บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 เปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์

สมมติฐานเบื้องต้นของเปลือกบางที่จะศึกษาในงานวิจัยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ คือ

1.เปลือกมีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับรัศมีความโค้ง
2.การเคลื่อนตัว(Deflections)ของเปลือกมีค่าน้อย
3.ความเค้นในแนวตั้งฉากกับผิวเปลือกมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเค้นอื่นๆ
4.เส้นตั้งฉากกับระนาบของเปลือกบางยังคงเป็นเส้นตั้งฉากและความยาวไม่เปลี่ยนแปลงระหว่างที่ถูกแรงกระทำ
5.ความชันของผิวเปลือกมีค่าน้อย
6.ความโค้งของผิวเปลือกมีค่าน้อย
7.วัสดุเป็นแบบเนื้อเดียวและมีคุณสมบัติการยืดหยุ่นเท่ากันทุกทิศ

2.2 สมการของการสมดุลย์

สมการสมดุลย์ของเปลือกบางแบบตื้นที่เขียนโดย ฟลุกกี้ [5] คือ

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} - Q_{xx} z_{,xx} - Q_{yy} z_{,xy} + P_1 = 0 \qquad (2.1)$$

$$N_{xy,x} + N_{yy,y} - Q_{xx} z_{,xy} - Q_{yy} z_{,yy} \; P_2 = 0 \qquad (2.2)$$

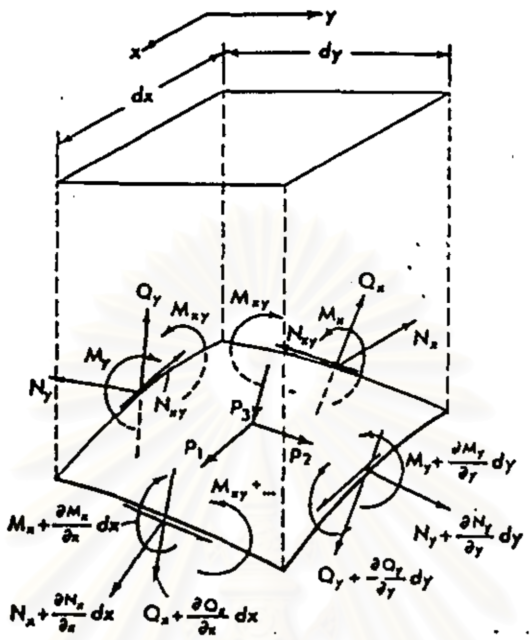
$$N_{xx} z_{,xx} + 2N_{xy} z_{,xy} + N_{yy} z_{,yy} + Q_{xx,x} + Q_{yy,y} + P_3 = 0 \qquad (2.3)$$

$$M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{xx} = 0 \qquad (2.4)$$

$$M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_{yy} = 0 \qquad (2.5)$$

สมการ (2.1) - (2.5) นี้ ได้ตัด เทอม $(z_{,i})^2$ และ $(z_{,i})(z_{,j})$ $i \neq j$ เป็นส่วนประกอบทิ้งไปตามสมมติฐานข้อ 5 เนื่องจากมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับหนึ่ง

ในรูปที่ 5 แสดงถึงเอลิเมนต์ของเปลือกบางที่มีแรงและโมเมนต์มากระทำ



รูปที่ 5 เอลิเมนต์ของเปลือกบาง

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) กับความเครียด (Strain)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) \tag{2.6.1}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \tag{2.6.2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{2.6.3}$$

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด(Strains)กับค่าเคลื่อนตัว (Displacements)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\zeta - w\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{2.7.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\zeta - w\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{2.7.2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\zeta - 2w\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \tag{2.7.3}$$

2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและโมเมนต์ต่อหน่วยความยาว (Stress Resultants) กับค่าเคลื่อนตัว (Displacements)

$$N_{xx} = K\left[u,_x + \nu v,_y - \left(z,_{xx} + \nu z,_{yy}\right)w\right] \tag{2.8.1}$$

$$N_{yy} = K\left[v,_y + \nu u,_x - \left(z,_{yy} + \nu z,_{xx}\right)w\right] \tag{2.8.2}$$

$$N_{xy} = K\frac{(1-\nu)}{2}\left[u,_y + v,_x - 2z,_{xy}\, w\right] \tag{2.8.3}$$

$$M_{xx} = -D\left(w,_{xx} + \nu w,_{yy}\right) \tag{2.8.4}$$

$$M_{yy} = -D\left(w,_{yy} + \nu w,_{xx}\right) \tag{2.8.5}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)w,_{xy} \tag{2.8.6}$$

$$K = \frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)} \tag{2.8.7}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{2.8.8}$$

โดยกำหนดให้

ค่า u v และ w เป็นค่าเคลื่อนตัวที่ผิวกลางของเปลือก

2.6 สภาพขอบ 3 ชนิดที่พิจารณาคือ

ขอบแบบ CLAMPED จะมีเงื่อนไขขอบเขตที่ค่า x มีค่าคงที่ คือ

$u=0$ $v=0$ $w=0$ และ $w_{,x} = 0$

ขอบแบบ SIMPLY SUPPORT จะมีเงื่อนไขขอบเขตที่ค่า x มีค่าคงที่ คือ

$u=0$ $v=0$ $w=0$ และ $M_{xx} = 0$

ขอบแบบ FREE EDGE จะมีเงื่อนไขขอบเขตที่ค่า x มีค่าคงที่ คือ

$N_{xx} = 0$ $N_{xy} = 0$ $Q_{xx} = 0$ และ $M_{xx} = 0$

2.7 วิธีการแปรผัน (Variational Method)

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อจะนำไปหาค่าเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งของปัญหาโดยวิธีการแปรผัน (Variational Method) เป็นวิธีการที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้าง วิธีการมีดังนี้ คือ

กำหนดให้ J เป็นฟังก์ชันของพลังงานศักย์รวม (Total Potential Energy) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$J = U + V \tag{2.9}$$

โดย

U = พลังงานความเครียดภายในวัตถุยืดหยุ่น (Internal Strain Energy)

V = พลังงานศักย์เนื่องจากแรงภายนอก (Potential Energy due to External Forces)

ค่า V มีค่าเท่ากับค่าลบของงาน W (V = -W)

พลังงานความเครียดภายในวัตถุยืดหยุ่น ประกอบด้วย

1.พลังงานที่เกิดจากการยืดหรือหดตัว (Strain Energy due to Stretching)
แทนด้วยสัญลักษณ์ U_1

2.พลังงานที่เกิดจากการโก่งตัว (Strain Energy due to Bending)
แทนด้วยสัญลักษณ์ U_2

ดังนั้นในการพิจารณาปัญหาโดยวิธีแปรผัน จึงต้องสร้างฟังก์ชัน J ของปัญหา ซึ่งในที่นี้ปัญหาที่พิจารณาคือ เปลือกบางแบบตื้นที่รับแรงกระทำกระจายสม่ำเสมอจากภายนอกในแนวดิ่ง

พลังงานที่เกิดจากการยืดหรือหดตัว (U_1) คือ

$$U_1 = \frac{K}{2}\int\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2\right)dA \tag{2.10}$$

พลังงานที่เกิดจากการโก่งตัว (U_2) คือ

$$U_2 = \frac{D}{2}\int\left(k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^2\right)dA \tag{2.11}$$

พลังงานจากแรงภายนอก (V) คือ

$$V = -W = \int\left(P_3 w\right)dA \tag{2.12}$$

ดังนั้นฟังก์ชัน J ของปัญหานี้ คือ

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{K}{2}\int\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2\right)dA \\ & + \frac{D}{2}\int\left(k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^2\right)dA \\ & + \int\left(P_3 w\right)dA \end{aligned} \tag{2.13}$$

และค่าความเครียดที่พิจารณาจะเป็นที่ตำแหน่งผิวกลางของเปลือก คือ

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u,_x - z,_{xx}\, w \\ \varepsilon_y &= v,_y - z,_{yy}\, w \\ \gamma_{xy} &= u,_y + v,_x - 2z,_{xy}\, w \end{aligned} \tag{2.14}$$

สำหรับเปลือกบางแบบตื้น ค่าเปลี่ยนแปลงของความโค้ง (Change of curvature) และ ค่าการบิด (twisting) ของผิวกลาง คือ

$$
\begin{aligned}
k_x &= w,_{xx} \\
k_y &= w,_{yy} \\
k_{xy} &= w,_{xy}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

ดังนั้น พลังงานศักย์รวม J ของเปลือกรูปไฮปาร์ที่เขียนอยู่ในรูปของค่าเคลื่อนตัว u v และ w คือ

$$
\begin{aligned}
J = \iint \Big\{ & \left(2Ku,_x^2+(1-\nu)Ku,_y^2\right)\frac{1}{4}+\left(2Kv,_y^2+(1-\nu)Kv,_x^2\right)\frac{1}{4} \\
& +\left(2\nu Ku,_x\, v,_y+(1-\nu)Ku,_y\, v,_x\right)\frac{1}{2}-K\frac{f}{AB}(1-\nu)v,_x\, w-K\frac{f}{AB}(1-\nu)u,_y\, w \\
& +\frac{1}{2}D\left(w,_{xx}^2+w,_{yy}^2+2\nu w,_{xx}\, w,_{yy}+2(1-\nu)w,_{xy}^2\right)+K\frac{f^2}{A^2B^2}(1-\nu)w^2 \\
& -P_3 w \Big\} dA
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

ในขณะที่วัตถุอยู่ในภาวะสมดุล (Equilibrium Condition) ค่าพลังงานศักย์รวม J จะมีค่าที่ต่ำที่สุด จากหลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม (Principle of Total Minimum Potential Energy) ตามวิธีการแปรผัน จะทำการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน J โดยเกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ๆ ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์ของเอลิเมนต์ของปัญหาจะมีเงื่อนไขว่า การแปรผันของพลังงานศักย์รวม มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$
\delta J(\phi_i) = 0 \tag{2.17}
$$

โดยสัญลักษณ์ δ แทนการแปรผันของพลังงานศักย์รวม J ซึ่งจะได้ผลว่า

$$
\frac{\partial J(\phi_i)}{\partial \phi_i} = 0 \tag{2.18}
$$

ϕ_i คือ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์