

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง



ในการทำวิจัยเรื่อง การศึกษาความสามารถและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 7 ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าทำเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะนำเสนอรายละเอียดเป็นลำดับ ดังต่อไปนี้

1. การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1.3 ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1.4 ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1.5 การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2. กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.2 ประเภทของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.3 ความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.4 การนำกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.5 ร่องรอยกระบวนการคิดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

3. งานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

3.1 งานวิจัยในประเทศ

3.2 งานวิจัยต่างประเทศ

การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1. ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและนักวิชาการที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาคณิตศาสตร์ ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

เคนเนต บี แฮนเดอร์สัน (Kenneth B. Handerson, 1973:228) กล่าวว่า "โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณหรือจำนวนที่ต้องการคำตอบ ซึ่งผู้แก้ปัญหามักจะแก้โจทย์ปัญหาได้นั้น ต้องใช้วิธีการที่เหมาะสมกับสภาพของโจทย์ปัญหา รวมทั้งต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ ประกอบกับการตัดสินใจของผู้แก้ปัญหานั้น"

แซม อัดมส์ (Sam Adams, 1977:176) ได้กล่าวถึง ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า "โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง ปัญหาที่มีลักษณะเป็นโจทย์ภาษา โจทย์เรื่องราว หรือ โจทย์เชิงสนทนา นอกลักษณะของปัญหาด้วยข้อความ หรือข้อความประกอบกับปริมาณหรือจำนวน"

เฟร็ดริค เอช เบลล์ (Frederick H. Bell, 1978:309-310) ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นปัญหา การหาคำตอบของปัญหาจะประสบความสำเร็จหรือไม่ ขึ้นอยู่กับวิธีการที่ผู้แก้ปัญหาคิดเป็นผู้ที่สนใจในการหาคำตอบ ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น

ดักลาส อี คูอิคแซงค์ และ ลินดา เจ เชฟฟิลด์ (Douglas E. Cruikshank and Linda J. Sheffield, 1992:37) ได้กล่าวถึงโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามหรือสถานการณ์ที่มีเนื้อหาสาระเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ โดยที่บางปัญหาเป็นปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนและตัวเลข และสามารถหาคำตอบได้โดยใช้การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์

สุวร กาญจนมยุร (2532:9) ได้กล่าวว่า "โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง โจทย์ปัญหาที่อยู่ในลักษณะของข้อความที่เขียนเป็นตัวหนังสือ หรืออยู่ในลักษณะของคำถามที่ให้นักเรียนหาคำตอบ"

บริธา เนาร์เย็นผล (2537:7) ได้กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวนหรือคำอธิบายให้เหตุผล การหาคำตอบนั้นต้องใช้ความรู้ ทักษะ และประสบการณ์หลายๆอย่าง ประมวลเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบได้

ยูจิน พิพิชกุล (2542:5) ได้กล่าวไว้ว่า “โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง โจทย์ปัญหาที่มีลักษณะให้ค้นหาความจริง ข้อสรุป หรือพิสูจน์ โดยอาศัยเหตุผล และโจทย์ปัญหาที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้ในการหาคำตอบโดยใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหา

จากข้อความที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ใด ๆ ที่เป็นปัญหา ซึ่งบรรยายลักษณะของปัญหาด้วยข้อความ หรือข้อความประกอบกับจำนวน การหาคำตอบของปัญหานั้น ผู้แก้ปัญหาคงต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ของผู้แก้ปัญหา และวิธีการที่เหมาะสมเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของโจทย์ปัญหา

2. ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

การแบ่งประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์และผู้ที่เกี่ยวข้องควรให้ความสนใจ และศึกษาหาความรู้เกี่ยวกับประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

จอร์จ โพลยา (Gorge Polya, 1973:154-156) ได้กล่าวถึงประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า เมื่อแบ่งประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ตามจุดประสงค์ของปัญหาสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาให้ค้นหา (problem to find) เป็นปัญหาที่มีจุดประสงค์ เพื่อให้ค้นหาคำตอบที่ต้องการ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวน เป็นปัญหาให้หาวิธีการ หรือหาเหตุผลก็ได้ ลักษณะของปัญหาจะประกอบไปด้วย 3 ส่วน คือ สิ่งที่ต้องการให้หา สิ่งที่กำหนดให้ และเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ การแยกส่วนประกอบของปัญหาออกเป็น 3 ส่วน จะช่วยให้ผู้แก้ปัญหามีความเข้าใจโจทย์ปัญหาได้ดีขึ้น ทำให้สามารถกำหนดแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้

2. ปัญหาให้พิสูจน์ (problem to prove) ลักษณะของปัญหาประเภทนี้ มีจุดประสงค์เพื่อให้เห็นการให้เหตุผลว่า ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง หรือ เป็นเท็จ ส่วนประกอบของปัญหาประเภทนี้ จะประกอบไปด้วย 2 ส่วน คือ สิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือสมมติฐาน และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์หรือผลสรุป การแยกส่วนประกอบของปัญหาออกเป็นส่วนๆ ทำให้ผู้แก้ปัญหามีความเข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น และสามารถกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาคือการพิสูจน์ได้รวดเร็วขึ้น

อาร์เทอ เจ บาร์ดูดี (Arthur J. Baroody, 1987:260-261) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ตาม ลักษณะโครงสร้างของปัญหาออกเป็น 2 ประเภท สรุปได้ ดังนี้ คือ

1. ปัญหาธรรมดา (routine problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาที่มีความคุ้นเคยในลักษณะ ของโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหา โจทย์ปัญหาจะบอกข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหาครบถ้วน ทำให้สามารถ หาวิธีการแก้ปัญหได้ง่าย โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ลักษณะนี้ จะพบอยู่ในหนังสือเรียนทั่วไป

2. ปัญหาที่ไม่ธรรมดา (nonroutine problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาต้องใช้ความรู้และ ความสามารถหลายอย่างด้วยกัน ในการหาคำตอบของปัญหา ลักษณะของปัญหาจะสอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงมากกว่าปัญหาประเภทแรก ข้อมูลที่ปัญหากำหนดให้มีทั้งที่จำเป็นและไม่จำเป็น มีวิธีการในการหา คำตอบได้หลายวิธี และคำตอบของปัญหาอาจมีได้หลายคำตอบ

จากประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาแต่ละ ประเภทจะมีลักษณะที่แตกต่างกันออกไป ถ้าแบ่งประเภทตามจุดประสงค์ของโจทย์ปัญหา สามารถแบ่งได้ เป็น 2 ประเภท คือ โจทย์ปัญหาให้ค้นหา (problem to find) และโจทย์ปัญหาให้พิสูจน์ (problem to prove) ถ้าแบ่งตามลักษณะโครงสร้างของโจทย์ปัญหา สามารถแบ่งโจทย์ปัญหาได้เป็น 2 ประเภท คือ ปัญหาธรรมดา (routine problem) และปัญหาไม่ธรรมดา (nonroutine problem) ในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหานั้น ผู้แก้ปัญหาก็ต้องพิจารณาลักษณะและโครงสร้างของปัญหาให้ชัดเจน เพื่อจะได้หาวิธีการในการหาคำตอบได้ เหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ปัญหานั้นๆ

3. ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

การแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบนั้นจำเป็นต้องอาศัยลำดับขั้นตอนของการคิด การหาคำตอบของโจทย์ ปัญหาคณิตศาสตร์ก็เหมือนกับการแก้ปัญหานั้นๆ การจัดลำดับขั้นตอนในการหาคำตอบที่โจทย์ถามนั้นเป็น กระบวนการที่ทำให้ได้คำตอบที่โจทย์ต้องการ ดังนั้นจึงได้มีนักการศึกษาและนักวิชาการหลายท่านได้เสนอแนะ ขั้นตอนหรือกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

จอร์จ โพลยา (George Polya, 1957:221) ได้กล่าวถึงขั้นตอนหรือกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน ซึ่งสามารถสรุปได้ ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่พิจารณาสถานการณ์ที่โจทย์ต้องการให้หา สิ่งที่โจทย์กำหนด มาให้ และข้อมูลต่างๆที่จำเป็นต้องใช้ในการหาคำตอบ จะทำให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจปัญหาได้อย่างชัดเจน

2. ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาต้องพิจารณาข้อมูลต่างๆที่โจทย์ กำหนดมาให้ แล้วใช้ความรู้ประกอบกับประสบการณ์ของผู้แก้ปัญหา ในการวางแผนเพื่อให้ได้วิธีการในการ หาคำตอบของปัญหา

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ลงมือกระทำตามแผนที่วางไว้ จนได้คำตอบของปัญหา

4. ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาขั้นตอนต่างๆที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาว่าครบถ้วน ถูกต้องทุกขั้นตอนหรือไม่ และคำตอบที่ได้นั้นถูกต้องหรือไม่

นอกจากนี้ จอร์น เอฟ เล บลานซ์ (John F. Le Blance, 1977:17-25) ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ มี 4 ขั้นตอน ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจปัญหาได้อย่างชัดเจน จะทำให้รู้ถึงสิ่งที่โจทย์ถาม ข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆที่โจทย์กำหนดมาให้
2. ขั้นเลือกวิธีการที่จะใช้ในการหาคำตอบ เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาตัดสินใจเลือกกลวิธี หรือวิธีการใดวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาคำตอบของปัญหา
3. ขั้นลงมือแก้ปัญหา เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหานำวิธีการที่เลือกไว้ในขั้นที่ 2 มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา บางครั้งวิธีการที่เลือกใช้ในการหาคำตอบนั้น อาจเป็นวิธีการที่ทำให้ไม่ได้คำตอบ ผู้แก้ปัญหาต้องย้อนกลับไปสู่ขั้นตอนการแก้ปัญหาขั้นที่ 2 อีกครั้งหนึ่ง
4. ขั้นทบทวนการแก้ปัญหาและคำตอบ เป็นการตรวจสอบขั้นตอนต่างๆที่ใช้ในการแก้ปัญหา ตลอดจนคำตอบที่ได้

สตีเฟน ครูลิก และโรเบิร์ต อี เรย์ (Stephen Krulik and Robert E. Reys, 1980: 280-281) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาไว้ ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่พิจารณาว่า ข้อมูลและเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมามีอะไรบ้าง สิ่งที่โจทย์บอกมานั้นเพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาหรือไม่ และสิ่งที่โจทย์ถามนั้นคืออะไร
2. วางแผนในการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่หาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์บอก กับสิ่งที่โจทย์ถาม ค้นหาคำศัพท์ กฎ สูตร บทนิยาม เพื่อนำมาใช้วางแผนในการแก้ปัญหา
3. ดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ดำเนินการตามแผนที่วางไว้
4. ตรวจสอบ เป็นขั้นที่ตรวจสอบการดำเนินการแก้ปัญหาทั้งหมด และได้ผลเป็นไปตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่

จากขั้นตอนหรือกระบวนการแก้ปัญหาทั้งหมดที่กล่าวมานั้น จะเห็นได้ว่ามีขั้นตอนและแต่ละขั้นตอนก็มีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน จึงสรุปขั้นตอนหรือกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ 4 ขั้นตอนด้วยกัน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาลักษณะที่โจทย์กำหนดมาให้ และสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา ตลอดจนเงื่อนไขต่างๆที่โจทย์กำหนด ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ มากากกลวิธีใช้ในการวางแผนเพื่อเลือกวิธีการในการหาคำตอบของปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นการดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้ ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาลงมือตรวจสอบขั้นตอนต่างๆในการแก้โจทย์ปัญหา และคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่

4. ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

การศึกษาปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น เป็นสิ่งสำคัญเพราะจะทำให้ทักษะหรือความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น เป็นไปตามความคาดหวังและจุดประสงค์ในการเรียนการสอน จึงได้มีนักการศึกษาได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนี้

แซม อัดัม เลสลีย์ ซี เอลลิส และ บี เอฟ บีสัน (Sam Adam, Leslie C. Ellis and B F. Beson, 1977:174-175) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนไว้ 3 ด้าน คือ

1. สติปัญญา (intelligence) การแก้ปัญหามักจำเป็นต้องใช้ทักษะการคิดระดับสูง สติปัญญาจึงเป็นสิ่งที่สำคัญยิ่งประการหนึ่งในการแก้โจทย์ปัญหา องค์ประกอบทางด้านสติปัญญาที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา ประกอบไปด้วย 2 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบทางปริมาณ (quantitative factors) และองค์ประกอบทางด้านภาษา (verbal factors) ซึ่งนักเรียนอาจมีความสามารถทางด้านสติปัญญาไม่ครบทั้ง 2 องค์ประกอบ

2. การอ่าน (reading) การอ่านเป็นทักษะพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการแก้โจทย์ปัญหา เพราะการแก้โจทย์ปัญหาต้องอาศัยการอ่านอย่างวิเคราะห์ ซึ่งช่วยในการตัดสินใจว่าควรทำอะไร และทำอย่างไร

3. ทักษะพื้นฐาน (basic skills) หลังจากทบทวนทฤษฎีบทแล้วนั้น ในขั้นการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหานั้น ต้องอาศัยทักษะการคิดคำนวณ ซึ่งนักเรียนต้องมีทักษะพื้นฐานเกี่ยวกับการคำนวณเรื่องการบวก ลบ คูณ และ ทหาร ซึ่งสามารถช่วยในการหาคำตอบได้

บายเซ บี ฮัดกินส์ (Bryce B. Hudgins, 1977:248) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ความเข้าใจในธรรมชาติของปัญหา นักเรียนที่แก้โจทย์ปัญหาไม่ได้ มักไม่เข้าใจว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง และมักเชื่อมั่นกับเหตุผลและวิธีคิดของตนเองมากเกินไป ในทางตรงกันข้ามผู้แก้ปัญหาที่ดีจะเป็นผู้ที่เข้าใจว่าโจทย์ต้องการให้ทำอะไร และโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง รวมทั้งไม่ยึดมั่นหรือเชื่อมั่นกับความคิดของตัวเอง ให้ถือเอาสาระสำคัญและข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ เป็นปัจจัยพื้นฐานในการหาแนวทางหรือวิธีการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2. ความเข้าใจในกระบวนการคิดที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา ผู้แก้ปัญหาที่ดีมักมีความคิดที่ลึกซึ้ง รู้จักการคิดวิเคราะห์

3. วิธีการที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา ผู้แก้ปัญหาที่ดีจะมีวิธีการแก้โจทย์ปัญหา ดังนี้

3.1 มีการขยายความคิดในการแก้โจทย์ปัญหา โดยมีการคิดที่รอบคอบ ใช้ความพยายามสูงเพื่อความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหา

3.2 มีการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาอย่างเป็นระบบ รู้จักแบ่งโจทย์ปัญหาออกเป็น ตอนๆ และใช้ความรู้แก้โจทย์ปัญหาทีละตอน จนได้คำตอบของโจทย์ปัญหา

3.3 มีการใช้เหตุผลในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งช่วยให้เกิดความเข้าใจและสามารถ แก้โจทย์ปัญหาได้

4. ทักษะคิดในการแก้โจทย์ปัญหา ผู้แก้ปัญหาคิดมีทัศนคติหรือความรู้สึกทางบวกต่อ การแก้โจทย์ปัญหา และประสบความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537:81-82) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวนักเรียนโดยตรง สรุปได้ดังนี้

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา สิ่งส่งผลโดยตรงต่อความสามารถ ด้านนี้ คือ ทักษะการอ่านและการฟัง เนื่องจากโจทย์ปัญหาจะอยู่ในรูปของข้อความที่เป็นตัวอักษร ซึ่งนักเรียน ต้องอ่านและทำความเข้าใจ เพื่อพิจารณาสิ่งที่โจทย์ถามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ตลอดจนข้อมูลที่เป็นในการแก้โจทย์ปัญหา สิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งที่ช่วยให้การทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ คือ ควรรู้จักเลือกใช้กลวิธีมาช่วยในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา เช่น การขีดเส้นใต้ข้อความสำคัญ การแบ่งวรรคตอน การจดบันทึกเพื่อแยกแยะประเด็นสำคัญ การเขียนภาพหรือแผนภูมิ และการสร้างแบบจำลอง การยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับโจทย์ปัญหา และการเขียนปัญหาใหม่ด้วยคำพูดของตัวเอง

2. ทักษะในการแก้โจทย์ปัญหา การที่นักเรียนได้ฝึกแก้โจทย์ปัญหาอยู่เสมอ นักเรียนจะมี โอกาสได้พบโจทย์ปัญหาหลายรูปแบบ และมีประสบการณ์ในการแก้โจทย์ปัญหา ทำให้สามารถวางแผนเพื่อ กำหนดวิธีการในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

3. ความสามารถในการคิดคำนวณและการใช้เหตุผล ทักษะการคิดคำนวณและการใช้ เหตุผลมักใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเสมอ นักเรียนต้องได้รับการฝึกทักษะพื้นฐานด้านการคิดคำนวณ ซึ่งได้แก่ การบวก ลบ คูณ และหาร จนเกิดความชำนาญ สำหรับการให้เหตุผลนั้นนักเรียนต้องศึกษากระบวนการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์ให้เข้าใจ เพื่อนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

4. แรงจูงใจ โจทย์ปัญหาบางข้ออาจอยู่ในระดับยาก ต้องใช้การคิดวิเคราะห์และใช้พลังใน การคิด นักเรียนต้องมีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งสิ่งต่างๆเหล่านี้ต้องใช้ระยะเวลาในการ ปลูกฝังให้เกิดขึ้นกับนักเรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม

5. ความยืดหยุ่น ผู้แก้ปัญหาคิดดีต้องมีความยืดหยุ่นในการคิด ไม่ยึดติดในรูปแบบที่ตัวเอง ค้นเคย เปิดโอกาสให้ตัวเองได้เรียนรู้ ยอมรับ รูปแบบการคิดและวิธีการใหม่ๆอยู่เสมอ

จากข้อความข้างต้นที่นักการศึกษาได้กล่าวถึงปัจจัยต่างๆ ที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถสรุปได้คือ สติปัญญาของนักเรียนหรือผู้แก้โจทย์ปัญหาต้องมีความพร้อมทั้ง ความสามารถด้านปริมาณ และความสามารถด้านภาษา การทำความเข้าใจในโจทย์ปัญหาต้องอาศัยทักษะ การอ่าน เพื่อพิจารณาข้อมูลต่างๆที่โจทย์กำหนดมาให้ ตลอดจนวิธีการหรือกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

ต้องเหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ปัญหา มีทักษะในการคิดคำนวณและการใช้เหตุผล การคิดวิเคราะห์ และ
 แรงจูงใจไม่ล้มเหลวในการแก้โจทย์ปัญหา ผู้แก้ปัญหานั้นต้องมีความยืดหยุ่นในการคิด ไม่ยึดติดกับ
 รูปแบบที่ตัวเองคุ้นเคย แต่จะยอมรับรูปแบบและวิธีการใหม่ๆเสมอ สิ่งเหล่านี้ล้วนเป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อ
 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสิ้น

5. การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของผู้เรียน เป็นเป้าหมายอย่างหนึ่งของการเรียนวิชา
 คณิตศาสตร์ ดังนั้นนักการศึกษาได้เสนอวิธีการเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้
 ดังนี้

นารี จี บิทเทอร์ (Gary G. Bitter, 1989:43-44) ได้กล่าวถึงวิธีการพัฒนาความสามารถในการแก้
 โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ครูควรเลือกโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจให้นักเรียนฝึกทำ โดยมีความยากง่ายอยู่ในระดับที่
 เหมาะสมกับนักเรียน ไม่ยากเกินไปจนเกินความสามารถ หรือง่ายเกินไปจนไม่ท้าทายความคิด
2. ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ครูควรแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยๆ เพื่อให้นักเรียน
 ช่วยกันแสดงความคิดเห็นในการแก้โจทย์ปัญหา และเป็นภาระฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม
3. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักพิจารณาข้อมูลต่างๆที่โจทย์กำหนดมาให้ และสิ่งที่โจทย์ถาม
 ตลอดจนข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา เพื่อทำให้นักเรียนมีความเข้าใจโจทย์มากยิ่งขึ้น และ
 สามารถหาคำตอบที่โจทย์ถามได้
4. ครูควรฝึกให้นักเรียนได้แก้โจทย์ปัญหาหลายรูปแบบ เพื่อให้นักเรียนไม่รู้สึกเบื่อหน่าย
 กับโจทย์ปัญหาลักษณะเดิม
5. ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนให้นักเรียนได้มีการฝึกแก้ปัญหาลittleๆ จนนักเรียนมีความ
 รู้สึกว่าการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น เป็นส่วนหนึ่งของการเรียนการสอน
6. ในการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละข้อนั้น ครูควรฝึกให้นักเรียนได้ใช้วิธีการหาคำตอบหลายๆ
 วิธี เพื่อแสดงให้เห็นว่ายังมีวิธีอื่นอีก ที่สามารถแก้โจทย์ปัญหาข้อนั้นได้
7. ครูควรช่วยเหลือและให้คำแนะนำ ในการเลือกวิธีการที่เหมาะสมแก่ใช้ในการแก้โจทย์
 ปัญหาบางข้อที่ยาก และมีลักษณะเฉพาะ
8. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักสังเกตปัญหาที่มีลักษณะคล้ายๆกัน เพื่อนำวิธีการไปใช้แก้
 โจทย์ปัญหาครั้งต่อไป
9. ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น ครูควรให้เวลาที่เหมาะสม โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้
 อภิปรายผลและวิธีการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

10. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักการคาดเดาคำตอบที่โจทย์ถามอย่างมีเหตุผล เนื่องจากเป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการหาคำตอบ

นอกจากนี้ สิริพร ทิพย์คง (2537:68-69) ได้กล่าวถึงการพัฒนาทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน สรุปได้ดังนี้

1. ครูควรเลือกโจทย์ปัญหาที่ช่วยกระตุ้นความสนใจ และเป็นโจทย์ปัญหาที่นักเรียนมีประสบการณ์ในเรื่องเหล่านั้น มาใช้สอนนักเรียน
2. ครูควรทดสอบดูว่านักเรียนมีพื้นฐานความรู้เพียงพอที่จะนำมาแก้โจทย์ปัญหาหรือไม่ ถ้ามีไม่เพียงพอครูจะต้องทบทวนความรู้ให้กับนักเรียน
3. ครูควรให้อิสระแก่นักเรียนในการใช้ความคิดในการแก้โจทย์ปัญหา
4. ครูควรจัดแบบฝึกหัดที่มีทั้งข้อยาก ปานกลาง และง่าย เพื่อให้ นักเรียนทุกคนมีโอกาสได้รับความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งจะเป็นการเสริมสร้างกำลังใจให้กับผู้เรียน
5. ครูควรทดสอบดูว่านักเรียนเข้าใจปัญหาข้อนั้นๆหรือไม่ โดยให้นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์ถามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
6. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักการประมาณคำตอบก่อนที่จะคิดคำนวณ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง
7. ครูควรช่วยฝึกให้นักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนด โดยการแนะนำให้นักเรียนวาดภาพ หรือเขียนแผนผัง จะทำให้นักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหาได้มากขึ้น
8. ครูควรช่วยให้นักเรียนฝึกวิเคราะห์ปัญหา โดยให้นักเรียนนึกถึงวิธีการในการหาคำตอบ และลักษณะของโจทย์ปัญหาว่าคล้ายกับโจทย์ปัญหาที่พบหรือไม่ และลองให้นักเรียนแตกปัญหาออกเป็นปัญหาย่อยๆ เพื่อสะดวกและง่ายในการหาคำตอบ
9. ครูควรฝึกให้นักเรียนคิดหาวิธีการอื่นๆ เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหานั้นๆ รวมทั้งสนับสนุนให้นักเรียนตอบวิธีการที่นักเรียนคิด และทำในการแก้โจทย์ปัญหานั้นๆ ตลอดจนให้นักเรียนคิดทบทวนวิธีการคิดแก้ปัญหานั้นๆ
10. ครูให้นักเรียนฝึกแก้โจทย์ปัญหาเป็นกลุ่มย่อย หรือให้นักเรียนนำโจทย์ปัญหาตนเอง เพื่อปรึกษากันภายในกลุ่ม

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537:83-89) ได้กล่าวถึงการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยนำขั้นตอนของการแก้ปัญหามา 4 ขั้นตอน ของโพลยา มาเป็นแนวทางในการนำเสนอวิธีการพัฒนา ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. การพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา
 - 1.1 การพัฒนาทักษะการอ่าน โดยให้นักเรียนฝึกอ่าน และทำความเข้าใจข้อความในโจทย์ปัญหาก่อนที่จะมุ่งไปที่วิธีทำเพื่อหาคำตอบ ซึ่งอาจจะฝึกเป็นรายบุคคล หรือฝึกเป็นกลุ่มโดยให้

นักเรียนอภิปรายร่วมกันถึงสาระสำคัญของโจทย์ปัญหา ความเป็นไปได้ของคำตอบที่ต้องการ ความพอเพียง หรือความเกินพอของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

1.2 ควรใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเพื่อช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจ ซึ่งมีกลวิธีหลายกลวิธีที่ช่วยให้เข้าใจโจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น เช่น ใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภาพ และสร้างแบบจำลอง เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆ ที่โจทย์ปัญหากำหนดมาให้ ทำให้เห็นโจทย์ปัญหาเป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้น และช่วยให้เข้าใจโจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

1.3 ให้โจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกับปัญหาในชีวิตจริงมาให้นักเรียนฝึกหัดความเข้าใจ ปัญหาที่พบในชีวิตจริงนั้นมีปัจจัยที่เกี่ยวข้องมากมาย ผู้แก้ปัญหาก็ต้องรู้จักเลือกเฉพาะปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหามาพิจารณา

2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้โจทย์ปัญหา

2.1 ครูไม่ควรบอกวิธีการแก้โจทย์ปัญหากับนักเรียนโดยตรง แต่ควรใช้วิธีการกระตุ้นให้นักเรียนคิดด้วยตนเอง เช่น อาจใช้คำถามนำ โดยใช้ข้อมูลต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้ ถมแล้วเว้นระยะให้นักเรียนคิดหาคำตอบ

2.2 ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนคิดออกมาดังๆ อาจอยู่ในรูปการบอก หรือเขียนแบบแผนลำดับขั้นตอนการคิดออกมาให้ผู้อื่นรู้ ทำให้เกิดการอภิปรายเพื่อหาแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาที่เหมาะสม

2.3 ครูควรปลูกฝังลักษณะนิสัยของนักเรียนให้ฝึกคิดวางแผนก่อนลงมือทำเสมอ เพราะจะทำให้เห็นภาพรวมของการแก้โจทย์ปัญหา และสามารถประเมินความเป็นไปได้ในการแก้โจทย์ปัญหา ควรเน้นว่าวิธีการแก้โจทย์ปัญหานั้นสำคัญกว่าคำตอบที่ได้ เพราะวิธีการสามารถนำไปใช้ได้กว้างขวางกว่า

2.4 ครูควรจัดหาโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจ และท้าทายความสามารถ มาให้นักเรียนฝึกคิดบ่อยๆ

2.5 ในการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละปัญหานั้น ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา มากกว่า 1 กลวิธี เพื่อให้นักเรียนมีความยืดหยุ่นในการคิด ไม่ติดอยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งโดยเฉพาะ

3. การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน

ในขั้นลงมือปฏิบัติตามแผนมักจะมีปัญหาอยู่ที่การคิดคำนวณ ครูควรช่วยพัฒนาทักษะการคิดคำนวณให้กับผู้เรียน เพราะเป็นสิ่งที่ช่วยให้นักเรียนหาคำตอบตามแผนที่วางไว้ได้

4. การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบ

4.1 ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ให้ เคยชินจนเป็นนิสัย นักเรียนไม่ควรพึงพอใจอยู่เพียงคำตอบที่ได้ แต่จะต้องฝึกตรวจสอบความถูกต้องทั้งในส่วนที่เป็นกระบวนการและคำตอบที่ได้

4.2 ครูควรฝึกให้นักเรียนคาดคะเนคำตอบสำหรับโจทย์ปัญหาที่มีการคิดคำนวณ หลังจากวางแผนแล้ว ก่อนลงมือคิดคำนวณ ควรฝึกให้นักเรียนกะประมาณ คาดคะเนคำตอบก่อน จากนั้นจึงลงมือคิดคำนวณ แล้วเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับคำตอบที่คาดคะเนไว้

4.3 ครูควรฝึกการแปลความหมายของคำตอบ เมื่อได้คำตอบของปัญหาแล้ว การตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเพียงอย่างเดียวมันไม่เพียงพอ ครูต้องกระตุ้นให้นักเรียนรู้จักแปลความหมายของคำตอบ ว่าสอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ถามหรือไม่

4.4 ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนฝึกแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้วิธีการหาคำตอบได้มากกว่า 1 วิธี เพื่อเป็นการตรวจสอบคำตอบของโจทย์ปัญหา ว่าถึงแม้ใช้วิธีการที่ต่างกันคำตอบที่ได้ยังเป็นคำตอบเดียวกัน

4.5 ครูควรให้นักเรียนฝึกสร้างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียน จะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในโครงสร้างของปัญหา ซึ่งช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเป็นนักแก้ปัญหาที่มีความสามารถ

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นจะเห็นได้ว่าการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนนั้นสามารถทำได้หลายแนวทาง ซึ่งสรุปได้ คือ โจทย์ปัญหาที่นำมาให้นักเรียนฝึกทำนั้นต้องเป็นโจทย์ที่น่าสนใจ มีหลายรูปแบบ มีทั้งระดับความยากมาก ปานกลาง และง่าย เพื่อให้นักเรียนทุกคนมีโอกาสได้รับความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหา การฝึกให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหานั้นสามารถทำเป็นกลุ่มได้และควรควรให้เวลาที่เหมาะสม เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกันและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้หลายวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้นสามารถทำได้อีกแนวทางหนึ่งคือ การพัฒนาตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยา 4 ขั้นตอน คือ การทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา โดยการฝึกทักษะการอ่านและใช้กลวิธีต่างๆช่วยในการทำความเข้าใจ ช้วางแผนในการแก้โจทย์ปัญหา ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนฝึกวางแผนก่อนลงมือแก้โจทย์ปัญหาเสมอ และส่งเสริมให้นักเรียนใช้กลวิธีต่างๆมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ขั้นตอนการตามแผน ครูควรฝึกทักษะการคิดคำนวณให้กับนักเรียนเพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ตามแผนที่วางไว้ ขั้นตอนตรวจสอบ ครูควรฝึกให้นักเรียนได้ตรวจสอบคำตอบที่ทำได้ และกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาเสมอ สิ่งต่างๆเหล่านี้จะช่วยส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ให้เป็นไปในแนวทางที่เหมาะสมอยู่ในระดับที่น่าพอใจ และบรรลุจุดประสงค์ของการเรียนการสอน

กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1. ความหมายของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาได้ให้ความหมายของ กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ต่างๆ ดังนี้

วิลเลียม เอฟ บูเกอร์ และ แกรี แอล มัสเซอร์ (William F. Burger and Gary L. Musser, 1988:17) ได้กล่าวถึงกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า "กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง เครื่องมือที่มีประโยชน์อย่างยิ่ง ในการช่วยวางแผนและทวิวิธีการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์"

เจมส์ ดับเบิลยู เฮดเดนส์ และ วิลเลียม อาร์ สเตียร์ (James W. Heddens and William R. Steer, 1992:35) ได้กล่าวถึงกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้สรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง เทคนิคหรือวิธีการที่นักเรียนหรือผู้แก้โจทย์ปัญหา นำมาใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และเป็นสิ่งๆที่ช่วยในการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วย

แมรี เอ็ม ฮัทฟิลด์ (Mary M. Hatfield, 1993:56) ได้กล่าวว่า "กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการที่เหมาะสมในการช่วยหาคำตอบของโจทย์ปัญหาแต่ละปัญหา"

ลีโอนาร์ด เอ็ม เคนเนดี และ สตีฟ ทิปส์ (Leonard M. Kennedy and Steve Tipps, 1994:135) กล่าวไว้สรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการเฉพาะที่เหมาะสมกับสภาพของปัญหาแต่ละปัญหา ซึ่งใช้ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม

โรเบิร์ต อี เรย์ มาร์วีน เอ็น ซายดาม และ แมรี เอ็ม ลินด์ควิสต์ (Robert E. Reys, Marilyn N. Suydam and Mary M. Lindquist, 1996:60) ได้กล่าวไว้สรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง เครื่องมือสำหรับช่วยนักเรียนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ให้บรรลุเป้าหมายจนได้คำตอบที่โจทย์ต้องการ

บริซซา เนร์เย็นมัล (2537:14) กล่าวไว้สรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง เทคนิค วิธีการเฉพาะอย่างที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหาแต่ละปัญหา เป็นเครื่องมือช่วยในการแก้ปัญหา โดยที่ผู้แก้ปัญหาสามารถนำไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับสภาพของปัญหาได้

จากความหมายที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการเฉพาะที่เหมาะสมกับสภาพปัญหาแต่ละปัญหา ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ช่วยชี้แนะ นำทางในการแก้โจทย์ปัญหา โดยที่ผู้แก้ปัญหาต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ปัญหา

2. ประเภทของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น เป็นเครื่องมือสำคัญอย่างหนึ่ง ที่ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จึงได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้ศึกษาและนำเสนอกลวิธีที่นำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้มากมาย ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

วิลเลียม เอฟ บุเกอร์ และ แกรี แอล มัสเซอร์ (William F. Burger and Gary L. Musser, 1988:6) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ 21 กลวิธี ดังนี้

1. กลวิธีเดาและตรวจสอบ (guess and test) เป็นการเดาคำตอบของปัญหาที่พบ และตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่ ถ้าคำตอบที่ได้ยังไม่ถูกต้อง ให้เดาคำตอบใหม่จนได้คำตอบที่ถูกต้อง โดยอาศัยเหตุผลจากการเดาครั้งที่ผ่านมา
2. กลวิธีใช้ตัวแปร (use a variable) เป็นการกำหนดตัวแปรแทนตัวที่ไม่ทราบค่าหรือสิ่งที่ไม่รู้ค่า แล้วหาค่าของตัวแปรเพื่อให้ได้คำตอบที่โจทย์ถาม
3. กลวิธีค้นหารูปแบบ (look for a pattern) เป็นการหาคำตอบโดยสังเกตจากตัวอย่างที่โจทย์กำหนดมาให้ แล้วหารูปแบบจากตัวอย่างที่โจทย์กำหนดให้ นั้น เป็นแนวทางในการหาคำตอบ
4. กลวิธีสร้างรายการ (make a list) เป็นการหาคำตอบโดยการสร้างรายการที่เป็นไปได้ของคำตอบตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด
5. กลวิธีแก้ปัญหาย่อยกว่า (solve a simpler problem) เป็นการหาคำตอบโดยการสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ ซึ่งมีโครงสร้างของปัญหาที่คล้ายกับปัญหาเดิม แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้ปัญหาย่อยที่สร้างขึ้นใหม่ มาใช้เป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหาเดิม
6. กลวิธีวาดภาพ (draw a picture) เป็นการวาดภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ เพื่อเป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา
7. กลวิธีเขียนแผนภาพ (draw a diagram) เป็นการเขียนแสดงสาระสำคัญเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ เพื่อเป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหา ต่างจากกลวิธีวาดภาพตรงที่การเขียนแผนภาพจะไม่แสดงรายละเอียด จะบอกเพียงสาระสำคัญเท่านั้น
8. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง (use direct reasoning) เป็นการให้เหตุผลพิจารณาข้อมูลต่างๆที่โจทย์กำหนดมาให้ในการหาคำตอบ และมักเป็นกลวิธีที่ใช้ร่วมกับกลวิธีอื่นในการแก้โจทย์ปัญหา
9. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อม (use indirect reasoning) เป็นการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาโดยใช้การพิสูจน์เพื่อแสดงว่า คำตอบหนึ่งเป็นจริงแต่ไม่สามารถแสดงได้ ซึ่งจะเปลี่ยนการหาคำตอบเป็นการหาเหตุผลมาแสดงว่าคำตอบเดียวกันนั้น แต่มีทิศทางหรือเครื่องหมายตรงกันข้ามกันเป็นเท็จ แล้วจึงสรุปคำตอบที่โจทย์กำหนดให้พิสูจน์เป็นจริง
10. กลวิธีใช้สมบัติของจำนวน (use properties of number) เป็นการหาคำตอบโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของจำนวน มาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

11. กลวิธีแก้โจทย์ปัญหาที่เหมือนกัน (solve an equivalent) เป็นการหาคำตอบโดยการเปลี่ยนภาษาของโจทย์ปัญหาเป็นภาษาของผู้แก้ปัญหานั้น โดยที่ความหมายไม่เปลี่ยนไปจากเดิม เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจปัญหา

12. กลวิธีทำย้อนกลับ (work backward) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาโดยพิจารณาจากผลลัพธ์ หรือเหตุการณ์สุดท้ายที่โจทย์กำหนด แล้วทำย้อนกลับ เพื่อหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ

13. กลวิธีแบ่งเป็นกรณี (use case) เป็นการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาที่คำตอบ มีสาเหตุมาจากกรณีย่อยๆ หลายกรณี แล้วพิจารณาคำตอบจากทุกกรณีร่วมกันเป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการ

14. กลวิธีแก้ปัญหาคด้วยสมการ (use an equation) เป็นการหาคำตอบโดยการเขียนแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล ให้อยู่ในรูปของการเท่ากัน แล้วจึงหาคำตอบ

15. กลวิธีค้นหาสูตร (look for a formula) เป็นการหาคำตอบโดยการใช้สูตรที่สอดคล้องกับข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ ในการหาคำตอบ

16. กลวิธีสร้างสถานการณ์จำลอง (do a simulation) เป็นการหาคำตอบโดยการทดลอง แสดงสถานการณ์ตามที่โจทย์กำหนดมาให้ โดยใช้วัสดุที่มีลักษณะ รูปร่าง ที่คล้ายกับข้อมูลที่โจทย์กำหนด

17. กลวิธีใช้แบบจำลอง (use a model) เป็นการหาคำตอบโดยใช้แบบจำลองที่มีรูปร่างคล้ายกับที่โจทย์กำหนดมาให้ ประกอบในการแก้โจทย์ปัญหา

18. กลวิธีวิเคราะห์เกี่ยวกับขนาด (use dimensional analysis) เป็นการหาคำตอบโดยใช้การแปลงหน่วยการวัดระยะทาง อัตราเวลา หรือโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับมาตราการวัดต่างๆ ทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์เกี่ยวกับขนาด

19. กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง (identify subgoals) เป็นการหาคำตอบโดยการหาคำตอบจากส่วนย่อยมาก่อน แล้วจะทำให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหา

20. กลวิธีใช้หลายวิธีร่วมกัน (use coordinate) เป็นการหาคำตอบโดยใช้หลายกลวิธีร่วมกัน

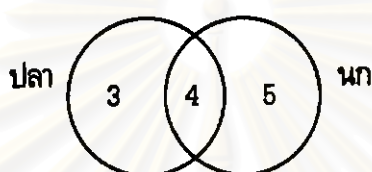
21. กลวิธีใช้การสมมาตร (use symmetry) เป็นการหาคำตอบโดยใช้คุณสมบัติของการเท่ากันของสิ่งของสองสิ่ง มาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

นอกจากนี้ ลีโอนาร์ด เอ็ม เคนเนดี และ สตีฟ ทิปส์ (Leonard M. Kennedy and Steve Tipps, 1994:139) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ 10 กลวิธี คือ

1. กลวิธีค้นหารูปแบบ (look for a patterns) เป็นกลวิธีที่นิยมใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์กลวิธีหนึ่ง ซึ่งจะหาคำตอบโดยการวิเคราะห์รูปแบบของตัวอย่างที่โจทย์กำหนดมาให้ เช่น มีจำนวนเรียงกันอยู่สามจำนวน คือ 0 2 4 6..... หรือ 5 10 15 20..... จากการพิจารณารูปแบบการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของจำนวนที่กำหนดมาให้ นั้น ก็สามารถหาจำนวนที่อยู่ถัดไปได้ เป็น 0 2 4 6 8 10 12 และ 5 10 15 20 25 30

2. กลวิธีใช้แบบจำลอง (use a model) เป็นการหาคำตอบโดยใช้อุปกรณ์ที่คล้ายกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แสดงสถานการณ์ตามที่โจทย์ปัญหากำหนด

3. กลวิธีใช้ภาพหรือแผนภาพ (use a drawing or diagram) เป็นการวาดภาพหรือแผนภาพ เพื่อแสดงสาระสำคัญของโจทย์ปัญหา แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งจะใช้เป็นแนวทางในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม เช่น จากโจทย์ปัญหา มีเด็กทั้งหมด 12 คน โดยที่ทุกคนชอบเลี้ยงสัตว์ มีเด็ก 4 คน ชอบเลี้ยงทั้งปลาและนก เด็ก 3 คน ชอบเลี้ยงปลาอย่างเดียว จะมีเด็กที่ชอบเลี้ยงนกอย่างเดียวกี่คน จากโจทย์ปัญหาแสดงว่ามีสัตว์เลี้ยง 2 ชนิด คือ ปลาและนก มีเด็กกลุ่มหนึ่งที่ชอบเลี้ยงทั้งปลาและนก สามารถเขียนแผนภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ดังนี้

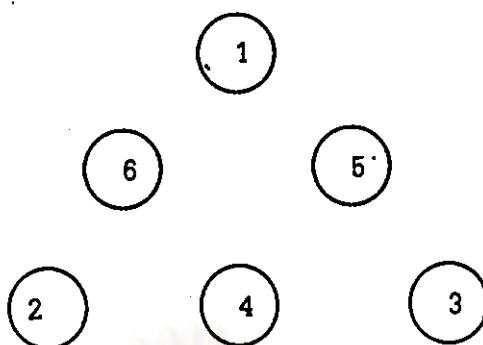


แล้วใช้แผนภาพที่เขียนขึ้นช่วยในการหาคำตอบ จากแผนภาพทำให้รู้ว่าเด็กที่ชอบเลี้ยงนกอย่างเดียวมี 5 คน

4. กลวิธีปฏิบัติเพื่อออกไปจากปัญหา (act it out) เป็นการสร้างสถานการณ์หรือเหตุการณ์ที่คล้ายกับสิ่งที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน เช่น จำลองร้านค้าขึ้นมา มีการซื้อขายสินค้า โดยมีทั้งคนซื้อและคนขาย หรือสถานการณ์การรับฝากเงินในธนาคาร ซึ่งจะให้นักเรียนได้แสดงบทบาทต่างๆในสถานการณ์ ที่จำลองขึ้น ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้การปฏิบัติจากบทบาทที่ตัวเองแสดง และสถานการณ์ที่สร้างขึ้น

5. กลวิธีสร้างตาราง และ/หรือสร้างกราฟ (construct a table and/or a graph) เป็นการรวบรวมข้อมูลที่กระจัดกระจาย ให้เป็นระบบทำให้มองเห็นข้อมูลที่ชัดเจน และช่วยให้เข้าใจสิ่งโจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น สามารถหาแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้

6. กลวิธีเดาและตรวจสอบ (guess and check) เป็นการหาคำตอบโดยใช้การเดา และตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการเดา ถ้ายังไม่ได้คำตอบก็จะเดาครั้งต่อไปโดยใช้เหตุผลจากการเดาในครั้งที่ผ่าน มา จนกว่าจะได้คำตอบ เช่น มีจำนวน 1 2 3 4 5 และ 6 ให้เติมจำนวนเหล่านี้ลงในวงกลม โดยไม่ให้ซ้ำกัน แล้วทำให้ผลบวกของจำนวนสามจำนวนที่อยู่ในแนววงกลมเดียวกันแต่ละด้านเท่ากับ 9 ซึ่งคำตอบหนึ่งที่สามารถเป็นไปได้คือ



ก่อนที่จะได้คำตอบนี้มา จะต้องมีการหาจำนวนเพิ่มเติมในวงกลมโดยการสุ่มเดาและตรวจสอบ ว่าเมื่อเติมจำนวนลงในวงกลมแล้วเป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้หรือไม่ และยังมีคำตอบอื่นอีกที่เป็นไปได้ โดยที่จำนวนที่โจทย์กำหนดมาให้ไม่ได้อยู่ในตำแหน่งเดียวกับตัวอย่างคำตอบนี้ การหาคำตอบนั้นอาจใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบช่วยในการหาคำตอบได้

7. กลวิธีชี้แจงรายการที่เป็นไปได้ทั้งหมด (account for all possibilities) เป็นการเขียนรายการทั้งหมดที่เกิดขึ้น ตามเงื่อนไขที่โจทย์ปัญหาที่กำหนด ซึ่งจะเป็นแนวทางในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม เช่น โจทย์กำหนดว่า น้องออมสินมีเงินในกระเป๋า 25 บาท ซึ่งเป็นเงินเหรียญทั้งหมด โอกาสที่เงินในกระเป๋าของน้องออมสินนั้น จะเป็นเหรียญสิบบาท เหรียญห้าบาท และเหรียญหนึ่งบาท ได้อย่างไรบ้าง

แนวทางในการหาคำตอบทางหนึ่งที่ทำได้ คือ การเขียนรายการที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเหตุการณ์ที่น่าจะเกิดขึ้น ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

จำนวนเงิน	ชนิดของเหรียญ		
	เหรียญสิบบาท	เหรียญห้าบาท	เหรียญหนึ่งบาท
25	2	1	0
25	1	2	0
25	0	5	0
25	0	0	25

โดยที่สามารถเขียนรายการที่จะเป็นไปได้ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด จนได้คำตอบ

8. กลวิธีทำปัญหาให้ง่ายหรือทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย (simplify or break into part) สำหรับโจทย์ปัญหาที่มีจำนวนตัวเลขหรือเงื่อนไขที่ซับซ้อน จะกำหนดตัวเลขให้มีความซับซ้อนน้อยลง แล้วดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา จะทำให้รู้ถึงวิธีการที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา แล้วนำวิธีการนี้ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาที่มีจำนวนตัวเลขหรือเงื่อนไขที่ซับซ้อนนั้น หรือการแบ่งโจทย์ปัญหาออกเป็นตอนๆ แล้วแก้ปัญหาค่ะตอนจนได้คำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ

9. กลวิธีทำย้อนกลับ (work backward) เป็นการหาคำตอบโดยการพิจารณาข้อมูลสุดท้ายที่โจทย์กำหนดให้ แล้วทำย้อนกลับอย่างเป็นขั้นตอนจนสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้

10. กลวิธีเปลี่ยนจุดมุ่งหมายของปัญหา (change your point of view) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาที่ละส่วนจนได้คำตอบ แทนการมุ่งไปที่สิ่งที่โจทย์ถามอย่างเดียว จะทำให้ไม่สามารถหาวิธีการหรือคำตอบได้ แต่ถ้าเปลี่ยนจุดมุ่งหมายไปหาคำตอบจากส่วนย่อยๆของโจทย์ปัญหาแทน จะเป็นวิธีหนึ่งที่ทำให้สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้

โรเบิร์ต อี เรย์ มาร์ลีน เอ็น ซายดาม และ แมรี เอ็ม ลินด์ควิสท (Robert E. Rays, Marilyn N. Suydam and Mary M. Lindquist, 1995:62-66) ได้กล่าวถึงกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 11 กลวิธี ดังนี้

1. กลวิธีปฏิบัติเพื่อออกไปจากปัญหา (Act it out) เป็นกลวิธีที่นักเรียนได้สัมผัสกับสถานการณ์ของโจทย์ปัญหา และนักเรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาจากสถานการณ์นั้น
2. กลวิธีใช้ภาพหรือแผนภาพ (Make a drawing or Diagram) เป็นการเขียนภาพหรือแผนภาพของข้อมูล ตามที่โจทย์กำหนดให้
3. กลวิธีค้นหารูปแบบ (Look for a Pattern) เป็นการหารูปแบบของจำนวนหรือรูปภาพที่โจทย์กำหนดให้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา
4. กลวิธีสร้างตาราง (Construct a Table) เป็นการจัดระเบียบของข้อมูลในรูปแบบของตาราง ช่วยให้ผู้แก้โจทย์ปัญหามองเห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้
5. กลวิธีนับทุกกรณีที่เป็นไปได้ (Account Systematically for All Possibilities) กลวิธีนี้มักใช้ร่วมกับกลวิธีสร้างตาราง และกลวิธีค้นหารูปแบบ ทำให้นักเรียนรู้ว่าคำตอบของโจทย์ปัญหาเป็นอะไรได้บ้าง
6. กลวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) เป็นการคาดเดาคำตอบและตรวจสอบคำตอบที่ได้ นักเรียนจะมั่นใจว่าคำตอบที่ได้จากการเดาถูกต้องหรือไม่นั้น จะต้องตรวจสอบคำตอบว่าเป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดหรือไม่
7. กลวิธีทำย้อนกลับ (Work Backward) เป็นการหาคำตอบโดยพิจารณาจากข้อมูลสุดท้ายที่โจทย์กำหนดมาให้ ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม
8. กลวิธีพิจารณาสิ่งที่โจทย์ถาม สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และข้อมูลที่จำเป็น (Identify Wanted, Given, and Needed Information) เป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆที่โจทย์กำหนดให้มาช่วยในการหาวิธีการเพื่อหาคำตอบที่โจทย์ถาม
9. กลวิธีเขียนประโยคเปิด (Write an Open Sentence) เป็นการฝึกหาคำถามสัมพันธ์ของข้อมูลในประโยคคำถาม ซึ่งมีลักษณะเหมือนคำทขย เพื่อใช้ในการหาคำตอบ อาจต้องฝึกบ่อยๆเพื่อให้เกิดประโยชน์กับนักเรียน เช่น สองในสามของจำนวน จำนวนหนึ่งเท่ากับ 24 และครึ่งหนึ่งของจำนวนนั้นคือ 18 จำนวนนั้นคือจำนวนอะไร

10. กลวิธีแก้ปัญหที่ง่ายกว่าหรือปัญหาที่คล้ายกัน (Solve a Simpler or Similar Problem) เป็นการกำหนดปัญหาขึ้นมาใหม่ที่มีลักษณะที่ง่ายกว่า หรือคล้ายกัน โดยมีโครงสร้างของปัญหาเหมือนเดิม แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหาที่ง่ายกว่าหรือคล้ายกัน ไปแก้โจทย์ปัญหาเดิม

11. กลวิธีเปลี่ยนจุดมุ่งหมายของปัญหา (Change Your Point of View) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาทีละตอน ทำให้ได้คำตอบที่โจทย์ปัญหาถาม

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537:23-79) ได้เสนอแนะกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาที่เหมาะสมกับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น และชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ไว้ 10 กลวิธี ซึ่งสรุปได้ดังนี้ คือ

1. กลวิธีเดาและตรวจสอบ หมายถึง การหาคำตอบโดยการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้คาดเดาคำตอบของโจทย์ปัญหา ถ้าไม่ถูกต้องก็คาดเดาคำตอบใหม่โดยอาศัยเหตุผลจากการเดาครั้งที่ผ่านมา

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่สามารถใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น สนามหญ้าหน้าโรงเรียนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีด้านยาว ยาวกว่าด้านกว้างอยู่ 2 เมตร ถ้าสนามหญ้ามี่พื้นที่ 360 ตารางเมตร จงหาด้านกว้าง และด้านยาวของสนามหญ้า

เดาครั้งที่ 1 ถ้าสนามหญ้าง่าย 15 เมตร ยาว $15+2 = 17$ เมตร

พื้นที่ของสนามหญ้าเป็น $15 \times 17 = 255$ ตารางเมตร (น้อยเกินไป ต้องเดาใหม่)

เดาครั้งที่ 2 ถ้าสนามหญ้าง่าย 16 เมตร ยาว $16+2 = 18$ เมตร

พื้นที่ของสนามหญ้าเป็น $16 \times 18 = 288$ ตารางเมตร (น้อยเกินไป ต้องเดาใหม่)

เดาครั้งที่ 3 ถ้าสนามหญ้าง่าย 18 เมตร ยาว $18+2 = 20$ เมตร

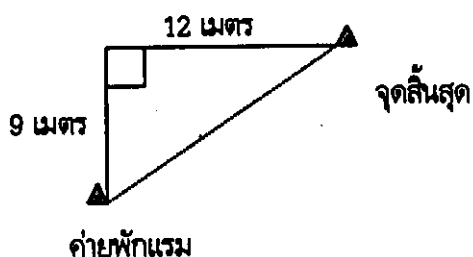
พื้นที่ของสนามหญ้าเป็น $18 \times 20 = 360$ ตารางเมตร (ได้พื้นที่ตามที่โจทย์กำหนดพอดี)

กลวิธีเดาและตรวจสอบ เป็นกลวิธีพื้นฐาน ที่ผู้แก้ปัญหามักใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาอยู่เสมอ การเดานั้นต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทางเพื่อให้สิ่งที่เดานั้นเข้าใกล้คำตอบมากยิ่งขึ้น

2. กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง หมายถึง การเขียนภาพ แผนภาพ หรือสร้างแบบจำลอง แสดงสาระสำคัญของปัญหา ช่วยให้ผู้แก้ปัญหามองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ และเข้าใจโจทย์ปัญหาคิ่งขึ้น ทำให้เห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่ใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภาพ และสร้างแบบจำลองช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น ลูกเสือเดินทางไกลจากค่ายพักแรมไปทางทิศเหนือ 9 กิโลเมตร แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันออกอีก 12 กิโลเมตร จึงสิ้นสุดการเดินทางไกล จะวัดระยะทางเป็นเส้นตรงจากค่ายพักแรมถึงจุดสิ้นสุดการเดินทางได้ระยะทางกี่กิโลเมตร

สามารถเขียนภาพแสดงสาระสำคัญของข้อมูลที่โจทย์กำหนดได้ดังนี้



จากภาพทำให้เห็นแนวทางในการหาวิธีการหาระยะทางจากค่ายพักแรม ถึงจุดสิ้นสุดการเดินทางไกลของลูกเสือ ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส การเขียนภาพแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนดนั้น จะทำให้เห็นภาพและเข้าใจโจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น ซึ่งทำให้เห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา

3. กลวิธีสร้างตาราง หมายถึง การแจกแจงกรณีต่างๆที่เป็นไปได้ตามสถานการณ์ที่โจทย์ปัญหากำหนด โดยนำมาจัดระเบียบของข้อมูลในรูปแบบของตาราง ทำให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลอย่างชัดเจน ซึ่งนำไปสู่การหาคำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่ใช้กลวิธีสร้างตารางช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น นมให้น้องมดไปซื้อมะนาว 18 ผล แม่ค้าบอกว่า มะนาว 6 ผล ราคา 11 บาท น้องมดต้องจ่ายเงินค่ามะนาวเท่าไร

สามารถสร้างตารางเพื่อจัดข้อมูลให้อยู่ในรูปของตารางได้ดังนี้

มะนาว (ผล)	เงิน (บาท)
6	11
12	22
18	33*

จากข้อมูลในตารางที่สร้างขึ้น สามารถช่วยในการหาจำนวนเงินที่ต้องจ่ายค่ามะนาวได้

4. กลวิธีใช้ตัวแปร หมายถึง การกำหนดตัวแปรแทนตัวที่ไม่ทราบค่า โดยเขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลตามที่โจทย์กำหนด แล้วหาค่าของตัวแปรจากความสัมพันธ์นั้น

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีใช้ตัวแปรช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น สองเท่าของจำนวน จำนวนหนึ่ง บวกกับ 5 เท่ากับ 17 จงหาจำนวน จำนวนนั้น

สามารถใช้กลวิธีใช้ตัวแปรช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ดังนี้

กำหนดให้จำนวนนั้นเท่ากับ A

เขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลได้เป็น $2A + 5 = 17$ แล้วแก้สมการหาค่าของ A จะเป็นคำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ

5. กลวิธีค้นหารูปแบบ หมายถึง การหาคำตอบโดยศึกษาจากตัวอย่างของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ โดยตรวจสอบความถูกต้องของรูปแบบก่อนนำไปใช้

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีค้นหาแบบช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น "ถ้ามีจำนวนสี่จำนวนเรียงกันคือ 1, 3, 6, 10,.....จงหาจำนวนที่อยู่ถัดไปอีกสามจำนวน"

จากจำนวนที่เรียงกันสี่จำนวน 1 3 6 10

ผลต่างของ 1 กับ 3 คือ 2

ผลต่างของ 3 กับ 6 คือ 3

ผลต่างของ 6 กับ 10 คือ 4

ดังนั้นผลต่างของคู่ถัดไปควรจะเป็น 5, 6 และ 7 ตามลำดับ

จำนวนที่เรียงกันตามโจทย์ต้องการคือ 1 3 6 10 15 21 28

6. กลวิธีแบ่งเป็นกรณี หมายถึง การหาคำตอบของโจทย์ปัญหา ที่สามารถแบ่งเป็นกรณีได้มากกว่า 1 กรณี แล้วแก้โจทย์ปัญหา หาคำตอบทีละกรณี แล้วพิจารณาคำตอบจากทุกกรณีร่วมกัน จะได้คำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่ใช้กลวิธีแบ่งเป็นกรณีช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น "น้องใหม่ได้รับเงินค่าใช้จ่ายประจำสัปดาห์ โดยได้รับเงินจากพ่อเท่ากับจำนวนเงินที่ได้จากแม่ เมื่อสิ้นสัปดาห์รวมค่าใช้จ่ายทั้งหมด 41 บาท เมื่อนับเงินแล้วเหลือเงินไม่ถึง 5 บาท จงหาว่าน้องใหม่ได้รับเงินจากพ่อเป็นจำนวนเงินตั้งแต่กี่บาทถึงกี่บาท"

จากโจทย์ปัญหา ถ้ากำหนดให้น้องใหม่ได้รับเงินจากพ่อ B บาท ดังนั้นจะได้รับเงินจากแม่ B บาทเช่นเดียวกัน น้องใหม่จะมีเงินทั้งหมด $B + B = 2B$ บาท และเมื่อพิจารณาข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนดแล้ว สามารถแบ่งการหาคำตอบได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 จำนวนเงินที่น้องใหม่ได้จากพ่อและแม่รวมกัน ต้องมากกว่าค่าใช้จ่ายทั้งหมด เพราะยังมีเงินเหลืออยู่หลังจากใช้จ่ายแล้ว สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น $2B > 41$

กรณีที่ 2 เมื่อน้องใหม่จ่ายค่าใช้จ่ายทั้งหมดแล้วเหลือเงินไม่ถึง 5 บาท สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น $2B - 41 < 5$

แล้วหาคำตอบจากทั้งกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 นำคำตอบที่ได้จากทั้ง 2 กรณี มาพิจารณาร่วมกัน เป็นคำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ

7. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง หมายถึง การหาคำตอบโดยใช้ข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆที่โจทย์กำหนดมาให้เป็นเหตุผลในการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ การใช้การให้เหตุผลทางตรงมักพบอยู่ตลอดเวลา และมักใช้ร่วมกับกลวิธีอื่นๆในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาที่ใช้กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เช่น มีเหรียญที่มีรูปลักษณะภายนอกเหมือนกันอยู่ 9 เหรียญ ในจำนวนนี้มีเหรียญอยู่ 8 เหรียญ ที่มีน้ำหนักเท่ากัน ส่วนอีกเหรียญหนึ่งเป็นเหรียญปลอม มีน้ำหนักมากกว่าเหรียญอื่นอยู่เล็กน้อย ถ้าใช้ตราชั่งสองแขน ซึ่งใช้หลักการสมดุลซึ่งตรวจหาเหรียญปลอม จงหาวิธีซึ่งให้มีจำนวนครั้งน้อยที่สุด

ในการซึ่งตรวจสอบเหรียญปลอม ต้องชั่งมากกว่า 1 ครั้ง จึงจะหาคำตอบได้

- 1) ถ้าชั่งครั้งละ 1 คู่ คือใส่เหรียญในตราชั่งข้างละ 1 เหรียญ อาจต้องชั่ง 4 ครั้ง
- 2) ถ้าใส่เหรียญในตราชั่งข้างละ 2 เหรียญ อาจเกิดการชั่งทั้งหมด 3 ครั้ง
- 3) ถ้าแบ่งเหรียญเป็นกอง กองละ 3 เหรียญ ถ้าตราชั่งสมดุล แสดงว่าเหรียญ

กองที่เหลืออยู่มีเหรียญปลอมปนอยู่ นำเหรียญกองที่เหลือมาชั่งเปรียบเทียบข้างละ 1 เหรียญ ถ้าตราชั่งสมดุล แสดงว่าเหรียญอันที่เหลืออยู่เป็นเหรียญปลอม ถ้าตราชั่งเอียง ข้างที่หนักกว่าจะเป็นเหรียญปลอม

8. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อม เป็นใช้การพิสูจน์เพื่อแสดงว่า คำตอบที่โจทย์กำหนดให้เป็นจริง โดยหาเหตุผลมาแสดงว่าคำตอบเดียวกันแต่มีทิศทางตรงข้ามกันไม่เป็นจริง ส่วนมากจะใช้ในการพิสูจน์ ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อมช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น จำนวนนับ 1 ถึง 9 สามารถจัดลงในตารางจัตุรัส ขนาด 3×3 โดยทำให้ผลบวกของจำนวนสามจำนวนทั้งในแนวตั้ง แนวนอน และแนวเส้นทแยงมุม เท่ากับ 15 เราสามารถเขียน 1 ไว้ตรงมุมตารางได้หรือไม่

จากโจทย์ปัญหานี้ ถ้าหาคำตอบโดยการพยายาม จัดจำนวน 1 ถึง 9 ลงในตาราง ให้เป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดนั้นค่อนข้างทำได้ยาก แต่ถ้าใช้การให้เหตุผลทางอ้อมช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งสามารถทำได้โดย สมมติว่า 1 อยู่ในตำแหน่งมุมของตารางได้ หลังจากนั้นพิจารณาว่าเกิดข้อขัดแย้งหรือไม่ ถ้าเกิดข้อขัดแย้งก็สามารถสรุปได้ว่า 1 อยู่ตำแหน่งตรงมุมไม่ได้ ถ้า 1 อยู่ตรงมุมของตารางได้ ดังนั้นในแถวบนสุด แถวแนวตั้งซ้ายสุดและแนวทแยงมุม ที่มี 1 อยู่นี้ ต้องมีผลบวกของจำนวนสามจำนวน ในแต่ละแนวเท่ากับ 15 หมายความว่าต้องมีจำนวน 3 คู่ จากจำนวน 2 ถึง 9 ซึ่งผลบวกแต่ละคู่เท่ากับ 14 (บวกกับ 1 เป็น 15) นั่นคือผลบวกของจำนวนสามคู่นี้เป็น $14 + 14 + 14 = 42$

1		

แต่เมื่อพิจารณาจำนวนที่มากที่สุด 6 จำนวน จากจำนวน 1 ถึง 9 แล้ว ได้จำนวน 9, 8, 7, 6, 5 และ 4 และผลบวกของ $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$ ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะหาจำนวนสามคู่ และมีผลบวกของแต่ละคู่เท่ากับ 14 ดังนั้นไม่สามารถเขียน 1 ไว้ที่มุมตารางได้

9. กลวิธีทำย้อนกลับ หมายถึง การหาคำตอบโดยการพิจารณาข้อมูลหรือผลลัพธ์สุดท้าย แล้วมองย้อนกลับปัญหาอย่างเป็นขั้นตอน ในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหา

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีทำย้อนกลับช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น "ก๊ีบมีส้มอยู่จำนวนหนึ่ง แล้วแบ่งส้มให้เพื่อนคนที่ 1 ครึ่งหนึ่งของจำนวนส้มทั้งหมดที่มี พอแบ่งส้มให้เพื่อนคนที่ 2 เป็นจำนวนครึ่งหนึ่งของจำนวนส้มที่เหลือแล้ว ก๊ีบเหลือส้มอยู่ 3 ผล เดิมก๊ีบมีส้มทั้งหมดกี่ผล"

เมื่อพิจารณาข้อมูลหรือผลลัพธ์สุดท้ายที่โจทย์กำหนดแล้ว ก๊ีบมีส้มเหลือ 3 ผล

หาจำนวนส้มที่แบ่งให้เพื่อนคนที่ 2 โดยที่เพื่อนคนที่ 2 ต้องได้ส้มเท่ากับส้มที่เหลืออยู่

นั่นคือเพื่อนคนที่ 2 ได้ส้มจำนวน 3 ผล

หาจำนวนส้มก่อนแบ่งให้เพื่อนคนที่ 2 คือจำนวนส้มที่เพื่อนคนที่ 2 ได้ รวมกับจำนวนส้มที่เหลือ นั่นคือ จำนวนส้มก่อนแบ่งให้เพื่อนคนที่ 2 เท่ากับ $3 + 3 = 6$ ผล

หาจำนวนส้มที่แบ่งให้เพื่อนคนที่ 1 โดยพิจารณาจากจำนวนส้มก่อนแบ่งให้เพื่อนคนที่ 2 มีเท่ากับ 6 ผล ดังนั้น เพื่อนคนที่ 1 ได้รับส้ม 6 ผล

หาจำนวนส้มทั้งหมดก่อนที่จะแบ่งให้เพื่อนทั้ง 2 คน เท่ากับ ส้มที่เพื่อนคนที่ 1 ได้ รวมกับ จำนวนส้มก่อนแบ่งให้เพื่อนคนที่ 2 เท่ากับ $6 + 6 = 12$ ผล

สามารถตรวจสอบคำตอบได้โดย ถ้าเดิมมีส้มทั้งหมด 12 ผล แบ่งให้เพื่อนคนที่ 1 ครึ่งหนึ่งของจำนวนส้มที่มี ดังนั้น เพื่อนคนที่ 1 ได้ส้ม 6 ผล แล้วเหลือส้ม 6 ผล แบ่งส้มให้เพื่อนคนที่ 2 ครึ่งหนึ่งของจำนวนส้มที่เหลือ ดังนั้น เพื่อนคนที่ 2 ได้ส้ม 3 ผล แล้วเหลือส้ม 3 ผล ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์ปัญหากำหนด

10. กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ หมายถึง การสร้างโจทย์ปัญหาขึ้นมาใหม่ที่มีโครงสร้างคล้ายกับโจทย์ปัญหาเดิม แต่มีความง่ายกว่า แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหาที่สร้างขึ้นใหม่ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาเดิม หรือนำวิธีการที่เคยใช้แก้โจทย์ปัญหาที่คล้ายกันมาช่วยในการหาคำตอบ หรือการเปลี่ยนจุดมุ่งหมายในการแก้โจทย์ปัญหาจากการมุ่งแก้โจทย์ปัญหาโดยรวม เปลี่ยนเป็นการแก้โจทย์ปัญหาในส่วนย่อยๆ ก่อน เป็นวิธีการที่ทำให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหาเช่นเดียวกัน

กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่สามารถแยกกล่าวได้เป็น 3 ลักษณะ คือ

10.1 กลวิธีแก้ปัญหที่ง่ายกว่า เป็นการสร้างโจทย์ปัญหาขึ้นใหม่ที่ง่ายกว่า และมีโครงสร้างเช่นเดียวกับโจทย์ปัญหาเริ่มต้น แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหาที่สร้างขึ้นใหม่ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาเดิมได้

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีแก้ปัญหที่ง่ายกว่าช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น "มีมะนาว 2,040 ผล จัดใส่ถุง ถุงละ 24 ผล จะจัดมะนาวใส่ถุงได้ทั้งหมดกี่ถุง"

เมื่อพิจารณาตัวเลขที่โจทย์ปัญหากำหนดมาให้ นั่น นักเรียนบางคนอาจแก้โจทย์ปัญหานี้ไม่ได้ แต่ถ้าทำปัญหานี้ให้ง่ายลงโดยการลดขนาดของจำนวนลง เช่น "มีมะนาว 15 ผล จัดใส่ถุง ถุงละ 6 ผล จะจัดมะนาวใส่ถุงได้ทั้งหมดกี่ถุง" ซึ่งทำให้นักเรียนเห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา โดยการนำ 15 หารด้วย 6 ได้เท่ากับ 3 ถุง แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหที่ง่ายกว่านี้ ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาเดิม

10.2 กลวิธีนี้มาถึงปัญหาที่สัมพันธ์กัน เป็นการนึกถึงลักษณะของโจทย์ปัญหา ที่มีลักษณะคล้ายกัน แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหานั้น มาใช้หาคำตอบโจทย์ปัญหาที่พบ

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่สามารถใช้กลวิธีนี้มาถึงปัญหาที่สัมพันธ์ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เช่น มีทีมฟุตบอล 5 ทีม จะจัดแข่งขันแบบพบกันหมดได้กี่คู่

สมมติว่าผู้แก้โจทย์ปัญหาเคยแก้โจทย์ปัญหา การหาจำนวนเส้นที่ลากเชื่อมจุด 5 จุด บนเส้นรอบวงของวงกลมมาก่อน ผู้แก้ปัญหาก็จะมองเห็นว่าโจทย์ปัญหาทั้งสองนี้ มีโครงสร้างของปัญหาเหมือนกัน กล่าวคือ ทีมฟุตบอลเปรียบได้กับจุด การแข่งขันแต่ละครั้งเปรียบได้กับเส้นที่ลากเชื่อมจุดที่ละคู่



จะมีเส้นทั้งหมด 10 เส้น ซึ่งการจัดการแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันหมด จะจัดได้ 10 คู่

10.3 กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง หมายถึง การหาคำตอบจากส่วนย่อยๆ หรือแบ่งปัญหาออกเป็นตอนๆ แล้วหาคำตอบทีละตอน เพื่อนำไปสู่คำตอบที่โจทย์ถาม

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น ห้องเก็บของสี่เหลี่ยมมุมฉาก กว้าง 6 เมตร ยาว 8 เมตร สูง 5 เมตร ต้องการทาสีภายในผนังห้องทั้งสี่ด้าน และเพดานห้อง ถ้าค่าทาสีผนังห้องราคาตารางเมตรละ 150 บาท ค่าทาสีเพดานห้องราคาตารางเมตรละ 180 บาท ต้องจ่ายเงินค่าทาสีทั้งหมดเท่าไร

การหาคำตอบของโจทย์ปัญหานี้ วิธีหนึ่งที่สามารถทำได้โดยการหาคำตอบจากส่วนย่อยๆของโจทย์ปัญหา โดยหาค่าทาสีของผนังห้องก่อน แล้วหาค่าทาสีเพดานห้อง แล้วนำค่าทาสีทั้งหมดมารวมกัน ก็จะได้คำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ การหาคำตอบจากส่วนย่อยๆนี้ ถือเป็นเป้าหมายรองที่นำไปสู่เป้าหมายหลัก คือเงินค่าทาสีทั้งหมด

3. ความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น ครูผู้สอนและนักเรียนควรให้ความสนใจศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วย ซึ่งนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังต่อไปนี้

เดวิด เอ โทมัส (David A. Thomas, 1991:203) ได้กล่าวถึงความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า "กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์แต่ละกลวิธีนั้น มีลักษณะและประโยชน์ที่

แตกต่างกัน การศึกษาหาความรู้เกี่ยวกับกลวิธีให้เข้าใจอย่างลึกซึ้งนั้น จะทำให้สามารถนำมาปรับใช้ในการแก้ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้"

เจมส์ ดับเบิลยู เฮดเดนส์ และ วิลเลียม อาร์ สเปียร์ (James W. Heddens and William R. Speer, 1992:36) ได้กล่าวไว้ว่า "นักเรียนมีความจำเป็นในการเรียนรู้การใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ เพราะกลวิธีนั้นสามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้อย่างกว้างขวาง โจทย์ ปัญหาคณิตศาสตร์บางโจทย์ปัญหาไม่สามารถหาคำตอบได้ โดยใช้ความรู้จากการเรียนเพียงอย่างเดียว ถ้า นักเรียนรู้จักนำกลวิธีมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาด้วย ก็จะทำให้สามารถหาคำตอบของโจทย์ปัญหาได้"

โรเบิร์ต อี เรย์ มาริลิน เอ็น ชายตาม และ แมรี เอ็ม ไลต์ควิท (Robert E. Rays, Marilyn N. Suydam and Mary M. Lindquist, 1995:60) ได้กล่าวถึงความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ไว้ สรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้นเป็นเครื่องมือที่จำเป็น ที่ใช้ช่วยในการ แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน สามารถทำให้นักเรียนเห็นแนวทางในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ได้

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537:23) ได้กล่าวไว้ว่า "นักแก้ปัญหาที่ดีต้องเรียนรู้ให้มีความเข้าใจกลวิธีในการ แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ต่างๆอย่างลึกซึ้ง และต้องสะสมกลวิธีไว้มากๆ เพื่อการเลือกนำมาใช้"

จากข้อความเกี่ยวกับความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาข้างต้นนั้น สามารถสรุปได้ว่า กลวิธี ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น เป็นเครื่องมือที่สำคัญและจำเป็นในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สามารถช่วยให้ผู้แก้โจทย์ปัญหาหรือนักเรียนประสบความสำเร็จ ในการหาคำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ

4. การนำกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

การเลือกสรรกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น เป็นสิ่งสำคัญอย่างหนึ่งซึ่งช่วยให้การ แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ประสบความสำเร็จ ซึ่งมีนักการศึกษาได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการนำกลวิธีต่างๆมา ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

ลีโอนาร์ด เอ็ม เคนเนดี และ สตีฟ ทิปส์ (Leonard M. Kennedy and Steve Tipps, 1994:136) ได้กล่าวไว้สรุปได้ว่า กระบวนการเลือกและใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สำคัญพอๆกัน ถ้าผู้แก้โจทย์ปัญหากำหนดกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาได้ไม่เหมาะสมกับโจทย์ปัญหา ก็จะไม่สามารถแก้โจทย์ ปัญหาข้อนั้นได้ ในทำนองเดียวกันถ้าผู้แก้โจทย์ปัญหาเลือกกลวิธีได้เหมาะสม แต่ไม่สามารถปรับใช้ให้ เหมาะสมกับสภาพของโจทย์ปัญหา การแก้โจทย์ปัญหาก็ไม่ประสบผลสำเร็จ ดังนั้น ผู้แก้โจทย์ปัญหาต้อง

ศึกษากลวิธีและโครงสร้างของโจทย์ปัญหาให้เข้าใจต้องแท้ การเลือกใช้กลวิธีได้เหมาะสมกับโจทย์ปัญหา จะทำให้เห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา จนได้คำตอบที่ถูกต้อง

แมรี เอ็ม ฮัทฟิลด์ แนนซี ที เอ็ดวาลด์ และ แกรี จี บิทเทอร์ (Mary M. Hatfield, Nancy T. Edwards and Gary G. Bitter, 1993:55) กล่าวถึงการนำกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้สรุปได้ว่า การเลือกกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น ขึ้นอยู่กับความรู้ความสามารถของนักเรียน และความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิธีการในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน การที่จะเลือกกลวิธีใดมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น นักเรียนต้องเรียนรู้และทำความเข้าใจเกี่ยวกับกลวิธีต่างๆ เพื่อที่สามารถเลือกมาใช้ได้เหมาะสมกับสภาพของโจทย์ปัญหา

โรเบิร์ต อี เรย์ มาริลีน เอ็น ชายตาม และ แมรี เอ็ม โลด์ควิสท (Robert E. Rays, Marilyn N. Suydam and Mary M. Lindquist, 1995:56) ได้กล่าวถึงการนำกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. สามารถใช้กลวิธีหลายกลวิธีร่วมกันในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ เนื่องจากกลวิธีแต่ละกลวิธี มีลักษณะเฉพาะและคุณสมบัติที่แตกต่างกัน เมื่อนำมาใช้ร่วมกันจะสามารถช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น
2. นักเรียนสามารถใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ทุกขั้นตอน ในกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา
3. นักเรียนควรเรียนรู้และฝึกฝนการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่เสมอ เพื่อสามารถใช้กลวิธีได้อย่างเหมาะสมกับสภาพของโจทย์ปัญหา
4. ในขณะที่ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาอยู่ ถ้านักเรียนไม่สามารถตัดสินใจเลือกกลวิธีใดกลวิธีหนึ่งมาใช้ได้ ให้นักเรียนทดลองใช้หลายๆกลวิธี เพื่อหากกลวิธีที่เหมาะสมกับโจทย์ปัญหา

ปริธา เนาว์เย็นผล (2537:23) ได้กล่าวถึงการนำกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า "ปัญหาคณิตศาสตร์บางปัญหา มีกลวิธีที่ใช้ช่วยในการแก้ปัญหาที่เฉพาะตัว ถ้าใช้กลวิธีที่ไม่เหมาะสม อาจยุ่งยาก หลงทางไม่ประสบความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหา ผู้แก้ปัญหาต้องศึกษาโครงสร้างของปัญหาให้เข้าใจ แล้วนำกลวิธีมาปรับใช้ให้เหมาะสมกับปัญหา จะทำให้เห็นแนวทางในการแก้ปัญหา"

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปการนำกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ คือ นักเรียนหรือผู้แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ต้องศึกษาเกี่ยวกับกลวิธีและโครงสร้างของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้เข้าใจ เพื่อที่จะสามารถคัดเลือกกลวิธีต่างๆมาปรับใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ในโจทย์ปัญหาหนึ่งอาจใช้กลวิธีหลายกลวิธีร่วมกันได้ ในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งจะช่วยให้สามารถหาคำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการได้

5. ร่องรอยกระบวนการคิดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ความคิดนั้นเป็นสิ่งที่เป็นามธรรม ไม่สามารถรู้หรือมองเห็นได้ ถ้าไม่ได้แสดงออกมาด้วยการพูดเขียน หรือภาษาท่าทางต่างๆ ร่องรอยของความคิดที่นักเรียนได้แสดงไว้นั้น เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้รู้ถึงสิ่งที่นักเรียนคิด มีนักการศึกษาหรือนักวิชาการหลายคนได้ศึกษาร่องรอยกระบวนการคิดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไว้ สรุปได้ดังนี้

ซูซาน เวียนเบิร์ก (Susan Weinberg:1996:432-434) ได้ศึกษาวิธีการที่นักเรียนระดับประถมศึกษาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยโจทย์ปัญหากำหนดให้นักเรียนหาผลบวกของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 10 ซึ่งจากโจทย์ปัญหาข้อเดียวกัน นักเรียนแต่ละคนจะมีวิธีการคิดที่แตกต่างกันออกไป เช่น นักเรียนบางคน จะเขียนเลข 1 ถึงเลข 10 แล้วนำตัวเลขมาบวกกันทีละคู่จนได้คำตอบ ดังตัวอย่างในภาพที่ 1

ภาพที่ 1 แสดงการหาคำตอบของนักเรียนโดยการนำตัวเลขมาบวกกันทีละคู่

Handwritten student work showing a list of numbers 1 to 10 and their pairwise sums. The sums are: 1+3=4, 2+7=9, 3+7=10, 4+6=10, 5+7=12, 6+7=13, 7+7=14, 8+7=15, 9+7=16, 10+7=17. The final sum 55 is circled.

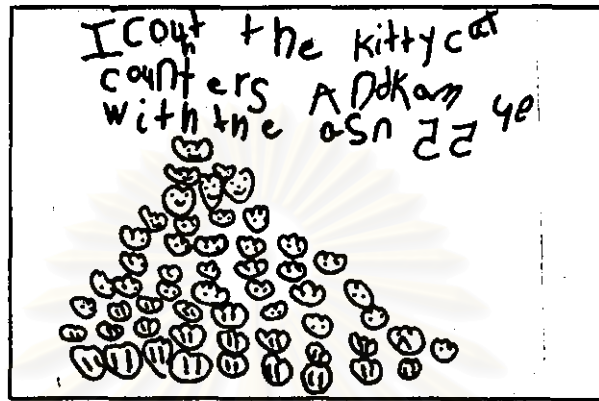
นักเรียนบางคนใช้วิธีการนำตัวเลขที่มากที่สุดมาบวกกันก่อน แล้วนำจำนวนที่น้อยกว่ามาบวกกับผลลัพธ์ที่ได้ทีละจำนวน จนได้คำตอบ ดังภาพที่ 2

ภาพที่ 2 แสดงการหาคำตอบของนักเรียนโดยการนำตัวเลขที่มากที่สุดมาบวกกันก่อน แล้วนำจำนวนที่น้อยกว่ามาบวกกับผลลัพธ์ที่ได้ทีละจำนวน

Handwritten student work showing a sequence of additions starting from the largest numbers. The steps are: 10+9=19, 19+8=27, 27+7=34, 34+6=40, 40+5=45, 45+4=49, 49+3=52, 52+2=54, 54+1=55.

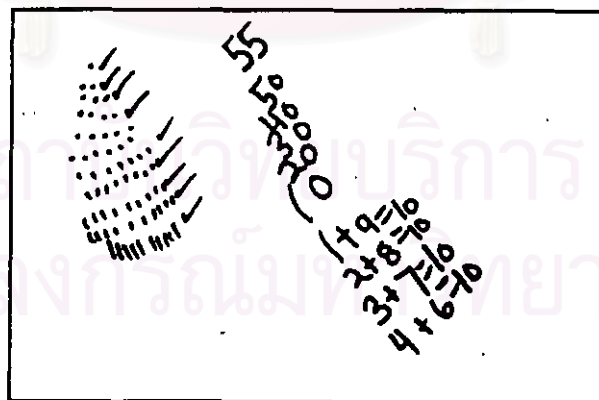
นักเรียนบางคนอาจใช้การวาดภาพการ์ตูน แทนจำนวนที่โจทย์กำหนดให้ แล้วนับจำนวนภาพทั้งหมด เป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการ ดังภาพที่ 3

ภาพที่ 3 แสดงการหาคำตอบของนักเรียนโดยใช้การวาดภาพการ์ตูนแทนจำนวนที่โจทย์กำหนดให้



นักเรียนบางคนใช้วิธีการเขียนจุด แทนจำนวนนับที่โจทย์กำหนดมาให้ โดยนำจำนวนที่บวกกันแล้ว เป็น 10 บวกกันก่อน เช่น นำ 1 บวกกับ 9 เป็น 10 หรือ 2 บวกกับ 8 เป็น 10 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ เมื่อนำ จำนวนใดมาคิดแล้ว จำทำเครื่องหมายจุดที่แถวของจุดที่แทนจำนวนนั้น เพื่อจะได้ไม่สับสนเวลาคิด จนได้ คำตอบที่โจทย์ต้องการ ดังภาพที่ 4

ภาพที่ 4 แสดงการหาคำตอบของนักเรียนโดยการเขียนจุดแทนจำนวนนับที่โจทย์กำหนดมาให้



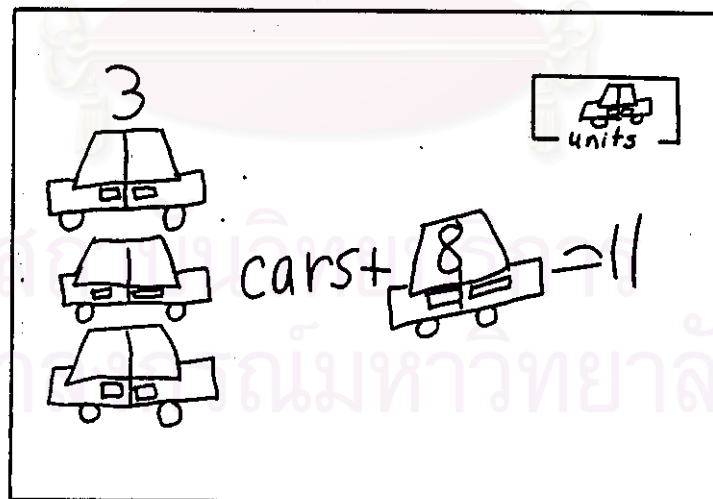
นักเรียนบางคนเขียนจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 10 แล้วนำจำนวน 1 บวกกับ 2 เป็น 3 นำผลลัพธ์คือ 3 บวกกับ 4 เป็น 7 บวกไปเรื่อยๆ จนได้คำตอบ ดังภาพที่ 5

ภาพที่ 5 แสดงการหาคำตอบของนักเรียนโดยการเขียนจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 10 แล้วนำมาบวกกัน

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 9 \\
 10 \\
 \hline
 55
 \end{array}$$

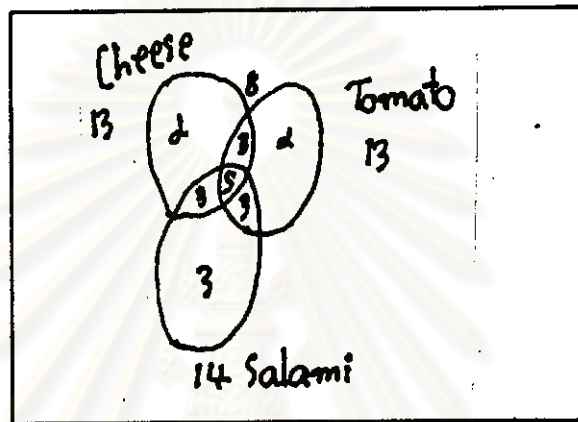
วิลเลียม เอ็ม คาร์รอล และ เดนิส พอร์เตอร์ (William M. Carrol and Dennise Porter, 1977:370-373) ได้ศึกษาวิธีการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวน และทักษะการคิดคำนวณของนักเรียนในระดับประถมศึกษา โดยการให้นักเรียนได้ฝึกเขียนเรื่องราวเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เองและวาดภาพประกอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนมากยิ่งขึ้น และสามารถพัฒนาทักษะการคิดคำนวณของนักเรียนได้ ดังภาพที่ 6

ภาพที่ 6 แสดงการหาคำตอบของนักเรียนโดยการเขียนเรื่องราวเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และวาดภาพประกอบ



จูดีธ ออยสัน (Judith Olson, 1999:330-333) ได้กล่าวถึงผลของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษา ในการเลือกชนิดของแซนวิชเพื่อเตรียมไปรับประทาน สำหรับสมาชิกในการเดินทางไปที่พักผ่อน โดยมีคนเลือก cheese ทั้งหมด 13 คน เลือก salami 14 คน เลือก tomato 13 คน เลือก cheese + salami 8 คน เลือก salami อย่างเดียว 3 คน เลือกส่วนผสมทั้งสามชนิด 5 คน และเลือก tomato + salami 8 คน ซึ่งนักเรียนคนหนึ่งมีวิธีการคิดโดยการวาดแผนภาพ ดังภาพที่ 7

ภาพที่ 7 แสดงการหาคำตอบของนักเรียนโดยการเขียนแผนภาพ



จากข้อมูลที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าร่องรอยจากกระบวนการคิด หรือวิธีการที่นักเรียนใช้และได้แสดงไว้ใน การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น มีลักษณะที่แตกต่างกันออกไป จากโจทย์ปัญหาข้อเดียวกัน นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้วิธีการที่หลากหลาย แต่ได้คำตอบเหมือนกัน ซึ่งครูสามารถที่จะศึกษากระบวนการคิดหรือวิธีการที่นักเรียนนำมาใช้ช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้จากร่องรอยที่นักเรียนได้แสดงออกมาโดยการเขียน การทำแบบฝึกหัด หรือจากส่วนที่เป็นกระดาษสำหรับทดสอบ ที่นักเรียนใช้ระหว่างการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

งานวิจัยในประเทศ

ยุรวรรณ คล้ายมงคล (2534:111-119) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษากระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ในโรงเรียนสังกัดสำนักงาน การประถมศึกษา กรุงเทพมหานคร โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง จำนวน 102 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 3 ชุด คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ แบบสังเกตกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และแบบสัมภาษณ์กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ นั้น ลักษณะของโจทย์ปัญหาสามารถใช้วิธีการเดาหรือการลองผิดลองถูก การหาทางเลือกที่มากที่สุดในการแก้โจทย์ปัญหา การคิดย้อนกลับ การเปรียบเทียบ การสร้างตาราง และการเขียนรายการ ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ และผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาเพียง 3 ขั้นตอน คือการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา การวางแผนในการแก้โจทย์ปัญหา และการดำเนินการตามแผน มีเพียงส่วนน้อยที่ใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาครบทั้ง 4 ขั้นตอน คือ มีตรวจสอบคำตอบ และทบทวน ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และพบว่าวิธีการที่นักเรียนใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา คือ ใช้วิธีการเปรียบเทียบ วิถีทางเลือกที่มากที่สุด วิธีการเขียนรายการ วิธีการลองผิดลองถูก วิธีการคิดย้อนหลังมีจำนวนน้อยมาก และไม่มีนักเรียนใช้วิธีการสร้างตารางช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

สุมาลี วงศ์ยะรา (2536:60-63) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยใช้ภาพกับไม่ใช้ภาพ โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 60 คน นำคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มาเรียงคะแนนจากมากไปหาน้อย แล้วแบ่งนักเรียนที่ได้คะแนนเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน ออกเป็น 2 กลุ่มนำมากำหนดค่าเฉลี่ย จากนั้นจับสลากเป็นกลุ่มที่สอนแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ภาพ อีกกลุ่มเป็นกลุ่มที่สอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยไม่ใช้ภาพ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ฉบับ ได้แก่ ฉบับที่ 1 แบบทดสอบความสามารถการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ชนิดเลือกตอบ (ปรนัย) 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ ฉบับที่ 2 แบบทดสอบการหาคำตอบการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ชนิดเลือกตอบ (ปรนัย) 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และฉบับที่ 3 แบบแสดงวิธีทำการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ (อัตนัย) จำนวน 4 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพ ซึ่งจะมีการเขียนแผนภาพในขณะที่แก้โจทย์ปัญหา เพื่อช่วยให้เข้าใจโจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาโดยไม่ใช้ภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และนักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพมีความสามารถในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา การหาคำตอบของโจทย์ปัญหา และการแสดงวิธีทำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกว่านักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาโดยไม่ใช้ภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สายพิน สร้อยทองคำ (2537:49-50) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการฝึกสร้างตัวแทนปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 78 คน อายุระหว่าง 14-16 ปี เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบฝึกการสร้างตัวแทนของปัญหาโดยใช้ตารางสัมพันธ์ในการแก้ปัญห และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการทดลอง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการฝึกสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ และให้แสดงวิธีสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ในขณะที่แก้ปัญหามีคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหามากกว่านักเรียนที่ไม่ได้รับการฝึกสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และนักเรียนที่ได้รับการฝึกสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ และให้แสดงวิธีสร้างตัวแทนของปัญหาแบบใดก็ได้ในขณะที่แก้ปัญหามีคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหามากกว่านักเรียนที่ไม่ได้รับการฝึกสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 รวมทั้ง นักเรียนที่ได้รับการฝึกสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ และให้แสดงวิธีสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ในขณะที่แก้ปัญหามีคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหามากกว่านักเรียนที่ไม่ได้รับการฝึกสร้างตัวแทนของปัญหาแบบตารางสัมพันธ์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 กับนักเรียนที่ได้รับการฝึกสร้างตัวแทนของปัญหาแบบ ตารางสัมพันธ์ และให้แสดงวิธีสร้างตัวแทนของปัญหาแบบใดก็ได้ในขณะที่แก้ปัญห

เพ็ญรุ่ง เพ็ชรกิจ (2539:63-69) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาโปรแกรมส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนที่สมัครใจเข้าร่วมโปรแกรมทั้ง 64 คน ใช้วิธีการสุ่มอย่างง่าย (Random Sampling) ให้ได้จำนวนนักเรียน 30 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เป็นแบบสอบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำนวน 19 ข้อ ซึ่งลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้น สามารถใช้กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีใช้การให้เหตุผล และกลวิธีสร้างตาราง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ และแบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับโปรแกรมส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำนวน 1 ฉบับ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีค่าเฉลี่ยของคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หลังเข้าร่วมโปรแกรมสูงกว่าเกณฑ์การประเมินที่กำหนดให้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และนักเรียนมีความคิดเห็นเกี่ยวกับโปรแกรมส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ในระดับมาก 6 รายการ จากทั้งหมด 8 รายการ ได้แก่ ระยะเวลาเรียนต่อสัปดาห์ ความชอบในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ความชอบในการแก้โจทย์ปัญหา เนื้อหาที่ใช้ทบทวนความสามารถในการคิด ได้รับประโยชน์ในการเข้าโปรแกรม และโปรแกรมช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา

จักรพันธ์ ทองเอียด (2540:93-97) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาโปรแกรมส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้กลวิธีเอสคิวอาร์คิวซีคิว สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ จำนวน 32 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบสอบความสามารถพื้นฐานในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นแบบสอบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ เป็นโจทย์ปัญหาเรื่องการบวก ลบ คูณ และหาร และแบบสอบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ใช้สำหรับประเมินผลโปรแกรม เป็นโจทย์ปัญหาเรื่องการบวก ลบ คูณ และหาร ซึ่งมีจำนวน 3 ฉบับ ดังนี้ ฉบับที่ 1 แบบสอบการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นแบบสอบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 15 ข้อ ฉบับที่ 2 แบบสอบการหาคำตอบการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นแบบสอบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 15 ข้อ ฉบับที่ 3 แบบสอบการแสดงวิธีทำในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นแบบสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ และแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อโปรแกรมส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และระหว่างการเรียนรู้วิธีการหนึ่งที่นักเรียนใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา คือ การวาดภาพ ผลการวิจัยพบว่า คะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้กลวิธีเอสคิวอาร์คิวซีคิวสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 คือ สูงเพิ่มขึ้นมากกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน และนักเรียนทุกคนมีความพึงพอใจต่อโปรแกรมส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ ในระดับปานกลางขึ้นไป นักเรียนร้อยละ 70 มีความพึงพอใจในระดับมาก และร้อยละ 16.67 มีความพึงพอใจในระดับมากที่สุด รวมทั้งได้โปรแกรม ส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้กลวิธีเอสคิวอาร์คิวซีคิว สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ

งานวิจัยต่างประเทศ

ลินดา โอ เลมบ์เก (Linda O. Lembke, 1991:2057-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนามโนทัศน์และกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องร้อยละ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาลักษณะของการคิด และการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องร้อยละของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนเกรด 5 เกรด 7 เกรด 9 และเกรด 11 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่อยู่ในระดับเกรด 5 และเกรด 7 ใช้วิธีการหรือกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ยังไม่เป็นแบบแผน โดยใช้ในการเดาคำตอบช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ส่วนนักเรียนเกรด 9 และ เกรด 11 ซึ่งมีวัยและวุฒิภาวะสูงกว่า จะใช้วิธีการเขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลในรูปแบบของสมการ และใช้เหตุผลประกอบในการแก้โจทย์ปัญหา

1

ดอนนา เค เมททินกลี (Donna K. Mattingly, 1992:434-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับ การเปรียบเทียบผลของการสอนโดยใช้และไม่ใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และการใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียน โดยมีจุดประสงค์เพื่อศึกษาผลการสอนโดยใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และการใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ของนักเรียน เกรด 4 เกรด 5 และเกรด 6 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ระหว่างกลุ่มที่ได้รับ การสอน โดยใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนเกรด 4 เกรด 5 และเกรด 6 ซึ่งมีนักเรียนทั้งหมดจำนวน 377 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนเกรด 4 และเกรด 6 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลาง และนักเรียนเกรด 5 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงและต่ำ กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ ส่วนนักเรียนเกรด 4 และ เกรด 6 ที่มีความสามารถสูงและต่ำ และนักเรียนเกรด 5 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลาง กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ ส่วนการใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น พบว่านักเรียนเกรด 4 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 6 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลาง กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีการใช้กลยุทธ์ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มากกว่านักเรียนที่อยู่ในระดับชั้นและความสามารถทางคณิตศาสตร์ระดับเดียวกัน และนักเรียนเกรด 5 ทั้งกลุ่มที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ โดยกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีการใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

โดโรธี อี เบเกอร์ (Dorothy E. Baker, 1992:2762-A) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการสอนโดยใช้กลยุทธ์วาดภาพของนักเรียนระดับประถมศึกษาที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม ซึ่งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนเหมือนกัน คือ ขั้นทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา ขั้นวางแผนในการแก้โจทย์ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบ แต่กลุ่มทดลองใช้กลยุทธ์วาดภาพ (drawing strategy) ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า ทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หลังการสอนไม่แตกต่างกัน แต่ทั้งสองกลุ่มมีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หลังการสอนสูงกว่าก่อนได้รับการสอน และกลุ่มทดลองมีการใช้กลยุทธ์ในการวาดภาพหรือใช้การวาดภาพ แสดงข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนดให้มากกว่าก่อนได้รับการสอน

ลินดา ซี เบิร์ก (Linda C. Burks, 1994:4019-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับ ความสามารถในการแก้ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่ใช้กระบวนการและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยมี วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน เกรด 8 ที่มีความ สามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ และกลุ่มที่ได้รับการ สอนโดยใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ 4 ขั้นตอนคือ ENTER, PLAN, ATTACK และ REVIEW เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหา ที่คล้ายกับกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของโพลยา คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผน ขั้นดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา และขั้นตรวจสอบ โดยในการแก้โจทย์ ปัญหาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองนั้น ใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา 5 กลวิธี คือ กลวิธีค้นหารูปแบบ (Look for a pattern) กลวิธีเขียนแผนภาพ (Draw a diagram) กลวิธีเขียนรายการหรือสร้างตาราง (Make a list / Table) กลวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) และ กลวิธีแก้ปัญหาก่อนที่ง่ายกว่า (Solve a simpler problem) ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่านักเรียนทั้งสองกลุ่มที่มีความ สามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ในกลุ่มทดลอง มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

จาร์เนล เค ฟิงค์ดอล (Janel K. Finkdal, 1996:1064-A) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการเรียนการสอน การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้กลวิธีช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ 5 กลวิธี คือ กลวิธี วาดภาพ กลวิธีสร้างรายการ กลวิธีแก้ปัญหาก่อนที่ง่ายกว่า กลวิธีใช้ตัวแปร และกลวิธีค้นหารูปแบบ ซึ่งกลุ่ม ตัวอย่างเป็นนักศึกษาวิชาชีพครู วิชาเอกการประถมศึกษา ผลการศึกษพบว่า หลังการเรียนการสอนนักศึกษา ที่เป็นตัวอย่างประชากรมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงขึ้น และพบว่าความถี่ของการใช้ กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาหลังการเรียนสูงขึ้น

จากงานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ทั้งในประเทศและ ต่างประเทศที่กล่าวมาข้างต้น เห็นได้ว่าการนำกลวิธีต่างๆมาใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของ นักเรียนนั้น เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้ระดับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนอยู่ใน ระดับที่ดีขึ้น ดังนั้นครูและนักเรียนควรที่จะศึกษาเกี่ยวกับกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ เพื่อทำ ให้นักเรียนสามารถเลือกกลวิธีมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม และครูสามารถให้คำ แนะนำกับนักเรียนในการใช้กลวิธีต่างๆได้อย่างถูกต้อง ซึ่งจะส่งผลถึงการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น