บทที่ 2
คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและท่อนำคลื่น

2.1 สมการแมกซ์เวลล์แบบลดรูป (Collin, 1992: 97)

สมการของแมกซ์เวลซึ่งนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางแม่เหล็กไฟฟ้ามีดังนี้

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{i}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

ถ้าภายในท่อนำไม่มีสารบรรจุอยู่จะได้ว่า $i = 0, \varepsilon = \varepsilon_o, \mu = \mu_o$ และ β เป็นเวกเตอร์การแพร่ของคลื่นซึ่งเป็นบวกเสมอ เราสามารถเขียนสมการแมกเวลล์ใหม่ซึ่งอยู่ในแบบลดรูปโดยพิจารณาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ไปในทิศ +z ภายในท่อนำ ส่วนสมการคลื่นที่ขึ้นกับตำแหน่งสามารถเขียนได้ในรูป f(z)g(x,y) โดยที่ f เป็นฟังก์ชั่นของ z อย่างเดียวและ g(x,y) เป็นฟังก์ชั่นของ x,y เท่านั้น เมื่อเราให้คลื่นแพร่ที่ไปยังด้าน +z จะสันนิฐานได้ว่า $f(z) = e^{-j\beta z}$ และเมื่อคลื่นเคลื่อนที่ไปยังด้าน -z จะได้ว่า $f(z) = e^{+j\beta z}$ และฟังก์ชั่นที่ขึ้นกับเวลาของคลื่นอาจเขียนได้อยู่ในรูปคือ $e^{j\omega t}$ โดย ω เป็นความถี่เชิงมุมเท่ากับ $2\pi f$ จากนี้เราจะได้ว่า (เมื่อให้คลื่นแพร่ไปด้าน +z)

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z = \vec{\nabla} - j\beta\hat{a}_z$$

โดยที่ $j = \sqrt{-1}$

เนื่องจาก $\vec{\nabla}_z = \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}$

และ $\vec{\nabla}_t = \hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y}$

เราสามารถเขียนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยแยกส่วนประกอบในทิศ z ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,y,z) &= \vec{E}_t(x,y,z) + \vec{E}_z(x,y,z)\\ &= \vec{e}(x,y)e^{-j\beta z} + \vec{e}_z(x,y)e^{-j\beta z}\end{aligned} \qquad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(x,y,z) &= \vec{H}_t(x,y,z) + \vec{H}_z(x,y,z)\\ &= \vec{h}(x,y)e^{-j\beta z} + \vec{h}_z(x,y)e^{-j\beta z}\end{aligned} \qquad (2.2)$$

โดยที่ $\vec{H}_t, \vec{E}_t$ เป็นส่วนประกอบที่อยู่ในระนาบ x,y และ $\vec{H}_z, \vec{E}_z$ เป็นส่วนประกอบที่อยู่ในแนวแกน z จากสมการของแมกซ์เวล

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = (\vec{\nabla}_t - j\beta\hat{a}_z)\times(\vec{e}+\vec{e}_z)e^{-j\beta z} = -\mu_o\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu_o(\vec{h}+\vec{h}_z)e^{-j\beta z}$$
$$= \vec{\nabla}_t\times\vec{e} - j\beta\hat{a}_z\times\vec{e} + \nabla_t\times\vec{e}_z - j\beta\hat{a}_z\times\hat{e}_z = -j\omega\mu_o\vec{h} - j\omega\mu_o\vec{h}_z$$

ในส่วน $\hat{a}_z\times\vec{e}_z = 0$ และ $\vec{\nabla}_t\times\vec{e}_z = \vec{\nabla}_t\times\hat{a}_z e_z = -\hat{a}_z\times\vec{\nabla}_t e_z$ และสังเกตุว่าส่วน$\vec{\nabla}_t\times\vec{e}$ มีทิศตามแกน z อย่างเดียว ขณะที่ $\hat{a}_z\times\vec{e}$ และ $\vec{\nabla}_t\times\vec{e}_z$ มีเพียงส่วนประกอบที่อยู่ในระนาบ x-y เท่านั้น เราสามารถนำมาเขียนสมการข้างบนใหม่ได้เป็น

$$\vec{\nabla}_t\times\vec{e} = -j\omega\mu_o\vec{h}_z \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla}_t\times\vec{e}_z - j\beta\hat{a}_z\times\vec{e} = -\hat{a}_z\times\vec{\nabla}_t e_z - j\beta\hat{a}_z\times\vec{e} = -j\omega\mu_o\vec{h} \tag{2.4}$$

และสำหรับ $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_o\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ จะได้

$$\vec{\nabla}_t\times\vec{h} = j\omega\varepsilon_o\vec{e}_z \tag{2.5}$$

$$\vec{a}_z\times\vec{\nabla}_t h_z + j\beta\hat{a}_z\times\vec{h} = -j\omega\varepsilon_o\vec{e} \tag{2.6}$$

และจาก $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ จะได้

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\mu_o\vec{H} = (\vec{\nabla}_t - j\beta\hat{a}_z)\cdot(\vec{h}+\vec{h}_z)\,\mu_o e^{-j\beta z}$$
$$= (\vec{\nabla}_t\cdot\vec{h} - j\beta\hat{a}_z\cdot\vec{h}_z)\,\mu_o e^{-j\beta z} = 0$$

หรือ

$$\vec{\nabla}_t\cdot\vec{h} = j\beta\vec{h}_z \tag{2.7}$$

และจาก $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$ จะได้

$$\vec{\nabla}_t\cdot\vec{e} = j\beta\vec{e}_z \tag{2.8}$$

สมการข้างบนเหล่านี้เป็นสมการที่ลดรูปจากสมการแมกซ์เวลซ์ซึ่งเป็นสมการที่มีประโยชน์มากในการหาคำตอบในระบบท่อนำคลื่น

จากสมการข้างบนอาจหาผลเฉลยของคลื่น TEM,TE และ TM สำหรับคลื่น TEM จะเป็นคลื่นที่มีแต่ส่วนประกอบตามขวางไม่มีส่วนประกอบในทิศการเคลื่อนที่เลย เราสามารถหาสนามได้จากเกรเดียนท์ตามขวางของฟังก์ชันสเกลาร์ $\phi(x,y)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการลาปลาสสองมิติ ส่วนคลื่น TE คือคลื่นที่ไม่มีสนามไฟฟ้าในทิศการเคลื่อนที่เพียงอย่างเดียวนั่นคือ E_z=0 ส่วนสนามอื่นๆยังคงมีอยู่ และสามารถหาส่วนประกอบของสนามได้ทั้งหมดจาก H_z และคลื่น TM คือคลื่นที่ไม่มีสนามแม่เหล็กในทิศการเคลื่อนที่เพียงอย่างเดียวนั่นคือ H_z = 0 ส่วนสนามอื่นๆยังคงมีอยู่และสามารถหาส่วนประกอบของสนามได้ทั้งหมดจาก E_z

ต่อไปนี้เราจะหาผลเฉลยของคลื่น TE โดยการแทนค่า E_z ให้เท่ากับศูนย์

คลื่น TE

คลื่น TE คือคลื่นที่ $E_z = 0$ แต่ $H_z \neq 0$ จากสมการคลื่นของแมกซ์เวลเราอาจแสดงได้ว่า

$$\nabla^2 \vec{H} + k_o^2 \vec{H} = 0$$

โดย $k_o = \dfrac{\omega}{c}$, c = ความเร็วของคลื่นในสุญญากาศเท่ากับ $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$

โดยการแยกสมการข้างบนออกเป็นสองส่วนคือในส่วนตามขวางและในส่วนตามทิศการเคลื่อนที่ จาก $\nabla^2 = \nabla_t^2 - \beta^2$ จะได้

$$\nabla_t^2 h_z(x,y) + k_c^2 h_z(x,y) = 0 \qquad (2.9)$$

$$\nabla_t^2 h + k_c^2 h = 0 \qquad (2.10)$$

โดยที่ $k_c^2 = k_o^2 - \beta^2$ และจากสมการของแมกซ์เวลล์ (2.3) - (2.8) แทน $e_z = 0$ ซึ่งจะได้

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{e} = -j\omega\mu_o \vec{h}_z \qquad (2.11a)$$

$$\beta \hat{a}_z \times \vec{e} = \omega\mu_o \vec{h} \qquad (2.11b)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{h} = 0 \qquad (2.11c)$$

$$\vec{a}_z \times \vec{\nabla}_t h_z + j\beta \hat{a}_z \times \vec{h} = -j\omega\varepsilon_o \vec{e} \qquad (2.11d)$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{h} = j\beta h_z \qquad (2.11e)$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{e} = 0 \qquad (2.11f)$$

เคิร์ลสมการ (2.11c) จะได้

$$\vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times h) = \vec{\nabla}_t \vec{\nabla}_t \cdot \vec{h} - \nabla_t^2 \vec{h} = 0$$

แทน $\vec{\nabla}_t \cdot \vec{h}$ ด้วย $j\beta h_z$ จากสมการ (2.11e) และแทน $\nabla_t^2 h$ ด้วย $-k_c^2 h$ จากสมการ (2.11b) จะได้ผลเฉลยของ $\vec{h}$ ในรูปของ h_z

$$\vec{h} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_t h_z \qquad (2.12)$$

เพื่อที่จะหาสนาม $\vec{e}$ ในรูป ของ $\vec{h}$,ทำการคูณเวกเตอร์กับสมการ (2.11b) ด้วย $\vec{a}_z$ จะได้

$$\beta \hat{a}_z \times (\hat{a}_z \times \vec{e}) = \beta[(\hat{a}_z \cdot \vec{e})\vec{a}_z - (\hat{a}_z \cdot \hat{a}_z)\vec{e}] = -\beta \vec{e} = \omega\mu_o \vec{a}_z \times \vec{h}$$

หรือ

$$\vec{e} = -\frac{\omega\mu_o}{\beta} \hat{a}_z \times \vec{h} = -\frac{k_o}{\beta} Z_o \hat{a}_z \times \vec{h} = -Z_h \hat{a}_z \times \vec{h} \qquad (2.13)$$

ซึ่งจะได้อิมพิแดนซ์คลื่นเท่ากับ

$$Z_h = \frac{k_o}{\beta} Z_o \tag{2.14}$$

โดยที่ $\beta = (k_o^2 - k_c^2)^{\frac{1}{2}}$ และจากสมการ (2.13) จะได้

$$\frac{e_x}{h_y} = -\frac{e_y}{h_x} = Z_h \tag{2.15}$$

ดังนั้นเมื่อต้องการหาผลเฉลยสำหรับคลื่น TE จะทำตามขั้นตอนโดยหาคำตอบจากสมการของ h_z จากสมการ

$$\nabla_t^2 h_z(x,y) + k_c^2 h_z(x,y) = 0 \tag{2.16}$$

แล้วหา

$$\vec{h} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_t h_z \tag{2.17}$$

และ

$$\vec{e} = Z_h \hat{a}_z \times \vec{h} \tag{2.18}$$

จะได้สนาม TE

$$\vec{H} = \pm \vec{h} e^{\mp j\beta z} + \vec{h}_z e^{\mp j\beta z} \tag{2.19}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_t = \vec{e} e^{\mp j\beta z} \tag{2.20}$$

คลื่น TEM

ส่วนคลื่นแบบ TEM หาได้โดยแทนค่า $E_z = H_z = 0$ และจะหาสนามไฟฟ้าในส่วนประกอบตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$E_t(x,y,z) = -\vec{\nabla}_t \phi(x,y) e^{-j\beta z} \tag{2.12}$$

ซึ่งสนามนี้ยังเป็นไปตามสมการของเฮมส์โฮลท์

$$\nabla^2 \vec{E}_t + k_o^2 \vec{E}_t = 0$$

จะได้ผลเฉลยของคลื่น TEM ดังต่อไปนี้

$$\vec{E} = \vec{E}_t = \vec{e} e^{\mp jk_o z} = -\vec{\nabla}_t \phi e^{\mp jk_o z} \tag{2.21}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_t = \pm \vec{h} e^{\mp jk_o z} = \pm Y_o \hat{a}_z \times \vec{e} e^{\mp jk_o z} \tag{2.22}$$

โดยที่ $k_o = \omega(\mu_o \varepsilon_o)^{\frac{1}{2}}, Y_o = (\frac{\varepsilon_o}{\mu_o})^{\frac{1}{2}}$ และ $e^{-jk_o z}$ แสดงถึงคลื่นที่แพร่ไปทางด้าน +z และ $e^{+jk_o z}$ แสดงถึงคลื่นที่แพร่ไปในทิศ -z และสำหรับคลื่น TEM Z_o คืออิมพิแดนซ์คลื่น(wave impedance) และจากสมการ (2.15) จะเห็นได้ว่าเมื่อคลื่นแพร่ไปในทิศ +z

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = Z_o \tag{2.23}$$

และเมื่อคลื่นแพร่ไปในทิศ -z

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = -Z_o \tag{2.24}$$

คลื่น TM

คลื่น TM เป็นคลื่นที่ส่วนประกอบ $h_z = 0$ การหาผลเฉลยของคลื่นทำได้ทำนองเดียวกันกับคลื่น TE โดยเริ่มจากหา $\vec{e}_z$ จากสมการ

$$\nabla_t^2 e_z + k_c^2 e_z = 0 \tag{2.25}$$

และจะได้ผลเฉลยคือ

$$\vec{E}_t = \vec{e} e^{\mp j\beta z} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_t e_z e^{\mp j\beta z} \tag{2.26}$$

$$\vec{H}_t = \pm \vec{h} e^{\mp j\beta z} = \pm Y_e \hat{a}_z \times \vec{e} e^{\mp j\beta z} \tag{2.27}$$

เขียนสนามไฟฟ้าในรูปที่สมบูรณ์ได้

$$\begin{aligned} \vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z &= \vec{e} e^{\mp j\beta z} \pm \vec{e}_z e^{\mp j\beta z} \\ &= (-\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_t e_z \pm \vec{e}_z) e^{\mp j\beta z} \end{aligned} \tag{2.28}$$

โดยที่ $\beta = (k_o^2 - k_c^2)^{\frac{1}{2}}$ และมีแอดมิตแตนซ์ Y_e สำหรับคลื่นTM คือ

$$Y_e = Z_e^{-1} = \frac{k_o}{\beta} Y_o \tag{2.29}$$

คลื่น TE และ คลื่น TM มีความสัมพันธ์กันอีกคือ

$$Z_e Z_h = Z_o^2 \tag{2.30}$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนฟังก์ชั่นของสนามที่แพร่ไปทาง +z ได้

$$\vec{E} = \vec{E}^+ = (\vec{e} + \vec{e}_z) e^{-j\beta z} \tag{2.31a}$$

$$\vec{H} = \vec{H}^+ = (\vec{h} + \vec{h}_z) e^{-j\beta z} \tag{2.31b}$$

และสนามที่แพร่ไปทาง -z ได้

$$\vec{E} = \vec{E}^{-} = (\vec{e} - \vec{e}_z)e^{j\beta z} \tag{2.32a}$$

$$\vec{H} = \vec{H}^{-} = (-\vec{h} + \vec{h}_z)e^{j\beta z} \tag{2.32b}$$

2.2 ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม(Collin, 1992: 190)

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงผลเฉลยของคลื่นที่เป็นดอมิแนนท์โหมดในท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมคือคลื่น TE_{10} การหาผลเฉลยของคลื่น TE นั้นหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตเพื่อหา h_z และหาสนามในส่วนประกอบอื่นๆดังที่ได้กล่าวมาแล้วในการหาผลเฉลยของคลื่น TE

คลื่น TE_{10} ที่แพร่ในท่อนำคลื่นในทิศ +z จะมีส่วนประกอบของสนามดังนี้(Collin, 1992: 190)

$$H_z = A\cos\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}$$
$$H_x = \frac{j\beta}{k_c}A\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}$$
$$E_y = -jAZ_h\frac{\beta}{k_c}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}$$

โดยที่

$$k_c = \frac{\pi}{a}$$
$$\beta = [k_o^2 - (\frac{\pi}{a})^2]^{\frac{1}{2}},\ k_o = \frac{\omega}{c}$$
$$Z_h = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_o}{\beta}Z_o$$