าง ๆ เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุด

การหาค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยนั้นนับเป็นส่วนสำคัญที่สุดของกระบวนการทั้งหมด โดยค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จะนำมาเป็นส่วนของการแก้ไขปรับปรุงการสร้างขึ้นส่วนใหม่ แล้วนำไปวิเคราะห์ใหม่จนกระทั่งได้ผลเฉลยที่มีค่าความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าค่าที่ยอมรับได้ ซึ่งหากสามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนได้ถูกต้องมากเท่าใด ก็ยิ่งทำให้การแก้ไขผลเฉลยให้สู่ค่าแม่นยำตรงเป็นไปอย่างรวดเร็วมากขึ้นนั่นเอง

สำหรับขั้นตอนของการแบ่งและสร้างขึ้นส่วนในขอบเขตของปัญหา กระบวนการสร้างขึ้นส่วนที่ดีและเหมาะสมจะต้องใช้เวลาน้อย อีกทั้งชิ้นส่วนที่ได้จะต้องสอดคล้องกับสมบัติของปัญหาที่วิเคราะห์ด้วย ทั้งนี้กระบวนการสร้างขึ้นส่วนแบบสามเหลี่ยมจะเป็นชนิดที่นิยมนำมาใช้มากที่สุดเนื่องจากสะดวกต่อการนำไปประยุกต์กับปัญหาที่มีขอบลักษณะต่าง ๆ ได้ อีกทั้งเพื่อให้การแก้ปัญหาสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพ งานวิจัยเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการแบ่งและปรับขนาดชิ้นส่วนไฟไนต์เอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้ยังมีผู้พัฒนาอยู่เรื่อย ๆ

วิทยานิพนธ์นี้ ผู้เขียนได้สร้างและพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมา โดยพิจารณาในแต่ละส่วนที่กล่าวไว้ข้างต้น ทั้งนี้เพื่อให้ได้โปรแกรมที่มีประสิทธิภาพสูงสุดในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นั่นคือผลเฉลยที่ได้มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด และใช้เวลาในการแก้ปัญหาน้อยที่สุด

## 1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนแรกของการกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นั่นคือการสร้างขึ้นส่วนย่อยของปัญหาสำหรับตัวแบบที่ใช้วิเคราะห์ ได้มีผู้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการสร้างขึ้นส่วนที่เหมาะสมกับปัญหาในลักษณะต่าง ๆ ทำให้ได้ข้อเสนอแนะที่หลากหลายในการเลือกใช้ลักษณะของชิ้นส่วนและวิธีสร้างขึ้นส่วน ซึ่งส่วนใหญ่จะเน้นการสร้างชิ้นส่วนที่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอเนย์(Delaunay)<sup>(8)-(18)</sup> เนื่องจากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมนั้นสามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีขอบลักษณะใดก็ได้ ในกรณีที่มีการแบ่งความละเอียดของชิ้นส่วนไม่เท่ากัน ชิ้นส่วนแบบ

นี้จะให้ความต่อเนื่องของผลเฉลยได้ดี ได้มีการนำเสนอวิธีและเงื่อนไขในการเพิ่มจุดในโครงข่าย การสร้างโครงข่ายสามเหลี่ยมจากจุดที่มี โดยกระบวนการดังกล่าวจะต้องสอดคล้องและเหมาะสม กับปัญหาที่วิเคราะห์

Schroeder กับ Shephard<sup>(1)</sup> ได้นำเสนอกระบวนการสร้างชิ้นส่วนแบบอัตโนมัติ สำหรับปัญหาทั้งในระบบสองมิติและสามมิติ โดยเอาจุดข้อมูลที่มีอยู่ในโครงข่ายมาสร้างเป็นชิ้น ส่วนสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ ทั้งนี้เน้นการพิจารณาสร้างระบบชิ้นส่วนให้มีความต่อเนื่องกันและสอดคล้องกับสมบัติความสัมพันธ์ของเงื่อนไขต่าง ๆ ของปัญหา

Weatherill<sup>(2)</sup> ได้เสนอแนวคิดกระบวนการในการสร้างสามเหลี่ยมให้สอดคล้อง เหมาะสมกับลักษณะที่ขอบของปัญหาที่จุดข้อมูลที่ขอบบางตำแหน่งไม่สามารถนำมาใช้สร้างชิ้น ส่วนสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ได้ เสนอให้เพิ่มจุดกึ่งกลางบนเส้นขอบที่มีปัญหาเพื่อให้สามารถสร้าง ชิ้นส่วนได้แล้วลบบอกในภายหลัง ทำให้สามารถสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสำหรับปัญหาที่มีรูปร่าง ของขอบที่มีความซับซ้อนได้ดีขึ้น

Lo<sup>(3), (4)</sup> นำเสนอกระบวนการสร้างระบบชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อยที่เรียกว่า ฟรอนต์ เดินหน้า(advancing front) เริ่มต้นด้วยการสร้างจุดต่อขึ้นมาก่อนภายในขอบเขตของปัญหา จากนั้นสร้างชิ้นส่วนเริ่มต้นจากเส้นแนวขอบของปัญหา และจากการพิจารณาที่ละชิ้นส่วนจากแนวเส้น ขอบที่ได้แบ่งไว้ก็หาจุดภายในที่เหมาะสม ซึ่งทำให้ได้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีลักษณะดีที่สุด ทำเช่น นี้ไปเรื่อย ๆ โดยมีการจัดระบบของจุดต่อภายใน และระบบของชิ้นส่วนที่จะนำมาใช้ในการสร้างชิ้น ส่วนสามเหลี่ยมใหม่ จนกระทั่งได้สามเหลี่ยมย่อยเต็มขอบเขตของปัญหา โดยไม่มีการซ้อนทับกัน ของชิ้นส่วนและไม่มีจุดต่อใดเหลืออยู่เลย

Houman กับ Paul<sup>(5)</sup> นำเสนอรูปแบบกระบวนการการสร้างโครงข่ายชิ้นส่วน สามเหลี่ยมโดยอัตโนมัติ ร่วมด้วยกระบวนการลดขนาดของชิ้นส่วนด้วยการเพิ่มจุดต่อใหม่เข้าไป ในโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีอยู่เดิม แล้วปรับจัดรูปแบบการวางสามเหลี่ยมใหม่ ให้ได้ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ดี ซึ่งในการเพิ่มจุดต่อใหม่เข้าไบนั้น ต้องมีการปรับแก้ข้อมูลหลาย ส่วนอย่างระมัดระวัง เพื่อให้ได้โครงข่ายที่ยังคงมีความต่อเนื่องตลอดขอบเขตของปัญหา

Karamete และคณะ<sup>(6)</sup> ได้นำเสนอรูปแบบการสร้างโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม โดยพิจารณาจัดรูปแบบของข้อมูลที่ใช้ในการสร้างให้เป็นระบบมากขึ้น เพื่อให้กระบวนการสร้าง นั้นใช้เวลาน้อยที่สุด และเพื่อป้องกันข้อผิดพลาด ทว่ายังคงใช้รูปแบบของฟรอนต์เดินหน้าเป็นวิธี

สร้างชิ้นส่วน ซึ่งเมื่อร่วมกับการจัดเก็บข้อมูลของจุดต่อในลักษณะของโครงข่ายต้นไม้ แล้วช่วยทำให้หาจุดที่เหมาะสมได้ง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น อีกทั้งการใช้ลักษณะรูปแบบข้อมูลแบบ OOP (Object Oriented Programming) ก็เป็นการเพิ่มประสิทธิภาพการจัดระบบหน่วยความจำของกระบวนการต่าง ๆ ของการสร้างชิ้นส่วนได้อย่างดีอีกด้วย

Sloan<sup>(10)</sup> ได้เสนอแนวทางในการสร้างโครงข่ายชิ้นส่วนโดยใช้เทคนิคการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ โดยสร้างสามเหลี่ยมเริ่มต้นครอบคลุมตลอดขอบเขตของปัญหาขึ้นมาก่อน แล้วพิจารณาเพิ่มแต่ละจุดต่อเข้ามาในสามเหลี่ยมที่มีอยู่ จากนั้นสร้างสามเหลี่ยมย่อยจากจุดที่แทรกเข้าไป แล้วพิจารณาปรับแก้สามเหลี่ยมทั้งหมดให้ได้รูปร่างที่ถูกต้องตามหลักของสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ พบว่าเทคนิคการสร้างดังกล่าวทำงานง่าย มีประสิทธิภาพและมีประโยชน์ นอกจากนี้ในการปรับแก้สามเหลี่ยมให้มีลักษณะถูกต้องมากขึ้นนั้น ได้นำเอาสมบัติของโครงข่ายเดอริชเลต์(Dirichlet tessellation) และสมบัติเส้นรอบวงกลมล้อมสามเหลี่ยมมาพิจารณาด้วย

Floriani และคณะ<sup>(9)</sup> ได้เสนอวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอเนย์จากจุดในขอบเขตของปัญหาที่มีลักษณะไม่เจาะจงรูปร่าง งานวิจัยดังกล่าวอาศัยสมบัติเกี่ยวกับแผนภาพโวโรนอย (Voronoi diagram) และสมบัติเส้นรอบวงของสามเหลี่ยม โดยรวมถึงการพิจารณาแก้ไขชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีอยู่เมื่อมีการเพิ่มจุดเข้ามาในขอบเขตของปัญหา

และดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นการหาผลเฉลยโดยอาศัยการสร้างระบบชิ้นส่วนขึ้นมาและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นผลเฉลยที่ได้มาย่อมไม่ใช่ค่าที่แท้จริง จึงได้มีการศึกษาหาวิธีการที่จะวิเคราะห์ผลเฉลยที่ได้ว่ามีค่าความคลาดเคลื่อนเป็นอย่างไร และนำไปใช้ในการปรับแก้ระบบชิ้นส่วนเช่น ปรับขนาดชิ้นส่วนเพื่อนำไปวิเคราะห์ใหม่ให้ได้คำตอบที่ดีขึ้น แนวทางดังกล่าวได้มีผู้ทำการศึกษาและเสนอหลายลักษณะ

Zienkiewicz กับ Zhu<sup>(13)</sup> ได้นำเสนอวิธีการหาค่าความคลาดเคลื่อน ในรูปของค่าประจำของความคลาดเคลื่อน(error norms) ที่แบ่งเป็นค่าประจำของพลังงาน(energy norms) และแอลทูนอร์ม( $L_2$  norm) ซึ่งเป็นค่าสเกลาร์ ทำให้สะดวกในการคำนวณหา ค่าคลาดเคลื่อนดังกล่าวนำไปใช้หาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และใช้ในการปรับหาขนาดของชิ้นส่วนใหม่ต่อไป โดยค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยพิจารณาจากค่าผลเฉลยที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับค่าผลเฉลยที่คาดว่าดีกว่า ซึ่งค่าที่คาดว่าดีกว่านั้นจะพิจารณาจากผลเฉลยจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่หาได้ อาศัยหลักการที่ว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะให้ค่าหน่วยแรงที่ไม่ต่อ



เนื่องกันในแต่ละชั้นส่วนโดยเฉพาะที่จุดต่อของชั้นส่วน Zienkiewicz กับ Zhu จึงเสนอให้หาค่าที่ดีกว่าโดยการหาความสัมพันธ์ของค่าหน่วยแรงเพื่อให้ได้ค่าที่ต่อเนื่องมากขึ้นในทุกชั้นส่วนโดยใช้ความสัมพันธ์เดียวกับสมการของค่าการกระจัด

ต่อมา Zienkiewicz กับ Zhu<sup>(15) - (18)</sup> ได้เสนอวิธีการหาค่าความคลาดเคลื่อนใหม่โดยวิธีลู่อู่เข้ายิ่งยวด(superconvergence) วิธีนี้พิจารณาค่าที่ดีกว่าจากการกำหนดสมการความสัมพันธ์ของค่าหน่วยแรงที่ตำแหน่งใด ๆ ในขอบเขตปัญหา โดยใช้ค่าที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จุดเกาส์ ซึ่งจะมีค่าที่ถูกต้องมากที่สุดในการหาความสัมพันธ์ดังกล่าวด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ทำให้สามารถหาค่าหน่วยแรงที่จุดต่อที่ดีกว่าเดิม และนำค่าดังกล่าวมาหาค่าความคลาดเคลื่อนต่อไป ซึ่งให้ค่าที่แม่นยำกว่าเดิม

จากการศึกษางานวิจัยที่ผ่านมา ทำให้สามารถนำมารวบรวมเพื่อสร้างกระบวนการสร้างชั้นส่วนโดยอัตโนมัติ เพื่อให้ได้ชั้นส่วนที่มีรูปร่างที่ดี ใช้เวลาในการสร้างไม่มาก อีกทั้งสามารถปรับเปลี่ยนจำนวนของชั้นส่วน โดยขนาดของชั้นส่วนใหม่พิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนของชั้นส่วนเทียบกับค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปัญหา เพื่อให้ได้คำตอบของการวิเคราะห์ที่เข้าใจคำตอบที่แท้จริงมากที่สุด โดยที่ผ่านมาได้มีผู้นำข้อมูลต่าง ๆ ช่างต้นมาเขียนเป็นโปรแกรมเช่นกัน

เทอดเกียรติ<sup>(28)</sup> ได้พัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชั้นส่วนโดยอัตโนมัติ ซึ่งเริ่มต้นด้วยการสร้างชั้นส่วนจากสามเหลี่ยมเดอลอนเนย์โดยใช้ ฟรอนต์เดินหน้า(advancing front triangulation) และประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของผลการวิเคราะห์จากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีการฟื้นตัวเป็นหย่อม(patch recovery) โปรแกรมจะปรับขนาดของชั้นส่วนให้สอดคล้องกับความคลาดเคลื่อนด้วยการเพิ่มจุดลงในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูงโดยอัตโนมัติ

รัฐพล<sup>(29)</sup> ได้นำเสนอวิธีการปรับปรุงคุณภาพของโครงข่ายชั้นส่วน ในขั้นตอนก่อนการนำไปหาผลเฉลยของปัญหา ทั้งนี้ได้ยึดหลักการทำให้ชั้นส่วนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามากที่สุด โดยพิจารณาจำนวนเส้นประกอบด้านต่อจุดต่อให้ใกล้เคียงกับ 6 ควบคู่ไปกับการปรับเรียงเชิงมุมซึ่งช่วยทำให้ได้โครงข่ายชั้นส่วนที่ดีขึ้น

แต่จะพบว่า กระบวนการการสร้างชั้นส่วนของงานวิจัยทั้งสองซึ่งใช้วิธีฟรอนต์เดินหน้านั้น ในการหาผลเฉลยรอบใหม่ที่มีจำนวนชั้นส่วนมากขึ้น จะเสียเวลาในการสร้างชั้นส่วนใหม่

เนื่องจากต้องลบข้อมูลชิ้นส่วนทั้งหมด แล้วเริ่มต้นสร้างใหม่จากขอบของปัญหาเข้ามา ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงนำเทคนิคการสร้างชิ้นส่วนใหม่ด้วยการเพิ่มจุดข้อมูลแล้วปรับสร้างชิ้นส่วนได้โดยไม่ต้องทำการลบชิ้นส่วนทั้งหมด เป็นการเพิ่มประสิทธิภาพของโปรแกรมได้ดียิ่งขึ้น

### 1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาการสร้างชิ้นส่วนอัตโนมัติ สำหรับการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยนำวิธีแลกเปลี่ยนมาใช้ร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการทำงาน
2. สร้างและพัฒนาโปรแกรม เพื่อใช้ในการศึกษาและงานวิจัยขั้นสูงต่อไป

### 1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาเฉพาะปัญหาความเค้นความเครียดในระนาบ(plane stress, plane strain) เท่านั้นโดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่
2. พิจารณาแต่ปัญหาสถิตศาสตร์ (static problems)
3. ระบบชิ้นส่วนรับเฉพาะแรงทางกล (mechanical forces)
4. วัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่น
5. วัสดุมีสมบัติเหมือนกันตลอดทั้งชิ้นส่วน
6. วัสดุมีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง

## บทที่ 2

### แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

#### 2.1 ความนำ

ในการสร้างโปรแกรมที่สร้างและปรับขนาดขึ้นส่วนโดยอัตโนมัติ จะประกอบด้วย การสร้างขึ้นส่วน การหาคำตอบของระบบสมการ การหาค่าความคลาดเคลื่อนและการปรับขนาดของขึ้นส่วน ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดตามลำดับดังนี้

#### 2.2 การสร้างขึ้นส่วนโดยอัตโนมัติ

ในการสร้างขึ้นส่วนขึ้นมาแบ่งขอบเขตของปัญหานั้น วัตถุประสงค์หลักเพื่อให้สามารถแบ่งสนามปัญหาให้เป็นโครงข่ายที่ประกอบด้วยขึ้นส่วนขนาดเล็กแทน โดยใช้ขึ้นส่วนที่สอดคล้องกับความเป็นจริงให้มากที่สุด มีความต่อเนื่องกันตลอดทั้งขอบเขตของปัญหา และใช้แสดงลักษณะทั้งในทางกายภาพทางกลศาสตร์ของปัญหาได้อย่างถูกต้องที่สุด

ในการสร้างสามเหลี่ยมจากจุดต่อที่มีอยู่นั้น หลักการสร้างโดยใช้สมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ ได้รับความนิยมกันอย่างแพร่หลายเนื่องจากเป็นหลักการที่ทำให้สามารถสร้างสามเหลี่ยมที่มีขนาดเล็กที่สุดและมีรูปร่างดีที่สุด โดยยึดหลักการที่ว่า สามเหลี่ยมที่จะเป็นสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ได้นั้น จะต้องไม่มีจุดข้อมูลอื่นนอกจากจุดข้อมูลที่เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมเท่านั้นที่อยู่ภายในหรืออยู่บนเส้นรอบวงกลมที่สร้างจากจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมนั้น ๆ หลักการดังกล่าวขยายเป็นเงื่อนไขในการพิจารณาจุดข้อมูลที่จะใช้สร้างสามเหลี่ยมได้อีกหลายข้อ เช่น การกำหนดเงื่อนไขสำหรับสมบัติของมุมที่เล็กที่สุดที่มีขนาดใหญ่ที่สุด อันจะมีส่วนช่วยในการปรับปรุงสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นให้มีสมบัติดีที่สุดด้วย

การสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมนั้น ความสะดวก เวลาที่ใช้ และความถูกต้องสอดคล้องกับลักษณะทางกายภาพของปัญหาเป็นสิ่งสำคัญ ซึ่งวิธีที่จะนำมาใช้ในการศึกษานี้ นั้น จะอาศัยการสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยม 2 รูปแบบร่วมกัน ได้แก่

1. การสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยการใช้วิธีฟรอนต์เดินหน้า(advancing front)
2. การสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยการแลกเปลี่ยน(swap techniques)

## 2.3 การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้า(Advancing Front)

เป็นการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเส้นตรงโดยเริ่มจากแนวขอบที่ละชิ้นเข้ามาภายใน พิจารณาแต่ละชิ้นส่วนเส้นตรงนั้นเป็นฟรอนต์ แล้วหาจุดต่อที่เหมาะสมที่ทำให้ได้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมตามสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ (รูปที่ 2.1) ซึ่งรัศมีของวงกลมรอบจุดทั้งสามนั้นจะต้องมีขนาดเล็กที่สุด และไม่มีจุดต่ออื่นใดอยู่ภายในรัศมีวงกลมนี้ โดยกระบวนการสร้างชิ้นส่วนดังแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. จากข้อมูลของปัญหาที่กำหนด ได้แก่ แนวขอบของปัญหา จุดข้อมูลเริ่มต้นขนาดของชิ้นส่วนที่เลือก ในรูปที่ 2.2.- Step 1
2. ในรูปที่ 2.2.- Step 2 เริ่มต้นพิจารณาแต่ละชิ้นส่วนเส้นตรงที่ขอบของปัญหาเข้ามาเป็นฟรอนต์ปฏิบัติการ(active front) ในรูปพิจารณาเส้น 1-6
3. ในรูปที่ 2.2.- Step 3 ทำการหาจุดข้อมูลที่มีอยู่ทั้งหมดยกเว้นสองจุดที่ปลายของชิ้นส่วนนี้ ที่จะทำให้สามเหลี่ยมที่ได้มีสมบัติสอดคล้องกับสามเหลี่ยมเดอลอเนย์มากที่สุด ซึ่งเงื่อนไขในการสร้างสามเหลี่ยม เป็นระยะต่ำสุดจากจุดศูนย์กลาง( the minimum-distance-to-centre criterion) กล่าวคือทำการพิจารณาแต่ละส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างสองจุดใด ๆ แล้วทำการหาจุดที่สามโดยมีเงื่อนไขว่า ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของเส้นรอบวงกลมของสามเหลี่ยมที่ทดสอบกับส่วนของเส้นตรงที่ใช้ นั้นจะต้องมีขนาดเล็กที่สุด โดยหลังจากได้สามเหลี่ยมดังกล่าวมาแล้ว จะทำให้ได้ส่วนของเส้นตรงที่เป็นด้านของสามเหลี่ยมเพิ่มมาอีกสองด้าน ในรูปได้จุด 7 สร้างเส้นเชื่อม 1-7 และ 7-6
4. ในรูปที่ 2.2.- Step 4 จากนั้นทำการพิจารณาด้านที่สร้างขึ้นใหม่เป็นฟรอนต์ปฏิบัติการเพื่อสร้างชิ้นส่วนต่อไป ในรูปคือพิจารณาด้าน 7-6 เป็นฟรอนต์ปฏิบัติการหาจุดที่เหมาะสมได้จุด 5 สร้างเส้นเชื่อมเป็นด้านขึ้นใหม่คือ 7-5 และ 5-6

5. ในรูปที่ 2.2.- Step 5 - 8 พิจารณาในทำนองเดียวกันจนกระทั่งไม่สามารถสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเพิ่มได้อีกจึงสิ้นสุดกระบวนการสร้างชิ้นส่วน ดังแสดงโครงข่ายชิ้นส่วนที่เป็นผลลัพธ์ในรูปที่ 2.2.- Step 9

#### 2.4 การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการแลกเปลี่ยน(Swap Techniques)

การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยการแลกเปลี่ยนเป็นการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมโดยการเพิ่มจุดข้อมูลเข้าไปในโครงข่ายสามเหลี่ยมที่มีอยู่ แล้วทำการเชื่อมต่อด้านขึ้นมาใหม่ระหว่างจุดที่เพิ่มเข้าไปกับจุดยอดของสามเหลี่ยมเดิมนั้น จากนั้นใช้สมบัติของมุมในสามเหลี่ยมและสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ที่มีอยู่ ทำการตรวจสอบสามเหลี่ยมที่ได้ขึ้นมาใหม่ รวมทั้งสามเหลี่ยมเดิมที่อยู่ติดกับสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นมาใหม่ ซึ่งหากมีรูปร่างที่ไม่สอดคล้องกับสมบัติที่ตั้งไว้ ก็ทำการปรับแก้แลกเปลี่ยน(swap) ดังในรูปที่ 2.3 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ในรูปที่ 2.3 (a) จากข้อมูลของโครงข่ายชิ้นส่วนที่มี พิจารณาจุดข้อมูลที่ละจุดที่จะเพิ่มเข้ามาในโครงข่าย
2. ในรูปที่ 2.3 (b) พิจารณาจุด P เป็นจุดข้อมูลใหม่ที่เพิ่มเข้ามา ทำการค้นหาว่าจุดที่เพิ่มเข้าไบนั้น อยู่ในชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใดของโครงข่าย
3. ในรูปที่ 2.3 (c) เมื่อพบให้สร้างชิ้นส่วนเส้นตรงต่อเชื่อมระหว่างจุด P ที่แทรกกับจุดยอดของสามเหลี่ยม จะได้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อยขึ้นมาสามชิ้นส่วน จากนั้นพิจารณาแต่ละชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อยที่เพิ่มเข้ามาร่วมกับชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเดิมที่อยู่ติดกัน ว่ามีสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขของมุมที่เล็กที่สุดที่มีขนาดใหญ่ที่สุดหรือไม่ และจุดที่แทรกเข้าไบนั้นอยู่ในขอบเขตวงกลมที่สร้างขึ้นด้วยชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเดิมที่ติดกันนั้นหรือไม่ ดังแสดงเงื่อนไขการพิจารณาในรูปที่ 2.4 โดยในรูป 2.3 (c) พิจารณาสามเหลี่ยม APF กับสามเหลี่ยม AFE และสามเหลี่ยม BPF กับสามเหลี่ยม BDF ในขณะที่สามเหลี่ยม ABP เป็นสามเหลี่ยมที่ขอบจึงไม่มีสามเหลี่ยมติดกันให้พิจารณาร่วมกัน
4. ในรูปที่ 2.3 (d) แลกเปลี่ยนด้านร่วมคือด้าน AF ของสามเหลี่ยม APF กับสามเหลี่ยม AFE เนื่องจากพบว่าเมื่อสร้างวงกลมจากจุดยอดของสามเหลี่ยม AFE แล้วจุด P อยู่ภายในวงกลมดังกล่าว ได้เป็นสามเหลี่ยมใหม่คือ

สามเหลี่ยม APE และสามเหลี่ยม EFP ซึ่งจะนำสามเหลี่ยมทั้งสองมาพิจารณาใหม่ร่วมกับสามเหลี่ยมเดิมที่อยู่ติดกัน นั่นคือ สามเหลี่ยม EFP กับสามเหลี่ยม EFD ที่มีด้านร่วมคือด้าน EF ในขณะที่สามเหลี่ยม APE เป็นสามเหลี่ยมที่ขอบไม่มีสามเหลี่ยมอื่นให้พิจารณาร่วม และจากการตรวจสอบเงื่อนไขการแลกเปลี่ยนพบว่าวงกลมจากสามเหลี่ยม EFD ไม่มีจุด P อยู่ภายในจึงไม่ต้องแลกเปลี่ยนด้าน EF จากนั้นย้อนกลับมาพิจารณาสามเหลี่ยม BPF กับสามเหลี่ยม BDF ต่อไป

5. ในรูปที่ 2.3 (e) แลกเปลี่ยนด้านร่วมคือด้าน BF ของสามเหลี่ยม BPF กับสามเหลี่ยม BDF เนื่องจากพบว่าเมื่อสร้างวงกลมจากจุดยอดของสามเหลี่ยม BDF แล้วจุด P อยู่ภายในวงกลมดังกล่าว ได้เป็นสามเหลี่ยมใหม่คือ สามเหลี่ยม FPD และสามเหลี่ยม BPD จากนั้นพิจารณาสามเหลี่ยม FPD กับสามเหลี่ยม EFD ที่อยู่ติดกันโดยมีด้านร่วมคือ FD และพิจารณาสามเหลี่ยม PBD กับสามเหลี่ยม BCD ที่อยู่ติดกันโดยมีด้านร่วมคือ BD
6. ในรูปที่ 2.3 (f) ผลการพิจารณาเงื่อนไขแลกเปลี่ยน ระบุให้แลกเปลี่ยนเฉพาะด้านร่วม BD เท่านั้น ทำให้สามเหลี่ยม PBD กับสามเหลี่ยม BCD เปลี่ยนเป็นสามเหลี่ยม PBC กับสามเหลี่ยม PCD และเป็นสามเหลี่ยมที่ขอบจึงไม่มีสามเหลี่ยมติดกันให้พิจารณาอีก เป็นการสิ้นสุดขั้นตอนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยการแทรกจุด P ลงในโครงข่ายสามเหลี่ยมที่มีอยู่

## 2.5 การพิจารณาเงื่อนไขในการแลกเปลี่ยน(Swap Techniques Conditions)

เป็นเงื่อนไขที่ใช้ในการพิจารณาตรวจสอบว่าคู่ของสามเหลี่ยมใด ๆ ที่อยู่ติดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะสอดคล้องตามสมบัติมุมเล็กที่สุด-ใหญ่ที่สุด(minimum-maximum angle) หรือไม่

พิจารณารูปที่ 2.5 ซึ่งเป็นสองชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีด้าน V1-V2 เป็นด้านร่วม และพิจารณารวมเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดของสี่เหลี่ยมเป็น P-V2-V3-V1 โดยเส้นทแยง V1-V2 จะถูกแทนที่ด้วยเส้นทแยง P-V3 ถ้าจุด P อยู่ภายในเส้นวงกลมที่สร้างขึ้นจากชิ้นส่วนสามเหลี่ยม V1-V2-V3



ดังที่แสดงในรูปที่ 2.5 จุด P จะอยู่ภายในเส้นวงกลมก็ต่อเมื่อค่าของ  $(2\pi r - 2r\alpha) < 2r\beta$  นั่นคือ ค่าของ  $\alpha + \beta > \pi$  และในทำนองเดียวกัน จุด P จะอยู่ภายนอกเส้นวงกลมก็ต่อเมื่อ  $\alpha + \beta < \pi$  ในขณะที่กรณีเดียวที่จุด P จะอยู่บนเส้นวงกลมก็ต่อเมื่อ  $\pi = \alpha + \beta$  และเนื่องจากค่าของ  $\alpha + \beta < 2\pi$  ดังนั้นการแลกเปลี่ยน (swap) จะต้องทำก็ต่อเมื่อ

$$\sin(\alpha + \beta) < 0 \quad (2.5.1)$$

และด้วยสูตรทางตรีโกณมิติ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (2.5.2)$$

ซึ่งจากสูตรดังกล่าว จะสอดคล้องกันกับอสมการ

$$\frac{x_{13}x_{23} + y_{13}y_{23}}{\left[\left(x_{13}^2 + y_{13}^2\right)\left(x_{23}^2 + y_{23}^2\right)\right]^{1/2}} \times \frac{x_{2P}y_{1P} - x_{1P}y_{2P}}{\left[\left(x_{2P}^2 + y_{2P}^2\right)\left(x_{1P}^2 + y_{1P}^2\right)\right]^{1/2}} + \frac{x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13}}{\left[\left(x_{13}^2 + y_{13}^2\right)\left(x_{23}^2 + y_{23}^2\right)\right]^{1/2}} \times \frac{x_{2P}x_{1P} + y_{2P}y_{1P}}{\left[\left(x_{2P}^2 + y_{2P}^2\right)\left(x_{1P}^2 + y_{1P}^2\right)\right]^{1/2}} < 0 \quad (2.5.3)$$

โดยที่

$$x_{13} = x_1 - x_3 \quad y_{13} = y_1 - y_3$$

$$x_{23} = x_2 - x_3 \quad y_{23} = y_2 - y_3$$

$$x_{1P} = x_1 - x_P \quad y_{1P} = y_1 - y_P$$

$$x_{2P} = x_2 - x_P \quad y_{2P} = y_2 - y_P$$

นั่นคือ จุด P จะอยู่ภายในวงกลม ก็ต่อเมื่อ

$$(x_{13}x_{23} + y_{13}y_{23})(x_{2P}y_{1P} - x_{1P}y_{2P}) < (y_{13}x_{23} - x_{13}y_{23})(x_{2P}x_{1P} + y_{2P}y_{1P}) \quad (2.5.4)$$

โดยการตรวจสอบนี้จะสามารถแสดงให้เห็นในรูปขั้นตอนของตรรกะดังนี้

$$\text{ขั้นตอนที่ 1 : กำหนดให้ } \text{COSA} = x_{13}x_{23} + y_{13}y_{23} \quad (2.5.5 \text{ a})$$

$$\text{COSB} = x_{2P}x_{1P} + y_{2P}y_{1P} \quad (2.5.5 \text{ b})$$

ขั้นตอนที่ 2 : ถ้า  $\text{COSA} \geq 0$  และ  $\text{COSB} \geq 0$  แล้วจะสรุปได้ว่าไม่ต้องทำการแลกเปลี่ยนด้านร่วม และสิ้นสุดการพิจารณา

ขั้นตอนที่ 3 : ถ้า  $\text{COSA} < 0$  และ  $\text{COSB} < 0$  แล้วจะสรุปได้ว่าต้องทำการแลกเปลี่ยนด้านร่วม และสิ้นสุดการพิจารณา

$$\text{ขั้นตอนที่ 4 : กำหนดให้ } \text{SINA} = x_{13}y_{23} - y_{13}x_{23} \quad (2.5.6 \text{ a})$$

$$\text{SINB} = x_{2P}y_{1P} - y_{2P}x_{1P} \quad (2.5.6 \text{ b})$$

$$\text{SINAB} = \text{SINA} * \text{COSB} + \text{SINB} * \text{COSA} \quad (2.5.6 \text{ c})$$

ขั้นตอนที่ 5 : ถ้า  $\text{SINAB} < 0$  แล้วจะสรุปได้ว่าต้องทำการแลกเปลี่ยนด้านร่วม และสิ้นสุดการพิจารณา แต่ถ้าไม่ใช่ก็จะสรุปได้ว่าไม่ต้องทำการแลกเปลี่ยนด้านร่วม และสิ้นสุดการพิจารณา

ขั้นตอนที่แสดงข้างต้นสามารถนำมาใช้ในการพิจารณาการแลกเปลี่ยนด้านร่วมของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมได้อย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อให้การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยการแทรกจุดและแลกเปลี่ยนเป็นไปได้ด้วยดี

## 2.6 การหาค่าความคลาดเคลื่อนและการประมาณขนาดชิ้นส่วน

ในการวิเคราะห์หาค่าตอบของปัญหาทางไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น ความคลาดเคลื่อนของคำตอบสามารถหาค่าได้จากผลต่างระหว่างคำตอบที่ได้มาด้วยการวิเคราะห์กับคำตอบที่แท้จริงของปัญหา

โดยคำตอบ  $u$  สำหรับการวิเคราะห์นั้น อาจจะเป็นได้ทั้ง ค่าการกระจัดของตำแหน่งใด ๆ หรือ ค่าความเค้นเนื่องจากแรงที่กระทำที่จุดนั้น ๆ นั่นคือ



$$e = u - u_h \quad (2.7.1 \text{ a})$$

และ

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (2.7.1 \text{ b})$$

- โดยที่  $e$  : ค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจัด  
 $u$  : ค่าคำตอบการกระจัดที่แท้จริงของปัญหา  
 $u_h$  : คำตอบการกระจัดที่ได้จากการวิเคราะห์  
 $e_\sigma$  : ค่าความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง  
 $\sigma$  : ค่าคำตอบหน่วยแรงที่แท้จริงของปัญหา  
 $\sigma_h$  : ค่าคำตอบหน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์

แต่เนื่องจากค่าคำตอบของปัญหาที่แท้จริงนั้น เป็นค่าที่ไม่สามารถหาได้ ดังนั้น ค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบนั้น จึงสามารถหาได้ด้วยการเปรียบเทียบค่าคำตอบที่วิเคราะห์ได้นั้นกับคำตอบที่ดีกว่า จะได้ว่า

$$e^* = u^* - u_h \quad (2.7.2 \text{ a})$$

และ  $e_\sigma^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (2.7.2 \text{ b})$

- โดยที่  $e^*$  : ค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจัด  
 $u^*$  : ค่าคำตอบการกระจัดของปัญหาที่ดีกว่า  
 $u_h$  : คำตอบการกระจัดที่ได้จากการวิเคราะห์  
 $e_\sigma^*$  : ค่าความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง  
 $\sigma^*$  : ค่าคำตอบหน่วยแรงของปัญหาที่ดีกว่า  
 $\sigma_h$  : ค่าคำตอบหน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์

ซึ่งเมื่อได้ค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบแล้ว ก็นำไปปรับแก้การวิเคราะห์ต่อไป แต่เนื่องจากคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์จะอยู่ในรูปของเวกเตอร์ของคำตอบ จึงทำให้การหาค่าความคลาดเคลื่อนที่โดยตรงไม่สะดวก ดังนั้น เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะทำการพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนโดยการพิจารณาในรูปของค่าประจำ(norm) ของคำตอบ ซึ่งอยู่ในลักษณะของสเกลาร์เป็นขนาดของค่าความคลาดเคลื่อน และที่นำมาใช้ได้แก่ การหาค่า L2-norm ซึ่งเขียนในรูปพลังงานของความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรงได้เป็น

$$\|e\|_2 = \left( \int_{\Omega} e_{\sigma}^T e_{\sigma} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.3 \text{ a})$$

โดยที่  $\|e\|_2$  : ค่าแวลูนอร์มของความคลาดเคลื่อน

$e_{\sigma}$  : เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง

$\Omega$  : ขอบเขตของปัญหาที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่(local) หรือ โดยรวมทั้งหมด(global)

และเมื่อพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนที่หาได้จากคำตอบที่ดีกว่าในสมการที่ 2.7.2 จะได้ว่า

$$\|e^*\|_2 = \left( \int_{\Omega} e_{\sigma}^{*T} e_{\sigma}^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.3 \text{ b})$$

โดยการเปรียบเทียบปรับแก้ความถูกต้อง จะนำค่าประจำของความคลาดเคลื่อนนี้ไปทำการหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพันธ์กับค่าประจำของคำตอบที่แท้จริง เพื่อให้ได้ค่าปรับแก้คำตอบที่ต้องการ โดยค่าประจำของคำตอบหาได้โดย L2-norm เช่นกัน โดยเขียนในรูปของพลังงานของหน่วยแรงได้เป็น

$$\|U\|_2 = \left( \int_{\Omega} \sigma^T \sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.4 \text{ a})$$

และพิจารณาจากค่าของคำตอบที่ดีกว่า จะได้เป็น

$$\|U^*\|_2 = \left( \int_{\Omega} \sigma^{*T} \sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.4 \text{ b})$$

ดังนั้น ค่าคำตอบที่แท้จริงนั้นสามารถประมาณได้จาก

$$\|U\|_2 \approx \sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e^*\|_2^2} \quad (2.7.4 \text{ c})$$

นั่นคือ ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ หาได้จาก

$$ERR_{\text{relative}} = \|Err\|_2 / \|u_{\text{recover}}\|_2 \quad (2.7.5 \text{ a})$$

$$\eta = \frac{\|e\|_2}{\|U\|_2} \quad (2.7.5 \text{ b})$$

พิจารณาจากค่าของคำตอบที่ดีกว่า จะได้เป็น

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\|e^*\|_2}{\sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e^*\|_2^2}} \quad (2.7.5 \text{ c})$$

และเพื่อให้การคำนวณลดความยุ่งยากในการหาค่า จึงเลือกที่จะใช้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยประมาณ ดังแสดงในสมการ (2.7.6) แทนค่าในสมการ (2.7.5 c)

$$\eta^* = \frac{\|e^*\|_2}{\|U^*\|_2} \quad (2.7.6)$$

ซึ่งเมื่อได้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์แล้ว จึงนำไปเปรียบเทียบกับค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ และถ้ามีค่าความคลาดเคลื่อนมากกว่า ก็ทำการคำนวณหาขนาดของชั้นส่วนที่สอดคล้องกับความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ในแต่ละส่วนต่อไป

หลักการการหาค่าคำตอบที่ดีกว่าสามารถหาได้โดยพิจารณาจากคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ จากรูปที่ 2.6 คำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีค่าเท่ากันตลอดในแต่ละชั้นส่วน โดยคำตอบที่ได้จะเป็นค่าที่ตำแหน่งเกาส์ของแต่ละชั้นส่วน ซึ่งทำให้ที่จุดอื่นของชั้นส่วนจะมีค่าความถูกต้องที่กระจายไปไม่สม่ำเสมอ และเมื่อเปรียบเทียบระหว่างชั้นส่วนแล้ว จะเกิดความไม่ต่อเนื่องของคำตอบที่รอยต่อของชั้นส่วน ดังนั้น หากพิจารณาว่า ค่าคำตอบที่ตำแหน่งเกาส์ของแต่ละชั้นส่วนที่เป็นค่าที่ดีที่สุดและใช้ค่าที่ตำแหน่งดังกล่าวมาพิจารณาหาความสัมพันธ์เพื่อประมาณค่าคำตอบที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหา โดยความสัมพันธ์ดังกล่าวจะอยู่ในรูปของพหุนาม ทั้งในปัญหาระบบมิติเดียว หรือสองมิติ โดยในปัญหามิติเดียว ความสัมพันธ์ที่ได้จะมีลักษณะเชิงเส้น ในขณะที่ระบบสองมิตินั้น คำตอบจะเป็นลักษณะพื้นผิว โดยความสัมพันธ์ดังกล่าว แสดงในสมการ

$$\sigma^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + \dots \quad (2.7.7 \text{ a})$$

หรือเขียนได้ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\sigma^* = [p]\{a\} \quad (2.7.7 \text{ b})$$

โดยที่  $[p]$  : ฟังก์ชันฐาน (base function) ที่อยู่ในรูปตัวแปรของพหุนาม  $[1 \ x \ y \ xy \ x^2 \dots]$  เพื่อใช้แทนค่าตำแหน่งต่าง ๆ ในขอบเขตของปัญหา

$\{a\}$  : ค่าคงที่ของพหุนามซึ่งเป็นตัวแปรที่ยังไม่รู้ค่าซึ่งต้องคำนวณหา  $\{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \dots\}$  เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งในขอบเขตปัญหา กับค่าคำตอบที่ต้องการ

ซึ่งการที่จะหาความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ ทำได้โดยหลักการของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดคือ ต้องเริ่มจากการหาค่าคงที่  $\{a\}$  ที่จะทำให้หน่วยแรงโดยการประมาณด้วยความสัมพันธ์ มีความแตกต่างจากค่าที่ตำแหน่งเกาส์น้อยที่สุด โดยในกรณี 2 มิติ ค่าเศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรงโดยประมาณกับหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์ สามารถหาได้ดังสมการ (2.7.8)

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma^*(x_i, y_i))^2 \quad (2.7.8 \ a)$$

เมื่อแทนค่า จะได้เป็น

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - [p(x_i, y_i)]\{a\})^2 \quad (2.7.8 \ b)$$

โดยที่  $R(a)$  : เศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรง

$\sigma_h$  : หน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์

$\sigma^*$  : หน่วยแรงที่ได้โดยการประมาณ

$n$  : จำนวนตำแหน่งเกาส์ทั้งหมดในหย่อม

ซึ่งในการหาค่าคงที่เพื่อให้ได้ค่าเศษตกค้างต่ำที่สุด ทำได้โดยการกำหนดค่าอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ของเศษตกค้างให้เท่ากับศูนย์ โดยหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงตัวแต่ละตัว จะได้สมการที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนของค่าคงที่ดังนี้

$$\sum_{i=1}^n [p(x_i, y_i)]^T [p(x_i, y_i)]\{a\} = \sum_{i=1}^n \sigma_h(x_i, y_i) [p(x_i, y_i)]^T \quad (2.7.9)$$

โดยในงานวิจัยนี้เลือกใช้ฟังก์ชันฐานเป็นพหุนามกำลัง 1 นั่นคือ เลือกใช้  $p = [1 \ x \ y \ xy]$  ดังนั้นสามารถแจงสมการ (2.7.9) ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i & \sum x_i y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i^2 y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum x_i y_i^2 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i y_i^2 & \sum x_i^2 y_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \sigma_{hi} \\ \sum x_i \sigma_{hi} \\ \sum y_i \sigma_{hi} \\ \sum x_i y_i \sigma_{hi} \end{Bmatrix} \quad (2.7.10 \text{ a})$$

หรืออยู่ในรูปเมตริกซ์ จะได้เป็น

$$[A]\{a\} = \{b\} \quad (2.7.10 \text{ b})$$

ซึ่งสามารถหาค่าของ  $\{a\}$  ได้โดย

$$\{a\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (2.7.11)$$

เมื่อได้ค่าของ  $\{a\}$  ทั้งหมดมาแล้ว ก็สามารถคำนวณหาหน่วยแรงที่จุดต่อได้โดยการแทนค่าพิกัดที่จุดต่อลงในสมการ (2.7.12)

$$\sigma^*(x_i, y_i) = [p(x_i, y_i)]\{a\} \quad (2.7.12)$$

เนื่องจากในปัญหามระนาบจะมีหน่วยแรง 3 ค่า ดังนั้นในแต่ละจุดต่อจึงต้องคำนวณหาค่าคงที่ 3 ครั้ง สำหรับแต่ละหน่วยแรง โดยที่ในแต่ละครั้งจะเปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าหน่วยแรงทางด้านขวามือของสมการ (2.7.10) เท่านั้น

เมื่อได้ค่าคงที่ของความสัมพันธ์ระหว่างค่าคำตอบกับตำแหน่งใด ๆ แล้ว ทำการหาค่าคำตอบที่จุดต่อทุกจุด แล้วใช้ฟังก์ชันพื้นฐาน(shape function) ชุดเดียวกันกับที่ใช้ในการหาค่าการกระจัดในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ร่วมกับค่าที่จุดต่อที่หาได้นั้น นำไปหาค่าคำตอบที่ตำแหน่งต่าง ๆ ได้ ดังแสดงในสมการ

$$\{\sigma^*(x, y)\} = [N(x, y)]\{\sigma_n^*\} \quad (2.7.13)$$

โดยที่  $\sigma^*$  : หน่วยแรงที่ตำแหน่งใด ๆ

$\sigma_n^*$  : หน่วยแรงที่ตำแหน่งจุดต่อ

$N$  : ฟังก์ชันพื้นฐานในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากนั้นทำการคำนวณหาค่าแวลูทอร์มของหน่วยแรงและความคลาดเคลื่อน ทั้งในส่วนเฉพาะที่แต่ละชั้นส่วนในสมการ

$$\|u^*\|_{2l} = \left( \int_{\Omega} (N\sigma^*)^T (N\sigma^*) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.14 \text{ a})$$

$$\|e^*\|_{2l} = \left( \int_{\Omega} (N\sigma^* - \sigma_h)^T (N\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.14 \text{ b})$$

และในส่วนโดยรวมทั้งหมดในสมการ

$$\|e^*\|_{2g} = \left( \sum_{i=1}^{Ne} \|e^*\|_{2l,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.15 \text{ a})$$

$$\|u^*\|_{2g} = \left( \sum_{i=1}^{Ne} \|u^*\|_{2l,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.15 \text{ b})$$

ซึ่งจะได้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จาก

$$\eta_g^* = \frac{\|e^*\|_{2g}}{\|u^*\|_{2g}} \quad (2.7.16)$$

โดยที่  $\|u^*\|_{2l}$  : ค่าแวลูทอร์มของหน่วยแรงเฉพาะที่ในชั้นส่วน

$\|e^*\|_{2l}$  : ค่าแวลูทอร์มของความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ในแต่ละชั้นส่วน

$\|u^*\|_{2g}$  : ค่าแวลูทอร์มของหน่วยแรงรวมของปัญหา

$\|e^*\|_{2g}$  : ค่าแวลูทอร์มของความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรงรวมของ

ปัญหา

N : ค่าฟังก์ชันพื้นฐาน

Ne : จำนวนชั้นส่วนทั้งหมดในระบบ

ซึ่งจากค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้นี้ จะนำมาใช้คำนวณหาขนาดที่เหมาะสมของชั้นส่วนที่สอดคล้องกับค่าความคลาดเคลื่อนต่อไป โดยหลักการที่ว่าค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบจะแปรตามขนาดของชั้นส่วนยกกำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐานดังแสดงในสมการ

$$\|e\| = Ch^p \quad (2.7.17)$$

โดยที่  $C$  : ค่าคงที่ที่ยังไม่รู้ค่า

$h$  : ขนาดของชิ้นส่วน

$p$  : ค่ากำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐาน

ดังนั้น เมื่อรู้ขนาดของชิ้นส่วนและความคลาดเคลื่อนในปัจจุบัน ก็จะสามารถคำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ได้ดังแสดงในสมการ

$$h_{\text{new}} = h_{\text{exist}} \left( \frac{\|e\|_a}{\|e\|_{\text{exist}}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.7.18 \text{ a})$$

ในกรณีที่ศึกษา ใช้ค่า  $p = 1$  ดังนั้น

$$h_{\text{new}} = h_{\text{exist}} \frac{\|e\|_a}{\|e\|_{\text{exist}}} \quad (2.7.18 \text{ b})$$

โดยที่  $h_{\text{new}}$  : ขนาดของชิ้นส่วนที่สร้างขึ้นใหม่

$h_{\text{exist}}$  : ขนาดของชิ้นส่วนในปัจจุบัน

$\|e\|_a$  : ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้

$\|e\|_{\text{exist}}$  : ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจริง

ซึ่งในการหาค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ จะพิจารณาจากหลักการที่ว่า เมื่อเปรียบเทียบระบบใด ๆ ที่มีจำนวนของชิ้นส่วนเท่ากันแล้ว พบว่าระบบที่กระจายของความคลาดเคลื่อนออกไปให้เท่า ๆ กันในทุกจุดจะให้คำตอบของปัญหาที่ดีที่สุด ดังนั้นจึงสามารถคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ยอมให้ในแต่ละจุดต่อได้ โดยให้มีขนาดเท่ากันในทุกจุด ดังแสดงในสมการ

$$\|e\|_{na} = \eta_a \frac{\|U^*\|_{2g}}{\sqrt{N_n}} \quad (2.7.19)$$

โดยที่  $\|e\|_{na}$  : ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละจุดต่อ

$N_n$  : จำนวนจุดต่อทั้งหมดในระบบ

$\eta_a$  : ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมที่ยอมให้

ในกรณีที่คำนวณความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่โดยอ้างอิงจากชั้นส่วน ค่า  
ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชั้นส่วนจะคำนวณได้จากสมการ (2.7.20)

$$\|e\|_{ea} = \eta_a \frac{\|u^*\|_{2g}}{\sqrt{N_e}} \quad (2.7.20)$$

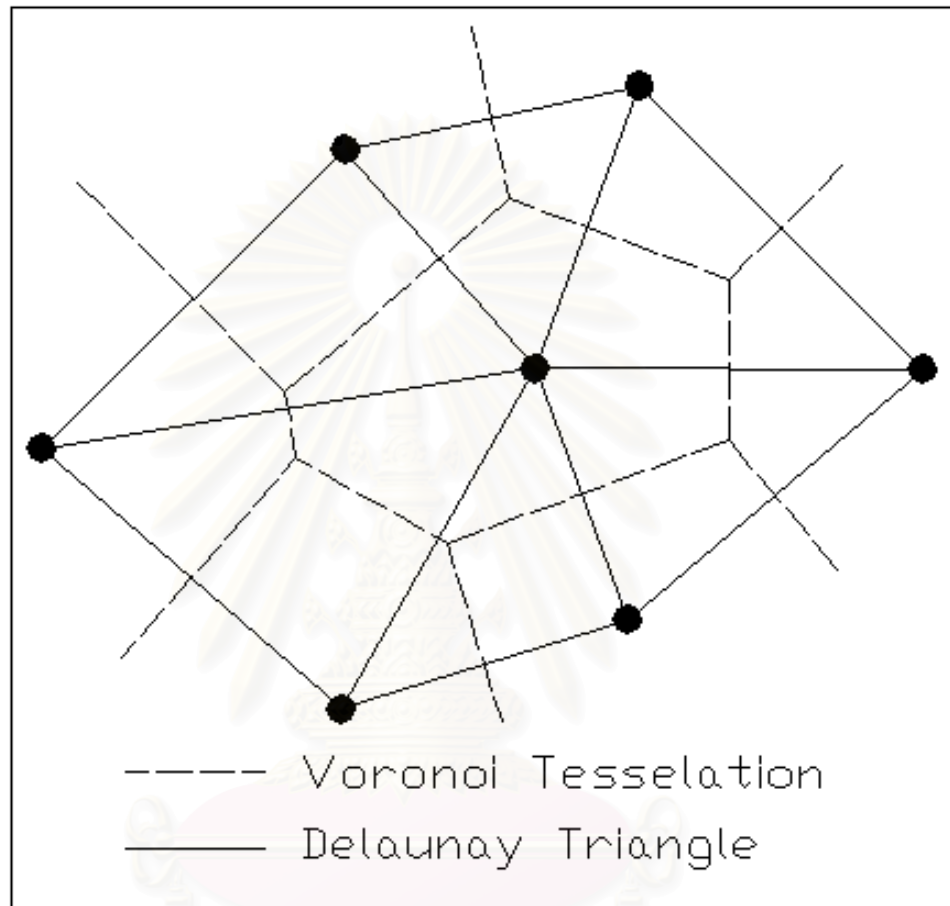
โดยที่  $\|e\|_{ea}$  : ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชั้นส่วน

$N_e$  : จำนวนของชั้นส่วนทั้งหมดในระบบ



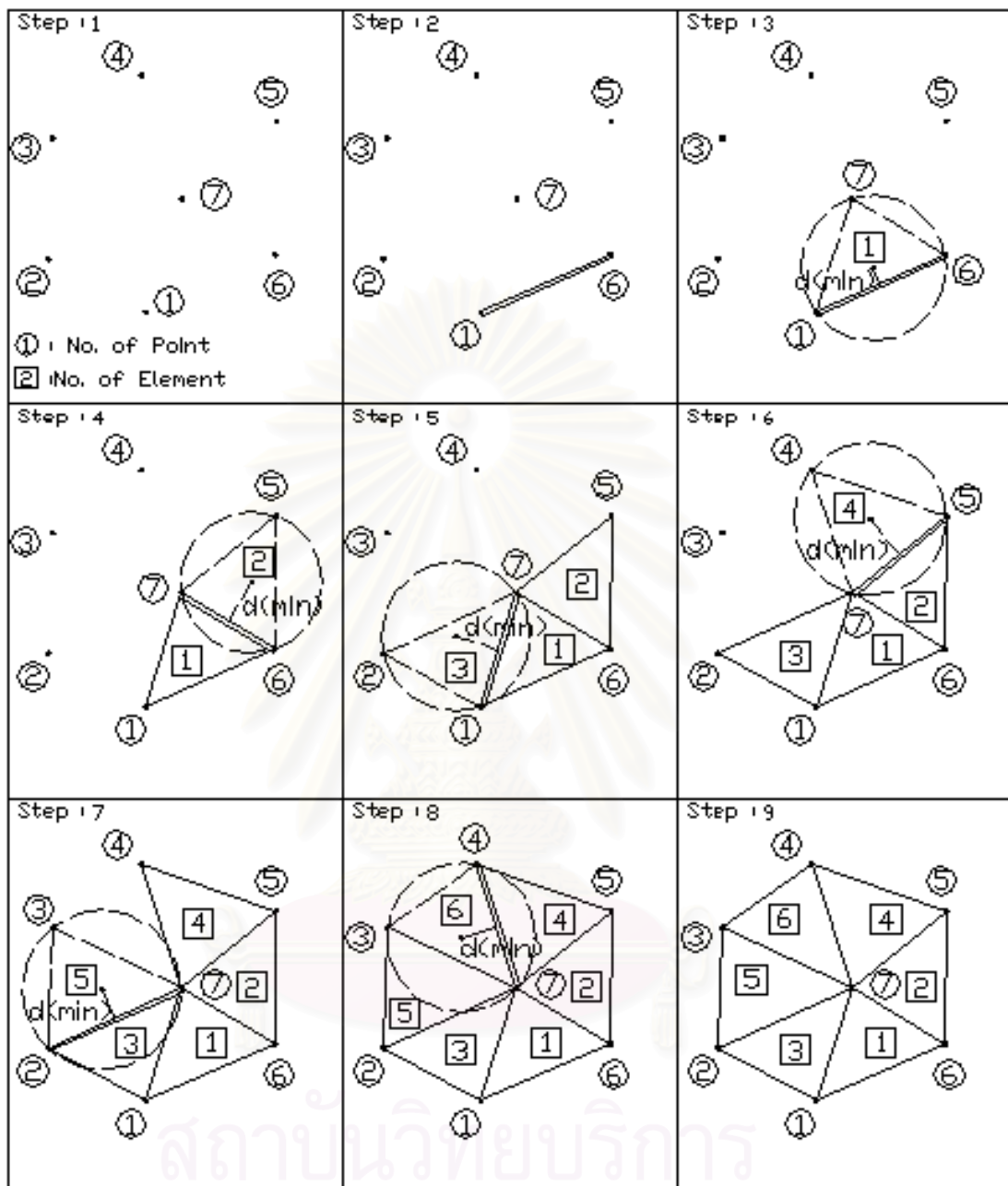
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



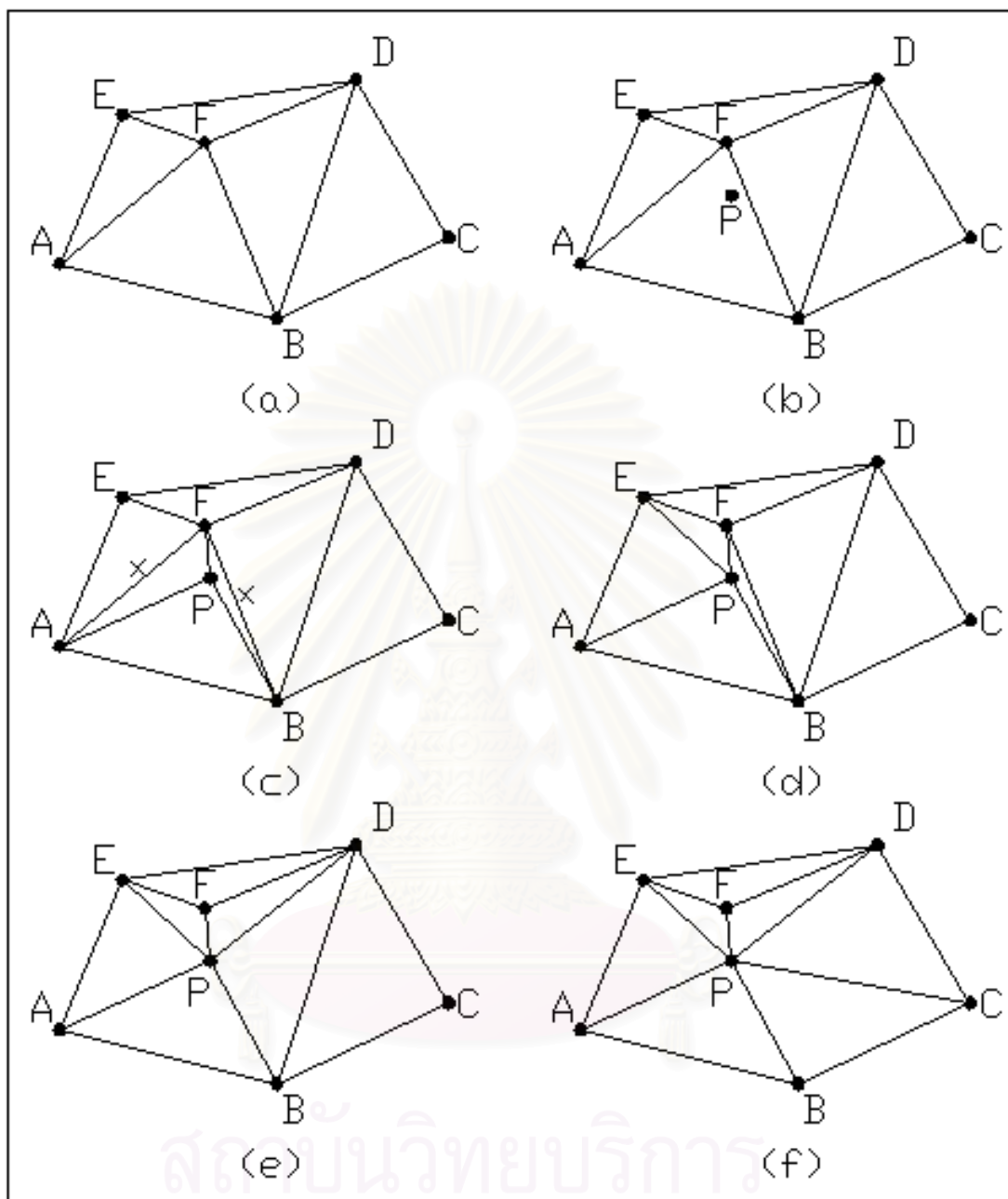


รูปที่ 2.1 : รูปโครงข่ายโวโนอยและสามเหลี่ยมเดอลอเนย์

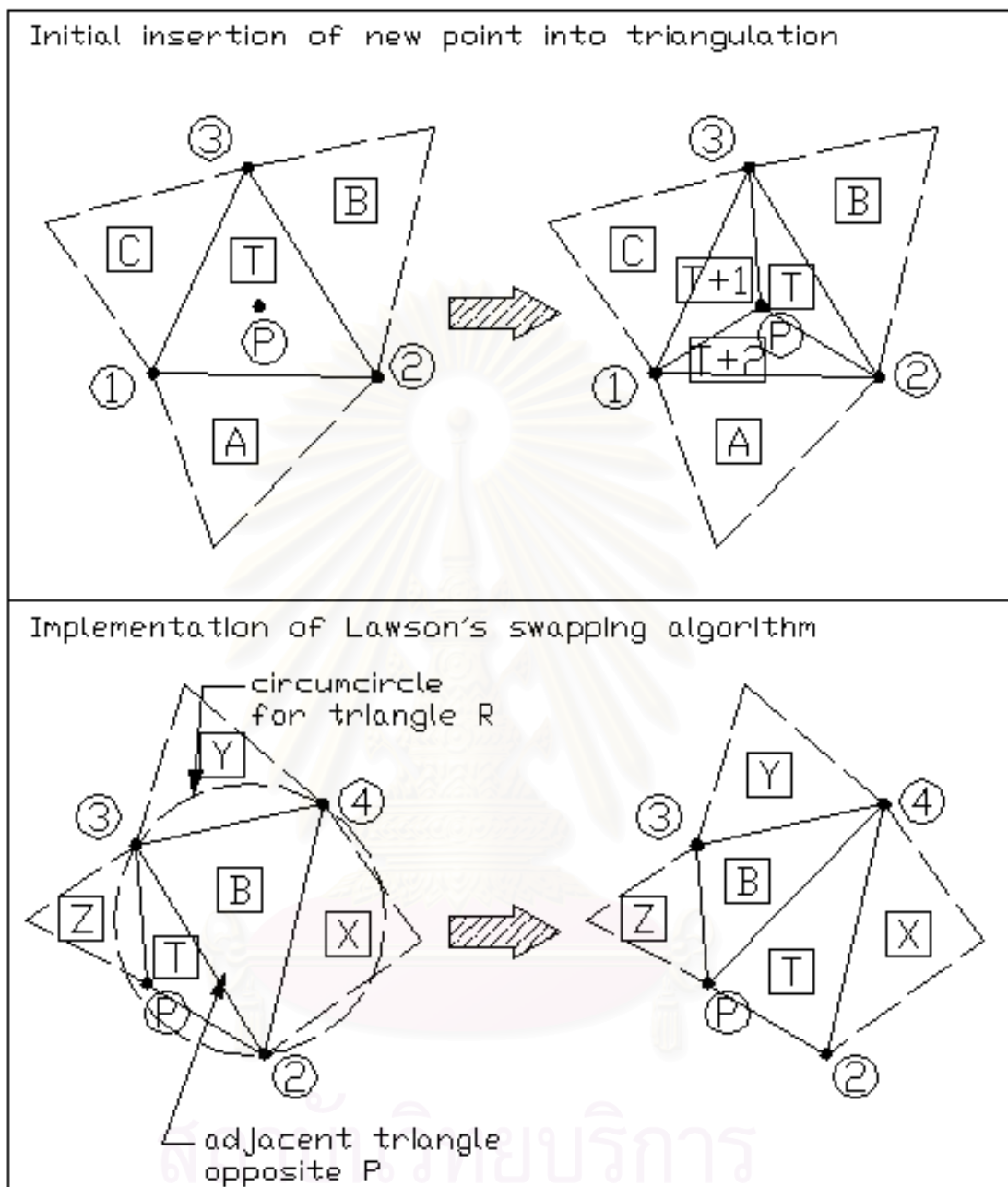
สถาบันวิจัยดาราศาสตร์  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



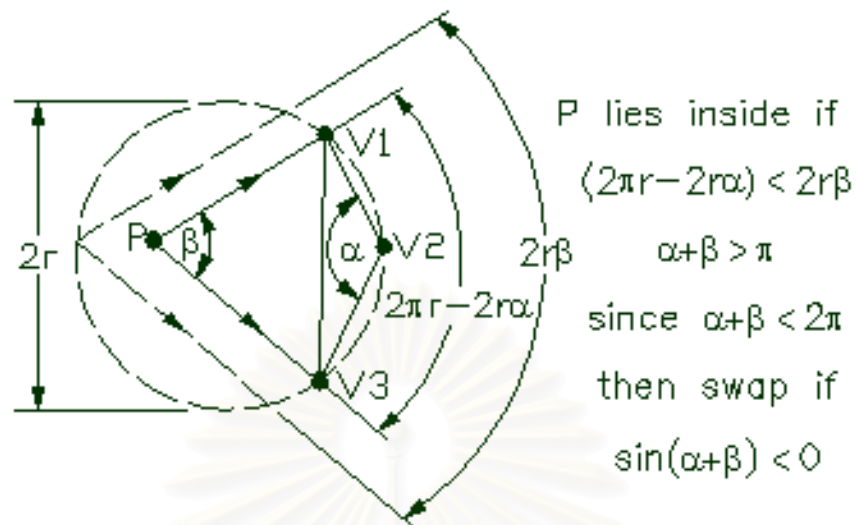
รูปที่ 2.2 : การสร้างชิ้นสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้า



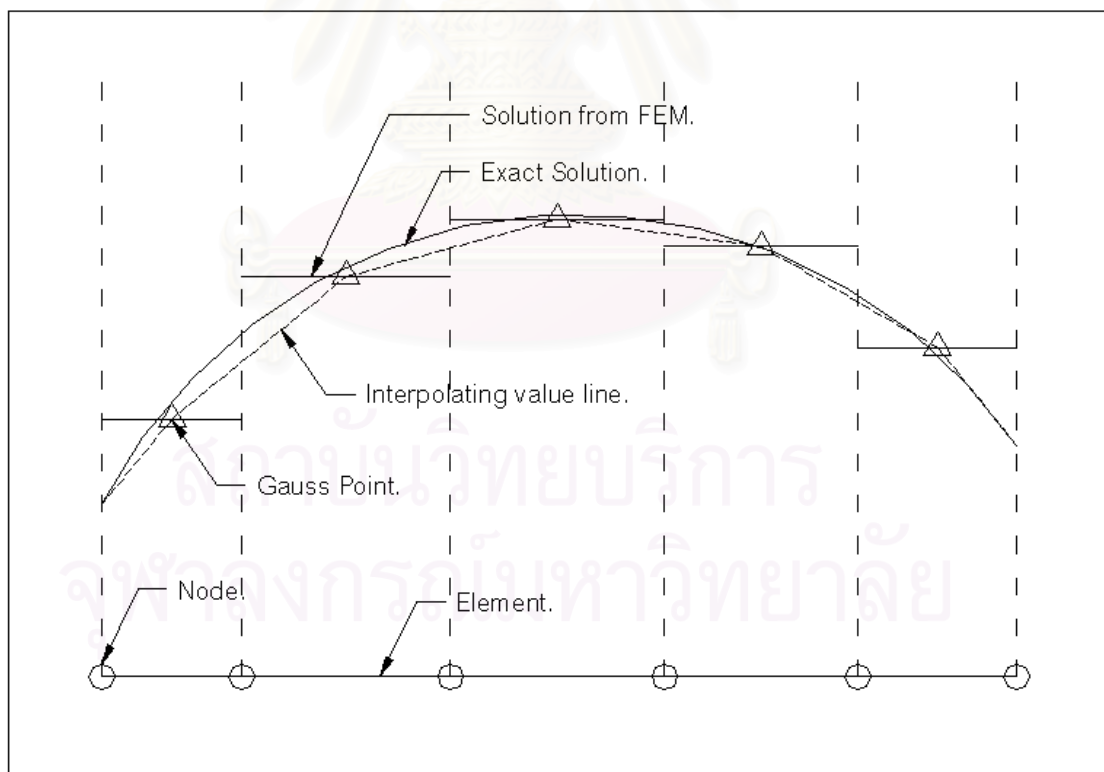
รูปที่ 2.3 : การสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยการแทรกจุดในสามเหลี่ยม



รูปที่ 2.4 : เงื่อนไขการพิจารณาการแลกเปลี่ยนด้านร่วมของสามเหลี่ยม



รูปที่ 2.5 : เงื่อนไขการพิจารณาสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเนย์



รูปที่ 2.6 : การประมาณคำตอบจากตำแหน่งเกาส์ในส่วนหนึ่งของปัญหามิติเดียว

## บทที่ 3

### การพัฒนาโปรแกรม

#### 3.1 ภาษาคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมที่ต้องการจะต้องมีประสิทธิภาพสูงสุดในการคำนวณและประมวลผล ทั้งต้องมีความยืดหยุ่นและง่ายในการเรียกใช้งานร่วมกับโปรแกรมอื่นที่จำเป็น ดังนั้นจึงได้เลือกใช้ Visual C++ ซึ่งเป็นภาษาโปรแกรมที่พัฒนามาจาก C++ อีกระดับหนึ่ง โดยเฉพาะในส่วนของการตอบรับกับผู้ใช้(interface) ที่ทำให้มีความสะดวกมากยิ่งขึ้นในการรับข้อมูล และแสดงผล นอกจากนี้ยังมีความสามารถในการประมวลผลได้รวดเร็ว เหมาะสมกับงานที่จำเป็นต้องมีการคำนวณซ้ำ และมีขั้นตอนการคำนวณมาก

ลักษณะโครงสร้างของข้อมูลในภาษา Visual C++ นั้น จะเป็นแบบ OOP (object oriented program) ซึ่งสามารถกำหนดคุณสมบัติ และความสามารถในการทำงานประมวลผล หรือการเรียกใช้งานส่วนต่าง ๆ ของข้อมูลอื่นได้ด้วยตัวเอง ทำให้มีความยืดหยุ่นมาก เมื่อนำมาใช้กับการทำงานที่มีจำนวนของชิ้นส่วนปรับเปลี่ยนอยู่เสมอ หรือมีการเปลี่ยนแปลงข้อมูลภายในชิ้นส่วนหลาย ๆ ครั้ง

นอกจากนั้น ข้อมูลในลักษณะที่กำหนดใช้หน่วยความจำแบบพลวัต(dynamic memory allocation) ยังเอื้ออำนวยต่อการจัดเก็บข้อมูลที่มีจำนวนของข้อมูลไม่คงที่ ทำให้สามารถปรับเปลี่ยน ลด-เพิ่ม จำนวนข้อมูลได้ตามสภาวะของการทำงาน และทำให้การกำหนดใช้หน่วยความจำของโปรแกรมเป็นไปอย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพมากขึ้น อันสอดคล้องกับสภาวะการใช้งานจริง

ความสามารถในการสร้างข้อมูลในรูปแบบใหม่ที่แตกต่างไปจากรูปแบบปกติ เพื่อให้สอดคล้องกับความต้องการของผู้ใช้งาน ก็เป็นอีกคุณสมบัติหนึ่งที่มีในภาษา Visual C++ ซึ่งมีส่วนช่วยให้ผู้เขียนโปรแกรมสามารถจัดระบบข้อมูลให้เป็นระเบียบได้มากยิ่งขึ้น ทำให้ได้ระบบข้อมูลที่กระชับ ไม่สร้างความสับสน ตรวจสอบได้ง่าย อันจะทำให้ความผิดพลาดในตัวโปรแกรมลดลงด้วย

การสร้างข้อมูลให้มีลักษณะเป็นตัวอ้างอิงตำแหน่งหน่วยความจำโดยใช้ตัวชี้ (pointer) เป็นอีกคุณสมบัติหนึ่งที่มีส่วนช่วยให้การทำงานของโปรแกรมง่าย และสะดวกมากยิ่งขึ้น เนื่องจากเป็นข้อมูลที่อ้างอิงถึงหน่วยความจำของข้อมูลอื่น ๆ ทำให้การปรับเปลี่ยนข้อมูลที่ถูกอ้าง

จึง ส่งผลถึงข้อมูลที่ยังข้อมูลดังกล่าวนั้นเปลี่ยนแปลงไปด้วย ทำให้ประหยัดขั้นตอนในการปรับปรุงข้อมูล อีกทั้ง เนื่องจากการที่ยังหน่วยความจำ ทำให้การเปลี่ยนจุดที่ชี้ทำได้ง่ายกว่า และใช้หน่วยความจำน้อยกว่า

โดยจากคุณสมบัติดังที่ได้กล่าวมา ทำให้ Visual C++ เหมาะสมในการนำมาพัฒนาโปรแกรมได้อย่างมีประสิทธิภาพ กล่าวคือ ทั้งในด้านการนำเข้าข้อมูล ที่เป็นการทำงานบนระบบปฏิบัติการ Windows ซึ่งสะดวกในการเลือกเพิ่มข้อมูลที่ต้องการใช้ได้อย่างถูกต้อง ในขณะที่ด้านการแสดงผลนั้น ก็สามารถแสดงผลได้ทางหน้าต่างแสดงผลทันที ไม่จำเป็นต้องใช้โปรแกรมอื่นในการเปิดดู ซึ่งสร้างความสะดวกและคล่องตัวในการทำงานให้แก่ผู้ใช้งาน โดยประสิทธิภาพในการประมวลผลไม่แตกต่างไปจากเดิมมากนัก

### 3.2 การเลือกใช้โครงสร้างข้อมูล

โครงสร้างของข้อมูลที่นำมาใช้ในการพัฒนาโปรแกรมจะแบ่งออกได้เป็นประเภทหลัก ๆ ดังนี้คือ

1.) โครงสร้างข้อมูลแบบแถวลำดับ(Array)<sup>(28)</sup> เป็นการจัดเก็บข้อมูลชนิดเดียวกันไว้ด้วยกัน โดยมีการเรียงลำดับข้อมูล โดยใช้เลขลำดับของข้อมูลเป็นตัวอ้างอิงถึงสมาชิกแต่ละตัว การจัดเก็บข้อมูลลักษณะนี้หากรู้จำนวนสมาชิกที่แน่นอน ก็จะต้องมีการประกาศของเนื้อที่ของหน่วยความจำไว้สำหรับการจัดเก็บได้ตั้งแต่เริ่มต้น แต่หากเป็นการใช้กับข้อมูลที่มีจำนวนสมาชิกเปลี่ยนแปลงไป ก็จะต้องทำการประกาศให้จองหน่วยความจำในลักษณะเป็นพลวัต คือสามารถเพิ่มหรือลดจำนวนหน่วยความจำได้ ตามลักษณะการทำงาน เพื่อให้มีหน่วยความจำเพียงพอและเหมาะสมกับสภาพที่แท้จริง โดยในด้านหลักแล้ว ข้อมูลลักษณะที่เป็นแบบแถวลำดับนี้จะนำมาใช้กับการคำนวณข้อมูลที่เป็นเมตริกซ์ เนื่องจากในการคำนวณสามารถอ้างอิงถึงสมาชิกแต่ละตัวได้ง่ายและสะดวก ทำให้การคำนวณเกี่ยวกับเมตริกซ์ทำได้เร็วยิ่งขึ้น ลักษณะของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้แสดงในรูปที่ 3.1 โดยแต่ละประเภทของข้อมูลที่นำมาเก็บแบบแถวลำดับ ก็จะใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำแตกต่างกัน โดยทุกสมาชิกจะมีเลขตำแหน่งหน่วยความจำกำกับไว้เรียงต่อกันไป

2.) โครงสร้างข้อมูลแบบลิงค์ลิสต์(Link-List)<sup>(28)</sup> เป็นโครงสร้างข้อมูลที่ใช้ตัวชี้(pointer) เป็นตัวต่อเชื่อมระหว่างข้อมูลต่าง ๆ ในชุดข้อมูลเดียวกัน โดยจากการใช้ตัวชี้เป็นส่วนต่อเชื่อมข้อมูลนี้ ทำให้การเปลี่ยนลำดับของข้อมูลที่จัดเก็บไว้สามารถเปลี่ยนแปลงได้ง่าย อีกทั้งการเพิ่มหรือลดจำนวนของข้อมูลสามารถทำได้สะดวกกว่าข้อมูลแบบแถวลำดับ แต่การค้นหาข้อมูลที่



เป็นสมาชิกจะทำในลักษณะเดียวกัน คือต้องเรียงลำดับของข้อมูลจากสมาชิกตัวแรกเรื่อยไปจนถึงสมาชิกตัวสุดท้ายเหมือนกัน โดยโครงสร้างข้อมูลในลักษณะนี้จะเหมาะใช้กับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงของสมาชิกภายในบ่อยครั้ง ลักษณะของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้แสดงในรูปที่ 3.2 ซึ่งแต่ละสมาชิกในลิงคิสต์ จะประกอบด้วยส่วนที่เก็บค่าข้อมูลของสมาชิก และมีส่วนที่จะเก็บค่าตำแหน่งที่ชี้ไปยังหน่วยความจำของสมาชิกตัวต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงตัวสุดท้าย ซึ่งส่วนที่เก็บตำแหน่งสมาชิกตัวถัดไปจะเป็น 0 หรือ NULL

### 3.) โครงสร้างข้อมูลแบบต้นไม้เชิงตัวเลขสลับ(ADT : Alternate Digital Tree)<sup>(28)</sup>

เป็นโครงสร้างข้อมูลที่เกิดจากความต้องการจัดเก็บความสัมพันธ์ของจุดคู่ลำดับข้อมูลให้มีความสัมพันธ์กัน เพื่อให้ง่ายต่อการค้นหาจุดข้อมูลที่ต้องการ ลักษณะจะคล้ายการจัดเก็บข้อมูลแบบโครงข่ายข้อมูลทวิภาค(Binary Tree) โดยแต่ละข้อมูลจะมีข้อมูลอื่นมาต่อเชื่อมด้วยสองสาย โดยเงื่อนไขที่จะกำหนดว่าจะจัดเก็บข้อมูลที่ด้านใดของข้อมูลนั้น พิจารณาจากเงื่อนไขที่แตกต่างกันไป เช่น พิจารณาจากค่าของข้อมูลที่จะจัดเก็บว่ามีค่าน้อยกว่าหรือมากกว่าค่าข้อมูลของแม่ข่าย โดยหากมีค่าน้อยกว่าให้จัดเก็บด้านซ้าย ถ้ามากกว่าให้จัดเก็บด้านขวา เป็นต้น ในขณะที่การจัดเก็บข้อมูลแบบ ADT นี้จะพิจารณาจากเงื่อนไขของการวางตำแหน่งของจุด และพื้นที่ที่จุดข้อมูลครอบครองอยู่ โดยพิจารณาตามลำดับการจัดเก็บจุดข้อมูล นั่นคือ จุดข้อมูลที่มีการจัดเก็บในลำดับต้นจะมีพื้นที่ในการครอบครองมากกว่า จุดข้อมูลที่มีการจัดเก็บในลำดับหลัง ๆ ลักษณะของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้แสดงในรูปที่ 3.3 กล่าวคือ เริ่มจากจุดแรกที่จัดเก็บไว้ในโครงสร้างข้อมูล จะถือว่าครอบครองพื้นที่ทั้งหมด เมื่อมีการเพิ่มจุดข้อมูลต่อไป พื้นที่ที่จุดข้อมูลเริ่มต้นจะครอบครองจะถูกแบ่งให้เล็กลงและให้จุดข้อมูลใหม่ครอบครอง โดยพื้นที่ครอบครองของจุดข้อมูลเริ่มต้นยังไม่เปลี่ยนแปลง ดังเช่นจุดที่สองที่เพิ่มเข้ามาในรูป 3.3 จะมีพื้นที่ครอบครองเป็นด้านซ้ายของพื้นที่ทั้งหมดและตัวชี้ทางด้านซ้ายของจุดหนึ่ง ก็จะอ้างอิงไปยังข้อมูลของจุดที่สอง ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาเพิ่มจุดข้อมูลที่สาม ซึ่งอยู่ในพื้นที่ของจุดที่สอง พื้นที่ครอบครองของจุดที่สาม ก็จะเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ครอบครองของจุดที่สอง ซึ่งจะเท่ากับพื้นที่หนึ่งในสี่ของพื้นที่ทั้งหมดที่อยู่ด้านบนซ้าย เช่นนี้ไปจนกระทั่งหมดจุดที่พิจารณา โดยทุกจุดจะมีพื้นที่ครอบครองของตัวเอง และนำมาใช้ในการค้นหาจุดที่อยู่ในบริเวณที่ต้องการ โดยพิจารณาจุดจากพื้นที่ที่ครอบครองจะต้องซ้อนทับกับบริเวณที่ต้องการ ในกรณีนี้ที่จุดใดพื้นที่ไม่ทับซ้อนก็จะไม่พิจารณาจุดข้อมูลนั้นรวมถึงจุดข้อมูลที่อยู่เป็นบริวารทั้งหมดด้วย ซึ่งช่วยให้สามารถจำกัดการค้นหาจุดให้รวดเร็วยิ่งขึ้นเนื่องจากยิ่งพื้นที่สนใจมีขนาดเล็กเท่าใด จำนวนจุดที่ไม่ต้องพิจารณาก็ยิ่งมีมากขึ้น



### 3.3 ชนิดของข้อมูล

ชนิดของข้อมูลที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรมนั้น สามารถจำแนกเป็นชนิดหลัก ๆ ที่มีความสำคัญต่อโปรแกรม ดังต่อไปนี้

CPointData : จะเก็บข้อมูลของจุดต่อของชิ้นส่วน โดยประกอบด้วยข้อมูลย่อยได้แก่

- 1.) ค่าพิกัด x, y ของจุดต่อ
- 2.) ค่าระยะห่างของจุดต่อ ที่จะนำมาใช้ในการพิจารณาการเพิ่มจุด โดยจุดต่อที่จะเพิ่มเข้ามาใหม่ จะต้องมียุทธศาสตร์ระหว่างจุดต่อไม่ต่ำกว่าระยะห่างของจุดต่อเดิมที่อยู่รอบจุดต่อที่จะเพิ่มเข้ามาใหม่
- 3.) ลิงค์ลิสต์ของเส้นขอบที่เชื่อมกับจุดต่อนี้ทั้งหมด ซึ่งนำมาใช้ทั้งในส่วนของการสร้างชิ้นส่วนและการหาค่าความคลาดเคลื่อนของจุดต่อ โดยจะเรียงลำดับในทิศทวนเข็มนาฬิกา
- 4.) ลิงค์ลิสต์ของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่จุดต่อนี้เป็นจุดยอด ซึ่งนำมาใช้ในการหาค่าคำตอบที่ดีกว่าด้วยวิธีการฟื้นตัวเป็นหย่อม (Patch Recovery)
- 5.) ข้อมูลในระบบ ADT ใช้ในการเก็บข้อมูลของจุดต่อที่จะนำมาใช้ในการค้นหาจุดที่ต้องการ

CSegmentData : จะเป็นข้อมูลของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดต่อสองจุดใด ๆ ซึ่งจะเป็นเส้นของของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม โดยจะประกอบด้วยข้อมูลย่อยดังนี้

- 1.) ตัวชี้ที่จะชี้ไปยังจุดต่อที่เป็นจุดปลายของเส้นตรง
- 2.) ตัวชี้ที่จะชี้ไปยังชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่อยู่ทั้งด้านซ้ายและขวาของเส้นตรง ซึ่งมีเส้นตรงนี้เป็นด้านประกอบของสามเหลี่ยม โดยในกรณีที่เส้นตรงที่ขอบของปัญหา จะมีค่าตัวชี้ไปยังสามเหลี่ยมด้านซ้ายเป็นศูนย์ นั่นคือไม่มีสามเหลี่ยมด้านซ้ายนั่นเอง

- 3.) ตัวแปรที่จะเป็นตัวระบุว่า เส้นตรงเป็นเส้นตรงที่ขอบหรือเป็นเส้นตรงที่อยู่ในขอบเขตปัญหา
- 4.) ตัวแปรที่เก็บค่ารัศมีของเส้นเชื่อมจุดต่อในกรณีที่เป็นเส้นโค้ง โดยจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อเป็นเส้นตรง และมีค่าเป็นบวกเมื่อจุดศูนย์กลางของเส้นโค้งอยู่ด้านซ้ายของเส้นเชื่อม และมีค่าเป็นลบเมื่อจุดศูนย์กลางของเส้นโค้งอยู่ด้านขวาของเส้นเชื่อม ดังนั้น ในกรณีที่ต้องการสร้างเส้นโค้งที่มีความยาวมากกว่าครึ่งวงกลมจำเป็นต้องแบ่งเส้นโค้งดังกล่าวออกเป็นสองส่วน
- 5.) ตัวแปรที่เก็บค่าของจำนวนที่จะต้องแบ่งเส้นเชื่อมจุดต่อออกเป็นเส้นย่อย ซึ่งจะมีค่าเฉพาะกับเส้นเชื่อมที่เป็นเส้นขอบของปัญหาเท่านั้น ในขณะที่เส้นเชื่อมจุดต่อที่อยู่ภายในขอบเขตปัญหาจะมีค่าเท่ากับศูนย์
- 6.) ตัวแปรที่เก็บค่าคุณสมบัติเกี่ยวกับจุดรองรับของเส้นเชื่อม ซึ่งจะถูกกำหนดไว้โดยเฉพาะบริเวณขอบของปัญหา ซึ่งจะเป็นได้ทั้งที่รองรับเป็นจุดที่ปลายของเส้นเชื่อม และที่รองรับแบบตลอดทั้งเส้นเชื่อม
- 7.) ตัวแปรที่เก็บค่าคุณสมบัติเกี่ยวกับแรงที่มากระทำต่อเส้นเชื่อม ซึ่งจะถูกกำหนดไว้โดยเฉพาะบริเวณขอบของปัญหาเช่นกัน ซึ่งก็เป็นได้ทั้งที่เป็นแรงกระทำแบบเป็นจุดที่ปลายเส้นเชื่อม และแรงกระทำแบบตลอดเส้นเชื่อม

CTriangleData : จะเป็นข้อมูลของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่จะสร้างขึ้น โดยจะประกอบด้วยข้อมูลย่อยดังนี้

- 1.) ตัวชี้ที่จะชี้ไปยังจุดต่อที่เป็นจุดยอดทั้งสามของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม
- 2.) ตัวชี้ที่จะชี้ไปยังเส้นตรงทั้งสามที่เป็นด้านประกอบของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม ซึ่งทำให้สามารถอ้างอิงถึงสามเหลี่ยมที่อยู่ติดกันได้ง่ายขึ้น

CUPCGAnalyze : จะเป็นข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการสร้างเมตริกซ์ โดยสร้างขึ้นจากโครงข่ายของชิ้นส่วนทั้งหมด โดยจะประกอบด้วยข้อมูลย่อยซึ่งแสดงความสัมพันธ์ในรูปที่ 3.4 ดังนี้

- 1.) Vector : เป็นข้อมูลที่จำลองโครงสร้างข้อมูลแบบแถวลำดับลักษณะแถวเดียว ทำให้สามารถอ้างอิงได้โดยตรงกับเลขลำดับของข้อมูล
- 2.) Hor\_ele : เป็นข้อมูลที่เก็บข้อมูลในเมตริกซ์ของระบบสมการในแนวนอน โดยจะเก็บทั้งหมายเลขสมการและค่าของข้อมูลในตำแหน่งนั้น ๆ และมีตัวชี้ที่จะเชื่อมโยงไปยังข้อมูลอื่น ๆ ที่อยู่ในแถวเดียวกัน
- 3.) Ver\_ele : เป็นข้อมูลที่เก็บข้อมูลในเมตริกซ์ของระบบสมการในแนวตั้ง โดยจะเป็นตัวชี้ที่จะชี้ไปยังข้อมูลใน hor\_ele ที่มีและเก็บค่าของหมายเลขสมการของข้อมูลตำแหน่งนั้นไว้ พร้อมทั้งมีตัวชี้ที่จะชี้ไปยังข้อมูลที่อยู่ในสมการเดียวกันด้วย ซึ่งข้อมูลที่เก็บในรูปแบบนี้จะทำให้ง่ายและสะดวกเมื่อต้องการอ้างอิงถึงสมาชิกในการคูณกับข้อมูลเวกเตอร์
- 4.) Dia\_ele : เป็นข้อมูลที่เก็บข้อมูลที่อยู่ในแนวทแยงของเมตริกซ์ ที่เป็นเมตริกซ์สมมาตร โดยเก็บค่าหมายเลขของแถวและค่าของสมาชิกในตำแหน่งนั้น รวมทั้งมีตัวชี้ที่จะชี้ไปยัง hor\_ele ซึ่งเป็นสมาชิกที่อยู่ในแนวนอนและ ver\_ele ซึ่งเป็นสมาชิกในแนวตั้งของเมตริกซ์ที่สัมพันธ์กันด้วย
- 5.) Symmat : เป็นข้อมูลที่จำลองข้อมูลที่เป็นเมตริกซ์สมมาตร โดยจะเก็บค่าของเมตริกซ์ในแนวทแยงเป็นหลักในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ของ dia\_ele ซึ่งจะทำให้สามารถเข้าถึงสมาชิกในแต่ละแถวได้ง่าย

และนอกจากชนิดของข้อมูลที่กล่าวไปแล้วทั้งหมดข้างต้นนี้ ก็จะมีข้อมูลชนิดอื่นอีกที่ใช้ แต่ละเว้นไว้ไม่กล่าวถึงในที่นี้เนื่องจากสามารถศึกษาทำความเข้าใจได้เอง

### 3.4 โครงสร้างและลำดับการทำงานของโปรแกรม

โครงสร้างการทำงานของโปรแกรม แสดงในแผนภูมิสายงานตามรูปที่ 3.5 – 3.9 โดยมีรายละเอียดตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

สำหรับโปรแกรมหลัก (รูปที่ 3.5) เริ่มต้นจากการอ่านข้อมูลจากแฟ้มข้อมูลนำเข้า ซึ่งจะประกอบด้วย เส้นเชื่อมจุดต่อที่ขอบของปัญหา รวมถึงแรงที่กระทำและลักษณะของจุดรองรับของแต่ละเส้นเชื่อมจุดต่อที่ขอบของปัญหาด้วย โดยข้อมูลของตำแหน่งของจุดต่อจะเก็บไว้ในลิสต์ของ pPointList ในขณะที่ข้อมูลของเส้นเชื่อมจุดต่อต่าง ๆ พร้อมทั้งข้อมูลแรงกระทำและที่รองรับจะเก็บไว้ในลิสต์ของ pSegmentList จากนั้นจะเป็นการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมโดยเริ่มต้นด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าแล้วเก็บชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ได้ไว้ในลิสต์ของ pTriangleList จากนั้นจะเป็นการพิจารณาเพื่อสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมให้ละเอียดยิ่งขึ้นโดยจะพิจารณาการเพิ่มจุดของแต่ละชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใน pTriangleList แล้วเก็บค่าของจุดต่อที่เพิ่มขึ้นไว้ใน InsertPointList จากนั้นนำแต่ละสมาชิกใน InsertPointList มาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการแทรกจุดและแลกเปลี่ยน และเมื่อสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเสร็จแล้วจะเข้าสู่ขั้นตอนของการวิเคราะห์หาค่าหน่วยแรงและค่าการกระจัดของจุดต่อ โดยการแสดงผลจะสามารถแสดงได้ทางหน้าต่างแสดงผลของโปรแกรม จากนั้นจะเป็นการนำผลค่าความคลาดเคลื่อนดังกล่าวมาพิจารณาว่ายังมีค่าเกินกว่าที่กำหนดหรือไม่ ถ้าเกินก็จะทำการปรับปรุงตำแหน่งของจุดที่ขอบของปัญหาและระยะห่างของจุดต่อภายในใหม่ แล้วย้อนกลับไปเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอีกครั้ง จนกระทั่งได้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าที่กำหนดจึงสิ้นสุดการทำงาน

ในส่วนของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม(รูปที่ 3.6) จะประกอบด้วยวิธีการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสองส่วน ได้แก่ การสร้างด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าและด้วยวิธีการแลกเปลี่ยน โดยจากข้อมูลจุดต่อและเส้นเชื่อมที่มี นำมาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการฟรอนต์เดินหน้าและเก็บข้อมูลชิ้นส่วนสามเหลี่ยมไว้ใน pTriangleList จากนั้นเป็นการพิจารณาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเพิ่มโดยเริ่มต้นด้วยการพิจารณาเพิ่มจุดต่อในชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มี และเก็บค่าจุดต่อดังกล่าวไว้ใน InsertPointList จากนั้นนำจุดต่อใน InsertPointList มาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการแลกเปลี่ยนจนกระทั่งหมด ก็ทำการพิจารณาการเพิ่มจุดอีกครั้งว่ายังมีสามเหลี่ยมใดใน pTriangleList ที่จะสามารถแทรกจุดต่อเพิ่มได้อีกหรือไม่ และเก็บไว้ใน InsertPointList จนกระทั่งไม่มีการแทรกจุดต่อเพิ่มได้อีก จึงจะเสร็จสิ้นขั้นตอนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม คืบการควบคุมให้แก่โปรแกรมหลัก

ส่วนของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้า(รูปที่ 3.7) เริ่มต้นจากการสร้างลิสต์ของฟรอนต์ซึ่งเป็นเส้นเชื่อมจุดต่อที่ขอบของปัญหา จากนั้นพิจารณาทีละเส้นเชื่อมในลิสต์ของฟรอนต์ นำมาหาจุดต่อที่เหมาะสมของเส้นเชื่อมเพื่อสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม ซึ่งจุดต่อที่เหมาะสมสำหรับแต่ละเส้นเชื่อม จะได้แก่จุดต่อที่สามารถนำมาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมได้ โดยที่ไม่มีจุดต่ออื่นใดอยู่ภายในชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นเลย เมื่อได้จุดต่อดังกล่าว สร้างเส้นเชื่อมใหม่ระหว่างจุดต่อที่หัวและปลายของฟรอนต์กับจุดต่อที่หาได้ แล้วเพิ่มเส้นเชื่อมใหม่เหล่านี้เข้าไว้ไว้ในลิสต์ของฟรอนต์ด้วยเพื่อนำมาพิจารณาหาจุดต่อที่เหมาะสมต่อไป เพื่อนำมาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม และเก็บข้อมูลชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นไว้ใน pTriangleList จนกระทั่งไม่มีเส้นเชื่อมเหลืออยู่ภายในลิสต์ของฟรอนต์ จึงจะเป็นการเสร็จสิ้นขั้นตอน

ส่วนของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการแลกเปลี่ยน(รูปที่ 3.8) เริ่มต้นด้วยการพิจารณาแต่ละจุดต่อที่เพิ่มเข้ามาเก็บไว้ใน InsertPointList ทำการหาว่าชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่จุดต่อใหม่ดังกล่าวอยู่ภายใน จากนั้นทำการสร้างเส้นเชื่อมระหว่างจุดต่อใหม่กับจุดยอดทั้งสามของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมซึ่งจะทำให้ได้จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใหม่เพิ่มขึ้นอีกสองชิ้น ส่วน เก็บข้อมูลเส้นเชื่อมใหม่ไว้ใน pSegmentList และข้อมูลชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใหม่ไว้ใน pTriangleList จากนั้นให้ตัวแปร pStackTriangle ซึ่งเป็นตัวแปรแบบตัวชี้ชี้ไปยังชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งสามที่ได้มา แล้วนำมาพิจารณาทีละชิ้นส่วน โดยจะพิจารณาร่วมกับชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่อยู่ติดกันและอยู่ตรงข้ามกับจุดต่อใหม่ที่แทรกลงไป ซึ่งการพิจารณาจะพิจารณาว่าชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ได้มาใหม่นั้นสอดคล้องกับคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเนย์หรือไม่ซึ่งแสดงขั้นตอนการพิจารณาในรูปที่ 3.9 ซึ่งหากปรากฏว่าไม่สอดคล้อง จะต้องทำการแลกเปลี่ยนชิ้นส่วนเส้นเชื่อมที่เป็นด้านร่วมของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งสองใหม่ และเก็บชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งสองนี้เพิ่มไว้ใน pStackTriangle เพื่อนำมาพิจารณาคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเนย์ต่อไป จนกระทั่งหมดทุกชิ้นส่วนสามเหลี่ยมใน pStackTriangle จึงเป็นการสิ้นสุดขั้นตอน และคืนการควบคุมให้แก่โปรแกรมหลัก

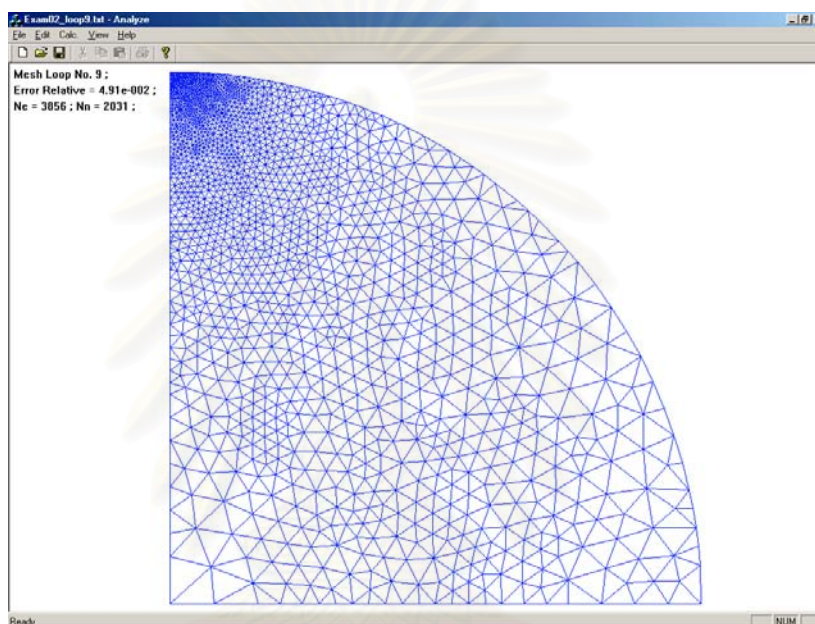


## การแสดงผล

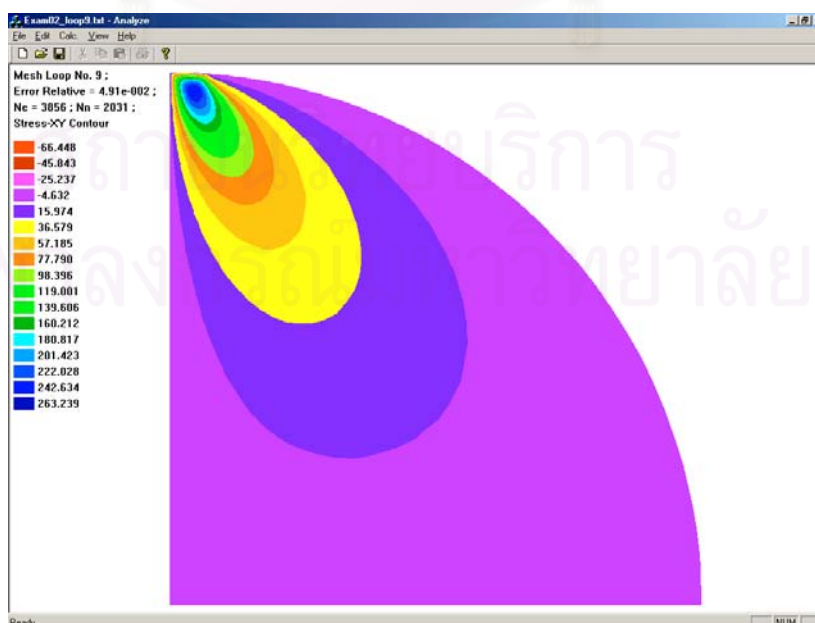
การแสดงผลของโปรแกรม จะมีใน 2 ลักษณะ ได้แก่

1.) การแสดงผลทางหน้าต่างแสดงผลของโปรแกรม ซึ่งผลที่แสดงไว้มีดังนี้

### 1.1 โครงข่ายสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นของปัญหา



### 1.2 ค่าหน่วยแรงของปัญหาเป็นแถบสี(color contour)ของหน่วยแรง

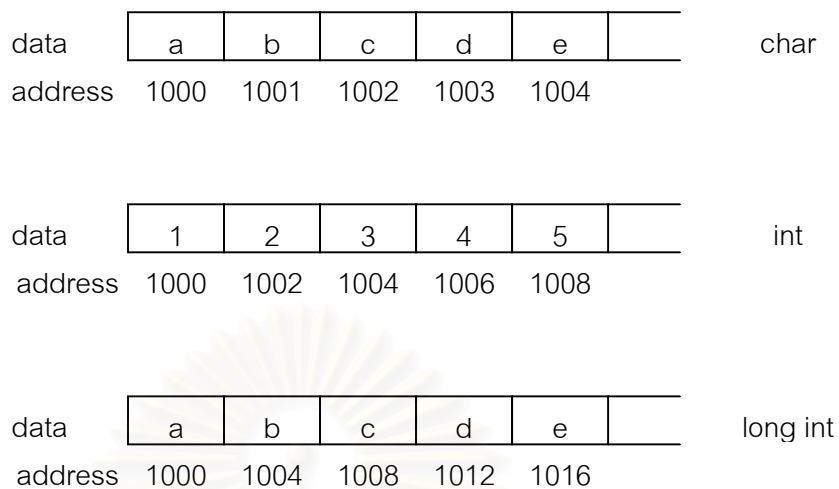


- 2.) การแสดงผลทางแฟ้มข้อมูลที่เป็นตัวหนังสือที่สามารถเปิดอ่านได้ ซึ่งแสดงตำแหน่งของจุดต่อ รวมถึงความสัมพันธ์ระหว่างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมกับจุดต่อ และผลการคำนวณของแต่ละจุดต่อ หมายเลขจุดต่อ การกระจัด หน่วยแรง และความคลาดเคลื่อนในจุดต่อนั้น ๆ รวมทั้งแสดง รวมทั้งสามารถนำข้อมูลในแฟ้มมาแสดงผลได้ทางหน้าจอของโปรแกรมได้ด้วย

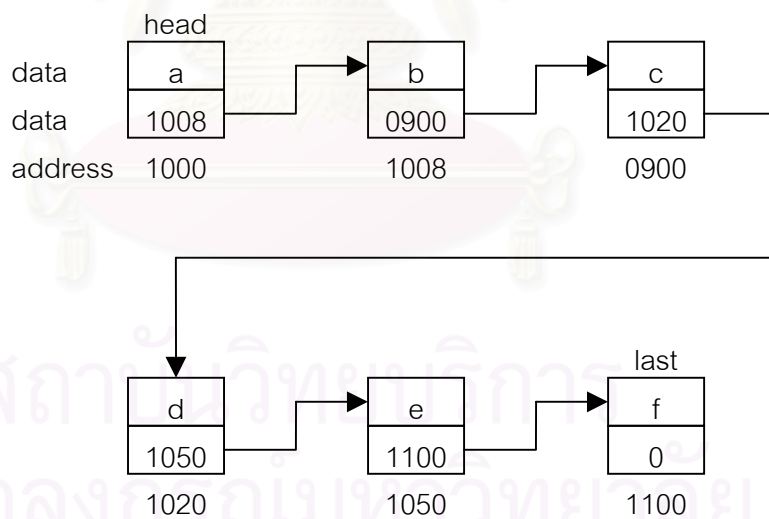


สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

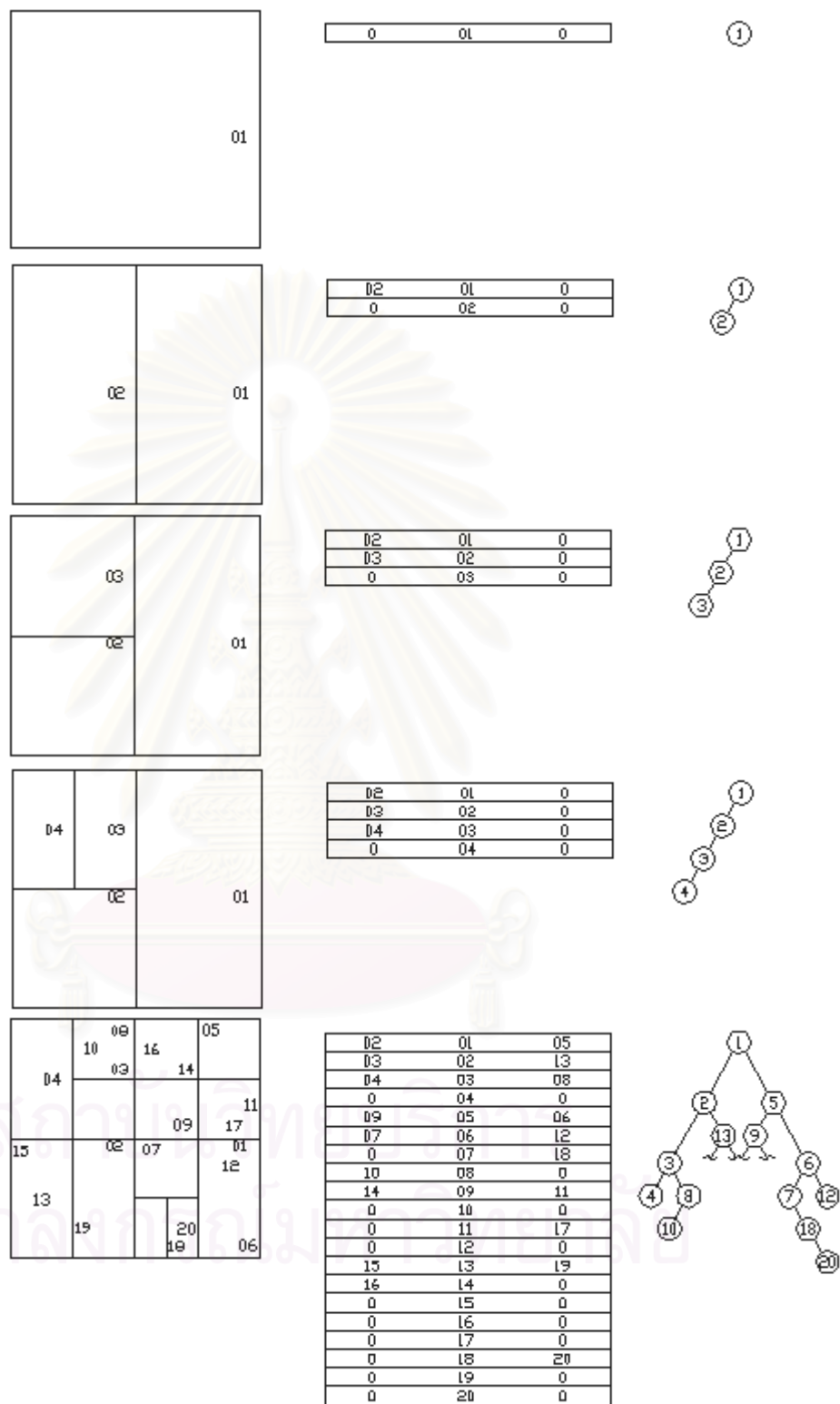




รูปที่ 3.1 โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ

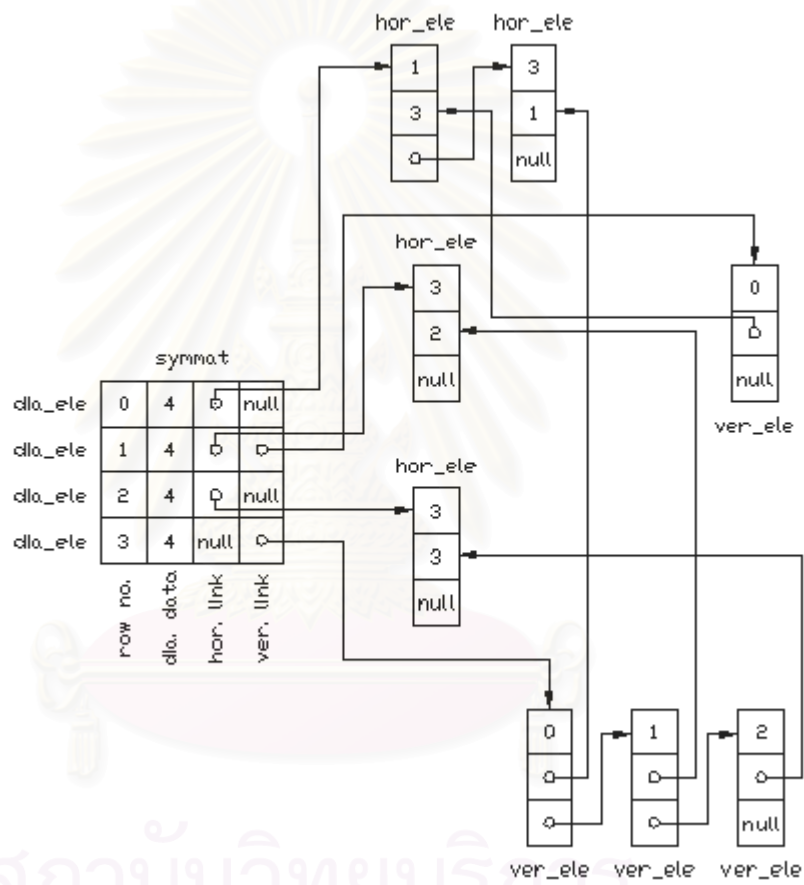


รูปที่ 3.2 โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงค์ลิสต์

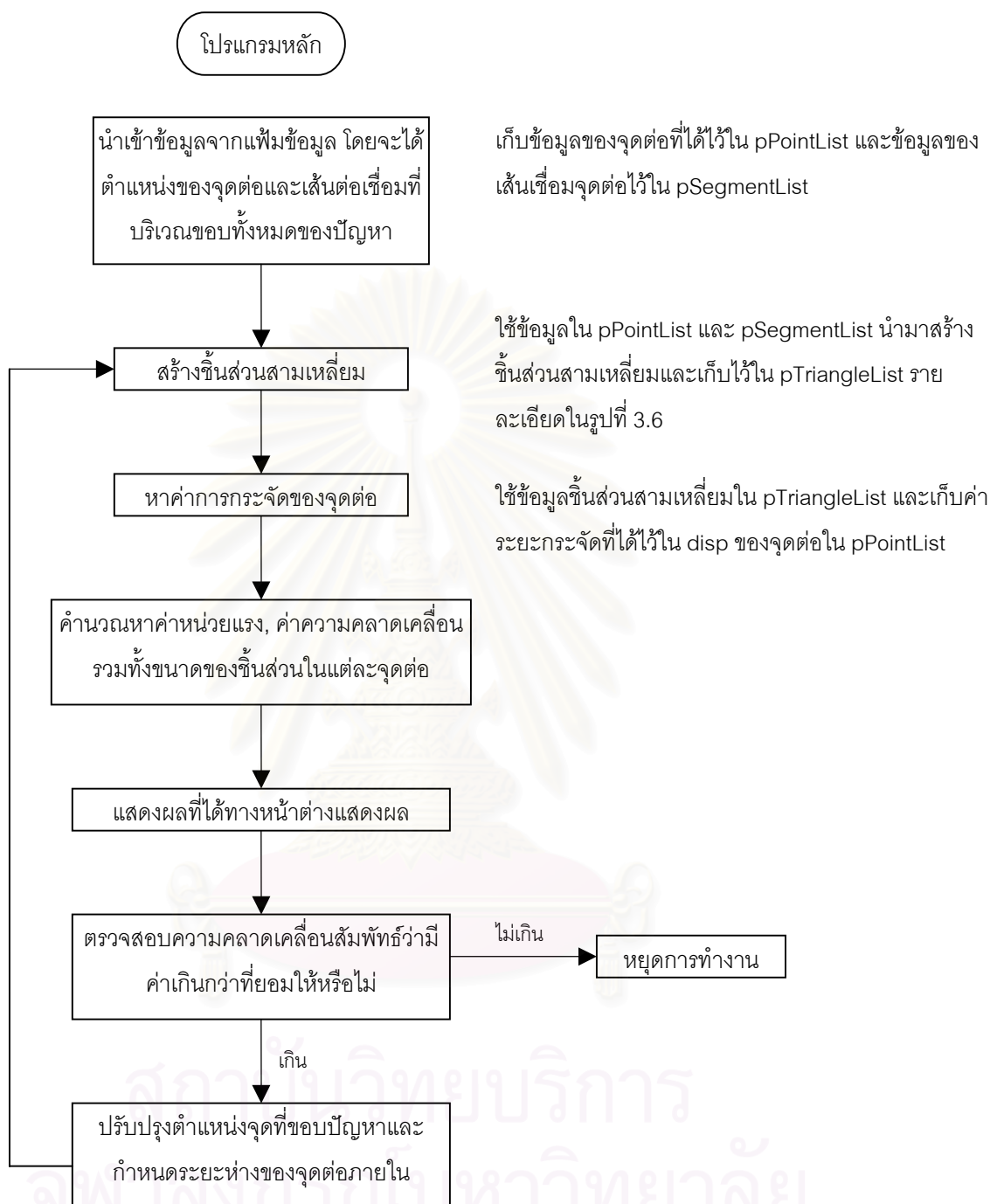


รูปที่ 3.3 การจัดเก็บข้อมูลในโครงสร้างข้อมูลแบบ ADT

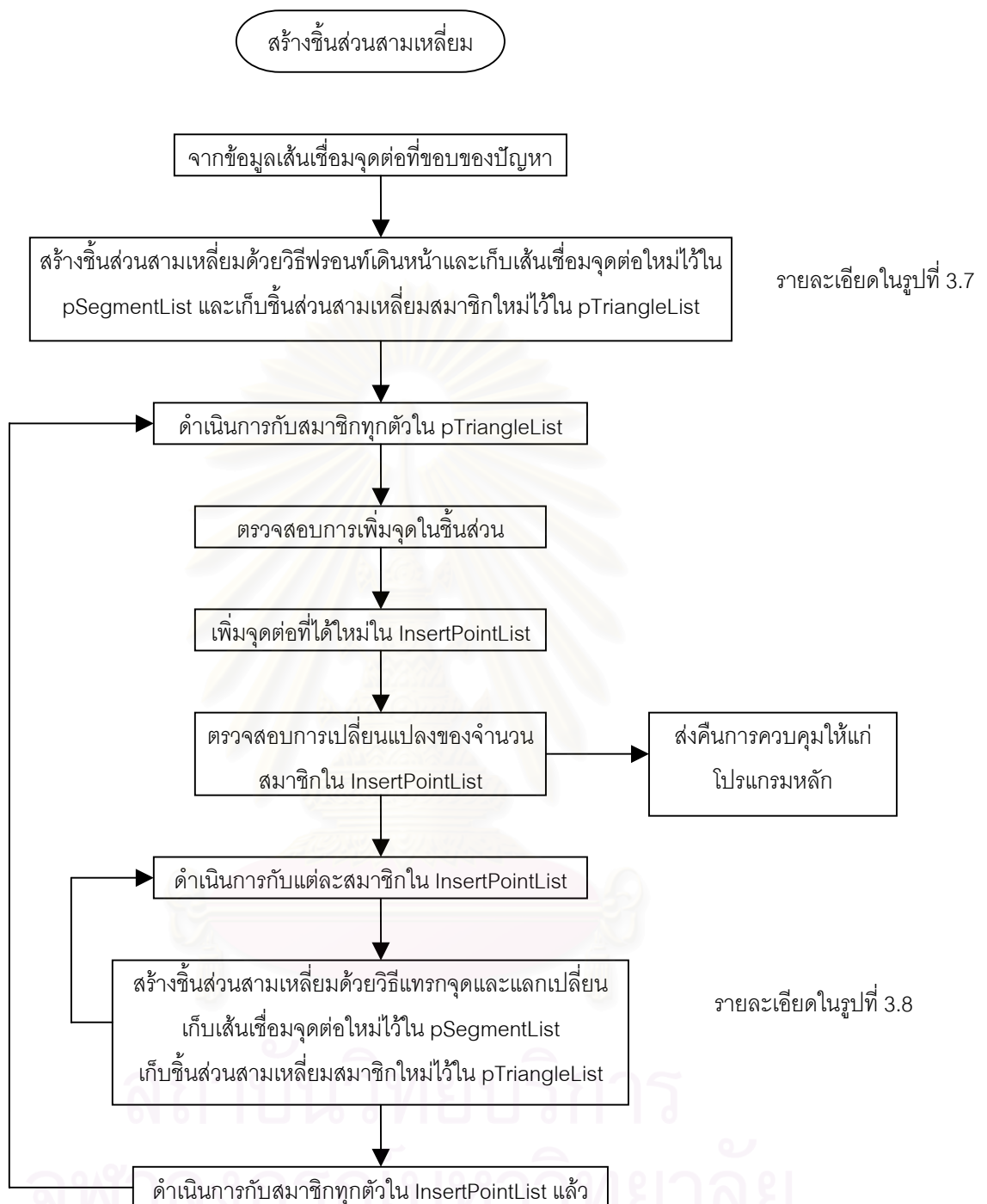
	0	1	2	3
0	4	3		1
1		4		2
2			4	3
3				4



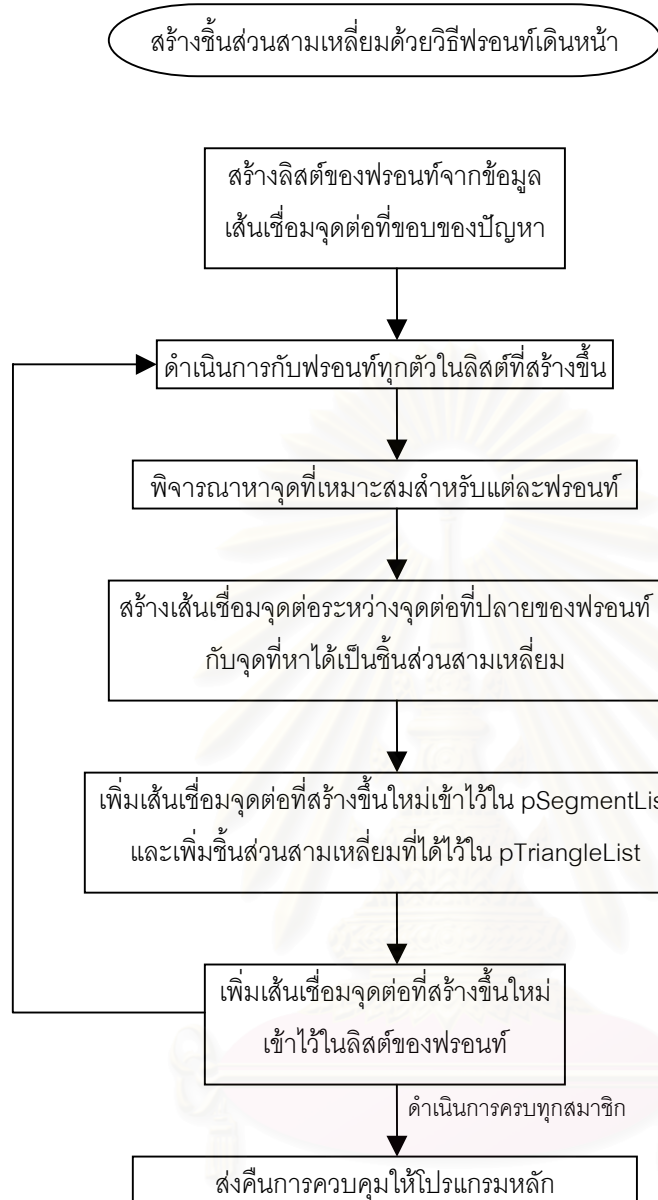
รูปที่ 3.4 การจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์



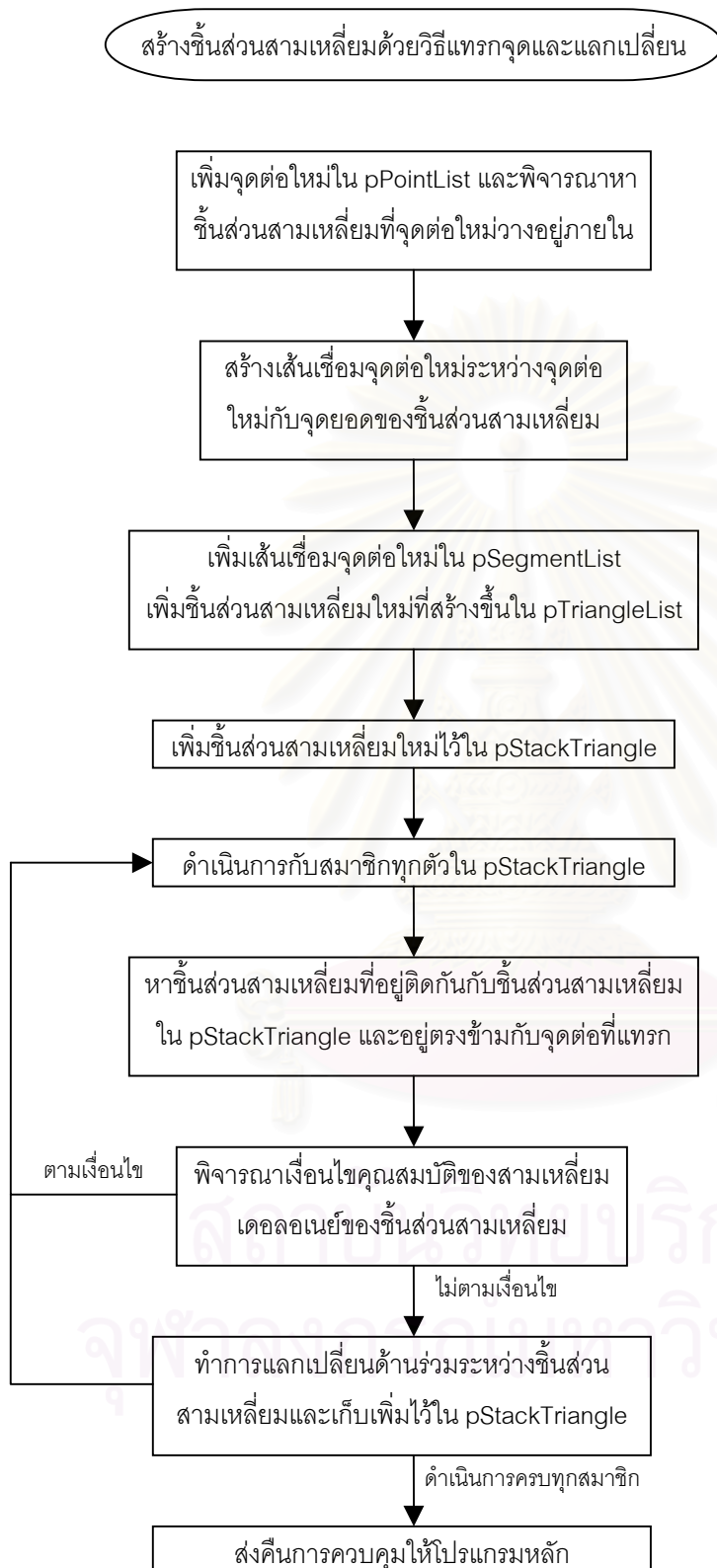
รูปที่ 3.5 แผนภูมิสายงานของโปรแกรมหลัก



รูปที่ 3.6 แผนภูมิสายงานของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม



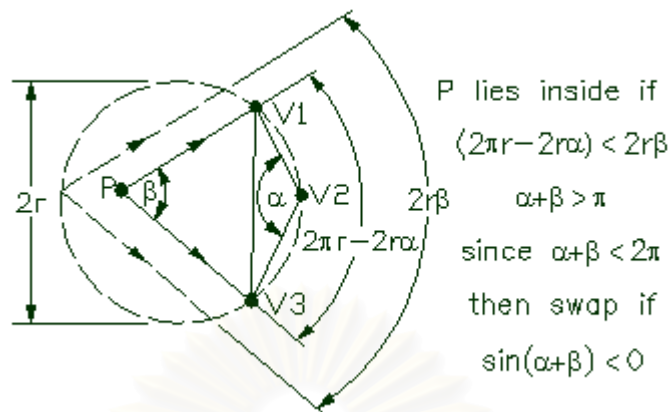
รูปที่ 3.7 แผนภูมิสายงานของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้า



รายละเอียดในรูปที่ 3.9

รูปที่ 3.8 แผนภูมิสายงานของการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีแทรกจุดและแลกเปลี่ยน





พิจารณาค่า :  $P(x_p, y_p), V_1(x_1, y_1)$   
 $V_2(x_2, y_2), V_3(x_3, y_3)$

หาค่า :  
 $x_{13} = x_1 - x_3, y_{13} = y_1 - y_3$  ;  $x_{23} = x_2 - x_3, y_{23} = y_2 - y_3$   
 $x_{1p} = x_1 - x_p, y_{1p} = y_1 - y_p$  ;  $x_{2p} = x_2 - x_p, y_{2p} = y_2 - y_p$

หาค่า :  $\text{COSA} = x_{13} x_{23} + y_{13} y_{23}$   
 $\text{COSB} = x_{2p} x_{1p} + y_{2p} y_{1p}$

ถ้า  $\text{COSA} \geq 0$  และ  $\text{COSB} \geq 0$

ถ้า  $\text{COSA} < 0$  และ  $\text{COSB} < 0$

หาค่า :  $\text{SINA} = x_{13} y_{23} - x_{23} y_{13}$   
 $\text{SINB} = x_{2p} y_{1p} - x_{1p} y_{2p}$   
 $\text{SINAB} = \text{SINA} * \text{COSB} + \text{SINB} * \text{COSA}$

ถ้า  $\text{SINAB} < 0$  → ไม่แลกเปลี่ยนชิ้นส่วนด้านร่วม  
 ถ้า  $\text{SINAB} \geq 0$  → แลกเปลี่ยนชิ้นส่วนด้านร่วม

รูปที่ 3.9 แผนภูมิสายงานของการพิจารณาเงื่อนไขการแลกเปลี่ยน

## บทที่ 4

### ตัวอย่างการวิเคราะห์

เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพและความน่าเชื่อถือของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรมที่พัฒนาจากเดิม จึงได้เลือกตัวอย่างของงานวิจัยเดิมโดยแต่ละตัวอย่างจะทำการวิเคราะห์ด้วย 3 แนวทางคือ

- 1) แนวทางการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าร่วมกับวิธีแลกเปลี่ยน
- 2) แนวทางการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าเพียงอย่างเดียว
- 3) แนวทางการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าเพียงอย่างเดียว และเพิ่มการปรับปรุงโครงข่าย

เพื่อนำผลการวิเคราะห์มาเปรียบเทียบกัน ทั้งในส่วนของรูปร่างและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนภายในโครงข่าย การกระจายความคลาดเคลื่อนของปัญหาและค่าผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วย

#### 4.1 ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง

ในตัวอย่างที่ 1 นี้ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นบางขนาดอนันต์มีรูเจาะที่กึ่งกลางแผ่น และรับแรงดึงแผ่กระจายที่ปลายทั้ง 2 ด้าน เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีขนาดอนันต์จึงลดรูปให้มีขนาดนับได้ดังแสดงในรูปที่ 4.1.1 (ก.) คือมีขนาดกว้าง 20 ซม. ยาว 40 ซม. หนา 0.1 ซม. มีรูเจาะที่กึ่งกลางขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 ซม. รับแรงแผ่กระจายตามแนวยาวที่ปลายทั้งสองด้านขนาด 1000 กก.ต่อ ตร.ซม. วัสดุมีโมดูลัสยืดหยุ่น  $2 \times 10^6$  กก.ต่อ ตร.ซม. อัตราส่วนปัวซองส์เท่ากับ 0.3 สามารถสร้างแบบจำลองสำหรับวิเคราะห์ผลโดยอาศัยหลักสมมาตรได้ดังแสดงในรูป 4.1.1 (ข.)

เมื่อทำการกำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ของการวิเคราะห์มีค่าเป็น 0.01 โดยดำเนินการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัยนี้ได้ผลการวิเคราะห์ดังแสดงในรูปที่ 4.1.2 – 4.1.8 ซึ่งโครงข่ายชิ้นส่วนที่ได้ในแต่ละรอบมีรูปร่างชิ้นส่วนที่ค่อนข้างต่อเนื่องกันพอสมควร มีแนวทางการลดขนาดชิ้นส่วนที่ได้จากการตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนของแต่ละจุดต่อต่าง ๆ ในโครงข่ายเปรียบเทียบกับค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ที่ได้ โดยบริเวณที่มีค่า

ความคลาดเคลื่อนสูงก็จะมี การปรับขนาดมากโดยการเพิ่มจุดเข้าไปมาก เพื่อให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของโครงข่ายทั้งหมดมีค่าลดลงจนถึงระดับที่กำหนด

เมื่อพิจารณาถึงลักษณะการกระจายของค่าหน่วยแรงต่าง ๆ ที่ได้แสดงไว้ พบว่าลักษณะของเส้นขอบคอนทัวร์ในทุกโครงข่ายขึ้นส่วนมีความต่อเนื่องกันเป็นอย่างดีอันเป็นผลเนื่องจากการคำนวณหาหน่วยแรงที่จุดต่อด้วยการประมาณจากขึ้นส่วนที่อยู่โดยรอบ เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงของหน่วยแรงในแนว AB ดังแสดงในรูป 4.1.6 – 4.1.8 จะเห็นว่าได้ค่าในลักษณะที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำมากขึ้นเมื่อมีการปรับขนาดของโครงข่ายให้มีขนาดขึ้นส่วนที่ละเอียดมากขึ้น และในโครงข่ายสุดท้ายพบว่าคำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมาก พบว่าสำหรับหน่วยแรงในทิศทาง X นั้นในตำแหน่งหลังจากจุดสูงสุดของค่าหน่วยแรงของผลเฉลยแม่นยำตรงแล้วคำตอบที่ได้มีค่าต่ำกว่าค่าผลเฉลยแม่นยำตรงลงมาเล็กน้อย และลู่เข้าสู่ค่าศูนย์แทนเมื่อถึงจุดปลาย B เนื่องจากปัญหาที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้น เดิมเป็นปัญหาแผ่นบางที่มีขอบเขตเป็นอนันต์ แต่แบบการจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้เป็นแผ่นบางที่มีขอบเขตจำกัด ซึ่งสำหรับแผ่นบางขอบเขตอนันต์นั้นจะมีค่าหน่วยแรงในทิศทาง X ที่ตำแหน่งอนันต์มีแนวโน้มลดลงเรื่อย ๆ จนไปถึงค่าคงที่ค่าหนึ่งและคงที่ไปตลอด ในขณะที่สำหรับแผ่นบางที่มีขอบเขตจำกัดนั้นที่จุดปลายที่ขอบจะมีค่าหน่วยแรงในทิศทาง X เป็นศูนย์ และความแตกต่างกันในการทำงานเดียวกันนี้ ก็ส่งผลกระทบต่อหน่วยแรงในทิศทาง Y เช่นกัน โดยที่จุด B ค่าหน่วยแรงที่ได้มีค่าต่ำกว่าค่าจากผลเฉลยแม่นยำตรงเล็กน้อยเช่นกัน แต่เป็นผลกระทบที่เกิดในบริเวณแคบ ๆ ไม่มีผลกระทบมากเหมือนหน่วยแรงในทิศทาง X ในขณะที่ด้านของหน่วยแรงเฉือนจะไม่สามารถสังเกตเห็นได้เพราะมีค่าของคำตอบเท่ากันทั้งจากแผ่นบางขอบเขตอนันต์และแผ่นบางของเขตจำกัด

ในส่วนของผลการเปรียบเทียบกันระหว่างวิธีการสร้างขึ้นส่วนโดยใช้วิธีการแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า ด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าเพียงอย่างเดียวและด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าเพียงอย่างเดียวร่วมกับการปรับปรุงคุณภาพขึ้นส่วน ดังแสดงในรูปที่ 4.1.9 – 4.1.12

พบว่าจำนวนรอบในการวิเคราะห์ของสองวิธีแรกจะใกล้เคียงกันและได้รูปร่างของขึ้นส่วนใกล้เคียงกันพอสมควร โดยรวมแล้วขึ้นส่วนยังขาดความต่อเนื่องกันในบางบริเวณ แต่สำหรับวิธีที่สามจะให้รูปร่างขึ้นส่วนของโครงข่ายดีกว่า ในด้านความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ใกล้เคียงกันในทุกวิธี ด้านอัตราการลู่เข้าสู่ระดับค่าความคลาดเคลื่อนที่ต้องการในรูปที่ 4.1.11 พบว่าวิธีฟรอนต์เดินหน้าร่วมกับการปรับปรุงคุณภาพขึ้นส่วนจะมีอัตราการลู่เข้าที่ดีกว่าเนื่องจากสามารถเข้าสู่ค่าที่กำหนดได้ในจำนวนรอบที่น้อยกว่าอีกสองวิธี ขณะที่วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธี

พรอนต์เดินหน้ากับวิธีพรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวกันจะมีอัตราการใช้ที่ใกล้เคียงกัน ในส่วนของระยะเวลาที่ใช้ในการสร้างโครงข่ายขึ้นส่วนจากรูปที่ 4.1.12 ซึ่งพิจารณาอัตราส่วนของการใช้เวลาในแต่ละรอบเทียบกับเวลาที่ใช้ทั้งหมดในการทำงาน พบว่าวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีพรอนต์เดินหน้ามีอัตราส่วนการใช้เวลาในแต่ละรอบที่มีความละเอียดมากขึ้นเทียบกับเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการวิเคราะห์ต่ำกว่าอีกสองวิธี

#### 4.2 ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด

ในตัวอย่างที่ 2 เป็นการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นวงกลมบางขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 ซม. รับแรงกระทำเป็นจุด 2 แรงในแนวแกน  $y$  กระทำในทิศทางตรงกันข้าม ขนาดของแรงเท่ากับ 100 กก. โดยวัสดุมีโมดูลัสยืดหยุ่น  $2 \times 10^{10}$  กก.ต่อตร.ซม.และอัตราส่วนปัวซองส์เท่ากับ 0.3 ดังแสดงในรูปที่ 4.2.1 (ก.) และสร้างแบบจำลองสำหรับวิเคราะห์ผลโดยอาศัยหลักสมมาตรแสดงในรูป 4.2.1 (ข.) โดยจำลองแรงกระทำให้อยู่ในรูปของแรงแผ่กระจายเป็นรูปสามเหลี่ยม เพื่อลดปัญหาของความคลาดเคลื่อนเนื่องจากในบริเวณที่มีแรงกระทำเป็นจุดนั้นจะมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงมากกว่าในบริเวณอื่นอย่างมาก ทำให้การลดขนาดขึ้นส่วนในบริเวณอื่น ๆ ไม่มีผลทำให้ความคลาดเคลื่อนโดยรวมลดลง โดยกำหนดระยะแรงกระทำแผ่กระจายเท่ากับ 4 องศา ออกจากแนวแรงเดิมในที่นี้มีระยะเท่ากับ 0.0698 ซม. จากแนวแกน  $y$  ซึ่งอาจจะกำหนดให้มากขึ้นหรือน้อยลงกว่านี้ได้ โดยขึ้นอยู่กับผู้ทำการวิเคราะห์

เมื่อกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้เท่ากับ 0.05 แสดงผลการวิเคราะห์และผลการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 4.2.2 – 4.2.8 โดยผลของโครงข่ายขึ้นส่วนที่ได้ยังคงมีความไม่ต่อเนื่องมากนักในบางบริเวณ ซึ่งเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่าของหน่วยแรงที่มีการเปลี่ยนแปลงมากภายในขอบเขตของปัญหาทำให้การเพิ่มจุดในบริเวณดังกล่าวควบคุมได้ไม่ดีนัก และถึงแม้เมื่อโครงข่ายที่ได้จะมีขนาดของขึ้นส่วนใกล้เคียงกับขนาดโครงข่ายที่ความต่อเนื่องที่ยอมรับให้บริเวณกว้างแต่เมื่อมีการปรับลดขนาดก็จะส่งผลให้บริเวณดังกล่าวได้ขึ้นส่วนที่มีขนาดเล็กลงและมีขนาดละเอียดเกินไป อีกทั้งเนื่องจากการเปลี่ยนขึ้นส่วนนั้นเริ่มต้นด้วยการแทรกจุดลงในขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ต้องการลดขนาด จึงอาจส่งผลให้เกิดการกระจุกตัวของขึ้นส่วน โดยมีจุดที่แทรกเข้าไปเป็นจุดศูนย์กลาง ซึ่งได้รูปร่างของขึ้นส่วนไม่ดีเท่าที่ควร

ผลจากการเปรียบเทียบระหว่างการสร้างขึ้นส่วนด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับพรอนต์เดินหน้า ด้วยวิธีพรอนต์เดินหน้าเพียงอย่างเดียวและด้วยวิธีพรอนต์เดินหน้าเพียงอย่างเดียว ร่วมกับการปรับปรุงคุณภาพ ดังแสดงในรูป 4.2.9 – 4.2.12 พบว่าโครงข่ายขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ได้

จากแต่ละวิธีใกล้เคียงกัน วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้าจะมีจำนวนจุดและชิ้นส่วนใน รอบสุดท้ายต่ำกว่าแต่มีจำนวนรอบมากกว่า ในขณะที่รูปร่างของชิ้นส่วนนั้นบางจุดที่สร้างโดยใช้ การแลกเปลี่ยนร่วมด้วยนั้น ได้ชิ้นส่วนที่รูปร่างไม่ดีนัก

เมื่อเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ พิจารณาลักษณะการกระจายของค่าหน่วยแรง ต่าง ๆ พบว่า ทุกวิธีให้ผลการวิเคราะห์ออกมาใกล้เคียงกัน โดยเมื่อพิจารณาค่าหน่วยแรงที่ได้จาก การวิเคราะห์ตามแนว AB เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง พบว่าค่าจากการวิเคราะห์จะมีค่าเข้าใกล้ค่า ของผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นเมื่อมีการปรับขนาดให้ชิ้นส่วนมีขนาดเล็กลงเพิ่มโครงข่ายให้มีความ ละเอียดมากยิ่งขึ้น ส่วนอัตราการลู่เข้าสู่ค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดจากรูปที่ 4.2.11 พบว่าด้วย วิธีฟรอนต์เดินหน้าร่วมกับการปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนยังคงมีอัตราการลู่เข้าที่มีแนวโน้มดีกว่า เนื่องจากใช้จำนวนรอบที่น้อยกว่า ในด้านของเวลาที่ใช้จากรูปที่ 4.2.12 พบว่าวิธีแลกเปลี่ยนร่วม กับวิธีฟรอนต์เดินหน้าจะมีอัตราส่วนการใช้เวลาในแต่ละรอบที่มีความละเอียดมากขึ้นเทียบกับ เวลาทั้งหมดที่ใช้ในการวิเคราะห์ทั้งหมดน้อยกว่าอีกสองวิธีเล็กน้อย

### 4.3 ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ

ในตัวอย่างที่ 3 นี้ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาคานยื่นดังแสดงในรูปที่ 4.3.1 (ก.) คือ มีขนาดกว้าง 20 ซม. ยาว 200 ซม. ลึก 30 ซม. มีแรงกระทำที่ปลายคานด้านอิสระขนาด 1000 กก. วัสดุมีโมดูลัสยืดหยุ่น  $2.634 \times 10^5$  กก.ต่อ ตร.ซม. อัตราส่วนปัวซองส์เท่ากับ 0.22 และสร้างแบบ จำลองสำหรับวิเคราะห์ผลโดยจำลองแรงกระทำให้กระจายทั่วทั้งหน้าตัดคาน ดังแสดงในรูป 4.3.1 (ข.)

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้เท่ากับ 0.05 ได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 8 รอบ โดยแสดงผลการวิเคราะห์และผลการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 4.3.2 – 4.3.9 โดยผลของโครงข่ายชิ้นส่วนที่ได้มีความต่อเนื่องกันดี และผลเปรียบเทียบระหว่างผล การวิเคราะห์ค่าหน่วยแรงกับผลเฉลยแม่นยำตรง พบว่าใกล้เคียงค่าแม่นยำดีแต่ที่บริเวณจุดรองรับ อาจมีความคลาดเคลื่อนบ้างเล็กน้อย ในขณะที่ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน X และในแนวแกน Y ของผลในรอบสุดท้ายดังแสดงในรูป 4.3.9 พบว่ามีค่าใกล้เคียงกับค่าผลเฉลยแม่นยำตรงมาก

ผลจากการเปรียบเทียบระหว่างการสร้างชิ้นส่วนด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า ด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวร่วมกับการปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน ดังแสดงในรูป 4.3.10 – 4.3.13 พบว่าโครงข่ายชิ้นส่วนที่ได้จากทั้ง

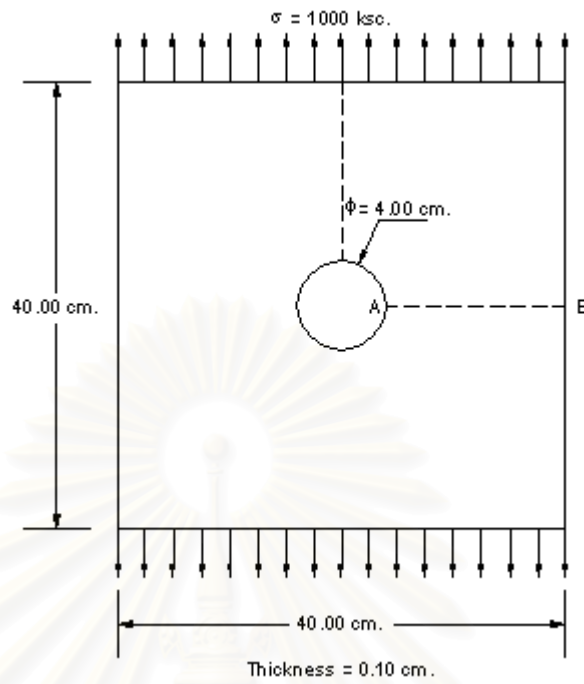
สามวิธีมีรูปร่างใกล้เคียงกัน แต่ด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้าจะได้จำนวนจุดข้อมูลน้อยกว่าเมื่อสิ้นสุดการวิเคราะห์และเมื่อเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของแต่ละวิธีกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูป 4.3.11 พบว่าให้คำตอบที่ใกล้เคียงกับค่าผลเฉลยแม่นยำตรงเช่นเดียวกัน

ในส่วนของอัตราการเข้าสู่ค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนด ดังแสดงในรูป 4.3.12 พบว่าด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าร่วมกับการปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน จะมีอัตราการเข้าสู่ที่ดีกว่าแต่ก็มีการเพิ่มจำนวนจุดข้อมูลมากกว่า เมื่อเปรียบเทียบด้านเวลาในรูปที่ 4.3.13 พบว่าด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้าจะมีอัตราส่วนการใช้เวลาในแต่ละรอบที่มีความละเอียดมากขึ้นเทียบกับเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นต่ำกว่าอีกสองวิธีเล็กน้อยเช่นกับตัวอย่างอื่นที่ผ่านมา

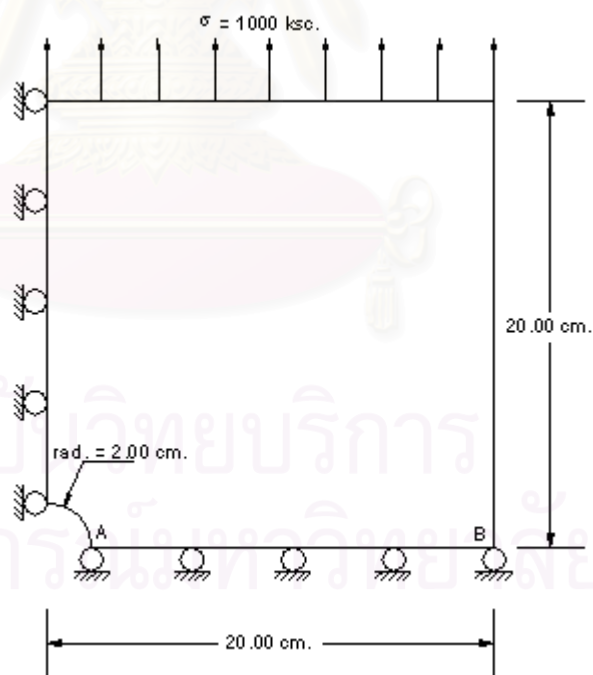
จากตัวอย่างที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ พบว่าการสร้างชิ้นส่วนด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้าให้กระบวนการในการหาผลเฉลยของปัญหาที่ใกล้เคียงกับที่สร้างด้วยวิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว เมื่อพิจารณาในด้านเวลาพบว่าด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้าจะทำให้การใช้เวลาในแต่ละรอบเมื่อมีความละเอียดของชิ้นส่วนมากขึ้นเมื่อเทียบกับเวลาทั้งหมดนั้น จะมีค่าต่ำกว่าทั้งสองวิธี ในขณะที่ประสิทธิภาพของผลเฉลยที่ได้เมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงของตัวอย่างทั้งสามที่สร้างด้วยทั้งสามวิธีให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกัน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





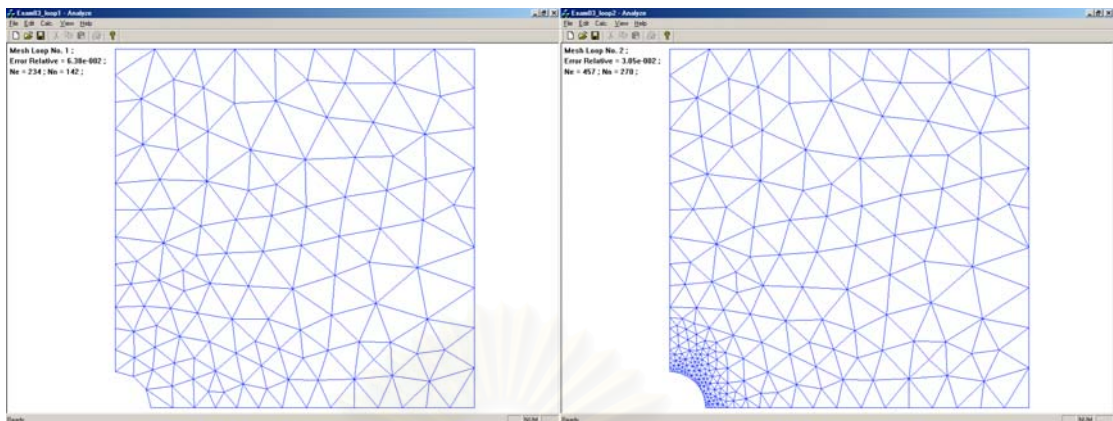
(ก.)



(ข.)

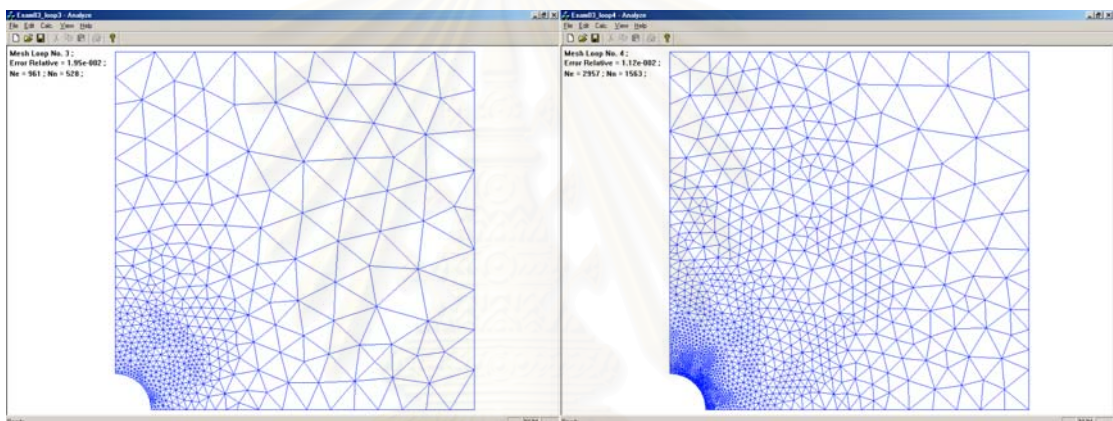
รูปที่ 4.1.1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงและแบบจำลองการวิเคราะห์





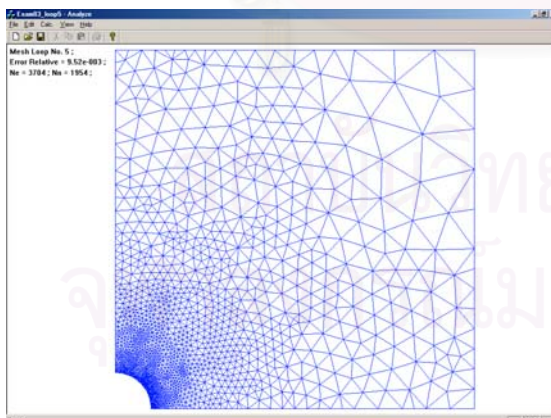
Mesh 1 :  $\eta = 6.38 \times 10^{-2}$ , Ne = 234, Nn = 142

Mesh 2 :  $\eta = 3.05 \times 10^{-2}$ , Ne = 457, Nn = 270



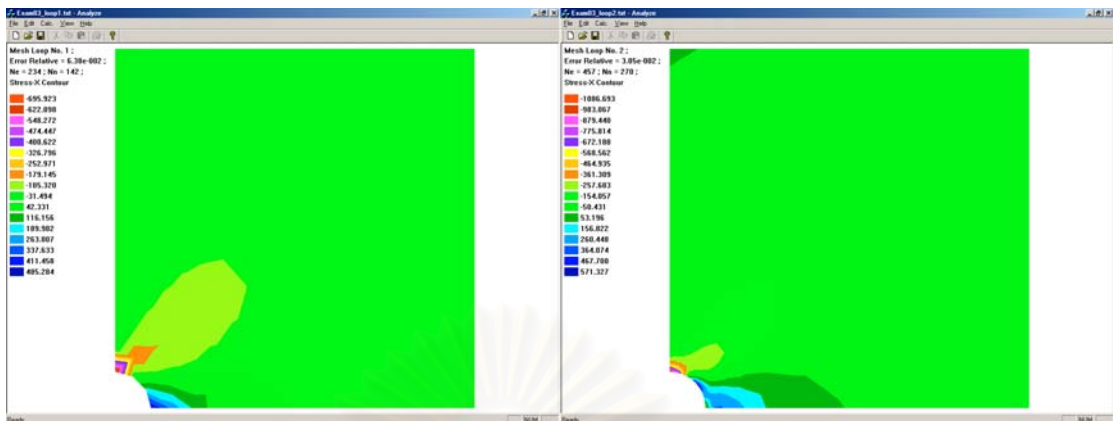
Mesh 3 :  $\eta = 1.95 \times 10^{-2}$ , Ne = 961, Nn = 528

Mesh 4 :  $\eta = 1.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 2957, Nn = 1563



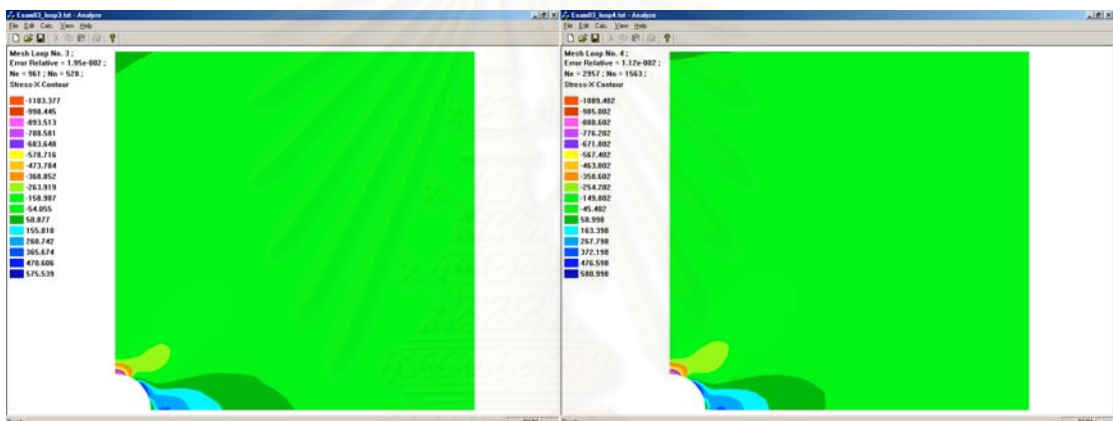
Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

รูปที่ 4.1.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแตกเปลี่ยนแปลงร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



Mesh 1 :  $\eta = 6.38 \times 10^{-2}$ , Ne = 234, Nn = 142

Mesh 2 :  $\eta = 3.05 \times 10^{-2}$ , Ne = 457, Nn = 270



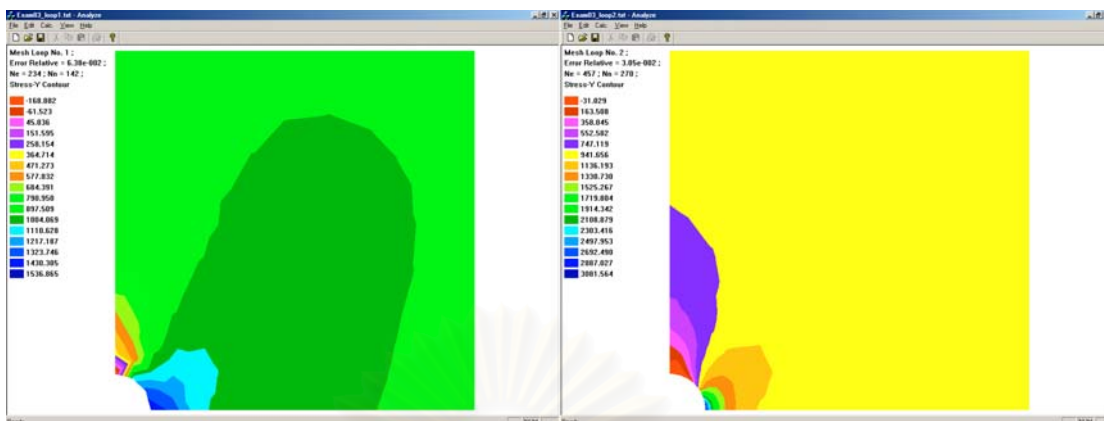
Mesh 3 :  $\eta = 1.95 \times 10^{-2}$ , Ne = 961, Nn = 528

Mesh 4 :  $\eta = 1.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 2957, Nn = 1563



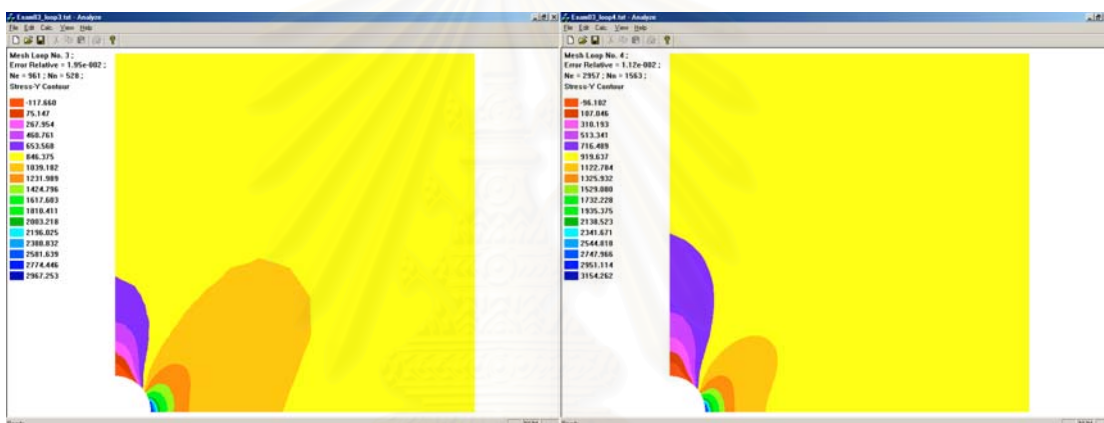
Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

รูปที่ 4.1.3 การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



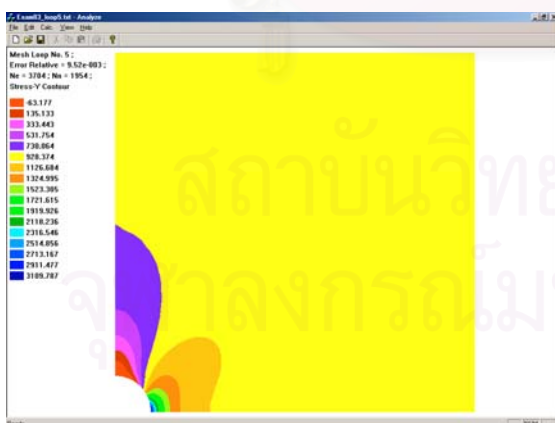
Mesh 1 :  $\eta = 6.38 \times 10^{-2}$ , Ne = 234, Nn = 142

Mesh 2 :  $\eta = 3.05 \times 10^{-2}$ , Ne = 457, Nn = 270



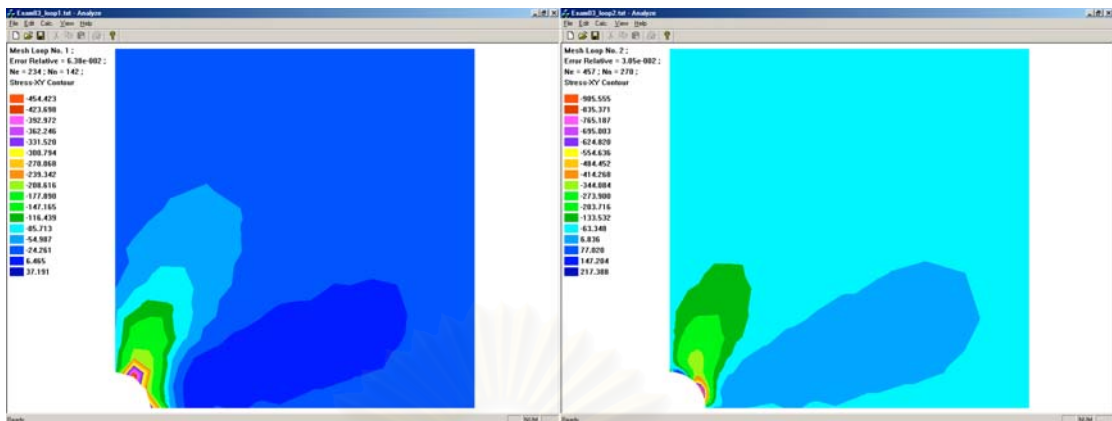
Mesh 3 :  $\eta = 1.95 \times 10^{-2}$ , Ne = 961, Nn = 528

Mesh 4 :  $\eta = 1.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 2957, Nn = 1563



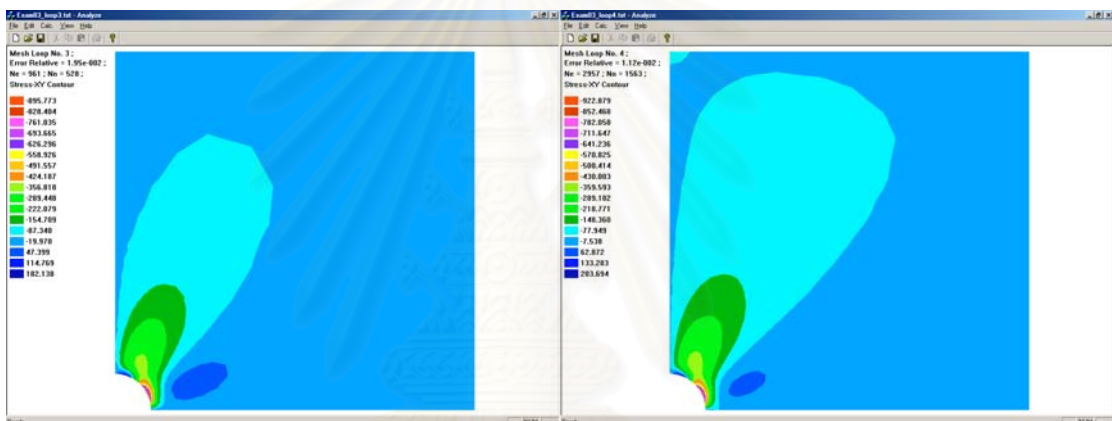
Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

รูปที่ 4.1.4 การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



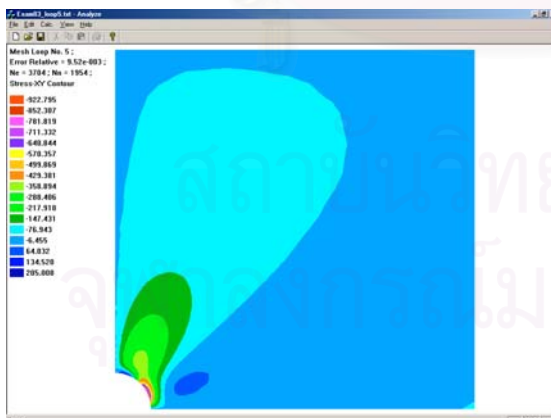
Mesh 1 :  $\eta = 6.38 \times 10^{-2}$ , Ne = 234, Nn = 142

Mesh 2 :  $\eta = 3.05 \times 10^{-2}$ , Ne = 457, Nn = 270



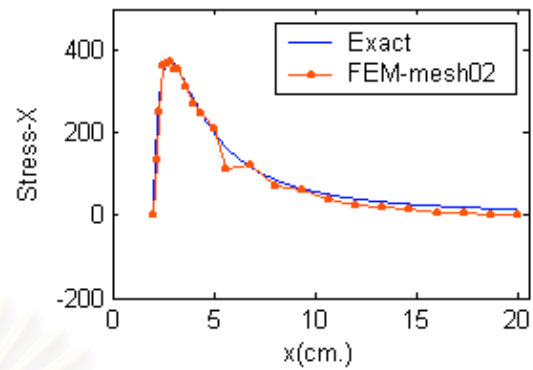
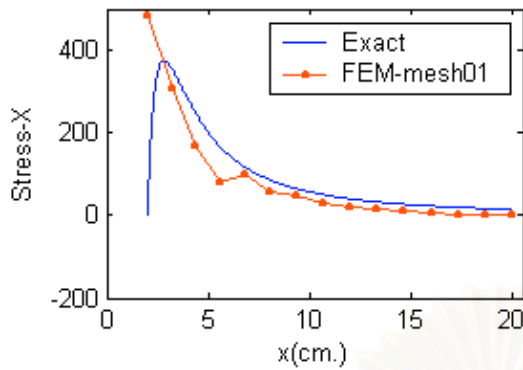
Mesh 3 :  $\eta = 1.95 \times 10^{-2}$ , Ne = 961, Nn = 528

Mesh 4 :  $\eta = 1.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 2957, Nn = 1563



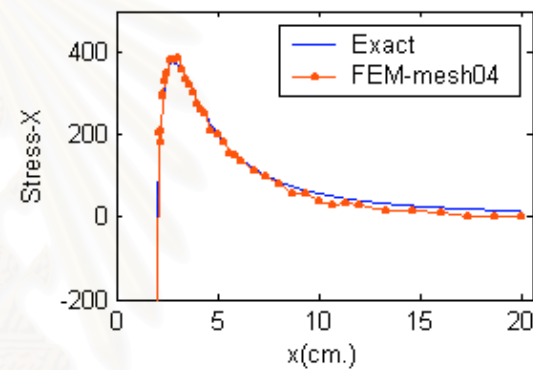
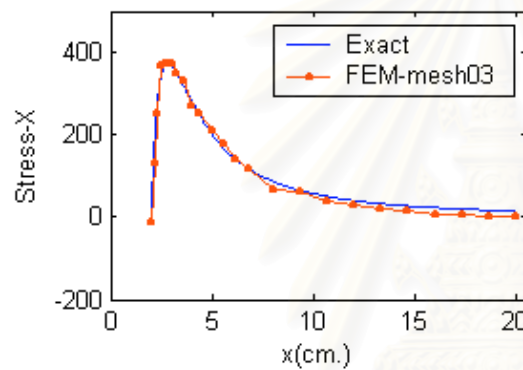
Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

รูปที่ 4.1.5 การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้าง  
ขึ้นด้วยวิธีแตกเปลี่ยนแปลงพร้อมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



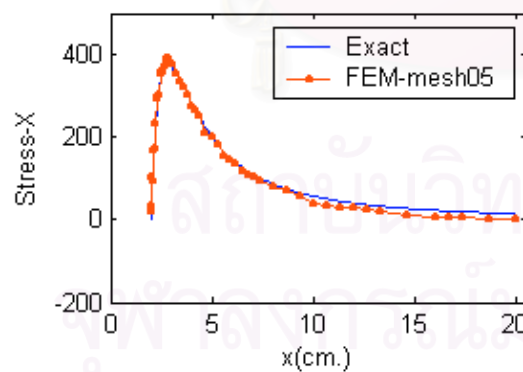
Mesh 1 :  $\eta = 6.38 \times 10^{-2}$ , Ne = 234, Nn = 142

Mesh 2 :  $\eta = 3.05 \times 10^{-2}$ , Ne = 457, Nn = 270



Mesh 3 :  $\eta = 1.95 \times 10^{-2}$ , Ne = 961, Nn = 528

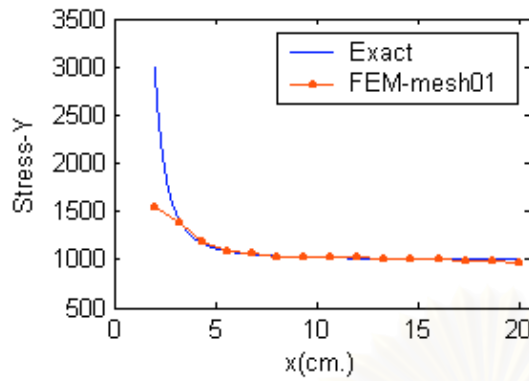
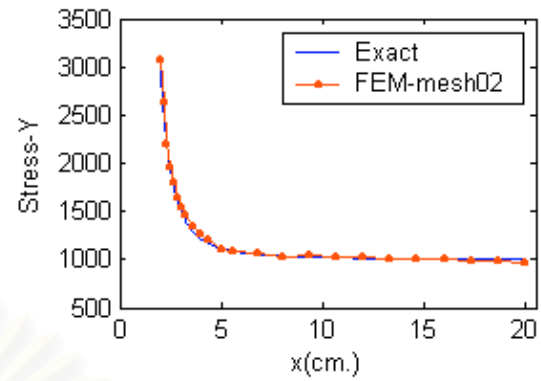
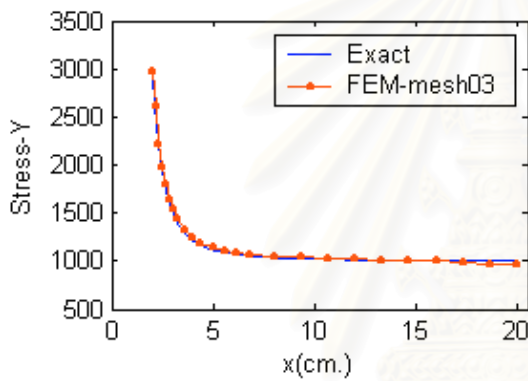
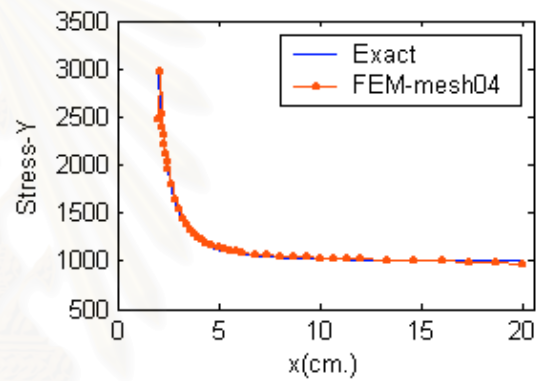
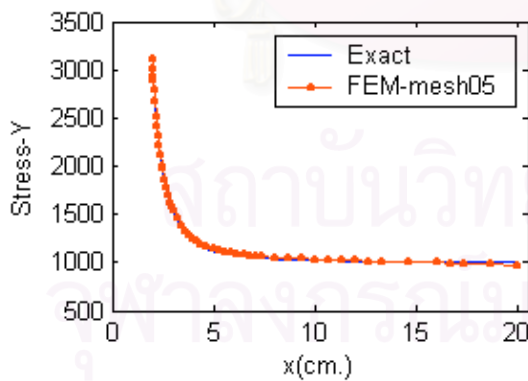
Mesh 4 :  $\eta = 1.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 2957, Nn = 1563



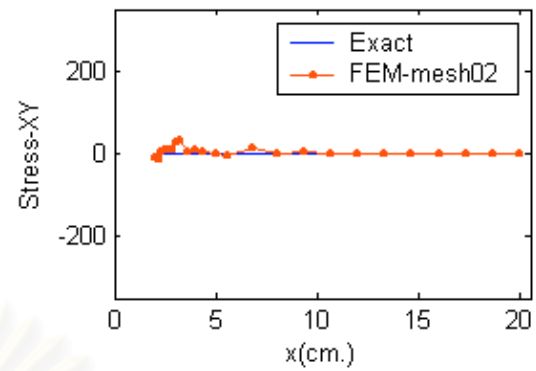
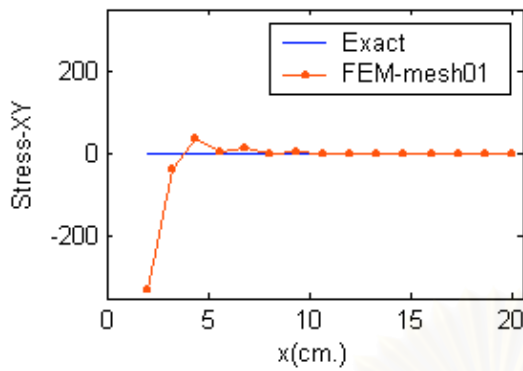
Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

รูปที่ 4.1.6 กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



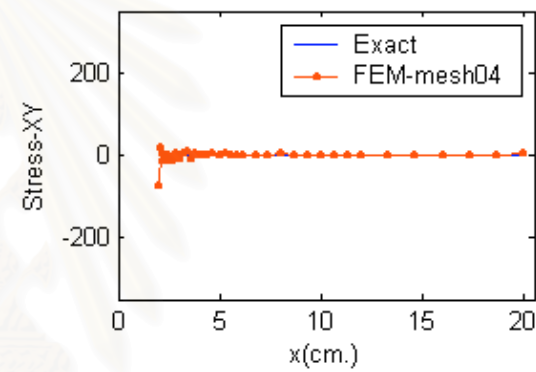
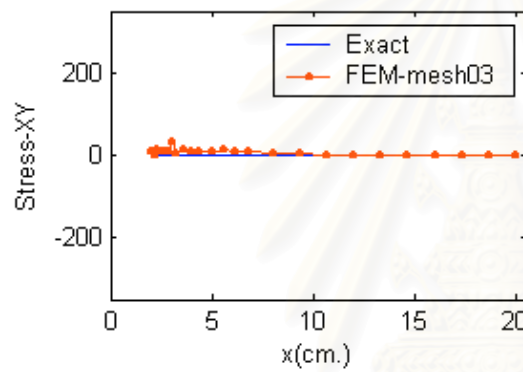
Mesh 1 :  $\eta = 6.38 \times 10^{-2}$ , Ne = 234, Nn = 142Mesh 2 :  $\eta = 3.05 \times 10^{-2}$ , Ne = 457, Nn = 270Mesh 3 :  $\eta = 1.95 \times 10^{-2}$ , Ne = 961, Nn = 528Mesh 4 :  $\eta = 1.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 2957, Nn = 1563Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

รูปที่ 4.1.7 กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง  $y$  ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟอนต์เดินหน้า



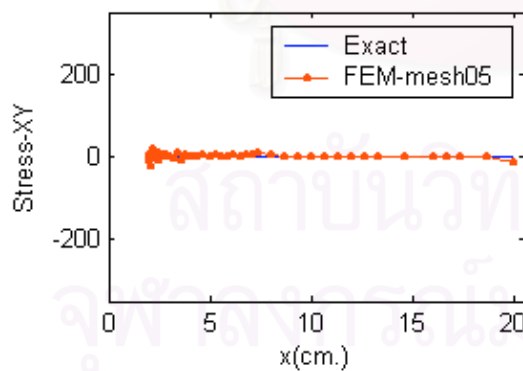
Mesh 1 :  $\eta = 6.38 \times 10^{-2}$ , Ne = 234, Nn = 142

Mesh 2 :  $\eta = 3.05 \times 10^{-2}$ , Ne = 457, Nn = 270



Mesh 3 :  $\eta = 1.95 \times 10^{-2}$ , Ne = 961, Nn = 528

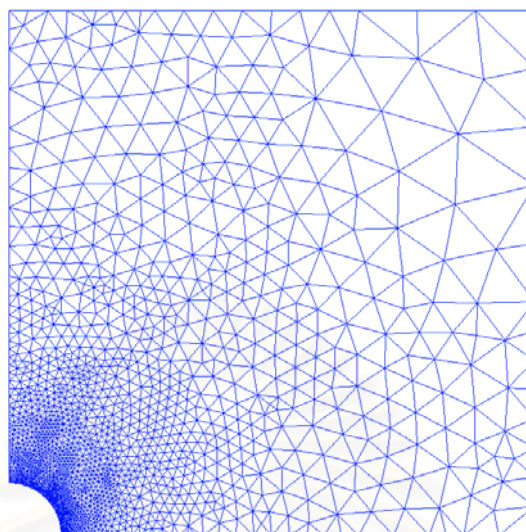
Mesh 4 :  $\eta = 1.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 2957, Nn = 1563



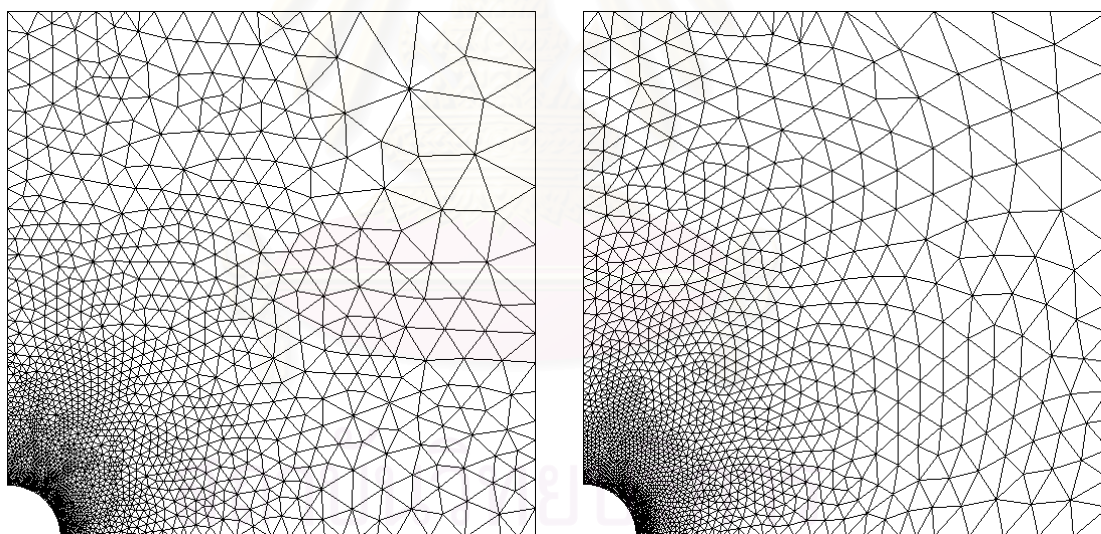
Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

รูปที่ 4.1.8 กราฟแสดงค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปเลียนร่วมกับวิธีฟอนต์เดินหน้า



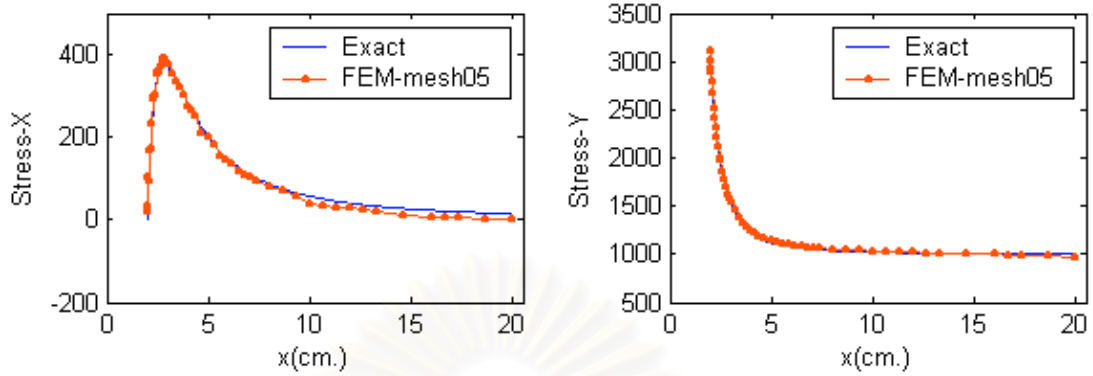


ก.) Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

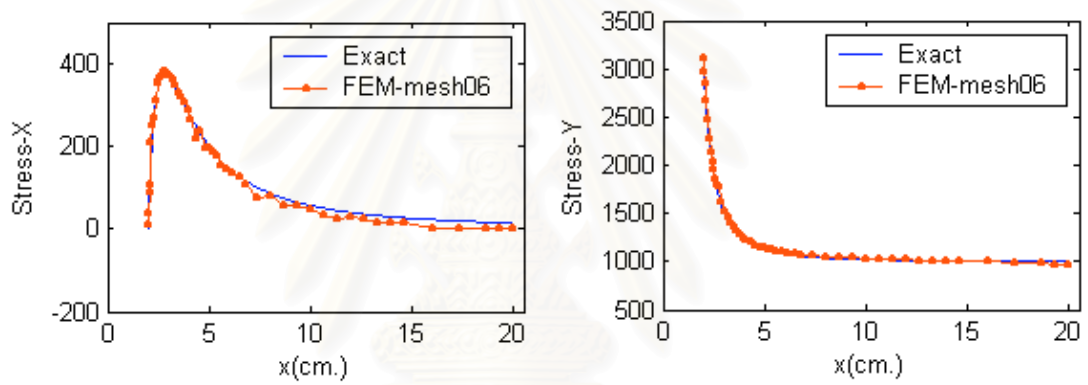


ข.) Mesh 6 :  $\eta = 9.69 \times 10^{-3}$ , Ne = 2973, Nn = 1572 ค.) Mesh 4 :  $\eta = 9.76 \times 10^{-3}$ , Ne = 3482, Nn = 1848

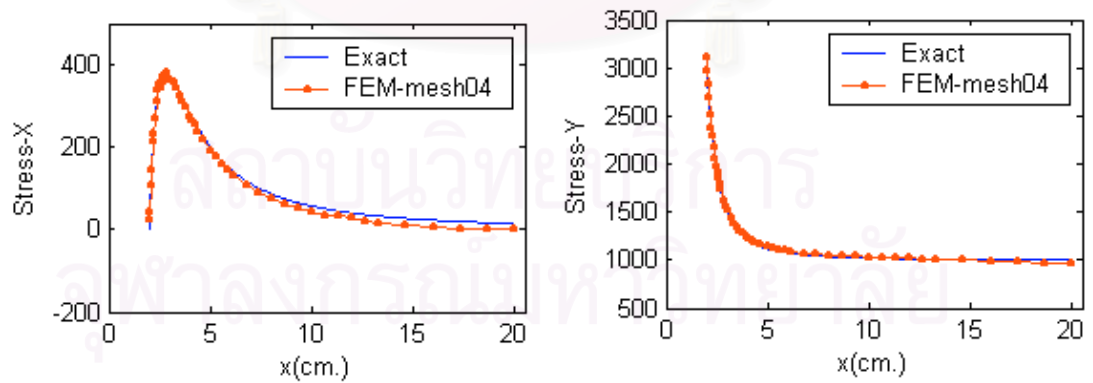
รูปที่ 4.1.9 เปรียบเทียบโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน



ก.) Mesh 5 :  $\eta = 9.52 \times 10^{-3}$ , Ne = 3704, Nn = 1954

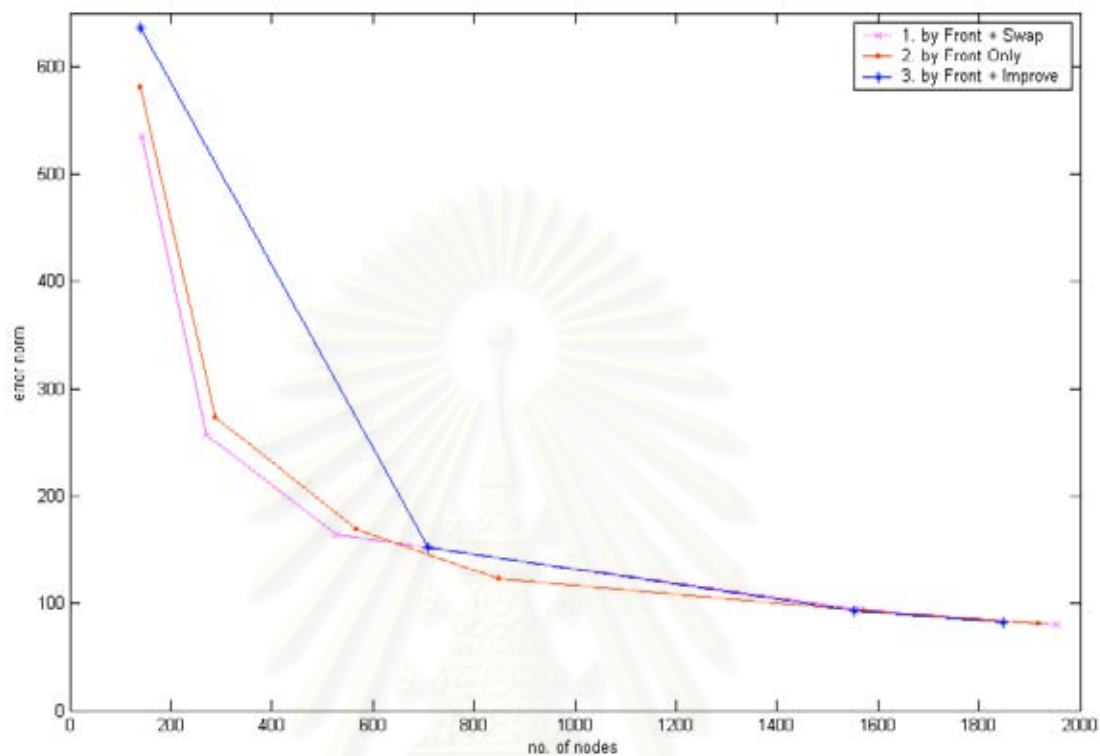


ข.) Mesh 6 :  $\eta = 9.69 \times 10^{-3}$ , Ne = 2973, Nn = 1572



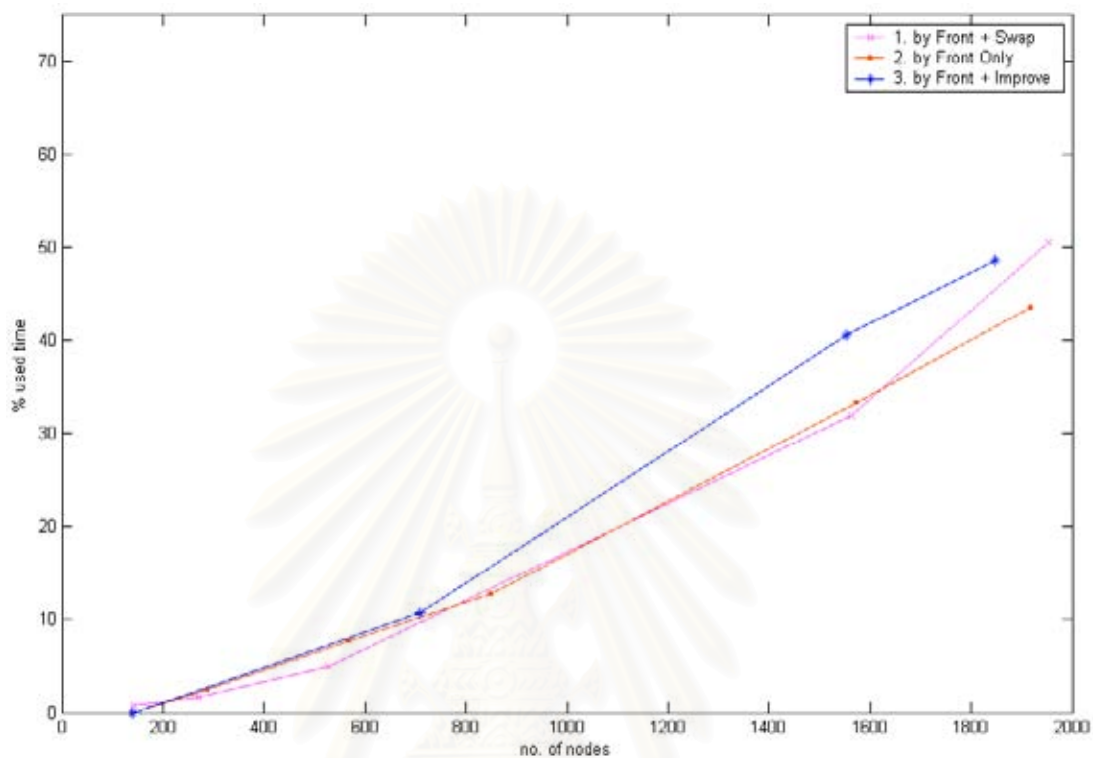
ค.) Mesh 4 :  $\eta = 9.76 \times 10^{-3}$ , Ne = 3482, Nn = 1848

รูปที่ 4.1.10 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน



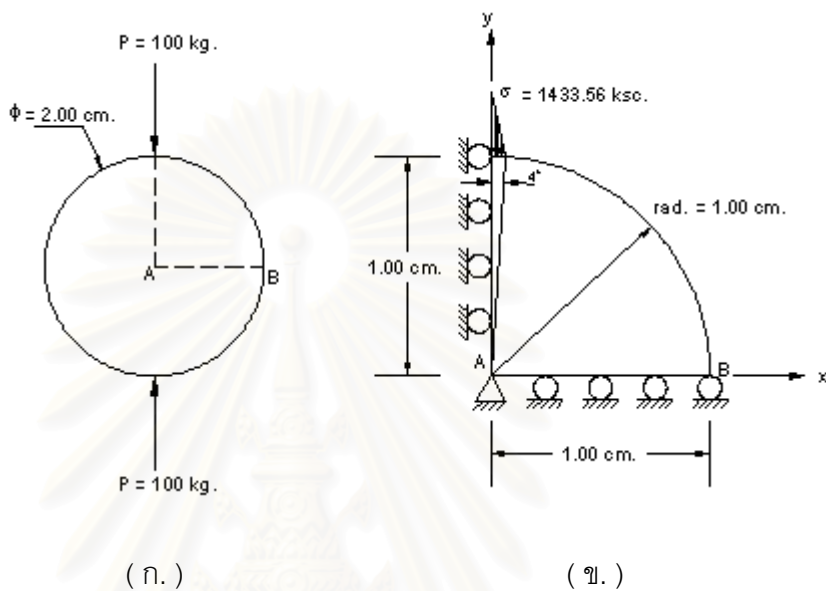
รูปที่ 4.1.11 เปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่งที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



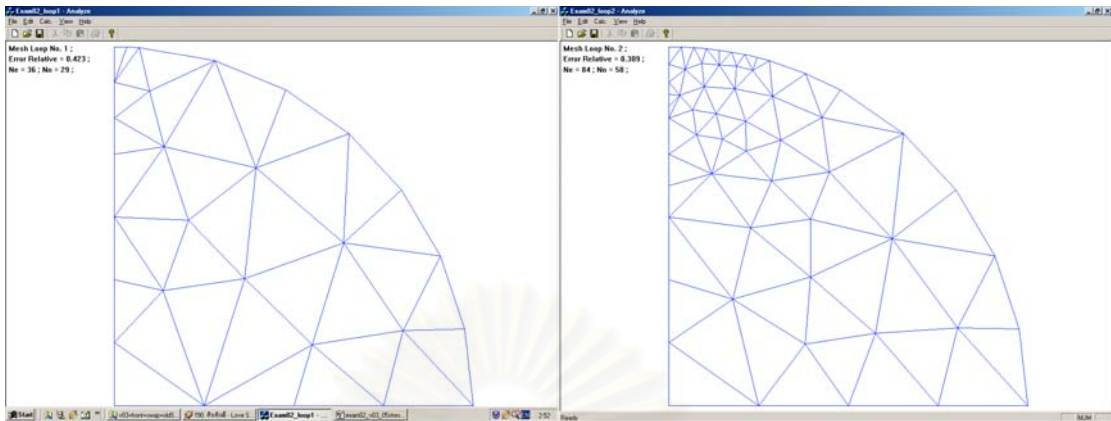
รูปที่ 4.1.12 เปรียบเทียบอัตราการใช้เวลาในการวิเคราะห์หาคำตอบของปัญหา  
 ผ่านบางรับแรงดึงที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดิน  
 หน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน

สถาบันวิทยบริการ  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



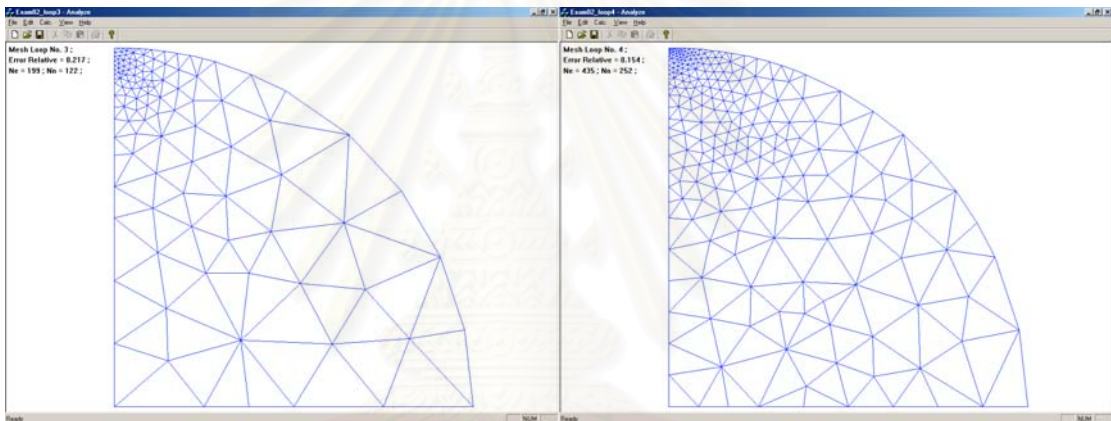
รูปที่ 4.2.1 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



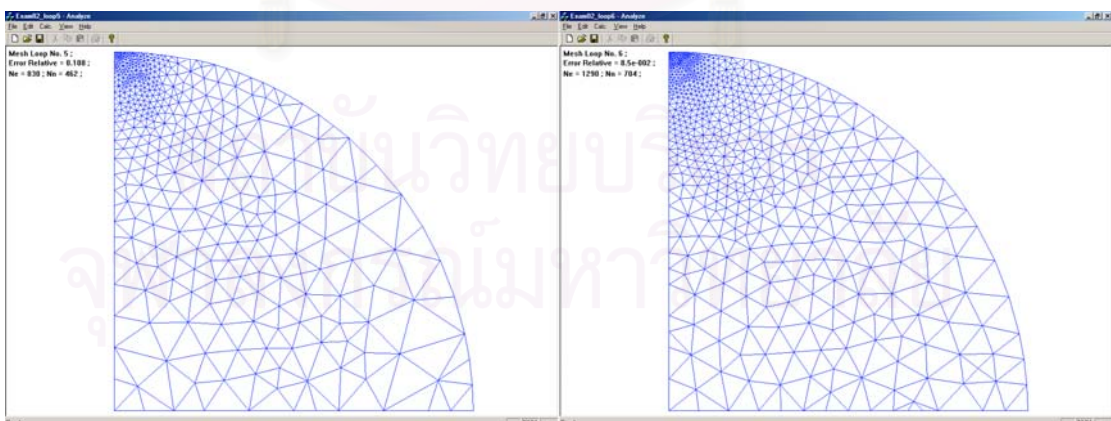
Mesh 1 :  $\eta = 0.422$ , Ne = 36, Nn = 29

Mesh 2 :  $\eta = 0.309$ , Ne = 84, Nn = 58



Mesh 3 :  $\eta = 0.217$ , Ne = 199, Nn = 122

Mesh 4 :  $\eta = 0.154$ , Ne = 435, Nn = 252

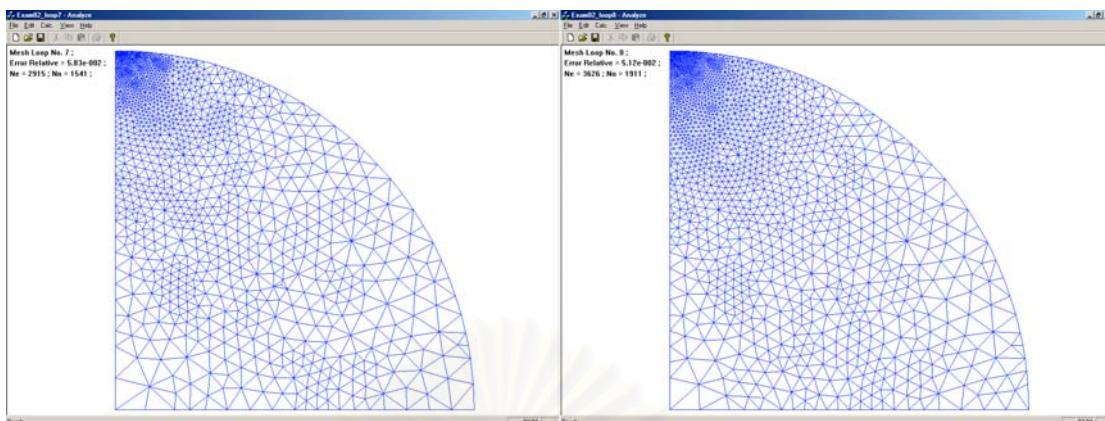


Mesh 5 :  $\eta = 0.108$ , Ne = 830, Nn = 462

Mesh 6 :  $\eta = 8.50 \times 10^{-2}$ , Ne = 1290, Nn = 704

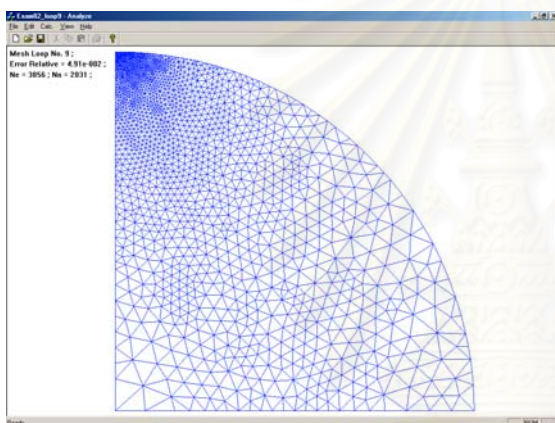
รูปที่ 4.2.2 (ก.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธี ฟรอนต์เดินหน้าร่วมกับวิธีแลกเปเลียน





Mesh 7 :  $\eta = 5.83 \times 10^{-2}$ , Ne = 2915, Nn = 1541

Mesh 8 :  $\eta = 5.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 3626, Nn = 1911

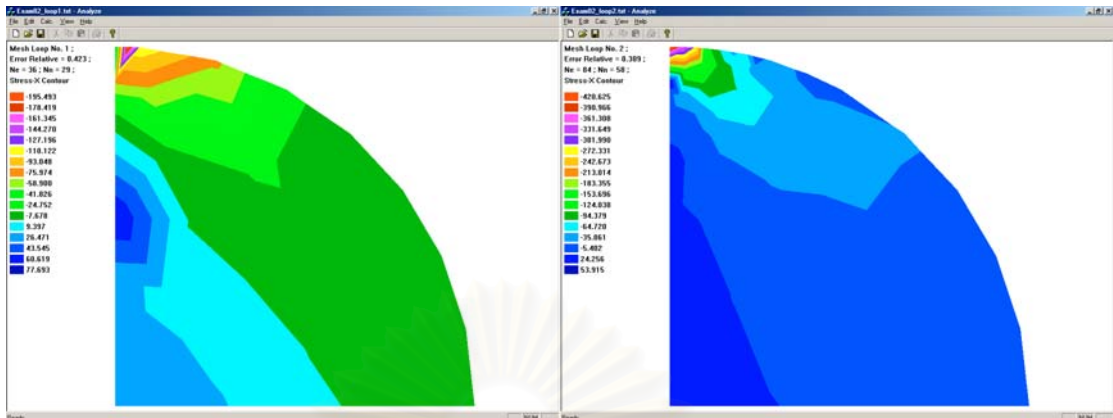


Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031

รูปที่ 4.2.2.(ข.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธี ฟรอนต์เดินหน้าร่วมกับวิธีแตกเปลี่ยน

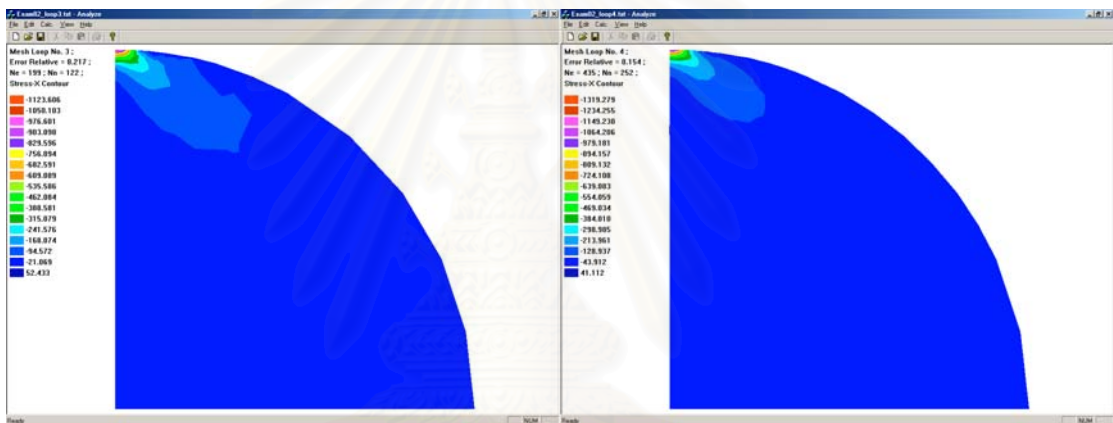
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





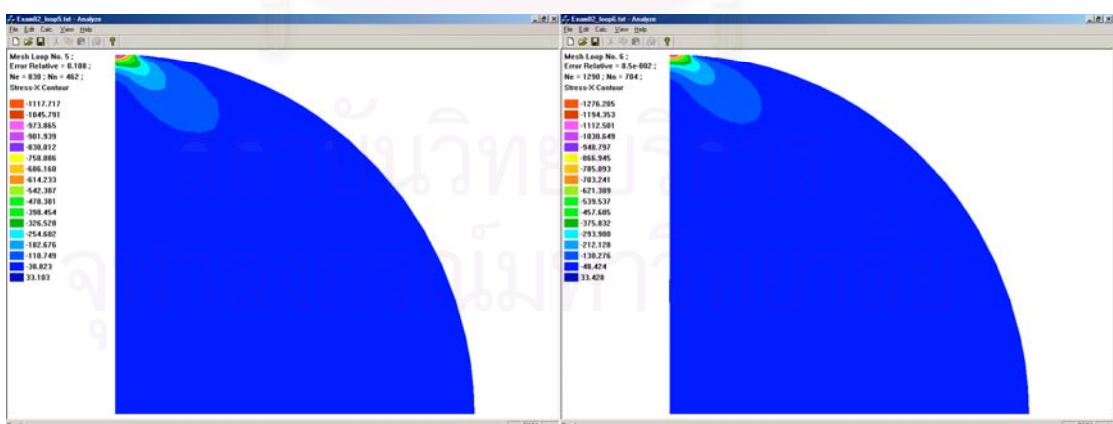
Mesh 1 :  $\eta = 0.422$ , Ne = 36, Nn = 29

Mesh 2 :  $\eta = 0.309$ , Ne = 84, Nn = 58



Mesh 3 :  $\eta = 0.217$ , Ne = 199, Nn = 122

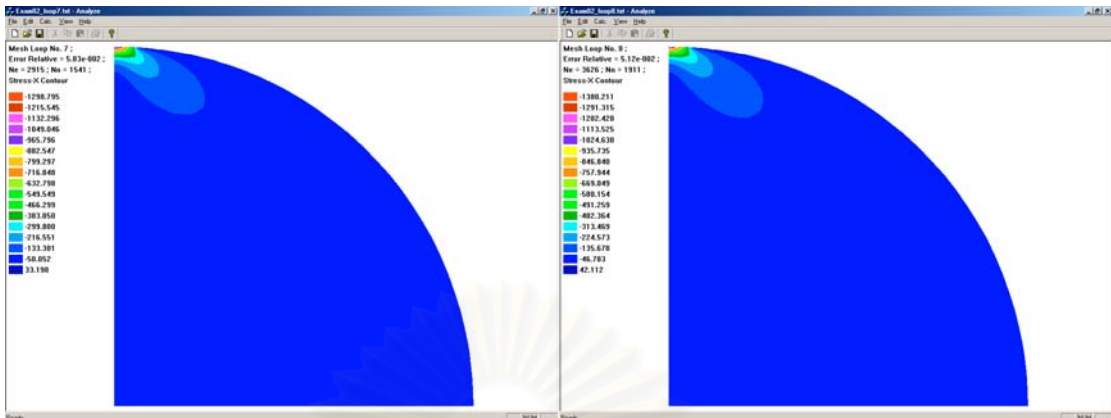
Mesh 4 :  $\eta = 0.154$ , Ne = 435, Nn = 252



Mesh 5 :  $\eta = 0.108$ , Ne = 830, Nn = 462

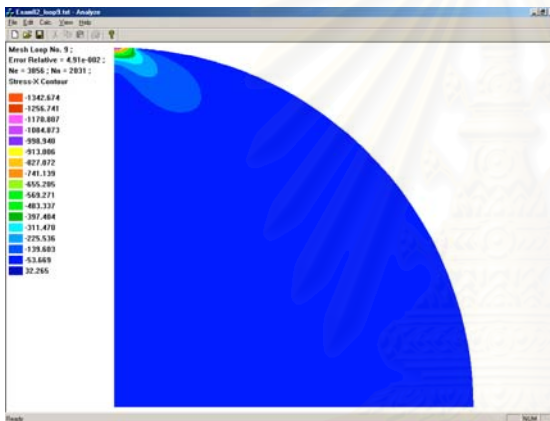
Mesh 6 :  $\eta = 8.50 \times 10^{-2}$ , Ne = 1290, Nn = 704

รูปที่ 4.2.3.(ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟอนต์เดินหน้า



Mesh 7 :  $\eta = 5.83 \times 10^{-2}$ , Ne = 2915, Nn = 1541

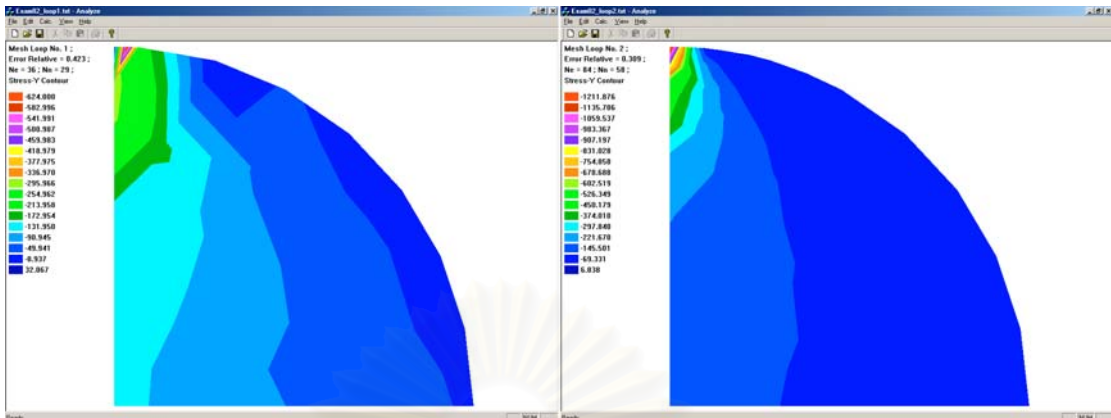
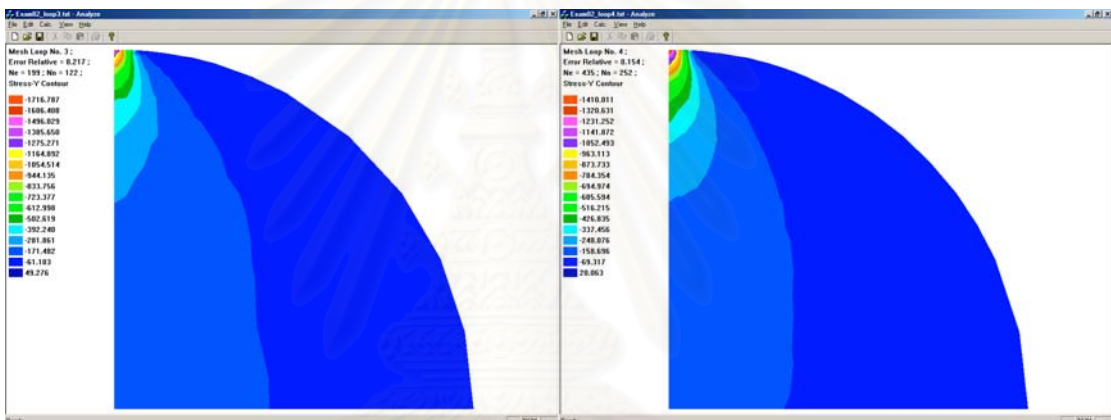
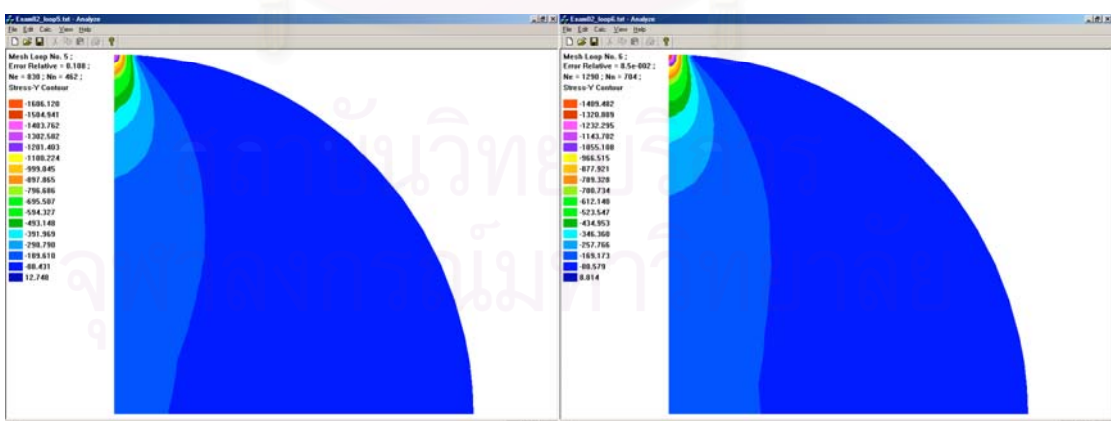
Mesh 8 :  $\eta = 5.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 3626, Nn = 1911



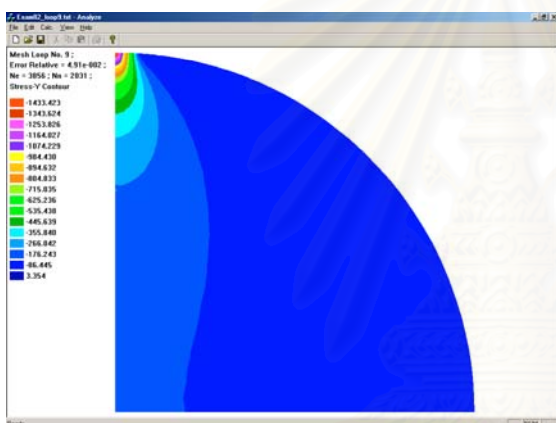
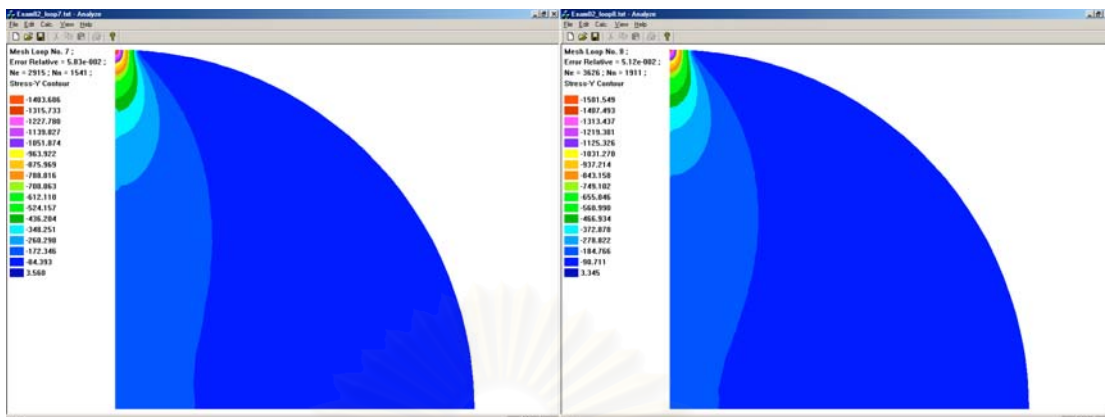
Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031

รูปที่ 4.2.3.(ข.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแล็กเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

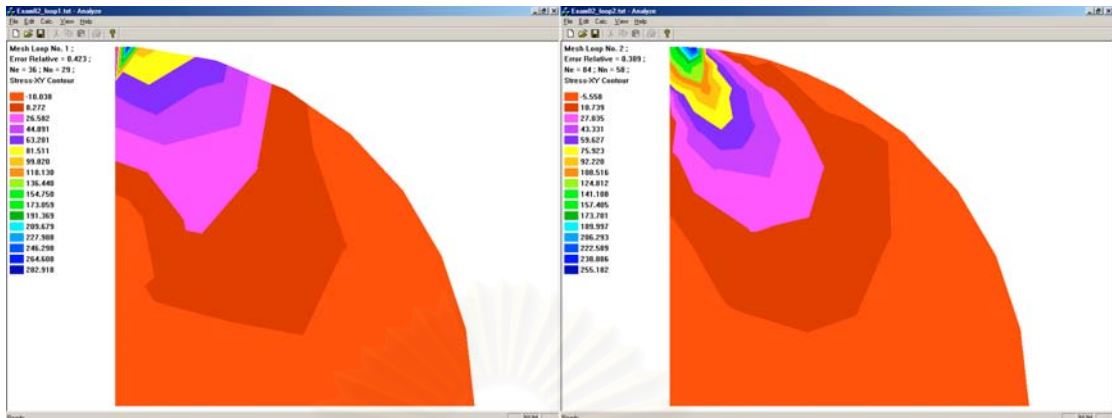
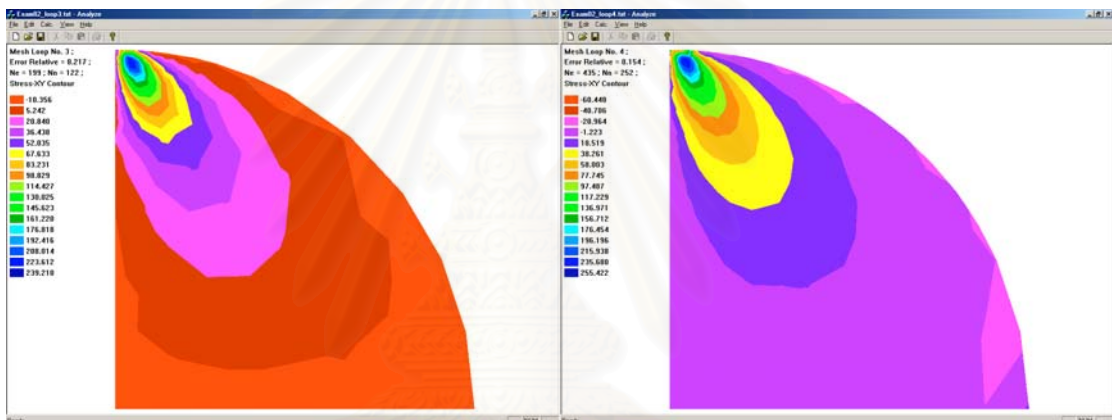
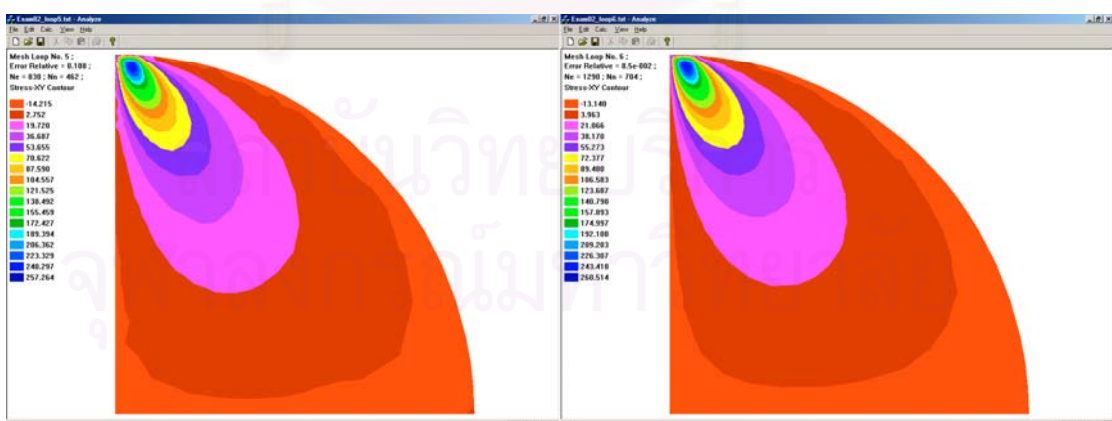
Mesh 1 :  $\eta = 0.422$ , Ne = 36, Nn = 29Mesh 2 :  $\eta = 0.309$ , Ne = 84, Nn = 58Mesh 3 :  $\eta = 0.217$ , Ne = 199, Nn = 122Mesh 4 :  $\eta = 0.154$ , Ne = 435, Nn = 252Mesh 5 :  $\eta = 0.108$ , Ne = 830, Nn = 462Mesh 6 :  $\eta = 8.50 \times 10^{-2}$ , Ne = 1290, Nn = 704

รูปที่ 4.2.4.(ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง  $y$  ของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟอนต์เดินหน้า



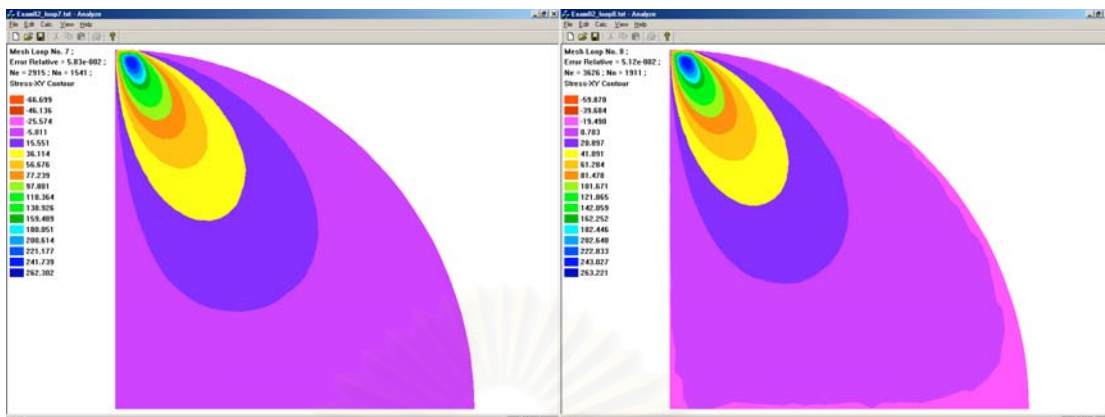
รูปที่ 4.2.4.(ข) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง  $y$  ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง  
ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Mesh 1 :  $\eta = 0.422$ , Ne = 36, Nn = 29Mesh 2 :  $\eta = 0.309$ , Ne = 84, Nn = 58Mesh 3 :  $\eta = 0.217$ , Ne = 199, Nn = 122Mesh 4 :  $\eta = 0.154$ , Ne = 435, Nn = 252Mesh 5 :  $\eta = 0.108$ , Ne = 830, Nn = 462Mesh 6 :  $\eta = 8.50 \times 10^{-2}$ , Ne = 1290, Nn = 704

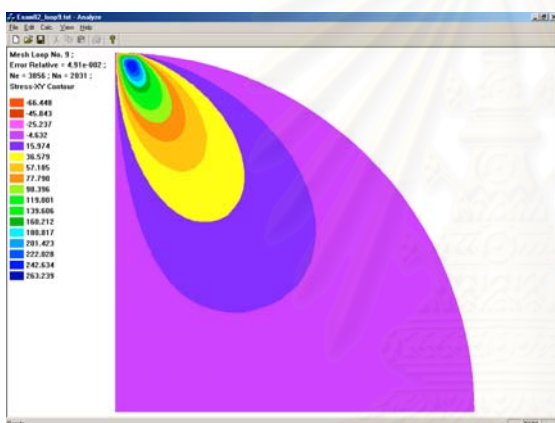
รูปที่ 4.2.5.(ก.) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า





Mesh 7 :  $\eta = 5.83 \times 10^{-2}$ , Ne = 2915, Nn = 1541

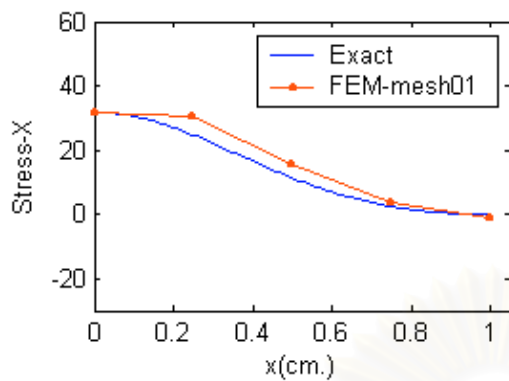
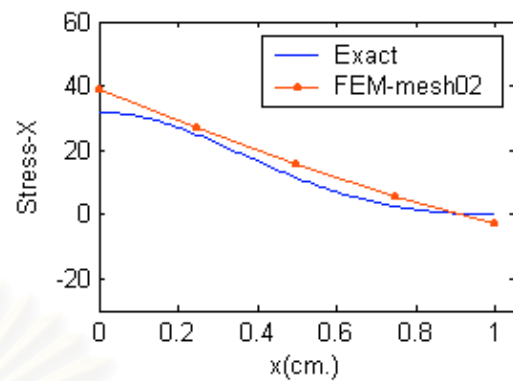
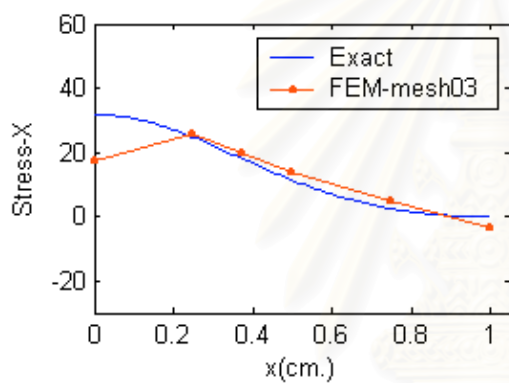
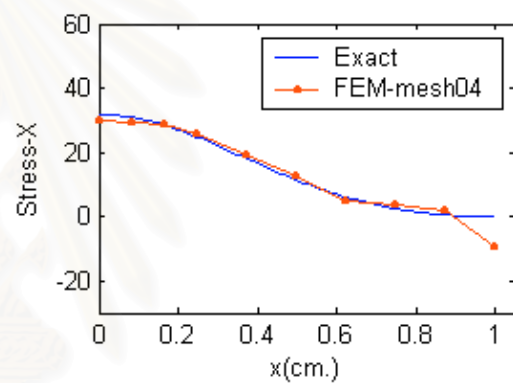
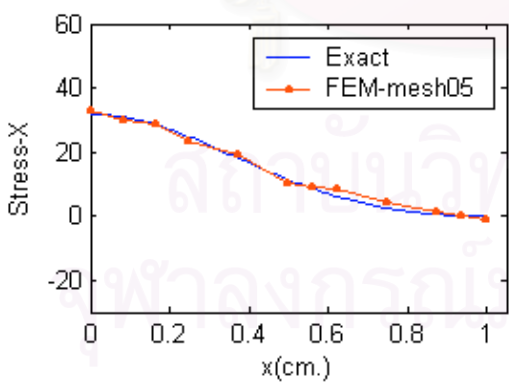
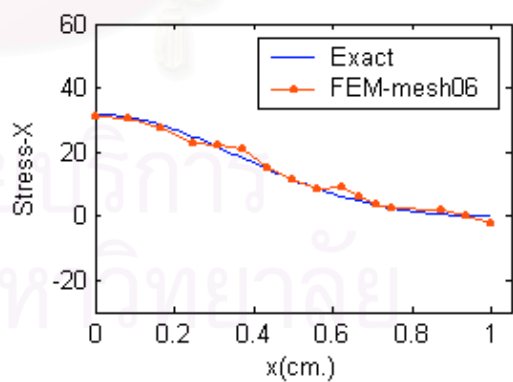
Mesh 8 :  $\eta = 5.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 3626, Nn = 1911



Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031

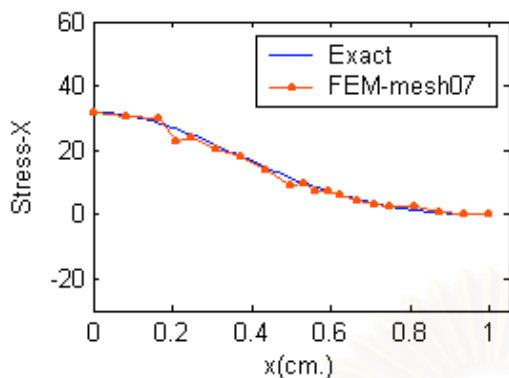
รูปที่ 4.2.5.(ข) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้าง  
ขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟอนต์เดินหน้า

สถาบันนวัตกรรมการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

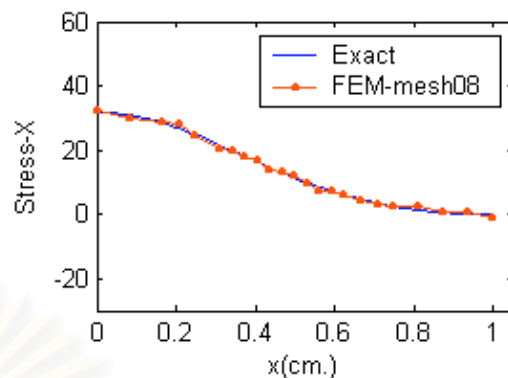
Mesh 1 :  $\eta = 0.422$ , Ne = 36, Nn = 29Mesh 2 :  $\eta = 0.309$ , Ne = 84, Nn = 58Mesh 3 :  $\eta = 0.217$ , Ne = 199, Nn = 122Mesh 4 :  $\eta = 0.154$ , Ne = 435, Nn = 252Mesh 5 :  $\eta = 0.108$ , Ne = 830, Nn = 462Mesh 6 :  $\eta = 8.50 \times 10^{-2}$ , Ne = 1290, Nn = 704

รูปที่ 4.2.6.(ก.) กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง  $x$  ตามแนว AB ของปัญหา  
 แผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

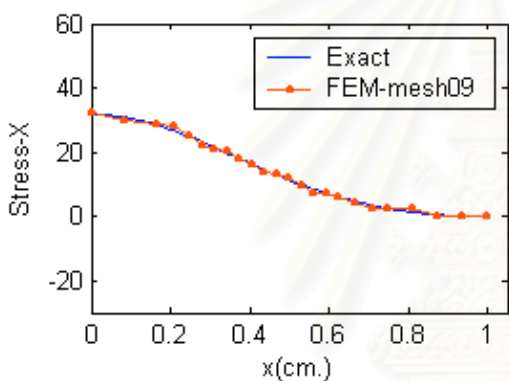




Mesh 7 :  $\eta = 5.83 \times 10^{-2}$ , Ne = 2915, Nn = 1541



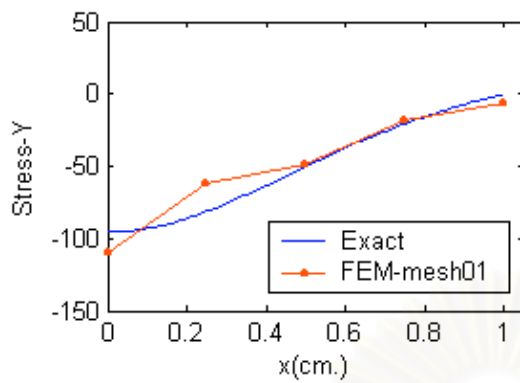
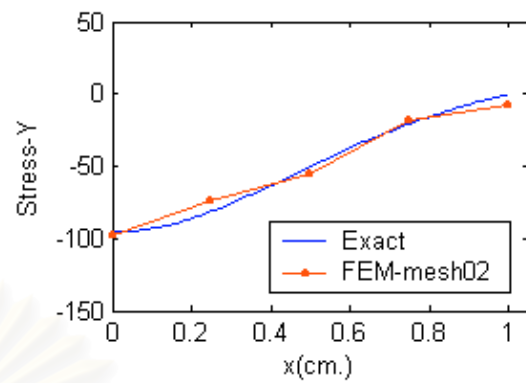
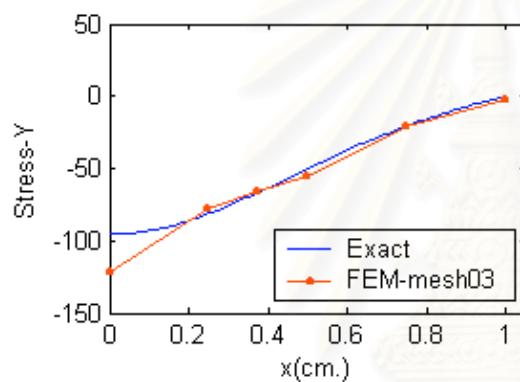
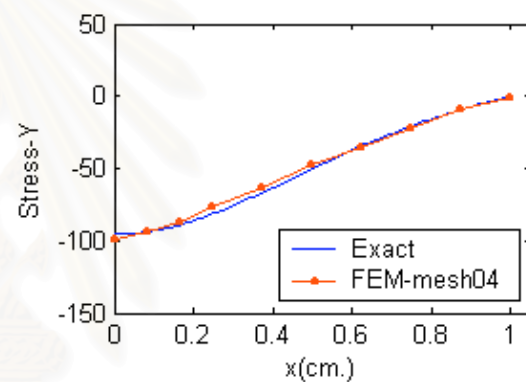
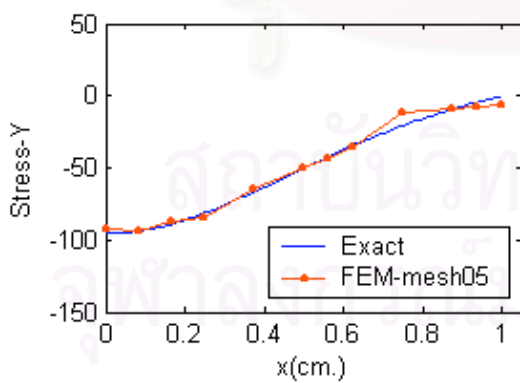
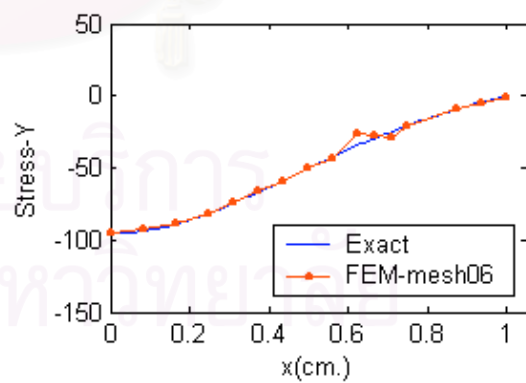
Mesh 8 :  $\eta = 5.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 3626, Nn = 1911



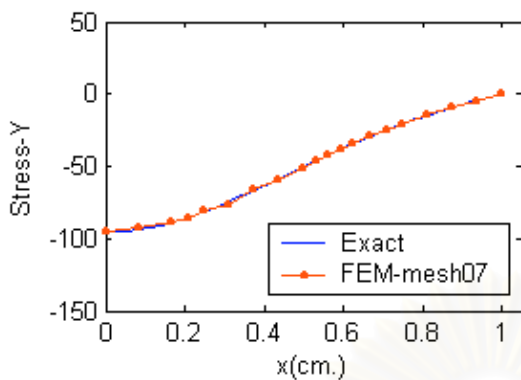
Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031

รูปที่ 4.2.6.(ข.) กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง  $x$  ตามแนว AB ของปัญหา  
แผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

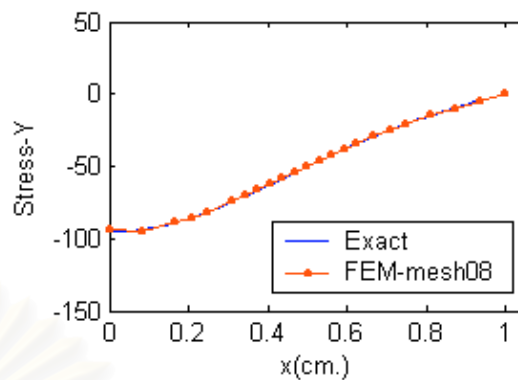
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Mesh 1 :  $\eta = 0.422$ , Ne = 36, Nn = 29Mesh 2 :  $\eta = 0.309$ , Ne = 84, Nn = 58Mesh 3 :  $\eta = 0.217$ , Ne = 199, Nn = 122Mesh 4 :  $\eta = 0.154$ , Ne = 435, Nn = 252Mesh 5 :  $\eta = 0.108$ , Ne = 830, Nn = 462Mesh 6 :  $\eta = 8.50 \times 10^{-2}$ , Ne = 1290, Nn = 704

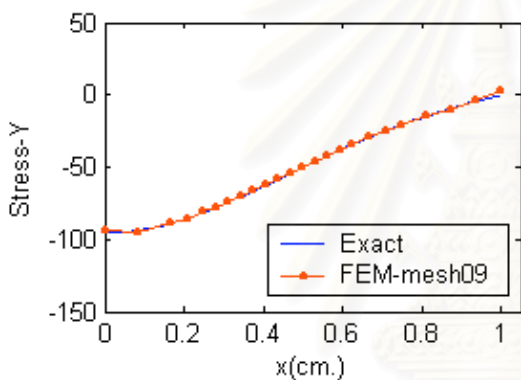
รูปที่ 4.2.7.(ก.) กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง  $y$  ตามแนว AB ของปัญหา  
 แฉงวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



Mesh 7 :  $\eta = 5.83 \times 10^{-2}$ , Ne = 2915, Nn = 1541



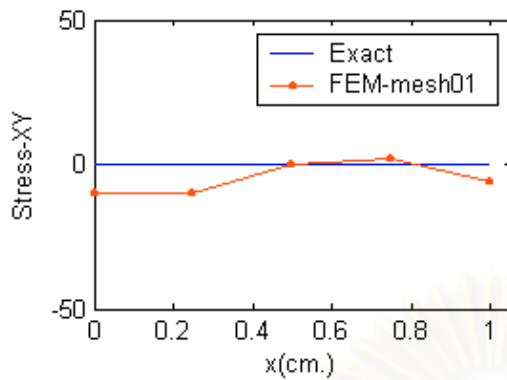
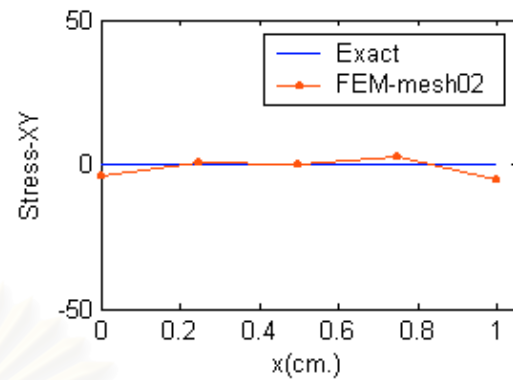
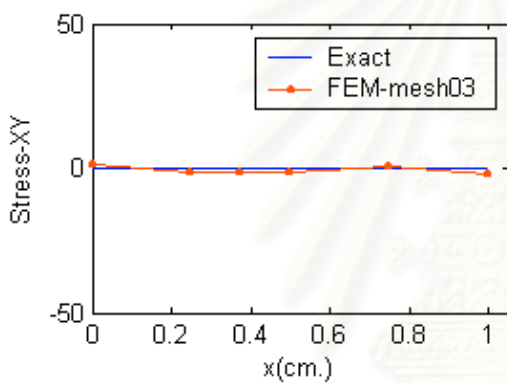
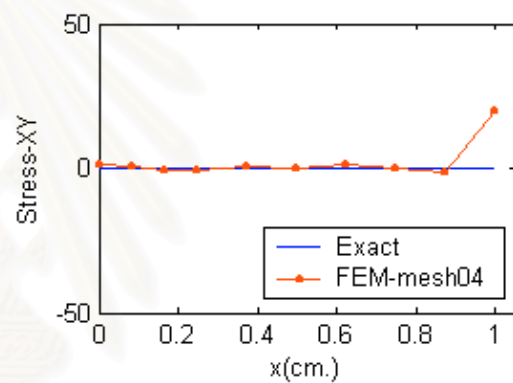
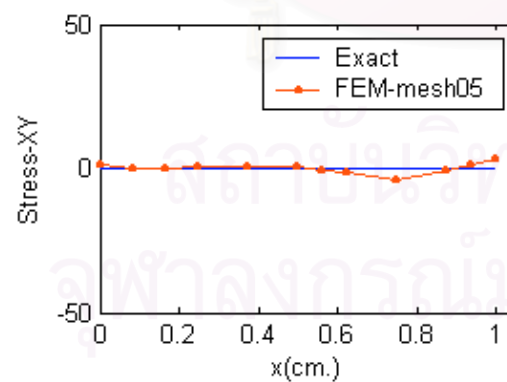
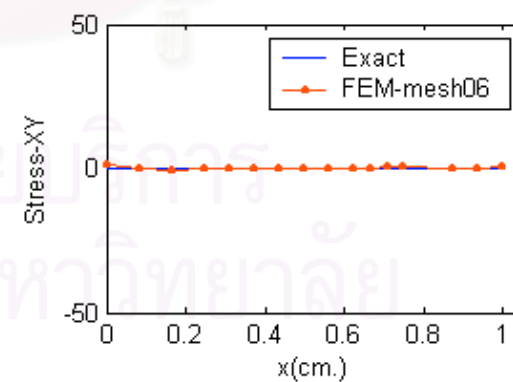
Mesh 8 :  $\eta = 5.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 3626, Nn = 1911



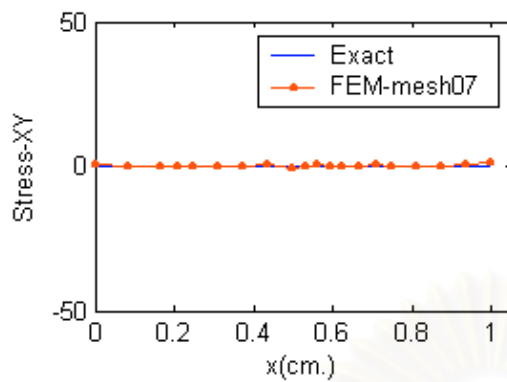
Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031

รูปที่ 4.2.7.(ข.) กราฟแสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหา  
แผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

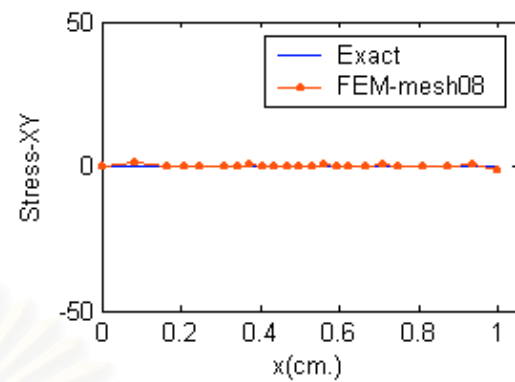
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Mesh 1 :  $\eta = 0.422$ , Ne = 36, Nn = 29Mesh 2 :  $\eta = 0.309$ , Ne = 84, Nn = 58Mesh 3 :  $\eta = 0.217$ , Ne = 199, Nn = 122Mesh 4 :  $\eta = 0.154$ , Ne = 435, Nn = 252Mesh 5 :  $\eta = 0.108$ , Ne = 830, Nn = 462Mesh 6 :  $\eta = 8.50 \times 10^{-2}$ , Ne = 1290, Nn = 704

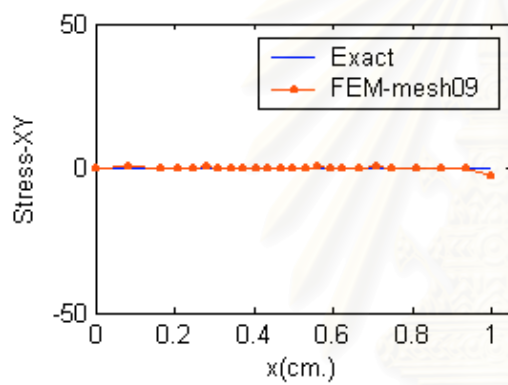
รูปที่ 4.2.8.(ก.) กราฟแสดงค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปเลียนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



Mesh 7 :  $\eta = 5.83 \times 10^{-2}$ , Ne = 2915, Nn = 1541



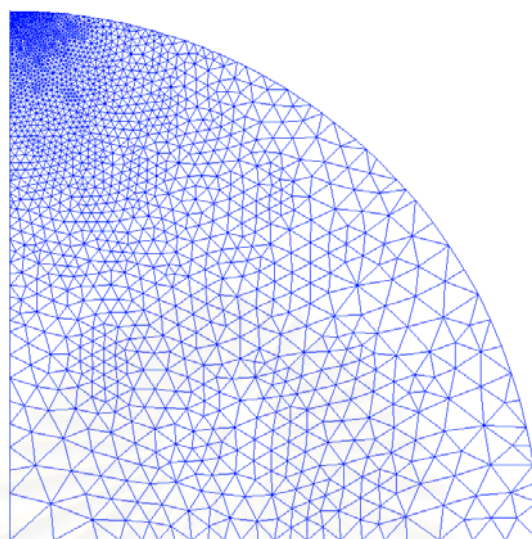
Mesh 8 :  $\eta = 5.12 \times 10^{-2}$ , Ne = 3626, Nn = 1911



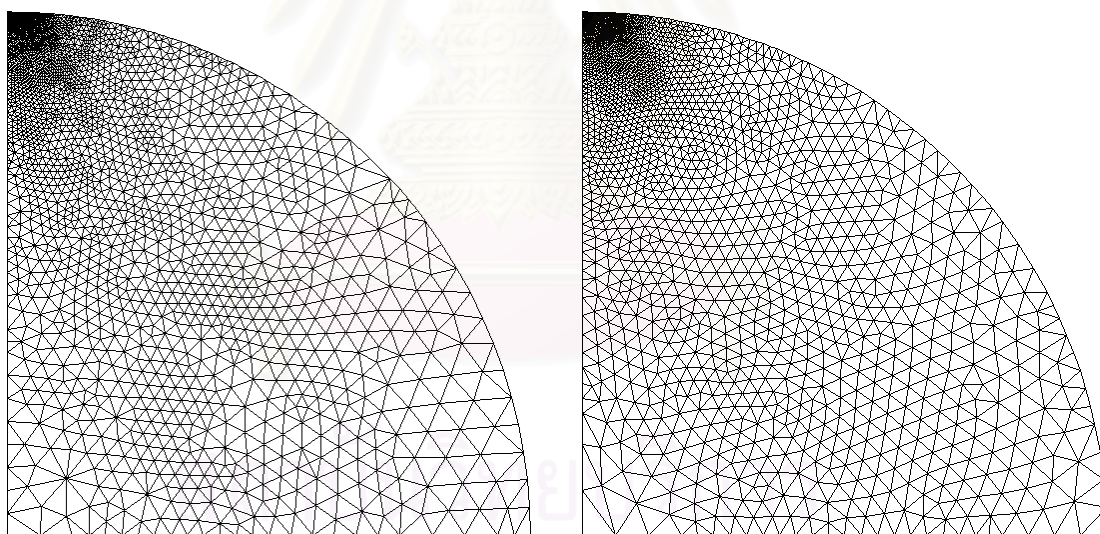
Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031

รูปที่ 4.2.8.(ข.) กราฟแสดงค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

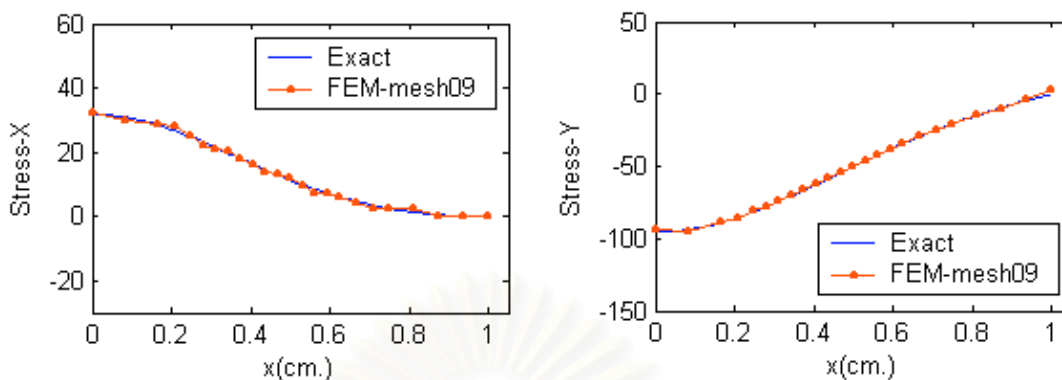


ก.) Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031

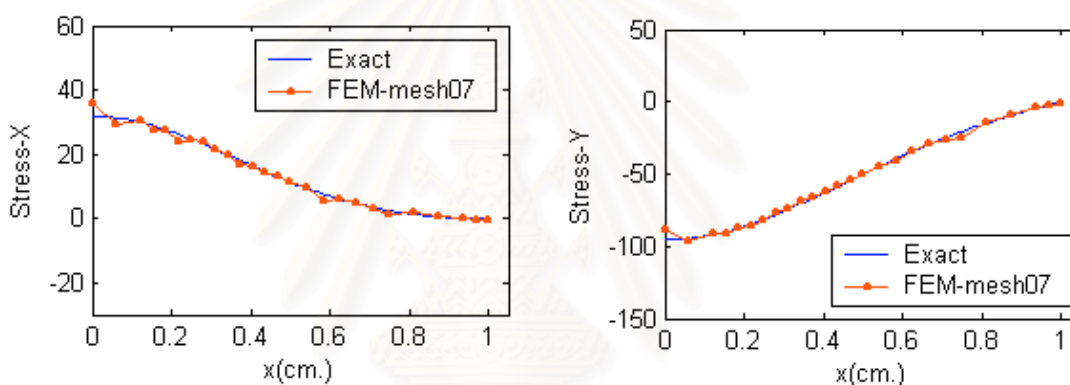


ข.) Mesh 7 :  $\eta = 4.58 \times 10^{-2}$ , Ne = 4575, Nn = 2399 ค.) Mesh 4 :  $\eta = 4.59 \times 10^{-2}$ , Ne = 4426, Nn = 2325

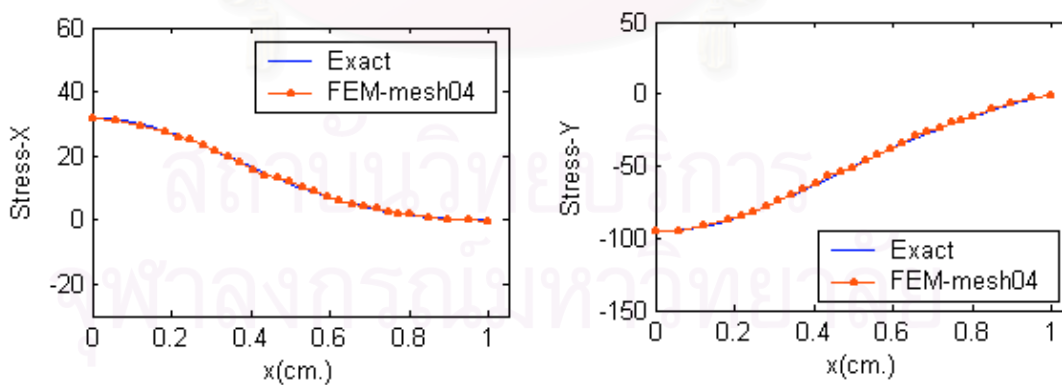
รูปที่ 4.2.9 เปรียบเทียบโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน



ก.) Mesh 9 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 3856, Nn = 2031



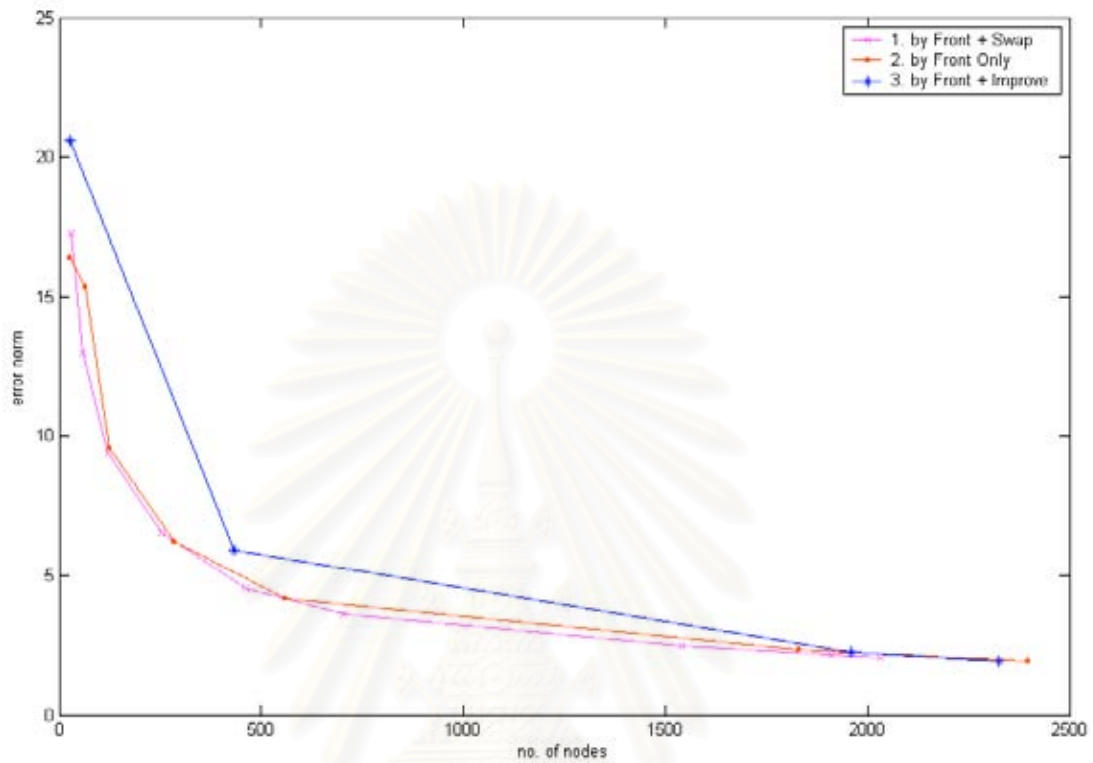
ข.) Mesh 7 :  $\eta = 4.58 \times 10^{-2}$ , Ne = 4575, Nn = 2399



ค.) Mesh 4 :  $\eta = 4.59 \times 10^{-2}$ , Ne = 4426, Nn = 2325

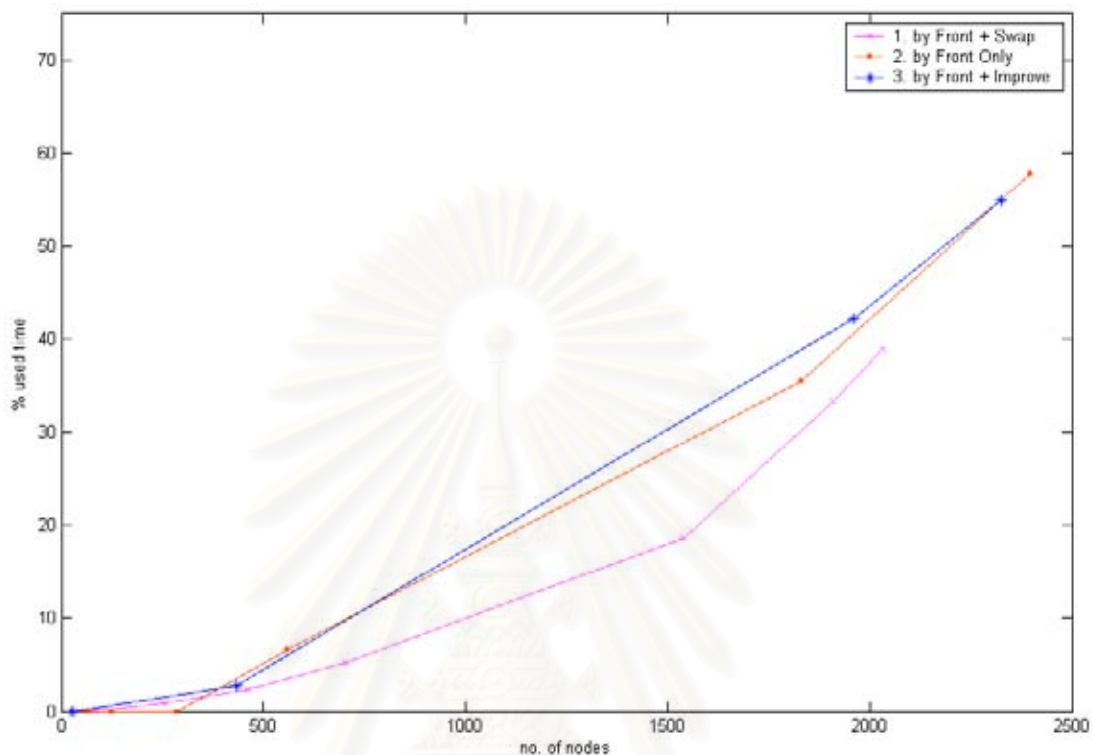
รูปที่ 4.2.10 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปติียนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน





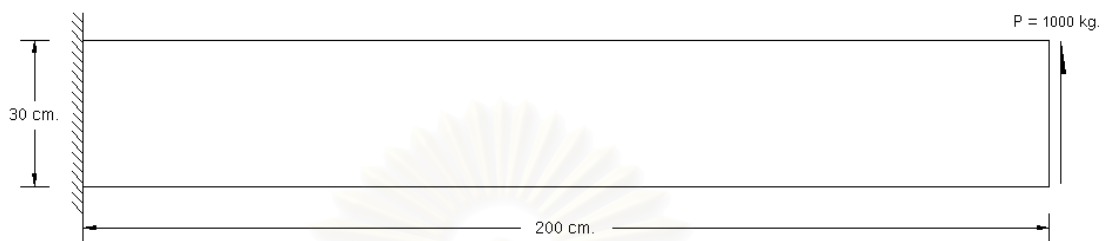
รูปที่ 4.2.11 เปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาแผ่นวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

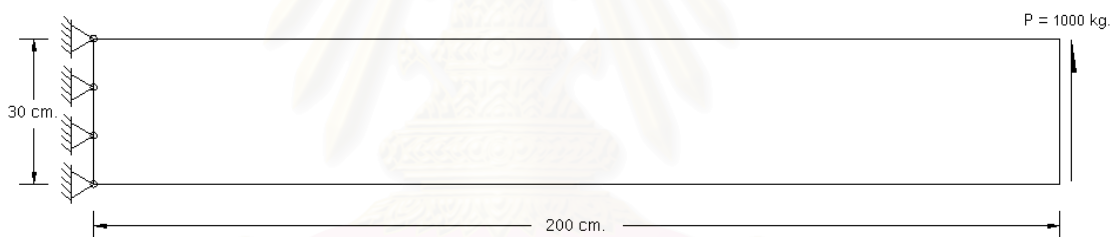


รูปที่ 4.2.12 เปรียบเทียบอัตราการใช้เวลาในการวิเคราะห์หาคำตอบของปัญหาผ่านวงกลมบางที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

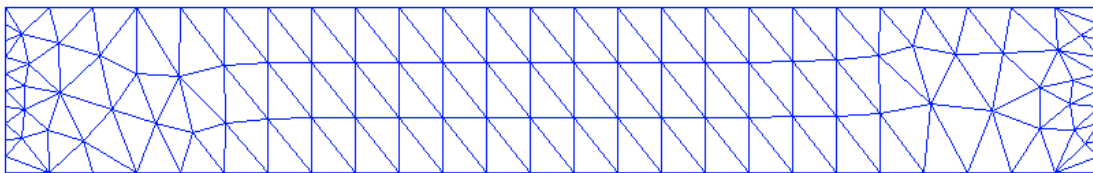


(ก.)

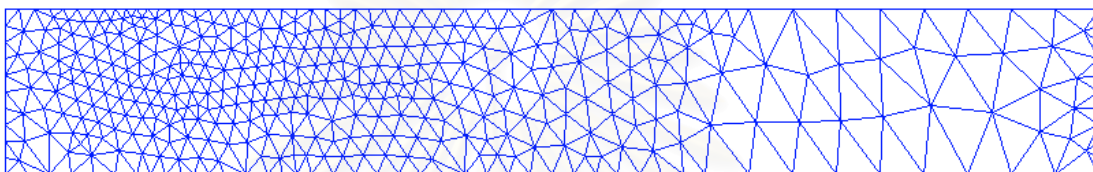


(ข.)

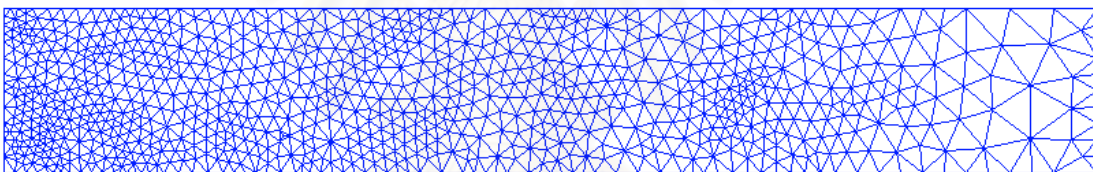
สถาบันวิทยบริการ  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
 รูปที่ 4.3.1 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระและแบบจำลองการวิเคราะห์



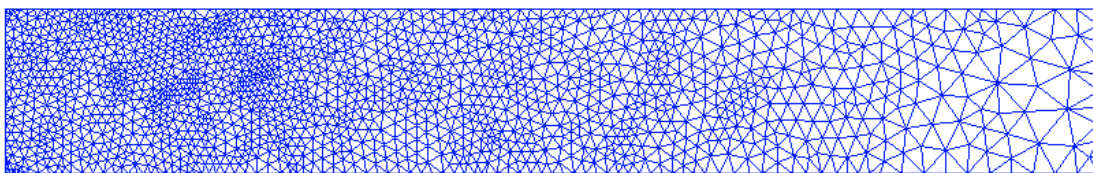
Mesh 1 :  $\eta = 0.494$ , Ne = 188, Nn = 130



Mesh 2 :  $\eta = 0.242$ , Ne = 727, Nn = 423

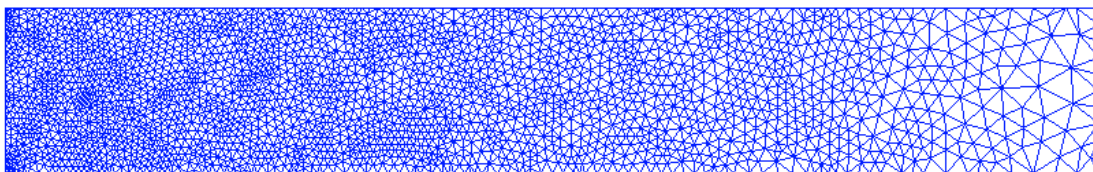


Mesh 3 :  $\eta = 0.158$ , Ne = 1658, Nn = 917

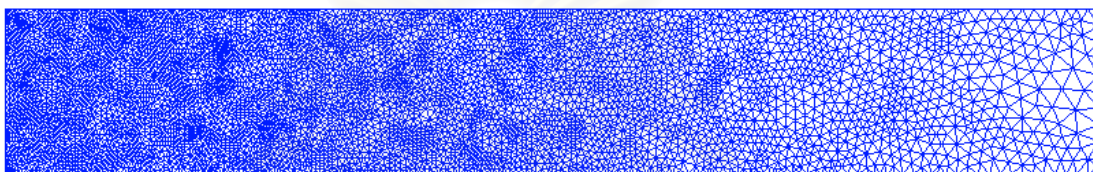


Mesh 4 :  $\eta = 0.110$ , Ne = 3126, Nn = 1687

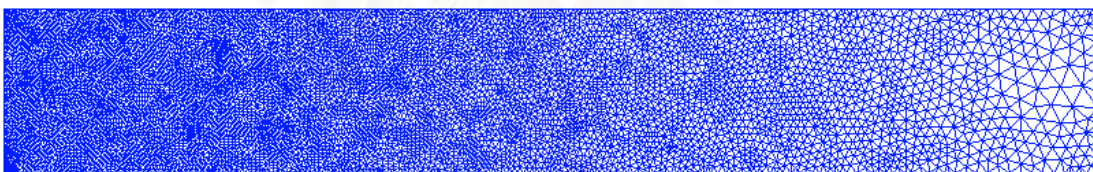
รูปที่ 4.3.2 (ก.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



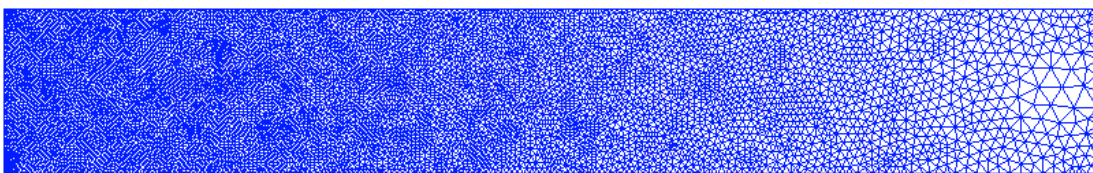
Mesh 5 :  $\eta = 8.58 \times 10^{-2}$ , Ne = 4982, Nn = 2640



Mesh 6 :  $\eta = 5.75 \times 10^{-2}$ , Ne = 11376, Nn = 5917



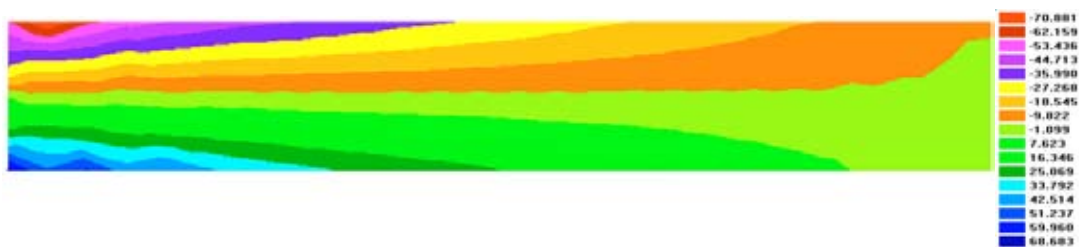
Mesh 7 :  $\eta = 5.07 \times 10^{-2}$ , Ne = 13848, Nn = 7196



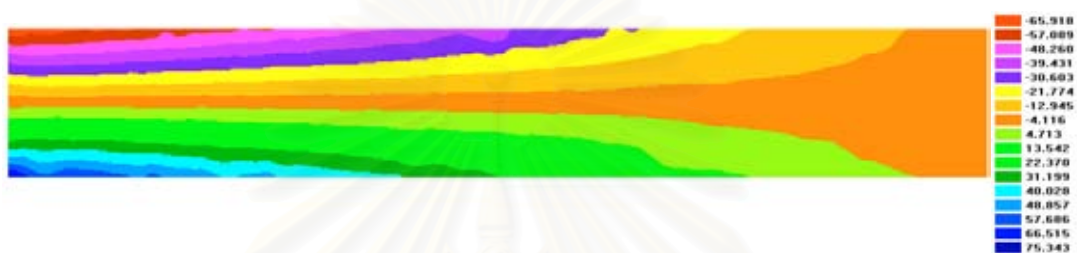
Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 14510, Nn = 7536

รูปที่ 4.3.2 (ข.) โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

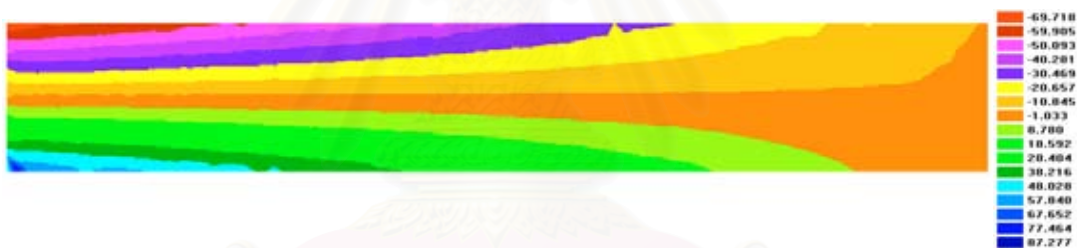




Mesh 1 :  $\eta = 0.494$ , Ne = 188, Nn = 130



Mesh 2 :  $\eta = 0.242$ , Ne = 727, Nn = 423

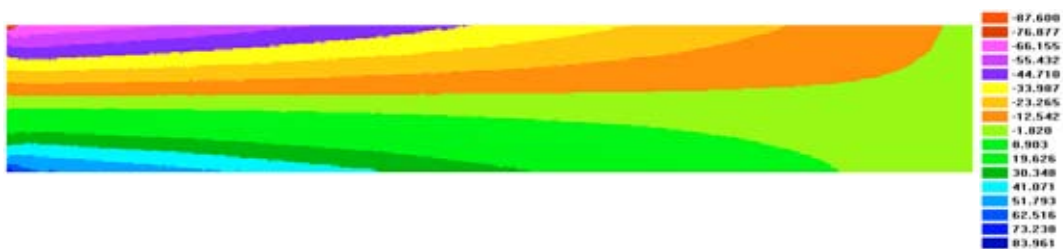


Mesh 3 :  $\eta = 0.158$ , Ne = 1658, Nn = 917

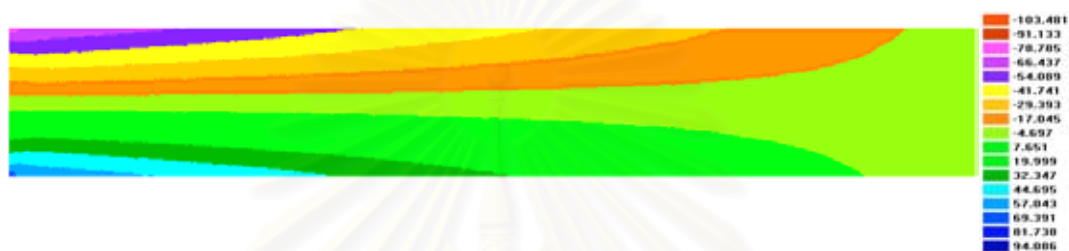


Mesh 4 :  $\eta = 0.110$ , Ne = 3126, Nn = 1687

รูปที่ 4.3.3 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



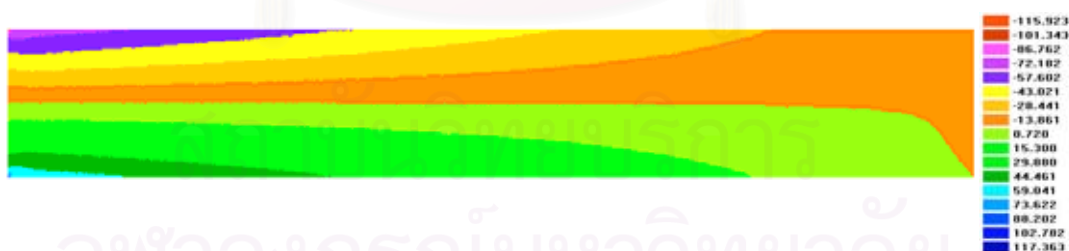
Mesh 5 :  $\eta = 8.58 \times 10^{-2}$ , Ne = 4982, Nn = 2640



Mesh 6 :  $\eta = 5.75 \times 10^{-2}$ , Ne = 11376, Nn = 5917



Mesh 7 :  $\eta = 5.07 \times 10^{-2}$ , Ne = 13848, Nn = 7196



Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 14510, Nn = 7536

รูปที่ 4.3.3 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า





Mesh 1 :  $\eta = 0.494$ , Ne = 188, Nn = 130



Mesh 2 :  $\eta = 0.242$ , Ne = 727, Nn = 423



Mesh 3 :  $\eta = 0.158$ , Ne = 1658, Nn = 917



Mesh 4 :  $\eta = 0.110$ , Ne = 3126, Nn = 1687

รูปที่ 4.3.4 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง  $y$  ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



Mesh 5 :  $\eta = 8.58 \times 10^{-2}$ , Ne = 4982, Nn = 2640



Mesh 6 :  $\eta = 5.75 \times 10^{-2}$ , Ne = 11376, Nn = 5917



Mesh 7 :  $\eta = 5.07 \times 10^{-2}$ , Ne = 13848, Nn = 7196

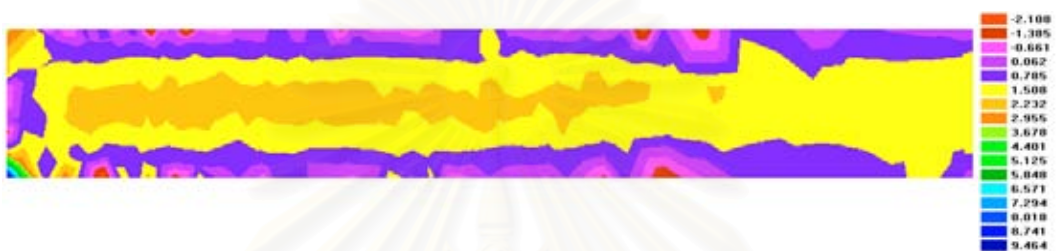


Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 14510, Nn = 7536

รูปที่ 4.3.4 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



Mesh 1 :  $\eta = 0.494$ , Ne = 188, Nn = 130



Mesh 2 :  $\eta = 0.242$ , Ne = 727, Nn = 423



Mesh 3 :  $\eta = 0.158$ , Ne = 1658, Nn = 917



Mesh 4 :  $\eta = 0.110$ , Ne = 3126, Nn = 1687

รูปที่ 4.3.5 (ก.) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแตกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



Mesh 5 :  $\eta = 8.58 \times 10^{-2}$ , Ne = 4982, Nn = 2640



Mesh 6 :  $\eta = 5.75 \times 10^{-2}$ , Ne = 11376, Nn = 5917

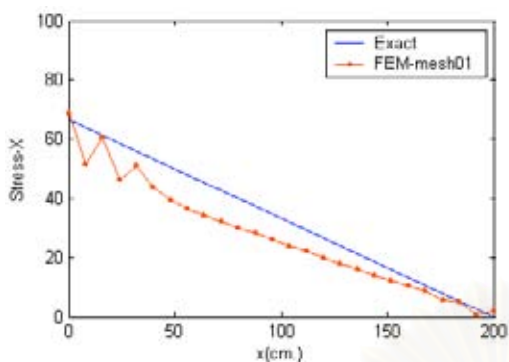
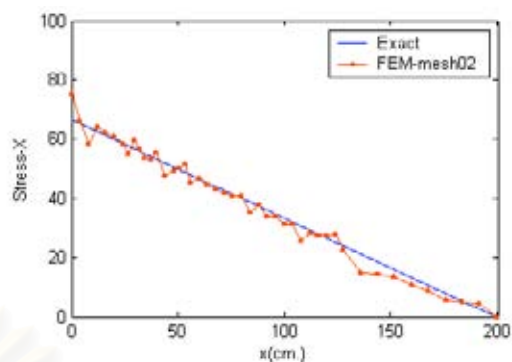
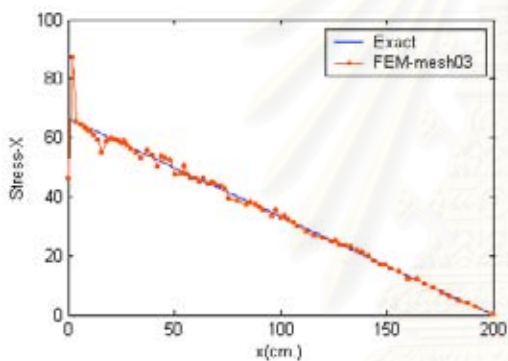
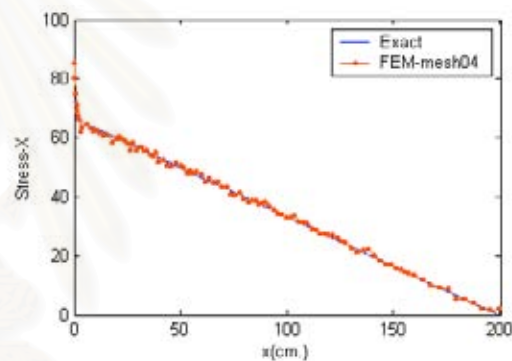


Mesh 7 :  $\eta = 5.07 \times 10^{-2}$ , Ne = 13848, Nn = 7196



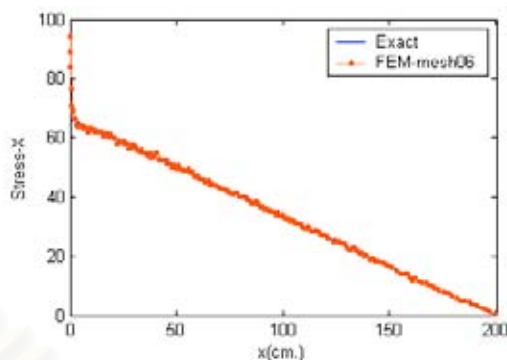
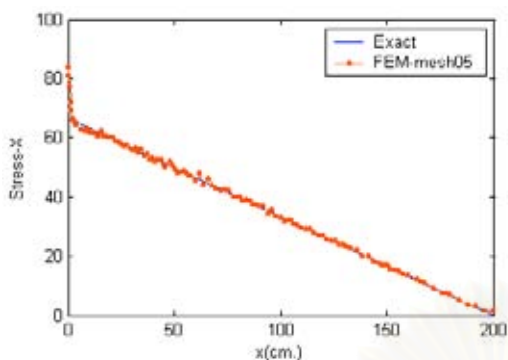
Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 14510, Nn = 7536

รูปที่ 4.3.5 (ข.) การกระจายของหน่วยแรงเฉือนของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

Mesh 1 :  $\eta = 0.494$ ,  $N_e = 188$ ,  $N_n = 130$ Mesh 2 :  $\eta = 0.242$ ,  $N_e = 727$ ,  $N_n = 423$ Mesh 3 :  $\eta = 0.158$ ,  $N_e = 1658$ ,  $N_n = 917$ Mesh 4 :  $\eta = 0.110$ ,  $N_e = 3126$ ,  $N_n = 1687$ 

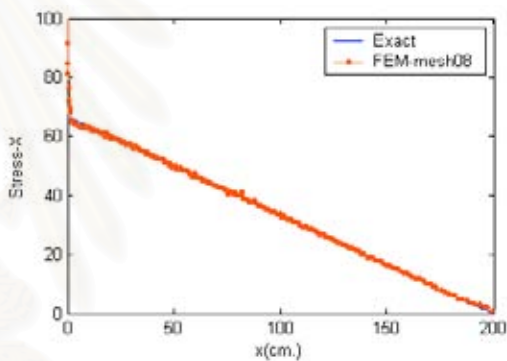
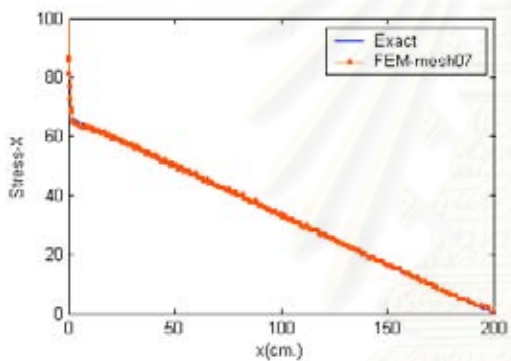
รูปที่ 4.3.6 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง  $x$  ตามแนวขอบล่างของปัญหาคาน  
ยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



Mesh 5 :  $\eta = 8.58 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 4982$ ,  $N_n = 2640$

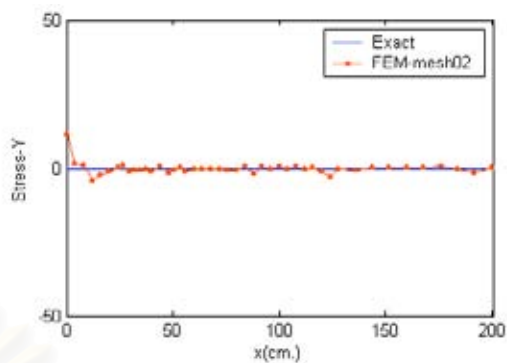
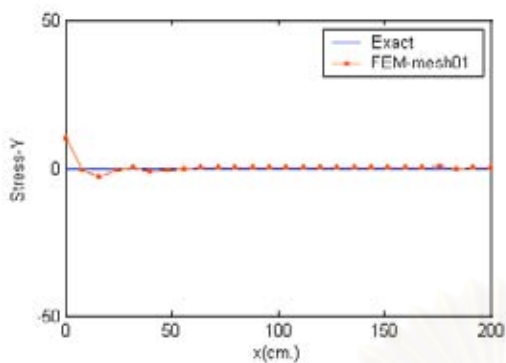
Mesh 6 :  $\eta = 5.75 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 11376$ ,  $N_n = 5917$



Mesh 7 :  $\eta = 5.07 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 13848$ ,  $N_n = 7196$

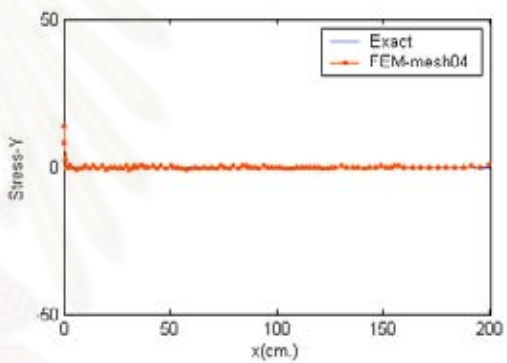
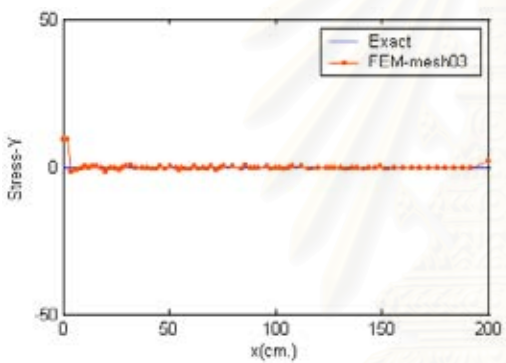
Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 14510$ ,  $N_n = 7536$

รูปที่ 4.3.6 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเบดเลียนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



Mesh 1 :  $\eta = 0.494$ , Ne = 188, Nn = 130

Mesh 2 :  $\eta = 0.242$ , Ne = 727, Nn = 423



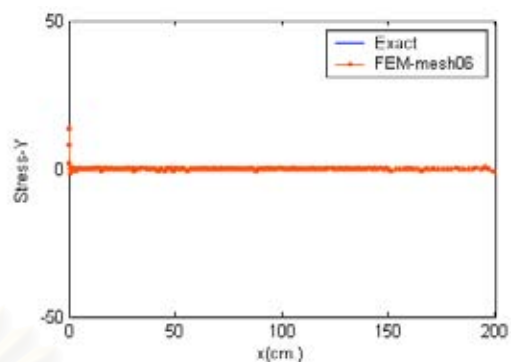
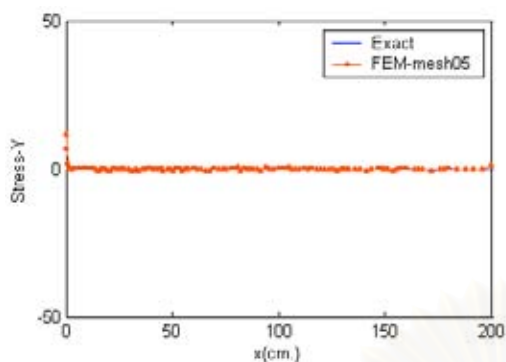
Mesh 3 :  $\eta = 0.158$ , Ne = 1658, Nn = 917

Mesh 4 :  $\eta = 0.110$ , Ne = 3126, Nn = 1687

รูปที่ 4.3.7 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเบเลียนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

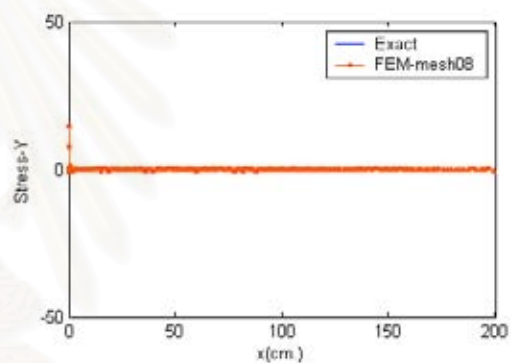
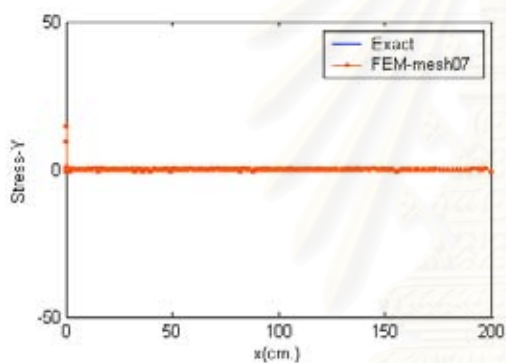
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





Mesh 5 :  $\eta = 8.58 \times 10^{-2}$ , Ne = 4982, Nn = 2640

Mesh 6 :  $\eta = 5.75 \times 10^{-2}$ , Ne = 11376, Nn = 5917

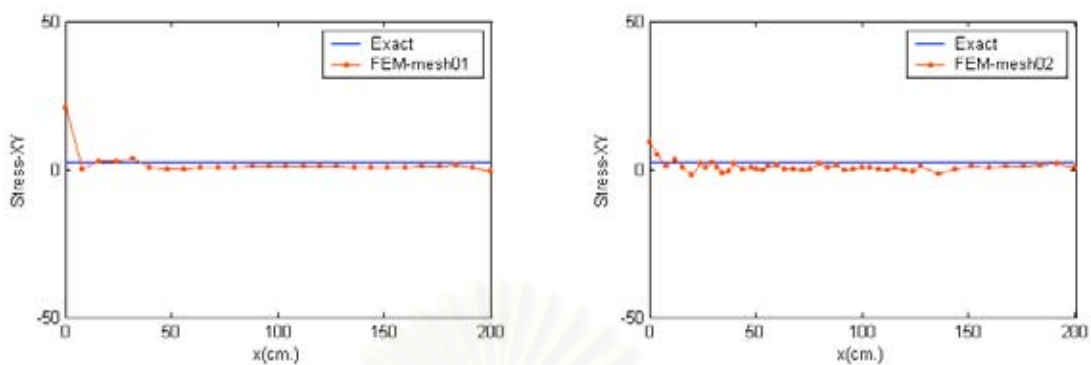


Mesh 7 :  $\eta = 5.07 \times 10^{-2}$ , Ne = 13848, Nn = 7196

Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 14510, Nn = 7536

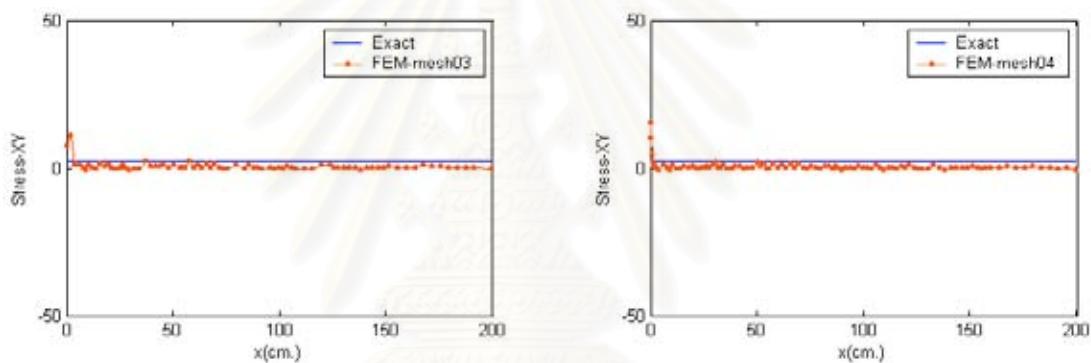
รูปที่ 4.3.7 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเบดเลียนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



Mesh 1 :  $\eta = 0.494$ , Ne = 188, Nn = 130

Mesh 2 :  $\eta = 0.242$ , Ne = 727, Nn = 423

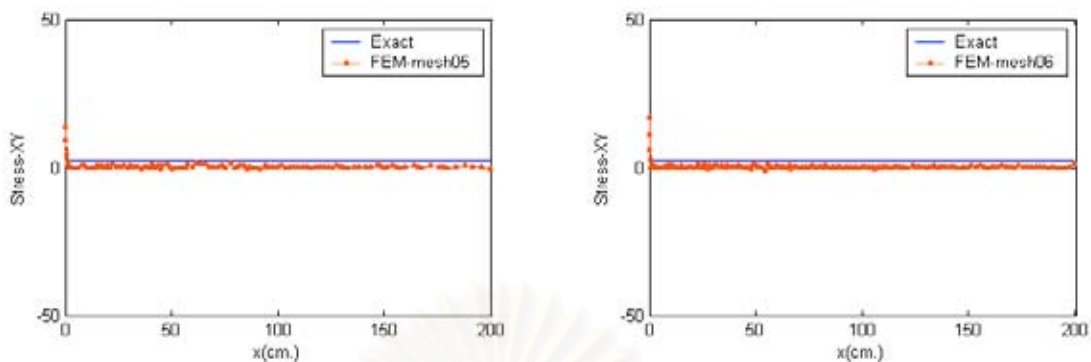


Mesh 3 :  $\eta = 0.158$ , Ne = 1658, Nn = 917

Mesh 4 :  $\eta = 0.110$ , Ne = 3126, Nn = 1687

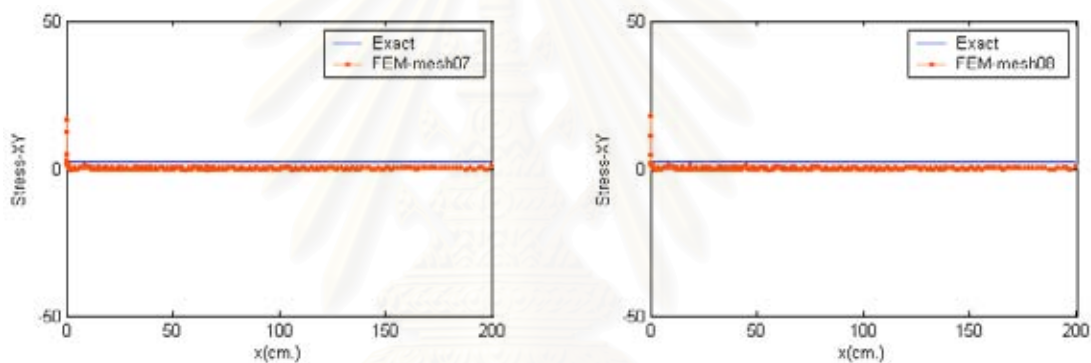
รูปที่ 4.3.8 (ก.) กราฟค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



Mesh 5 :  $\eta = 8.58 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 4982$ ,  $N_n = 2640$

Mesh 6 :  $\eta = 5.75 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 11376$ ,  $N_n = 5917$

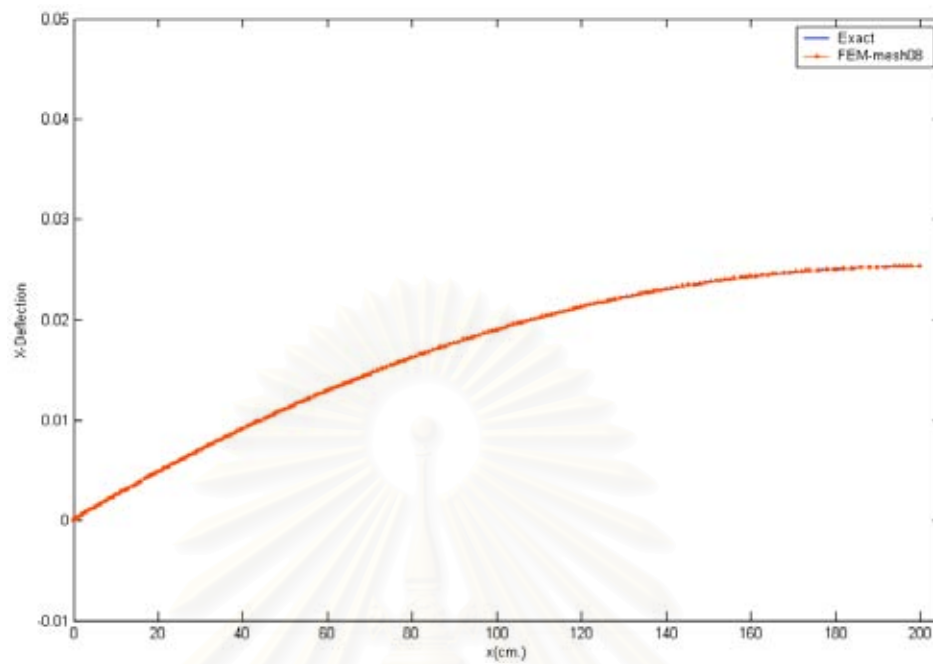


Mesh 7 :  $\eta = 5.07 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 13848$ ,  $N_n = 7196$

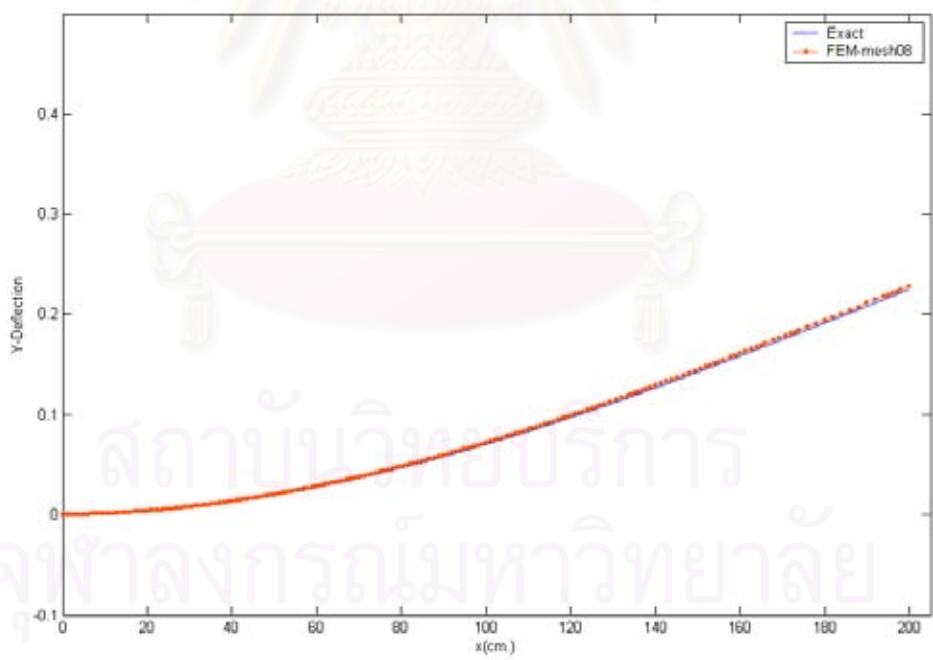
Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ ,  $N_e = 14510$ ,  $N_n = 7536$

รูปที่ 4.3.8 (ข.) กราฟค่าหน่วยแรงเฉือนตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

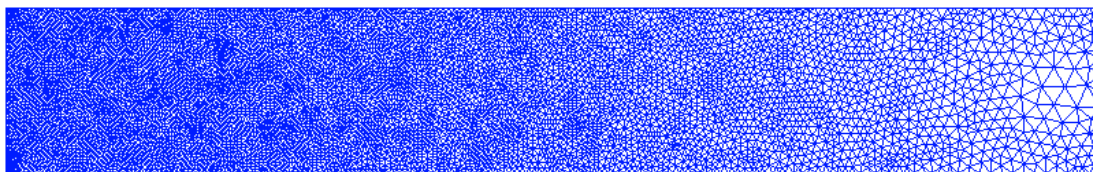


(ก.) การเคลื่อนที่ในแนวแกน X

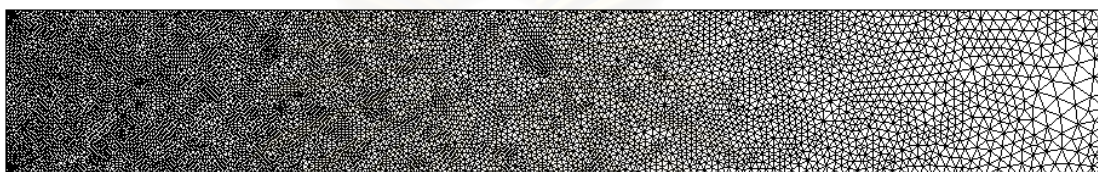


(ข.) การเคลื่อนที่ในแนวแกน Y

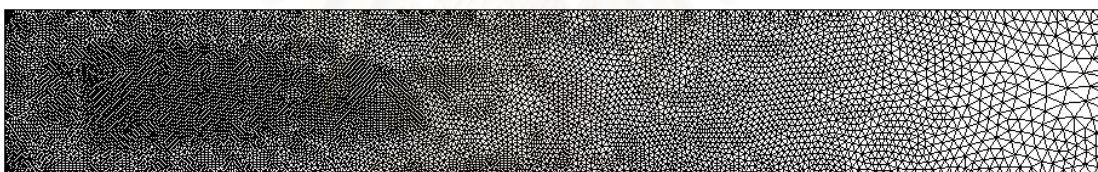
รูปที่ 4.3.9 กราฟค่าการเคลื่อนที่ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า



ก.) Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 14510, Nn = 7536

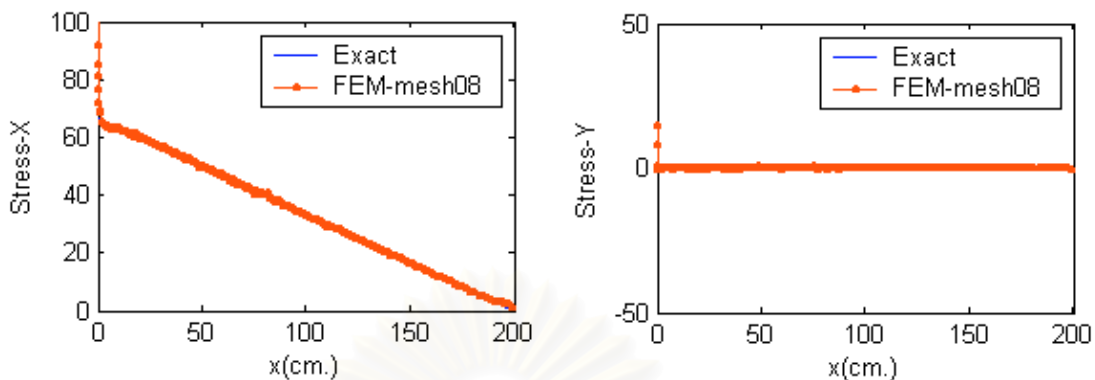


ข.) Mesh 8 :  $\eta = 4.86 \times 10^{-2}$ , Ne = 15432, Nn = 8010

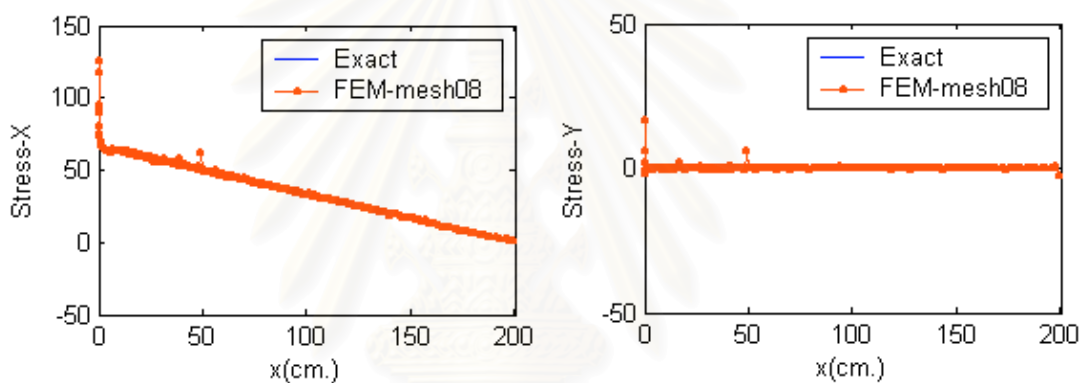


ค.) Mesh 4 :  $\eta = 4.64 \times 10^{-2}$ , Ne = 17335, Nn = 8990

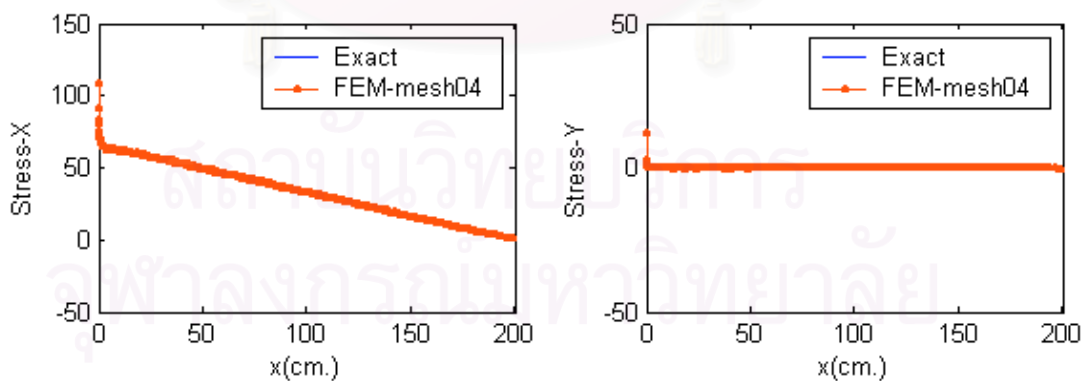
รูปที่ 4.3.10 เปรียบเทียบโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยี่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธี ฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน



น.) Mesh 8 :  $\eta = 4.91 \times 10^{-2}$ , Ne = 14510, Nn = 7536



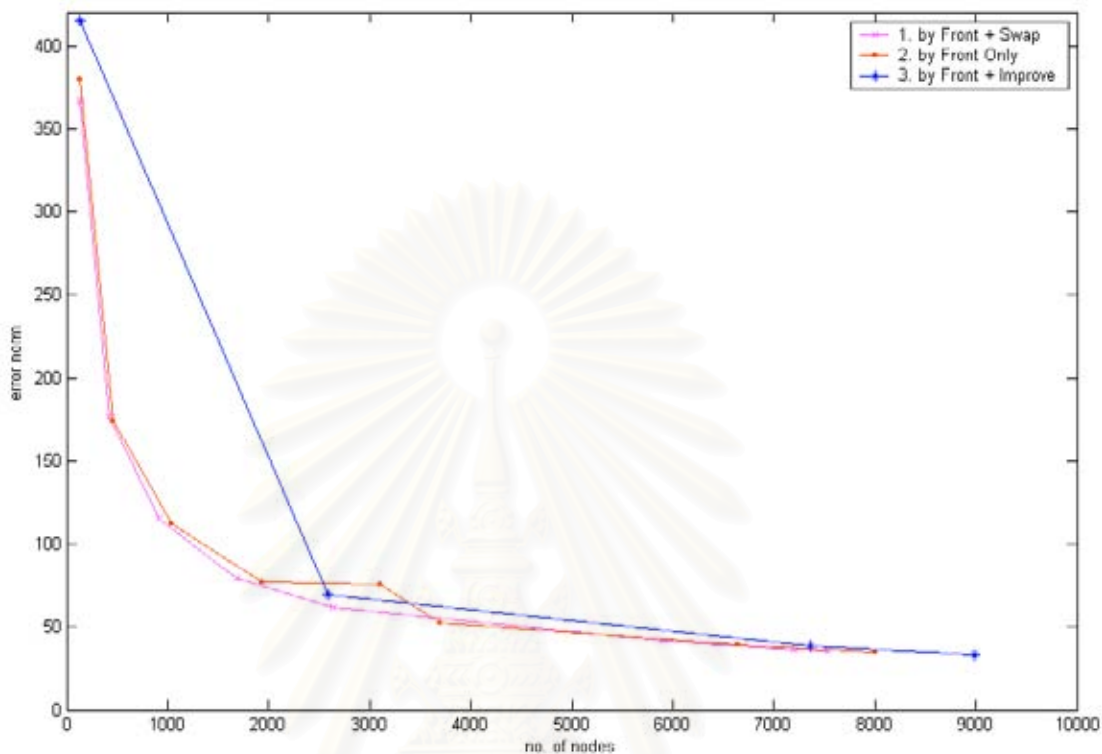
ข.) Mesh 8 :  $\eta = 4.86 \times 10^{-2}$ , Ne = 15432, Nn = 8010



ค.) Mesh 4 :  $\eta = 4.64 \times 10^{-2}$ , Ne = 17335, Nn = 8990

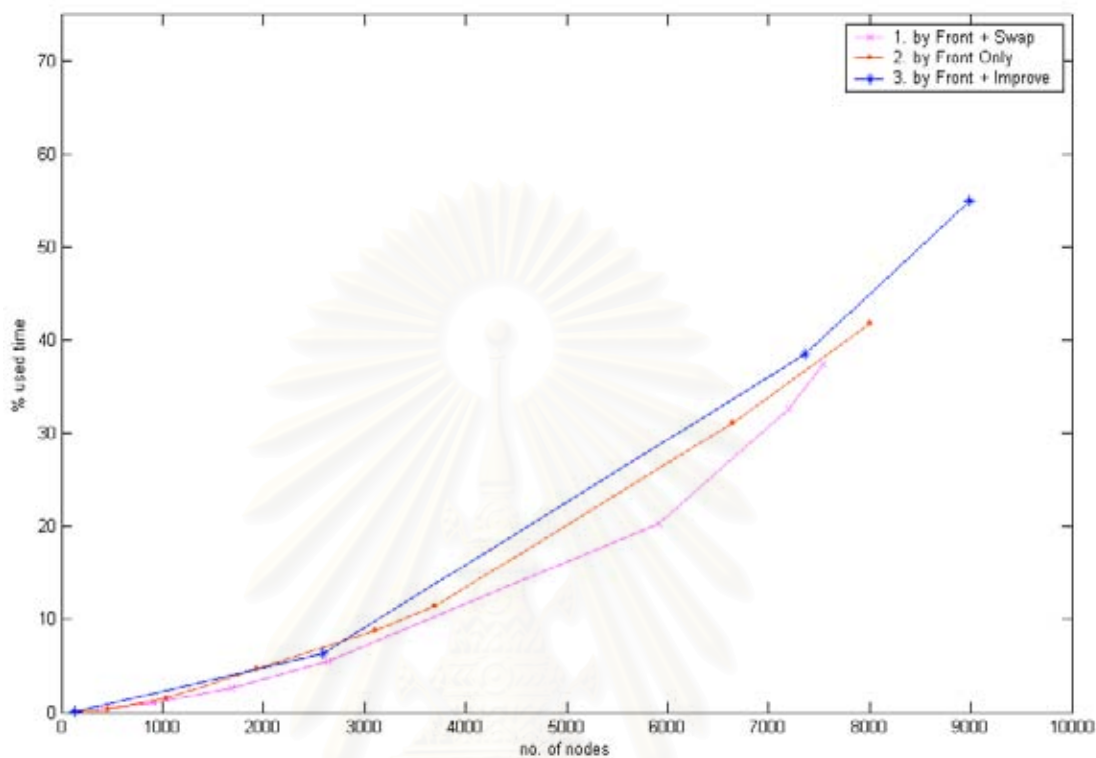
รูปที่ 4.3.11 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธี ฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน





รูปที่ 4.3.12 เปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.3.13 เปรียบเทียบอัตราการใช้เวลาในการวิเคราะห์หาคำตอบของปัญหาคานยี่สิบแรงกระทำที่ปลายอิสระที่สร้างขึ้นด้วย ก.) วิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า, ข.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียว, และ ค.) วิธีฟรอนต์เดินหน้าอย่างเดียวและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

#### 5.1 สรุปผลการวิจัย

การพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติในงานวิจัยนี้ ยังคงยึดหลักในการทำงานของโปรแกรมดั้งเดิม กล่าวคือ จากข้อมูลของปัญหา สร้างโครงข่ายขึ้น ส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอเนย์แทนระบบของปัญหา หากคำตอบจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วนำคำตอบที่หาได้มาหาค่าความคลาดเคลื่อนด้วยการเปรียบเทียบผลคำตอบที่ได้กับค่าประมาณของผลเฉลยที่ดีกว่าซึ่งหาได้จากวิธีการพื้นตัวเป็นหย่อม จากนั้นทำการปรับขนาดขึ้นส่วนโดยการเพิ่มจุดลงในบริเวณพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก โดยคำนวณความหนาแน่นของจุดจากความคลาดเคลื่อนโดยประมาณ แล้วทำการคำนวณใหม่จนกระทั่งได้ค่าความคลาดเคลื่อนในระดับที่กำหนด

ในส่วนของการพัฒนาโปรแกรมที่เพิ่มเติมเข้ามานั้น จะเป็นการพัฒนากระบวนการสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยม ซึ่งจากเดิมจะใช้วิธีฟรอนต์เดินหน้าเพียงวิธีเดียว ก็ทำการเพิ่มวิธีแลกเปลี่ยนเข้ามาช่วย เพื่อให้สามารถสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ดีขึ้นและใช้เวลาในการสร้างขึ้นส่วนได้น้อยลง โดยเฉพาะในช่วงสุดท้ายของการวิเคราะห์ที่จะมีจุดข้อมูลมาก หากใช้วิธี ฟรอนต์เดินหน้าเพียงอย่างเดียวจะเสียเวลามาก โดยผลจากการนำวิธีแลกเปลี่ยนมาใช้กับโปรแกรมในงานวิจัย ทำให้ได้ผลสรุปดังนี้

1. ในด้านของการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน จะให้ค่าที่ค่อนข้างใกล้เคียงกับวิธีเดิม โดยมีรูปร่างของขึ้นส่วนและมีขนาดที่ใกล้เคียงกัน ในขณะที่การปรับขนาดขึ้นส่วนโดยการเพิ่มจุดในแต่ละรอบนั้น จะใช้เวลาที่น้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในแต่ละรอบกับเวลาทั้งหมด โดยยังทำให้ผลการวิเคราะห์ยังคงได้ในระดับที่น่าพอใจดังเดิม

2. ในบางจุดของการเพิ่มจุดลงในโครงข่ายนั้น การแลกเปลี่ยนขึ้นส่วนอาจทำให้ได้ขึ้นส่วนที่มีรูปร่างไม่เหมาะสม เกิดจากการแลกเปลี่ยนทำเฉพาะจุดที่แทรกกับสามเหลี่ยมใกล้เคียง ทำให้ได้ชุดของสามเหลี่ยมที่มีจุดที่แทรกเป็นจุดศูนย์กลาง ซึ่งทำให้การกระจายของขนาดในบริเวณนี้ไม่ดีนัก ซึ่งวิธีการปรับปรุงคุณภาพของขึ้นส่วนอาจสามารถลดปัญหาตรงจุดนี้ได้

3. อัตราการลู่เข้าสู่ค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดของแต่ละปัญหา เมื่อเปรียบเทียบกันในทุกกรณีแล้ว พบว่าด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้ายังคงมีอัตราการลู่เข้า

ใกล้เคียงกับวิธีฟรอนต์อย่างเดียว และต่ำกว่าด้วยวิธีฟรอนต์อย่างเดียวรวมกับการปรับปรุงคุณภาพของชิ้นส่วน ซึ่งเป็นเพราะการกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ของแต่ละรอบในการวิเคราะห์ของวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดิมนั้นยังคงเป็นการเฉลี่ยระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละรอบกับค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดในกรณีที่มีค่าความคลาดเคลื่อนในรอบนั้นมากกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนด 2 เท่า จึงทำให้การเพิ่มจุดข้อมูลใหม่ค่อยเป็นค่อยไป เพื่อป้องกันการเพิ่มจุดข้อมูลในบริเวณที่ไม่จำเป็น

4. โดยสรุป โปรแกรมที่ได้จากการวิจัยนี้ สามารถวิเคราะห์ผลได้แม่นยำ ซึ่งในการนำไปใช้งานจริงนั้น ผู้ใช้จำเป็นต้องมีความรู้ในการกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้และการกำหนดโครงข่ายเริ่มต้น รวมทั้งการสร้างแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์ที่เหมาะสมกับปัญหาซึ่งจะแตกต่างกันออกไปในแต่ละกรณี เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการทำงานของโปรแกรม

#### ข้อเสนอแนะ

ในส่วนของការวิเคราะห์เมื่อนำมาใช้งานนั้น หากมีการพิจารณาปรับเปลี่ยนเพิ่ม-ลดจุดในการสร้างโครงข่ายได้ จะส่งผลให้การปรับปรุงขนาดของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยเฉพาะในส่วนของปัญหาที่บริเวณขอบที่ควรมีการปรับเปลี่ยนตำแหน่งเพื่อให้ได้โครงข่ายที่นำมาหาค่าตอบได้อย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสมมากขึ้น โดยจะช่วยลดเวลาในส่วนของการคำนวณจุดต่อที่ไม่จำเป็นลงได้

การประยุกต์กับชิ้นส่วนอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ชิ้นส่วนสามเหลี่ยม สามารถทำได้เช่นกันโดยการแปลงรูปจากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ได้นี้ ซึ่งในปัจจุบันก็มีผู้พัฒนาวิธีการแปลงรูปได้หลายวิธีแล้ว

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## รายการอ้างอิง

1. W. J. Schroeder and M. S. Shephard . Geometry-Based Fully Automatic Mesh Generation and the Delaunay Triangulation. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 26 (1988) : 2503-2515.
2. N. P. Weatherill. The Integrity of Geometrical Boundaries in the Two-Dimensional Delaunay Triangulation. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 6 (1990) : 101-109.
3. S. H. Lo. A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 21 (1985) : 1403-1426.
4. S. H. Lo. Delaunay Triangulation of Non-Convex Planar Domains. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 28 (1989) : 2695-2707.
5. H. Borouchaki and Paul Louis George. Aspects of 2-D Delaunay Mesh Generation. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 40 (1997) : 1957-1975.
6. B. K. Karamete, T. Tokdemir and M. Ger. Unstructured Grid Generation and a Simple Triangulation Algorithm for Arbitrary 2-D Geometries Using Object Oriented Programming. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 40 (1997) : 251-268.
7. N. P. Weatherill and O. Hassan. Efficient Three-Dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 37 (1994) : 2005-2039.
8. A. Bowyer. Computing Dirichlet Tessellations. The Computer Journal. 24-2 (1981) : 162-172.
9. L. De Floriani, B. Falcidieno, and C. Pienovi. Delaunay-based Representation of Surfaces Defined over Arbitrarily Shaped Domains. Computer Vision, Graphics, and Image Processing 32 (1985) : 127-140.
10. S. W. Sloan. A Fast Algorithm for Constructing Delaunay Triangulations in the Plane. Advances in Engineering Software 9 (1987) : 34-55.
11. J. Bonet and J. Peraire. An Alternating Digital Tree (ADT) Algorithm for 3D Geometric Searching and Intersection Problems. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 31 (1991) : 1-17.
12. C. L. Lawson. Software for  $C^1$  Surface Interpolation.

13. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A Simple Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 24 (1987) : 337-357.
14. M. Ainsworth, J. Z. Zhu, A. W. Craig, Zienkiewicz O. C. Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 28 (1989) : 2161-2174.
15. J. Z. Zhu and O. C. Zienkiewicz. Superconvergence Recovery Technique and a Posteriori Error Estimators. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 30 (1990) : 1321-1339.
16. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. Adaptivity and Mesh Generation. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 32 (1991) : 783-810.
17. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates Part 1 : The Recovery Technique. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 33 (1992) : 1331-1364.
18. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates Part 2 : Error Estimates And Adaptivity. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 33 (1992) : 1365-1382.
19. A. Mar and M. A. Hicks. A Benchmark Computational Study of Finite Element Error Estimation. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 39 (1996) : 3969-3983.
20. M. A. Ajiz and A. Jennings. A Robust Incomplete Choleski-Conjugate Gradient Algorithm. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 20 (1984) : 949-966.
21. Lucien A. Schmit Jr. and Ye-Chen Lai. Structural Optimization Based on Preconditioned Conjugate Gradient Analysis Methods. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 37 (1994) : 949-964.
22. J. K. Dickinson and P. A. Forsyth. Preconditioned Conjugate Gradient Methods for Three-Dimensional Linear Elasticity. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 37 (1994) : 2211-2234.
23. V. E. Bulgakov and G. Kuhn. High-Performance Multilevel Iterative Aggregation Solver for Large Finite-Element Structural Analysis Problems. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 38 (1995) : 3529-3544.



24. P. Saint-Georges, G. Warzee, R. Beauwens and Y. Notay. High-Performance PCG Solvers for FEM Structural Analysis. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 39 (1996) : 1313-1340.
25. J. Fish and R. Guttal. Adaptive Solver for the p-Version of Finite Element Method. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 40 (1997) : 1767-1784.
26. I. Hladik, M. B. Reed and G. Swoboda. Robust Preconditioners for Linear Elasticity FEM Analyses. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 40 (1997) : 2109-2127.
27. E. Graham and P. A. Forsyth. Preconditioning Methods for Very Ill-Conditioned Three-Dimensional Linear Elasticity Problems. Int. J. Numer. Meth. in Eng. 44 (1999) : 77-99.
28. เทอดเกียรติ จันทวัชรากร. โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโครงสร้าง บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
29. รัฐพล สุวรรณพฤกษ์. โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติโดยใช้วิธีการปรับเรียบเชิงมุม. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโครงสร้าง บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## การใช้งานโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมมีการทำงานโดยอาศัยการนำเข้าข้อมูลจากแฟ้มข้อมูลเป็นหลัก ดังนั้น แฟ้มข้อมูลจึงเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดสำหรับผู้ใช้งาน ซึ่งมีรายละเอียดของแฟ้มดังนี้ โดยจะยกตัวอย่างจากการวิเคราะห์ปัญหาในตัวอย่างที่ 1 ในบทที่ 4 ดังแสดง โดยได้เพิ่มหมายเลขบรรทัดเพื่อความสะดวกในการอ้างอิง

ในส่วนแรกของแฟ้ม บรรทัดที่ 1 - 6 จะเป็นการกำหนดลักษณะของปัญหา ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ และคุณสมบัติทางวัสดุของปัญหาซึ่งสามารถเข้าใจได้โดยง่าย และในลำดับต่อมาในบรรทัดที่ 8 จะเป็นค่าพิกัดที่มุมล่างซ้ายและมุมบนขวาของพื้นที่ที่จะกำหนดให้ ADT เพื่อใช้แบ่งเขตพื้นที่ให้กับจุดข้อมูลต่อไป

ส่วนถัดมาในบรรทัดที่ 10 เป็นจำนวนของขอบเขตปัญหาและในบรรทัดที่ 12 - 18 เป็นข้อมูลของแต่ละขอบเขตโดยมีข้อมูลเรียงลำดับดังนี้ หมายเลขประจำขอบเขต, ค่าพิกัดในแนวแกน  $x$  ของจุดเริ่มต้น, ค่าพิกัดในแนวแกน  $y$  ของจุดเริ่มต้น, ค่าพิกัดในแนวแกน  $x$  ของจุดปลาย, ค่าพิกัดในแนวแกน  $y$  ของจุดปลาย, ค่ารัศมีของเส้นขอบเขตซึ่งกำหนดให้มีค่าเป็นบวกเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ด้านซ้ายมือของเส้นขอบเขต และมีค่าเป็นลบเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ด้านขวามือของเส้นขอบเขต และมีค่าเป็น 0 เมื่อเป็นเส้นตรง, สูตรทำยคือค่าจำนวนขอบเขตย่อยที่จะแบ่งจากเส้นขอบเขตนั้น ๆ

ข้อมูลถัดมาในบรรทัดที่ 20 เป็นข้อมูลของที่รองรับ ซึ่งระบุจำนวนของที่รองรับ ในขณะที่รายละเอียดของที่รองรับ จะระบุในส่วนถัดไปตั้งแต่บรรทัดที่ 22-25 โดยมีข้อมูลของที่รองรับที่ระบุคือ หมายเลขของเส้นขอบเขตที่จะอ้างอิงถึง, ชนิดของที่รองรับว่าเป็นเฉพาะจุดหรือรองรับตลอดทั้งแนวเส้นขอบเขต โดยหากเป็นเฉพาะจุด ระบุเป็น 0 และหากรองรับตลอดระบุเป็น 1, จากนั้นเป็นกำหนดทิศทางในการเคลื่อนที่ได้ของที่รองรับในทิศทางแนว  $x$  โดยหากในทิศทางใดเคลื่อนที่ได้ ระบุเป็น 0 ในขณะที่หากเคลื่อนที่ไม่ได้ระบุเป็น 1 และระบุในทำนองเดียวกันกับที่รองรับในทิศทาง  $y$

จากนั้นจะเป็นส่วนของข้อมูลแรงที่กระทำ โดยเริ่มต้นในบรรทัดที่ 27 เป็นการระบุจำนวนของแรงกระทำ และในบรรทัดที่ 29 จะเป็นการระบุรายละเอียดของแรงที่กระทำ ซึ่งจะประกอบด้วย หมายเลขของขอบเขตที่จะอ้างอิงถึง, ชนิดของแรงที่กระทำว่าเป็นจุดหรือตลอดทั้งเส้นขอบ โดยหากเป็นจุดระบุด้วย 0 ในขณะที่หากกระทำตลอดเส้นขอบระบุด้วย 1, ค่าของแรงที่กระทำโดยในทิศทาง  $x$  และ  $y$  ของจุดเริ่มเส้นขอบ, ถัดมาในทำนองเดียวกันกับที่จุดปลาย โดยหากเป็นแรงกระทำเป็นจุด ก็ไม่ต้องระบุแรงในส่วนของจุดปลายของเส้นขอบ

ซึ่งการนำมาใช้งาน จะต้องมีการเปิดไฟล์ข้อมูลเข้ามา และหลังจากทำการวิเคราะห์เสร็จแล้ว โปรแกรมจะเก็บผลของการวิเคราะห์ในส่วนของแฟ้มข้อมูลในชื่อเดียวกับชื่อแฟ้มข้อมูลที่นำเข้าไป ด้วยตัวเลขระบุจำนวนรอบที่ทำการวิเคราะห์

ในขณะที่โปรแกรมยังสามารถแสดงผลการวิเคราะห์ออกทางหน้าต่างแสดงผลของโปรแกรมได้ทันที ทั้งในส่วนของโครงข่ายชิ้นส่วนที่สร้างขึ้นหรือค่าหน่วยแรงในทิศทางต่าง ๆ

```

1      Plane Type<plane stress=0 , plane strain=1>
2      0
3      Expected Error
4      0.01
5      Material Properties <E ; nu ; Thickness >
6      2e6 ; 0.3 ; 0.1 ;
7      Limit of Search <lowerleft (x,y) : upperright (x,y)>
8      0 , 0 ; 20.0 , 20.0 ;
9      Number of Boundary
10     7
11     Boundary List <Boundary No. : (x1,y1) ; (x2,y2) ; Radius ; Segment>
12     1 ; 0,20 ; 0 , 8 ; 0 ; 8;
13     2 ; 0 , 8 ; 0 , 2 ; 0 ; 5;
14     3 ; 0 , 2 ; 2 , 0 ; -2 ; 3;
15     4 ; 2 , 0 ; 8 , 0 ; 0 ; 5;
16     5 ; 8 , 0 ; 20 , 0 ; 0 ; 9;
17     6 ; 20 , 0 ; 20 , 20 ; 0 ; 9;
18     7 ; 20 , 20 ; 0 , 20 ; 0 ; 9;
19     Number of Support
20     4
21     Support List <Boundary No. ; Type : Point/Line(0/1) ; Movable x , y : Fix/Free(1/0)>
22     1 ; 1 ; 1 ; 0;
23     2 ; 1 ; 1 ; 0;
24     4 ; 1 ; 0 ; 1;
25     5 ; 1 ; 0 ; 1;
26     Number of Load
27     1
28     Load List <Boundary No. ; Type : Point/Line(0/1) ; X1,Y1 value ; X2,Y2 value <if point, neglect X2, Y2 value>>
29     7 ; 1 ; 0,100 ; 0,100;
30     Text size & Displacement scale
31     0.02 50
32     End.

```

รูป ผ.ก.1 ตัวอย่างแฟ้มนำเข้าข้อมูล

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสุรชาญ แซ่ลี เกิดเมื่อวันที่ 24 ตุลาคม พ.ศ. 2517 ที่จังหวัดศรีสะเกษ เข้ารับการศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนกำแพง จังหวัดศรีสะเกษ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ในปีการศึกษา 2538 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2542



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย