บทที่ 2
ทฤษฎีและตัวสถิติที่เกี่ยวข้อง

ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นทั่วไปสามารถเขียนในรูปสมการการถดถอยได้ดังนี้

(2.1) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \quad , i = 1,2,\ldots,n$$

เมื่อ y_i คือ ค่าสังเกต

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ คือ สัมประสิทธิ์การถดถอย

$x_{i1}, \ldots, x_{ip}$ คือ ค่าตัวแปรอิสระ

และ ε_i คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

(2.2) $$\underset{\sim}{y} = X \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{y}$ คือ เวกเตอร์ของค่าสังเกตของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

X คือ เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times (p+1)$ และมีค่าลำดับชั้นเท่ากับ p

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์การถดถอยขนาด $(p+1) \times 1$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ เวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนขนาด $n \times 1$ โดยที่ $E(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{0}$ และ $\operatorname{cov}(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma^2 I_n$

n คือ ขนาดตัวอย่าง

และ p คือ จำนวนตัวแปรอิสระ

ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุด

ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุด $(\underset{\sim}{b})$ ของสัมประสิทธิ์การถดถอย $(\underset{\sim}{\beta})$ หาได้จาก

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{b}} \left\{ (\underset{\sim}{y} - X \underset{\sim}{b})'(\underset{\sim}{y} - X \underset{\sim}{b}) \right\} = \underset{\sim}{0}$$

เมื่อ $(\underset{\sim}{y} - X \underset{\sim}{b})'(\underset{\sim}{y} - X \underset{\sim}{b})$ เป็นผลบวกกำลังสองของการประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -2X'\underset{\sim}{y}+2(X'X)\underset{\sim}{b} &= \underset{\sim}{0} \\ (X'X)\underset{\sim}{b} &= X'\underset{\sim}{y} \end{aligned}$$

ซึ่งเราเรียกว่าสมการปกติ (normal equation) สำหรับ $\underset{\sim}{b}$ ดังนั้น

$$\underset{\sim}{b} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$$

คุณสมบัติของตัวประมาณกำลังสองน้อยสุด

ก) ตัวประมาณ $\underset{\sim}{b}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ $\underset{\sim}{\beta}$ ภายใต้เงื่อนไข $E(\underset{\sim}{\varepsilon})=\underset{\sim}{0}$ ซึ่งเราพิสูจน์ได้โดย

$$\begin{aligned} E\left[(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}\right] &= (X'X)^{-1}X'E(\underset{\sim}{y}) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\underset{\sim}{\beta} \\ &= \underset{\sim}{\beta} \end{aligned}$$

ข) เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\underset{\sim}{b}$ เราแสดงได้โดย

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\underset{\sim}{b}) &= \operatorname{cov}\left[(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}\right] \\ &= (X'X)^{-1}X'\left\{\operatorname{cov}(\underset{\sim}{y})\right\}X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

เมื่อค่าในแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์เป็นค่าความแปรปรวนของค่าประมาณ $\underset{\sim}{b}$ และค่านอกแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์เป็นค่าความแปรปรวนร่วมของค่าประมาณ $\underset{\sim}{b}$

จากทฤษฎีบทของเกาสส์-มาโคฟ (Gauss-Markov theorem) $E(\underset{\sim}{\varepsilon})=\underset{\sim}{0}$ และ $Var(\underset{\sim}{\varepsilon})=\sigma^2 I_n$ เราจะได้ว่าตัวประมาณ $\underset{\sim}{b}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (Best Linear Unbiased Estimator : BLUE)

ค) จากข้อ ก) และข้อ ข) จะได้ว่าเมทริกซ์ของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\underset{\sim}{b}$ มีค่าเท่ากับเมทริกซ์ความแปรปรวนของ $\underset{\sim}{b}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} MSE(\underset{\sim}{b}) &= \operatorname{cov}(\underset{\sim}{b}) + bias(\underset{\sim}{b}).bias(\underset{\sim}{b})' \\ &= \operatorname{cov}(\underset{\sim}{b}) \end{aligned}$$

เมื่อ $bias(\underset{\sim}{b})$ คือ เวกเตอร์ความเอนเอียงของตัวประมาณ $\underset{\sim}{b}$
และ $MSE(\underset{\sim}{b})$ คือ เมทริกซ์ของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\underset{\sim}{b}$ โดยค่าในแนวเส้นทแยงมุมเป็นค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\underset{\sim}{b}$

<u>ทฤษฎีของเบส์</u>

สมมติว่า $\underset{\sim}{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ เป็นเวกเตอร์ของค่าสังเกต n ค่า โดยมีการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม (joint probability distribution) $p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma)$ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)'$ และ σ เมื่อ $(\underset{\sim}{\beta}, \sigma)$ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม $p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma)$ ดังนั้น

$$p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma) p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma) = p(\underset{\sim}{y}; \underset{\sim}{\beta}, \sigma) = p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma \mid \underset{\sim}{y}) p(\underset{\sim}{y})$$

การแจกแจงร่วมมีเงื่อนไข (joint conditional distribution) ของ $\underset{\sim}{\beta}, \sigma$ เมื่อกำหนดข้อมูลค่าสังเกต $\underset{\sim}{y}$ คือ

$$p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma \mid \underset{\sim}{y}) = \frac{p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma) p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma)}{p(\underset{\sim}{y})} \tag{2.3}$$

เมื่อ

$$p(\underset{\sim}{y}) = \mathrm{E}\left[p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma) \right]$$

$$= \begin{cases} \iint\limits_{\Theta} p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma) p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma)\, d(\underset{\sim}{\beta}) d(\sigma) & , \underset{\sim}{\beta}, \sigma \text{ ต่อเนื่อง} \\ \sum\limits_{\sigma, \underset{\sim}{\beta}} p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma) p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma) & , \underset{\sim}{\beta}, \sigma \text{ ไม่ต่อเนื่อง} \end{cases}$$

ดังนั้น เราสามารถเขียน (2.3) ได้ใหม่ คือ

$$p(\underset{\sim}{\beta},\sigma \mid \underset{\sim}{y}) \;\propto\; p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta},\sigma)\,p(\underset{\sim}{\beta},\sigma) \tag{2.4}$$

เมื่อ $p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta},\sigma)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $\underset{\sim}{y}$ หรือ $l(\underset{\sim}{\beta},\sigma \mid \underset{\sim}{y})$ คือ ฟังก์ชันความควรจะเป็นร่วม (joint likelihood function) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$ เมื่อทราบข้อมูล $\underset{\sim}{y}$

$p(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$ เป็นการแจกแจงก่อนร่วม (joint prior distribution) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$

และ $p(\underset{\sim}{\beta},\sigma \mid \underset{\sim}{y})$ เป็นการแจกแจงภายหลังร่วม (joint posterior distribution) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$

การแจกแจงก่อนแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ การแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูล (noninformative prior) และการแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูล (informative prior) ซึ่งการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลเป็นการแจกแจงที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับพารามิเตอร์น้อยหรือคลุมเครือเมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง และการแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูลเป็นการแจกแจงที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับพารามิเตอร์อย่างแน่ชัด โดยงานวิจัยนี้จะเสนอการแจกแจงปกติซึ่งมีคุณสมบัติเป็นการแจกแจงก่อนสังยุค[1] (conjugate prior)

การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูลและการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูล ในกรณีที่ σ^2 ทราบค่า

จากตัวแบบ (2.2) ซึ่งเราเรียกว่าตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นปกติ (the normal linear regression model) ในกรณีที่ σ^2 ทราบค่า $(\sigma^2 = \sigma_0)$ เราจะหาการแจกแจงภายหลังได้จาก

$$p(\underset{\sim}{\beta} \mid \underset{\sim}{y}) \;\propto\; l(\underset{\sim}{\beta} \mid \underset{\sim}{y})\,p(\underset{\sim}{\beta})$$

ซึ่งการแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูลและการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลจะมีรูปแบบดังต่อไปนี้

---

[1] ถ้ามีการแจกแจงก่อนซึ่งทำให้การแจกแจงก่อนและการแจกแจงภายหลังมีการแจกแจงเดียวกัน เราเรียกการแจกแจงก่อนนั้นว่า **การแจกแจงก่อนสังยุค**

1. <u>การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูล</u>

ฟังก์ชันความควรจะเป็นสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อกำหนดตัวอย่างของค่าสังเกต

$\underset{\sim}{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ **โดยที่ σ^2 ทราบค่า คือ**

(2.5) $$l(\underset{\sim}{\beta} \mid \underset{\sim}{y}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\right\}$$

การแจกแจงก่อนสังยุคสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อ σ^2 ทราบค่าเป็นการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (multivariate normal distribution)

(2.6) $$p(\underset{\sim}{\beta}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\overline{\beta}})'\underset{\sim}{\overline{\textstyle\sum}}{}_{\beta}^{-1}(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\overline{\beta}})\right\}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\overline{\beta}}$ **คือ** เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยก่อน (prior mean)

และ $\underset{\sim}{\overline{\textstyle\sum}}{}_{\beta}$ **คือ** เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมก่อน (prior covariance) **ของ** $\underset{\sim}{\beta}$

เมื่อกำหนดให้ $A = \sigma^2 \underset{\sim}{\overline{\textstyle\sum}}{}_{\beta}^{-1}$ **เราจะได้ว่า** $\underset{\sim}{\overline{\textstyle\sum}}{}_{\beta}^{-1} = A/\sigma^2$ **และกำหนดให้** $A^{1/2}$ **เป็นเมทริกซ์สมมาตร** (symmetric matrix) **ที่มีคุณสมบัติ** $A^{1/2}A^{1/2} = A$ **เมื่อ** A **เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน** (positive definite matrix) **ดังนั้น เราจะสามารถเขียน** (2.6) **ได้ใหม่ ดังนี้**

(2.7) $$p(\underset{\sim}{\beta}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(A^{1/2}\underset{\sim}{\overline{\beta}} - A^{1/2}\underset{\sim}{\beta})'(A^{1/2}\underset{\sim}{\overline{\beta}} - A^{1/2}\underset{\sim}{\beta})\right\}$$

เมื่อใช้ทฤษฎีบทของเบส์ เราจะได้ว่าการแจกแจงภายหลังสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อ σ^2 ทราบค่า คือ

$$\begin{aligned}
p(\underset{\sim}{\beta} \mid \underset{\sim}{y}) &\propto p(\underset{\sim}{\beta})\, l(\underset{\sim}{\beta} \mid \underset{\sim}{y}) \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(A^{1/2}\underset{\sim}{\overline{\beta}} - A^{1/2}\underset{\sim}{\beta})'(A^{1/2}\underset{\sim}{\overline{\beta}} - A^{1/2}\underset{\sim}{\beta}) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\right\}\right] \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\begin{pmatrix} A^{1/2}\underset{\sim}{\overline{\beta}} - A^{1/2}\underset{\sim}{\beta} \\ \underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta} \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A^{1/2}\underset{\sim}{\overline{\beta}} - A^{1/2}\underset{\sim}{\beta} \\ \underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta} \end{pmatrix}\right\}\right]
\end{aligned}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\beta})\right\} \tag{2.8}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{w}_{\{(n+p+1)\times 1\}} = \begin{pmatrix} A^{1/2}\,\underset{\sim}{\overline{\beta}} \\ \underset{\sim}{y} \end{pmatrix}$

$G_{\{(n+p+1)\times(p+1)\}} = \begin{pmatrix} A^{1/2} \\ X \end{pmatrix}$

และ $(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\beta}) = (\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'G'G(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}) + (\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})$

โดยที่
$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}} &= (G'G)^{-1}G'\underset{\sim}{w} \\
&= \left\{(A^{1/2}\;\; X')\begin{pmatrix} A^{1/2} \\ X \end{pmatrix}\right\}^{-1}(A^{1/2}\;\; X')\begin{pmatrix} A^{1/2}\,\underset{\sim}{\overline{\beta}} \\ \underset{\sim}{y} \end{pmatrix} \\
&= (A+X'X)^{-1}(A\underset{\sim}{\overline{\beta}}+X'\underset{\sim}{y}) \\
&= (A+X'X)^{-1}(A\underset{\sim}{\overline{\beta}}+X'X\underset{\sim}{b}) && (2.9)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
p(\underset{\sim}{\beta}|\underset{\sim}{y}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'G'G(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'(A+X'X)(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'(\overline{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}+X'X/\sigma^2)(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'\overline{\overline{\Sigma}}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})\right\} && (2.10)
\end{aligned}$$

เมื่อ $\overline{\overline{\Sigma}}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} = \overline{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} + X'X/\sigma^2$

และ $\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}} = (A+X'X)^{-1}(A\underset{\sim}{\overline{\beta}}+X'X\underset{\sim}{b})$

$= \left[\overline{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1} + X'X/\sigma^2\right]^{-1}\left[\overline{\Sigma}_{\underset{\sim}{\beta}}^{-1}\underset{\sim}{\overline{\beta}} + (X'X/\sigma^2)\underset{\sim}{b}\right]$

นั่นคือ จาก (2.11) การแจกแจงภายหลังสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ได้จากการใช้การแจกแจงก่อนที่ให้

ข้อมูลเป็นการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\overline{\overline{\sum}}_{\underset{\sim}{\beta}}$ ซึ่งก็คือ $N(\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}, \overline{\overline{\sum}}_{\underset{\sim}{\beta}})$

การแจกแจงภายหลังขอบ 1 ตัวแปร (univariate marginal posterior distribution) สำหรับ β_i คือ $N(\overline{\overline{\beta}}_i, c_{ii})$ เมื่อ $\overline{\overline{\beta}}_i$ คือค่าตำแหน่งที่ i ของ $\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}$ และ c_{ii} คือค่าตำแหน่งที่ (i,i) ของเมทริกซ์ $\overline{\overline{\sum}}_{\underset{\sim}{\beta}}$

<u>คุณสมบัติของตัวประมาณเบส์เมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูล</u>

ก) ตัวประมาณ $\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}$ เป็นตัวประมาณเอนเอียงของ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
bias(\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}) &= E(\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}) - \underset{\sim}{\beta} \\
&= E\left[W(A\underset{\sim}{\overline{\beta}} + X'\underset{\sim}{y})\right] - \underset{\sim}{\beta} \\
&= WA\underset{\sim}{\overline{\beta}} + WX'X\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta} \\
&= WA\underset{\sim}{\overline{\beta}} + (WX'X - I)\underset{\sim}{\beta} \\
&= WA\underset{\sim}{\overline{\beta}} + W(X'X - W^{-1})\underset{\sim}{\beta} \\
&= WA\underset{\sim}{\overline{\beta}} + W(X'X - (A + X'X))\underset{\sim}{\beta} \\
&= WA\underset{\sim}{\overline{\beta}} - WA\underset{\sim}{\beta} \\
&= WA\underset{\sim}{\delta}
\end{aligned}
$$

เมื่อ $W = (A + X'X)^{-1}$ และ $\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{\overline{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}$

ข) เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}$ คือ

$$
\begin{aligned}
\text{cov}(\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}) &= \text{cov}\left[W(A\underset{\sim}{\overline{\beta}} + X'\underset{\sim}{y})\right] \\
&= \text{cov}(WA\underset{\sim}{\overline{\beta}}) + \text{cov}(WX'\underset{\sim}{y}) \\
&= \sigma^2 WX'XW'
\end{aligned}
$$

ค) จากข้อ ก) และข้อ ข) จะได้ว่าเมทริกซ์ของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\overline{\overline{\underset{\sim}{\beta}}}$ คือ

$$MSE(\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}) = \operatorname{cov}(\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}) + bias(\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}).bias(\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'$$
$$= \sigma^2 WX'XW' + WA\underset{\sim}{\delta}\,\underset{\sim}{\delta}'A'W'$$

เมื่อ $bias(\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})$ คือ เวกเตอร์ความเอนเอียงของ $\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}$

และ $MSE(\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})$ คือ เมทริกซ์ของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}$ โดยค่าในแนวเส้นทแยงมุมเป็นค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}$

เมื่อใช้เกณฑ์ของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง แล้วตัวประมาณ $\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}$ จะดีกว่า $\underset{\sim}{b}$ ถ้า

$$C = \sigma^2(X'X)^{-1} - \sigma^2 WX'XW' - WA\underset{\sim}{\delta}\,\underset{\sim}{\delta}'A'W'$$

เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite matrix) ซึ่งเมทริกซ์ C จะเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนก็ต่อเมื่อ

$$\lambda = \underset{\sim}{\delta}'\left\{\sigma^2(X'X)^{-1} + 2\sigma^2 A^{-1}\right\}^{-1}\underset{\sim}{\delta} \leq 1$$

2. <u>การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูล</u>

การแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลที่ใช้ทั่วไป (conventional noninformative prior) สำหรับค่าตำแหน่งที่ i ใน $\underset{\sim}{\beta}$ คือ $p(\beta_i) \propto$ ค่าคงที่ และสมมติให้ค่าทุกตำแหน่งใน $\underset{\sim}{\beta}$ เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่าการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อ σ^2 ทราบค่า คือ

$$p(\underset{\sim}{\beta}) = p(\beta_0)p(\beta_1)\ldots p(\beta_p)$$

(2.11) $\qquad \propto$ ค่าคงที่

จาก (2.5) ฟังก์ชันความควรจะเป็น คือ

$$l(\underset{\sim}{\beta}|\underset{\sim}{y}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\right\}$$
$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{b})'X'X(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{b}) + (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{b})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{b})\right\}\right]$$

(2.12) $$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{b})'X'X(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{b})\right\}$$

จาก (2.11) ซึ่งการแจกแจงก่อนเป็นสัดส่วนกับค่าคงที่ เราจะได้ว่าการแจกแจงภายหลังจะมีรูปแบบเดียวกันกับฟังก์ชันความควรจะเป็น คือ

$$(2.11) \qquad p(\underset{\sim}{\beta} | \underset{\sim}{y}) \;\propto\; \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{b})'X'X(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{b})\right\}$$

นั่นคือ การแจกแจงภายหลังสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ได้จากการใช้การแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลเป็นการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{b}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\sigma^2(X'X)^{-1}$ ซึ่งก็คือ $N(\underset{\sim}{b},\sigma^2(X'X)^{-1})$

การแจกแจงภายหลังขอบ 1 ตัวแปร (univariate marginal posterior distribution) สำหรับ β_i คือ $N(b_i,\sigma^2(X'X)^{-1})$ เมื่อ b_i คือ ค่าตำแหน่งที่ i ของ $\underset{\sim}{b}$ และ c_{ii}^{*} คือ ค่าตำแหน่งที่ (i,i) ของเมทริกซ์ $(X'X)^{-1}$

การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูลและการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลในกรณีที่ σ^2 ไม่ทราบค่า

จากตัวแบบ (2.2) ในกรณีที่ σ^2 ไม่ทราบค่า การแจกแจงภายหลังหาได้จาก

$$p(\underset{\sim}{\beta},\sigma | \underset{\sim}{y}) \;\propto\; l(\underset{\sim}{y} | \underset{\sim}{\beta},\sigma)p(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$$

ซึ่งการแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูลและการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลจะมีรูปแบบดังต่อไปนี้

1. <u>การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูล</u>

การแจกแจงก่อนสังยุคสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อ σ^2 ไม่ทราบค่า เป็นการแจกแจงปกติ-แกมมาหลายตัวแปร (multivariate normal-gamma distribution) ซึ่งหาได้จาก

$$(2.12) \qquad p(\underset{\sim}{\beta},\sigma) \;=\; p(\underset{\sim}{\beta}|\sigma)p(\sigma)$$

โดยที่การแจกแจงก่อนมีเงื่อนไขสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อกำหนด σ (conditional prior distribution for $\underset{\sim}{\beta}$ given σ) เป็นการแจกแจงปกติหลายตัวแปร คือ

$$
\begin{aligned}
p(\underset{\sim}{\beta}|\sigma) &= (2\pi)^{-(p+1)/2}\sigma^{-(p+1)}|A|^{1/2} \\
&\qquad \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})'A(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})\right\} \\
&\propto \sigma^{-(p+1)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})'A(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})\right\} \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

และการแจกแจงก่อนขอบสำหรับ σ (marginal prior distribution for σ) เป็นการแจกแจงแกมมาผกผัน (the inverted-gamma distribution) ดังนี้

$$
\begin{aligned}
p(\sigma) &= \frac{2}{\Gamma(\overline{\nu}/2)}\left(\frac{\overline{\nu s}^2}{2}\right)^{\overline{\nu}/2}\frac{1}{\sigma^{\overline{\nu}+1}}\exp\left\{-\frac{\overline{\nu s}^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (2.16) \\
&\propto \frac{1}{\sigma^{\overline{\nu}+1}}\exp\left\{-\frac{\overline{\nu s}^2}{2\sigma^2}\right\}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จาก(2.14), (2.15), และ(2.16) จะได้ว่าการแจกแจงก่อนปกติ-แกมมาร่วม (the joint normal-gamma prior) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$ มีค่าดังนี้

$$
\begin{aligned}
p(\underset{\sim}{\beta},\sigma) &= p(\underset{\sim}{\beta}|\sigma)p(\sigma) \\
&\propto \sigma^{-(p+1)-\overline{\nu}-1} \qquad (2.17) \\
&\qquad \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\overline{\nu s}^2+(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})'A(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})\right\}\right]
\end{aligned}
$$

ฟังก์ชันความควรจะเป็นร่วมสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ และ σ เมื่อกำหนดตัวอย่างของค่าสังเกต $\underset{\sim}{y}=(y_1,\ldots,y_n)'$ โดยที่ σ^2 ไม่ทราบค่า มีค่าดังนี้

$$
\begin{aligned}
l(\underset{\sim}{\beta},\sigma|\underset{\sim}{y}) &= (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n} \\
&\qquad \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})\right\} \\
&\propto \sigma^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})\right\} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

จาก (2.17), (2.18) และทฤษฎีบทของเบส์ เราจะได้ว่าการแจกแจงภายหลังร่วมสำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$ เมื่อ σ^2 ไม่ทราบค่า มีค่าดังนี้

$$p(\underset{\sim}{\beta},\sigma|\underset{\sim}{y}) \quad \propto \quad p(\underset{\sim}{\beta},\sigma)l(\underset{\sim}{\beta},\sigma|\underset{\sim}{y})$$

(2.19)
$$\propto \quad \sigma^{-n-(p+1)-\bar{v}-1}\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\Big\{\overline{vs}^2 + (\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})'A(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\beta}})+(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})\Big\}\Big]$$

จาก (2.19) และกำหนดให้ $\underset{\sim}{w}=\begin{pmatrix} A^{1/2}\underset{\sim}{\overline{\beta}} \\ \underset{\sim}{y} \end{pmatrix}$ และ $G=\begin{pmatrix} A^{1/2} \\ X \end{pmatrix}$ เราจะได้ว่า

$$p(\underset{\sim}{\beta},\sigma|\underset{\sim}{y}) \quad \propto \quad \sigma^{-n-(p+1)-\bar{v}-1}$$

$$\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\{\overline{vs}^2 + (\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\beta})\Big\}\Big]$$

$$\propto \quad \sigma^{-n-(p+1)-\bar{v}-1}\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\Big\{\overline{vs}^2 + (\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'G'G(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})+(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})\Big\}\Big]$$

(2.20)
$$\propto \quad \sigma^{-n-(p+1)-\bar{v}-1}\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\Big\{\overline{vs}^2 + (\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'(A+X'X)(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})\Big\}\Big]$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}=(G'G)^{-1}G'\underset{\sim}{w}$

(2.21) $=(A+X'X)^{-1}(A\underset{\sim}{\overline{\beta}}+X'X\underset{\sim}{b})$

$,\overline{\overline{vs}}^2=\overline{vs}^2+(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'(\underset{\sim}{w}-G\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})$

$=\overline{vs}^2+(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})+(\underset{\sim}{\overline{\beta}}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})'A(\underset{\sim}{\overline{\beta}}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}})$

(2.22) $=\overline{vs}^2+\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{\overline{\beta}}'A\underset{\sim}{\overline{\beta}}-\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}'(A+X'X)\underset{\sim}{\overline{\overline{\beta}}}$

และ $\overline{\overline{v}}=n+\bar{v}$

การแจกแจงภายหลังของ $p(\underset{\sim}{\beta}|\underset{\sim}{y})$ หาได้จาก

$$p(\underset{\sim}{\beta}|\underset{\sim}{y}) \quad = \quad \int_0^\infty p(\underset{\sim}{\beta},\sigma|\underset{\sim}{y})d\sigma$$

$$(2.23) \qquad \propto \int_0^\infty \sigma^{-\bar{\bar{v}}-(p+1)-1} \exp\left\{-a/2\sigma^2\right\} d\sigma$$

เมื่อ $a = \bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2 + (\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}})'(A + X'X)(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}})$

เราสามารถคำนวณค่าอินทิกรัลใน (2.28) โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันแกมมา ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(\underset{\sim}{\beta}|\underset{\sim}{y}) &\propto a^{-(\bar{\bar{v}}+p+1)/2} \\ &\propto \left[\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2 + (\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}})'(A + X'X)(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}})\right]^{-(\bar{\bar{v}}+p+1)/2} \\ (2.24) \qquad &\propto \left[1 + \frac{1}{\bar{\bar{v}}}(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}})' \frac{(A + X'X)}{\bar{\bar{s}}^2}(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}})\right]^{-(\bar{\bar{v}}+p+1)/2} \end{aligned}$$

นั่นก็คือ การแจกแจงภายหลังขอบสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ได้จากการใช้การแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูลเป็นการแจกแจงทีหลายตัวแปร (multivariate t-distribution) ด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}}$ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\left[\bar{\bar{v}}/(\bar{\bar{v}}-2)\right]\bar{\bar{s}}^2(A + X'X)^{-1}$ และระดับความเป็นเสรี $\bar{\bar{v}}$

กรณีที่เราไม่มีความรู้ก่อน (prior knowledge) เกี่ยวกับ σ เราจะให้ $\bar{v} = 0$ ซึ่งจะได้ว่าการแจกแจงก่อนขอบสำหรับ σ เป็นการแจกแจงที่ไม่ให้ข้อมูลที่มีรูปแบบไม่แท้ (uninformative improper distribution) $p(\sigma) \propto 1/\sigma$ ดังนั้น $\bar{\bar{v}} = n$ และ $\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2 = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\bar{\beta}}' A \underset{\sim}{\bar{\beta}} - \underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}}'(A + X'X)\underset{\sim}{\bar{\bar{\beta}}}$

2. <u>การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูล</u>

การแจกแจงก่อนร่วมที่ไม่ให้ข้อมูลที่ใช้ทั่วไป (conventional joint prior distribution) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta}, \sigma)$ เมื่อ σ^2 ไม่ทราบค่า

$$(2.25) \qquad p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma}$$

จาก (2.12) เราจะได้ว่าฟังก์ชันความควรจะเป็นร่วม เมื่อ σ^2 ไม่ทราบค่า

$$(2.26) \qquad l(\underset{\sim}{\beta}, \sigma|\underset{\sim}{y}) \propto \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{v\hat{\sigma}^2 + (\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{b})'X'X(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{b})\right\}\right]$$

เมื่อ $v\hat{\sigma}^2 = (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{b})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{b})$ คือ ผลบวกกำลังสองของการประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด และ $v = n-(p+1)$ คือ ระดับความเป็นเสรี

การแจกแจงภายหลังร่วม (joint posterior distribution) สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta},\sigma)$ เมื่อ σ^2 ไม่ทราบค่า คือ

$$
\begin{aligned}
p(\underset{\sim}{\beta},\sigma \mid \underset{\sim}{y}) &\propto p(\underset{\sim}{\beta},\sigma)\, l(\underset{\sim}{\beta},\sigma \mid \underset{\sim}{y}) \\
&\propto \sigma^{-(n+1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{v\hat{\sigma}^2 + (\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{b})'X'X(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{b})\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

การแจกแจงภายหลังขอบ (marginal posterior distribution) $p(\underset{\sim}{\beta} \mid \underset{\sim}{y})$ จากการอินทิกรัล σ ออกจาก (2.33) คือ

$$
p(\underset{\sim}{\beta} \mid \underset{\sim}{y}) \propto \left[1 + \frac{1}{v\hat{\sigma}^2}(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{b})'X'X(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{b})\right]^{-(p+1+v)/2} \tag{2.28}
$$

นั่นก็คือ การแจกแจงภายหลังขอบสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ได้จากการใช้การแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลเป็นการแจกแจงทีพหุตัวแปรด้วยค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{b}$ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $[v/(v-2)]\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ และระดับความเป็นเสรี v

การแจกแจงภายหลังเมื่อใช้การแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์

การแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์ (Jeffreys's prior) เป็นการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลชนิดหนึ่ง ซึ่งมีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงพารามิเตอร์ (parameterization invariance) โดยการแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์หาได้ดังนี้

$$
\underset{\sim}{y} = f(\underset{\sim}{\beta}) + \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{2.29}
$$

เมื่อ $f(\underset{\sim}{\beta}) = X\underset{\sim}{\beta}$ และ $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$

โดยกำหนดให้ $L(\underset{\sim}{\gamma})$ เป็นฟังก์ชันความควรจะเป็นล็อก (log-likelihood function) สำหรับพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\gamma}$ ของตัวแบบ แล้วการแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์สำหรับ $\underset{\sim}{\gamma}$ คือ

$$
p(\underset{\sim}{\gamma}) \propto \left|I(\underset{\sim}{\gamma})\right|^{1/2} \tag{2.30}
$$

เมื่อ $I(\underset{\sim}{\gamma})$ เป็นเมทริกซ์ข้อสนเทศของฟิชเชอร์คาดหวัง (expected Fisher information matrix) ตำแหน่งที่ (r,s)

โดยที่

(2.31) $$I(\underset{\sim}{\gamma}) = \mathrm{E}\left[-\frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\gamma})}{\partial\gamma_r \partial\gamma_s}\right]$$

$\because$ $\underset{\sim}{\gamma} = (\underset{\sim}{u}', \underset{\sim}{v}')'$ และ $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$ เป็นอิสระต่อกัน

ดังนั้น

$$p(\underset{\sim}{\gamma}) = p(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) = p_1(\underset{\sim}{u}) p_2(\underset{\sim}{v})$$

จะได้ว่า

$$p_1(\underset{\sim}{u}) \quad \propto \quad \left|I_1(\underset{\sim}{u})\right|^{1/2}$$

เมื่อ $\left[I_1(\underset{\sim}{u})\right]_{r,s} = \mathrm{E}\left[-\frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v})}{\partial u_r \partial u_s}\right]$

จาก (2.29) และ $L(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) = L(\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} S(\underset{\sim}{\beta})$

เราจะได้ว่า $L(\underset{\sim}{\beta}, \sigma) = -n\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2} S(\underset{\sim}{\beta})$

เมื่อ $S(\underset{\sim}{\beta}) = (\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\beta}))'(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\beta}))$

เนื่องจาก $\frac{\partial^2 S(\underset{\sim}{\beta})}{\partial\beta_r \partial\beta_s} = 2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial f_i(\underset{\sim}{\beta})}{\partial\beta_r}\frac{\partial f_i(\underset{\sim}{\beta})}{\partial\beta_s} - \left[y_i - f_i(\underset{\sim}{\beta})\right]\frac{\partial^2 f_i(\underset{\sim}{\beta})}{\partial\beta_r \partial\beta_s}\right\}$

เมื่อ $f_i(\underset{\sim}{\beta}) = f(\underset{\sim}{x}_i; \underset{\sim}{\beta})$

เราจะได้ว่า

$$I_1(\underset{\sim}{\beta}) \quad = \quad \frac{1}{2\sigma^2} 2F'_{\bullet}(\underset{\sim}{\beta}) F_{\bullet}(\underset{\sim}{\beta})$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} F_{\bullet}'(\underset{\sim}{\beta}) F_{\bullet}(\underset{\sim}{\beta})$$

$$\text{(2.32)} \qquad \propto F_{\bullet}'(\underset{\sim}{\beta}) F_{\bullet}(\underset{\sim}{\beta})$$

เมื่อ $F_{\bullet}(\underset{\sim}{\beta}) = \dfrac{\partial \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \underset{\sim}{\beta}'} = \left[\left(\dfrac{\partial f_i(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \beta_j} \right) \right]$

ในทำนองเดียวกัน

$$\text{(2.33)} \qquad I_2(\sigma) = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^4} \mathrm{E}\left[S(\underset{\sim}{\beta}) \right] = \frac{2n}{\sigma^2}$$

ดังนั้น การแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์สำหรับ $(\underset{\sim}{\beta}, \sigma)$ เมื่อ $\underset{\sim}{\beta}$ และ σ เป็นอิสระต่อกัน คือ

$$\text{(2.34)} \qquad p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma) \propto \left| F_{\bullet}'(\underset{\sim}{\beta}) F_{\bullet}(\underset{\sim}{\beta}) \right|^{1/2} \sigma^{-1}$$

ซึ่งในกรณีตัวแบบเชิงเส้น $F_{\bullet}'(\underset{\sim}{\beta}) F_{\bullet}(\underset{\sim}{\beta}) = X'X$ ดังนั้น

$$\text{(2.35)} \qquad p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma) \propto \sigma^{-1}$$

จาก (2.35) จะเห็นได้ว่าการแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์เหมือนกันกับการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลที่ใช้ทั่วไป (2.25) กรณีที่ σ^2 ไม่ทราบค่า และการแจกแจงก่อนของเจฟฟรีส์ $p(\underset{\sim}{\beta}, \sigma) \propto$ ค่าคงที่ ในกรณีที่ σ^2 ทราบค่า ซึ่งเหมือนกันกับการแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูลที่ใช้ทั่วไป (2.11) กรณีที่ σ^2 ทราบค่า