บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้สิ่งที่สนใจศึกษาคือ การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับผลต่างของสองประชากร ด้วยการแจกแจงปกติเมื่อใช้ และไม่ใช้ค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่อง โดยใช้ค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่องต่างๆ กัน ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดต่างๆ ของแต่ละวิธีการประมาณต่อไปนี้

การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง

ให้ $X_1,X_2,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจงซึ่งมี θ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า สมมติสามารถหาตัวสถิติ $L(X_1,X_2,...,X_n)$ และ $U(X_1,X_2,...,X_n)$ ซึ่งสำหรับค่าจริง θ ใด ๆ

$$\Pr(\,L(X_1,X_2,...,X_n) < \theta < U(X_1,X_2,...,X_n)\,) = 1 - \alpha$$

โดยที่ความน่าจะเป็น $1\text{-}\alpha$ เป็นค่าคงที่ $(0 < \alpha < 1)$ ถ้า $x_1,x_2,...,x_n$ เป็นค่าสังเกตของ $X_1,X_2,...,X_n$ ดังนั้น $l(x_1,x_2,...,x_n)$ แทนด้วย l และ $u(x_1,x_2,...,x_n)$ แทนด้วย u เป็นค่าสังเกตของ $L(X_1,X_2,...,X_n)$ และ $U(X_1,X_2,...,X_n)$ ตามลำดับ

นั่นคือเมื่อสุ่มตัวอย่างมาชุดหนึ่งสามารถสร้าง$(l,\ u)$ได้ช่วงหนึ่ง โดยกำหนดเปอร์เซ็นต์ของความเชื่อมั่น $(1\text{-}\alpha)100\%$ และเรียกช่วงที่สร้างขึ้นว่าเป็นช่วงความเชื่อมั่น $(1\text{-}\alpha)100\%$สำหรับ θ ($(1\text{-}\alpha)100\%$ confidence interval for θ) หรือกล่าวว่าค่าจริงของ θ จะตกอยู่ในช่วง$(l,\ u)$ ด้วยความเชื่อมั่น $(1\text{-}\alpha)100\%$ และเรียกค่า l ว่าขีดจำกัดล่างของความเชื่อมั่น (lower confidence limit) เรียกค่า u ว่าขีดจำกัดบนของความเชื่อมั่น (upper confidence limit) และเรียก $(1\text{-}\alpha)$ ว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (confidence coefficient)

การแจกแจงของผลต่างของสัดส่วนตัวอย่าง

การแจกแจงซึ่งจะอธิบายการทดลองใด ๆ ที่มีผลการทดลองที่เป็นไปได้ 2 ลักษณะคือ สิ่งที่สนใจ หรือจะเรียกว่าความสำเร็จ (success) และสิ่งที่ไม่ได้สนใจ หรือจะเรียกว่าความล้มเหลว (failure) ด้วยความน่าจะเป็น p และ $(1-p)$ ตามลำดับ การแจกแจงนี้เรียกว่าการแจกแจงแบร์นูลลี (Bernoulli distribution) ถ้าให้ $X = 1$ เมื่อผลการทดลองเกิดความสำเร็จ และ $X = 0$ เมื่อผลการทดลองเกิดความล้มเหลว ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบแบร์นูลลี (Bernoulli probability distribution) ด้วยพารามิเตอร์ p เขียนแทนด้วย $X \sim Ber(p)$ และฟังก์ชันความน่าจะเป็นจะอยู่ในรูป

$$f(x: p) = p^{x}(1-p)^{1-x} \quad , \quad x = 0,1$$

ค่าความน่าจะเป็น p คือสัดส่วนประชากรที่เกิดความสำเร็จ

ถ้าให้ $\{X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}\}$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n_1 จากการแจกแจงแบร์นูลลี $Ber(p_1)$ และ $\{X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_2}\}$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n_2 จากการแจกแจงแบร์นูลลี $Ber(p_2)$ และเป็นอิสระกับ $Ber(p_1)$ ดังนั้น $X_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$ มีการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ n_1, p_1 เขียนแทนด้วย $X_1 \sim b(n_1, p_1)$ และ $X_2 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{2i}$ มีการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ n_2, p_2 เขียนแทนด้วย $X_2 \sim b(n_2, p_2)$ โดยที่ X_1 และ X_2 คือจำนวนหน่วยที่เกิดความสำเร็จทั้งหมดในตัวอย่างสุ่มขนาด n_1 และ n_2 และเป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีค่าเฉลี่ยเป็น n_1p_1, n_2p_2 ความแปรปรวน $n_1p_1(1-p_1)$, $n_2p_2(1-p_2)$ ตามลำดับ แต่สำหรับตัวแปรสุ่ม $\hat{p}_1$ และ $\hat{p}_2$ นี้ไม่ได้มีการแจกแจงในรูปแบบที่เรารู้จักกันดี อย่างไรก็ตาม ถ้าตัวอย่างสุ่มทั้งสองมีขนาดใหญ่ จะสามารถประยุกต์ทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลางกับกรณีนี้ได้โดยจะพิจารณาว่า $\hat{p}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n_i} X_i = \overline{X}_i$ $i = 1, 2$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่ 1, 2 และได้ว่า

$$E(\hat{p}_i) = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n_i} E(X_i) = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n_i} p_i = p_i$$

$$V(\hat{p}_i) = V(\overline{X_i}) = \frac{1}{n_i^2}V(X_i) = \frac{1}{n_i^2}(n_i p_i q_i) = \frac{p_i q_i}{n_i}$$

จะได้ $\hat{p}_1$ และ $\hat{p}_2$ จะมีการแจกแจงปกติโดยประมาณ โดยมีค่าเฉลี่ยของการแจกแจงเป็น p_i และความแปรปรวนเป็น $\frac{p_i q_i}{n_i}$ เมื่อ $q_i = 1 - p_i$, i = 1,2 และเนื่องจาก $\hat{p}_1$ และ $\hat{p}_2$ เป็นอิสระต่อกัน

นั่นคือถ้าตัวอย่าง n_1 และ n_2 มีขนาดใหญ่พอ โดยทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลาง $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ จะมีการแจกแจงแบบปกติโดยประมาณ มีค่าเฉลี่ยของการแจกแจงเป็น $p_1 - p_2$ และความแปรปรวนเป็น $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$

วิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับผลต่างค่าสัดส่วนสองประชากร

ในการประมาณค่าแบบช่วงของค่าผลต่างระหว่างสัดส่วนของสองประชากร $(p_1 - p_2)$ เมื่อกำหนดความน่าจะเป็นของความผิดพลาด α หรือสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $1 - \alpha$ (confidence coefficient) และเมื่อ n_1, n_2 มีขนาดใหญ่ช่วงความเชื่อมั่น $p_1 - p_2$ สามารถสร้างได้โดยอาศัยตัวประมาณแบบจุดของ $p_1 - p_2$ และการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ ซึ่งใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย $p_1 - p_2$ และความแปรปรวน $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$

จาก $\Pr(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

เมื่อ Z คือตัวประมาณแบบจุดของ $p_1 - p_2$ จาก

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

ดังนั้น

$$\Pr\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} < Z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha \quad \text{...(1)}$$

$$\Pr\Big((\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} < p_1 - p_2 <$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\Big) = 1 - \alpha \quad \text{.........................(2)}$$

จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1 - \alpha)\%$ สำหรับ $p_1 - p_2$ คือ

$$((\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\ ,\ (\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}})$$

การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าผลต่างระหว่างสัดส่วนของประชากรสองชุด ในการวิจัยนี้จะทำดังนี้

วิธีการประมาณอย่างง่าย (Classical Method)

จาก (2) รูปแบบของการประมาณแบบช่วงสำหรับผลต่างระหว่างค่าสัดส่วนของสองประชากร คือ $(\hat{p}_1-\hat{p}_1)\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

แต่เนื่องจากไม่ทราบค่าสัดส่วนประชากร p_1, p_2 จึงไม่สามารถหาค่าความแปรปรวนได้ดังนั้นจึงใช้ $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ เป็นค่าประมาณ จะได้ความแปรปรวนเป็น $\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น (1-α)100% สำหรับ p_1 - p_2 คือ

ขีดความเชื่อมั่นล่าง (L1) = $(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

ขีดความเชื่อมั่นบน (U1) = $(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

วิธีการประมาณโดยใช้ค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่องของเยจส์ (Yates continuity correction)

โดยที่วิธีการอย่างง่ายอาจทำให้ได้ช่วงที่แคบไป เราจึงนำค่าปรับแก้ไขเพื่อความต่อเนื่องมาใช้ (Continuity correction) เนื่องจากเราสามารถประมาณการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินามได้ด้วยการแจกแจงปกติ แต่เนื่องจากการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินามซึ่งเป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) ในขณะที่การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงชนิดที่ต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) ดังนั้นในการประมาณค่าความแตกต่างของค่าสัดส่วนของสองประชากรด้วยการแจกแจงแบบปกติ จึงปรับช่วงความน่าจะเป็นเพื่อให้ได้ค่าใกล้ค่าจริง หรือมีความคลาดเคลื่อนน้อย ซึ่งเยจส์ได้แนะนำค่าปรับแก้ที่ใช้เพื่อความต่อเนื่อง (Yates's correction for continuity) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น (1 - α)100% สำหรับ $p_1 - p_2$ คือ

ขีดความเชื่อมั่นล่าง (L2) = $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} - \left(\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)$

ขีดความเชื่อมั่นบน (U2) = $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} + \left(\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)$

วิธีการประมาณโดยใช้ค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่องของฮอคก์ และแอนเดอร์สัน (Hauck and Anderson)

ฮอคก์ และแอนเดอร์สัน ได้แนะนำค่าปรับแก้ไขเพื่อความต่อเนื่อง ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2\min(n_1, n_2)}$ และใช้ n_i - 1 แทน n_i (i =1,2) ในการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน เนื่องจากค่าความแปรปรวน $Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}$ เป็นค่าประมาณที่เอนเอียงทางด้านลบ (underestimate) ของค่าความแปรปรวนของค่าความแตกต่างของสัดส่วนประชากร

ดังนั้นในกรณีขนาดตัวอย่าง n_1, n_2 มีขนาดเล็ก การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับผลต่างระหว่างค่าสัดส่วนของสองประชากร โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเป็น $SE(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ จะทำให้ได้ช่วงของการประมาณที่แคบเกินไป ดังนั้นจึงควรปรับค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเป็น $SE(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1 - 1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2 - 1}}$ เนื่องจาก $Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1 - 1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2 - 1}$ เป็นค่าประมาณที่ไม่เอนเอียงของความแปรปรวนของความแตกต่างของค่าสัดส่วนประชากรด้วย

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น (1 - α)100% สำหรับ $p_1 - p_2$ คือ

ขีดความเชื่อมั่นล่าง (L3) = $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1 - 1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2 - 1}} - \frac{1}{2\min(n_1, n_2)}$

ขีดความเชื่อมั่นบน (U3) = $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1 - 1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2 - 1}} + \frac{1}{2\min(n_1, n_2)}$

วิธีการประมาณโดยใช้ค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่องด้วยวิธีของเพสกัน (Peskun)

ในปี ค.ศ. 1990 เพสกัน[1] (Peskun) กล่าวถึงวิธีทั่วไปในการหาขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่างและขีดจำกัดความเชื่อมั่นบนที่ถูกต้องของความเชื่อมั่นจากตัวอย่างสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องซึ่งไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ θ แบบสองทางด้วยความเชื่อมั่น 100(1-α)%

$$L(t_0) = \inf\{\ \theta \ /\ \Pr(\ T \geq t_0\ ;\theta > \alpha/2\ \}$$

$$U(t_0) = \sup\{\ \theta \ /\ \Pr(\ T \leq t_0\ ;\theta > \alpha/2\ \}$$

โดยที่ t_0 เป็นค่าสังเกตของ T

$T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นตัวสถิติซึ่งการแจกแจงของตัวอย่างขึ้นกับค่าของพารามิเตอร์แต่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

ดังนั้นเพสกัน[2] ได้ประยุกต์ใช้ในการหาขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่างและขีดจำกัดความเชื่อมั่นบนที่ถูกต้องของความเชื่อมั่นจากตัวอย่างสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องซึ่งไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ $p_1 - p_2$ แบบสองทางด้วยความเชื่อมั่น (1- α)100% จะได้

$$L(t_0) = \inf_{0 \leq p_1, p_2 \leq 1} \left\{\ p_1 - p_2 \ /\ \Pr\left[T \geq t_0; n_1, p_1, n_2, p_2\right] \right\rangle \frac{\alpha}{2}\ \Big\} \quad \text{.........................(3)}$$

$$U(t_0) = \sup_{0 \leq p_1, p_2 \leq 1} \left\{\ p_1 - p_2 \ /\ \Pr\left[T \leq t_0; n_1, p_1, n_2, p_2\right] \right\rangle \frac{\alpha}{2}\ \Big\} \quad \text{.........................(4)}$$

โดยที่ $t_0 = x_1/n_1 - x_2/n_2$ เป็นค่าสังเกตของ T

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นโดยวิธีการแจกแจงแบบปกติ สำหรับ n_1, n_2 เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ตัวแปรสุ่ม $T = X_1/n_1 - X_2/n_2$ จะมีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย p_1-p_2 และความแปรปรวน $\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}$

จาก $\Pr\left[T \geq t_0\right]$

---

[1] Peter H peskun, *A Note on a Gernal Method for Obtaining Confidence Intervals From Samples Form Discrete Distribution* ,The American Statisician ,Vol 44,1990,pp.31-35

[2] Peter H Peskun, *A new Confidence Interval Method Based on the Normal Approximation for the Difference of Two Binomial Probabilities.* Journal of the American Statistical Association , Vol 88,1993,pp 657-661.

$$= \Pr\left[\frac{T-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \geq \frac{t_0-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\right]$$

$$\cong \Pr\left[Z \geq \frac{t_0-\mathrm{CC_L}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\right] \quad \text{.........(5)}$$

โดยที่ Z คือตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน

$\mathrm{CC_L}$ คือค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่องของขีดจำกัดล่าง ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1/2 ของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่าง t_0 กับค่าของ T ที่มีค่าน้อยกว่าถัดไป

จาก (3) และ (5) จะได้ว่า

$$\mathrm{L}(t_0) \cong \min_{0\leq p_1,p_2\leq 1}\left\{p_1-p_2 \,/\, \frac{t_0-\mathrm{CC_L}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = Z_{\alpha/2}\right\} \quad \text{.........(6)}$$

โดยวิธีลากรังจ์ (Langrange) ที่จะหาค่าต่ำสุด (minimize) ของ $f(p_1-p_2)$ ภายใต้เงื่อนไข (subject to)

$$g(p_1,p_2) = \frac{t_0-\mathrm{CC_L}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} - Z_{\alpha/2} = 0 \quad \text{.........(7)}$$

สร้างสมการลากรังจ์

$$\mathrm{F}(p_1,p_2,\lambda) = (p_1-p_2)+\lambda\left[\frac{t_0-\mathrm{CC_L}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} - Z_{\alpha/2}\right] = 0 \quad \text{.........(8)}$$

$$\mathrm{F}'_{p_1}(p_1,p_2,\lambda) = 1-\lambda\left[\frac{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} + \frac{[t_0-\mathrm{CC_L}-(p_1-p_2)][1-2p_1]}{2n_1\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}}{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right] \quad \text{...(9)}$$

$$F'_{p_2}(p_1,p_2,\lambda) = -1+\lambda\left[\frac{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} - \frac{[t_0-CC_L-(p_1-p_2)][1-2p_2]}{2n_2\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}}{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right] \quad (10)$$

$$F'_{\lambda}(p_1,p_2,\lambda) = \frac{t_0-CC_L-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} - Z_{\alpha/2} \quad \ldots\ldots (11)$$

จาก (9) = - (10)

$$\frac{(1-2p_1)}{2n_1} = -\frac{(1-2p_2)}{2n_2} = 0$$

$$\frac{(1-2p_1)}{2n_1} + \frac{(1-2p_2)}{2n_2} = 0$$

$$\frac{n_2(1-2p_1)+n_1(1-2p_2)}{2n_1n_2} = 0$$

$$\frac{(n_1+n_2)-2(n_2p_1+n_1p_2)}{2n_1n_2} = 0$$

$$2(n_2p_1+n_1p_2) = (n_1+n_2)$$

$$(n_2p_1+n_1p_2) = \frac{(n_1+n_2)}{2}$$

ให้ $n = n_1 + n_2$

จะสามารถแสดงได้ว่า p_1, p_2 สอดคล้องกับสมการ

$$n_2p_1+n_1p_2 = \frac{n}{2} \quad \ldots\ldots (12)$$

กำหนดให้ p_1-p_2 = d และจาก (12) แทนในสมการที่ (7) จะได้ว่า

$$\frac{t_0-CC_L-d}{\sqrt{\frac{n}{4n_1n_2}-\frac{d^2}{n}}} = Z_{\alpha/2}$$

$$t_0-CC_L-d = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n}{4n_1n_2}-\frac{d^2}{n}}$$

$$[\,t_0-CC_L-d\,]^2 = Z^2_{\alpha/2}\left[\frac{n}{4n_1n_2}-\frac{d^2}{n}\right]$$

$$t_0^2 - 2t_0 d + 2CC_L d - 2CC_L t_0 + d^2 + CC_L^2 = \frac{nZ_{\alpha/2}^2}{4n_1 n_2} - \frac{d^2 Z_{\alpha/2}^2}{n}$$

จะเขียนเป็นสมการควอดราติกในรูปของตัวแปร d จะได้

$$H(d) = \left(1 + \frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}\right) d^2 - 2(t_0 - CC_L)d + (t_0^2 - 2CC_L t_0 + CC_L^2) - \frac{nZ_{\alpha/2}^2}{4n_1 n_2} = 0$$

$$aX^2 + bX + c = 0$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = d$$

$$a = \left(1 + \frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}\right)$$

$$b = -2(t_0 - CC_L)$$

$$c = (t_0^2 - 2CC_L t_0 + CC_L^2) - \frac{n}{4n_1 n_2} Z_{\alpha/2}^2$$

$$L(t_0) = \frac{t_0 - CC_L - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n + Z_{\alpha/2}^2}{4n_1 n_2} - \frac{(t_0 - CC_L)^2}{n}}}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

ค่าของ d สามารถที่จะใช้เป็นค่าประมาณของขีดจำกัดล่างได้ แต่ถ้า $n_1 \neq n_2$ ค่า d จะเล็กกว่าค่าต่ำสุดที่ถูกนิยามไว้ในสมการที่ (6) เพราะจะเป็นค่าต่ำสุดของ p_1-p_2 ภายใต้เงื่อนไข $g(p_1,p_2) = 0$ ซึ่งนิยามไว้ใน (7) และจุด $(p_1, p_2) = \left(0.5 + \frac{n_1 d}{n}, 0.5 + \frac{n_2 d}{n}\right)$ อาจอยู่นอกขอบเขตสี่เหลี่ยมหนึ่งหน่วย (unit square) $0 \le p_1, p_2 \le 1$ ถ้าเกิดกรณีนี้แล้วค่าต่ำสุดของ p_1-p_2 ดังนิยามไว้ใน (6) จะเป็นจุด ๆ หนึ่งบนรอยตัดของสมการเงื่อนไข $g(p_1,p_2) = 0$ กับขอบเขตสี่เหลี่ยมหนึ่งหน่วยของ p_1 และ p_2 (unit square) $0 \le p_1, p_2 \le 1$

การประมาณขีดจำกัดบน จาก

$$U(t_0) \cong \max_{0 \le p_1, p_2 \le 1} \left\{ p_1 - p_2 \;/\; \frac{t_0 + CC_U - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = -Z_{\alpha/2} \right\} \quad \text{..............(13)}$$

ในทำนองเดียวกันจากผลลัพธ์ข้างต้นสามารถประมาณได้เป็น

$$U(t_0)=\frac{t_0+CC_U+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n+Z_{\alpha/2}^2}{4n_1n_2}-\frac{(t_0+CC_U)^2}{n}}}{1+\frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

โดยที่ CC_U คือ ค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่องของขีดจำกัดบน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1/2 ของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่าง t_0 กับค่าผลต่างของสัดส่วนประชากร T ที่มีค่ามากกว่าถัดไป ซึ่งถ้า $n_1 = n_2$ แล้ว CC_L จะมีค่าเท่ากันกับ CC_U คือ $1/n$ โดยที่ $n = n_1+n_2$ แต่ถ้า $n_1 \neq n_2$ ค่าของ CC_L กับ CC_U โดยปกติจะมีค่าไม่เท่ากัน

ค่าของ d สามารถใช้เป็นค่าประมาณของขีดจำกัดบนได้ แต่ถ้า $n_1 \neq n_2$ ค่า d จะใหญ่กว่าค่าสูงสุดที่ถูกนิยามไว้ใน (13) เพราะจะเป็นค่าสูงสุดของ p_1-p_2 ภายใต้เงื่อนไข

$$k(p_1,p_2)=\frac{t_0+CC_U-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}+Z_{\alpha/2}=0$$ และ

จุด$(p_1,p_2)=\left(0.5+\frac{n_1d}{n},0.5+\frac{n_2d}{n}\right)$ ซึ่งค่าสูงสุดของ p_1-$p_2 = d$ บนสมการ

$$k(p_1,p_2)=\frac{t_0+CC_U-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}+Z_{\alpha/2}=0$$ จะทำให้คำตอบอยู่นอกขอบเขตสี่เหลี่ยมหนึ่งหน่วย (unit square) $0 \le p_1,p_2 \le 1$ ถ้าเกิดกรณีนี้แล้วค่าสูงสุดของ p_1-p_2 ที่นิยามไว้ในสมการ (13) จะเป็นจุด ๆ หนึ่งบนรอยตัดของสมการเงื่อนไข $k(p_1,p_2) = 0$ กับขอบเขตสี่เหลี่ยมหนึ่งหน่วย (unit square) $0 \le p_1,p_2 \le 1$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ p_1-p_2 คือ

ขีดความเชื่อมั่นล่าง (L4) = $$\frac{t_0-CC_L-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n+Z_{\alpha/2}^2}{4n_1n_2}-\frac{(t_0-CC_L)^2}{n}}}{1+\frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

ขีดความเชื่อมั่นบน (U4) = $$\frac{t_0+CC_U+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n+Z_{\alpha/2}^2}{4n_1n_2}-\frac{(t_0+CC_U)^2}{n}}}{1+\frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วง

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับผลต่างค่าสัดส่วนประชากรสองชุด ทั้ง 4 วิธี จะทำการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น และค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวนได้จากแต่ละวิธีที่ระดับความเชื่อมั่น 3 ระดับคือ 90%, 95% และ 99% ในแต่ละสถานการณ์ของการทดลอง ทำการทดลองซ้ำ 20,000 ครั้ง การเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่นจะทำการเปรียบเทียบระหว่างค่าสัมประสิทธ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้จากแต่ละวิธีการประมาณกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในการตรวจสอบว่าวิธีการประมาณใดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดได้หรือไม่นั้น ผู้วิจัยอาศัยการทดสอบสมมติฐานโดยใช้ตัวสถิติ Z ดังนี้

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \hat{p} < p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

จะได้ช่วง $\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$

โดยที่ $\hat{p}$ คือความน่าจะเป็นที่วิธีการประมาณนั้นจะคลุมค่า p_1-p_2 ซึ่งหาได้จากจำนวนครั้งที่คลุมค่า p_1-p_2 หารด้วยจำนวนครั้งในการทดลอง 20,000

นั่นคือที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่า 0.8965, 0.9470 และ 0.9882 ตามลำดับ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในสถานการณ์นั้นๆ จากนั้นจึงมาพิจารณาเปรียบเทียบค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำสุดเป็นวิธีการที่เหมาะสม ทั้งนี้ในการเปรียบเทียบค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจะเปรียบเทียบเฉพาะในกรณีที่วิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น