

การออกแบบแนวใหม่สำหรับตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกโดยใช้วิธีลิปติง



นายพิเชษฐ์ บุญหนุน

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

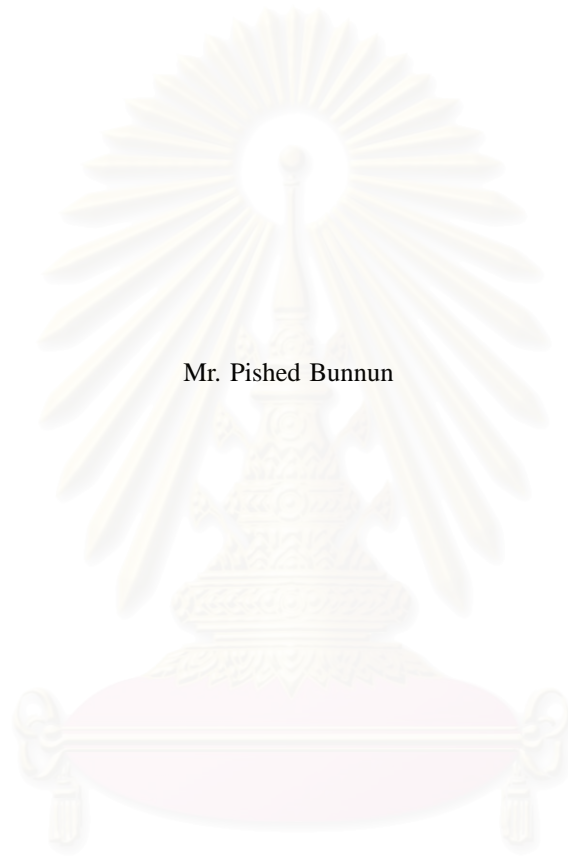
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-03-0397-8

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A NOVEL DESIGN FOR MULTIRATE OUTPUT CONTROLLER USING THE LIFTING APPROACH



Mr. Pished Bunnun

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2001

ISBN 974-03-0397-8

พิเชษฐ บัญหุน: การออกแบบแนวใหม่สำหรับตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกโดยใช้วิธีลิฟติง (A NOVEL DESIGN FOR MULTIRATE OUTPUT CONTROLLER USING THE LIFTING APPROACH) อ. ที่ปรึกษา: อ. ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ, 72 หน้า, ISBN 974-03-0397-8

วิทยานิพนธ์นี้ได้นำวิธีลิฟติงมาอธิบายระบบหลายอัตราสัญญาณออกที่เคยมีงานวิจัยก่อนหน้านี้แล้ว โดยประโยชน์ที่ได้คือ เราสามารถที่จะหาค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการออกแบบจากแบบจำลองที่คาบเวลาสุ่มฐาน สามารถพิจารณาระบบหลายอัตราสัญญาณออกให้เป็นระบบอัตราสุ่มเดียวที่คาบเวลาสุ่มหลักได้ และยังได้วิธีแปลงระบบสุ่มตัวอย่างให้เป็นระบบเวลาเต็มหน่วย สำหรับระบบหลายอัตราสัญญาณออกที่คงค่าแอร์ม H_2 ให้เท่าเดิม เพื่อใช้ในการออกแบบต่อไป นอกจากนี้ได้เพิ่มวิธีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิงซึ่งวิธีการเดิมไม่สามารถออกแบบได้ พร้อมทั้งเสนอแนวทางลดขนาดของเมทริกซ์ป้อนกลับ ในกรณีที่ต้องการออกแบบระบบให้สัญญาณออกสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น เพื่อให้ตัวควบคุมสามารถทนต่อสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอนของระบบเพิ่มขึ้น เมื่อนำตัวควบคุมที่ได้ออกแบบไปควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน พบว่าตัวควบคุมสามารถใช้ควบคุมให้อุณหภูมิให้ตามสัญญาณอ้างอิงได้ดีพอสมควร



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา
สาขาวิชา
ปีการศึกษา

ลายมือชื่อนิสิต
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

##4270459221: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: MULTIRATE OUTPUT CONTROLLER / HEAT EXCHANGER / DELAY TIME SYSTEM / LIFTING / SAMPLED DATA

PISHED BUNNUN: A NOVEL DESIGN FOR MULTIRATE OUTPUT CONTROLLER USING THE LIFTING APPROACH. THESIS ADVISOR: MANOP WONGSAISUWAN, Ph.D. 72 pp., ISBN 974-03-0397-8

This thesis proposes an analysis of multirate output systems via lifting method. The analysis enables, among other things, a construction procedure for finding design parameters at the base period. We can then consider the multirate output systems as single rate systems sampled at the main period. An H_2 -norm preserving transformation from multirate output sampled-data system to discrete-time system based on this analysis is also presented. For sampled-data systems with time delay, the existing method is not directly applicable. A modified design method is presented to overcome the problem. Finally a way to reduce the magnitude of the feedback matrix in the problem tracking of step signal is discussed. An application of the proposed controller for controlling temperature of heat exchanger reveals good tracking performance.



Department
Field of study
Academic year

Student's signature
Advisor's signature
Co-advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

งานวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลือของอาจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ซึ่งได้สละเวลาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ทำให้ผู้วิจัยมีกำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยจึงใคร่ขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณอีกครั้งสำหรับแรงจูงใจอย่างหนึ่งที่ทำให้ผู้วิจัยตัดสินใจศึกษาต่อในระดับปริญญาโท

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.สุลลย์ ประดิษฐ์ฐานนท์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ที่ท่านได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุมที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้พื้นฐานต่างๆ อันเป็นฐานในการศึกษาและทำวิทยานิพนธ์นี้

ผู้วิจัยคงไม่ได้ศึกษาในระดับปริญญาโท หากขาดผู้ให้โอกาส กำลังทรัพย์ กำลังใจ สติปัญญา และตัวตนที่ผู้วิจัยเป็นอยู่ ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา น้องสาว ที่ให้สิ่งเหล่านี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ และน้องทุกๆ คน สำหรับความช่วยเหลือ และกำลังใจที่มอบให้ จนผู้วิจัยได้ทำวิทยานิพนธ์นี้ได้สำเร็จลุล่วง

ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ และจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับที่เรียน ที่เล่น ที่พักผ่อน และบรรยากาศอันเหมาะแก่การศึกษา ค้นคว้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง	ญ
สารบัญภาพ	ฉ
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	ฐ
บทที่	
1 บทนำ	1
1.1 งานวิจัยที่ผ่านมา	2
1.2 ขอบเขตวิทยานิพนธ์	4
1.3 ขั้นตอนการดำเนินงาน	4
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
1.5 โครงสร้างวิทยานิพนธ์	4
2 แบบจำลองและตัวควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในมุมมองของวิธีลิปติง	6
2.1 สมมติฐานของระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	6
2.2 แบบจำลองระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในมุมมองของวิธีลิปติง	8
2.2.1 ระบบ $LG_{11}L^{-1} : l_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_w}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_z})$	9
2.2.2 ระบบ $LG_{12}H : l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_z})$	9
2.2.3 ระบบ $L_dSG_{21}L^{-1} : l_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_w}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^f)$	9
2.2.4 ระบบ $L_dSG_{22}H : l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^f)$	11
2.3 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในมุมมองของวิธีลิปติง	11
3 การออกแบบตัวควบคุม	15
3.1 คุณสมบัติพึงระวังของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	15
3.1.1 ผลของสัญญาณรบกวนต่อการสร้างสัญญาณควบคุม	15
3.1.2 คาบเวลาสุ่มหลักกับขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ	16
3.1.3 ตัวอย่างผลการเลือกค่าคาบเวลาสุ่มหลักต่อขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ ..	18

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.1.4 แนวทางการลดปัญหา	20
3.1.5 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุม	21
3.2 แบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่า	23
3.2.1 เงื่อนไขตัวควบคุม	23
3.2.2 ค่าพารามิเตอร์ของระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่า	24
3.3 แนวทางการออกแบบตัวควบคุม	28
4 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง.....	29
4.1 เวลาประวิงกับตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	29
4.2 การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก	29
4.2.1 การออกแบบตัวควบคุม	30
4.2.2 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุม	31
4.3 การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก	32
4.3.1 แบบจำลองระบบเวลาประวิง	32
4.3.2 การออกแบบตัวควบคุม	33
4.4 คาบเวลาสุ่มกับเวลาประวิง	34
4.4.1 การออกแบบตัวควบคุมกรณีที่ $Td - \tau_d \leq h$	35
4.4.2 การออกแบบตัวควบคุมกรณีที่ $Td - \tau_d > h$	36
4.5 สรุปขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม	36
5 การจำลองการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน.....	38
5.1 แบบจำลองเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน	38
5.2 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	40
5.3 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกบวกรินทริกัล	41
6 การควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน.....	43
6.1 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	43
6.2 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกบวกรินทริกัล	43
6.3 ตัวควบคุม PID ที่อัตราสุ่มฐาน	44
6.4 ตัวควบคุม PID ที่อัตราสุ่มหลัก	46
6.5 การทดสอบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกเมื่อพารามิเตอร์ของระบบเปลี่ยนไป	46

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6.6 สรุปและวิเคราะห์ผลการควบคุม	49
7 สรุปและข้อเสนอแนะ	51
7.1 บทสรุป	51
7.2 ข้อเสนอแนะ	51
รายการอ้างอิง	53
ภาคผนวก	54
ก วิธีลพิมพ์	55
ก.1 ลพิมพ์เวลาเต็มหน่วย	56
ก.1.1 การลพิมพ์ระบบที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มเดียวกัน	57
ก.1.2 การลพิมพ์ระบบที่สัญญาณออกถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มเร็วกว่าสัญญาณเข้า	59
ก.1.3 การลพิมพ์ระบบที่สัญญาณออกถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ช้ากว่าสัญญาณเข้า	59
ก.2 ลพิมพ์เวลาต่อเนื่อง	60
ก.2.1 การลพิมพ์ระบบที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นสัญญาณในระบบเวลาต่อเนื่อง ..	62
ก.2.2 การลพิมพ์ระบบที่สัญญาณออกเป็นสัญญาณในระบบเวลาต่อเนื่อง สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณในระบบเวลาเต็มหน่วย	63
ก.2.3 การลพิมพ์ระบบที่สัญญาณออกเป็นสัญญาณในระบบเวลาเต็มหน่วย สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณในระบบเวลาต่อเนื่อง	63
ข การออกแบบตัวควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	65
ข.1 ระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	65
ข.2 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	67
ข.3 ข้อของระบบวงปิดและการมีเสถียรภาพอย่างยิ่ง	69
ข.4 การเลือกคาบเวลาสุ่มหลักและจำนวนสุ่มสัญญาณออก	70
ข.5 สรุป	70
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	72

สารบัญตาราง

	หน้า
6.1 ค่าสมรรถนะทางเวลาของการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน	49



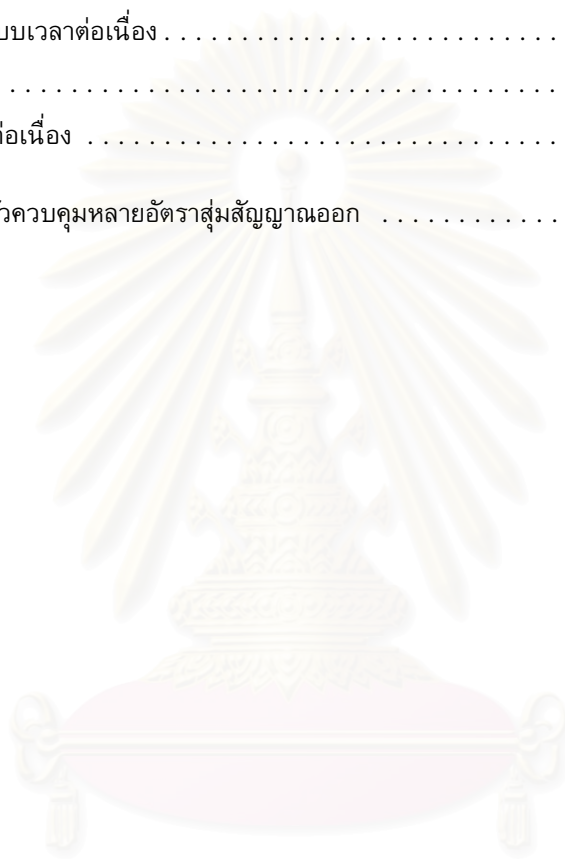
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญญภาพ

	หน้า
2.1 ระบบหลายอัตราส่วนสัญญาณออก	6
2.2 ระบบควบคุมสุมตัวอย่าง	7
2.3 ระบบควบคุมสุมตัวอย่างที่ทำการลิตง	8
2.4 แบบจำลองระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยของระบบหลายอัตราส่วนสัญญาณออก	9
3.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง N กับ T กรณีที่พลาหนที่มีเสถียรภาพ และเลือก f เท่ากับ OIV ของพลาหนที่ . .	19
3.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง N กับ T กรณีที่พลาหนที่มีเสถียรภาพ และเลือก f เท่ากับ OIV ของระบบเสริม	19
3.3 เปรียบเทียบ N ระหว่างการเลือก f เท่ากับ OIV ของพลาหนที่กับของระบบเสริม	20
3.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง N กับ T กรณีที่พลาหนที่ไม่มีเสถียรภาพ และเลือก f เท่ากับ OIV ของพลาหนที่	20
3.5 สัญญาณออก	22
3.6 สัญญาณเข้า	22
3.7 แบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่าของระบบหลายอัตราส่วนสัญญาณออก	23
4.1 สัญญาณออก	31
4.2 สัญญาณเข้า	32
4.3 ผลของเวลาประวงต่อการสุมสัญญาณ	35
5.1 เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน	38
5.2 ลักษณะผลตอบของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนต่อสัญญาณเข้าแบบชั้น	39
5.3 ผลการจำลองการควบคุมด้วยวิธี MROC	41
5.4 ผลการจำลองการควบคุมด้วยวิธี MROCPI	42
6.1 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROC	44
6.2 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROCPI	45
6.3 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม PID ที่คาบเวลาสุมฐาน	45
6.4 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม PID ที่คาบเวลาสุมหลัก	46
6.5 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROC กรณีเปลี่ยนตำแหน่งตัวตรวจวัด .	47
6.6 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROCPI กรณีเปลี่ยนตำแหน่งตัวตรวจวัด	47
6.7 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROC กรณีเปลี่ยนความเร็วลม	48
6.8 ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROCPI กรณีเปลี่ยนความเร็วลม	48
ก.1 การลิตสัญญาณระบบเวลาเต็มหน่วย	56

สารบัญญภาพ (ต่อ)

	หน้า
ก.2 การลัพท์ระบบเวลาเต็มหน่วย	57
ก.3 ความสัมพันธ์ระหว่างสถานะของระบบคาบเวลาสุ่มฐานกับคาบเวลาสุ่มหลัก	59
ก.4 การลัพท์สัญญาณระบบเวลาต่อเนื่อง	61
ก.5 นิยามการลัพท์ตึง	61
ก.6 การลัพท์ระบบเวลาต่อเนื่อง	62
ข.1 ระบบวงปิดสำหรับตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก	68



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

MROC	Multirate Output Controller (65)
MROCPI	Multirate Output Controller Plus Integral (21)
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQ	Linear Quadratic
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multiple Input Multiple Output
LMI	Linear Matrix Inequality
LTl	Linear Time Invariant
OIV	Observability Index Vector (66)
T	คาบเวลาสุ่มหลัก (7)
h	คาบเวลาสุ่มฐาน (7)
$\hat{g}(s)$	ฟังก์ชันถ่ายโอนในระบบเวลาต่อเนื่อง
$\hat{g}(\lambda)$	ฟังก์ชันถ่ายโอนในระบบเวลาเต็มหน่วย
λ	เป็นส่วนกลับของการแปลง z สำหรับระบบเวลาเต็มหน่วย ($\lambda = z^{-1}$)
\mathbb{R}	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^{n \times m}$	เซตของจำนวนจริงที่มีมิติขนาด $n \times m$
\mathbb{R}_+	เซตของจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
\mathbb{Z}	เซตของจำนวนเต็ม
\mathbb{Z}_+	เซตของจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
$\ D_{11}\ _{HS}$	ค่านอร์มของ D_{11} บนปริภูมิฮิลเบิร์ตซมิต (24)
$I^{m \times m}$	เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $m \times m$
$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$	ปริภูมิของฟังก์ชันที่นิยามจากจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ไปยังเวกเตอร์จำนวนจริงที่มีขนาดเท่ากับ n
$\ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n)$	ปริภูมิของฟังก์ชันที่นิยามจากจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ไปยังเวกเตอร์จำนวนจริงที่มีขนาดเท่ากับ n
\mathcal{K}_q	เขียนแทน $\mathcal{L}_2([0, T], \mathbb{R}^q)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันที่นิยามจากจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ถึงค่า T ไปยังเวกเตอร์จำนวนจริงที่มีขนาดเท่ากับ q (8)
L	ตัวดำเนินการลิฟติงเวลาต่อเนื่อง (8)
L^{-1}	ตัวดำเนินการย้อนกลับลิฟติงเวลาต่อเนื่อง
L_d	ตัวดำเนินการลิฟติงเวลาเต็มหน่วย (8)
L_d^{-1}	ตัวดำเนินการย้อนกลับลิฟติงเวลาเต็มหน่วย
$w^{(k)}, z^{(k)}$	สัญญาณที่ถูกลิฟต์โดยลิฟติงเวลาต่อเนื่อง
$u[k]$	สัญญาณที่ถูกลิฟต์โดยลิฟติงเวลาเต็มหน่วย
\hat{C}^{-L}	เมตริกซ์ผกผันทางซ้ายของ \hat{C} (16)
$[\hat{C} \ \hat{G}]^{-L}$	เมตริกซ์ผกผันทางซ้ายของ $[\hat{C} \ \hat{G}]$ (16)

บทที่ 1

บทนำ

ปัจจุบันการควบคุมระบบด้วยคอมพิวเตอร์กำลังเป็นที่นิยม ทั้งนี้เนื่องจากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีระบบควบคุมกับระบบจริงทำได้ง่ายกว่าการสร้างฮาร์ดแวร์เฉพาะสำหรับกฎการควบคุมหนึ่งๆ และการเปลี่ยนกฎการควบคุมทำได้ง่ายไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงฮาร์ดแวร์เพียงแก้ไขที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้ราคาของเทคโนโลยีที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์มีแนวโน้มที่จะถูกลงเรื่อยๆ ในขณะที่ประสิทธิภาพการทำงานกลับดีขึ้น

การทำงานของคอมพิวเตอร์เพื่อควบคุมระบบจะมีตัวสุ่มสัญญาณ (Sampler, A/D Converter) คอยทำหน้าที่สุ่มสัญญาณจากตัวตรวจวัด (Sensor) ของระบบส่งให้คอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการประมวลสัญญาณควบคุม ในขณะที่เดียวกันคอมพิวเตอร์จะส่งสัญญาณควบคุมให้กับตัวขับเคลื่อน (Actuator) ของระบบผ่านทางตัวคงค่า (Holder, D/A Converter) โดยทั่วไปการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ ตัวสุ่มสัญญาณและตัวคงค่าจะทำงานที่อัตราสุ่มเดียวกัน แต่สำหรับบางระบบเช่น ในกระบวนการเคมี อัตราการไหลและอุณหภูมิของสารจะต้องทำการสุ่มสัญญาณด้วยอัตราสุ่มที่เร็ว ในขณะที่ความเข้มข้นของสารอาจสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ช้ากว่าได้ [9] และถ้าหากการส่งสัญญาณควบคุมทำที่อัตราสุ่มเดียวกันหมดทุกช่องสัญญาณด้วยอัตราสุ่มที่ช้ากว่าอัตราสุ่มด้านสัญญาณออก ลักษณะตัวควบคุมเช่นนี้จะเรียกว่า “ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก (Multirate Output Controller: MROC) [1]”

หากคำนึงถึงความสามารถของตัวขับเคลื่อนที่ทำงานได้ภายใต้แถบความถี่ (Bandwidth) ที่จำกัด การเปลี่ยนแปลงสัญญาณควบคุมที่เร็วเกินไปจนตัวขับเคลื่อนไม่สามารถทำงานตามการเปลี่ยนแปลงได้ทัน การเปลี่ยนแปลงสัญญาณควบคุมนั้นก็เลยไม่ส่งผลถึงระบบ ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ควรจำกัดอัตราสุ่มสัญญาณควบคุมที่ตัวขับเคลื่อนสามารถทำงานได้ ซึ่งถือเป็นข้อจำกัดหนึ่งในการเลือกอัตราสุ่มสัญญาณ ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจึงเป็นทางเลือกที่ดี หากเปรียบเทียบกับตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว เพราะในหนึ่งรอบการประมวลสัญญาณ เรามีจำนวนข้อมูลของระบบจากตัวตรวจวัดได้มากขึ้น สำหรับใช้ในการประมวลสัญญาณควบคุม นั่นหมายความว่าสำหรับตัวขับเคลื่อนที่มีแถบความถี่ในการทำงานต่ำ ราคาไม่แพง เราสามารถเพิ่มประสิทธิภาพของการควบคุมระบบได้โดยการใช้ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก ซึ่งจะช่วยลดงบประมาณในส่วนของตัวขับเคลื่อนได้

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ที่ผ่านมาจะเป็นการออกแบบตัวควบคุมในระบบเวลาเต็มหน่วย (Discrete-Time System) หรือ การออกแบบตัวควบคุมในระบบเวลาต่อเนื่อง (Continuous-Time System) แล้วแปลงตัวควบคุมที่ได้เป็นระบบเวลาเต็มหน่วย การออกแบบตัวควบคุมเช่นนี้จะละเลยผลของพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่ม (Inter-sampling Behavior) ซึ่งในบางกรณีอาจได้ตัวควบคุมที่ให้ผลตอบในระหว่างคาบเวลาสุ่มมีการกระเพื่อมของสัญญาณออกแม้ว่าในระบบเวลาเต็มหน่วยผลตอบจะอยู่ที่สภาวะอยู่ตัวแล้ว [4] การออกแบบตัวควบคุมโดยการรวมพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่มไว้

ในการออกแบบตัวควบคุมจึงเป็นแนวทางที่เหมาะสมสำหรับใช้ในการออกแบบตัวควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์
วิธีลิติง [4] เป็นวิธีที่ใช้ช่วยในการออกแบบตัวควบคุมที่รวมผลของพฤติกรรมระหว่างคาบเวลา
สุ่มไว้ในการออกแบบ และยังสามารถนำมาใช้พิจารณาระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกโดยพิจารณาให้อยู่
ในระบบอัตราสุ่มเดียวได้

ที่ผ่านมามีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก [1] ยังไม่มีการรวมผลของพฤติกรรม
ระหว่างคาบเวลาสุ่มไว้ในการออกแบบ และในขั้นตอนการออกแบบ ค่าตัวแปรต่างๆ ไม่ให้ความหมาย
เดิมของระบบ ในวิทยานิพนธ์จึงได้นำวิธีลิติงเข้ามาช่วยอธิบายระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกและรวม
ผลของพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่มเข้าไปในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม นอกจากนี้ยังได้เสนอแนว
ทางลดขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับเพื่อให้ตัวควบคุมมีความทนต่อสัญญาณรบกวน และ ความ
ไม่แน่นอนของระบบเพิ่มขึ้น และได้เสนอวิธีออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่
มีเวลาประวิง (Time Delay) อยู่ด้วย ซึ่งวิธีการออกแบบเดิมไม่สามารถทำการออกแบบได้

เพื่อให้เห็นการนำไปประยุกต์ใช้งานจริง วิทยานิพนธ์นี้จะเลือกทดลองตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณ
ออกกับระบบแลกเปลี่ยนความร้อนที่มีในห้องปฏิบัติการพื้นฐานระบบควบคุม เพราะระบบแลกเปลี่ยนความ
ร้อนมีค่าคงตัวเวลา (Time Constant) ที่ยาวเหมาะที่จะใช้จำลองถึงกระบวนการที่ไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนแปลง
สัญญาณควบคุมบ่อยมากนัก

1.1 งานวิจัยที่ผ่านมา

T. Hagiwara และ M. Araki [1] ได้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ
ด้วยการสุ่มตัวอย่างสัญญาณออกของพลานท์ (Plant) ในแต่ละช่องสัญญาณด้วยอัตราสุ่มที่ต่างกันในขณะที่
ทางด้านสัญญาณเข้าของพลานท์สุ่มที่อัตราสุ่มเดียวกันทุกช่องสัญญาณ หรือในคาบเวลาสุ่มหลักจะทำการ
สุ่มสัญญาณออกแต่ละช่องสัญญาณมากกว่าหรือเท่ากับหนึ่งครั้ง ส่วนทางด้านสัญญาณเข้าทุกช่องสัญญาณ
จะสุ่มเพียงหนึ่งครั้ง หลักการสำคัญของวิธีการออกแบบตัวควบคุมนี้คือสามารถสร้างการป้อนกลับสถานะ
สำหรับระบบเวลาเต็มหน่วยได้โดยไม่ต้องทำการออกแบบตัวสังเกตสถานะแต่อาศัยวิธีสุ่มตัวอย่างสัญญาณ
ออกที่อัตราสุ่มต่างกันสร้างลักษณะการป้อนกลับสถานะแทน และตัวควบคุมนั้นนอกจากจะทำให้ระบบวงปิด
มีเสถียรภาพแล้ว ตัวควบคุมเองก็สามารถเลือกให้มีเสถียรภาพ (Strong Stabilization) ได้ด้วย

M.-J. Er และ B. D. O. Anderson [2] ได้ทำการวิเคราะห์วิธีการออกแบบที่ T. Hagiwara
และ M. Araki เสนอ โดยแสดงให้เห็นว่าการออกแบบวิธีนี้สำหรับระบบบางระบบแล้ว หากเลือกคาบ
เวลาสุ่มหลักไม่ต้อาจให้ค่าสมาชิกของเมทริกซ์ป้อนกลับของตัวควบคุมมีขนาดใหญ่ ทำให้สัญญาณรบกวน
และความไม่แน่นอนของระบบมีผลกับสมรรถนะการควบคุมเป็นอย่างมาก พร้อมกันนี้ได้เสนอแนวทางใน
การเลือกคาบเวลาสุ่มหลักเพื่อลดปัญหาที่เกิดขึ้น

T. Chen และ B. Francis [4] ได้รวบรวมวิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมสำหรับระบบสุ่ม
ตัวอย่างที่อัตราสุ่มเดียวกันทั้งทางด้านสัญญาณเข้าและด้านสัญญาณออกของพลานท์ ประกอบไปด้วยการ
ออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมสำหรับระบบเวลาเต็มหน่วยที่ไม่คำนึงถึงพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่ม และ
การออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมสำหรับระบบสุ่มตัวอย่างที่คำนึงถึงพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่มด้วยโดย

ใช้วิธีลิตพิงในการออกแบบ วิธีที่ใช้ในการออกแบบอาศัยการแปลงระบบสุ่มตัวอย่างให้เป็นระบบเวลาเต็มหน่วยที่รักษาค่านอร์มของฟังก์ชันถ่ายโอนไว้ตามเดิมแล้วทำการออกแบบตัวควบคุมโดยใช้ความรู้ในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเวลาเต็มหน่วยที่มีอยู่

P. Colaneri, R. Scattolini และ N. Schiavoni [5] ได้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุม LQG สำหรับระบบสุ่มตัวอย่างที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกของพลานท์ถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ต่างกันโดยพิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ (Cost Function) ในระบบเวลาเต็มหน่วย ในขณะที่ David G. Meyer [6] ได้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุม LQG สำหรับระบบหลายอัตราสุ่มเช่นกันแต่ต่างกันที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกของพลานท์แต่ละช่องสัญญาณถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ต่างกัน โดยพิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ในระบบเวลาต่อเนื่องแต่แปลงค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ให้มาอยู่ในระบบเวลาเต็มหน่วย

L. Qiu และ T. Chen [7] ได้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสม H_2 สำหรับระบบสุ่มตัวอย่างที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกของพลานท์ถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ต่างกัน พิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ในระบบเวลาต่อเนื่อง โดยใช้วิธีลิตพิงในการพิจารณาระบบให้มีอัตราสุ่มเดียวกันทั้งทางด้านสัญญาณเข้าและสัญญาณออก แล้วใช้เทคนิควิธีทางความถี่ช่วยในการออกแบบตัวควบคุมโดยคำนึงถึงเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล (Causality Constraint) ต่อมา L. Qiu และ K. Tan [8] ได้เสนอวิธีออกแบบตัวควบคุมเหมาะสม H_2 สำหรับระบบสุ่มตัวอย่างที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกของพลานท์แต่ละช่องสัญญาณถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ต่างกัน ผลเฉลยของปัญหาจะได้จากวิธีทางปริภูมิสถานะโดยใช้วิธีลิตพิงในการพิจารณาระบบให้มีอัตราสุ่มเดียวกันทั้งทางด้านสัญญาณเข้าและสัญญาณออก ซึ่งผลเฉลยได้จากแบบจำลองที่ผ่านการลิตพิงโดยตรงไม่ได้ทำการแปลงระบบให้เป็นระบบเวลาเต็มหน่วยก่อนทำการออกแบบตัวควบคุม

A. K. Tangirala, D. Li, R. Patwardhan, S. L. Shah และ T. Chen [9] กล่าวถึงการนำวิธีควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มมาใช้ในกระบวนการทางเคมี และมีการวิเคราะห์ถึงพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่มของสัญญาณออกเมื่อควบคุมระบบด้วยตัวควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก (SISO) ให้เงื่อนไขสำหรับทำให้สัญญาณออกของพลานท์ในระหว่างคาบเวลาสุ่มไม่กระเพื่อมและทำการเปรียบเทียบสมรรถนะระหว่างระบบหลายอัตราสุ่มกับระบบอัตราสุ่มเดียวผ่านทางารออกแบบควบคุมกำลังสองเชิงเส้น (Linear Quadratic: LQ) โดยใช้ฟังก์ชันจุดประสงค์ในระบบเวลาต่อเนื่อง

จากหลักการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในภาคผนวก ข. สามารถสรุปได้ว่าการควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะทำได้เมื่อ

1. พลานท์สามารถสังเกตได้ (Observable)
2. พลานท์สามารถควบคุมได้ (Controllable)
3. พลานท์มีจำนวนสัญญาณออกอย่างน้อยเท่ากับจำนวนสัญญาณเข้า
4. พลานท์ไม่มีศูนย์ที่จุดกำเนิด

คุณสมบัติเหล่านี้เป็นคุณสมบัติของพลานท์ทั่วไป สำหรับเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนที่จะทำการควบคุมมีคุณสมบัติเหล่านี้เช่นกัน

1.2 ขอบเขตวิทยานิพนธ์

1. อธิบายระบบหลายอัตราสัมสัญญาณออกด้วยวิธีลิปติง
2. พัฒนารูปแบบการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกที่รวมผลของพฤติกรรมระหว่างคาบเวลา สุ่มไว้ในการออกแบบตัวควบคุม
3. ควบคุมระบบแลกเปลี่ยนความร้อนโดยเปรียบเทียบผลการควบคุมของตัวควบคุมอัตราสัมเดียว ตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกแบบ และตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกที่เสนอ สำหรับ ปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น

1.3 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาทฤษฎีการออกแบบตัวควบคุมในระบบสุ่มตัวอย่างด้วยวิธีลิปติง
2. ศึกษาทฤษฎีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัม
3. ศึกษาแบบหลายอัตราสัมสัญญาณออกด้วยวิธีลิปติง
4. ศึกษาการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง
5. ทำการจำลองและควบคุมระบบแลกเปลี่ยนความร้อนที่อยู่ในห้องปฏิบัติการพื้นฐาน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. แนวทางการออกแบบตัวควบคุมระบบหลายอัตราสัมสัญญาณออกที่รวมพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่มไว้ในการออกแบบตัวควบคุม
2. ความรู้พื้นฐานที่จะใช้ศึกษาระบบเวลาสุ่มตัวอย่างต่อไป
3. ความหมายทางกายภาพของระบบหลายอัตราสัมสัญญาณออก เพื่อนำไปใช้ในการออกแบบตัวควบคุมจริง
4. ตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง

1.5 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบไปด้วยเนื้อหาทั้งหมด 7 บทด้วยกัน และเพื่อความสมบูรณ์ของเนื้อหาได้เพิ่มภาคผนวกอีก 2 บท โดยแต่ละบทกล่าวถึงเนื้อหาต่างๆ ดังต่อไปนี้

บทที่ 1. กล่าวถึงความเป็นมา ความสำคัญของปัญหา ขอบเขตวิทยานิพนธ์ ขั้นตอนการดำเนินงาน และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

บทที่ 2. อธิบายแบบจำลองและตัวควบคุมระบบหลายอัตราสัมสัญญาณออกด้วยวิธีลิปติง

บทที่ 3. กล่าวถึงปัญหาในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกและวิธีลดปัญหา พร้อมทั้งเสนอทฤษฎีสำหรับแปลงระบบสัมตัวอย่างไปเป็นระบบเวลาเต็มหน่วยของระบบหลายอัตราสัมสัญญาณออก

บทที่ 4. กล่าวถึงปัญหาการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง พร้อมเสนอวิธีออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกสำหรับระบบดังกล่าว

บทที่ 5. แสดงวิธีออกแบบตัวควบคุมและผลการจำลองการควบคุมสำหรับเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

บทที่ 6. แสดงผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออก และเปรียบเทียบกับตัวควบคุม PID

บทที่ 7. สรุปและข้อเสนอแนะ

ภาคผนวก ก. อธิบายถึงวิธีลิปติง ซึ่งใช้ในการอธิบายระบบหลายอัตราสัมสัญญาณออก และใช้ในการวิเคราะห์ค่านอร์ม H_2 ของระบบด้วย

ภาคผนวก ข. กล่าวโดยสรุปถึงวิธีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกที่ T. Hagiwara และ M. Araki [1] ได้เสนอไว้

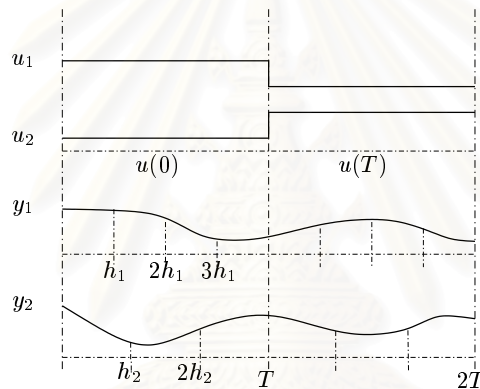


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

แบบจำลองและตัวควบคุมระบบหลายอัตราสัญญาณออกในมุมมองของวิธีลิปติง

ระบบหลายอัตราสัญญาณออกหมายถึง ระบบที่ควบคุมด้วยตัวควบคุมสุ่มตัวอย่างที่สัญญาณออกแต่ละช่องของพลานท์ถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่แตกต่างกัน ในขณะที่สัญญาณเข้าหรือสัญญาณควบคุมจะถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มเดียวกันทุกช่องสัญญาณดังลักษณะสัญญาณที่แสดงในรูป 2.1 จะเห็นว่าในคาบเวลาสุ่มหลัก T สัญญาณควบคุม u_1 และ u_2 จะถูกสุ่มตัวอย่างเพียง 1 ครั้ง ในขณะที่สัญญาณออก y_1 จะถูกสุ่มตัวอย่างมา 4 ครั้ง และ สัญญาณออก y_2 จะถูกสุ่มตัวอย่างมา 3 ครั้ง ในบทนี้จะได้ทำการอธิบายถึงแบบจำลองและตัวควบคุมระบบหลายอัตราสัญญาณออกด้วยวิธีลิปติง



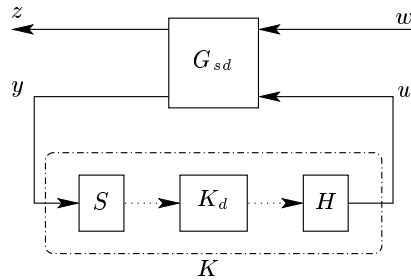
รูปที่ 2.1: ระบบหลายอัตราสัญญาณออก

2.1 สมมติฐานของระบบหลายอัตราสัญญาณออก

เริ่มต้นพิจารณาระบบควบคุมดังรูปที่ 2.2 โดยความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออกทั่วไป z, y และสัญญาณเข้าทั่วไป w, u ดังแสดงในสมการ (2.1) และตั้งอยู่บนสมมติฐานต่อไปนี้

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = G_{sd} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ \hat{g}_{sd}(s) &= \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

1. G_{sd} เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา หลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (LTI MIMO) โดยที่ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, และ $D_{12} \in \mathbb{R}^{n_z \times m}$ หมายถึง



รูปที่ 2.2: ระบบควบคุมสุ่มตัวอย่าง

ความว่า พลาหนที่มีจำนวนสถานะเท่ากับ n สัญญาณควบคุม (u) m ช่องสัญญาณ สัญญาณออก (y) p ช่องสัญญาณ สัญญาณเข้าจากภายนอก (w) n_w ช่องสัญญาณ และมีสัญญาณออกที่จะพิจารณาเป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ (z) n_z ช่องสัญญาณ

2. $D_{11} = 0$ เพื่อให้ $\|D_{11}\|_{\text{HS}} < \infty$ [4]
3. $C_2 = [c'_1 \ c'_2 \ \dots \ c'_p]'$ เมื่อ $c_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
4. $D_{21} = 0$ เพื่อรับประกันว่าสัญญาณเข้าตัวสุ่มที่มีค่านอร์มสองมีขอบเขตแล้วสัญญาณออกที่ได้จะมีค่านอร์มสองที่มีขอบเขตด้วย [4]

กำหนดสัญลักษณ์ที่จะใช้ดังต่อไปนี้

1. T เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ เป็นค่าที่ใช้สำหรับสุ่มสร้างสัญญาณควบคุม เราจะเรียกว่าคาบเวลาสุ่มหลัก (Main Period)
2. f_i เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ที่บอกให้รู้ว่าช่องสัญญาณออกที่ i ของพลาหนที่จะถูกสุ่มมากี่ครั้งในหนึ่งคาบเวลาสุ่มหลัก T เราจะเรียกว่าจำนวนสุ่มสัญญาณออกที่ช่องสัญญาณ i และกำหนดให้

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^p f_i$$

3. f คือตัวคูณร่วมน้อยที่สุดของ f_i เมื่อ $i = 1, \dots, p$ และกำหนดให้ $h = \frac{T}{f}$ เมื่อ h เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ เราจะเรียก h ว่าคาบเวลาสุ่มฐาน (Base Period)
4. ตัวสุ่มสัญญาณ S นิยามจากสมการ (2.2) โดย S_{f_i} ทำงานที่คาบเวลาสุ่ม $h_i = \frac{fh}{f_i} = \frac{T}{f_i}$

$$S = \begin{bmatrix} S_{f_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{f_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{f_p} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

5. ตัวคงค่า H ใช้แทน $I^{m \times m} H$ โดยที่ H ทำงานที่คาบเวลาสุ่มหลัก T และมีลักษณะเป็นตัวคงค่าอันดับศูนย์

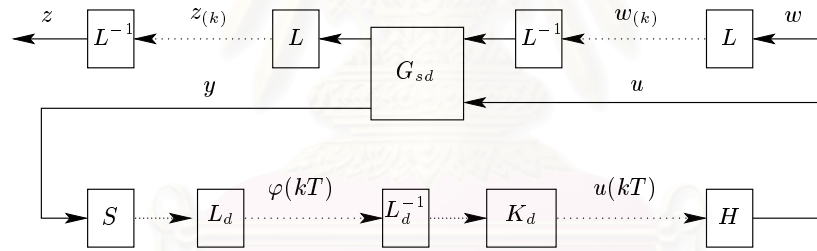
6. ตัวดำเนินการ L หมายถึงตัวดำเนินการลิปติงเวลาต่อเนื่องที่ทำการแปลงสัญญาณจาก $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^q)$ ไปยัง $\ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_q)$ โดยที่ $\mathcal{K}_q := \mathcal{L}_2([0, T), \mathbb{R}^q)$ เมื่อ q คือมิติของสัญญาณที่จะทำการลิปติง
7. ตัวดำเนินการ L_d หมายถึงตัวดำเนินการลิปติงเวลาเต็มหน่วยที่นิยามจากสมการ (2.3) และ L_{f_i} ทำการแปลงสัญญาณจาก $\ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R})$ ไปยัง $\ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^{f_i})$

$$L_d = \begin{bmatrix} L_{f_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{f_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{f_p} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

8. x และ y แทนตัวแปรสถานะและสัญญาณออกของระบบเวลาต่อเนื่องตามลำดับ
9. ξ และ φ แทนตัวแปรสถานะและสัญญาณออกของระบบเวลาเต็มหน่วยตามลำดับ

2.2 แบบจำลองระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในมุมมองของวิธีลิปติง

เมื่อทำการลิปติงระบบในรูปที่ 2.2 ด้วย L ทางด้านสัญญาณ z, w และลิปติงระบบด้วย L_d ทางด้านสัญญาณออก y, u จะได้ระบบดังรูปที่ 2.3 จากนิยามของ L และ L_d จะทำให้ได้ระบบ \underline{G}_{sd} เสมือนในระบบเวลาเต็มหน่วยที่อัตราสุ่มเดียวกันทั้งทางด้านสัญญาณเข้าและด้านสัญญาณออก



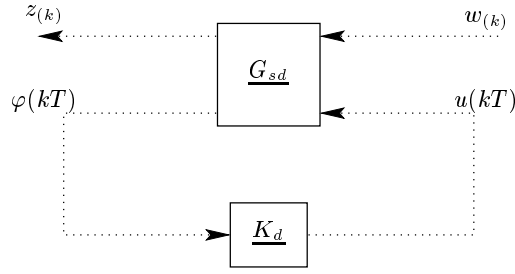
รูปที่ 2.3: ระบบควบคุมสุ่มตัวอย่างที่ทำการลิปติง

เมื่อทำการรวม L, L^{-1}, L_d, S และ H กับ G_{sd} และรวม L_d^{-1} กับ K_d จะได้ระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยดังรูปที่ 2.4 โดยที่

$$\underline{G}_{sd} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L_d S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} L G_{11} L^{-1} & L G_{12} H \\ L_d S G_{21} L^{-1} & L_d S G_{22} H \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\underline{K}_d = K_d L_d^{-1} \quad (2.5)$$

ต่อไปจะทำการหาแบบจำลอง \underline{G}_{sd} โดยจะแบ่งพิจารณาเป็นส่วนดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.4: แบบจำลองระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยของระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

2.2.1 ระบบ $LG_{11}L^{-1} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_w}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_z})$

เมื่อ $\hat{g}_{11}(s) = C_1(sI - A)^{-1}B_1$ จากสมการ (ก.20), (ก.21), (ก.22), และ (ก.23) จะได้ว่า

$$A_d : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n), \quad A_d \xi(kT) = e^{TA} \xi(kT) \quad (2.6)$$

$$\underline{B}_1 : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_w}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n), \quad \underline{B}_1 w(k) = \int_0^T e^{(T-\tau)A} B_1 w(k) d\tau \quad (2.7)$$

$$\underline{C}_1 : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_z}), \quad (\underline{C}_1 \xi)(t) = C e^{tA} \xi(kT) \quad (2.8)$$

$$\underline{D}_{11} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_w}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_z}), \quad (\underline{D}_{11} w(k))(t) = \int_0^t C_1 e^{(t-\tau)A} B_1 w(k) d\tau \quad (2.9)$$

2.2.2 ระบบ $LG_{12}H : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_z})$

เมื่อ $\hat{g}_{12}(s) = D_{12} + C_1(sI - A)^{-1}B_2$ จากสมการ (ก.20), (ก.22), (ก.25), และ (ก.26) จะได้ว่า A_d และ \underline{C}_1 มีค่าเหมือนในกรณี $LG_{11}L^{-1}$ แต่ B_{2d} และ \underline{D}_{12} หาได้จาก

$$B_{2d} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n), \quad B_{2d} u(kT) = \int_0^T e^{\tau A} d\tau B_2 u(kT) \quad (2.10)$$

$$\underline{D}_{12} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_z}), \quad (\underline{D}_{12} u)(t) = D_{12} u(kT) + C_1 \int_0^t e^{tA} d\tau B_2 u(kT) \quad (2.11)$$

2.2.3 ระบบ $L_d S G_{21} L^{-1} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_w}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^f)$

เมื่อ $\hat{g}_{21} = C_2(sI - A)^{-1}B_1$ พิจารณาสมการสถานะ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t), & y(t) &= C_2 x(t) \\ x(kT + t) &= e^{tA} x(kT) + \int_0^{qh} e^{(t-\tau)A} B_1 w(k) d\tau, & 0 \leq t < T \end{aligned}$$

และจากนิยามของ L_d จะได้ว่า

$$\varphi(kT) = \left[\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} y_1(kT) \\ y_1(kT + h_1) \\ \vdots \\ y_1(kT + T - h_1) \end{array} \right\} \begin{array}{c} f_1 \text{ rows} \\ \\ \\ \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \left. \begin{array}{c} y_p(kT) \\ y_p(kT + h_p) \\ \vdots \\ y_p(kT + T - h_p) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \\ f_p \text{ rows} \\ \end{array} \end{array} \right\} \bar{f} \text{ rows}$$

เมื่อ

$$y_i(kT + t) = c_i x(kT + t) = c_i e^{tA} x(kT) + c_i \int_0^t e^{(t-\tau)A} B_1 w_{(k)} d\tau, \quad 0 \leq t < T$$

เมื่อนำมาเขียนให้อยู่ในรูปสมการสถานะจะได้

$$\begin{aligned} \xi(\overline{k+1}T) &= A_d \xi(kT) + \underline{B}_1 w_{(k)} \\ \varphi(kT) &= C_{2d} \xi(kT) + \underline{D}_{21} w_{(k)} \end{aligned}$$

เมื่อ

$$C_{2d} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^{\bar{f}}), \quad C_{2d} \xi(kT) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 e^{h_1 A} \\ \vdots \\ c_1 e^{(T-h_1)A} \\ \vdots \\ c_p \\ c_p e^{h_p A} \\ \vdots \\ c_p e^{(T-h_p)A} \end{bmatrix} \xi(kT) \quad (2.12)$$

และ

$$\underline{D}_{21} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_{n_w}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^{\bar{f}}), \quad \underline{D}_{21} w_{(k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \int_0^{h_1} e^{(h_1-\tau)A} B_1 w_{(k)} d\tau \\ \vdots \\ c_1 \int_0^{T-h_1} e^{(T-h_1-\tau)A} B_1 w_{(k)} d\tau \\ \vdots \\ 0 \\ c_p \int_0^{h_p} e^{(h_p-\tau)A} B_1 w_{(k)} d\tau \\ \vdots \\ c_p \int_0^{T-h_p} e^{(T-h_p-\tau)A} B_1 w_{(k)} d\tau \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.2.4 ระบบ $L_dSG_{22}H : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^f)$

เมื่อ $\hat{g}_{22}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2$ พิจารณาสมการสถานะ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(kT), & y(t) &= C_2x(t) \\ x(kT + t) &= e^{tA}x(kT) + \int_0^t e^{\tau A}B_2d\tau u(kT), & 0 \leq t < T \end{aligned}$$

จะเห็นว่าคล้ายกับลักษณะของระบบ $L_dSG_{21}L^{-1}$ แตกต่างกันที่สัญญาณเข้า $u(kT)$ จะคงที่ตลอดช่วงคาบเวลาสุ่ม T ดังนั้นระบบ $L_dSG_{22}H$ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการสถานะได้เป็น

$$\xi(\overline{k+1T}) = A_d\xi(kT) + B_{2d}u(kT) \quad (2.14)$$

$$\varphi(kT) = C_{2d}\xi(kT) + D_{22d}u(kT) \quad (2.15)$$

เมื่อ

$$D_{22d} : \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^f), \quad D_{22d}u(kT) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \int_0^{h_1} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_1 \int_0^{T-h_1} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ 0 \\ c_p \int_0^{h_p} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_p \int_0^{T-h_p} e^{\tau A} d\tau B_2 \end{bmatrix} u(kT) \quad (2.16)$$

จากการพิจารณาที่ผ่านมา ระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะสามารถพิจารณาให้เป็นระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยอัตราสุ่มเดียวที่คาบเวลาสุ่มหลัก T และเขียนสมการแบบจำลองได้เป็น

$$\hat{g}_{sd}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|cc} A_d & \underline{B}_1 & B_{2d} \\ \hline \underline{C}_1 & \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} \\ \underline{C}_{2d} & \underline{D}_{21} & D_{22d} \end{array} \right] \quad (2.17)$$

สังเกตว่า $\underline{B}_1, \underline{C}_1, \underline{D}_{11}, \underline{D}_{12}, \underline{D}_{21}$ เป็นตัวดำเนินการ ในขณะที่ A_d, B_{2d}, C_{2d} , และ D_{22d} เป็นเมทริกซ์คงที่

2.3 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในมุมมองของวิธีลิปติง

ในหัวข้อนี้จะได้อธิบายตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกตามวิธีในภาคผนวก ข. ซึ่งจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของพลานท์เท่านั้น เริ่มพิจารณาจาก \underline{G}_{sd} ในหัวข้อที่ผ่านมาเฉพาะ \underline{G}_{22} ในสมการ (2.18) ที่เป็นส่วนของพลานท์

$$\underline{g}_{22}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_{2d} \\ \hline C_{2d} & D_{22d} \end{array} \right] \quad (2.18)$$

จากสมการ (2.18) ถ้านำมาเขียนในรูปสมการสถานะได้ดังสมการ (2.14) และ (2.15) เมื่อแทน $\xi(kT)$ จากสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.15) จะได้

$$\begin{aligned}\varphi(kT) &= C_{2d}A_d^{-1}\xi(\overline{k+1}T) - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d}u(kT) + D_{22d}u(kT) \\ &= C_{2d}A_d^{-1}\xi(\overline{k+1}T) + (D_{22d} - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d})u(kT)\end{aligned}\quad (2.19)$$

จากสมการ (2.6) และ (2.12) กำหนดให้

$$\hat{C} \in \mathbb{R}^{\bar{f} \times n} = C_{2d}A_d^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 e^{h_1 A} \\ \vdots \\ c_1 e^{(T-h_1)A} \\ \vdots \\ c_p \\ c_p e^{h_p A} \\ \vdots \\ c_p e^{(T-h_p)A} \end{bmatrix} e^{-TA} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-TA} \\ c_1 e^{(h_1-T)A} \\ \vdots \\ c_1 e^{-h_1 A} \\ \vdots \\ c_p e^{-TA} \\ c_p e^{(h_p-T)A} \\ \vdots \\ c_p e^{-h_p A} \end{bmatrix}\quad (2.20)$$

จากสมการ (2.10),(2.16) และ (2.20) กำหนดให้

$$\hat{G} \in \mathbb{R}^{\bar{f} \times p} = D_{22d} - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d} = \begin{bmatrix} -c_1 e^{-TA} \int_0^T e^{\tau A} d\tau B_2 \\ c_1 \int_0^{h_1} e^{\tau A} d\tau B_2 - c_1 e^{(h_1-T)A} \int_0^T e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_1 \int_0^{T-h_1} e^{\tau A} d\tau B_2 - c_1 e^{-h_1 A} \int_0^T e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_p e^{-TA} \int_0^T e^{\tau A} d\tau B_2 \\ c_p \int_0^{h_p} e^{\tau A} d\tau B_2 - c_p e^{(h_p-T)A} \int_0^T e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_p \int_0^{T-h_p} e^{\tau A} d\tau B_2 - c_p e^{-h_p A} \int_0^T e^{\tau A} d\tau B_2 \end{bmatrix}\quad (2.21)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}C \int_0^q e^{\tau A} d\tau B - C e^{(q-T)A} \int_0^T e^{\tau A} d\tau B &= C \int_0^q e^{\tau A} d\tau B - C \int_0^T e^{(q-T+\tau)A} d\tau B \\ &= C \int_0^q e^{\tau A} d\tau B - C \int_{q-T}^q e^{\tau A} d\tau B \\ &= C \int_0^q e^{\tau A} d\tau B + C \int_q^{q-T} e^{\tau A} d\tau B \\ &= C \int_0^{q-T} e^{\tau A} d\tau B\end{aligned}$$

ฉะนั้นจากสมการ (2.21) จะได้นิยาม \hat{G} เป็น

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} c_1 \int_0^{-T} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ c_1 \int_0^{h_1-T} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_1 \int_0^{-h_1} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_p \int_0^{-T} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ c_p \int_0^{h_p-T} e^{\tau A} d\tau B_2 \\ \vdots \\ c_p \int_0^{-h_p} e^{\tau A} d\tau B_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

เมื่อนำสมการ (2.19), (2.20), และ (2.22) มาเขียนใหม่เป็น

$$\begin{aligned} \varphi(kT) &= \hat{C}\xi(\overline{k+1T}) + \hat{G}u(kT) \\ \hat{C}\xi(\overline{k+1T}) &= \varphi(kT) - \hat{G}u(kT) \end{aligned} \quad (2.23)$$

จะเห็นว่าสมการ (2.20) และ (2.22) จะเหมือนกับสมการ (ข.11) และ สมการ (2.23) เหมือนกับสมการ (ข.10) ดังนั้นค่าตัวแปร \hat{C} และ \hat{G} สำหรับใช้ในการออกแบบตัวควบคุม จะสามารถหาได้จากค่าของฟังก์ชันถ่วงโอนของพลาหนที่ในสมการ (2.18)

ข้อดีอย่างหนึ่งที่ได้จากการมองระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกด้วยวิธีลิปติงคือ เราสามารถหาค่า

ตัวแปร \hat{C} และ \hat{G} ได้จากพลาหนที่ที่อยู่ในระบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่มฐาน ดังความสัมพันธ์ต่อไปนี้

พิจารณาพลาหนที่ในระบบเวลาต่อเนื่อง

$$\hat{g}_{22}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & 0 \end{array} \right] \quad (2.24)$$

ทำการแปลงพลาหนที่ให้อยู่ในระบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่มฐาน h จะได้

$$\hat{g}_{22f}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_{df} & B_{2df} \\ \hline C_2 & 0 \end{array} \right] \quad \text{เมื่อ} \quad A_{df} = e^{hA}; B_{2df} = \int_0^h e^{A\tau} B_2 d\tau \quad (2.25)$$

เมื่อทำการมองระบบในสมการ (2.24) ด้วยวิธีลิปติงให้ได้ระบบดังสมการ (2.18) จากขั้นตอนการทำลิปติงจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าตัวแปรของสมการ (2.25) และ (2.18) ดังนี้

$$A_d = A_{df}^f = e^{hAf} = e^{AT} \quad (2.26)$$

$$B_{2d} = B_{2df} + A_{df} B_{2df} + \cdots + A_{df}^{f-1} B_{2df} = \sum_{i=0}^{f-1} A_{df}^i B_{2df} \quad (2.27)$$

$$C_{2d} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A_{df}^{\tilde{f}_1} \\ \vdots \\ c_1 A_{df}^{(f-\tilde{f}_1)} \\ \vdots \\ c_p \\ c_p A_{df}^{\tilde{f}_p} \\ \vdots \\ c_p A_{df}^{(f-\tilde{f}_p)} \end{bmatrix}, D_{22d} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \sum_{i=0}^{\tilde{f}_1-1} A_{df}^i B_{2df} \\ \vdots \\ c_1 \sum_{i=0}^{f-\tilde{f}_1-1} A_{df}^i B_{2df} \\ \vdots \\ 0 \\ c_p \sum_{i=0}^{\tilde{f}_p-1} A_{df}^i B_{2df} \\ \vdots \\ c_p \sum_{i=0}^{f-\tilde{f}_p-1} A_{df}^i B_{2df} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

เมื่อ $\tilde{f}_i = \frac{f}{f_i}$ นั้นหมายความว่าในการออกแบบตัวควบคุมจริง เราสามารถหาค่าตัวแปรที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกได้จากการหาแบบจำลองระบบ (System Identification) ที่คาบเวลาสุ่มฐานเพียงคาบเดียว

เมื่อมองในส่วนของตัวควบคุม $\hat{k}_d(\lambda)$ สำหรับระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกเราจะสามารถเขียนลักษณะตัวควบคุมให้อยู่ในรูป

$$\hat{k}_d(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} M^{m \times m} & -N^{m \times f} \\ \hline I^{m \times m} & 0 \end{array} \right] \quad (2.29)$$

จะพบว่าตัวควบคุมที่ได้จะเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ อันดับของตัวควบคุมมีค่าเท่ากับจำนวนสัญญาณควบคุมของพลานท์

ในบทนี้เราได้ทำการอธิบายแบบจำลองและตัวควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกด้วยวิธีลิปติงประโยชน์ที่ได้จากการใช้วิธีนี้คือ เราสามารถหาค่า \hat{C} และ \hat{G} จากแบบจำลองระบบที่คาบเวลาสุ่มฐาน และเราสามารถมองระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกให้อยู่ในระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยอัตราสุ่มเดียวที่คาบเวลาสุ่มหลักได้ ในบทต่อไปจะได้นำแบบจำลองที่ได้ในบทนี้ไปทำการวิเคราะห์ต่อถึงผลของการเลือกค่าคาบเวลาสุ่มหลักและการหาแบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่าเพื่อใช้ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกต่อไป

บทที่ 3

การออกแบบตัวควบคุม

จากการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในภาคผนวก ข. จะเห็นว่าเราสามารถออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะได้โดยไม่ต้องทำการออกแบบตัวสังเกตสถานะ ในบทนี้เราจะได้ทำการพิจารณาถึงปัญหาที่เกิดจากสัญญาณรบกวนที่มีผลต่อการสร้างสัญญาณควบคุม พร้อมเสนอแนวทางลดปัญหา และเสนอวิธีการออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลองระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยที่ได้ในบทที่ 2 โดยทำการแปลงระบบที่ได้ให้อยู่ในรูประบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่า ก่อนทำการหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ

3.1 คุณสมบัติพึงระวังของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก จะพบว่าทางเลือกค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T สามารถเลือกได้ค่อนข้างที่จะอิสระ แต่สำหรับการนำไปใช้งานจริงนั้นอาจเกิดปัญหาได้ ทั้งนี้เนื่องจากในระบบจริง อาจจะมีสัญญาณรบกวน ความไม่แน่นอนของระบบ หรือความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ คอยรบกวนการทำงานของตัวควบคุมได้ ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาถึงปัญหาที่อาจเกิดขึ้นและแนวทางลดปัญหาที่เกิดขึ้นนั้น

3.1.1 ผลของสัญญาณรบกวนต่อการสร้างสัญญาณควบคุม

ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาถึงผลกระทบที่เกิดจากสัญญาณรบกวนต่อการสร้างสัญญาณควบคุมของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก เพื่อพิจารณาถึงผลกระทบดังกล่าว พิจารณาระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่มหลัก T ของสมการ (2.17) โดยนำมาเขียนเป็นสมการสถานะได้ดังต่อไปนี้

$$\xi(k+1) = A_d \xi(k) + \underline{B}_1 \omega(k) + B_{2d} u(k) \quad (3.1)$$

$$\varphi(k) = C_{2d} \xi(k) + \underline{D}_{21} \omega(k) + D_{22d} u(k) \quad (3.2)$$

แทนค่า $\xi(k)$ จากสมการ (3.1) ลงในสมการ (3.2) จะได้

$$\varphi(k) = C_{2d} A_d^{-1} \xi(k+1) + (\underline{D}_{21} - C_{2d} A_d^{-1} \underline{B}_1) \omega(k) + (D_{22d} - C_{2d} A_d^{-1} B_{2d}) u(k) \quad (3.3)$$

หากต้องการสร้างสัญญาณควบคุมสำหรับตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก ที่โครงสร้างสัญญาณควบคุมอยู่ในรูป

$$u(k+1) = -F \xi(k+1) = M u(k) - N \varphi(k) \quad (3.4)$$

จากสมการ (3.3) จะได้

$$C_{2d} A_d^{-1} \xi(k+1) = \varphi(k) - (\underline{D}_{21} - C_{2d} A_d^{-1} \underline{B}_1) \omega(k) - (D_{22d} - C_{2d} A_d^{-1} B_{2d}) u(k) \quad (3.5)$$

คุณสมบัติ (3.5) ด้วย $-N$ แล้วนำไปเทียบกับสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$u(k+1) = -F\xi(k+1) = -NC_{2d}A_d^{-1}\xi(k+1) \quad (3.6)$$

$$= -N\varphi(k) + N(D_{21} - C_{2d}A_d^{-1}B_1)\omega(k) + N(D_{22d} - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d})u(k) \quad (3.7)$$

เมื่อกำหนดให้ $\hat{C} = C_{2d}A_d^{-1}$ และ $\hat{G} = D_{22d} - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d}$ จากหลักการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะละเลยผลของ $\omega(k)$ ดังนั้นจะสามารถหาเมทริกซ์ N และ M จาก

$$F = N\hat{C} \quad (3.8)$$

$$M = N\hat{G} \quad (3.9)$$

ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก หลังจากที่ทำการออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F แล้วจากสมการ (3.8) และ (3.9) จะมีด้วยกันสองแนวทางในการหาค่าเมทริกซ์ป้อนกลับ N คือ

1. หาเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากเมทริกซ์ผกผันทางซ้ายของ \hat{C} หรือ $N = F\hat{C}^{-L}$ และจะได้เมทริกซ์ M จาก $M = N\hat{G}$

2. กำหนดเมทริกซ์ M และทำการหาเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากเมทริกซ์ผกผันทางซ้ายของ $\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix}$ หรือ $N = \begin{bmatrix} F & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix}^{-L}$

โดยที่ค่า \hat{C}^{-L} และ $\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix}^{-L}$ จะมีค่าได้ก็ต่อเมื่อระบบที่จะทำการควบคุม และ การเลือกจำนวนสุ่มสัญญาณออกตรงตามเงื่อนไขของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

จากโครงสร้างของสัญญาณควบคุมในสมการ (3.7) จะพบว่าหากขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N ใหญ่จะทำให้สัญญาณรบกวน $\omega(k)$ มีผลกับสัญญาณควบคุมมากตามไปด้วย หากมีขนาดใหญ่มาก อาจทำให้ผลการควบคุมไม่ได้ตามจุดประสงค์การควบคุมที่ตั้งไว้หรืออาจทำให้ระบบขาดเสถียรภาพไปเลยก็ได้ ซึ่งขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N ก็ขึ้นกับขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ F , M , \hat{C}^{-L} และ $\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix}^{-L}$ ซึ่งโดยปกติแล้วขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ F และ M จะมีขนาดเล็ก แต่ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ \hat{C}^{-L} และ $\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix}^{-L}$ จะมีขนาดขึ้นกับโครงสร้างของพลาเน็ตและการเลือกคาบเวลาสุ่มหลักซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

3.1.2 คาบเวลาสุ่มหลักกับขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ

จากหัวข้อที่ผ่านมา จะเห็นว่าขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N มีผลกับการสร้างสัญญาณควบคุม ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาถึงผลกระทบของการเลือกคาบเวลาสุ่มหลักที่มีต่อขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N ดังกล่าว การพิจารณาจะแบ่งเป็นสองกรณี

กรณีที่ 1. กรณีการสร้างเมทริกซ์ป้อนกลับ N จาก

$$N = F\hat{C}^{-L} = F(C_{2d}A_d^{-1})^{-L} \quad (3.10)$$

โดยทั่วไปขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ F จะไม่เปลี่ยนแปลงมากนักเมื่อขนาดของคาบเวลาสุ่มหลัก T เปลี่ยน ฉะนั้นขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N จะขึ้นกับขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ $(C_{2d}A_d^{-1})^{-L}$ เมื่อ

มีการเปลี่ยนคาบเวลาสุ่มหลัก T หากค่าลำดับชั้นหลักของ $C_{2d}A_d^{-1}$ ใกล้ตกรากเท่าใด ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ $(C_{2d}A_d^{-1})^{-L}$ ก็จะใหญ่ขึ้นตามไปด้วย จากจุดนี้หากพิจารณาเพียง C_{2d} ถ้าลำดับชั้นหลักตกราก ลำดับชั้นหลักของ $C_{2d}A_d^{-1}$ ก็จะตกรากด้วยเช่นกัน หรือ หากพิจารณาเพียง A_d^{-1} ถ้าลำดับชั้นหลักตกราก ลำดับชั้นหลักของ $C_{2d}A_d^{-1}$ ก็จะตกรากด้วยเช่นกัน

เมื่อพิจารณาที่ค่า C_{2d} ในสมการ (2.28) หากคาบเวลาสุ่มหลัก T เข้าใกล้ค่าศูนย์ ($T \rightarrow 0$) จะได้ว่า A_d มีค่าเข้าใกล้หนึ่งและจะทำให้เกิดแถวที่เหมือนกันขึ้นซึ่งจะทำให้ลำดับชั้นหลักของ C_{2d} ใกล้ตกราก ฉะนั้นลำดับชั้นหลักของ $C_{2d}A_d^{-1}$ ก็จะใกล้ตกรากตามไปด้วย ทำให้ในกรณีนี้ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ $(C_{2d}A_d^{-1})^{-L}$ มีขนาดใหญ่ ค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N ที่ได้จากการออกแบบก็จะใหญ่เช่นกัน

เมื่อพิจารณาที่ค่า $A_d^{-1} = e^{-AT}$ เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา สมมติให้เมทริกซ์ A เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์แยงมุมดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\alpha > \lambda_i$ โดยที่ λ_i เป็นค่าในแนวแยงมุมของเมทริกซ์ A_1 จะได้ว่า

$$A_d^{-1} = e^{-AT} = \begin{bmatrix} e^{-A_1 T} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix}$$

หากค่า $\alpha > 0$ (พลาที่ไม่มีเสถียรภาพ) จะพบว่าเมื่อค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ ($T \rightarrow \infty$) จะทำให้ค่า $e^{-\alpha T}$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ซึ่งจะทำให้ค่าลำดับชั้นหลักของ A_d^{-1} ใกล้ตกราก ฉะนั้นลำดับชั้นหลักของ $C_{2d}A_d^{-1}$ ก็จะใกล้ตกรากตามไปด้วย

จากการพิจารณาสามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่สร้างเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากสมการ (3.10) หากมีการลดคาบเวลาสุ่มหลัก T เข้าใกล้ศูนย์ไม่ว่าพลาจะมีเสถียรภาพหรือไม่ก็ตาม ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N จะมีขนาดใหญ่ขึ้นตามการลดคาบเวลาสุ่มหลัก T และในกรณีที่เพิ่มคาบเวลาสุ่มหลัก T มากขึ้น สำหรับพลาที่ไม่มีเสถียรภาพ ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N จะมีขนาดใหญ่ตามการเพิ่มคาบเวลาสุ่มหลัก T

กรณีที่ 2. กรณีการสร้างเมทริกซ์ป้อนกลับ N จาก

$$N = \begin{bmatrix} F & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix}^{-L} = \begin{bmatrix} F & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{2d}A_d^{-1} & D_{22d} - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d} \end{bmatrix}^{-L} \quad (3.11)$$

เพื่อให้ง่ายในการพิจารณาสมมติให้เมทริกซ์ A สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ และพลาที่เป็นระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก เราจะพิจารณาค่าลำดับชั้นหลักของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix}$ ทำการแปลงเมทริกซ์โดยวิธีดำเนินการตามหลัก จะได้

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix} &\leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} C_{2d}A_d^{-1} & D_{22d} - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d} \end{bmatrix} \\ &\leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} C_{2d}A_d^{-1} & D_{22d} - C_{2d}A_d^{-1}B_{2d} + C_{2d}A_d^{-1}B_{2d} \end{bmatrix} \leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} C_{2d}A_d^{-1} & D_{22d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า C_{2d} จากสมการ (2.12) และแทนค่า D_{22d} จากสมการ (2.16)

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix} &\leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} ce^{-TA} & 0 \\ ce^{(h-T)A} & c \int_0^h e^{\tau A} d\tau b \\ \vdots & \vdots \\ ce^{-hA} & c \int_0^{T-h} e^{\tau A} d\tau b \end{bmatrix} \leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} ce^{-TA} & 0 \\ ce^{(h-T)A} & ce^{hA} A^{-1} b - cA^{-1} b \\ \vdots & \vdots \\ ce^{-hA} & ce^{(T-h)A} A^{-1} b - cA^{-1} b \end{bmatrix} \\ &\leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} ce^{-TA} & -ce^{-TA} e^{TA} A^{-1} b \\ ce^{(h-T)A} & ce^{hA} A^{-1} b - cA^{-1} b - ce^{(h-T)A} e^{TA} A^{-1} b \\ \vdots & \vdots \\ ce^{-hA} & ce^{(T-h)A} A^{-1} b - cA^{-1} b - ce^{-hA} e^{TA} A^{-1} b \end{bmatrix} \\ &\leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} ce^{-TA} & -cA^{-1} b \\ ce^{(h-T)A} & -cA^{-1} b \\ \vdots & \vdots \\ ce^{-hA} & -cA^{-1} b \end{bmatrix} \leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G}_c \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{bmatrix} -cA^{-1} b \\ -cA^{-1} b \\ \vdots \\ -cA^{-1} b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า \hat{G}_c เป็นเวกเตอร์คงที่ไม่ขึ้นกับการเปลี่ยนแปลงของค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T ดังนั้นเมื่อค่า T มีการเปลี่ยนแปลง ผลจะเป็นเช่นเดียวกันกับกรณีที่ 1 ที่ส่งผลมาจากค่าของ \hat{C} ส่วนค่า \hat{G}_c เราไม่สามารถเลือกได้เพราะเป็นสมบัติของพลานท์ที่จะทำการควบคุม

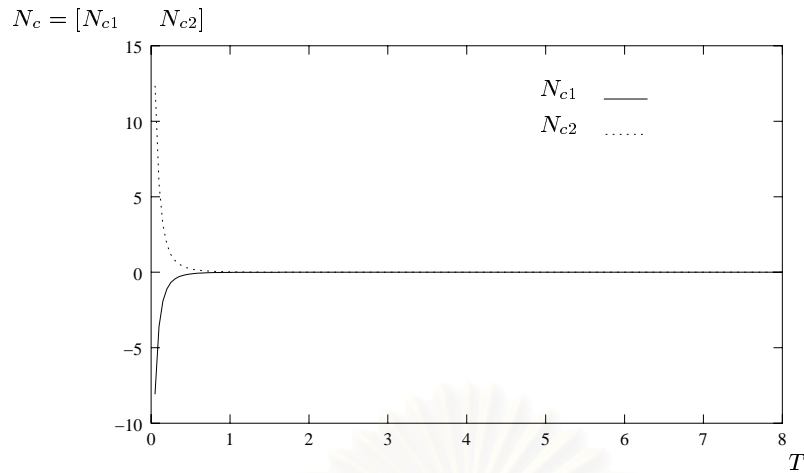
3.1.3 ตัวอย่างผลการเลือกค่าคาบเวลาสุ่มหลักต่อขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ

เพื่อให้เห็นภาพที่เกิดขึ้นจากผลการเลือกค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T ต่อขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N พิจารณาพลานท์เสถียรเชิงเส้นต่อไปนี้

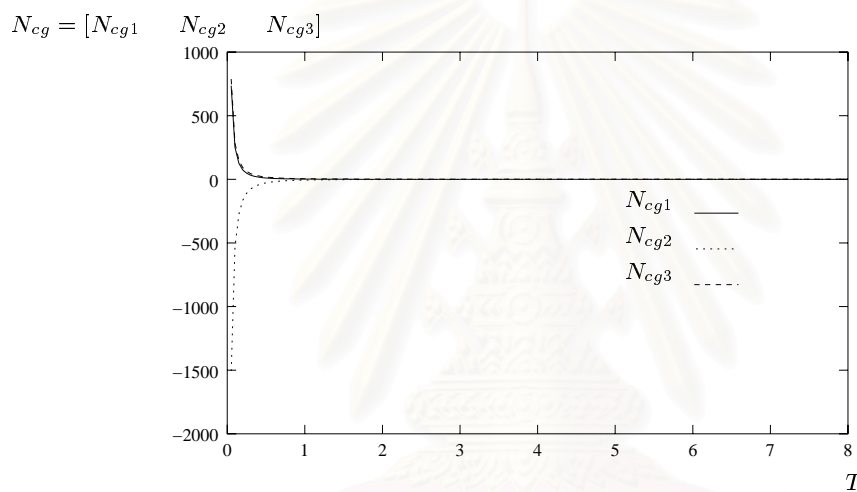
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

พลานท์มีค่า OIV เท่ากับ 2 ฉะนั้นเลือกจำนวนสุ่มสัญญาณออก $f = 2$ ออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F จากการออกแบบเหมาะสม LQ ของระบบเวลาเต็มหน่วยโดยคงค่าถ่วงน้ำหนักตลอดการเปลี่ยนแปลงค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T ทำการหาเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากสมการ (3.10) เมื่อนำค่า N มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์กับ T ที่เปลี่ยนไปจะได้ดังรูปที่ 3.1 จะพบว่าเมื่อค่า T มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N จะใหญ่ขึ้นซึ่งไม่เป็นผลดีนักหากระบบมีสัญญาณรบกวนอยู่มาก ในทางกลับกันถ้าเพิ่มค่า T ให้ใหญ่ขึ้น ถึงแม้ว่าขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N จะเล็กลงแต่สัญญาณควบคุมจะถูกสุ่มด้วยคาบเวลาสุ่มที่ยาวเกินไปจนทำให้ผลตอบของระบบช้า ซึ่งก็ไม่ใช่ผลดีเช่นกัน

เมื่อพิจารณา OIV ของระบบเสริมจะได้ค่าเท่ากับ 3 ฉะนั้นเลือกจำนวนสุ่มสัญญาณออก $f = 3$ และ $M = 1$ ทำการหาเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากสมการ (3.11) เมื่อนำค่า N มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์กับ T ที่เปลี่ยนไปจะได้ดังรูปที่ 3.2. จะพบว่าเกิดลักษณะเดียวกันกับกรณีที่หาเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากสมการ (3.10)



รูปที่ 3.1: ความสัมพันธ์ระหว่าง N กับ T กรณีที่พลาสมาที่มีเสถียรภาพ และเลือก f เท่ากับ OIV ของพลาสมา



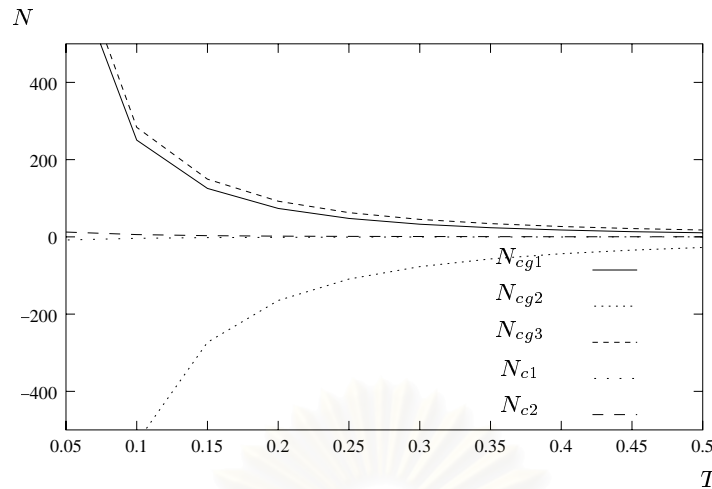
รูปที่ 3.2: ความสัมพันธ์ระหว่าง N กับ T กรณีที่พลาสมาที่มีเสถียรภาพ และเลือก f เท่ากับ OIV ของระบบเสริม

แต่หากพิจารณาให้ดี หากนำรูปที่ 3.1 และ 3.2 มาแสดงในรูปเดียวกันดังแสดงในรูปที่ 3.3 จะเห็นว่าขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N แต่ละค่าของการออกแบบด้วยสมการ (3.11) จะใหญ่กว่าที่ได้จากการออกแบบด้วยสมการ (3.10) อย่างมาก สำหรับระบบทั่วไปลักษณะเช่นนี้อาจเกิดขึ้นได้ แล้วแต่ลักษณะของพลาสมาที่จะทำการควบคุม

พิจารณากรณีที่พลาสมาที่ไม่เสถียร โดยเปลี่ยนพลาสมาในสมการที่ (3.12) เป็น

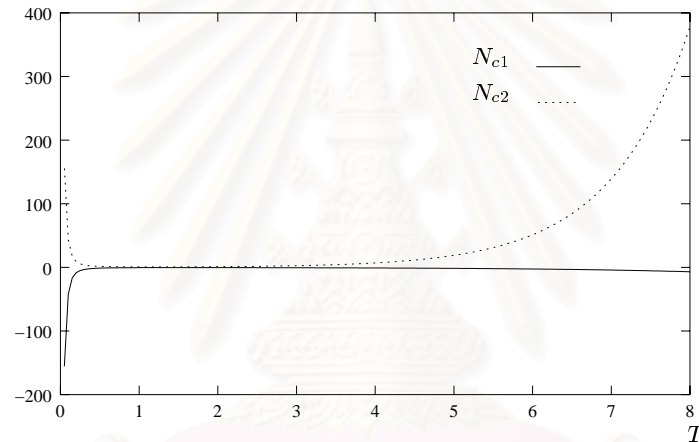
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

พลาสมาที่มีค่า OIV เท่ากับ 2 ฉะนั้นเลือกจำนวนสัญญาณออก $f = 2$ ออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F จากการออกแบบเหมาะสม LQ ของระบบเวลาเต็มหน่วยโดยคงค่าถ่วงน้ำหนักตลอดการเปลี่ยนแปลงค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T ทำการหาเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากสมการ (3.10) เมื่อนำค่า N มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์กับ T ที่เปลี่ยนไปจะได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.3: เปรียบเทียบ N ระหว่างการเลือก f เท่ากับ OIV ของพลาหนักับของระบบเสริม

$$N_c = [N_{c1} \quad N_{c2}]$$



รูปที่ 3.4: ความสัมพันธ์ระหว่าง N กับ T กรณีที่พลาหนักไม่มีเสถียรภาพ และเลือก f เท่ากับ OIV ของพลาหนัก

จากทั้งสองตัวอย่างที่นำเสนอ จะเห็นว่าทั้งการลด หรือ เพิ่มค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T มากไปจะทำให้สมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N มีขนาดใหญ่

3.1.4 แนวทางการลดปัญหา

สำหรับปัญหาการเลือกค่าคาบเวลาสุ่มหลัก T ที่มีผลกับขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N M-J. Er และ B. D. O. Anderson [2] ได้เสนอแนวทางในการเลือกคาบเวลาสุ่มหลัก T ที่เหมาะสม เพื่อให้ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N มีขนาดไม่ใหญ่จนเกินไป ดังสรุปไว้ในภาคผนวก ข.

ในกรณีที่ต้องการให้สัญญาณออกสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้จำเป็นต้องสร้างเมทริกซ์ N จากสมการ (3.11) เนื่องจากต้องเลือกค่าเมทริกซ์ M ให้มีค่าเจาะจงเท่ากับหนึ่งตามหลักแบบจำลองภายใน (Internal Model Principle) [12] และเปลี่ยนตัวควบคุมเป็น

$$u(k+1) = Mu(k) - N(\varphi(k) - 1_d) \quad (3.13)$$

สัญญาณออกจึงจะสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ แต่การทำเช่นนี้ดังที่ได้แสดงแล้วว่าบางกรณีขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N ที่ได้จะใหญ่กว่ากรณีที่เราไม่กำหนดค่าเมทริกซ์ M มาก เพื่อให้สัญญาณออกสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้เช่นเดียวกันแต่สามารถลดขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N ได้ สามารถทำได้ด้วยการออกแบบตัวควบคุมให้มีผลอินทิกรัล (Integral Action) เพิ่มมาจากการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกแบบปกติ จะเรียกตัวควบคุมแบบนี้ว่า ตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกบวกอินทิกรัล (Multirate Output Controller Plus Integral: MROCI) พิจารณาระบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่มหลัก T

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= A_d \xi(k) + B_{2d} u(k) \\ y(k) &= C_2 \xi(k)\end{aligned}$$

เพิ่มตัวแปรสถานะ z เพื่อสร้างผลอินทิกรัล จะได้สมการสถานะใหม่ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \xi(k+1) \\ z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ C_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ z(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2d} \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} 1_d(k) \quad (3.14)$$

โดยที่ 1_d คือสัญญาณขั้นที่ต้องการตามรอย นำระบบใหม่ที่ได้ไปออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ เมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ $F = [F_1 \ F_2]$ ที่ได้จะมีอยู่สองส่วน ส่วนที่หนึ่ง (F_1) เป็นเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะของระบบเดิม และส่วนที่สอง (F_2) จะเป็นของตัวแปรสถานะ z ที่เพิ่มเข้าไป เนื่องจากไม่จำเป็นต้องสร้างตัวสังเกตสถานะ z ดังนั้นจึงสามารถนำ F_1 ไปออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกโดยแก้ไขตัวควบคุมให้อยู่ในรูป

$$u(k+1) = M u(k) - N \varphi(k) - F_2 z(k+1) \quad (3.15)$$

โดยที่ N สามารถหาได้จากสมการ (3.10) ที่แทน F ด้วย F_1 ส่วนค่า $z(k+1)$ สามารถหาได้จาก

$$z(k+1) = y(k) + z(k) - 1_d(k)$$

สุดท้ายก็จะได้ตัวควบคุมซึ่งให้ผลการควบคุมตามต้องการ และสามารถลดขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N ลงไปได้ด้วย

3.1.5 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุม

พิจารณาระบบในสมการ (3.12) ต้องการควบคุมให้ระบบสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ จะออกแบบตัวควบคุมโดยวิธี MROC กำหนดให้ $M = 1$ เลือกคาบเวลาสุ่มหลัก $T = 0.06$ วินาที เนื่องจากระบบเสริมมีค่า OIV เท่ากับ 3 ฉะนั้นเลือกจำนวนสัญญาณออกเท่ากับ 3 ออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F จะได้

$$F = [3.3885 \quad 3.4971]$$

ทำการหาค่าเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากสมการ (3.11) จะได้

$$N = [515.82 \quad -1071.46 \quad 559.67]$$

แล้วตัวควบคุมที่ได้จะอยู่ในรูป (3.13)

วิธี **MROCPI** เลือกคาบเวลาสุ่มหลัก $T = 0.06$ วินาที เนื่องจากระบบเดิมมีค่า OIV เท่ากับ 2 แต่จะเลือกจำนวนสุ่มสัญญาณออกเท่ากับ 3 ออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะสำหรับระบบในสมการ (3.14) จะได้

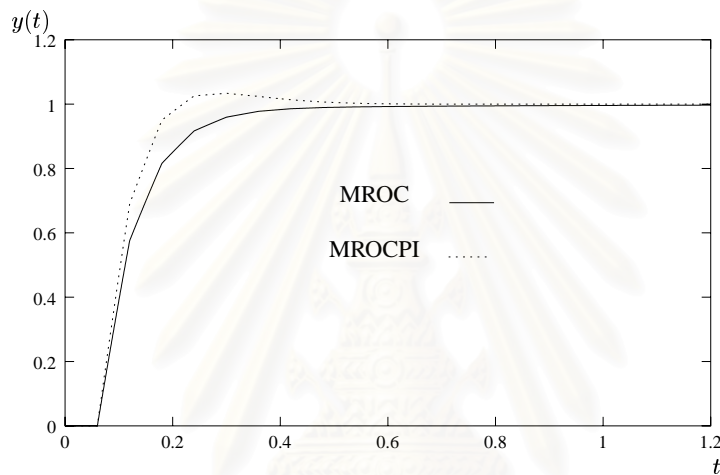
$$F = \begin{bmatrix} 7.0560 & 7.4204 & 2.4092 \end{bmatrix}$$

ทำการหาค่าเมทริกซ์ป้อนกลับ N จากสมการ (3.10) แล้วหาค่าเมทริกซ์ M จากสมการ (3.9) จะได้

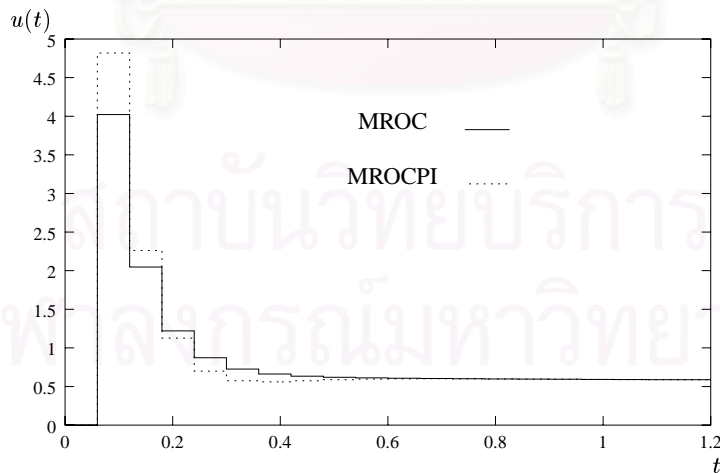
$$N = \begin{bmatrix} -13.0359 & 2.8923 & 17.8906 \end{bmatrix}$$

$$M = 0.84490$$

สุดท้ายจะได้ตัวควบคุมที่อยู่ในรูป (3.15)



รูปที่ 3.5: สัญญาณออก



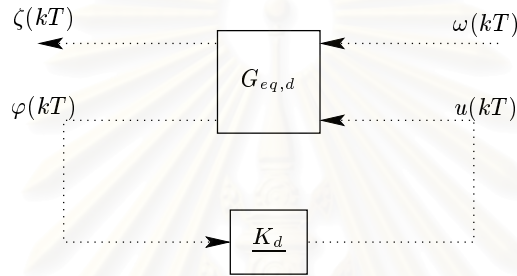
รูปที่ 3.6: สัญญาณเข้า

ผลการจำลองระบบควบคุมแสดงดังในรูปที่ 3.5 และ 3.6 สังเกตว่าผลการควบคุมที่ได้ให้ผลตอบได้ตามจุดประสงค์การควบคุมทั้งสองวิธี แต่วิธี MROC จะให้ขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N ที่ใหญ่กว่า

ในวิธี MROCP1 เมื่อเทียบกันในแต่ละค่า แต่อย่างไรก็ตามการออกแบบด้วยวิธี MROCP1 นี้มีข้อจำกัดที่ไม่สามารถเลือกค่าของเมทริกซ์ M ได้ ดังนั้นหากต้องการตัวควบคุมที่เสถียรด้วยแล้วต้องพิจารณาถึงค่าเจาะจงของเมทริกซ์ M ด้วย

3.2 แบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่า

จากแบบจำลองระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยของระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในบทที่ 2 ที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกทั่วไป (z, ω) ของแบบจำลองมีมิติอนันต์ยังไม่สามารถนำมาออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ได้โดยตรง ในหัวข้อนี้จะทำการแปลงระบบนี้ให้เป็นระบบที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกทั่วไปของแบบจำลองมีมิติจำกัด (หรือเรียกว่าแบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่า) เมื่อคำนึงถึงค่านอร์ม H_2 ของระบบวงปิด



รูปที่ 3.7: แบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่าของระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

3.2.1 เงื่อนไขตัวควบคุม

การแปลงระบบจะทำให้มีเงื่อนไขของตัวควบคุมดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ค่านอร์ม H_2 ของระบบวงปิดในรูปที่ 2.4 และ 3.7 จะสอดคล้องกับ $\|\hat{t}_{zw}\|_2^2 = \|\underline{D}_{11}\|_{HS}^2 + \|\hat{t}_{c\omega}\|_2^2$ ถ้าตัวควบคุม \hat{k}_d เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ (Strictly Proper) หรือ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\hat{k}_d(\lambda) = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix}$$

พิสูจน์

พิจารณาระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยในสมการ (2.17) นิยามตัวดำเนินการฟังก์ชันถ่ายโอน (Operator-Valued Transfer Function) ดังต่อไปนี้

$$\hat{g}_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_d & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} A_d & I \\ I & 0 \end{bmatrix} B_1 + D_{11}$$

$$\hat{g}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_d & B_{2d} \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = [C_1 \quad D_{12}] \begin{bmatrix} A_d & B_{2d} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\hat{g}_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_d & B_1 \\ C_{2d} & D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & I & 0 \\ C_{2d} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

และนิยามฟังก์ชันถ่ายโอน (Matrix - Valued Transfer Functions)

$$\hat{g}_{22d}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_{2d} \\ \hline C_{2d} & D_{22d} \end{array} \right]$$

จากรูปที่ 2.4 จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบวงปิดเป็น

$$\underline{\hat{t}}_{z\omega} = \underline{\hat{g}}_{11} + \underline{\hat{g}}_{12}(I - \underline{\hat{k}}_d \underline{\hat{g}}_{22d})^{-1} \underline{\hat{k}}_d \underline{\hat{g}}_{21} \quad (3.16)$$

และถ้านิยามฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้

$$\hat{g}_{11}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & I \\ \hline I & 0 \end{array} \right], \hat{g}_{12}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_{2d} \\ \hline I & 0 \end{array} \right], \hat{g}_{21}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & I \\ \hline C_{2d} & 0 \end{array} \right]$$

จะได้ว่า

$$\underline{\hat{t}}_{z\omega} = \underline{D}_{11} + \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{D}_{12} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{g}_{12}(I - \underline{\hat{k}}_d \underline{\hat{g}}_{22d})^{-1} \underline{\hat{k}}_d \hat{g}_{21} \right\} \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{D}_{21} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

เนื่องจาก \hat{g}_{11} และ \hat{k}_d ก็เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้จะได้ว่า

$$\|\underline{\hat{t}}_{z\omega}\|_2^2 = \|\underline{D}_{11}\|_{\mathbb{H}\mathbb{S}}^2 + \|\underline{\hat{t}}_{z\omega}\|_2^2 \quad (3.18)$$

โดยที่

$$\|\underline{\hat{t}}_{z\omega}\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{D}_{12} \end{bmatrix} \hat{q} \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{D}_{21} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (3.19)$$

เมื่อ \hat{q} เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนที่อยู่ในปีกกาของสมการ (3.17) □

ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกมีโครงสร้างดังในสมการ (2.29) ซึ่งตรงกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 3.1 ดังนั้นค่าของ $\|\underline{\hat{t}}_{z\omega}\|_2^2$ สำหรับตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะเท่ากับในสมการ (3.18) โดยที่ $\|\underline{D}_{11}\|_{\mathbb{H}\mathbb{S}}^2$ มีค่าคงที่เท่ากับ [4]

$$\|\underline{D}_{11}\|_{\mathbb{H}\mathbb{S}}^2 = \text{trace} \left(\underline{B}'_1 \int_0^h \int_0^t e^{\tau A'} \underline{C}'_1 \underline{C}_1 e^{\tau A} d\tau dt \underline{B}_1 \right)$$

ฉะนั้นหากต้องการให้ $\|\underline{\hat{t}}_{z\omega}\|_2^2$ มีค่าน้อยที่สุดก็จะเหมือนกับทำให้ $\|\underline{\hat{t}}_{z\omega}\|_2^2$ มีค่าน้อยที่สุดด้วย

3.2.2 ค่าพารามิเตอร์ของระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่า

ในสมการ (3.19) สังเกตว่าเป็นการหาค่านอร์มของพารามิเตอร์ที่เป็นตัวดำเนินการ ต่อไปจะได้หาค่าพารามิเตอร์ที่อยู่ในรูปเมทริกซ์สำหรับการใช้ในการออกแบบแทนสมการเดิมโดยยังคงค่านอร์มไว้เท่าเดิม จากนิยามของนอร์ม $\mathcal{H}_2(\mathbb{D}, \mathbb{H}\mathbb{S})$ [4]

$$\left\| \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{D}_{12} \end{bmatrix} \hat{q} \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{D}_{21} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{D}_{12} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta}) \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{D}_{21} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{H}\mathbb{S}}^2 d\theta \quad (3.20)$$

กำหนดค่า θ ให้คงที่ และกำหนดตัวดำเนินการ

$$F := \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta}) \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

เป็นตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต-ชมิท (Hilbert-Schmidt Operator) ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์ (Impulse Response) เป็น

$$f(t, \tau) = \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} e^{tA} \hat{q}(e^{j\theta}) \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \begin{bmatrix} A & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} e^{tA} &= \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{tA} & \int_0^T e^{(T-\tau)A} B_2 d\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 e^{tA} & D_{12} + C_1 \int_0^T e^{(T-\tau)A} B_2 d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{D}_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \delta(\tau' - \tau) &= \begin{bmatrix} \int_0^T e^{(T-\tau)A} B_1 \delta(\tau' - \tau) d\tau \\ 0 \\ c_1 \int_0^{h_1} e^{(h_1-\tau)A} B_1 \delta(\tau' - \tau) d\tau \\ \vdots \\ c_1 \int_0^{T-h_1} e^{(T-h_1-\tau)A} B_1 \delta(\tau' - \tau) d\tau \\ \vdots \\ 0 \\ c_p \int_0^{h_p} e^{(h_p-\tau)A} B_1 \delta(\tau' - \tau) d\tau \\ \vdots \\ c_p \int_0^{T-h_p} e^{(T-h_p-\tau)A} B_1 \delta(\tau' - \tau) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(T-\tau)A} B_1 1(T-\tau) \\ 0 \\ c_1 e^{(h_1-\tau)A} B_1 1(h_1-\tau) \\ \vdots \\ c_1 e^{(T-h_1-\tau)A} B_1 1(T-h_1-\tau) \\ \vdots \\ 0 \\ c_p e^{(h_p-\tau)A} B_1 1(h_p-\tau) \\ \vdots \\ c_p e^{(T-h_p-\tau)A} B_1 1(T-h_p-\tau) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} \\ \tilde{B}_1 &= e^{(T-\tau)A} B_1 1(T-\tau) \\ \tilde{D}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 e^{(h_1-\tau)A} B_1 1(h_1-\tau) \\ \vdots \\ c_1 e^{(T-h_1-\tau)A} B_1 1(T-h_1-\tau) \\ \vdots \\ 0 \\ c_p e^{(h_p-\tau)A} B_1 1(h_p-\tau) \\ \vdots \\ c_p e^{(T-h_p-\tau)A} B_1 1(T-h_p-\tau) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้

$$\begin{bmatrix} C'_{1d} \\ D'_{12d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} = \int_0^T e^{tA'} \begin{bmatrix} C'_1 \\ D'_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} e^{tA} dt \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} B_{1d} \\ D_{21d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B'_{1d} & D'_{21d} \end{bmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}'_1 & \tilde{D}'_{21} \end{bmatrix} d\tau \quad (3.24)$$

พิจารณาค่า $\|F\|_{\text{HS}}^2$ จากนิยามจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|F\|_{\text{HS}}^2 &= \text{trace} \int_0^T \int_0^T f(t, \tau)' f(t, \tau) dt d\tau \\ &= \text{trace} \int_0^T \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{B}'_1 & \tilde{D}'_{21} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta})^* e^{tA'} \begin{bmatrix} C'_1 \\ D'_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} e^{tA} \hat{q}(e^{j\theta}) \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} dt d\tau \\ &= \text{trace} \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{B}'_1 & \tilde{D}'_{21} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta})^* \begin{bmatrix} C'_{1d} \\ D'_{12d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta}) \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \text{trace} \left(\int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}'_1 & \tilde{D}'_{21} \end{bmatrix} d\tau \right) \hat{q}(e^{j\theta})^* \begin{bmatrix} C'_{1d} \\ D'_{12d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta}) \\ &= \text{trace} \begin{bmatrix} B_{1d} \\ D_{21d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B'_{1d} & D'_{21d} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta})^* \begin{bmatrix} C'_{1d} \\ D'_{12d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta}) \\ &= \text{trace} \begin{bmatrix} B'_{1d} & D'_{21d} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta})^* \begin{bmatrix} C'_{1d} \\ D'_{12d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta}) \begin{bmatrix} B_{1d} \\ D_{21d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้นค่านอร์มในสมการ (3.20) จะเท่ากับค่านอร์ม $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ ของฟังก์ชัน

$$\begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} \hat{q}(e^{j\theta}) \begin{bmatrix} B_{1d} \\ D_{21d} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ซึ่งก็คือ $\hat{t}_{\zeta\omega}$ ที่เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนในเวลาเต็มหน่วย เมื่อ $\begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} B'_{1d} & D'_{21d} \end{bmatrix}$ คำนวณจากสมการ (3.23) และ (3.24) โดยใช้การแยกเฟกเตอร์ไชลสกี (Cholesky Factorization) [13] และเมทริกซ์เลขชี้กำลังดังบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1 กำหนดให้ A_{11} และ A_{22} เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และนิยาม

$$\begin{bmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ 0 & F_{22}(t) \end{bmatrix} = \exp \left\{ t \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \right\}, \quad t \geq 0 \quad (3.26)$$

แล้ว

$$F_{11}(t) = e^{tA_{11}}, F_{22}(t) = e^{tA_{22}}, F_{12}(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A_{11}} A_{12} e^{\tau A_{22}} d\tau \quad (3.27)$$

ดังนั้นจะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ C_{1d} และ D_{12d} ในสมการ (3.23) ได้โดยกำหนด

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} C'_1 \\ D'_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} &= \exp \left\{ T \begin{bmatrix} -\underline{A}' & Q \\ 0 & \underline{A} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

จากบทตั้ง 3.1 จะได้

$$\begin{aligned} M_{22} &= e^{TA} \\ M_{12} &= \int_0^T e^{-(T-\tau)A'} Q e^{\tau A} d\tau \\ &= e^{-TA'} \int_0^T e^{\tau A'} Q e^{\tau A} d\tau \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} C'_{1d} \\ D'_{12d} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} = M'_{22} M_{12}$$

สำหรับค่าพารามิเตอร์ B_{1d} และ D_{21d} สามารถหาได้ในทำนองเดียวกันโดยจัดรูปได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{1d} \\ D_{21d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B'_{1d} & D'_{21d} \end{bmatrix} &= \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}'_1 & \tilde{D}'_{21} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \tilde{B}'_1 & \tilde{B}_1 \tilde{D}'_{21} \\ \tilde{D}_{21} \tilde{B}'_1 & \tilde{D}_{21} \tilde{D}'_{21} \end{bmatrix} d\tau \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} B_{1d} B'_{1d} &= \int_0^T \tilde{B}_1 \tilde{B}'_1 d\tau \\ &= \int_0^T e^{(T-\tau)A} B_1 B'_1 e^{(T-\tau)A'} d\tau \\ &= \int_0^T e^{\tau A} B_1 B'_1 e^{\tau A'} d\tau \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} D_{12d} D'_{12d} &= \int_0^T \tilde{D}_{21} \tilde{D}'_{21} d\tau \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 e^{(h_1-\tau)A} B_{11}(h_1-\tau) \\ \vdots \\ c_1 e^{(T-h_1-\tau)A} B_{11}(T-h_1-\tau) \\ \vdots \\ 0 \\ c_p e^{(h_p-\tau)A} B_{11}(h_p-\tau) \\ \vdots \\ c_p e^{(T-h_p-\tau)A} B_{11}(T-h_p-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 e^{(h_1-\tau)A} B_{11}(h_1-\tau) \\ \vdots \\ c_1 e^{(T-h_1-\tau)A} B_{11}(T-h_1-\tau) \\ \vdots \\ 0 \\ c_p e^{(h_p-\tau)A} B_{11}(h_p-\tau) \\ \vdots \\ c_p e^{(T-h_p-\tau)A} B_{11}(T-h_p-\tau) \end{bmatrix}' d\tau \end{aligned}$$

โดยสามารถลดรูปลงได้อีกโดยใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ถ้า $h_a > h_b$ แล้ว

$$\int_0^T c_a e^{(h_a-\tau)A} B_{11}(h_a-\tau) B'_1 e^{(h_b-\tau)A'} c'_b 1(h_b-\tau) d\tau = c_a e^{(h_a-h_b)A} \int_0^{h_b} e^{\tau A} B_1 B'_1 e^{\tau A'} d\tau c'_b$$

ถ้า $h_a < h_b$ แล้ว

$$\int_0^T c_a e^{(h_a - \tau)A} B_1 1(h_a - \tau) B_1' e^{(h_b - \tau)A'} c_b' 1(h_b - \tau) d\tau = c_a \int_0^{h_a} e^{\tau A} B_1 B_1' e^{\tau A'} d\tau e^{(h_b - h_a)A'} c_b'$$

เมื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆได้ครบจะได้แบบจำลองเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่าในรูป

$$\hat{g}_{eq}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|cc} A_d & B_{1d} & B_{2d} \\ \hline C_{1d} & 0 & D_{12d} \\ C_{2d} & D_{21d} & D_{22d} \end{array} \right] \quad (3.28)$$

3.3 แนวทางการออกแบบตัวควบคุม

จากแบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยเทียบเท่าในสมการ (3.28) ที่ได้ สามารถนำไปออกแบบหาค่าเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ที่เหมาะสมได้ด้วยวิธีการออกแบบสำหรับระบบเวลาเต็มหน่วยก่อนที่จะนำไปใช้ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกไป หรือนำแบบจำลองระบบเวลาเต็มหน่วยที่ได้ไปใช้หาตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกที่เหมาะสมเลยดังใน [3]

สำหรับบทต่อๆ ไปที่จะทำการจำลองระบบและควบคุมระบบจริงจะใช้การออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ก่อน เนื่องจากการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกที่กล่าวมาตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่า เราสามารถสร้างลักษณะการป้อนกลับสถานะของพลาเน็ตได้โดยไม่ต้องทำการสร้างตัวสังเกตสถานะ แต่ใช้การสุ่มสัญญาณออกที่อัตราสุ่มต่างๆกันในการสร้างลักษณะการป้อนกลับสถานะแทน ฉะนั้นจะพิจารณาปัญหาที่ระบบสามารถวัดค่าสถานะของพลาเน็ตได้เพื่อสร้างเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F จากสมการ (3.28) จะสามารถพิจารณาให้เป็นปัญหาควบคุมกำลังสองเชิงเส้นได้โดยพิจารณาสมการสถานะ

$$\xi(k+1) = A_d \xi(k) + B_{2d} u(k) \quad (3.29)$$

$$\zeta(k) = C_{1d} \xi(k) + D_{12d} u(k) \quad (3.30)$$

กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(k)' \zeta(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \xi'(k) & u'(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1d}' \\ D_{12d}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1d} & D_{12d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \xi'(k) Q_d \xi(k) + u'(k) R_d u(k) + 2\xi'(k) Z_d u(k) \end{aligned} \quad (3.31)$$

เมื่อ $Q_d = C_{1d}' C_{1d}$, $R_d = D_{12d}' D_{12d}$ และ $Z_d = C_{1d}' D_{12d}$ หลังจากแก้ปัญหาคควบคุมกำลังสองเชิงเส้นแล้วจะได้เมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าเมทริกซ์ N และ M ต่อไป

ขอให้สังเกตว่า การแก้ปัญหาคควบคุมกำลังสองเชิงเส้นในสมการ (3.31) เป็นการแก้ปัญหสำหรับระบบเวลาเต็มหน่วยที่ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเท่ากับฟังก์ชันจุดประสงค์

$$J = \int_0^{\infty} z(t)' z(t) dt$$

ของระบบเวลาต่อเนื่อง

บทที่ 4

ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง

ในบทนี้จะกล่าวถึงปัญหาที่เกิดขึ้นสำหรับการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก หากพลานท์ที่จะทำการควบคุมมีเวลาประวิง (Delay Time) อยู่ด้วย พร้อมทั้งเสนอแนวทางแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น

4.1 เวลาประวิงกับตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

เพื่อให้เห็นปัญหาที่เกิดขึ้น พิจารณาระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกที่มีเวลาประวิง τ_d ดังสมการต่อไปนี้

$$\hat{g}(s) = e^{-\tau_d s} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (4.1)$$

จากแบบจำลองในสมการ (4.1) เมื่อทำการแปลงให้เป็นแบบจำลองในระบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่มหลัก T และถ้ากำหนดให้คาบเวลาสุ่มหลัก T หารเวลาประวิง τ_d ได้ลงตัวมีค่าเท่ากับ d ดังนั้นระบบในสมการ (4.1) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\hat{g}_d(\lambda) = \lambda^d \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_d & \hat{B}_d \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \hat{A}_d & \hat{B}_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline C & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.2)$$

เมื่อ $\hat{A}_d = e^{TA}$ และ $\hat{B}_d = \int_0^T e^{\tau A} B d\tau$ จะเห็นว่าแบบจำลองในสมการ (4.2) จะมีค่าเจาะจงอยู่ที่ศูนย์เกิดขึ้น ปัญหาที่ตามมาสำหรับการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกคือค่า A_d ในสมการ (2.20) จะไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ ค่าเมทริกซ์ \hat{C} และ \hat{G} ที่จะใช้ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกก็จะไม่สามารถหาได้ด้วย

4.2 การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก

จากหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าระบบที่มีเวลาประวิงจะไม่สามารถทำการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกได้โดยตรง จำเป็นจะต้องมีการประยุกต์วิธีการออกแบบเดิมเพื่อให้สามารถทำการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิงได้

4.2.1 การออกแบบตัวควบคุม

นำระบบเวลาเต็มหน่วยในสมการ (4.2) ไปทำการออกแบบหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F และทำการแบ่ง F ออกเป็นสองส่วน ส่วนที่หนึ่งเป็นเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะของระบบที่ไม่มีเวลาประวิง (\hat{A}_d, \hat{B}_d) ส่วนที่สองเป็นเมทริกซ์ป้อนกลับของสัญญาณควบคุมที่มีการประวิงเวลา หรือ ถ้ากำหนดให้ $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$u(k+1) = -F_1 \xi(k+1) - F_2 u_d(k+1) \quad (4.3)$$

เมื่อ $u_d(k+1) = [u(k-d+1) \ u(k-d+2) \ \dots \ u(k)]'$ และ ค่าสถานะ $\xi(k)$ คือค่าสถานะของระบบเวลาเต็มหน่วย

$$\xi(k+1) = \hat{A}_d \xi(k) + \hat{B}_d u(k-d) \quad (4.4)$$

เนื่องจากเราทราบค่า $u_d(k+1)$ ฉะนั้นจะใช้คุณสมบัติของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกทำการสร้างลักษณะการป้อนกลับสถานะเฉพาะสำหรับพจน์ $-F_1 \xi(k+1)$ เท่านั้น จากหลักการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะได้ว่า

$$\hat{C} \xi(k+1) = \varphi(k) - \hat{G} u(k-d) \quad (4.5)$$

ต้องการสร้างลักษณะการป้อนกลับแทน $-F_1 \xi(k+1)$ คุณสมบัติสมการ (4.5) ด้วยเมทริกซ์ N กำหนดให้ $N \hat{C} = F_1$ และ $M = N \hat{G}$ ฉะนั้นสำหรับสมการ (4.3) จะได้โครงสร้างตัวควบคุมเป็น

$$u(k+1) = M u(k-d) - N \varphi(k) - F_2 u_d(k+1)$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปสมการสถานะ

$$\begin{aligned} \xi_c(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ M & -F_2 \end{bmatrix} \xi_c(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \varphi(k) \\ u(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \xi_c(k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

โดยที่ค่าเมทริกซ์ \hat{C} , \hat{G} , M และ N หาได้เช่นเดียวกับการหาค่าในบทที่ผ่านมาโดยแทนค่า A_d , B_d และ F ด้วย \hat{A}_d , \hat{B}_d และ F_1 ตามลำดับ และหากต้องการให้สัญญาณออกสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ตัวควบคุมจะต้องมีเจาะจงเท่ากับหนึ่งตามหลักแบบจำลองภายใน ดังนั้นเพื่อให้สมการ (4.6) มีเจาะจงที่เท่ากับหนึ่งสามารถออกแบบได้โดยการเลือกค่าเมทริกซ์ M ได้ดังต่อไปนี้ สมมติให้

$$F_2 = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_d \end{bmatrix}$$

จะต้องเลือก

$$M = 1 + \sum_{i=1}^{i=d} f_i \quad (4.7)$$

จากโครงสร้างตัวควบคุมในสมการ (4.6) เราจะบอกว่าตัวควบคุมมีเสถียรภาพหรือไม่ด้วยการดูค่าเมทริกซ์ M เหมือนกับการออกแบบปกติไม่ได้ ดังนั้นสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง การที่จะออกแบบให้ตัวควบคุมมีเสถียรภาพด้วยนั้นจะมีข้อกำหนดมากขึ้น การออกแบบจะยุ่งยากขึ้น

4.2.2 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุม

พิจารณาระบบในสมการ (3.12) แต่กำหนดให้ระบบมีเวลาประวิง 0.18 วินาที ต้องการควบคุมให้สัญญาณออกสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ออกแบบตัวควบคุมโดยเลือกคาบเวลาสุ่มหลัก $T = 0.06$ วินาที จะได้ระบบเวลาเต็มหน่วย

$$\hat{g}_d(\lambda) = \lambda^3 \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_d & \hat{B}_d \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \lambda^3 \left[\begin{array}{cc|c} 0.88692 & 0 & 0.084810 \\ 0 & 0.94176 & 0.058235 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

นำแบบจำลองที่ได้ไปออกแบบหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ข้อสังเกตคือ หากต้องการให้ผลตอบคล้ายกรณีที่ระบบไม่มีเวลาประวิง สามารถทำได้โดยออกแบบให้ตำแหน่งของค่าเจาะจงวงปิดในส่วนที่เป็นของระบบที่ไม่มีเวลาประวิงไว้ที่เดิม ส่วนค่าเจาะจงที่เพิ่มเข้ามาของเวลาประวิงนั้นให้วางค่าไว้ใกล้ศูนย์ที่สุดเท่าที่จะทำได้ จากการออกแบบจะได้

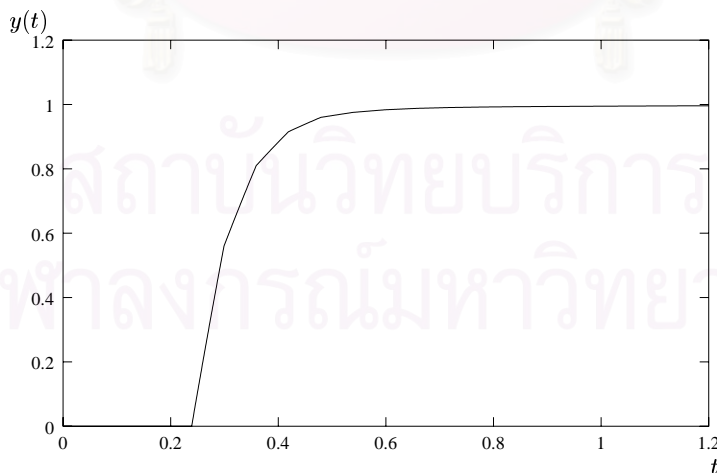
$$F = [2.28481 \quad 2.82934 \quad 0.39344 \quad 0.43225 \quad 0.46103]$$

$$F_1 = [2.28481 \quad 2.82934]$$

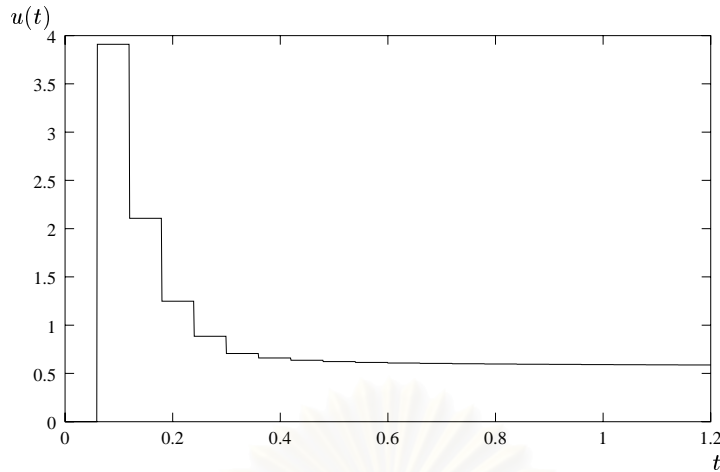
$$F_2 = [0.39344 \quad 0.43225 \quad 0.46103]$$

ต้องการให้ระบบควบคุมสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นนั้นจะต้องให้เมทริกซ์ $M = 2.2867$ ต่อไปทำการหาค่าเมทริกซ์ป้อนกลับ N เนื่องจากระบบเสริมของ (A, B, C) ที่ไม่มีเวลาประวิงมีค่า OIV เท่ากับ 3 ฉะนั้นเลือกจำนวนสุ่มสัญญาณออกเท่ากับ 3 จะได้ค่า

$$N = [F_1 \quad M] [\hat{C} \quad \hat{G}]^{-L} = [682.54 \quad -1434.77 \quad 756.14]$$



รูปที่ 4.1: สัญญาณออก



รูปที่ 4.2: สัญญาณเข้า

ตัวควบคุมที่ได้จะมีโครงสร้างดังสมการ (4.6) ผลการจำลองระบบควบคุมแสดงดังรูปที่ 4.1 และ 4.2 จะเห็นว่าเมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 3.5 และ 3.6 ลักษณะผลตอบจะคล้ายกันโดยสัญญาณออกมีการประวิงเวลาออกไป

4.3 การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก

ในหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการออกแบบตัวควบคุมสำหรับกรณีที่ระบบมีเวลาประวิงและเป็นระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก ในหัวข้อนี้จะได้ขยายวิธีการออกแบบให้ครอบคลุมถึงกรณีที่ระบบเป็นระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกอีกด้วย

4.3.1 แบบจำลองระบบเวลาประวิง

ก่อนจะกล่าวถึงการออกแบบตัวควบคุม พิจารณาระบบที่มีเฉพาะเวลาประวิงอย่างเดียวดังสมการต่อไปนี้

$$\hat{g}_{delay}(s) = \begin{bmatrix} e^{-\tau_1 s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\tau_2 s} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\tau_m s} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

กำหนดให้คาบเวลาสุ่ม T สามารถหาร τ_i ลงตัวและมีค่าเท่ากับ d_i เมื่อ $i = 1, \dots, m$ ดังนั้นเมื่อทำการแปลงระบบในสมการ (4.8) ให้เป็นระบบเวลาเต็มหน่วยด้วยคาบเวลาสุ่ม T จะได้

$$\hat{g}_{delay}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{d_m} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

ถ้าเขียน λ^{d_i} ในรูป

$$\lambda^{d_i} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{d_i} & B_{d_i} \\ \hline C_{d_i} & 0 \end{array} \right]$$

โดยที่ A_{d_i} มีขนาด $d_i \times d_i$ ดังนั้นจากสมการ (4.9) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{g}_{delay}(\lambda) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} A_{d_1} & 0 & \dots & 0 & B_{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{d_2} & \dots & 0 & 0 & B_{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{d_m} & 0 & 0 & \dots & B_{d_m} \\ \hline C_{d_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{d_2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{d_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{delay} & B_{delay} \\ \hline C_{delay} & 0 \end{array} \right] \quad (4.10)$$

4.3.2 การออกแบบตัวควบคุม

จากแบบจำลองระบบเวลาประวิงในหัวข้อที่ผ่านมาจะสามารถนำมาหาแบบจำลองของระบบรวมที่มีเวลาประวิงได้ ถ้ากำหนดให้ระบบที่ไม่มีเวลาประวิงเขียนด้วยสมการ

$$\hat{g}_{nodelay}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_d & \hat{B}_d \\ \hline \hat{C}_d & 0 \end{array} \right]$$

จะได้แบบจำลองระบบที่มีเวลาประวิงอยู่ด้วย

$$\begin{aligned} \hat{g}_d(\lambda) &= \hat{g}_{nodelay}(\lambda) \hat{g}_{delay}(\lambda) \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_d & \hat{B}_d C_{delay} & 0 \\ 0 & A_{delay} & B_{delay} \\ \hline \hat{C}_d & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

นำแบบจำลองในสมการ (4.11) ไปทำการออกแบบหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F และทำการแบ่งเมทริกซ์ F เป็นสองส่วน จะได้ความสัมพันธ์สำหรับสัญญาณควบคุมเป็น

$$u(k+1) = -F_1 \xi(k+1) - F_2 u_d(k+1) \quad (4.12)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} u_d(k) &= [u_1(k-d_1) \quad \dots \quad u_1(k-1) \quad \dots \quad u_m(k-d_m) \quad \dots \quad u_m(k-1)]' \\ u_d(k+1) &= A_{delay} u_d(k) + B_{delay} u(k) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \hat{A}_d \xi(k) + B_d C_{delay} u_d(k) \\ &= \hat{A}_d \xi(k) + B_d [u_1(k-d_1) \quad u_2(k-d_2) \quad \dots \quad u_m(k-d_m)]' \end{aligned} \quad (4.14)$$

เนื่องจากเราทราบค่า $u_d(k+1)$ ดังนั้นจะใช้คุณสมบัติของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกทำการสร้างลักษณะการป้อนกลับสถานะเฉพาะสำหรับพจน์ $-F_1\xi(k+1)$ เท่านั้น ถ้ากำหนดให้

$$\hat{u}_d(k) = C_{delay}u_d(k) = [u_1(k-d_1) \quad u_2(k-d_2) \quad \dots \quad u_m(k-d_m)]' \quad (4.15)$$

จะสามารถเขียนสมการ (4.11) ใหม่ในรูปสมการสถานะได้เป็น

$$\xi(k+1) = \hat{A}_d\xi(k) + \hat{B}_d\hat{u}_d(k) \quad (4.16)$$

$$y(k) = \hat{C}_d\xi(k) \quad (4.17)$$

จากหลักการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะได้รับความสัมพันธ์

$$\hat{C}_d\xi(k+1) = \varphi(k) - \hat{G}\hat{u}_d(k) \quad (4.18)$$

เช่นเดียวกับกรณีหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก สำหรับสมการ (4.12) จะได้โครงสร้างตัวควบคุมเป็น

$$u(k+1) = M\hat{u}_d(k) - N\varphi(k) - F_2u_d(k+1)$$

แทนค่า $u_d(k+1)$ จากสมการ (4.13) และ $\hat{u}_d(k)$ จากสมการ (4.15) จะสามารถเขียนโครงสร้างตัวควบคุมให้อยู่ในรูปสมการสถานะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} u_d(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{delay} & B_{delay} \\ MC_{delay} - F_2A_{delay} & -F_2B_{delay} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d(k) \\ u(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \varphi(k) \quad (4.19)$$

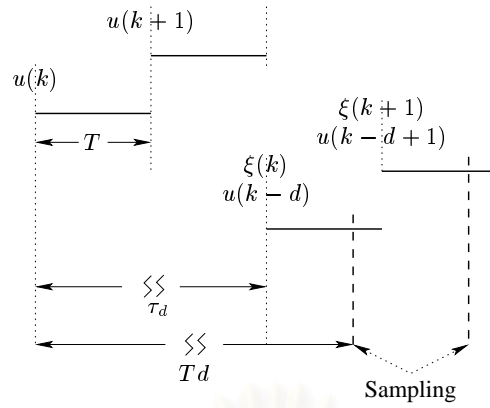
4.4 คาบเวลารวมกับเวลาประวิง

การออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิงที่ผ่านมา ตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่าคาบเวลารวมสามารถหารเวลาประวิงได้ลงตัวพอดี หัวข้อนี้จะได้พิจารณาถึงปัญหาที่เกิดขึ้นในกรณีที่คาบเวลารวมหารเวลาประวิงไม่ลงตัว เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาจะพิจารณารณกรณีที่ระบบมีหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก สมมติให้ระบบมีเวลาประวิงเท่ากับ τ_d และคาบเวลารวมหลักเท่ากับ T โดยที่ $T(d-1) < \tau_d \leq Td$ เมื่อ d เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

จากรูป 4.3 เป็นรูปของสัญญาณเข้า $u(k)$ ที่มีการประวิงเวลา เนื่องจากลักษณะสัญญาณเข้ายังคงเป็นท่อนๆ ดังนั้นความสัมพันธ์ในสมการ (4.4) ยังคงใช้ได้ แต่สัญญาณออก $y(k)$ ที่ได้จะเปลี่ยนไป เพราะไม่ได้สุ่มสัญญาณตำแหน่งเดียวกันกับค่าสถานะ $\xi(k)$ สัญญาณออกที่วัดได้ที่จุดสุ่มจะเป็น

$$y(k) = Ce^{(Td-\tau_d)A}\xi(k) + C \int_0^{Td-\tau_d} e^{\tau A} B d\tau u(k-d) \quad (4.20)$$

สำหรับตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก นอกจากจะมีการสุ่มสัญญาณที่คาบเวลารวมหลัก T แล้ว ยังมีการสุ่มสัญญาณที่คาบเวลารวมฐาน h ด้วย การพิจารณาจะแบ่งออกเป็น 2 กรณีด้วยกัน คือ กรณีที่ $Td - \tau_d \leq h$ และ กรณีที่ $Td - \tau_d > h$



รูปที่ 4.3: ผลของเวลาประวิงต่อการสุ่มสัญญาณ

4.4.1 การออกแบบตัวควบคุมกรณีที่ $Td - \tau_d \leq h$

พิจารณากรณีที่ $Td - \tau_d \leq h$ และกำหนดให้ $Td - \tau_d = \Delta$ จะได้ว่า

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} Ce^{\Delta A} \\ Ce^{(\Delta+h)A} \\ \vdots \\ Ce^{(\Delta+T-h)A} \end{bmatrix} \xi(k) + \begin{bmatrix} C \int_0^{\Delta} e^{\tau A} B d\tau \\ C \int_0^{\Delta+h} e^{\tau A} B d\tau \\ \vdots \\ C \int_0^{\Delta+T-h} e^{\tau A} B d\tau \end{bmatrix} u(k-d) = \hat{C}_d \xi(k) + \hat{D}_d u(k-d) \quad (4.21)$$

จากหลักการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกหากแทนค่า $\xi(k)$ จากสมการ (4.4) ลงในสมการ (4.21) จะได้

$$\varphi(k) = \hat{C}_d \hat{A}_d^{-1} \xi(k+1) + (\hat{D}_d - \hat{C}_d \hat{A}_d^{-1} \hat{B}_d) u(k-d) \quad (4.22)$$

ถ้ากำหนดให้ $\tilde{C} = \hat{C}_d \hat{A}_d^{-1}$ จะเห็นว่าโครงสร้างของ \tilde{C} ที่ได้จะมีโครงสร้างคล้ายกับของ \hat{C} ในสมการ (2.20) ต่างกันที่ \tilde{C} จะมีค่า $e^{\Delta A}$ คูณอยู่หรือถ้าพิจารณาสมการ (2.20) สำหรับกรณีหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกจะได้ว่า $\tilde{C} = \hat{C} e^{\Delta A}$ โดยค่า \tilde{C} สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} Ce^{(\Delta-T)A} \\ Ce^{(\Delta+h-T)A} \\ \vdots \\ Ce^{(\Delta-h)A} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

หากระบบตรงตามเงื่อนไขตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกและทำการเลือกจำนวนสุ่มมากกว่าหรือเท่ากับค่า OIV ของคู่ (A, C) จะได้ว่า \hat{C} มีลำดับชั้นหลักเต็มและเนื่องจาก $e^{\Delta A}$ มีลำดับชั้นหลักเต็มด้วย ดังนั้น \tilde{C} ก็จะมีลำดับชั้นหลักเต็มตามไปด้วย

และถ้ากำหนดให้ $\tilde{G} = \hat{D}_d - \hat{C}_d \hat{A}_d^{-1} \hat{B}_d$ จะเห็นว่าโครงสร้างของ \tilde{G} ที่ได้จะมีโครงสร้างคล้ายกับ

ของ \tilde{G} ในสมการ (2.22) โดยสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} C \int_0^{\Delta-T} e^{\tau A} d\tau B \\ C \int_0^{\Delta+h-T} e^{\tau A} d\tau B \\ \vdots \\ C \int_0^{\Delta-h} e^{\tau A} d\tau B \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

หากเลือกจำนวนสุ่มสัญญาณออกมากกว่าหรือเท่ากับค่า OIV ของคู่ $\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [C \ 0] \right)$ จะได้ว่า $[\tilde{C} \ \tilde{G}]$ มีค่าลำดับชั้นหลักเต็ม สามารถพิสูจน์ได้โดยพิจารณาความสัมพันธ์

$$[C \ 0] e^{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t} = [C \ 0] \begin{bmatrix} e^{tA} & \int_0^t e^{\tau A} B d\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} = [C e^{tA} \ C \int_0^t e^{\tau A} B d\tau] \quad (4.25)$$

หากแทนคู่ (A, C) ด้วยคู่ $\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [C \ 0] \right)$ และพิจารณาเช่นเดียวกับการหาค่า \tilde{C} ในสมการ (4.23) จาก (4.25) จะได้ว่าค่าที่ได้ก็คือค่า $[\tilde{C} \ \tilde{G}]$ นั้นเอง ดังนั้นค่า $[\tilde{C} \ \tilde{G}]$ จะมีลำดับชั้นหลักเต็มด้วย

ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในกรณีนี้สามารถทำการออกแบบได้โดยแทนค่า \hat{C} และ \hat{G} ด้วย \tilde{C} และ \tilde{G} ตามลำดับ

4.4.2 การออกแบบตัวควบคุมกรณีที่ $Td - \tau_d > h$

ในกรณีที่ $Td - \tau_d > h$ จะเกิดความยุ่งยากในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกขึ้นมากกว่ากรณีที่ผ่านมา ลองพิจารณาที่ค่าของ $\varphi(k)$ ในสมการ (4.21) ให้สังเกตว่าค่า $\varphi(k)$ จะสัมพันธ์กับค่าของ $u(k-d)$ เท่านั้น แต่หาก $Td - \tau_d > h$ แล้ว แดวล่างจะไม่มีเฉพาะผลเนื่องจากค่าของ $u(k-d)$ เท่านั้น จะมีผลของ $u(k-d+1)$ อยู่ด้วย ทำให้การออกแบบด้วยตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกตามปกติไม่สามารถกระทำได้ และหากจะตั้งต้นทำการออกแบบตัวควบคุมต่อไปก็ไม่เป็นการควรที่จะทำ เพราะการออกแบบจะซับซ้อนกว่าเดิม

4.5 สรุปขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม

จากวิธีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิงอยู่ด้วย สามารถสรุปเป็นขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมได้ดังต่อไปนี้

1. เลือกคาบเวลาสุ่มหลัก T ที่สามารถหารเวลาประวิง τ_i ทุกค่าได้ลงตัว และต้องเลือกให้เหมาะสมเพื่อไม่ให้ค่าสมาชิกของเมทริกซ์ N มีขนาดใหญ่เกินไป หรือถ้าไม่สามารถเลือกค่า T ให้เหมาะสมและสามารถหาร τ_i ทุกค่าได้ลงตัว อาจเลือกค่า T ที่หาร τ_i บางค่าไม่ลงตัวได้ แต่ต้องมีการชดเชยค่าระหว่างการออกแบบตัวควบคุมตามที่เสนอในหัวข้อ 4.4.1
2. สร้างแบบจำลองระบบดังสมการ (4.11) และนำไปออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F และแบ่ง F ออกเป็นสองส่วนดังสมการ (4.12)

3. เลือกจำนวนสุ่มสัญญาณ f_i และทำการหาค่าเมทริกซ์ \hat{C} และ \hat{G}
4. ทำการออกแบบหาเมทริกซ์ N และ M
5. สร้างตัวควบคุมจากสมการ (4.19)



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

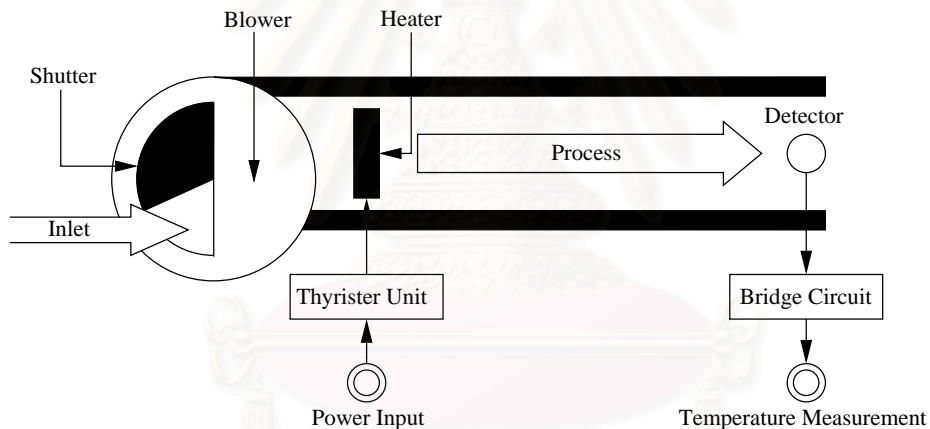
บทที่ 5

การจำลองการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

ในบทนี้เราจะออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกสำหรับการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนตามวิธีที่เสนอไว้ในบทที่ 4. พร้อมทั้งจำลองผลการควบคุม ส่วนการควบคุมจริงจะนำเสนอในบทถัดไป ตัวควบคุมที่จะทำการออกแบบมีด้วยกัน 2 แบบ คือ ตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออก และ ตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกบวกอินทิกรัล

5.1 แบบจำลองเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนมีลักษณะโครงสร้างดังรูป 5.1 โดยมีวัตถุประสงค์การควบคุมเพื่อให้ค่าอุณหภูมิด้านขาออกที่ตัวตรวจวัด (Detector) สามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ภายใต้สัญญาณรบกวนที่เข้ามาภายในระบบเนื่องจากสภาพแวดล้อมภายนอก



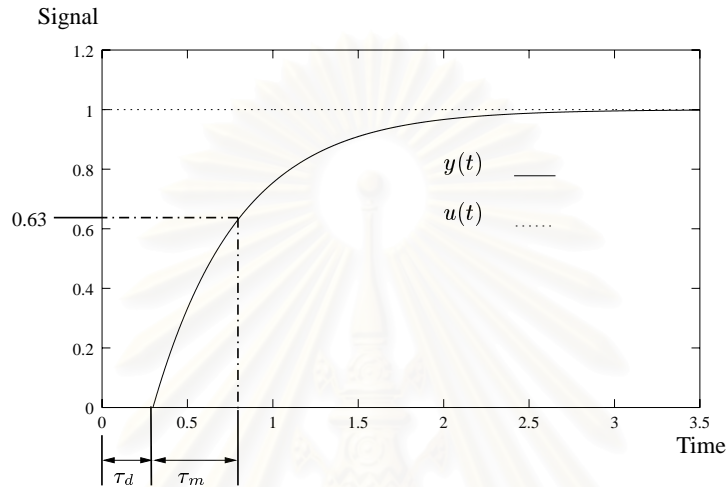
รูปที่ 5.1: เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนมีชิ้นส่วนหลักประกอบด้วยตัวทำความร้อน (Heater) เป็นแหล่งความร้อนที่ให้แก่ระบบ สามารถควบคุมอุณหภูมิได้โดยการเปลี่ยนขนาดสัญญาณแรงดันที่ให้กับตัวทำความร้อนหลัก จากนั้นเครื่องเป่าลม (Blower) จะทำหน้าที่เป่าลมร้อนให้ไหลไปตามท่อจนไปถึงตัวตรวจวัด ตัวตรวจวัดจะแปลงสัญญาณอุณหภูมิที่ได้ให้กลายเป็นสัญญาณแรงดันแล้วส่งต่อให้ตัวควบคุม เพื่อนำไปสร้างสัญญาณควบคุมป้อนกลับต่อไป สัญญาณรบกวนที่เข้าสู่ระบบจะเป็นอุณหภูมิภายนอกระบบที่จะไหลผ่านมาจากช่องเปิด (Shutter) จากกระบวนการที่เกิดขึ้นจะพบว่าความร้อนจากตัวทำความร้อนจะไม่ไปถึงที่ตัวตรวจวัดในทันทีทันใด แต่จะมีเวลาประวิงเกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากอากาศร้อนจากตัวทำความร้อนต้องเดินทางมาตามท่อนำก่อนที่จะถึงตัวตรวจวัด เวลาประวิงนี้จะมีค่าขึ้นกับระยะห่างระหว่างตัวทำความร้อนกับตัวตรวจวัดและความเร็วของลมจากเครื่องเป่าลม

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนสามารถจำลองได้ด้วยระบบอันดับหนึ่งที่มีเวลาประวิงอยู่ด้วย [10] ดังสมการ

$$\hat{g}(s) = \frac{Ke^{-\tau_d s}}{\tau_m s + 1} \quad (5.1)$$

เมื่อ K คือค่าอัตราขยายของสัญญาณที่สภาวะอยู่ตัว τ_d คือค่าเวลาประวิง และ τ_m คือเวลานับจากสัญญาณออกเริ่มเปลี่ยนแปลงตามสัญญาณเข้าแบบขั้นจนถึงเวลาที่สัญญาณออกมีขนาดเป็น 63.2% ของสัญญาณที่สภาวะอยู่ตัว ค่าต่างๆ อธิบายได้โดยใช้ผลตอบต่อสัญญาณเข้าแบบขั้นดังรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2: ลักษณะผลตอบของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนต่อสัญญาณเข้าแบบขั้น

ในการหาค่าต่างๆ ของแบบจำลองเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน จะใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเวียนเกิด (Recursive Least Squares) [11] เริ่มด้วยการทดลองใส่สัญญาณเข้าแบบขั้นเข้าเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนเพื่อหาเวลาประวิง จะมีค่าประมาณ 0.26 วินาที เมื่อนำสมการ (5.1) ไปทำการแปลงเป็นระบบเวลาเต็มหน่วยเพื่อใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง จะได้โครงสร้างดังนี้

$$\hat{g}(\lambda) = \lambda^d \frac{b\lambda}{1 + a\lambda} \quad (5.2)$$

โดยที่ค่า a , b และ d เป็นค่าคงที่ได้ๆ ที่ต้องหา เนื่องจากเวลาประวิงของระบบมีค่าประมาณ 0.26 วินาที และจากการใช้แบบจำลองอย่างง่ายที่ได้จากการใส่สัญญาณเข้าแบบขั้น จะเลือกให้คาบเวลาสุ่มหลักของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกมีค่าเท่ากับ 0.13 วินาที ระบบมีค่า OIV ของระบบเสริมเท่ากับ 2 ฉะนั้นจะเลือกจำนวนสุ่มสัญญาณออกเท่ากับ 2 จะได้คาบเวลาสุ่มฐานเท่ากับ 0.065 วินาที จากการเลือกคาบเวลาสุ่มจะได้ค่าพารามิเตอร์ $d = 4$ หลังจากทำการหาแบบจำลองด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดเวียนเกิดจะได้ค่า $a = -0.944138$ และ $b = 0.086336$ หรือสามารถเขียนในรูปสมการสถานะได้ดังนี้

$$\hat{g}_d(\lambda) = \lambda^4 \left[\begin{array}{c|c} A_{df} & B_{df} \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \lambda^4 \left[\begin{array}{c|c} 0.944138 & 1 \\ \hline 0.086336 & 0 \end{array} \right] \quad (5.3)$$

5.2 ตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออก

เนื่องจากเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนมีเวลาประวิงอยู่ด้วย ดังนั้นจะใช้วิธีการออกแบบตัวควบคุมที่เสนอในบทที่ 4. จากขั้นตอนการหาแบบจำลองระบบ เราได้เลือกให้คาบเวลาสุ่มหลัก $T = 0.13$ วินาทีและจำนวนสัญญาณออก $f = 2$ ในการออกแบบหาเมทริกซ์ป้อนกลับ F ต้องใช้แบบจำลองระบบที่คาบเวลาสุ่มหลัก จากสมการ (2.26) และ (2.27) จะได้

$$\hat{A}_d = A_{df}^2 = 0.8914, \quad \hat{B}_d = B_{df} + A_{df} B_{df} = 1.9441 \quad (5.4)$$

เมื่อรวมเวลาประวิงเข้าไปในสมการสถานะ จะได้แบบจำลองที่คาบเวลาสุ่มหลักเป็น

$$\hat{g}_d(\lambda) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.8914 & 1.9441 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.08634 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.5)$$

จากจุดประสงค์การออกแบบตัวควบคุมที่ต้องการให้สัญญาณออกสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ดังนั้นจะต้องกำหนดให้เมทริกซ์ M มีค่าตรงตามสมการ (4.7) เมื่อต้องการหาค่าเมทริกซ์ N จะต้องรู้ค่าของเมทริกซ์ \hat{C} และ \hat{G} โดยหาค่าได้จากสมการ (2.20), (2.21) และ (2.28) ดังนี้

$$\begin{aligned} C_d &= \begin{bmatrix} C \\ C A_{df} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.086336 \\ 0.081513 \end{bmatrix} \\ D_d &= \begin{bmatrix} 0 \\ C B_{df} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.086336 \end{bmatrix} \\ \hat{C} &= C_d \hat{A}_d^{-1} = \begin{bmatrix} 0.096855 \\ 0.091444 \end{bmatrix} \\ \hat{G} &= D_d - C_d \hat{A}_d^{-1} \hat{B}_d = \begin{bmatrix} -0.188299 \\ -0.091444 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะหาค่าเจาะจงวงปิดของแบบจำลอง กรณีที่ไม่มีเวลาประวิงจากแนวทางการออกแบบในหัวข้อ 3.3 จะได้ค่าเจาะจงวงปิดมีค่าเป็น 0.34987 หลังจากนั้นนำสมการ (5.5) มาออกแบบหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F โดยทำการวางค่าเจาะจงวงปิดที่ตำแหน่ง (0.34987, 0.01, 0.01) ข้อสังเกตคือ ถ้าเราเรียงวงค่าเจาะจงวงปิดที่เกิดจากเวลาประวิงให้ใกล้ศูนย์มากเท่าใด ผลตอบของระบบจะใกล้เคียงกับระบบที่ไม่มีเวลาประวิงมากเท่านั้น โดยผลตอบจะมีการประวิงเวลาออกไป จากการวางค่าเจาะจงจะได้

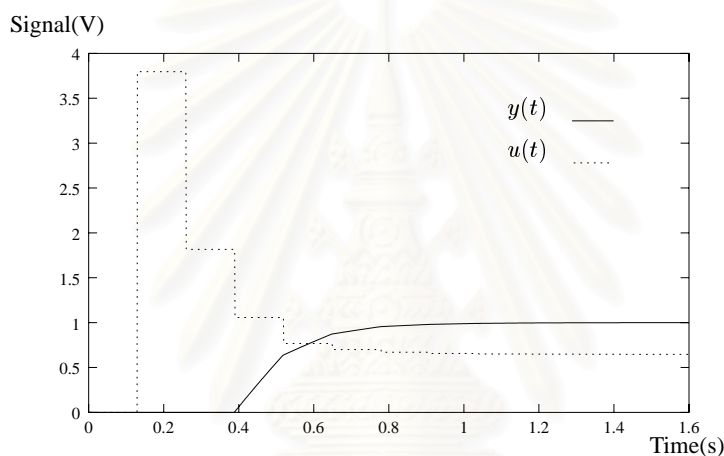
$$F = [0.21639 \quad 0.47198 \quad 0.52152]$$

จากวิธีการออกแบบตัวควบคุมในบทที่ 4 กำหนดให้ $F_2 = [0.47198 \quad 0.52152]$ ดังนั้นจะได้ $M = 1.9935$ และหาค่าเมทริกซ์ N จากสมการ (3.11) จะได้ $N = [-24.167 \quad 27.963]$ สุดท้ายจะได้ตัวควบคุมที่

มีโครงสร้างดังนี้

$$\begin{aligned}\xi_c(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.9935 & -0.47198 & -0.52152 \end{bmatrix} \xi_c(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 24.167 & -27.963 \end{bmatrix} \varphi(k) \\ u(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_c(k)\end{aligned}\quad (5.6)$$

ในการออกแบบหากต้องการให้ตัวควบคุมเสถียรด้วยต้องพิจารณาค่าเจาะจงของสมการ (5.6) หากค่าเจาะจงที่ได้ไม่เสถียร ต้องกลับไปออกแบบหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ใหม่ จะเห็นว่าไม่เหมือนกับในกรณีที่ระบบไม่มีเวลาประวิงที่สามารถออกแบบได้เลยจากการเลือกค่า M จากการออกแบบที่ผ่านมา เราจะได้ตัวควบคุมที่มีค่าเจาะจงที่ $(-0.76076 \pm 1.18943i, 1)$ จะเห็นว่าตัวควบคุมมีค่าเจาะจงที่ 1 จากหลักแบบจำลองภายใน ตัวควบคุมที่ได้จะสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ผลการจำลองการควบคุมแสดงในรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3: ผลการจำลองการควบคุมด้วยวิธี MROC

5.3 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกบวกรัท

จากการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี MROC ในหัวข้อที่ผ่านมาจะพบว่าตัวควบคุมให้ขนาดของสมาชิกของเมทริกซ์ป้อนกลับ N มีขนาดค่อนข้างใหญ่ การนำตัวควบคุมที่ได้ไปควบคุมจริงอาจไม่สามารถควบคุมระบบได้เนื่องจากผลของสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอนของระบบ จึงจะได้ทำการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี MROCI เพื่อลดปัญหาที่เกิดขึ้น เริ่มต้นการออกแบบโดยนำแบบจำลองในสมการ (5.5) มาเพิ่มตัวแปรสถานะ z เพื่อสร้างผลอินทิกรัลดังในสมการ (3.14) จะได้แบบจำลองใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \\ z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89140 & 1.9441 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08634 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \\ z(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(k)\quad (5.7)$$

นำแบบจำลองที่ได้ไปออกแบบหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ในการออกแบบได้เลือกวงค่าเจาะจงวงปิดให้อยู่ที่ $(0.34987, 0.01, 0.01, 0.1)$ ข้อสังเกตคือ หากต้องการให้ตัวควบคุมสามารถตามรอยสัญญาณ

อ้างอิงได้เร็ว จะต้องวางค่าเจาะจงในตำแหน่งสุดท้ายที่เป็นของตัวแปรสถานะ z ให้มีค่าใกล้ศูนย์มากที่สุดจากการวางค่าเจาะจงจะได้

$$F = [1.1392 \quad 1.8414 \quad 1.4215 \quad 3.4166]$$

ค่าสุดท้ายของ F เป็นอัตราขยายป้อนกลับของค่าสถานะ z ซึ่งเราไม่ต้องสร้างตัวสังเกต กำหนดให้ $F_2 = [1.8414 \quad 1.4215]$ เพื่อนำไปออกแบบตัวควบคุมดังบทที่ 4. เนื่องจากค่า OIV ของพลานท์ที่ไม่มีเวลาประวิงมีค่าเท่ากับ 1 จะเลือกจำนวนสัมประสิทธิ์ออก $f = 2$ ดังนั้นค่า \hat{C} และ \hat{G} จะเป็นค่าเดียวกับกรณีการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี MROC ทำการหาค่าเมทริกซ์ N จากสมการ (3.10) จะได้ $N = [6 \quad 6.1033]$ และ หาค่าเมทริกซ์ M จากสมการ (3.9) จะได้ $M = -1.6879$ สุดท้ายจะได้ตัวควบคุมที่มีโครงสร้างดังนี้

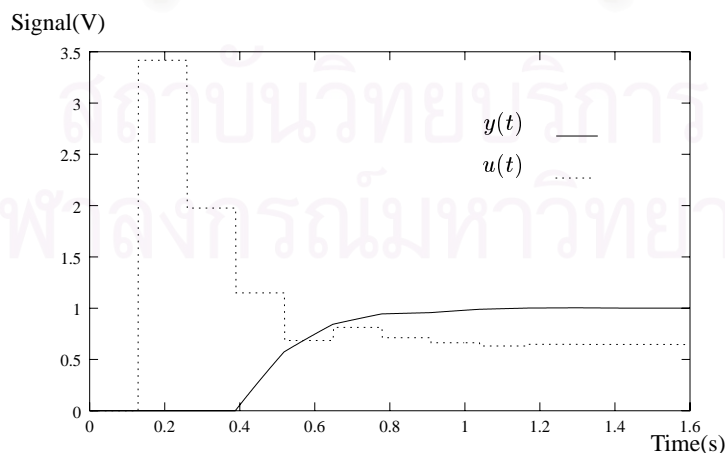
$$\xi_c(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.6879 & -1.8414 & -1.4215 \end{bmatrix} \xi_c(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & -6.1033 \end{bmatrix} \varphi(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.4166 \end{bmatrix} z(k) \quad (5.8)$$

$$z(k+1) = y(k) + z(k) - r(k)$$

$$u(k) = [0 \quad 0 \quad 1] \xi_c(k)$$

เมื่อ $y(k)$ คือค่าสัญญาณออก ณ เวลาเดียวกับสัญญาณเข้า $u(k)$ และ $r(k)$ คือสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น ค่าเจาะจงของตัวควบคุมอยู่ที่ $(0.01063 \pm 1.08157i, -1.44277)$ จะเห็นว่าตัวควบคุมที่ได้ไม่มีเสถียรภาพ แต่หากต้องการออกแบบให้ตัวควบคุม MROCPi มีเสถียรภาพด้วย ผลตอบของระบบจะช้าลงไปอีก เพราะจำเป็นต้องลดค่าอัตราขยายอื่นๆ ลงตัวควบคุมจึงจะมีเสถียรภาพ ผลการจำลองการควบคุมแสดงในรูปที่ 5.4

เมื่อเปรียบเทียบค่าเมทริกซ์ N ที่ได้จากการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี MROC กับวิธี MROCPi จะเห็นว่าในการออกแบบด้วยวิธี MROCPi เราสามารถลดขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ N ลงได้ประมาณ 4 เท่าของที่ออกแบบด้วยวิธี MROC โดยที่ผลตอบของระบบยังคงสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้



รูปที่ 5.4: ผลการจำลองการควบคุมด้วยวิธี MROCPi

บทที่ 6

การควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

ในบทนี้เราจะทำการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุมที่ได้จากบทที่ 5 ทั้งตัวควบคุม MROC และ ตัวควบคุม MROCI นอกจากนี้จะได้ทำการควบคุมด้วยตัวควบคุม PID เพื่อนำมาเปรียบเทียบผลการควบคุม โดยจะทำการควบคุมที่คาบเวลาสุ่มฐาน h และคาบเวลาสุ่มหลัก T ของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนที่ใช้ทำการทดลองสามารถให้สัญญาณควบคุมได้ระหว่าง 0 ถึง 10 โวลท์ และตัวแปลงสัญญาณจากสัญญาณอนาล็อกไปเป็นสัญญาณดิจิทัล และ แปลงสัญญาณดิจิทัลไปเป็นสัญญาณอนาล็อก มีความละเอียดขนาด 8 บิต หรือ 256 ระดับ

6.1 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

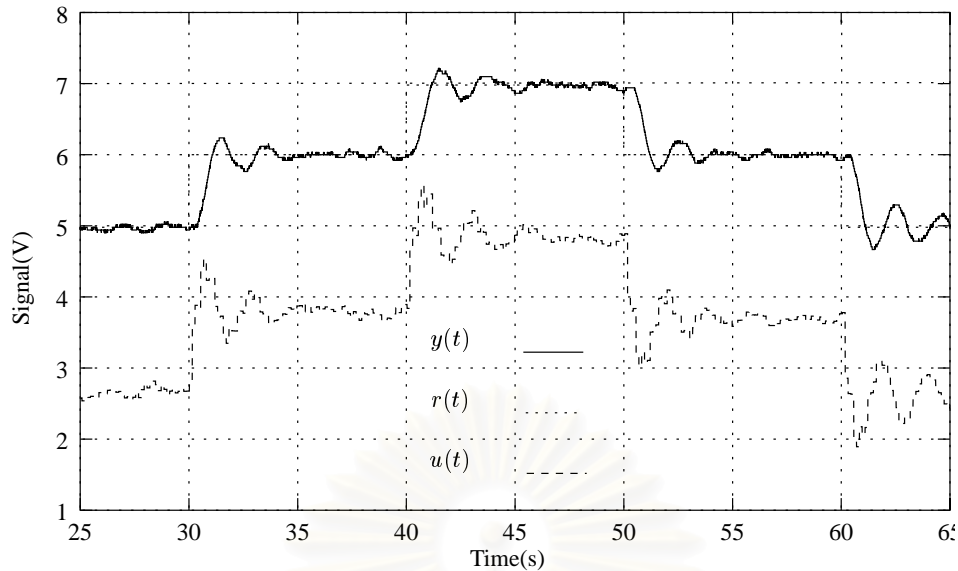
เมื่อนำตัวควบคุมในสมการ (5.6) มาทำการควบคุมระบบที่คาบเวลาสุ่มหลัก $T = 0.13$ วินาที ตัวควบคุมไม่สามารถที่จะควบคุมให้สัญญาณออกตามรอยสัญญาณอ้างอิงได้ ค่าสัญญาณควบคุมจะแกว่งระหว่าง 0 กับ 10 โวลท์ ที่เป็นเช่นนี้เพราะค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N มีขนาดใหญ่ เป็นผลให้ตัวควบคุมไวต่อสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอน จึงไม่สามารถควบคุมระบบได้ ดังนั้นเราจะออกแบบใหม่เพื่อลดผลดังกล่าว โดยออกแบบวางตำแหน่งค่าเจาะจงของสมการ (5.5) ไว้ที่ตำแหน่งที่ห่างจากศูนย์ออกมาอีก หลังจากการปรับค่าต่างๆ เราจะวางค่าเจาะจงไว้ที่ $(0.82367, 0.2, 0.2)$ จะได้ตัวควบคุมดังนี้

$$\xi_c(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.82367 & -0.100518 & 0.276844 \end{bmatrix} \xi_c(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 9.3386 & -10.2222 \end{bmatrix} \varphi(k)$$
$$u(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_c(k)$$

ตัวควบคุมมีค่าเจาะจงที่ $(-0.36158 \pm 0.83243i, 1)$ เราจะเห็นว่าตัวควบคุมที่ได้มีค่าเจาะจงที่ 1 แสดงว่าสัญญาณออกจะสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ผลการควบคุมระบบแสดงดังรูปที่ 6.1

6.2 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกบวกรักษาอินทิกรัล

เมื่อนำตัวควบคุมในสมการ (5.8) มาทำการควบคุมระบบที่คาบเวลาสุ่มหลัก $T = 0.13$ วินาที ตัวควบคุมสามารถที่จะควบคุมให้สัญญาณออกตามรอยสัญญาณอ้างอิงได้ แต่ค่าสัญญาณควบคุมยังค่อนข้างแกว่งอยู่ และ สัญญาณออกมีส่วนพุ่งเกินมากเกินไป ที่เป็นเช่นนี้เพราะค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N ยังมีขนาดค่อนข้างใหญ่ เป็นผลให้ตัวควบคุมไวต่อสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอน จึงไม่สามารถควบคุมระบบได้ดีพอ ดังนั้นเราจะออกแบบใหม่เพื่อลดผลดังกล่าว โดยออกแบบวางตำแหน่งค่าเจาะจงของตัวแปรสถานะที่เพิ่มเข้ามาไว้ที่ตำแหน่งที่ห่างจากศูนย์ออกมาอีก จากการปรับค่าต่างๆ จะวาง



รูปที่ 6.1: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROC

ค่าเจาะจงไว้ที่ $(0.34987, 0.01, 0.01, 0.74)$ จะได้ตัวควบคุมดังนี้

$$\xi_c(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.66588 & -0.86758 & -0.78152 \end{bmatrix} \xi_c(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -3.1635 \end{bmatrix} \varphi(k)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.98701 \end{bmatrix} z(k+1)$$

$$z(k+1) = y(k) + z(k) - r(k)$$

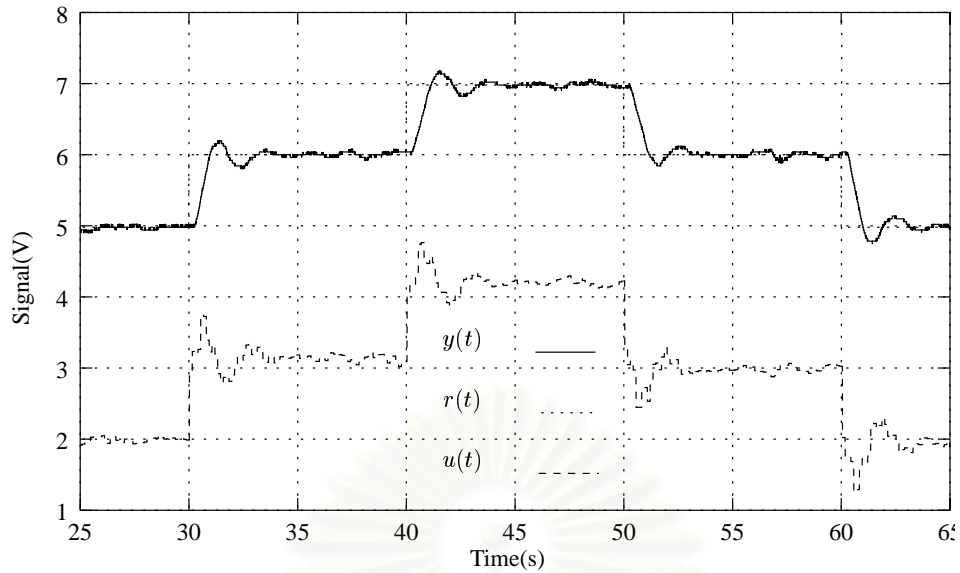
$$u(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_c(k)$$

ตัวควบคุมที่ได้มีค่าเจาะจงที่ $(0.09976 \pm 0.81779i, -0.98105)$ เราจะเห็นว่าค่าเจาะจงทุกค่ามีค่าน้อยกว่าหนึ่ง แสดงว่าตัวควบคุมที่ได้มีเสถียรภาพ ผลการควบคุมระบบแสดงดังรูปที่ 6.2

6.3 ตัวควบคุม PID ที่อัตราส่วนฐาน

การออกแบบตัวควบคุมด้วยตัวควบคุม PID สำหรับระบบเวลาเต็มหน่วย เราจะทำการปรับค่าด้วยวิธีวงปิดของซิกเลอร์-นิโคลส์ (Ziegler-Nicols) [12] และนำค่าตัวควบคุมที่ได้มาปรับค่าก่อนใช้ควบคุมอีกครั้งหนึ่ง

ค่าตัวแปรสำหรับตัวควบคุม PID ประกอบด้วยค่า K คืออัตราขยาย (Gain) T_i คือเวลาอินทิกรัล (Integration Time) และ T_d คือเวลาอนุพันธ์ (Derivative Time) โดยค่าต่างๆ สามารถหาได้จากการควบคุมระบบด้วยตัวควบคุมสัดส่วน (P) เพียงอย่างเดียว กำหนดให้ K_u คืออัตราขยายวงปิดที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพพอดี ถ้าค่ามากกว่านี้ระบบจะขาดเสถียรภาพ และ T_u คือคาบเวลาที่ผลตอบของระบบ



รูปที่ 6.2: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROCPI

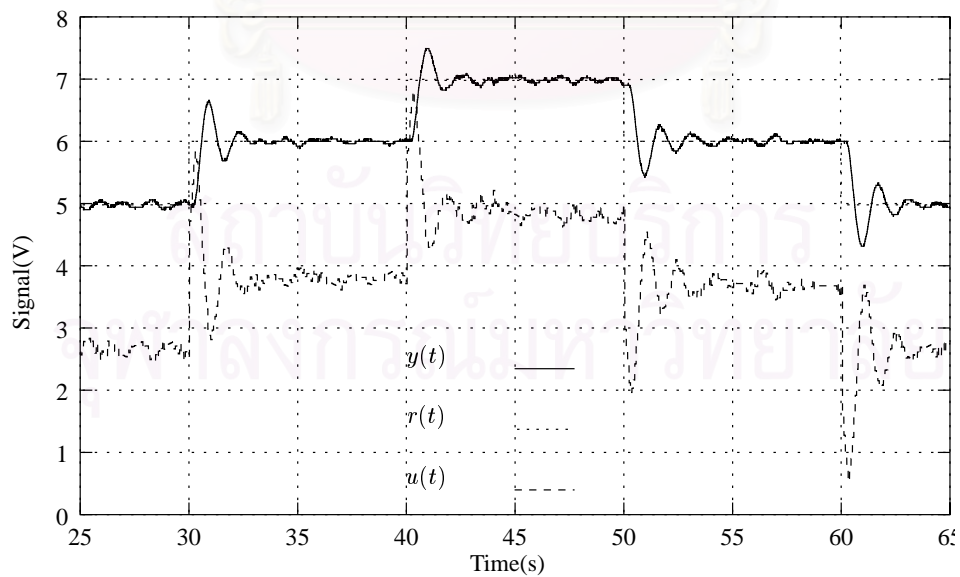
แกลง จะได้ความสัมพันธ์สำหรับปรับค่าตัวควบคุม PID ดังต่อไปนี้

$$K = 0.6K_u \quad T_i = \frac{T_u}{2} \quad T_d = \frac{T_u}{8}$$

จากการทดลองจะได้ $K_u = 4.75$ และ $T_u = 1.00$ หลังจากนั้นทำการปรับค่าอีกครั้งเพื่อให้ได้ค่าที่ดีที่สุด จะได้

$$K = 1.7 \quad T_i = 0.35 \quad T_d = 0.05$$

ผลการควบคุมระบบแสดงดังรูปที่ 6.3



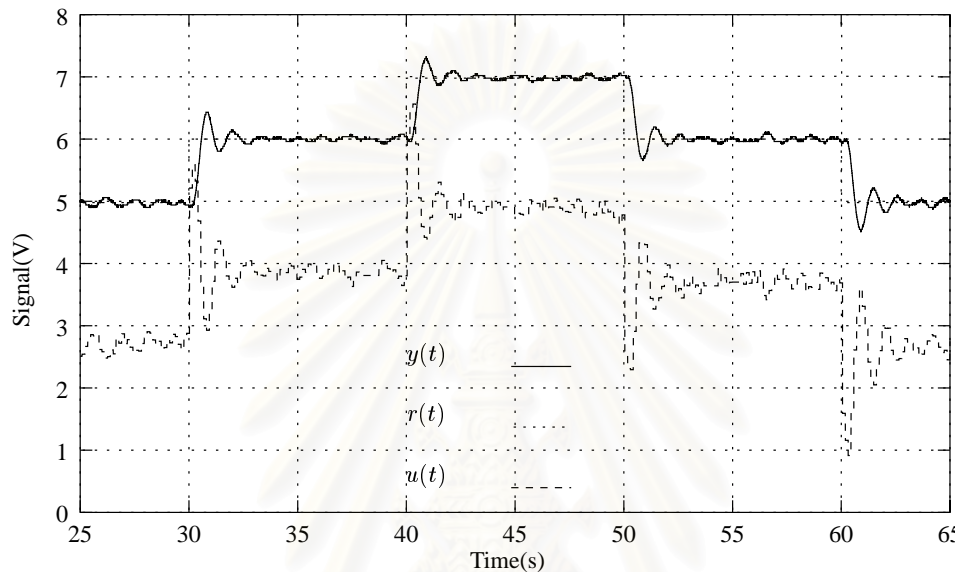
รูปที่ 6.3: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม PID ที่ค่าเวลาสุ่มฐาน

6.4 ตัวควบคุม PID ที่อัตราส่วนหลัก

ทำการออกแบบเช่นเดียวกับตัวควบคุม PID ที่อัตราส่วนฐาน จากการทดลองจะได้ $K_u = 3.6$ และ $T_u = 1.05$ หลังจากนั้นทำการปรับค่าอีกครั้งเพื่อให้ได้ค่าที่ดีที่สุด จะได้

$$K = 1.8 \quad T_i = 0.6 \quad T_d = 0.1$$

ผลการควบคุมระบบแสดงดังรูปที่ 6.4



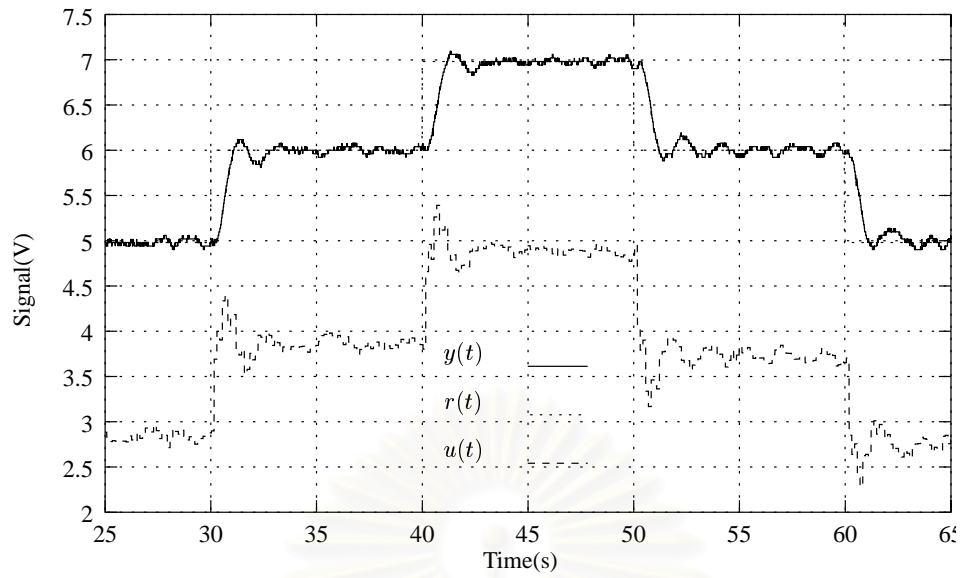
รูปที่ 6.4: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม PID ที่คาบเวลาส่วนหลัก

6.5 การทดสอบตัวควบคุมหลายอัตราส่วนสัญญาณออกเมื่อพารามิเตอร์ของระบบเปลี่ยนไป

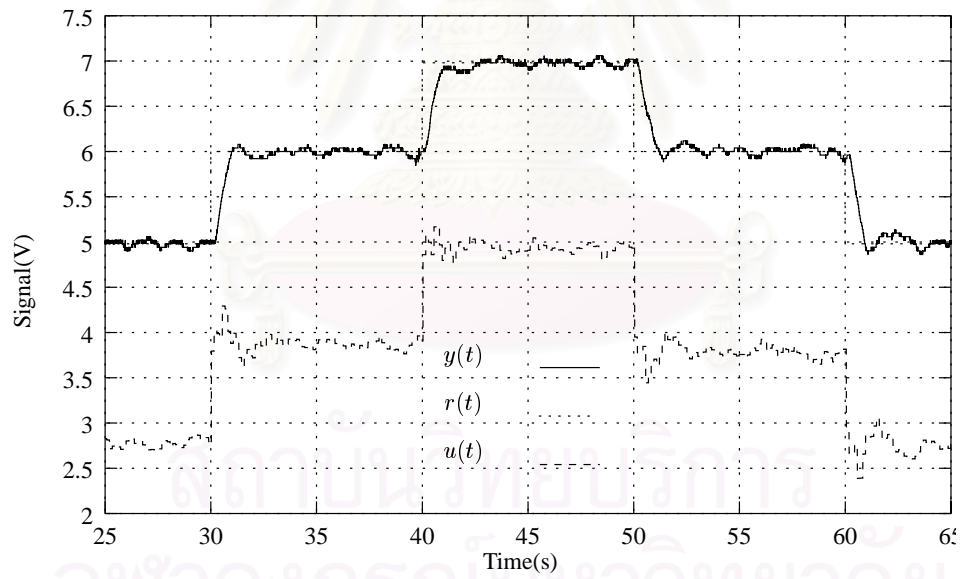
เพื่อทดสอบว่าตัวควบคุมหลายอัตราส่วนสัญญาณออกจะสามารถควบคุมระบบได้หรือไม่เมื่อค่าพารามิเตอร์ของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนเปลี่ยนไป เราจะได้ทดสอบโดยการเปลี่ยนสภาวะของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนอยู่สองแบบ

แบบที่ 1 จากสภาวะปกติ เราจะย้ายตำแหน่งของตัวตรวจวัดให้เข้าใกล้ตัวทำความร้อนมากขึ้น ในการทำงานเช่นนี้จะทำให้เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนมีเวลาประวิงสั้นลงจากเดิมประมาณ 0.26 วินาที จะกลายเป็น 0.14 วินาที ผลการทดลองแสดงดังรูปที่ 6.5 และ 6.6

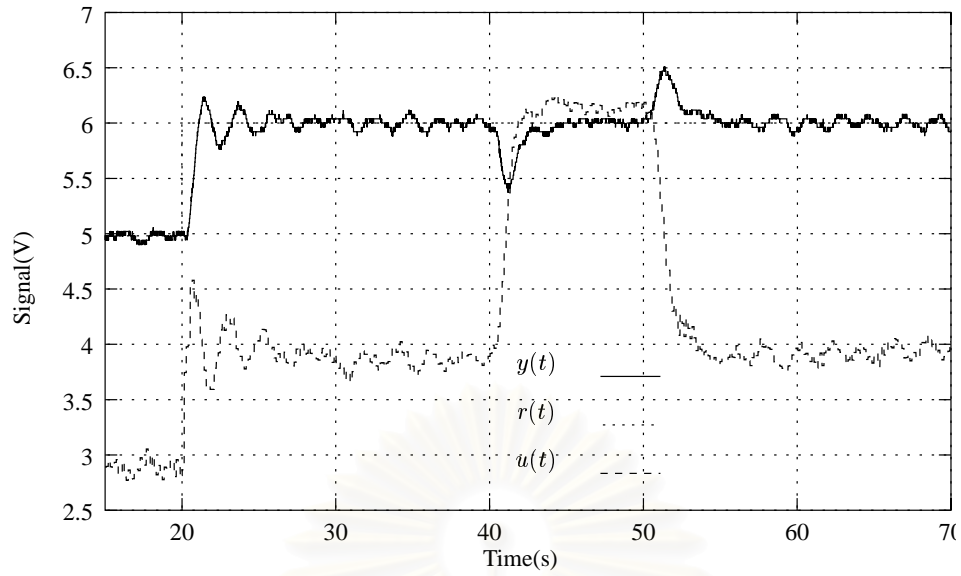
แบบที่ 2 จากสภาวะปกติ เมื่อระบบอยู่ในสภาวะอยู่ตัว เราจะปรับให้ความเร็วลมที่ไหลในท่อทำความร้อนมีค่าเพิ่มขึ้นที่เวลา 40 วินาที หลังจากนั้น ที่เวลา 50 วินาที เราจะปรับกลับสู่ตำแหน่งเดิม ในการทำงานเช่นนี้เป็นการกระตุ้นระบบด้วยสัญญาณรบกวน (Disturbance) ผลการควบคุมแสดงดังรูปที่ 6.7 และ 6.8



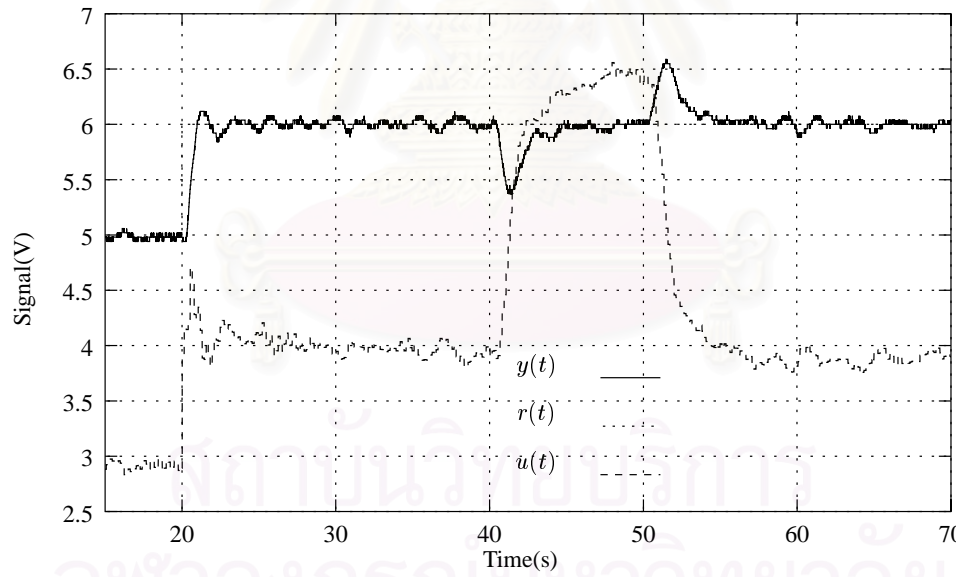
รูปที่ 6.5: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROC กรณีเปลี่ยนตำแหน่งตัวตรวจวัด



รูปที่ 6.6: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROCPI กรณีเปลี่ยนตำแหน่งตัวตรวจวัด



รูปที่ 6.7: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROC กรณีเปลี่ยนความเร็วลม



รูปที่ 6.8: ผลการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม MROCPI กรณีเปลี่ยนความเร็วลม

6.6 สรุปและวิเคราะห์ผลการควบคุม

จากผลการทดลองที่สภาวะปกติในรูปที่ 6.1 , 6.2 , 6.3 และ 6.4 ในหัวข้อที่ผ่านมา เมื่อนำสัญญาณออกมาหาค่าเวลาขึ้น (Rise time), เวลาเข้าที่ (Settling time) และเปอร์เซ็นต์ส่วนพุ่งเกิน (Maximun percent overshoot) ของตัวควบคุมแต่ละตัวจะสามารถสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 6.1

จากค่าในตารางจะเห็นว่าผลการควบคุมของตัวควบคุม MROC และตัวควบคุม MROCPI จะให้ค่าเวลาขึ้นช้ากว่าตัวควบคุม PID แต่ก็มีส่วนพุ่งเกินที่น้อยกว่า เมื่อพิจารณาที่เวลาเข้าที่ ตัวควบคุม MROCPI จะให้ค่าน้อยที่สุด

จากผลการทดลองเปลี่ยนสภาวะของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนในรูปที่ 6.5 , 6.6 , 6.7 และ 6.8 เราจะเห็นว่าตัวควบคุม MROC และ MROCPI ยังคงสามารถควบคุมระบบได้ตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

เมื่อดูจากค่าโดยรวมแล้ว ถึงแม้ว่าตัวควบคุม MROCPI จะให้เวลาขึ้นมากกว่าตัวควบคุมแบบอื่น แต่จะให้เวลาเข้าที่ได้เร็วที่สุด และมีส่วนพุ่งเกินน้อยที่สุด และเมื่อเปรียบเทียบตัวควบคุม MROC กับตัวควบคุม MROCPI ถึงผลตอบจะให้ในลักษณะที่ใกล้เคียงกัน แต่ขนาดสมาชิกของเมทริกซ์ N ของตัวควบคุม MROC จะมีขนาดใหญ่กว่าของตัวควบคุม MROCPI ประมาณ 4 เท่า ดังนั้นตัวควบคุม MROC จะไวต่อสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอนของระบบมากกว่าตัวควบคุม MROCPI ดังนั้นตัวควบคุม MROCPI เหมาะสมที่จะใช้ในการควบคุมระบบที่สุด

ตัวควบคุม	สัญญาณอ้างอิง(V)	เวลาขึ้น(s)	เวลาเข้าที่(s)	%ส่วนพุ่งเกิน
MROC	5 → 6	0.84	4.54	23.5
	6 → 7	0.87	5.29	21.5
	7 → 6	0.94	3.54	23.0
MROCPI	5 → 6	0.69	2.54	19.5
	6 → 7	0.86	2.86	17.5
	7 → 6	0.90	2.74	16.0
PID ที่คาบ h	5 → 6	0.33	2.54	66.0
	6 → 7	0.36	3.34	49.0
	7 → 6	0.37	4.12	62.5
PID ที่คาบ T	5 → 6	0.32	2.74	44.0
	6 → 7	0.38	2.54	30.0
	7 → 6	0.37	2.54	35.0

ตารางที่ 6.1: ค่าสมรรถนะทางเวลาของการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

โดยสรุปแล้วจะเห็นว่าตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณออกสามารถที่จะนำมาควบคุมระบบได้ดีพอสมควร เราจะเห็นความสำคัญของตัวควบคุมหลายอัตราสัญญาณมากขึ้นหากระบบที่จะทำการควบคุมมีตัวซับซ้อนที่เราสามารถตอบสนองต่อสัญญาณควบคุมความถี่สูงไม่ได้ แต่สามารถส่งสัญญาณออกของระบบที่ความถี่สูงได้ ถ้าเราใช้ตัวควบคุมอัตราสัญญาณเดียวกับระบบประเภทนี้ เนื่องจากข้อจำกัดของตัวซับซ้อน เราจะต้องใช้ความถี่ในการส่งต่ำ ข้อมูลของสัญญาณออกที่นำมาคำนวณสัญญาณควบคุมจะน้อยกว่าเมื่อเทียบกับการ

นำตัวควบคุมหลายอัตราสู่มาตรฐานออกมาควบคุมระบบแทน ซึ่งน่าจะเป็นการดีกว่าที่จะปล่อยให้ข้อมูล
ในระหว่างคาบเวลาสู่มาตรฐานควบคุมหายไปโดยไม่มีการนำมาใช้ประโยชน์ใดๆ เลย ทั้งที่สามารถทำได้



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 7

สรุปและข้อเสนอแนะ

7.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการศึกษาวិธีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกโดยใช้วิธีลิตติงในการอธิบายระบบ จากการอธิบายระบบด้วยวิธีนี้ เราสามารถมองระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกในระบบอัตราสุ่มเดียวที่คาบเวลาสุ่มหลัก ค่าตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมสามารถหาได้จากแบบจำลองระบบที่คาบเวลาสุ่มฐานเพียงคาบเดียว และได้ทฤษฎีสำหรับแปลงระบบสุ่มตัวอย่างให้เป็นระบบเวลาเต็มหน่วยที่ยังคงรักษาค่านอร์ม H_2 เพื่อนำระบบที่ได้ไปออกแบบต่อไป

ในการออกแบบตัวควบคุมที่มีจุดประสงค์เพื่อให้สัญญาณออกสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ได้เสนอแนวทางลดขนาดของสมาชิกในเมทริกซ์ป้อนกลับ N เพื่อให้ตัวควบคุมสามารถทนต่อสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอนของระบบได้มากขึ้น

นอกจากนี้เรายังได้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง ซึ่งวิธีการออกแบบตัวควบคุมเดิมไม่สามารถทำการออกแบบได้

จากวิธีการออกแบบตัวควบคุมได้นำมาประยุกต์ใช้ในการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน และได้ทำการควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนด้วยตัวควบคุม PID ด้วยเพื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกัน จากผลการควบคุม ตัวควบคุม MROCI เป็นทางเลือกที่ดีที่สุดในการนำไปควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

7.2 ข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้ยังมีอีกหลายหัวข้อที่น่าศึกษาต่อไป โดยสามารถสรุปได้เป็นข้อๆ ดังต่อไปนี้

1. จากทฤษฎีที่ใช้แปลงระบบเวลาสุ่มตัวอย่างไปเป็นระบบเวลาเต็มหน่วยของระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก เป็นการแปลงระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลาแต่เป็นรายคาบ ไปเป็น ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่สามารถทำการวิเคราะห์ระบบได้โดยอาศัยทฤษฎีระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่มีอยู่ สิ่งที่น่าศึกษาต่อไปคือการนำระบบเวลาเต็มหน่วยที่ได้ไปทำการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดโดยใช้วิธีเชิงเลขในการค้นหาค่าตอบ
2. ในการออกแบบตัวควบคุมให้สัญญาณออกของระบบสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ ยังไม่มีส่วนที่พิจารณาถึงเงื่อนไขจำเป็นหรือเงื่อนไขเพียงพอที่จะบอกได้ว่า ผลตอบในระหว่างคาบเวลาสุ่มจะไม่มีการกระเพื่อมของสัญญาณเกิดขึ้น

3. กรณีที่ต้องการให้สัญญาณออกของระบบตามรอยสัญญาณอ้างอิงลักษณะอื่นนอกจากตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น จะต้องออกแบบอย่างไร
4. จากหลักการอธิบายระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกด้วยวิธีลิฟติง น่าจะสามารถนำหลักการดังกล่าวไปอธิบายระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณเข้าได้ในลักษณะเดียวกัน
5. ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกสำหรับระบบที่มีเวลาประวิง สิ่งที่น่าสนใจคือ ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะยังคงสามารถควบคุมระบบต่อไปได้โดยมีขอบเขตความไม่แน่นอนของเวลาประวิงมากน้อยเท่าไร



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

1. Hagiwara, T. and Araki, M. Design of a Stable State Feedback Controller Based on the Multirate Sampling of the Plant Output. IEEE Trans. Aut. Control AC-33 (September 1988): 812–819.
2. Er, M. J. and Anderson, B. D. O. Practical issues in multirate output controllers. Int. J. Control 53 (1991): 1005–1020.
3. Viassolo, D. E. and Rotea, M. A. Practical Design of Multirate Output Controllers. Proc. IEEE Conf. on Decision and Control 37 (December 1998): 337–342.
4. Chen, T. and Francis, B. A. Optimal Sampled-Data Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995.
5. Colaneri, P.; Scattolini, R. and Schiavoni, N. LQG Optimal Control of Multirate Sampled-Data Systems. IEEE Trans. Aut. Control AC-37 (May 1992): 675–681.
6. Meyer, D. G. Cost Translation and a Lifting Approach to the Multirate LQG Problem. IEEE Trans. Aut. Control AC-37 (September 1992): 1411–1415.
7. Qiu, L. and Chen, T. H_2 -optimal design of multirate sampled-data systems. IEEE Trans. Aut. Control AC-39 (December 1994): 2506–2511.
8. Qiu, L. and Tan, K. Direct State Space Solution of Multirate Sampled-Data H_2 Optimal Control. Automatica 34 (1998): 1431–1437.
9. Tangirala, A. K.; Li, D.; Patwardhan, R.; Shah, S. L. and Chen, T. Issues In Multirate Process Control. Proc. American Control Conf. (June 1999): 2771–2775.
10. Feedback Instruments. Feedback Control&Instrumentation: Process Trainer PT326. England: Crowborough.
11. Söderström, T. and Stoica, P. System Identification. Great Britain: Prentice Hall, 1989.
12. Åström, Karl J. and Wittenmark, Björn. Computer-Controlled Systems Theory And Design. United States of America: Prentice Hall, 1997.
13. Strang, G. Linear Algebra And Its Applications. United States of America: Harcourt Brace Jovanovich, 1988.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

วิธีลิฟติง

ในภาคผนวกนี้ เราจะได้อธิบายถึงวิธีลิฟติง ซึ่งเป็นพื้นฐานในการนำไปใช้ในการอธิบายระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก โดยอ้างอิงจากหนังสือของ T. Chen และ B. Francis [4]

ระบบสุ่มตัวอย่าง (Sampled Data System) หมายถึงระบบที่ประกอบด้วยตัวสุ่ม (S : Sampler) และ ตัวคงค่า (H : Holder) ที่มีลักษณะเป็นตัวคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold) เพื่อใช้เชื่อมโยงระบบเวลาเต็มหน่วยกับระบบเวลาต่อเนื่องเข้าด้วยกันโดยตัวสุ่มและตัวคงค่าทำงานสมวาร (Synchronize) กัน ดังแสดงในรูปที่ 2.2 โดยปกติระบบเวลาต่อเนื่องจะหมายถึงระบบที่ต้องการควบคุม (G_{sd}) และ ระบบเวลาเต็มหน่วยจะหมายถึงตัวควบคุม (K_d) ที่จะทำการออกแบบ เมื่อมองตัวควบคุมในกรอบของรูปที่ 2.2 $K = HK_dS$ จะเห็นว่า K เป็นตัวดำเนินการที่แปรตามเวลา (Time Varying) แต่เป็นรายคาบ (Periodic) ซึ่งจะทำให้เกิดปัญหาในการวิเคราะห์ระบบเพราะจะทำให้ตัวดำเนินการ T_{zw} ที่แปลงสัญญาณจาก w ไป z ไม่มีฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function) ดังนั้นเราจะใช้ความรู้เรื่องปริภูมิสถานะ คือ สัญญาณเชิงเวลา (Time Domain) หรือ ฟังก์ชันถ่ายโอน คือ สัญญาณเชิงความถี่ (Frequency Domain) มาใช้ในการออกแบบตัวควบคุมโดยตรงไม่ได้

นอกจากนี้ การออกแบบตัวควบคุมระบบสุ่มตัวอย่างที่ผ่านมาจะทำการออกแบบโดยไม่พิจารณาถึงพฤติกรรมของระบบที่อยู่ระหว่างคาบเวลาสุ่ม จะสนใจพฤติกรรมเฉพาะจุดที่ทำการสุ่มมาเท่านั้นหรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นการออกแบบตัวควบคุมในระบบเวลาเต็มหน่วยนั่นเอง การออกแบบตัวควบคุมเช่นนี้มีข้อเสียตรงที่พฤติกรรมเลวร้ายใดๆ ที่อาจเกิดขึ้นระหว่างคาบเวลาสุ่มจะไม่นำมาใช้พิจารณาออกแบบตัวควบคุม ด้วยเหตุนี้ตัวควบคุมที่ได้อาจให้ผลตอบของระบบที่จุดสุ่มตัวอย่างตรงตามจุดประสงค์ที่ต้องการ แต่ในระหว่างคาบเวลาสุ่มผลตอบอาจจะไม่เป็นตามที่คาดไว้ จึงได้มีการเสนอวิธี “ลิฟติง” [4] ขึ้นเพื่อรวมผลของพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่มเข้าไปในการออกแบบตัวควบคุม ด้วยวิธีนี้จะทำให้ได้ตัวควบคุมที่ออกแบบโดยคำนึงถึงพฤติกรรมระหว่างคาบเวลาสุ่มและยังเป็นการทำให้จากเดิมระบบสุ่มตัวอย่างใดๆ ที่เป็นระบบแปรตามเวลาและเป็นรายคาบกลายเป็นระบบที่ไม่แปรตามเวลา (Time Invariant) ซึ่งจะสามารถวิเคราะห์ได้ด้วยความรู้เกี่ยวกับระบบไม่แปรตามเวลาที่มีอยู่

ลิฟติง (Lifting) เป็นวิธีการมองสัญญาณใดๆ ให้เป็นกลุ่มก้อนเพื่อทำให้สัญญาณที่มีการสุ่มตัวอย่างมาด้วยอัตราสุ่มที่ต่างกันสามารถมองให้อยู่ที่อัตราสุ่มเดียวกันได้

หากเรานำสัญญาณที่มีการสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ต่างกันมาทำการลิฟต์ วิธีนี้จะเรียกว่า “ลิฟติงเวลาเต็มหน่วย (Discrete Lifting)” แต่หากนำสัญญาณที่มีการสุ่มตัวอย่างและสัญญาณเวลาต่อเนื่อง (สุ่มด้วยอัตราสุ่มที่เร็วที่สุด) มาทำการลิฟต์ วิธีนี้จะเรียกว่า “ลิฟติงเวลาต่อเนื่อง (Continuous Lifting)” ทั้งสองวิธีจะมีหลักการมองคล้ายๆ กัน เพื่อให้ง่ายเราจะเริ่มพิจารณาที่วิธีลิฟติงเวลาเต็มหน่วย

ก.1 ลิฟติงเวลาเต็มหน่วย

พิจารณาสัญญาณระบบเวลาเต็มหน่วย $u(kh) \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ ที่คาบเวลาสุ่ม $h = \frac{T}{f}$ ต้องการลิฟต์สัญญาณเป็น $u_{[k]} \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^f)$ อยู่ที่คาบเวลาสุ่ม T เมื่อ $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ และ $f \in \mathbb{Z}_+$ จะได้

$$u = \{\dots, u(-h), u(0), u(h), \dots\} \quad (ก.1)$$

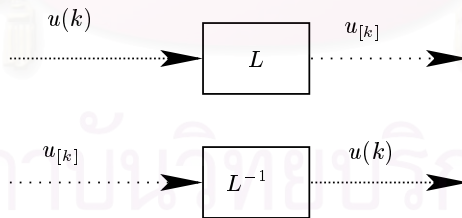
$$u_{[k]} = \{\dots, u_{[-1]}, u_{[0]}, u_{[1]}, \dots\} \quad (ก.2)$$

$$= \left\{ \dots, \begin{bmatrix} u(-fh) \\ u(-f+1h) \\ \vdots \\ u(-h) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(0) \\ u(h) \\ \vdots \\ u(f-1h) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(fh) \\ u(f+1h) \\ \vdots \\ u(2f-1h) \end{bmatrix}, \dots \right\} \quad (ก.3)$$

หรือถ้าคงค่า k จะได้ $u_{[k]}(i) = u(\overline{fk+ih})$ สำหรับ $i = 0, 1, \dots, f-1$ จากลักษณะการมองสัญญาณข้างต้น จะพบว่าเมื่อทำการลิฟต์สัญญาณแล้วหาก $u(kh) \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ แล้ว $u_{[k]} \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^f)$ นั่นคือมิติของสัญญาณที่ถูกลิฟต์จะมีขนาดเพิ่มขึ้น และมีคาบเวลาสุ่มที่ยาวขึ้น การลิฟต์สัญญาณเช่นนี้จะใช้นิยามตัวดำเนินการลิฟติง (Lifting Operator) L ในทางกลับกันจะนิยาม L^{-1} เป็นตัวดำเนินการย้อนกลับของ L ดังรูปที่ ก.1 คุณสมบัติอย่างหนึ่งของการลิฟติงคือการรักษาค่าผลคูณภายใน (Inner Product) ของสัญญาณไว้ โดยสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle u_{[k]}, u_{[k]} \rangle &= \dots + u'_{[-1]}u_{[-1]} + u'_{[0]}u_{[0]} + u'_{[1]}u_{[1]} + \dots \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} u'_{[j]}u_{[j]} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{f-1} u(\overline{fj+ih})'u(\overline{fj+ih}) \\ &= \dots + u(-h)'u(-h) + u(0)'u(0) + u(h)'u(h) + \dots = \langle u, u \rangle \end{aligned}$$

และเนื่องจากการลิฟติงรักษาค่าผลคูณภายใน ดังนั้นการลิฟติงจะรักษาค่านอร์ม (norm) ของสัญญาณด้วย



รูปที่ ก.1: การลิฟต์สัญญาณระบบเวลาเต็มหน่วย

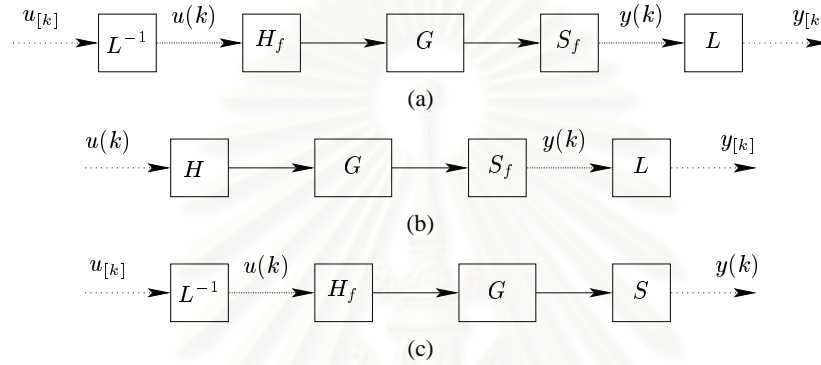
ต่อไปจะทำการลิฟต์ระบบเพื่อให้เห็นถึงวิธีที่จะนำไปใช้ในการลิฟต์ระบบใดๆ เริ่มด้วยการพิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาในระบบเวลาต่อเนื่อง

$$\hat{g}(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^n; B \in \mathbb{R}^{n \times m}; C \in \mathbb{R}^{p \times n}; D \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (ก.4)$$

จะแสดงการลิฟต์ระบบในสามกรณีต่อไปนี้

1. สัญญาณเข้าและสัญญาณออกสุ่มด้วยคาบเวลาสุ่มเดียวกัน ต้องการลิฟต์ให้ระบบมีคาบเวลาที่ยาวขึ้น ดังรูปที่ ก.2(a)
2. สัญญาณเข้าสุ่มด้วยคาบเวลาสุ่มยาวกว่าสัญญาณออก ต้องการลิฟต์ให้ระบบมีคาบเวลาสุ่มเดียวกันที่ คาบเวลาสุ่มสัญญาณเข้าดังรูปที่ ก.2(b)
3. สัญญาณเข้าสุ่มด้วยคาบเวลาสุ่มสั้นกว่าสัญญาณออก ต้องการลิฟต์ให้ระบบมีคาบเวลาสุ่มเดียวกันที่ คาบเวลาสุ่มสัญญาณออกดังรูปที่ ก.2(c)

โดยที่ตัวห้อย f ใน H_f และ S_f หมายถึงคาบเวลาสุ่มที่สั้นกว่า



รูปที่ ก.2: การลิฟต์ระบบเวลาเต็มหน่วย

ก.1.1 การลิฟต์ระบบที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มเดียวกัน

ระบบที่จะทำการลิฟต์ดังอยู่ในรูป $S_f G H_f$ สมมติให้สัญญาณเข้าและสัญญาณออกของระบบใน (ก.4) ถูกสุ่มด้วยคาบเวลาสุ่ม $h = \frac{T}{f}$ เมื่อ f เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ต้องการลิฟต์ระบบทั้งทางด้านสัญญาณเข้าและสัญญาณออกให้มาอยู่ที่คาบเวลาสุ่ม T ซึ่งเป็นคาบที่ยาวขึ้น เมื่อทำการลิฟต์ระบบแล้วจะเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $\underline{G}_{df} = L S_f G H_f L^{-1}$ เริ่มต้นพิจารณาจากระบบเวลาเต็มหน่วย $G_{df} = S_f G H_f$

$$\hat{g}_{df}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_{df} & B_{df} \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad A_{df} = e^{hA}, B_{df} = \int_0^h e^{\tau A} d\tau B \quad (\text{ก.5})$$

ถ้าเขียนให้อยู่ในรูปสมการสถานะภายในคาบเวลา T จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x(\overline{k+1}h) &= A_{df} x(kh) + B_{df} u(kh) \\ x(\overline{k+2}h) &= A_{df} x(\overline{k+1}h) + B_{df} u(\overline{k+1}h) = A_{df}^2 x(kh) + A_{df} B_{df} u(kh) + B_{df} u(\overline{k+1}h) \\ &\vdots \\ x(\overline{k+f-1}h) &= A_{df}^{f-1} x(kh) + A_{df}^{f-2} B_{df} u(k) + \cdots + A_{df} B_{df} u(\overline{k+f-3}h) + B_{df} u(\overline{k+f-2}h) \\ x(\overline{k+fh}) &= A_{df}^f x(kh) + A_{df}^{f-1} B_{df} u(k) + \cdots + A_{df} B_{df} u(\overline{k+f-2}h) + B_{df} u(\overline{k+f-1}h) \end{aligned}$$

และสัญญาณออกสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} y(kh) &= Cx(kh) + Du(kh) \\ y(\overline{k+1h}) &= Cx(\overline{k+1h}) + Du(\overline{k+1h}) = CA_{df}x(kh) + CB_{df}u(kh) + Du(\overline{k+1h}) \\ &\vdots \\ y(\overline{k+f-1h}) &= CA_{df}^{f-1}x(kh) + CA_{df}^{f-2}B_{df}u(kh) + \cdots + CB_{df}u(\overline{k+f-2h}) + Du(\overline{k+f-1h}) \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาระบบที่ทำการลิฟต์แล้วทางด้านสัญญาณเข้าและสัญญาณออกจะนิยามโดย

$$u_{[k]} = \begin{bmatrix} u(kh) \\ u(\overline{k+1h}) \\ \vdots \\ u(\overline{k+f-1h}) \end{bmatrix}, \quad y_{[k]} = \begin{bmatrix} y(kh) \\ y(\overline{k+1h}) \\ \vdots \\ y(\overline{k+f-1h}) \end{bmatrix} \quad (ก.6)$$

จะเห็นว่าถ้าเรากำหนดให้ ξ เป็นตัวแปรสถานะ, φ เป็นสัญญาณออกของระบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่ม T และ $\xi(\underline{k}T) = x(kh)$ ดังความสัมพันธ์ในรูปที่ ก.3 จะสามารถเขียนสมการสถานะของระบบที่ลิฟต์แล้วได้เป็น

$$\begin{aligned} \xi(\overline{k+1}T) &= A_d \xi(\underline{k}T) + \begin{bmatrix} A_{df}^{f-1} B_{df} & A_{df}^{f-2} B_{df} & \cdots & B_{df} \end{bmatrix} u_{[k]}; \quad A_d = A_{df}^f = e^{TA} \\ \varphi(\underline{k}T) &= y_{[k]} = \begin{bmatrix} C \\ CA_{df} \\ \vdots \\ CA_{df}^{f-1} \end{bmatrix} \xi(\underline{k}T) + \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB_{df} & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA_{df}^{f-2} B_{df} & CA_{df}^{f-3} B_{df} & \cdots & D \end{bmatrix} u_{[k]} \end{aligned}$$

หรือสามารถเขียนระบบ \underline{G}_{df} ได้เป็น

$$\hat{\underline{g}}_{df}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & D_d \end{array} \right] \quad (ก.7)$$

เมื่อ

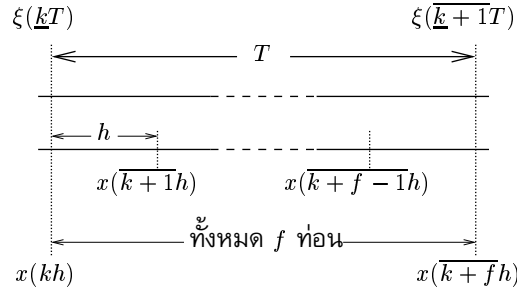
$$A_d \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad A_d \xi(\underline{k}T) = e^{hfA} \xi(\underline{k}T) = e^{TA} \xi(\underline{k}T) \quad (ก.8)$$

$$B_d \in \mathbb{R}^{n \times fm} : \mathbb{R}^{fm} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad B_d u_{[k]} = \begin{bmatrix} A_{df}^{f-1} B_{df} & A_{df}^{f-2} B_{df} & \cdots & B_{df} \end{bmatrix} u_{[k]} \quad (ก.9)$$

$$C_d \in \mathbb{R}^{fp \times n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{fp}, \quad C_d \xi(\underline{k}T) = \begin{bmatrix} C \\ CA_{df} \\ \vdots \\ CA_{df}^{f-1} \end{bmatrix} \xi(\underline{k}T) \quad (ก.10)$$

$$D_d \in \mathbb{R}^{fp \times fm} : \mathbb{R}^{fm} \rightarrow \mathbb{R}^{fp}, \quad D_d u_{[k]} = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB_{df} & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA_{df}^{f-2} B_{df} & CA_{df}^{f-3} B_{df} & \cdots & D \end{bmatrix} u_{[k]} \quad (ก.11)$$

สังเกตว่าระบบที่ลิฟต์แล้วมิติของสัญญาณเข้าและสัญญาณออกจะเปลี่ยนไปโดยมีขนาดที่ใหญ่ขึ้น



รูปที่ ก.3: ความสัมพันธ์ระหว่างสถานะของระบบคาบเวลาสุ่มฐานกับคาบเวลาสุ่มหลัก

ก.1.2 การลิฟต์ระบบที่สัญญาณออกถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มเร็วกว่าสัญญาณเข้า

ระบบที่จะทำการลิฟต์อยู่ในรูป S_fGH สมมติให้สัญญาณออกของระบบใน (ก.4) ถูกสุ่มด้วยคาบเวลาสุ่ม $h = \frac{T}{f}$ เมื่อ f เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ในขณะที่ทางด้านสัญญาณเข้าคงค่าด้วยคาบเวลาสุ่ม T ต้องการลิฟต์ระบบทางด้านสัญญาณออกให้มาอยู่ที่คาบเวลาสุ่ม T การหาระบบลิฟต์สำหรับกรณีนี้จะพิจารณาเช่นเดียวกับกรณีการลิฟต์ระบบ S_fGH_f แตกต่างกันที่สัญญาณเข้าสำหรับระบบ S_fGH จะเท่ากันตลอดคาบเวลาสุ่ม T หรือ

$$u(kh) = u(\overline{k+1h}) = u(\overline{k+2h}) = \dots = u(\overline{k+f-1h})$$

และมีติของสัญญาณเข้าจะลดจากเดิมเป็น \mathbb{R}^m ดังนั้นสำหรับระบบนี้จะมี A_d และ C_d ดังแสดงใน (ก.8) และ (ก.10) ตามลำดับ ต่างกันตรงที่ B_d และ D_d จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} B_d &= A_{df}^{f-1} B_{df} + A_{df}^{f-2} B_{df} + \dots + A_{df} B_{df} + B_{df} \\ &= e^{Ah(f-1)} \int_0^h e^{A\tau} B_{df} d\tau + e^{Ah(f-2)} \int_0^h e^{A\tau} B_{df} d\tau + \dots + e^{Ah} \int_0^h e^{A\tau} B_{df} d\tau + \int_0^h e^{A\tau} B_{df} d\tau \\ &= \int_{h(f-1)}^{hf} e^{A\tau} B_{df} d\tau + \int_{h(f-2)}^{h(f-1)} e^{A\tau} B_{df} d\tau + \dots + \int_h^{2h} e^{A\tau} B_{df} d\tau + \int_0^h e^{A\tau} B_{df} d\tau \\ &= \int_0^{hf} e^{A\tau} B_{df} d\tau = \int_0^T e^{A\tau} B_{df} d\tau \end{aligned} \quad (ก.12)$$

$$D_d = \begin{bmatrix} D \\ CB_{df} + D \\ \vdots \\ CA_{df}^{f-2} B_{df} + CA_{df}^{f-3} B_{df} + \dots + D \end{bmatrix} \quad (ก.13)$$

โดยที่ $B_d \in \mathbb{R}^{n \times m} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n)$ และ $D_d \in \mathbb{R}^{f \times m} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^{fp})$

ก.1.3 การลิฟต์ระบบที่สัญญาณออกถูกสุ่มด้วยอัตราสุ่มที่ช้ากว่าสัญญาณเข้า

ระบบที่จะทำการลิฟต์อยู่ในรูป SGH_f สมมติให้สัญญาณเข้าของระบบใน (ก.4) ถูกคงค่าด้วยคาบเวลาสุ่ม $h = \frac{T}{f}$ เมื่อ f เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ในขณะที่ทางด้านสัญญาณออกถูกสุ่มด้วยคาบเวลาสุ่ม T ต้องการลิฟต์ระบบทางด้านสัญญาณเข้าให้มาอยู่ที่คาบเวลาสุ่ม T การหาระบบลิฟต์สำหรับกรณีนี้จะ

พิจารณาเช่นเดียวกับกรณีการลิฟต์ระบบ S_fGH_f แตกต่างกันที่สัญญาณออกสำหรับระบบ SGH_f จะถูกสุ่มมาเพียงครั้งเดียวตลอดคาบเวลาสุ่ม T หรือ

$$\varphi(kT) = C\xi(kT) + Du(kT)$$

และมิติของสัญญาณออกจะลดจากเดิมเป็น R^m ดังนั้นสำหรับระบบนี้จะมี A_d และ B_d ดังแสดงใน (ก.8) และ (ก.9) ตามลำดับ ต่างกันตรงที่ C_d และ D_d จะเป็นดังนี้

$$C_d = C \quad (\text{ก.14})$$

$$D_d = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ก.15})$$

โดยที่ $D_d \in \mathbb{R}^{p \times fm} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^{fm}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^p)$

ก.2 ลิฟต์เวลาต่อเนื่อง

การลิฟต์ระบบเวลาต่อเนื่องจะคล้ายกับการลิฟต์ระบบเวลาเต็มหน่วย ต่างกันตรงแทนที่จะลิฟต์สัญญาณที่สุ่มตัวอย่างด้วยคาบเวลาสุ่มที่สั้นไปไว้ที่คาบเวลาสุ่มที่ยาวขึ้นแต่จะลิฟต์สัญญาณเวลาต่อเนื่อง (สุ่มด้วยคาบเวลาสุ่มที่สั้นที่สุด) ไปไว้ในระบบเวลาเต็มหน่วย เริ่มต้นพิจารณาสัญญาณ $u(t)$ ของระบบเวลาต่อเนื่องที่อยู่บนปริภูมิ $\mathcal{L}_{2e}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\int_0^T u(t)'u(t)dt < \infty \quad \forall T > 0 \quad (\text{ก.16})$$

แล้วทำการพิจารณาสัญญาณ $u(t)$ เป็นช่วงๆ บนคาบเวลาสุ่ม h จะได้ $u(t)$ ที่นิยามบน $\dots, [-h, 0), [0, h), [h, 2h), \dots$ กำหนดให้ $u_{(k)}$ เป็นช่วงสัญญาณที่จุดสุ่มที่ k และนิยามบน $[kh, (k+1)h)$ หรือสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$u_{(k)}(t) := u(kh + t), \quad 0 \leq t < h \quad (\text{ก.17})$$

โดยที่ $u_{(k)}$ จะอยู่บนปริภูมิ $\mathcal{K}_n := \mathcal{L}_2([0, h), \mathbb{R}^n)$ ที่มีมิติอนันต์บนปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert Space) เมื่อ n เป็นมิติของสัญญาณ $u(t)$ โดยนิยามผลคูณภายใน

$$\langle u_{(k)}, u_{(k)} \rangle = \int_0^h u_{(k)}'u_{(k)}dt \quad (\text{ก.18})$$

และนิยามนอร์มจาก

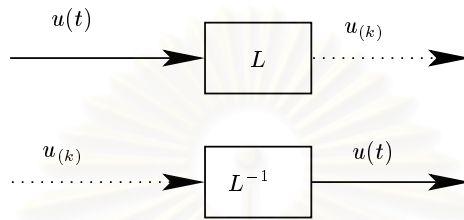
$$\|u_{(k)}\| = \left[\int_0^h u_{(k)}'u_{(k)}dt \right]^{1/2} \quad (\text{ก.19})$$

การลิฟต์ระบบเวลาต่อเนื่องก็คือการลิฟต์สัญญาณ $u(t) \in \mathcal{L}_{2e}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ไป $u_{(k)} \in \ell(\mathbb{Z}, \mathcal{K}_n)$ การลิฟต์สัญญาณเช่นนี้จะใช้นิยามตัวดำเนินการลิฟต์ L และกำหนดให้ L^{-1} เป็นตัวดำเนินการย้อนกลับของ L ซึ่งสามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ ก.4 คุณสมบัติอย่างหนึ่งของ L คือ รักษาค่าของผลคูณภายในเมื่อ

แปลงสัญญาณจาก $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ไปยัง $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}, \mathcal{K}_n)$ โดยสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

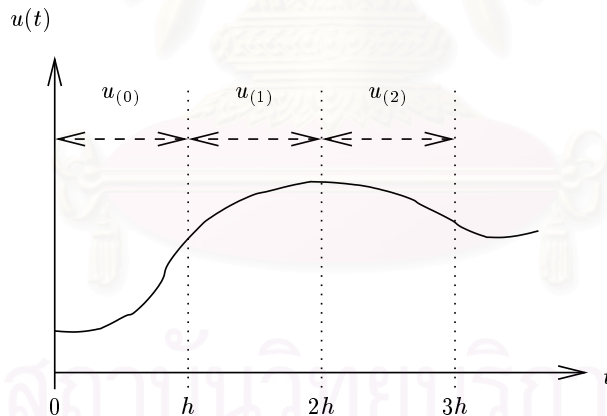
$$\begin{aligned} \langle Lu(t), Lu(t) \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle u_{(k)}, u_{(k)} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^h u'_{(k)} u_{(k)} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} u(t)' u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)' u(t) dt \\ &= \langle u(t), u(t) \rangle \end{aligned}$$

นั่นหมายความว่า การลิติงจะรักษาค่านอร์มของสัญญาณด้วยซึ่งเหมือนกับกรณีระบบเวลาเต็มหน่วย



รูปที่ ก.4: การลิตสัญญาณระบบเวลาต่อเนื่อง

เพื่อมองให้เห็นภาพการลิติงเวลาต่อเนื่อง พิจารณารูปที่ ก.5 จะทำการแบ่งสัญญาณ $u(t)$ ออกเป็นท่อนๆ โดยแต่ละท่อนนิยามบนช่วงเวลา h การลิติงก็คือการมองสัญญาณในแต่ละท่อนเป็น $u_{(k)}$ ซึ่ง $u_{(k)}$ จะมองว่าเป็นจุดๆ ในระบบเวลาเต็มหน่วยที่สุ่มด้วยคาบเวลามุม h แต่ในขณะเดียวกัน $u_{(k)}$ เองก็ประกอบไปด้วยสัญญาณเวลาต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงเวลา h

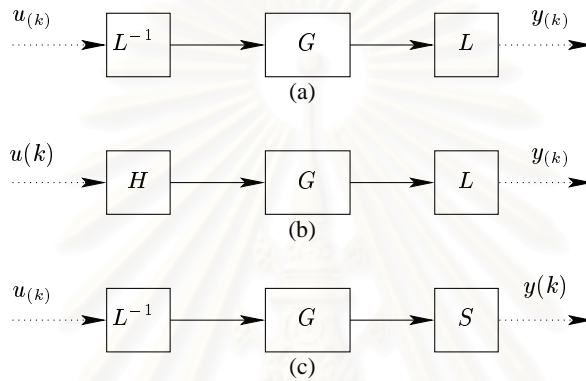


รูปที่ ก.5: นิยามการลิติง

ต่อไปจะทำการลิตระบบใน (ก.4) เพื่อให้เห็นถึงวิธีที่จะนำไปใช้ในการลิตระบบใดๆ พิจารณาคัลยกรณีของระบบเวลาเต็มหน่วย จะแสดงการลิตระบบในสามกรณีต่อไปนี้

1. สัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นสัญญาณเวลาต่อเนื่อง ต้องการลิตให้ระบบเป็นระบบเวลาเต็มหน่วย ดังรูปที่ ก.6(a) หรือเป็นการลิตระบบ G เขียนสัญลักษณ์แทนระบบที่ลิตแล้วด้วย $\underline{G} = LGL^{-1}$ เดิมระบบทำการแปลงสัญญาณจาก $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$ ไป $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ เมื่อทำการลิตแล้วจะได้ระบบที่แปลงสัญญาณจาก $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_p)$ ไป $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_m)$

2. สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วยในขณะที่สัญญาณออกเป็นสัญญาณเวลาต่อเนื่อง ต้องการลิฟต์ให้ระบบเป็นระบบเวลาเต็มหน่วยดังรูปที่ ก.6(b) หรือเป็นการลิฟต์ระบบ GH เขียนสัญลักษณ์แทนระบบที่ลิฟต์แล้วด้วย $\underline{GH} = LGH$ เดิมระบบทำการแปลงสัญญาณจาก $l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^p)$ ไป $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ เมื่อทำการลิฟต์แล้วจะได้ระบบที่แปลงสัญญาณจาก $l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^p)$ ไป $l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m)$
3. สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณเวลาต่อเนื่องในขณะที่สัญญาณออกเป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วย ต้องการลิฟต์ให้ระบบเป็นระบบเวลาเต็มหน่วยดังรูปที่ ก.6(c) หรือเป็นการลิฟต์ระบบ SG เขียนสัญลักษณ์แทนระบบที่ลิฟต์แล้วด้วย $\underline{SG} = SGL^{-1}$ เดิมระบบทำการแปลงสัญญาณจาก $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$ ไป $l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m)$ เมื่อทำการลิฟต์แล้วจะได้ระบบที่แปลงสัญญาณจาก $l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^p)$ ไป $l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^m)$



รูปที่ ก.6: การลิฟต์ระบบเวลาต่อเนื่อง

ก.2.1 การลิฟต์ระบบที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นสัญญาณในระบบเวลาต่อเนื่อง

ระบบที่จะทำการลิฟต์อยู่ในรูป G จากระบบใน (ก.4) ต้องการลิฟต์ระบบให้ไปอยู่ในระบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่ม h เริ่มต้นพิจารณาจากสมการสถานะ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

เมื่อทำการแก้สมการสถานะข้างต้นจะได้

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

ถ้าพิจารณาในช่วงเวลาใดๆ สำหรับ $0 \leq t < h$ จะสามารถเขียนได้เป็น

$$x(kh + t) = e^{At}x(kh) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu_k(\tau)d\tau$$

ดังนั้นจะได้ $y_{(k)} = y(kh + t)$ สำหรับ $0 \leq t < h$ เป็น

$$y_{(k)} = Ce^{At}x(kh) + C \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu_k(\tau)d\tau + Du_k$$

ฉะนั้นถ้ากำหนดให้

$$\underline{A} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n), \quad \underline{A}x(kh) = e^{Ah}x(kh) \quad (ก.20)$$

$$\underline{B} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_p) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n), \quad \underline{B}u_{(k)} = \int_0^h e^{(h-\tau)A}Bu_{(k)}d\tau \quad (ก.21)$$

$$\underline{C} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_m), \quad (\underline{C}x)(t) = Ce^{At}x(kh) \quad (ก.22)$$

$$\underline{D} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_p) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_m), \quad \underline{D}u_{(k)} = Du_{(k)} + C \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu_{(k)}d\tau \quad (ก.23)$$

จะได้ระบบเวลาเต็มหน่วย

$$\hat{g}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} & \underline{B} \\ \hline \underline{C} & \underline{D} \end{array} \right]$$

ให้สังเกตว่า \underline{A} เป็นเมทริกซ์คงที่ที่ได้จากการแปลงให้ G ไปอยู่ในระบบเวลาเต็มหน่วยด้วยตัวสุ่มและตัวคงค่า ซึ่งจะเขียนแทนด้วย A_d ส่วน \underline{B} , \underline{C} และ \underline{D} เป็นตัวดำเนินการ เมื่อพิจารณา \underline{G} ที่ได้จะเป็นระบบเสมือนเวลาเต็มหน่วยที่มีสัญญาณเข้าและสัญญาณออกมีมิติอนันต์

ก.2.2 การลิฟต์ระบบที่สัญญาณออกเป็นสัญญาณในระบบเวลาต่อเนื่อง สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณในระบบเวลาเต็มหน่วย

ระบบที่จะทำการลิฟต์อยู่ในรูป GH สำหรับระบบ GH สมมติให้ทางด้านสัญญาณเข้าเป็นสัญญาณที่ผ่านตัวคงค่าที่คาบเวลาสุ่ม h ในขณะที่ทางด้านสัญญาณออกเป็นสัญญาณต่อเนื่อง จะทำการลิฟต์ระบบให้ไปอยู่ในรูประบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่ม h การลิฟต์ระบบนี้จะพิจารณาเช่นเดียวกับการหา \underline{G} แต่แตกต่างกันที่ค่า $u(t)$ จะคงที่ตลอดช่วงคาบเวลาสุ่มตั้งนั้นสำหรับระบบนี้จะได้

$$\hat{g}_{GH}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline \underline{C} & \underline{D}_{res} \end{array} \right] \quad (ก.24)$$

โดยที่ A_d และ \underline{C} เหมือนกับ (ก.20) และ (ก.22) ตามลำดับ ส่วน B_d และ \underline{D}_{res} หาได้จาก

$$B_d : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^p) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n), \quad B_d u(kh) = \int_0^h e^{\tau A} d\tau B u(kh) \quad (ก.25)$$

$$\underline{D}_{res} : \ell(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^p) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}_+, \mathcal{K}_m), \quad \underline{D}_{res} u(kh) = [D + C \int_0^t e^{\tau A} d\tau B] u(kh) \quad (ก.26)$$

สังเกตว่า B_d จะเป็นเมทริกซ์คงที่ไม่ใช่ตัวดำเนินการเหมือนกับ \underline{B} ใน (ก.21)

ก.2.3 การลิฟต์ระบบที่สัญญาณออกเป็นสัญญาณในระบบเวลาเต็มหน่วย สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณในระบบเวลาต่อเนื่อง

ระบบที่จะทำการลิฟต์อยู่ในรูป SG สำหรับระบบ SG สมมติให้ทางด้านสัญญาณออกเป็นสัญญาณที่สุ่มมาที่คาบเวลาสุ่ม h ในขณะที่ทางด้านสัญญาณเข้าเป็นสัญญาณต่อเนื่อง จะทำการลิฟต์ระบบให้ไปอยู่ในรูประบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่ม h การลิฟต์ระบบนี้จะพิจารณาเช่นเดียวกับการหา \underline{G} แต่แตกต่างกันที่ค่า $y(kh)$ ได้จากการสุ่มสัญญาณ $y(t)$ และจะพิจารณาเฉพาะระบบที่มี

$D = 0$ เท่านั้น ทั้งนี้เนื่องจากป้องกันเหตุการณ์ที่สัญญาณเข้าของตัวส่งมีค่าออร์มสองที่มีขอบเขตแต่สัญญาณออกของสัญญาณกลับมีค่าออร์มสองที่ไม่มีขอบเขตได้ [4] ดังนั้นสำหรับระบบนี้จะได้

$$\hat{g}_{SG}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (\text{ก.27})$$

โดยที่ A_d และ B เหมือนกับ (ก.20) และ (ก.21) ตามลำดับ สังเกตว่าค่า C จะเป็นเมทริกซ์คงที่เหมือนกับ C ของระบบ (ก.4) หรือ C ใน (ก.22) ที่มี $t = 0$

จากวิธีการลิตดิงที่กล่าวมาทั้งการลิตระบบเวลาเต็มหน่วยและการลิตระบบเวลาต่อเนื่อง จะเห็นว่าสำหรับระบบหลายอัตราส่งสามารถที่จะนำมาวิเคราะห์ระบบได้โดยการลิตระบบให้มาอยู่ที่อัตราส่งเดียวกัน นอกจากนี้ระบบที่ได้หลังจากทำการลิตแล้วยังเป็นระบบไม่แปรตามเวลาที่จะสามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับระบบไม่แปรตามเวลาที่มีอยู่



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

การออกแบบตัวควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

เราจะสรุปหลักการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกที่เสนอโดย T. Hagiwara และ M. Araki [1] ไว้ในส่วนนี้ บทพิสูจน์ต่างๆ สามารถศึกษาได้จากบทความ

ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก (Multirate Output Controller: MROC) เป็นตัวควบคุมเชิงเลข (Digital Controller) ชนิดหนึ่งที่ทำกรสุ่มสัญญาณออกของพลานท์ f ครั้งในคาบเวลาสุ่มหลัก T ด้วยอัตราสุ่มที่คงที่ และส่งสัญญาณควบคุมเพียงหนึ่งครั้งในคาบเวลาดังกล่าว

ข.1 ระบบหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

พิจารณาระบบเวลาต่อเนื่องเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่อธิบายโดยสมการสถานะต่อไปนี้

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{ข.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{ข.2})$$

เมื่อ $x \in \mathbb{R}^n$ หมายถึงตัวแปรสถานะ, $u \in \mathbb{R}^m$ หมายถึงสัญญาณควบคุม, และ $y \in \mathbb{R}^p$ หมายถึงสัญญาณออกของพลานท์ เมื่อนำตัวคงค่าอันดับศูนย์มาต่อเข้ากับสัญญาณควบคุมทุกช่องสัญญาณก่อนส่งให้กับพลานท์ โดยที่ตัวคงค่าทุกตัวทำงานพร้อมกันที่คาบเวลาสุ่มหลัก T จะได้ $u(t)$ มีค่าคงที่ตลอดช่วงคาบเวลาสุ่มหลัก หรือ

$$u(t) = u(kT) \quad (kT \leq t < \overline{k+1}T) \quad (\text{ข.3})$$

แทนค่าสมการ (ข.3) ลงในสมการ (ข.1) และแก้สมการ (ข.1) เราจะได้

$$x(kT + t) = e^{At}x(kT) + \int_0^t e^{A\tau}Bd\tau u(kT) \quad (\text{ข.4})$$

สำหรับ $0 \leq t \leq T$ วัตสัญญาณออก y_i ทุกๆ h_i สัญญาณที่ได้จะเป็น

$$y_i(kT + \mu h_i) = c_i x(kT + \mu h_i) \quad (\mu = 0, \dots, f_i - 1) \quad (\text{ข.5})$$

เมื่อ c_i เป็นแถวที่ i ของเมทริกซ์ C , และ h_i กับ T มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$h_i = \frac{T}{f_i} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (\text{ข.6})$$

เมื่อ f_i เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จากสมการ (ข.6) ค่า T เรียกว่าคาบเวลาสุ่มสัญญาณควบคุม (input sampling period หรือ frame period) โดยที่สัญญาณออกช่องที่ i จะถูกสุ่มตัวอย่าง f_i ครั้งในคาบเวลาสุ่มหลัก T แทน $t = T$ ลงในสมการ (ข.4) จะได้

$$x(\overline{k+1}T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{At}Bdtu(kT) \quad (\text{ข.7})$$

แทนค่า $x(kT)$ จากสมการ (ข.7) ลงในสมการ (ข.4) จะได้

$$x(kT + t) = e^{A(t-T)} x(\overline{k+1T}) + \int_0^{t-T} e^{A\tau} B d\tau u(kT) \quad (\text{ข.8})$$

แทนสมการ (ข.8) ลงใน (ข.5) จะได้

$$y_i(kT + \mu h_i) = c_i e^{A(\mu h_i - T)} x(\overline{k+1T}) + c_i \int_0^{\mu h_i - T} e^{A\tau} B d\tau u(kT) \quad (\mu, \dots, f_i - 1) \quad (\text{ข.9})$$

จัดรูปสมการที่ได้และเขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ จะได้

$$\hat{C} x(\overline{k+1T}) = \varphi(kT) - \hat{G} u(kT) \quad (k \geq 0) \quad (\text{ข.10})$$

เมื่อ $\hat{C} \in \mathbb{R}^{\bar{f}} \times n$, $\hat{G} \in \mathbb{R}^{\bar{f}} \times m$, และ $\varphi(kT) \in \mathbb{R}^{\bar{f}}$ นิยามโดย

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-A f_1 h_1} \\ c_1 e^{(1-f_1) A h_1} \\ \vdots \\ c_1 e^{-A h_1} \\ \vdots \\ c_p e^{-A f_p h_p} \\ c_p e^{(1-f_p) A h_p} \\ \vdots \\ c_p e^{-A h_p} \end{bmatrix}; \hat{G} = \begin{bmatrix} c_1 \int_0^{-f_1 h_1} e^{A t} B dt \\ c_1 \int_0^{(1-f_1) h_1} e^{A t} B dt \\ \vdots \\ c_1 \int_0^{-h_1} e^{A t} B dt \\ \vdots \\ c_p \int_0^{-f_p h_p} e^{A t} B dt \\ c_p \int_0^{(1-f_p) h_p} e^{A t} B dt \\ \vdots \\ c_p \int_0^{-h_p} e^{A t} B dt \end{bmatrix}; \varphi(kT) = \begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_1(kT + h_1) \\ \vdots \\ y_1(kT + \overline{f_1 - 1} h_1) \\ \vdots \\ y_p(kT) \\ y_p(kT + h_p) \\ \vdots \\ y_p(kT + \overline{f_p - 1} h_p) \end{bmatrix} \quad (\text{ข.11})$$

และ

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^p f_i \quad (\text{ข.12})$$

เวกเตอร์ $\varphi(kT)$ ประกอบไปด้วยค่าสัญญาณออกที่สุ่มมาด้วยอัตราการสุ่มต่างๆกันภายในคาบเวลา T ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสถานะ $x(\overline{k+1T})$ กับเวกเตอร์ $\varphi(kT)$ และค่าสัญญาณควบคุม $u(kT)$ เป็นดังสมการ (ข.10) ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายผลลัพธ์ที่ได้จะนิยาม “เวกเตอร์ดัชนีสังเกตได้ (Observability index vector: OIV)”

นิยาม เวกเตอร์ดัชนีสังเกตได้: พิจารณาคู่สังเกตได้ (A, C) เมื่อ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ และ $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ เขียน C ในรูป $C = [c_1^T, \dots, c_p^T]^T$ เซ็ตของจำนวนเต็ม $\{n_1, \dots, n_p\}$ จะเรียกว่า “เวกเตอร์ดัชนีสังเกตได้” ของคู่ (A, C) ถ้า

$$\sum_{i=1}^p n_i = n \quad (\text{ข.13})$$

และเวกเตอร์ $c_1, \dots, c_1 A^{n_1-1}; c_2, \dots, c_2 A^{n_2-1}; \dots; c_p, \dots, c_p A^{n_p-1}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

กลับมาพิจารณาที่ \hat{C} ในสมการ (ข.10) เราจะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

บทตั้ง ข.1 กำหนดให้ (A, C) เป็นคู่สังเกตได้ แล้วเมทริกซ์ \hat{C} จากสมการ (ข.11) จะมีลำดับชั้นหลักเต็ม (full column rank) สำหรับทุกๆ คาบเวลา T ถ้าจำนวนสัมสัญญาณออก f_1, \dots, f_p ในแต่ละช่องสัญญาณตรงตามเงื่อนไข

$$f_i \geq n_i \quad (i = 1, \dots, p)$$

เมื่อ $\{n_1, \dots, n_p\}$ คือ OIV ของคู่ (A, C)

บทตั้ง ข.2 กำหนดให้ (A, C) เป็นคู่สังเกตได้ และสมมติให้

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m$$

แล้วเมทริกซ์ $[\hat{C} \ \hat{G}]$ ในสมการ (ข.11) จะมีลำดับชั้นหลักเต็มสำหรับทุกๆ คาบเวลา T ถ้าจำนวนสัมสัญญาณออก (f_1, \dots, f_p) ตรงตามเงื่อนไข

$$f_i \geq m_i \quad (i = 1, \dots, p)$$

เมื่อ $\{m_1, \dots, m_p\}$ คือ OIV ของระบบเสริม

$$\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{ข.14})$$

ข.2 ตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออก

พิจารณาตัวควบคุมเมื่อใช้ผลจากการหาระบบหลายอัตราสัมสัญญาณออกจากหัวข้อที่ผ่านมา โดยจะสร้างสัญญาณควบคุมจาก

$$u(\overline{k+1}T) = Mu(kT) - N\varphi(kT) \quad (\text{ข.15})$$

เมื่อ $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ และ $N \in \mathbb{R}^{m \times f}$ จะเห็นว่าสัญญาณควบคุมในคาบเวลา $k+1$ จะสร้างจากสัญญาณควบคุมในคาบเวลา k และ สัญญาณออกที่ได้จากการสุ่มที่คาบเวลาสุ่มต่างๆกัน ให้สังเกตว่าสัญญาณควบคุมที่สร้างขึ้นเป็นระบบในเวลาเต็มหน่วยที่มีสถานะเป็น $u(kT)$ จากลักษณะการสร้างสัญญาณควบคุมข้างต้นจะเรียกตัวควบคุมแบบนี้ว่า “ตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออก”

จากสมการ (ข.10) คูณด้วย $-N$ จะได้

$$-N\hat{C}\xi(\overline{k+1}T) = -N\varphi(kT) + N\hat{G}u(kT)$$

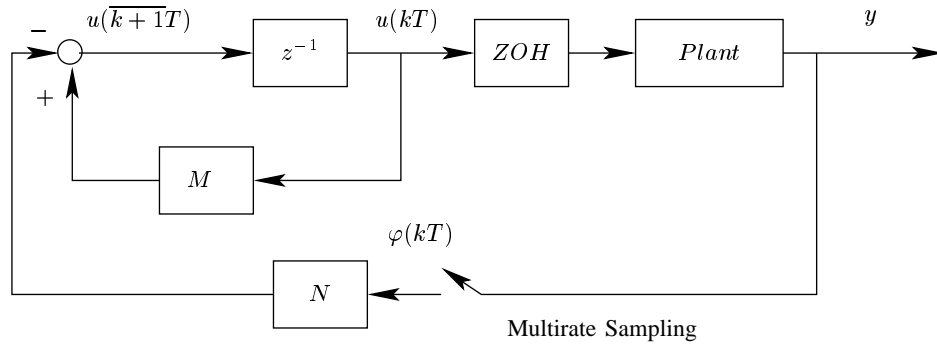
เพื่อให้ได้ลักษณะการป้อนกลับสถานะ $u(\overline{k+1}T) = -F\xi(\overline{k+1}T)$ และจาก (ข.15) จะได้ว่า

$$F = N\hat{C} \quad (\text{ข.16})$$

$$M = N\hat{G} \quad (\text{ข.17})$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} F & M \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{G} \end{bmatrix} \quad (\text{ข.18})$$



รูปที่ ข.1: ระบบวงปิดสำหรับตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก

ทฤษฎีบท ข.1 สมมติให้คู่ (A, C) เป็นคู่สังเกตได้ และ จำนวนสุ่มสัญญาณออก (f_1, \dots, f_p) ตรงตามเงื่อนไข

$$f_i \geq n_i \quad (i = 1, \dots, p) \quad (\text{ข.19})$$

เมื่อ $\{n_1, \dots, n_p\}$ คือ OIV ของคู่ (A, C) แล้ว สำหรับทุกๆ คาบเวลา T เราสามารถทำให้กฎการควบคุม (ข.15) เหมือนกฎการควบคุมป้อนกลับสถานะใดๆ

$$u(kT) = -Fx(kT) \quad (k \geq 1) \quad (\text{ข.20})$$

โดยการเลือกเมทริกซ์ $N \in \mathbb{R}^{m \times f}$ และ $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$

จากบทตั้ง ข.1 จะสามารถหาเมทริกซ์ N และ M โดยสมการ (ข.16) และ (ข.17) ได้ และลักษณะระบบวงปิดของระบบควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะเป็นดังรูปที่ ข.1 โดยตัวควบคุมจะมีเสถียรภาพหรือไม่ขึ้นอยู่กับเมทริกซ์ M หรือ NG แต่จากทฤษฎีบท ข.1 จะไม่สามารถเลือกเมทริกซ์ M ได้อย่างอิสระ

ทฤษฎีบท ข.2 สมมติ (A, C) เป็นคู่สังเกตได้และ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (\text{ข.21})$$

และสมมติว่าจำนวนสุ่มสัญญาณออก (f_1, \dots, f_p) ตรงตามเงื่อนไข

$$f_i \geq m_i \quad (i = 1, \dots, p) \quad (\text{ข.22})$$

เมื่อ $\{m_1, \dots, m_p\}$ เป็น OIV ของระบบเสริม (ข.14) แล้วสำหรับคาบเวลา T ส่วนมากจะมีเมทริกซ์ $N \in \mathbb{R}^{m \times f}$ ที่สอดคล้องกับ

$$NC = F$$

และ

$$NG = M$$

เมื่อ $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ และ $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆที่เลือกมาเพื่อเป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะของตัวควบคุม

จากบทตั้ง ข.2 จะสามารถเลือกเมทริกซ์ F และ M ที่ทำให้สามารถหาเมทริกซ์ N ที่สอดคล้องกับสมการ (ข.18) ได้ จะเห็นว่าจากสองทฤษฎีข้างต้นสามารถสรุปได้ว่าเราสามารถออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกที่ให้ผลการควบคุมคล้ายการควบคุมป้อนกลับสถานะด้วยเมทริกซ์ F ใดๆ ได้และยังสามารถเลือกเมทริกซ์ M ได้ด้วย

ข.3 ขั้วของระบบวงปิดและการมีเสถียรภาพอย่างยิ่ง

พิจารณาขั้วของระบบวงปิดที่แสดงในรูปที่ ข.1 จากสมการ (ข.7) เราจะได้

$$x(k+1T) = A_d x(kT) + B_d u(kT) \quad (\text{ข.23})$$

เมื่อ

$$A_d = e^{AT} \quad (\text{ข.24})$$

$$B_d = \int_0^T e^{At} B dt \quad (\text{ข.25})$$

จากสมการ (ข.10), (ข.15), (ข.16), (ข.17) และ (ข.23) ระบบวงปิดที่ได้จะสามารถอธิบายได้ด้วย

$$\begin{bmatrix} x(k+1T) \\ u(k+1T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ -FA_d & -FB_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix}$$

ทำการแปลงคล้ายด้วยเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F & I \end{bmatrix}$$

เราจะได้

$$\begin{bmatrix} x(k+1T) \\ z(k+1T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d - B_d F & B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT) \\ z(kT) \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$z(kT) = x(kT) + Fu(kT)$$

จะเห็นว่าขั้ววงปิดสามารถแบ่งออกเป็นสองกลุ่มคือ มี n ขั้วที่หาได้จากค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $A_d - B_d F$ และ m ขั้วอยู่ที่จุดกำเนิดซึ่งเสถียรแน่นอน แสดงว่าระบบวงปิดจะเสถียรหรือไม่ขึ้นอยู่กับ การเลือกเมทริกซ์ F ที่ทำให้ $A_d - B_d F$ มีเสถียรภาพ

จากการพิจารณาข้างต้นและจากทฤษฎีบท ข.2 จะได้อีกทฤษฎีเพื่อยืนยันว่าเราสามารถทำให้ระบบที่ไม่มีเสถียรภาพมีเสถียรภาพอย่างยิ่ง หรือ ระบบถูกทำให้มีเสถียรภาพได้ด้วยตัวควบคุมที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

ทฤษฎีบท ข.3 ระบบที่สามารถควบคุมได้และสังเกตได้ (A, B, C) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (ข.21) ส่วนมาก จะสามารถทำให้ระบบเสถียรอย่างยิ่งได้ด้วยตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก (ข.15) ด้วยคาบเวลา T ใดๆ

ข.4 การเลือกคาบเวลาสุ่มหลักและจำนวนสุ่มสัญญาณออก

M.-J. Er และ B. D. O. Anderson [2] ได้แสดงให้เห็นว่าคาบเวลาสุ่มหลัก T และ จำนวนสุ่มสัญญาณออก f_i มีผลกับค่าของเมทริกซ์ N ของตัวควบคุม หากเลือกค่าไม่ดีจะทำให้ได้ค่าอัตราขยายของเมทริกซ์ N ที่มีขนาดใหญ่ ซึ่งจะทำให้ผลของสัญญาณรบกวน ความไม่แน่นอนของระบบ หรือ ความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบมีผลกับผลตอบของการควบคุมเป็นอย่างมากได้ นอกจากนี้ยังได้เสนอแนวทางสำหรับลดปัญหาที่เกิดขึ้นดังกล่าว โดยสามารถสรุปเป็นหลักเกณฑ์ได้ดังนี้

1. ไม่ว่าพลานท์วงเปิดจะเสถียรหรือไม่ก็ตาม ควรเลือกค่า

$$T \geq \frac{1}{20\alpha}$$

เมื่อ α คือค่าสมบูรณ์ของขั้ววงเปิดของพลานท์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด ($\alpha = \max |\lambda(A)|$)

2. ถ้าพลานท์วงเปิดไม่เสถียร ควรเลือกค่า

$$T < \frac{4f_{imax}}{\alpha}$$

เมื่อ α คือค่าของขั้ววงเปิดของพลานท์ที่ไม่เสถียร และ f_{imax} คือจำนวนสุ่มสัญญาณออกที่มากที่สุด ($f_{imax} = \max_{1 \leq i \leq p} f_i$)

ข.5 สรุป

จากที่กล่าวมาจะสามารถสรุปหลักการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกได้ดังนี้

1. เลือกคาบเวลาสุ่มหลัก T และจำนวนสุ่มสัญญาณออก f_i เพื่อสามารถหาเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ (ข.16) และ (ข.17) หรือ (ข.18)
2. ออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F สำหรับระบบเวลาเต็มหน่วยที่คาบเวลาสุ่มหลัก T
3. แก้มการหา M และ N จาก (ข.16) และ (ข.17) หรือกำหนด M แล้วทำการแก้มการหา N จาก (ข.18)

ระบบที่จะสามารถออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกได้จะต้อง

1. พลานท์จะต้องมีความสามารถสังเกตได้ เพื่อที่ว่าการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะสามารถให้ผลการควบคุมเหมือนการควบคุมด้วยวิธีป้อนกลับสถานะได้
2. พลานท์จะต้องมีความสามารถควบคุมได้ เพื่อที่ว่าการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออกจะสามารถวางตำแหน่งขั้ววงเปิดหรือทำการควบคุมแบบเหมาะสมได้
3. พลานท์จะต้องมีจำนวนสัญญาณออกอย่างน้อยที่สุดเท่ากับจำนวนสัญญาณควบคุม และ จะต้องไม่มีศูนย์ที่จุดกำเนิดทั้งนี้เพื่อที่จะสามารถเลือกเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะสำหรับตัวควบคุมได้อย่างอิสระที่จุดกำเนิด

สรุปข้อดีของการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสัมสัญญาณออกได้ดังต่อไปนี้

1. ให้ค่าช่วงปิดได้เช่นเดียวกับการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีอื่น
2. สามารถเลือกเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะของตัวควบคุมได้อย่างอิสระ
3. สามารถใช้ได้กับระบบทั่วไป
4. ขั้นตอนการออกแบบง่าย
5. สัญญาณควบคุมที่ได้ไม่เปลี่ยนแปลงโดยทันทีทันใด



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพิเชษฐ์ บุญหนุน เกิดเมื่อวันที่ 16 เมษายน พ.ศ. 2520 อำเภอวารินชำราบ จังหวัดอุบลราชธานี เป็นบุตรของนายวีระศักดิ์ และนางสมปอง บุญหนุน สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2541 และศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม เมื่อ พ.ศ. 2542



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย