ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

นายยศกร ประทุมวัลย์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-2672-4

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

FINITE VOLUME METHOD FOR ANALYSIS OF CONJUGATE HEAT TRANSFER

Mr.Yotsakorn Pratumwal

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2002

ISBN 974-17-2672-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
โดย	นายยศกร ประทุมวัลย์
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

………………………………………….. คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

…………………………………………… ประธานกรรมการสอบ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์)

…………………………………………... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

……………………………………………กรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

……………………………………………กรรมการ
(อาจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ยศกร ประทุมวัลย์ : ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต. (FINITE VOLUME METHOD FOR ANALYSIS OF CONJUGATE HEAT TRANSFER) อ. ที่ปรึกษา : ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์, 124 หน้า. ISBN 974-17-2672-4.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์วอลุมเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งเป็นการคำนวณการพาความร้อนภายในของไหลและการนำความร้อนภายในของแข็งควบคู่กัน แบบจำลองสำหรับการคำนวณได้รวมขอบเขตของของแข็งและของไหลไว้ภายในโดเมนเดียว ซึ่งวิธีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อนและการพาความร้อนใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้าและออกจากทั้งของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อของทั้งคู่ต้องมีค่าเท่ากัน โดยในที่นี้ จะใช้ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล

การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เริ่มกระทำโดยการเพิ่มเติมส่วนของการคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนลงไปในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่เดิม (Putivisutisak, 2002) จากนั้นจึงประยุกต์วิธีการคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตเข้ากับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากวิเคราะห์ไปเปรียบเทียบกับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง ผลการคำนวณหรือผลการทดลองที่ได้มีผู้ทำมาแล้ว

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ผ่านการตรวจสอบความถูกต้องแล้วจะถูกนำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน เพื่อศึกษาผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติต่างๆ ต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตและศึกษาผลกระทบของแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิที่มีต่อการไหล ในวิทยานิพนธ์นี้ยังได้แสดงการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในกรณีที่มีการพาความร้อนเพียงอย่างเดียวกับกรณีที่พิจารณาเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....
ปีการศึกษา 2545 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4370455821 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD: FINITE VOLUME / CONJUGATE HEAT TRANSFER / MIXED CONVECTION

YOTSAKORN PRATUMWAL : FINITE VOLUME METHOD FOR ANALYSIS OF CONJUGATE HEAT TRANSFER. THESIS ADVISOR : SOMPONG PUTIVISUTISAK, Ph.D. 124 pp. ISBN 974-17-2672-4.

In this thesis, a finite volume method for conjugate heat transfer problems is presented. Heat convection in fluid and heat conduction in solid are solved simultaneously so that the solid and fluid regions are treated as a unified computational domain. A harmonic mean of the diffusion coefficients and the piecewise-linear temperature profile have been employed to approximate the heat flux at the solid-fluid interface in order to ensure the overall energy balance of the computed results.

A computer program has been further developed for fluid flow and heat transfer problems from the previous computer program (Putivisutisak, 2002). The conjugate heat transfer is implemented. The developed computer program is validated by solving simple problems, of which exact solutions, experimental or other numerical results are available.

The verified computer program is then used to solve conjugate heat transfer problems. The effects of thermal and fluid properties on conjugate heat transfer and the effects of buoyant forces on the flow characteristics are studied. In addition, the differences between the results obtained using the conjugate-heat-transfer calculation and those with the convection-heat-transfer calculation are presented.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department Mechanical Engineering	Student's signature ....
Field of study Mechanical Engineering	Advisor's signature ....
Academic Year 2002	Co-advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดต่างๆที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง อันเป็นแรงบันดาลใจและกำลังใจให้ผู้วิจัยสามารถทำงานได้สำเร็จลุล่วง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์ ประธานกรรมการ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ ดร. กุณฑินี มณีรัตน์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ พี่สุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพานิช อาจารย์นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ และพี่วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม ที่ได้ถ่ายทอดความรู้ ประสบการณ์ และคำปรึกษาในทุกๆ ด้าน ขอขอบคุณ เกรียงไกร ปัญญารัตนะ สมบูรณ์ โอตรววรรณะ สุธี ไตรวิวัฒนา สุธี โอฬารฤทธินันท์ และ อาชว์ ปวีณวัฒน์ ซึ่งเป็นเพื่อนๆ ในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับคำแนะนำ กำลังใจและความเอื้อเฟื้อน้ำใจตลอดเวลาการทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ที่คอยให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

หน้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญรูปภาพ

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

หน้า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตเป็นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งกับของไหล โดยพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน ซึ่งมีวิธีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อนและการพาความร้อนโดยใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้าและออกจากทั้งของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อของทั้งคู่ต้องมีค่าเท่ากัน ในอดีตเพื่อให้ปัญหามีความง่ายขึ้นจึงทำการตั้งสมมติฐานให้อุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่ผิวของแข็งมีค่าคงที่ ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหล ซึ่งในความเป็นจริงแล้วอุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่บริเวณดังกล่าวอาจมีค่าไม่คงที่ ทำให้การคำนวณการถ่ายเทความร้อนมีความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง ดังนั้นวิธีการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจึงมีความสำคัญในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้น ตัวอย่างของปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ได้แก่ การถ่ายเทความร้อนออกจากครีบของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน การถ่ายเทความร้อนออกจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ และการถ่ายเทความร้อนของรอยเชื่อมออกสู่อากาศ เป็นต้น

ในอดีตที่ผ่านมา นักวิจัยพยายามวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลด้วยวิธีต่างๆ ทั้งการทดลอง การใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical method) และการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ตัวอย่างเช่น

Luikov (1974) ได้นำวิธีเชิงวิเคราะห์มาแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นในการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบ ทำให้ทราบความสัมพันธ์ระหว่างค่า Nusselt number (Nu_x) และ Brun number (Br_x) ที่ตำแหน่งต่างๆ

Sparrow and Chyu (1982) นำเอาปัญหาการถ่ายเทความร้อนของครีบมาวิเคราะห์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ ทำให้ทราบถึงผลของ Prandtl number (Pr) ที่มีต่อการถ่ายเทความร้อน และทำให้ทราบถึงค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) ที่ตำแหน่งต่างๆ ของครีบด้วย

Inaba and Fukuda (1984) ทดลองปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดสี่เหลี่ยม โดยมีผนังด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวนแต่กำหนดผนังด้านซ้ายให้มีอุณหภูมิสูง ใน

ขณะที่ผนังด้านขวามีอุณหภูมิต่ำกว่าผนังด้านซ้าย ผลจากการทดลองพบว่ามีการไหลวนของของไหลภายในช่องสี่เหลี่ยม เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของของไหลซึ่งเป็นผลสืบเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในของไหล

Pozzi and Lupo (1988) ศึกษาปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการไหลผ่านแผ่นบางโดยวิเคราะห์เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต การวิเคราะห์แบ่งออกเป็นสองส่วนด้วยกัน โดยส่วนที่หนึ่งได้อธิบายถึงทฤษฎีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและของแข็ง และส่วนที่สองแสดงการหาผลเฉลยของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยใช้ Eigensolutions

Rizk et al. (1992) พัฒนาวิธีเชิงวิเคราะห์สำหรับวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ในปัญหาการไหลผ่านก้อนสี่เหลี่ยมที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายใน โดยผลลัพธ์แสดงให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งในส่วนของแข็งที่มีการนำความร้อนและในส่วนของไหลที่มีการพาความร้อน

Fiebig et al. (1995) ได้จำลองปัญหาการถ่ายเทความร้อนของท่อภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม โดยวิเคราะห์เป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลแบบราบเรียบในสามมิติ จากการศึกษาผลกระทบของค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์และอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งกับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลที่มีต่อการถ่ายเทความร้อน พบว่าการถ่ายเทความร้อนจะมีประสิทธิภาพดีเมื่อค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์มากขึ้นในขณะที่อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งกับของไหลมีค่าลดลง

Sugavanam et al. (1995) นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาจำลองปัญหาการนำความร้อนที่มีแหล่งความร้อนขนาดเล็กอยู่ภายในครีบ โดยบริเวณผิวด้านบนและด้านล่างของครีบมีการระบายความร้อนด้วยวิธีการพาความร้อนแบบบังคับ พร้อมกันนั้นได้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วย โดยนำผลลัพธ์จากการพิจารณาเฉพาะการพาความร้อนและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตมาเปรียบเทียบกัน ซึ่งการวิเคราะห์ด้วยวิธีการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตให้ผลลัพธ์ที่สามารถนำไปใช้ในการออกแบบครีบให้มีประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนใกล้เคียงกับพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริง

Choi and Kim (1996) วิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) โดยจำลองปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในท่อทรงสี่เหลี่ยมซึ่งมีการพาความร้อนแบบผสม จากการศึกษาสามารถอธิบายผลกระทบ

ของการพาความร้อนแบบอิสระเฉพาะช่วงค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำ แต่ในช่วงค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์สูงสามารถพิจารณาเป็นการพาความร้อนแบบบังคับ โดยไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงผลของการพาความร้อนแบบอิสระ

Nakayama and Park (1996) นำผลการจำลองด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบผลต่างสืบเนื่องเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดลอง โดยศึกษาการถ่ายเทความร้อนจากแท่งสี่เหลี่ยมที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในไปสู่ของไหลซึ่งเป็นอากาศ ซึ่งผลที่ได้จากการเปรียบเทียบมีความสอดคล้องกันดี

Cole (1997) ศึกษาปัญหาการระบายความร้อนออกจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิคส์ โดยจำลองปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและวิเคราะห์เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งการจำลองมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วและความหนาของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิคส์ เพื่อหาขนาดที่มีความเหมาะสม สำหรับวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนเฉพาะการพาความร้อนโดยไม่พิจารณาผลของการนำความร้อนเนื่องจากอุณหภูมิภายในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิคส์ มีค่าเท่ากัน

Hsu and Hsiao (1998) วิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนออกจากแผ่นครีบบางด้วยของไหลที่มีคุณสมบัติเป็น Viscoelastic สมการที่ใช้ในการแก้ปัญหาประกอบด้วยสมการความต่อเนื่อง สมการโมเมนตัมและสมการพลังงาน โดยการวิเคราะห์ได้นำวิธี Series expansion, Similarity transformation และ 2^{nd}-order accuracy finite difference มาใช้ร่วมกันในการหาผลลัพธ์ ผลจากการวิเคราะห์คือค่านัสเซิลท์นัมเบอร์และสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ตำแหน่งต่างๆ ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการออกแบบครีบให้มีการถ่ายเทความร้อนที่มีประสิทธิภาพสูง

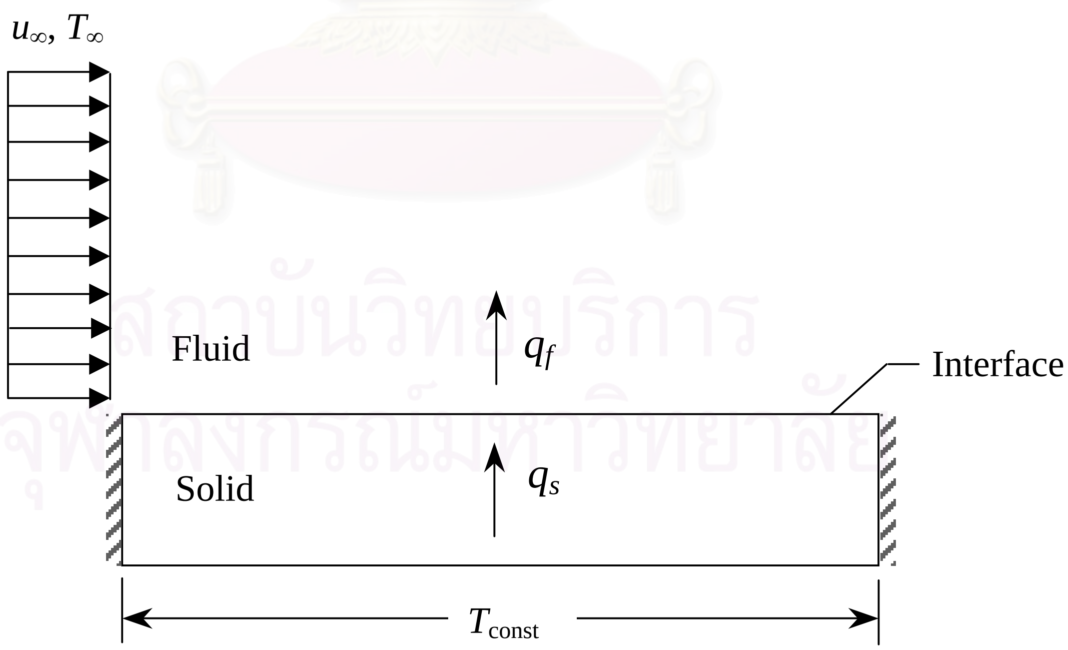
Chen and Han (2000) นำเสนอแนวคิดการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยการจัดสมการอนุรักษ์พลังงานให้เทอมการแพร่กระจายมีสัมประสิทธิ์เป็นอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนและค่าความจุความร้อน แต่การจัดสมการในรูปดังกล่าวจะทำให้เกิดปัญหาในการวิเคราะห์ในส่วนของแข็ง กล่าวคือ ค่าความจุความร้อนของของแข็งมีค่าสูง ทำให้สัมประสิทธิ์ของเทอมการแพร่กระจายมีค่าน้อยและผลการจำลองที่ได้ไม่เป็นไปตามปรากฏการณ์จริง ดังนั้นจึงเลือกใช้ค่าความจุความร้อนของของไหลแทนการใช้ค่าความจุความร้อนของของแข็ง ทำให้ผลการจำลองที่ได้มีความสอดคล้องกับปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้น

Jilani et al. (2002) ได้ประยุกต์ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของทรงกระบอกที่วางตัวในแนวดิ่งและมีแหล่งกำเนิด

ความร้อนอยู่ภายใน โดยมีการไหลแบบราบเรียบในสองมิติที่สภาวะคงตัวเป็นตัวระบายความร้อน สำหรับผลการศึกษาพบว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในทรงกระบอกมีความแตกต่างกัน โดยขึ้นอยู่กับปริมาณความร้อนของแหล่งกำเนิดความร้อน อัตราส่วนความยาวของต่อรัศมีของท่อและอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต รวมทั้งศึกษาการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นในของไหลและของแข็ง โดยเฉพาะอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อของสองสถานะ ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหาสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ตำแหน่งต่างๆ ระหว่างรอยต่อของแข็งและของไหลได้ โดยจะก่อให้เกิดประโยชน์ในการออกแบบรูปร่างของครีบที่ใช้ในการถ่ายเทความร้อนและออกแบบอุปกรณ์อิเล็คทรอนิคส์ต่างๆ ที่มีการถ่ายเทความร้อนมาเกี่ยวข้องด้วย

รูปที่ 1.1 แสดงตัวอย่างของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งมีรายละเอียดคือ ของไหลเข้ามาทางด้านซ้ายด้วยลักษณะสม่ำเสมอโดยมีความเร็วเท่ากับ u_∞ และอุณหภูมิเท่ากับ T_∞ สำหรับของแข็งบริเวณผิวด้านล่างจะมีเงื่อนไขขอบที่มีอุณหภูมิเท่ากับ T_{const} โดยที่บริเวณด้านซ้ายและขวาของของแข็งเป็นฉนวนป้องกันความร้อน



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างโดเมนของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

การถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นระหว่างของแข็งและของไหลเป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งอธิบายได้ว่า ปริมาณความร้อนที่ของแข็งถ่ายเทสู่ของไหลมีค่าเท่ากับ q_s ในขณะที่ปริมาณความร้อนที่ของไหลได้รับจากของแข็งมีค่าเท่ากับ q_f โดยในการวิเคราะการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจะต้องคำนวณการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.2.1 ศึกษาพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่พิจารณาการพาความร้อนกับการนำความร้อนในของไหลและของแข็งควบคู่กัน
1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมที่สามารถนำมาใช้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตได้อย่างเหมาะสม
1.2.3 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำนายพฤติกรรมของปัญหาที่ทำการพิจารณานี้
1.2.4 วิเคราะห์ผลการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ได้จากการคำนวณลักษณะการไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนในรูปแบบต่างๆ

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.3.1 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ไขปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสองมิติ
1.3.2 ทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับปัญหาการพาความร้อนและการนำความร้อนในปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงหรือผลการทดลอง
1.3.3 นำโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาประยุกต์กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
1.3.4 วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ได้จากการคำนวณ

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาลักษณะการไหลแบบราบเรียบของของไหลอัดตัวไม่ได้ในลักษณะต่าง ๆ
1.4.2 ศึกษาลักษณะการถ่ายเทความร้อนในของแข็งและของไหล
1.4.3 ศึกษาลักษณะการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนและการนำความร้อนควบคู่กัน
1.4.4 ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.4.5 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Putivisutisak, 2002) เพื่อให้สามารถคำนวณการไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนมาเกี่ยวข้องได้

1.4.6 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับปัญหาแบบง่าย

1.4.7 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ตรวจสอบแล้วไปวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีลักษณะการไหลซับซ้อน

1.4.8 วิเคราะห์และสรุปผล

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจของการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นในของแข็งและของไหลที่พิจารณาการพาความร้อนและการนำความร้อนควบคู่กัน

1.5.2 ก่อให้เกิดความเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างสาขาวิชาพลศาสตร์ของไหล กับการถ่ายเทความร้อน

1.5.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถทำนายพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งไปสู่ของไหลได้

1.5.4 ก่อให้เกิดความเข้าใจที่สามารถนำไปใช้ในการออกแบบครีบหรืออุปกรณ์ถ่ายเทความร้อนได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

1.6 ส่วนประกอบของวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็น 6 บท ดังต่อไปนี้

บทที่ 1 บทนำ

กล่าวถึงความสำคัญและที่มา วัตถุประสงค์ ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ และส่วนประกอบของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

อธิบายถึงสมการพื้นฐานการไหลและการถ่ายเทความร้อน ซึ่งได้แก่ สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการอนุรักษ์พลังงาน

บทที่ 3 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

ประกอบด้วยรายละเอียดของการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิต โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม การหาผลเฉลยของสมการพีชคณิตด้วยวิธี Tri-Diagonal

Matrix Algorithm (TDMA) การแก้ปัญหาสนามการไหล เงื่อนไขขอบที่นำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาต่างๆ และการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม นอกจากนี้ยังแสดงตัวอย่างของการแก้ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนอย่างง่ายด้วย

บทที่ 4 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

กล่าวถึงกรณีทดสอบต่างๆ ที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยมีทั้งหมด 4 ปัญหาด้วยกัน คือ

1) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน
2) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อัน
3) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดทรงสี่เหลี่ยมโดยเปรียบเทียบผลลัพธ์กับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
4) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดทรงสี่เหลี่ยมโดยเปรียบเทียบผลลัพธ์กับผลการทดลอง

บทที่ 5 การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ตรวจสอบแล้วไปวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยจำลองปัญหา 3 ปัญหา ได้แก่

1) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของการไหลผ่านแผ่นราบ
2) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายในของแข็ง โดยวิเคราะห์ผลกระทบจากคุณสมบัติต่างๆ ที่มีต่อการถ่ายเทความร้อน
3) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหล โดยพิจารณาเป็นการพาความร้อนแบบผสม

บทที่ 6 บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

ประกอบด้วยบทสรุปของวิทยานิพนธ์ ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยต่อเนื่องที่อาจดำเนินการได้ต่อไปในอนาคต

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะแสดงสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน โดยจะแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลซึ่งประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) และสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum) สำหรับส่วนที่สองจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนได้แก่ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy) และผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ (Buoyant force)

สำหรับการศึกษาในงานวิจัยนี้ได้ตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับของไหลที่นำมาพิจารณาให้มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

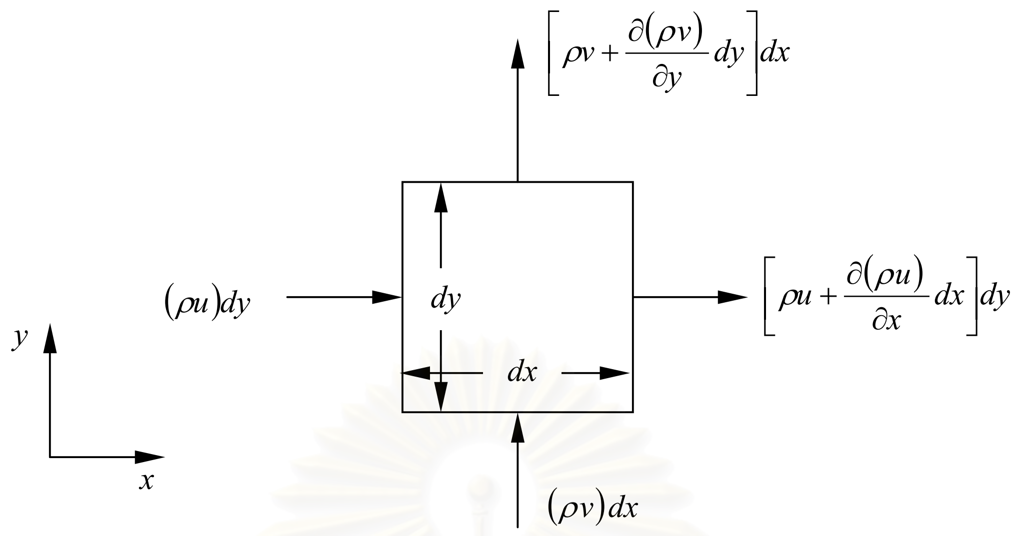
1) ของไหลเป็นชนิดอัดตัวไม่ได้
2) คุณสมบัติต่างๆของของไหลมีค่าคงที่
3) การไหลเกิดขึ้นใน 2 มิติ
4) การไหลอยู่ในสภาวะคงตัว

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

พิจารณาการไหลผ่านปริมาตรควบคุมขนาดเล็กในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) ที่มีขนาด Δx และ Δy ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยกำหนดให้ u และ v แทนความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ จะได้ว่าผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน x คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy \quad - \quad (\rho u)dy \quad = \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,dy \tag{2.1}$$

และผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน y คือ



รูปที่ 2.1 มวลของของไหลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมสองมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

$$\left[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx \quad - \quad (\rho v)dx \quad = \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\,dx \tag{2.2}$$

ดังนั้น

$$\text{ผลลัพธ์ของมวลของไหลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุม} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy \tag{2.3}$$

สำหรับมวลของของไหลภายในปริมาตรควบคุมนั้นเท่ากับ $\rho(dx\,dy)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\text{อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในปริมาตรควบคุม} = \frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\,dy) \tag{2.4}$$

จากนิยามของกฎการอนุรักษ์มวลที่กล่าวว่า “ผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุมที่พิจารณาจะเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในปริมาตรควบคุมนั้น” เราสามารถเขียนรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy \quad = \quad -\frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\,dy) \tag{2.5}$$

หรือ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad + \quad \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] \quad = \quad 0 \tag{2.6}$$

สมการที่ (2.6) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปหนึ่ง คือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.7}$$

หรือ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.8}$$

ดังนั้น สมการ (2.6) สามารถเขียนในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{\mathrm{V}}\right) = 0 \tag{2.9}$$

โดยที่

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathrm{j}} \quad \text{และ} \quad \vec{\mathrm{V}} = u\,\hat{\mathrm{i}} + v\,\hat{\mathrm{j}}$$

จากสมมติฐานที่กล่าวไว้ข้างต้นว่าของไหลเป็นชนิดอัดตัวไม่ได้ ซึ่งทำให้ความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา และตำแหน่งต่างๆ ขณะเคลื่อนที่ ดังนั้น

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

ดังนั้นสมการ (2.8) สามารถลดรูปเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.11}$$

หรือเขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{V}} = 0 \tag{2.12}$$

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

จากกฎข้อที่สองของนิวตันหรือกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมซึ่งกล่าวว่า “แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้น” เราสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\sum \vec{\mathrm{F}} = m\vec{\mathrm{a}} \tag{2.13}$$

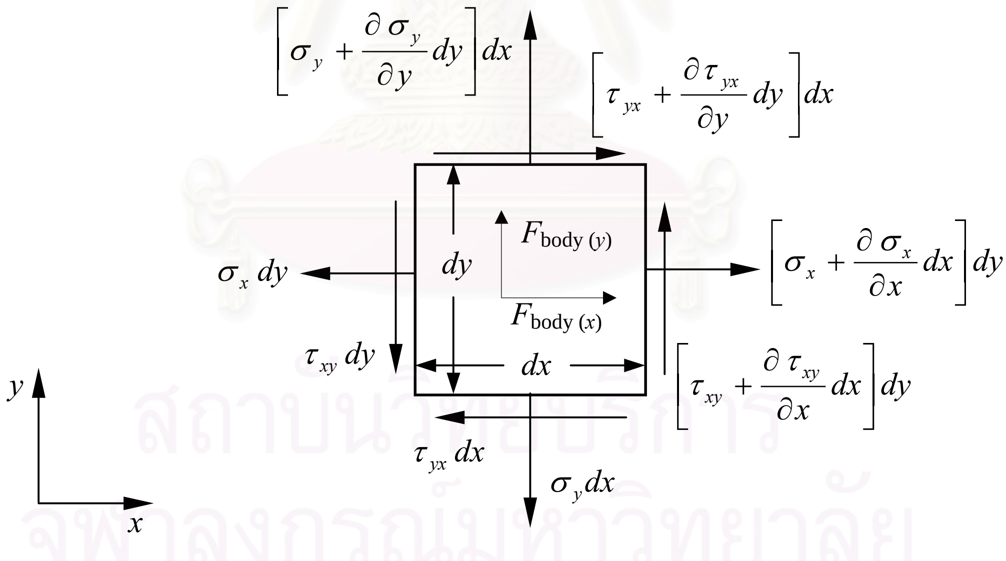
จากความสัมพันธ์แบบเวคเตอร์ ในสมการที่ (2.13) สามารถแบ่งความสัมพันธ์ออกได้เป็น 2 แนวแกนในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน คือแกน x และ y ซึ่งในที่นี้จะทำการพิจารณาเพียงส่วนประกอบในแนวแกน x เพียงแกนเดียวก่อน โดยจะได้ความสัมพันธ์ของแรงตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันเป็น

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.14}$$

เมื่อ F_x และ a_x เป็นค่าของแรงและความเร่งในแนวแกน x ตามลำดับ

พิจารณาเทอมด้านขวาของสมการ (2.14) มวลของของไหลภายในปริมาตรควบคุม

$$m = \rho\, dx\, dy \tag{2.15}$$



รูปที่ 2.2 แรงที่กระทำบนปริมาตรควบคุมสองมิติ

พิจารณาเทอมด้านซ้ายของสมการ (2.14) แรงที่กระทำบนปริมาตรควบคุม (รูปที่ 2.2) ประกอบไปด้วยสองส่วนด้วยกัน คือ

1) Body forces คือ แรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคของของไหล โดยไม่มีการสัมผัสทางกายภาพ (Physical contact) ซึ่งได้แก่ แรงจากความโน้มถ่วงของโลก และแรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะผลจากแรงโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว
2) Surface forces คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อผิวด้านนอกของปริมาตรควบคุมของของไหลที่ถูกพิจารณา ซึ่งประกอบไปด้วย แรงเนื่องจากความดันในแนวตั้งฉาก (Normal force) และแรงเนื่องจากความเค้นเฉือนในแนวสัมผัส (Shear force)

ดังนั้นแรงลัพธ์ในแนวแกน x คือ

$$\sum F_x = \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) - \sigma_x\right] dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) - \tau_{yx}\right] dx + \rho g_x \, dx \, dy \quad (2.16)$$

หรือ

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \, dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \, dx + \rho g_x \, dx \, dy \quad (2.17)$$

สำหรับความเร่งในแนวแกน x มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.18)$$

นำสมการ (2.15), (2.17) และ (2.18) แทนค่าลงในสมการ (2.14) จะได้สมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ดังนี้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.19a)$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถเขียนสมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y ได้เป็น

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (2.19b)$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) สามารถเขียนความเค้นต่างๆ ให้อยู่ในเทอมของความเร็วและความดันได้โดยใช้สมมติฐานของสโตกส์ (Stokes' hypothesis) ดังนี้

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.20a}$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.20b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{2.20c}$$

โดย μ แทนค่าความหนืด (Viscosity) ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนรูปของของไหล เมื่อแทนสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.19) จะทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์โมเมนตัม ที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)u = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \tag{2.21a}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)v = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right] \tag{2.21b}$$

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สภาวะอยู่ตัว และหากละทิ้งแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหล สมการนาเวียร์-สโตกส์จะลดรูปลงมาเป็น

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{2.22a}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \tag{2.22b}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองสมการนี้จะถูกนำไปพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการไหลร่วมกับสมการอนุรักษ์มวลในบทต่อไป

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานในสองมิติสามารถหาได้โดยนำกฎข้อที่หนึ่งทางเทอร์โมไดนามิคส์มาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุมของของไหล ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.3 และ 2.4

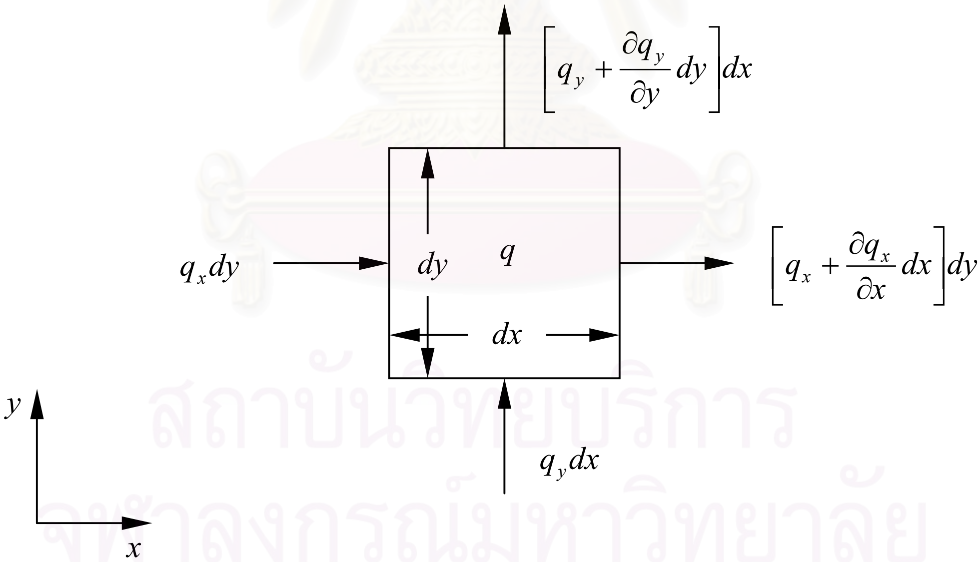
จากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิคส์ซึ่งกล่าวว่า พลังงานที่เพิ่มขึ้นภายในปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับผลรวมของความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุมกับงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม เราสามารถเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \tag{2.23}$$

โดย E_t แทนพลังงานรวมของปริมาตรควบคุม

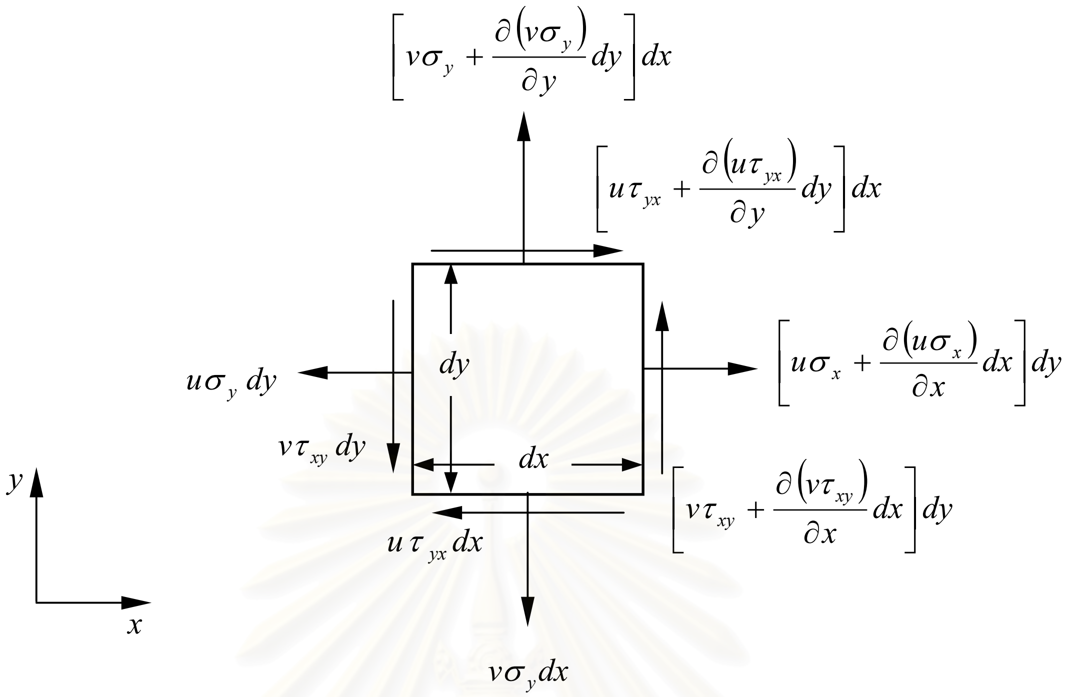
Q แทนความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุม

W แทนงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม



รูปที่ 2.3 อัตราการถ่ายเทความร้อนที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมสองมิติ

พลังงานรวมของปริมาตรควบคุมประกอบไปด้วย พลังงานภายใน (Internal energy) พลังงานจลน์ (Kinetic energy) และพลังงานศักย์ (Potential energy) ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานรวมของปริมาตรควบคุมจะมีค่าดังสมการต่อไปนี้



รูปที่ 2.4 อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำต่อปริมาตรควบคุมสองมิติ

$$\frac{dE_t}{dt} = \rho dxdy \cdot \frac{d}{dt}\left[e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \vec{\mathrm{f}} \cdot \vec{\mathrm{r}}\right] \tag{2.24}$$

โดย e แทนพลังงานภายในของของไหลต่อหนึ่งหน่วยมวล

$\vec{\mathrm{f}}$ แทนแรง ที่กระทำต่อของไหล โดยที่ $\vec{\mathrm{f}} = f_x\hat{\mathrm{i}} + f_y\hat{\mathrm{j}}$

และ $\vec{\mathrm{r}}$ แทนเวคเตอร์แสดงตำแหน่งของของไหล

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นภายในปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ดังแสดงในรูปที่ 2.3 จะได้ว่าการเปลี่ยนแปลงความร้อนเทียบกับเวลามีค่าเท่ากับอัตราความร้อนที่เกิดขึ้นภายในของปริมาตรควบคุมบวกกับปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าและออกจากปริมาตรควบคุมในแกน x และ y ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{dQ}{dt} = \rho q dxdy + q_x dy - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy + q_y dx - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dx \tag{2.25}$$

โดย q แทนความร้อนที่ผลิตได้เองต่อหนึ่งหน่วยมวล (Heat generation per unit mass)

q_x แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน x

q_y แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน y

ทำการจัดรูปสมการข้างบนใหม่จะได้

$$\frac{dQ}{dt} = \rho q dxdy + \left(-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dxdy \tag{2.26}$$

อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูปที่ 2.4 เป็นอัตราการทำงานอันเนื่องมาจากความเค้นที่ผิวของปริมาตรควบคุม ซึ่งมีค่าดังสมการด้านล่าง

$$\frac{dW}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_y) \right] dxdy \tag{2.27}$$

นำผลที่ได้จากสมการ (2.24), (2.26) และ (2.27) แทนลงไปในสมการ (2.23) แล้วจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{\mathrm{f}}.\vec{\mathrm{V}} = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}) \\ + \frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\sigma_y) \end{aligned} \tag{2.28}$$

จากสมการ (2.28) ถ้ากำหนดให้ ε แทนผลรวมของพลังงานภายในและพลังงานจลน์ดังสมการ

$$\varepsilon = e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \tag{2.29}$$

จะได้ว่าสมการ (2.28) เปลี่ยนรูปมาเป็น

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xy}) \\ + \frac{\partial}{\partial y}(u\sigma_y) + \rho(uf_x + vf_y) \end{aligned} \tag{2.30}$$

เช่นเดียวกับความเร็ว ค่า ε เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (x,y) และเวลา (t) เช่นกัน ดังนั้น

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{2.31}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (2.30) จะได้

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)=\rho q-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\tau_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\sigma_y\right)+\rho\left(uf_x+vf_y\right) \tag{2.32}$$

จัดพจน์ต่างๆ ทางด้านซ้ายของสมการ (2.32) ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์จะได้

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)=\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\varepsilon\right) \tag{2.33}$$

จากสมการที่ (2.33) สามารถกระจายพจน์บางพจน์ได้เป็น

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon\right)-\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.34}$$

$$\rho\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\varepsilon=\nabla\cdot\left(\varepsilon\rho\vec{\mathrm{V}}\right)-\varepsilon\nabla\cdot\left(\rho\vec{\mathrm{V}}\right) \tag{2.35}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (2.32) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)-\varepsilon\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{\mathrm{V}}\right)\right]+\nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{\mathrm{V}}\right)=\rho q-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\tau_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\sigma_y\right)+\rho\left(uf_x+vf_y\right) \tag{2.36}$$

เนื่องจากพจน์ต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในวงเล็บใหญ่ของสมการ (2.36) เหมือนกับสมการที่ (2.9) ดังนั้นสมการ (2.36) จึงลดรูปมาเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon\right)+\nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{\mathrm{V}}\right)=\rho q-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\tau_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\sigma_y\right)+\rho\left(uf_x+vf_y\right) \tag{2.37}$$

จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier’s law) อัตราการถ่ายเทความร้อนของวัตถุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic material) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.38a}$$

$$q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.38b}$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล (Thermal conductivity)

T แทนอุณหภูมิของของไหล

เมื่อนำสมการ (2.38a-b) แทนลงในสมการ (2.37) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{\mathrm{V}}\right)&=\rho q-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x)+\frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx})\\&+\frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(u\sigma_y)+\rho(uf_x+vf_y)\end{aligned}\tag{2.39}$$

จากสมมติฐานที่พิจารณาในสภาวะคงตัวและไม่พิจารณาผลของฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous dissipation function) ทำให้สมการ (2.39) จัดรูปได้เป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)=\rho q+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\tag{2.40}$$

คุณสมบัติต่างๆของของไหลจะเป็นฟังก์ชันของความดันและอุณหภูมิ แต่จากการสมมติว่าความแตกต่างที่เกิดขึ้นภายในขอบเขตที่พิจารณานี้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ทำให้เราสามารถถือได้ว่าคุณสมบัติต่างๆที่พิจารณามีค่าคงที่ ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานภายใน (e) กับการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ สามารถเขียนดังสมการด้านล่าง

$$e = e_0 + c(T-T_0)\tag{2.41}$$

โดย e_0 คือค่าพลังงานภายในของไหลที่อุณหภูมิเฉลี่ย

T_0 คืออุณหภูมิเฉลี่ยของของไหล

c คือค่าความร้อนจำเพาะของของไหลเมื่อปริมาตรคงที่

จากสมการที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ ทำให้สามารถแทนค่าพลังงานภายในซึ่งอยู่ในเทอมด้านซ้ายของสมการที่ (2.40) ด้วยอุณหภูมิ ดังนั้น สามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\rho q+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\tag{2.42}$$

สมการอนุรักษ์พลังงานที่ได้นี้จะถูกนำไปพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในบทต่อไป

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.4 ผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ

เมื่อของไหลได้รับความร้อนจะเกิดความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ ซึ่งความแตกต่างของอุณหภูมิจะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่น โดยของไหลบริเวณอุณหภูมิสูงมีความหนาแน่นลดลงทำให้ของไหลลอยตัวสูงขึ้น ซึ่งแรงที่ทำให้ของไหลลอยตัวขึ้นนี้เรียกว่า แรงลอยตัว (Buoyant force) และแรงดังกล่าวนี้เองทำให้เกิดการพาความร้อนแบบอิสระ โดยของไหลที่ร้อนจะลอยตัวสูงขึ้นและเป็นผลให้ของไหลเย็นรอบข้างร้อนขึ้นด้วย ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิมีค่าไม่มากนักเราอาจสมมติให้การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นเกิดขึ้นเพียงเล็กน้อยจนสามารถพิจารณาของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ ดังนั้นจากสมมติฐานของบูซซิเนซค์ (Boussinesq approximation) ซึ่งสมมติให้มีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นเฉพาะพจน์ของแรงลอยตัว โดยที่พจน์อื่นๆไม่มีการเปลี่ยนแปลง เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y ซึ่งรวมพจน์ของแรงลอยตัวได้ดังนี้ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2545)

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + g(\rho - \rho_\infty) + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] \tag{2.43}$$

จากคำจำกัดความของสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนเชิงปริมาตร (Coefficient of thermal expansion, β)

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \tag{2.44}$$

ค่า β นี้เป็นคุณสมบัติทางความร้อนของไหลซึ่งเป็นตัววัดความหนาแน่นที่เปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ความดันคงที่ ซึ่งค่าโดยประมาณของ β คือ

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}\right)$$

ทำการจัดรูปสมการข้างบนใหม่จะได้

$$\rho_\infty - \rho \approx \rho\beta(T - T_\infty) \tag{2.45}$$

แทนค่า $(\rho_\infty - \rho)$ นี้ลงในสมการ (2.43) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน y เป็น

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \quad = \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \beta \left(T - T_\infty\right) + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] \qquad (2.46)$$

ถ้าพิจารณาของไหลเป็นก๊าซในอุดมคติที่มีความหนาแน่น $\rho = \dfrac{P}{RT}$ นำค่า ρ นี้ไปแทนค่าในสมการที่ (2.44) จะได้ว่า

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = \left(-\frac{RT}{P}\right)\left(-\frac{P}{RT^2}\right) \qquad (2.47)$$

นั่นก็คือ

$$\beta = \frac{1}{T} \qquad (2.48)$$

โดยที่ T คืออุณหภูมิสัมบูรณ์

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะตั้งสมมุติฐานว่า β เป็นค่าคงที่ โดยแทนค่า T เป็นค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุดของของไหล

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

3.1 บทนำ

ในบทนี้ จะแสดงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม (Finite volume method) กับสมการพื้นฐานของการไหลและการถ่ายเทความร้อนจากบทที่ผ่านมา โดยจะทำการศึกษาขั้นตอนต่าง ๆ ของระเบียบวิธีนี้และ Scheme ต่าง ๆ ที่ใช้ในการประมาณค่าสเกลาร์ ϕ ที่บริเวณผิวของปริมาตรควบคุม รวมถึงเงื่อนไขขอบ กระบวนการที่ใช้ในการหาคำตอบและการคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

3.2 สมการควบคุมพื้นฐาน

สำหรับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในการแก้ไขปัญหา การนำความร้อนและการพาความร้อนของการไหล สามารถแสดงสมการควบคุมพื้นฐาน (Governing equations) รูปทั่วไปในสภาวะคงตัวของตัวแปร ϕ ได้ดังนี้

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}}_{\text{Convection Terms}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}_{\text{Diffusion Terms}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{Source Term}} \tag{3.1}$$

โดยรายละเอียดของแต่ละสมการสำหรับการไหลแบบราบเรียบถูกแสดงในตารางที่ 3.1

สมการ (3.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์พื้นฐานที่จะนำมาแก้สมการ โดยสามารถใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขไฟไนต์วอลุมมาเปลี่ยนรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิตโดยการอินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุม CV ได้เป็น

$$\int_{CV}\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}dV+\int_{CV}\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}dV=\int_{CV}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dV+\int_{CV}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dV+\int_{CV}S_\phi dV \tag{3.2}$$

โดยสมการนี้ก็คือ สมการพื้นฐานในรูปทั่วไปที่เขียนอยู่ในรูปของอินทิกรัลนั่นเอง

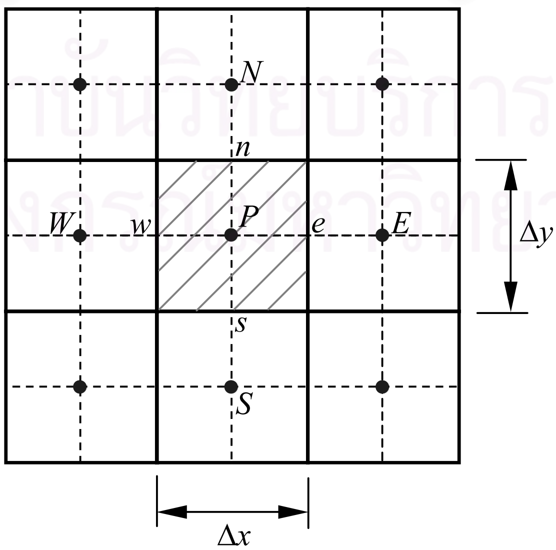
ตารางที่ 3.1 รูปสมการ Transport ของการไหลแบบราบเรียบเปรียบเทียบกับสมการพื้นฐานในรูปทั่วไป

Transport Equation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuity	1	0	0
x–Momentum	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)$
y–Momentum	v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

3.3 ปัญหาการแพร่กระจาย

ในการแก้ไขปัญหาการแพร่กระจาย (Diffusion problem) ในสองมิติ เราจะทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยใช้สมการรูปทั่วไปที่สภาวะคงตัว เมื่อพิจารณาเทอมการแพร่กระจายเพียงเทอมเดียว จากสมการที่ (3.1) จะได้สมการของการแพร่กระจาย ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S_\phi=0 \tag{3.3}$$



รูปที่ 3.1 การวางตัวของปริมาตรควบคุมในสองมิติของปัญหาการแพร่กระจาย

จากสมการที่ (3.3) ทำการอินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุมในสองมิติ (รูปที่ 3.1) ได้เป็น

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_{\Delta V} S_\phi dxdy = 0 \tag{3.4}$$

กำหนดให้ $A_e = A_w = 1\times\Delta y$ และ $A_n = A_s = \Delta x\times 1$ ดังนั้นจะได้

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w\right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_s\right] = 0 \tag{3.5}$$

จากสมการ (3.5) สามารถแสดงฟลักซ์ที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมได้ดังนี้

ฟลักซ์ที่ไหลผ่านผิวปริมาตรควบคุมทิศตะวันตก

$$\Gamma_w A_w \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} \tag{3.6a}$$

ฟลักซ์ที่ไหลผ่านผิวปริมาตรควบคุมทิศตะวันออก

$$\Gamma_e A_e \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} \tag{3.6b}$$

ฟลักซ์ที่ไหลผ่านผิวปริมาตรควบคุมทิศใต้

$$\Gamma_s A_s \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} \tag{3.6c}$$

ฟลักซ์ที่ไหลผ่านผิวปริมาตรควบคุมทิศเหนือ

$$\Gamma_n A_n \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}} \tag{3.6d}$$

นำค่าจากสมการ (3.6a-d) ไปแทนลงในสมการ (3.5) จะได้ว่า

$$\Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} + \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}}$$

$$- \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} + \bar{S}\,\Delta V = 0 \tag{3.7}$$

ถ้าสมมติว่าการกระจายของ Source term ในปริมาตรควบคุมเป็นแบบเชิงเส้นจะได้ว่า $\bar{S}\,\Delta V = S_u + S_P\phi_P$ เพราะฉะนั้นสมการ (3.7) สามารถเขียนได้เป็น

$$\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}+\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}+\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}+\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}-S_p\right)\phi_P=\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}\right)\phi_W+\left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}\right)\phi_E$$

$$+\left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}\right)\phi_S+\left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}\right)\phi_N+S_u \tag{3.8}$$

ดังนั้น จะได้สมการพีชคณิตของสมการทั่วไปคือ

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + S_u \tag{3.9}$$

เมื่อ

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$$

$$a_S = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$$

และ $$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_p$$

สมการ (3.9) นี้สามารถนำไปแก้ไขปัญหาการนำความร้อนได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบต่างๆ ของปัญหาที่พิจารณา

ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม (Conduction in rectangular plate)

สำหรับปัญหานี้เป็นตัวอย่างการจำลองปัญหาการนำความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม โดยมีลักษณะของปัญหาเป็นการนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยม ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 3.2 มีการกำหนดให้เงื่อนไขขอบที่ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิเป็น 100 ^{o}C ขณะที่ผนังด้านบนและด้านขวากำหนดให้มีอุณหภูมิเท่ากับ 0 ^{o}C ส่วนขอบผนังด้านล่างกำหนดให้เป็นฉนวน สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาจะพิจารณาเฉพาะเทอมของการแพร่กระจายที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าคือ T ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.10)$$

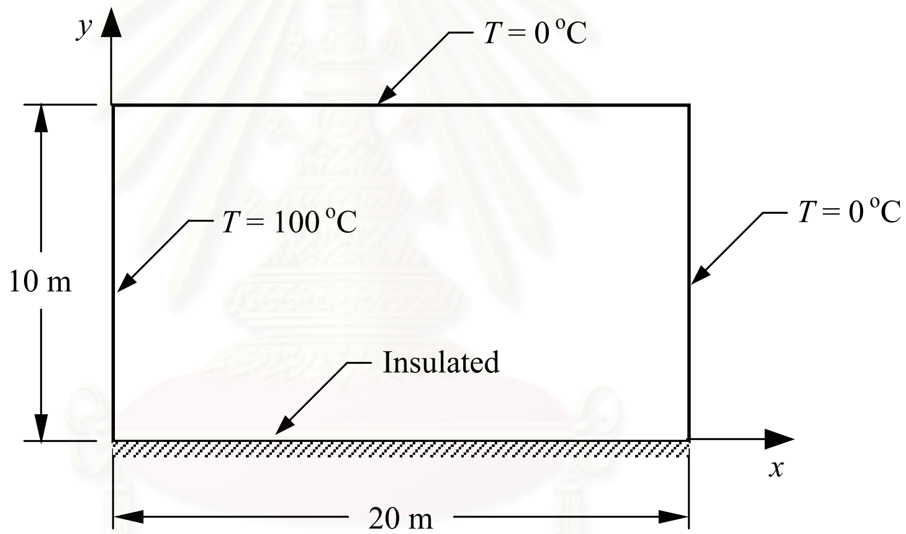
โดยมีเงื่อนไขขอบคือ

$$T(0, y) = 100 \qquad (3.11a)$$

$$T(10, y) = 0 \qquad (3.11b)$$

$$T(20, y) = 0 \qquad (3.11c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \qquad (3.11d)$$



รูปที่ 3.2 ลักษณะของปัญหาการนำความร้อนของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม

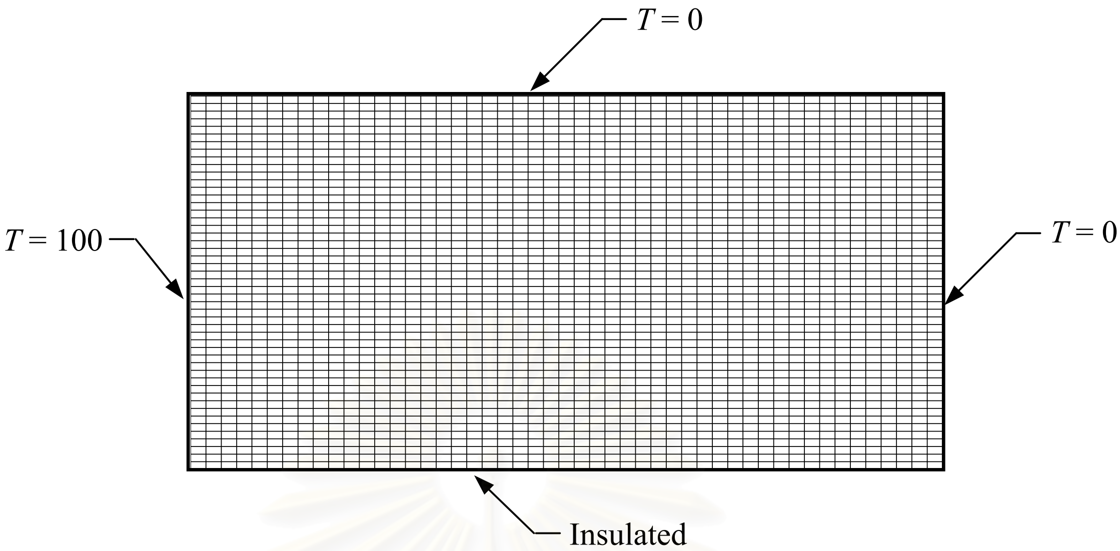
ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงซึ่งหาได้จากสมการด้านล่าง

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{(2n-1)}{20}\pi(20-x)\right]\cos\left[\frac{(2n-1)}{20}\pi y\right] \qquad (3.12)$$

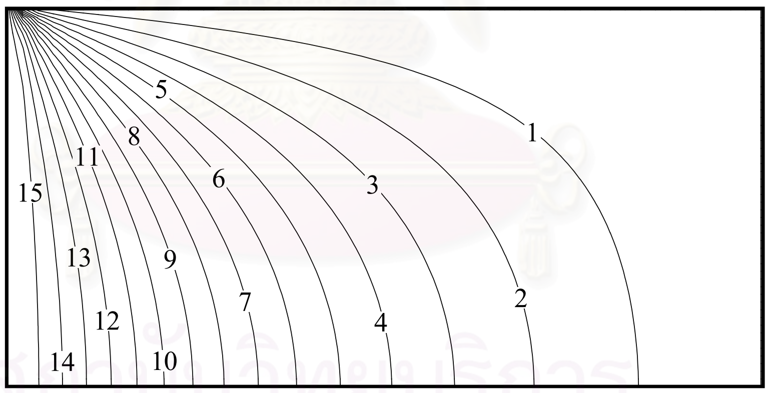
โดยที่

$$A_n = 20\sin[10\pi(2n-1)] \times \int_0^{10} \cos\left[\pi\left(\frac{2n-1}{2}\right) y dy\right]$$

เมื่อ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$



รูปที่ 3.3 รูปแบบการจำลองไฟไนต์วอลุมในปัญหาการนำความร้อนของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม

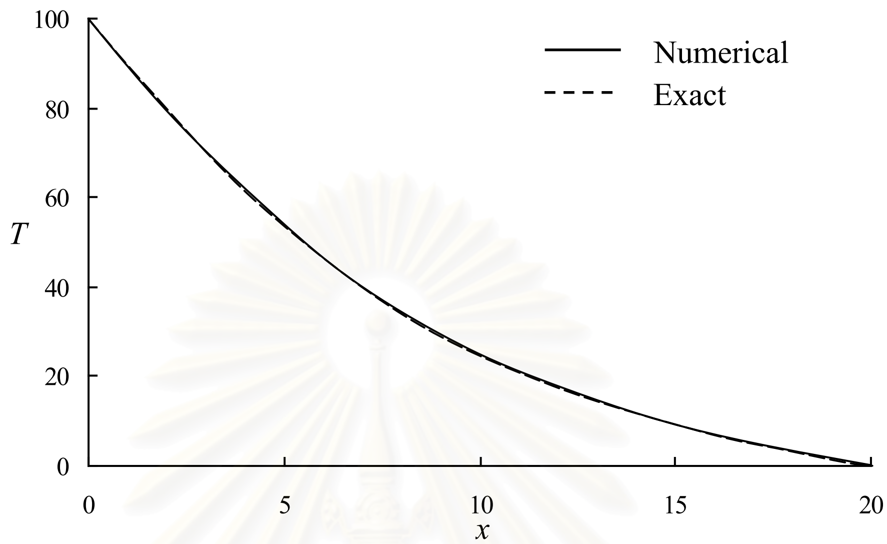


Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T:	6.3	12.5	18.8	25.0	31.3	37.5	43.8	50.0	56.3	62.5	68.8	75.0	81.3	87.5	93.8

รูปที่ 3.4 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิจากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในปัญหาการนำความร้อนของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม

จากการใช้กริดขนาด 50×50 ดังแสดงในรูปที่ 3.3 เราจะได้ผลการกระจายตัวของอุณหภูมิดังแสดงในรูปที่ 3.4 และเมื่อทำการเปรียบเทียบอุณหภูมิบริเวณผนังด้านล่างของแผ่นบางที่ตำแหน่ง x ต่างๆ ระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลเฉลยแม่น

ตรง ในสมการที่ (3.12) (รูปที่ 3.5) จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการคำนวณและผลเฉลยแม่นตรงมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



รูปที่ 3.5 อุณหภูมิที่ขอบผนังด้านล่างของแผ่นบางที่ตำแหน่ง x ต่างๆระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลเฉลยแม่นตรง

3.4 ปัญหาการพาและการแพร่กระจาย

ในปัญหานี้ นอกจากเทอมการแพร่กระจายแล้ว จะนำเทอมของการพามาพิจารณาด้วย ซึ่งโดยปกติเทอมการพานี้จะเกิดจากการไหลของของไหลในปัญหานั้น ซึ่งเราจำเป็นจะต้องทราบสนามการไหลที่เกิดขึ้น เพื่อให้สามารถทราบถึงตัวแปร (เช่น อุณหภูมิ ความเข้มข้นของมวล เป็นต้น) ที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเนื่องมาจากการไหลดังกล่าว จากสมการในรูปทั่วไป (สมการ (3.1)) เราสามารถเขียนสมการของตัวแปร ϕ ในปัญหาการแพร่กระจายและการพาใน 2 มิติที่มีสภาวะคงตัวได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S_\phi \tag{3.13}$$

ในการเปลี่ยนรูปสมการตั้งต้นที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม สามารถทำได้โดยทำการอินทิเกรตสมการตั้งต้นตลอดปริมาตรควบคุมในรูปที่ 3.1

$$\int_{\Delta V}\left[\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}\right]dV=\int_{\Delta V}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S_\phi\right]dV \tag{3.14}$$

จากการแยกพิจารณาอินทิกรัลทีละเทอม โดยกำหนด $A_e = A_w = 1\times\Delta y$ และ $A_n = A_s = \Delta x\times 1$ จะได้เทอมของการพาในสองแนวแกน คือ

$$\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)dV = (\rho uA)_e\phi_e - (\rho uA)_w\phi_w = F_e\phi_e - F_w\phi_w \tag{3.15a}$$

$$\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)dV = (\rho vA)_n\phi_n - (\rho vA)_s\phi_s = F_n\phi_n - F_s\phi_s \tag{3.15b}$$

เทอมการแพร่กระจาย คือ

$$\begin{aligned}\int_{\Delta V}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]dV &= \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}A\right)_e - \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}A\right)_w \\ &= D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)\end{aligned} \tag{3.16a}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Delta V}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right]dV &= \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}A\right)_n - \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}A\right)_s \\ &= D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S)\end{aligned} \tag{3.16b}$$

และ Source term คือ

$$\int_{\Delta V}S_\phi dV = S_\phi V \tag{3.17}$$

เมื่อ F คือ สัมประสิทธิ์ของการพา มีค่าเท่ากับ ρuA

และ D คือ สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจาย มีค่าเท่ากับ $\dfrac{\Gamma A}{\delta}$

ค่าของ ϕ บนผิวปริมาตรควบคุมในเทอมการพาที่อยู่ในสมการสามารถหาได้จากการประมาณค่าด้วย Scheme ต่างๆ เช่น Central differencing, Upwind differencing, Hybrid differencing หรือ Power–Law scheme โดยรายละเอียดของ Scheme ต่าง ๆ มีดังต่อไปนี้

1) Central differencing scheme เป็นการประมาณเชิงเส้นของค่า ϕ โดยการหาค่าเฉลี่ยที่เกิดขึ้นที่ผิวของปริมาตรควบคุม ดังนี้

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \tag{3.18a}$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \tag{3.18b}$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \tag{3.18c}$$

$$\phi_s = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \tag{3.18d}$$

เมื่อนำค่าจากสมการ (3.15), (3.16) และ (3.17) แทนลงในสมการ (3.14) และนำค่าเฉลี่ยของค่า ϕ ที่ Interface ต่างๆตามสมการข้างบนลงไปแทนค่า จะได้

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E+\phi_P)-\frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P+\phi_W)+\frac{1}{2}(\rho v)_n(\phi_N+\phi_P)-\frac{1}{2}(\rho v)_s(\phi_P+\phi_S)$$
$$=\frac{\Gamma_e(\phi_E-\phi_P)}{(\delta x)_e}-\frac{\Gamma_w(\phi_P-\phi_W)}{(\delta x)_w}+\frac{\Gamma_n(\phi_N-\phi_P)}{(\delta y)_n}-\frac{\Gamma_s(\phi_P-\phi_S)}{(\delta y)_s}+S_\phi V \quad (3.19)$$

โดยกำหนดให้ $F=\rho uA$ และ $D=\frac{\Gamma A}{\delta}$ จะสามารถเขียนสมการพีชคณิตของสมการทั่วไปจากสมการข้างต้นได้ดังนี้

$$a_P\phi_P=a_W\phi_W+a_E\phi_E+a_S\phi_S+a_N\phi_N+S_\phi V \quad (3.20)$$

โดย $$a_N=D_n-\frac{F_n}{2}$$

$$a_S=D_s+\frac{F_s}{2}$$

$$a_E=D_e-\frac{F_e}{2}$$

$$a_W=D_w+\frac{F_w}{2}$$

และ $$a_P=a_N+a_S+a_E+a_W+(F_n-F_s+F_e-F_w)$$

ซึ่งเมื่อใช้กฎอนุรักษ์มวล $F_n-F_s+F_e-F_w=0$ จะได้ว่า

$$a_P=a_N+a_S+a_E+a_W$$

จากสมการ (3.20) จะเห็นได้ว่าการใช้ Central-differencing scheme นี้อาจทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ a_N, a_S, a_E หรือ a_W มีค่าเป็นลบ ซึ่งเป็นการละเมิดต่อกฎพื้นฐาน (Basic rules ใน Patankar (1980)) ที่ว่า เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ติดลบจะทำให้ $a_P \neq \sum|a_{nb}|$ ซึ่งไม่เป็นไปตาม Scarborough criterion ดังนั้นจะทำให้ผลเฉลยของปัญหาไม่ลู่เข้าสู่ค่าใดๆ ซึ่งเหล่านี้คือเหตุผลที่วิธี Central-difference ไม่เป็นที่นิยมเมื่อต้องแก้ปัญหาการพาและการแพร่กระจายที่มีค่าเพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number, Pe) สูง

2) Upwind differencing scheme เป็นวิธีที่เสนอโดย Courant et al. (1952) จุดประสงค์ในการคิดค้นวิธีนี้ก็เพื่อแก้ไขปัญหาที่เกิดจากการสมมติว่าค่าของการพาที่ Interface ϕ_e เกิดจากค่าเฉลี่ยระหว่าง ϕ_E และ ϕ_P โดยเสนอแนวคิดใหม่คือเทอมการแพร่กระจายไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ในเทอมการพาสามารถคำนวณโดยสมมติฐานที่ว่า ค่าของ ϕ ที่ Interface มีค่าเท่ากับค่าของ ϕ ที่ Grid point ของผิวปริมาตรควบคุมด้านต้นกระแสการไหล (Upstream) นั่นคือ

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{เมื่อ} \quad F_e > 0 \tag{3.21a}$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{เมื่อ} \quad F_e < 0 \tag{3.21b}$$

และ

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{เมื่อ} \quad F_w > 0 \tag{3.22a}$$

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{เมื่อ} \quad F_w < 0 \tag{3.22b}$$

ค่าของ ϕ_n และ ϕ_s ก็หาได้ในลักษณะเดียวกัน ดังนั้นสามารถเขียนสมการพีชคณิตของสมการทั่วไปได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + S_\phi V \tag{3.23}$$

โดย $\quad a_N = \max[-F_n, 0]$

$$a_S = \max[F_s, 0]$$

$$a_E = \max[-F_e, 0]$$

$$a_W = \max[F_w, 0]$$

และ $\quad a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + (F_n - F_s + F_e - F_w)$

เมื่อ $\max[A, B]$ คือ ค่าสูงสุด ที่ได้จากการเปรียบเทียบค่าของ A กับ B

จากสมการ จะสังเกตได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ จะไม่สามารถมีค่าเป็นลบได้ ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าเป็นไปตามลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นจริง และทำให้สามารถแก้ปัญหาต่างๆ ได้โดยที่ผลเฉลยลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง

3) Hybrid differencing scheme ถูกเสนอโดย Spalding (1972) ซึ่ง Scheme นี้เป็นการรวมข้อดีของวิธี Central และ Upwind differencing scheme ไว้ด้วยกัน โดยเลือกใช้จากค่า Peclect number, $\mathrm{Pe} = \dfrac{F}{D}$ เราทราบว่าวิธี Central differencing scheme จะมี

ผลต่อการสั่นของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ เมื่อ Pe มีค่ามากกว่า 2 และน้อยกว่า –2 ดังนั้นวิธี Hybrid differencing scheme จึงใช้วิธีนี้ในช่วงค่า Pe ระหว่าง –2 ถึง 2 เท่านั้น ส่วนค่า Pe ที่อยู่นอกช่วง –2 ถึง 2 จะใช้วิธี Upwind differencing scheme ที่มีความถูกต้องแม่นยำเป็นอันดับที่ 1 (1^{st}-order accuracy) แต่มีเสถียรภาพในการคำนวณที่ดีกว่า ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการพีชคณิตของสมการทั่วไปได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + S_\phi V \tag{3.24}$$

โดย
$$a_N = \max\left[-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\right]$$

$$a_S = \max\left[F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0\right]$$

$$a_E = \max\left[-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right]$$

$$a_W = \max\left[F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right]$$

และ
$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + (F_n - F_s + F_e - F_w)$$

4) Power-Law scheme ถูกเสนอโดย Patankar (1980) โดยวิธีนี้เป็นวิธีที่ให้ค่าผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง (สำหรับปัญหาในหนึ่งมิติ) มากกว่าวิธี Hybrid scheme จากการกำหนดค่าในเทอมการแพร่กระจายให้มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อค่า Pe มีค่ามากกว่า 10 โดยการประมาณเป็นโพลิโนเมียล สามารถเขียนสมการพีชคณิตได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + S_\phi V \tag{3.25}$$

โดย
$$a_N = D_n \max\left[0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5\right] + \max[-F_n, 0]$$

$$a_S = D_s \max\left[0, (1 - 0.1|Pe_s|)^5\right] + \max[F_s, 0]$$

$$a_E = D_e \max\left[0, (1 - 0.1|Pe_e|)^5\right] + \max[-F_e, 0]$$

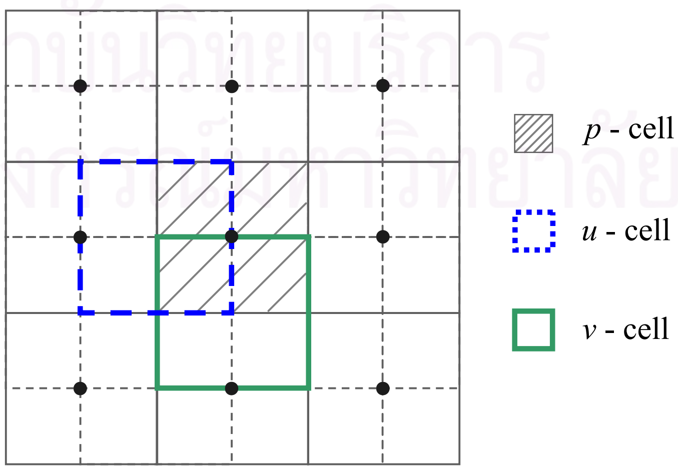
$$a_W = D_w \max\left[0, (1 - 0.1|Pe_w|)^5\right] + \max[F_w, 0]$$

และ $$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W - \left(F_n - F_s + F_e - F_w\right)$$

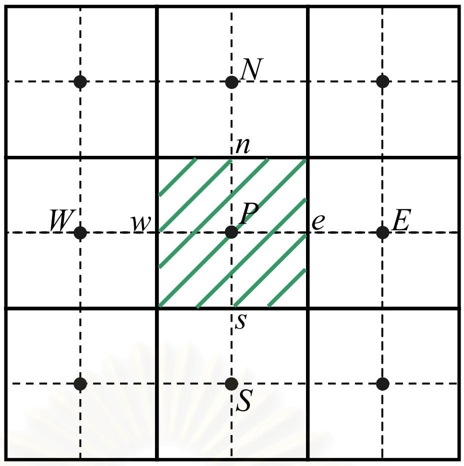
3.5 การแก้ปัญหาสนามการไหล

ในการแก้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั้น ผลเฉลยของสนามการไหลที่ได้จะมีค่าที่ไม่สอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล เพื่อให้ค่าผลเฉลยที่ได้จากสองสมการนี้มีความสอดคล้องกัน เราจะใช้ขั้นตอนวิธีที่เรียกว่า SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) ซึ่งถูกพัฒนาโดย Patankar and Spalding (1972) ขั้นตอนวิธีนี้เป็นขั้นตอนการแก้ปัญหาสนามการไหล โดยการสมมติค่าความดันและความเร็วในขอบเขตของปัญหาที่สนใจ แล้วคำนวณหาค่าความเร็วจากความเร็วและความดันสมมติ เพื่อที่จะนำค่าความเร็วที่คำนวณได้ไปหาค่าความดันอีกครั้ง โดยใช้ Pressure-correction method เพื่อช่วยในการคำนวณความดันที่ถูกต้อง ซึ่งค่า Pressure-correction ที่ได้นี้จะถูกนำกลับมาหาค่าความเร็ว และทำซ้ำตามขั้นตอนดังกล่าวจนกระทั่งผลเฉลยลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง ซึ่งวิธีนี้เป็นการช่วยให้ค่าความเร็วและความดันมีความสัมพันธ์เป็นไปตามการอนุรักษ์โมเมนตัมและการอนุรักษ์มวล โดยวิธีในโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้เป็นวิธีที่ใช้กับกริดแบบเยื้องกัน (Staggered grid)

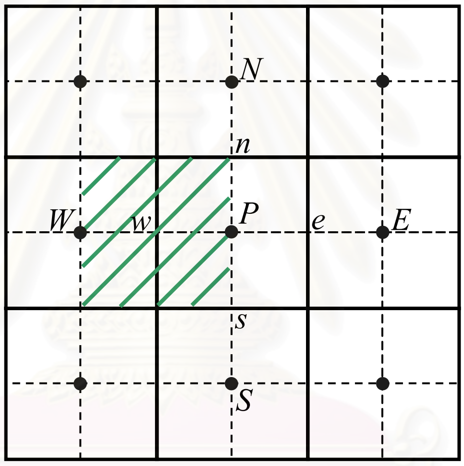
Staggered grid เป็นการแบ่งกริดเพื่อให้กริดของความเร็ว อยู่ระหว่างจุดต่อของตัวแปรสเกลาร์ ทั้งนี้เพื่อให้สอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) และแก้ปัญหาการเกิด Checker-board effect (Patankar, 1980) อันจะก่อให้เกิดความผิดพลาดในการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งการวางกริดของสเกลาร์ (ในที่นี้คือความดัน p) และความเร็ว u และ v ถูกแสดงในรูปที่ 3.6 และปริมาตรควบคุมของ p, u และ v ถูกแสดงในรูปที่ 3.6 ถึง 3.9



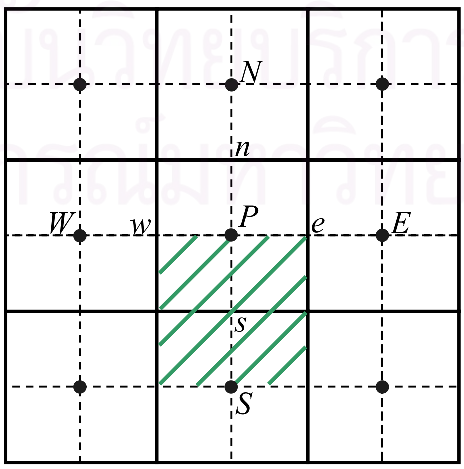
รูปที่ 3.6 การวางตัวของ Staggered grid



รูปที่ 3.7 การวางตัวของปริมาตรควบคุม p – cell



รูปที่ 3.8 การวางตัวของปริมาตรควบคุม u – cell



รูปที่ 3.9 การวางตัวของปริมาตรควบคุม v – cell

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{3.27}$$

ทำการอินทิเกรตสมการ (3.26) และ (3.27) ตลอดปริมาตรควบคุมในรูปที่ 3.8 และ 3.9 จะได้สมการดิสครีไทซ์ (Discretized equation) ดังต่อไปนี้

ในแกน x $$a_P u_P = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + S_u V + (p_W - p_P)A \tag{3.28}$$

ในแกน y $$a_P v_P = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + S_v V + (p_S - p_P)A \tag{3.29}$$

โดย

$$\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} = a_N u_N + a_S u_S + a_E u_E + a_W u_W$$

$$\sum_{nb} a_{nb} v_{nb} = a_N v_N + a_S v_S + a_E v_E + a_W v_W$$

เราจะจัดสมการอนุรักษ์มวลให้อยู่ในรูปของสมการผลต่างความดัน เพื่อใช้แก้ไขค่าความดัน และความเร็วในสนามการไหล โดยเริ่มจากการกำหนดค่าต่อไปนี้

$$p = p^* + p' \tag{3.30a}$$

$$u = u^* + u' \tag{3.30b}$$

$$v = v^* + v' \tag{3.30c}$$

เมื่อ

p, u และ v คือ ความดันและความเร็วที่ถูกต้อง

p^*, u^* และ v^* คือ ความดันที่กำหนดขึ้น (Guessed pressure) และความเร็วที่คำนวณจาก p^*

p', u' และ v' คือ ค่าความดันแก้ไข (Pressure correction) และค่าความเร็วแก้ไข (Velocity correction)

โดยที่ความเร็ว u^* และ v^* สามารถคำนวณได้จากสมการโมเมนตัมที่มีลักษณะเช่นเดียวกับสมการ (3.28) และ (3.29) ซึ่งจะได้สมการดิสครีไทซ์ของความเร็วทั้งสองเป็น

$$a_w u_w^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + S_u V + \left(p_W^* - p_P^*\right) A_w \tag{3.31}$$

$$a_s v_s^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + S_v V + \left(p_S^* - p_P^*\right) A_s \tag{3.32}$$

นำสมการ (3.30) แทนในสมการ (3.28) และ (3.29) แล้วลบด้วยสมการ (3.31) และ (3.32) ตามลำดับ ได้เป็น

$$a_w u'_w = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + \left(p'_W - p'_P\right) A_w \tag{3.33}$$

$$a_s v'_s = \sum_{nb} a_{nb} v'_{nb} + \left(p'_S - p'_P\right) A_s \tag{3.34}$$

โดยที่กำหนดให้ $\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$ และ $\sum_{nb} a_{nb} v'_{nb}$ มีค่าเป็นศูนย์ (Patankar, 1980) เมื่อการไหลสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล จะได้สมการของค่าความเร็วแก้ไข (Velocity-correction equation) ของ u_w เป็น

$$a_w u'_w = \left(p'_W - p'_P\right) A_w$$

หรือ $$u'_w = d_w \left(p'_W - p'_P\right) \tag{3.35}$$

เมื่อ $$d_w = \frac{A_w}{a_w}$$

$$\therefore \quad u_w = u_w^* + d_w \left(p'_W - p'_P\right) \tag{3.36}$$

โดยพิจารณาแบบเดียวกันสำหรับ u_e จะได้

$$u_e = u_e^* + d_e \left(p'_E - p'_P\right) \tag{3.37}$$

และสำหรับสมการความเร็วแก้ไขของ v_s

$$a_s v'_s = \left(p'_S - p'_P\right) A_s$$

$$v'_s = d_s \left(p'_S - p'_P\right) \tag{3.38}$$

โดย $$d_s = \frac{A_s}{a_s}$$

$$\therefore \quad v_s = v_s^* + d_s \left(p'_S - p'_P\right) \tag{3.39}$$

และจะได้

$$\mathrm{v}_n = v_n^* + d_n \left(p'_N - p'_P\right) \tag{3.40}$$

จากสมการอนุรักษ์มวลที่เขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$

อินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุมดังรูปที่ 3.7 ได้เป็น

$$\int_{\Delta V}\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dV=0$$

หรือ $$(\rho uA)_e-(\rho uA)_w+(\rho vA)_n-(\rho vA_s)=0 \tag{3.41}$$

เมื่อแทนค่าความเร็วจากสมการ (3.36), (3.37), (3.39) และ (3.40) จะได้สมการของความดันแก้ไข (Pressure-correction equation) ดังต่อไปนี้

$$a_P p'_P = a_N p'_N + a_S p'_S + a_E p'_E + a_W p'_W + b \tag{3.42}$$

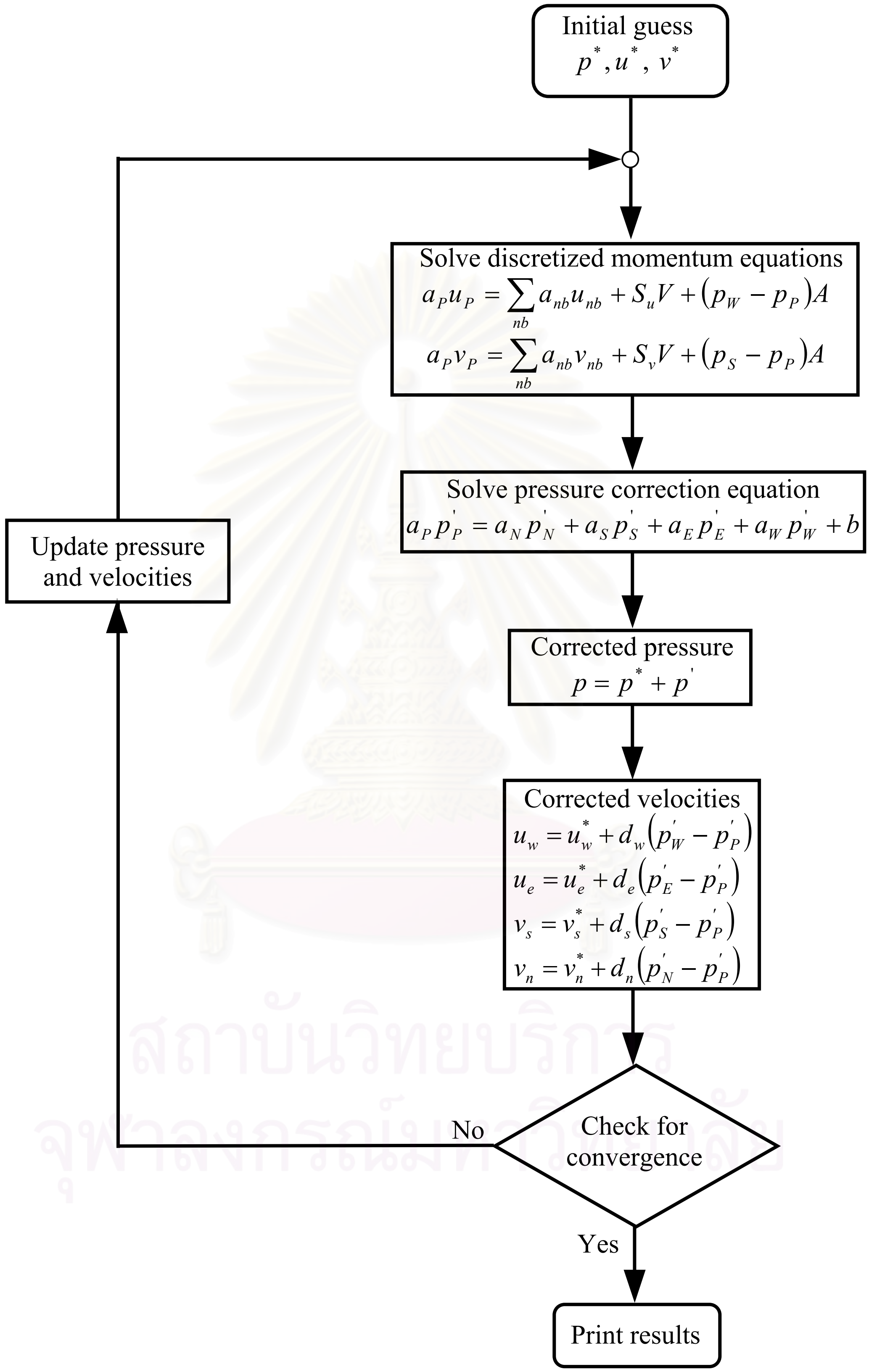
เมื่อ

$$\begin{aligned}
a_N &= \rho d_n A_n \\
a_S &= \rho d_s A_s \\
a_E &= \rho d_e A_e \\
a_w &= \rho d_w A_w \\
b &= (\rho u^* A)_e-(\rho u^* A)_w+(\rho v^* A)_n-(\rho v^* A_s)
\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถสรุปขั้นตอน SIMPLE algorithm ได้ดังนี้

1) เริ่มต้นสมมติค่าของ p^*, u^* และ v^*
2) คำนวณค่า u^*, v^* จากสมการ (3.31) และ (3.32)
3) นำค่า u^*, v^* ที่คำนวณได้มาแทนค่าในสมการ (3.42)
4) คำนวณค่า p' จากสมการ (3.42) แล้วนำมาแทนค่าในสมการ (3.30a) จากนั้นจึงนำค่า p ที่คำนวณได้มากำหนดให้เป็น p^* ค่าใหม่
5) คำนวณค่า u, v จากสมการ (3.36), (3.37), (3.39) และ (3.40) โดยใช้ค่า p' จากขั้นตอนที่ 4 จากนั้นจึงกำหนดค่า u, v ที่ได้เป็น u^*, v^* ค่าใหม่
6) ทำซ้ำขั้นตอนที่ 2 ถึง 5 จนกระทั่ง u^*, v^* และ p^* มีค่าลู่เข้าสู่ค่าที่ถูกต้อง โดยตรวจสอบจากการเข้าใกล้ศูนย์ของเทอม b (Mass source term) ในสมการ (3.42) ซึ่งแสดงว่าค่า u^*, v^* และ p^* ที่คำนวณได้สอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล

ขั้นตอนที่กล่าวมาทั้งหมดนี้สามารถแสดงเป็น Flow chart ได้ดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 ลำดับการทำงานของขั้นตอนวิธี SIMPLE

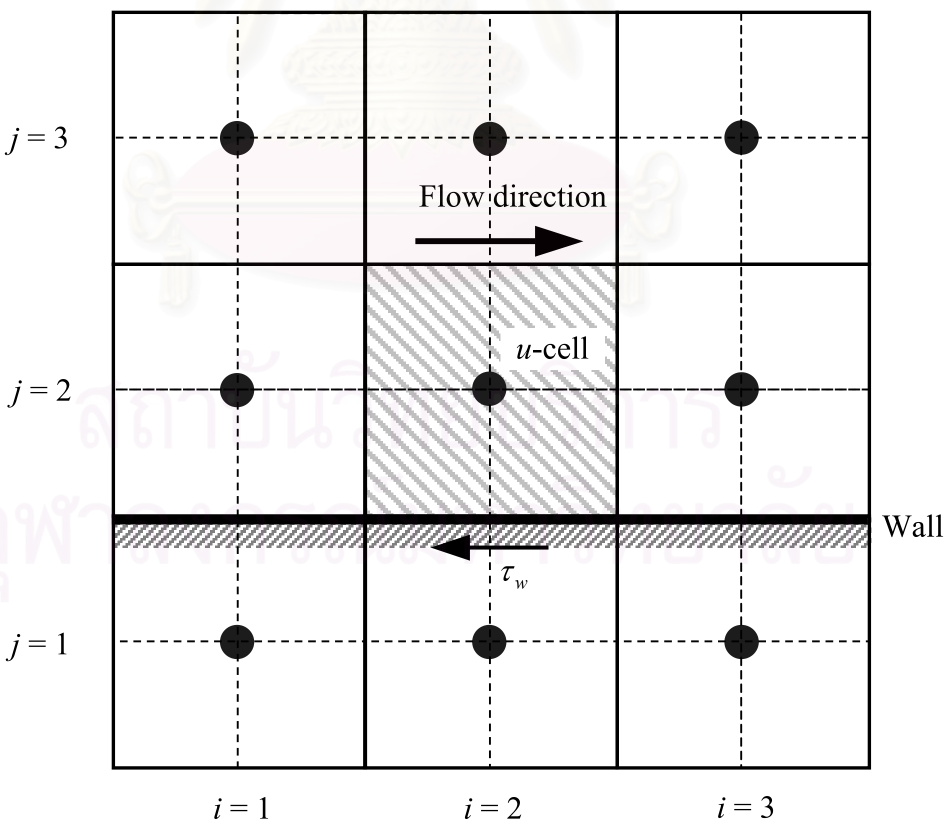
3.6 เงื่อนไขขอบ

การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาการคำนวณต่าง ๆ นั้น จำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบ (Boundary conditions) และเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) เนื่องจากสภาพทางกายภาพของปัญหาที่จำลองมาจะขึ้นกับการกำหนดเงื่อนไขเหล่านั้น ในหัวข้อนี้จะนำเสนอเงื่อนไขขอบทั่วไปที่ใช้ในวิธีไฟไนต์วอลุมโดยแบ่งเงื่อนไขเป็นสองประเภทใหญ่ๆ คือ

- เงื่อนไขขอบที่ผนัง (Wall boundary condition)
- เงื่อนไขขอบแบบสมมาตร (Symmetric boundary condition)

3.6.1 เงื่อนไขขอบที่ผนัง (Wall boundary condition)

ผนังเป็นเงื่อนไขขอบที่พบในปัญหาการไหลทั่วไป โดยอาจแบ่งเงื่อนไขขอบชนิดนี้เป็นเงื่อนไขย่อยหลายประเภท ซึ่งในที่นี้จะใช้ผนังที่ขนานกับแนวแกน x (รูปที่ 3.11) ในการพิจารณา



รูปที่ 3.11 ปริมาตรควบคุมที่ผนัง

เงื่อนไขที่ไม่มีการลื่นไถล (No-slip condition; $u = 0$, $v = 0$) เป็นเงื่อนไขการประมาณของความเร็วที่ผิวของแข็ง โดยความเร็วที่ขอบ ($j = 1$) มีค่าเท่ากับศูนย์ และปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดผนังมีค่า $a_S = 0$ เนื่องจากไม่มีการคำนวณ Pressure correction ที่ตำแหน่งนี้

เงื่อนไขขอบที่ผนังสำหรับการไหลแบบราบเรียบ เราจะพบว่าบริเวณผนังมีความเค้นเฉือนในแนว u มีค่าเป็น

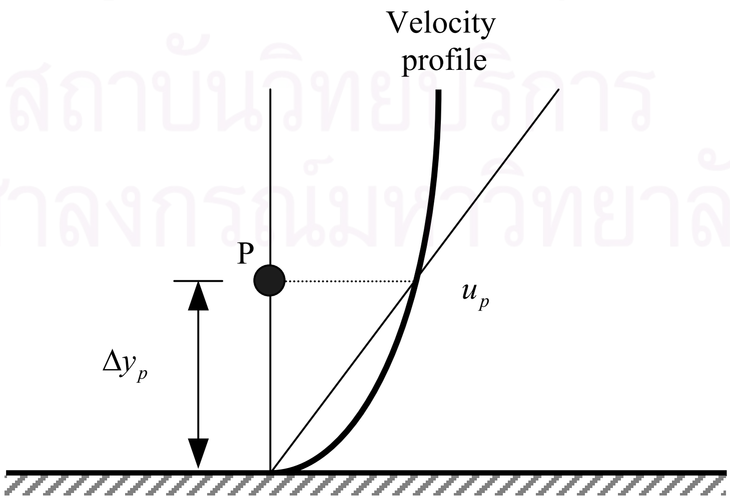
$$\tau_w = \mu \frac{u_p}{\Delta y_p} \tag{3.43}$$

จาก Velocity profile ในรูปที่ 3.12 ถ้าให้ค่า u_p คือค่าความเร็วที่ Node ซึ่งเป็นการประมาณค่าที่พิจารณาบริเวณใกล้ผิว และให้ค่าความเร็วมีการเปลี่ยนแปลงเป็นความสัมพันธ์เส้นตรงเมื่อเทียบกับระยะทาง จะได้แรงเฉือนมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} F_S &= -\tau_w A_{\text{cell}} \\ &= -\mu \frac{u_p}{\Delta y_p} A_{\text{cell}} \end{aligned} \tag{3.44}$$

โดยที่ A_{cell} คือพื้นที่ผนังของปริมาตรควบคุม ดังนั้นสามารถใส่เทอมของแรงเฉือนนี้เข้าไปใน Source term ของ u และสามารถเขียน Source term นี้ได้เป็น

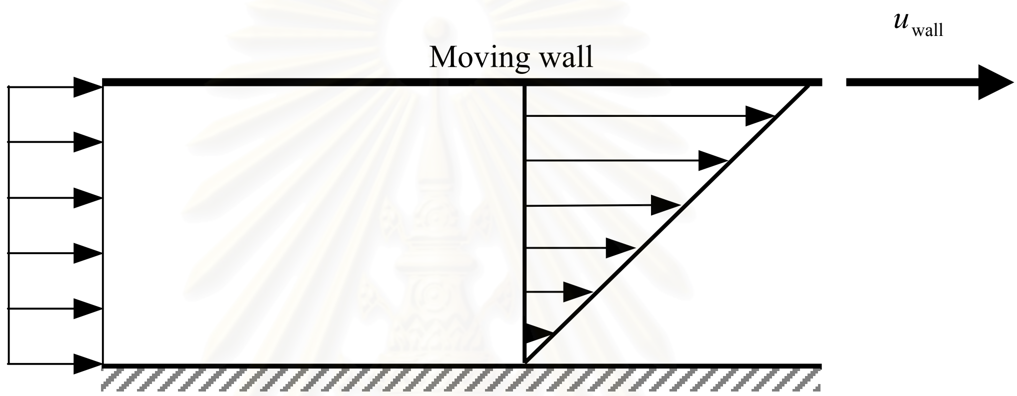
$$S_P = -\frac{\mu}{\Delta y_p} A_{\text{cell}} \tag{3.45}$$



รูปที่ 3.12 การกระจายตัวของความเร็วที่ผนัง

เงื่อนไขขอบสำหรับผนังที่มีการเคลื่อนที่ ถ้าสมมติให้ผนังที่มีการเคลื่อนที่ (Moving walls) นี้ มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x (รูปที่ 3.13) จะทำให้ของไหลมีการเคลื่อนที่เนื่องจากความเค้นเฉือนที่ผนัง ซึ่งค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นนั้นมาจากความแตกต่างระหว่างความเร็วที่ Node ในแนวแกน y ก่อนถึงผนัง กับความเร็วของผนังเคลื่อนที่ ดังนี้

$$F_s = -\mu \frac{\left(u_p - u_{\text{wall}}\right)}{\Delta y_p} A_{\text{cell}} \tag{3.46}$$

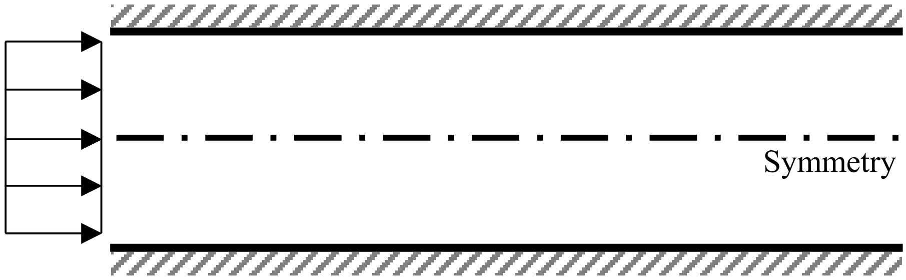


รูปที่ 3.13 ลักษณะของผนังเคลื่อนที่

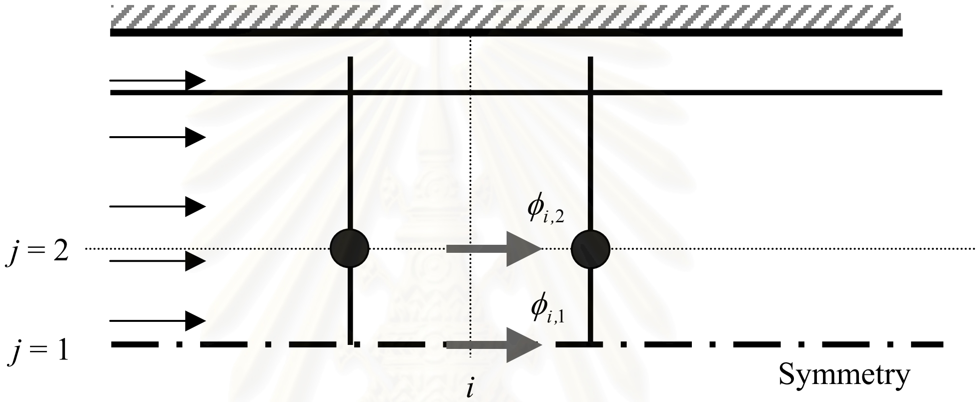
3.6.2 เงื่อนไขขอบแบบสมมาตร (Symmetric boundary condition)

ในการแก้ไขปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างสมมาตร การคำนวณโดยใช้โดเมนทั้งหมดจะทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์โดยใช่เหตุ การกำหนดเงื่อนไขที่สมมาตรจะช่วยให้ทำการคำนวณได้รวดเร็วขึ้น ซึ่งการกำหนดขอบเขตแบบนี้สามารถทำได้โดยกำหนดเงื่อนไขที่ว่าไม่มีการไหลและไม่มีฟลักซ์ผ่านขอบเขต นั่นคือกำหนดค่าความเร็วในแนวตั้งฉากกับขอบเขตที่สมมาตรให้มีค่าเป็นศูนย์ (v = 0) และให้ค่าของตัวแปรบนขอบผนังมีค่าเท่ากับตัวแปรนั้นบน Cell ที่ถัดขึ้นมาจากผนัง ($\phi_{i,1} = \phi_{i,2}$) ดังแสดงในรูปที่ 3.14

ผลเฉลยที่ได้จากการใช้เงื่อนไขสมมาตรจะมีค่าเท่ากับผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณทั้งหมด นอกจากนี้การใช้เงื่อนไขสมมาตร ยังทำให้สามารถเพิ่มความละเอียดในการคำนวณเพิ่มขึ้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ เป็นการใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้นนั่นเอง



a)



b)

รูปที่ 3.14 a) ช่องการไหลที่สมมาตร b) โดเมนของช่องการไหลที่ใช้เงื่อนไขสมมาตรแล้ว

3.7 การหาคำตอบโดยใช้วิธี TDMA (Tri–Diagonal Matrix Algorithm)

การแก้สมการพีชคณิต เช่น สมการ (3.9) เพื่อหาผลเฉลยของสมการนั้น สามารถทำได้โดยใช้ขั้นตอนวิธี TDMA ในการแก้ระบบสมการ ซึ่งวิธี TDMA นี้ เป็นที่นิยมใช้ในการคำนวณแก้สมการเมตริกซ์ที่มีแนวเส้นทแยงมุมหลัก

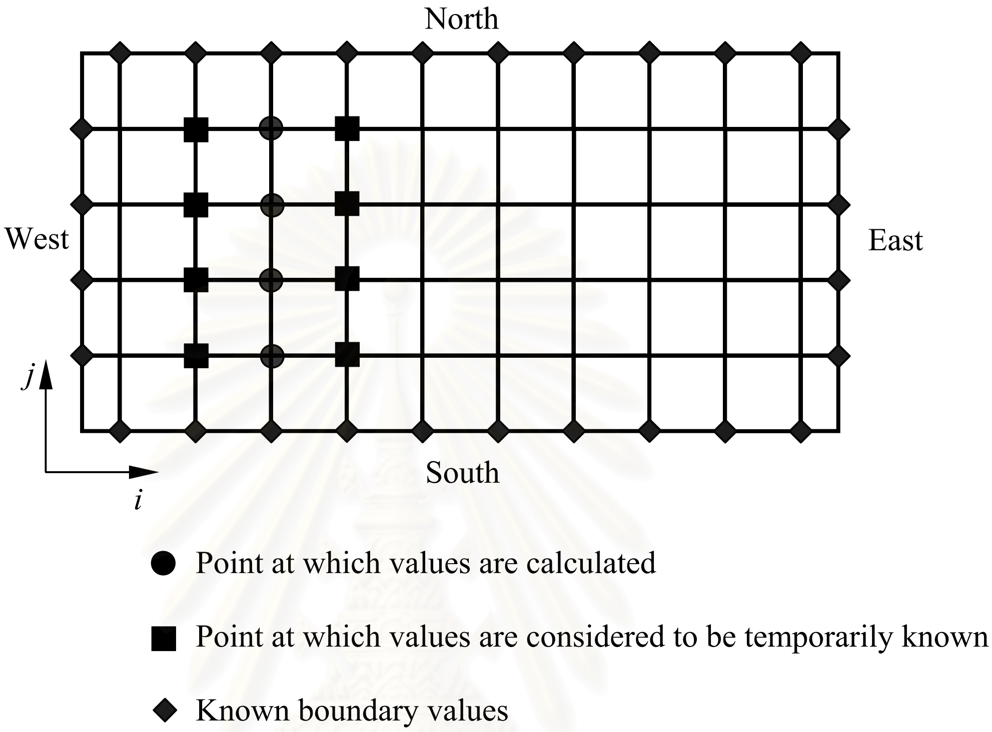
จากรูปที่ 3.15 เมื่อพิจารณา Computational domain จะพบว่ามีลักษณะเป็นเส้น ๆ ประกอบกัน เราสามารถคำนวณค่าตัวแปรที่จุดต่างๆบนเส้นแต่ละเส้นโดยวิธี TDMA โดยสมมติว่าทราบค่าบริเวณจุดต่อข้างเคียงและใช้วิธีการคำนวณซ้ำ (Iterative method) จนได้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าค่าใดค่าหนึ่ง ตัวอย่างเช่น ในการแก้สมการ (3.9) เฉพาะแนวดิ่งซึ่งสามารถจัดรูปของสมการใหม่ดังนี้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$a_P\phi_P = a_N\phi_N + a_S\phi_S + C \tag{3.47}$$

โดยที่

$$C = a_E\phi_E + a_W\phi_W + S_C\Delta V \tag{3.48}$$



รูปที่ 3.15 Computational domain ที่ใช้วิธี TDMA ในการคำนวณ (Versteeg and Malalasekera, 1995)

เมื่อกำหนดให้

$$D_j = a_P\ ,\quad B_j = a_S\ ,\quad \alpha_j = a_N\ ,\quad C_j = a_E\phi_E + a_W\phi_W + S_C\Delta V$$

จะสามารถเขียนสมการ (3.47) ได้ใหม่เป็น

$$D_j\phi_j = \alpha_j\phi_{j+1} + B_j\phi_{j-1} + C_j \tag{3.49}$$

เมื่อจัดรูปสมการแล้วจะได้ว่า

$$\phi_j = A_j\phi_{j+1} + C'_j \tag{3.50}$$

จากสมการ (3.50) แทนที่ค่า j ด้วย $j-1$ และแทน $j+1$ ด้วย j จะได้สมการสำหรับ ϕ_{j-1} เป็น

$$\phi_{j-1} = A_{j-1}\phi_j + C'_{j-1} \tag{3.51}$$

แทนสมการ (3.51) ลงในสมการ (3.49) แล้วจัดรูปจะได้

$$\phi_j = \frac{\alpha_j}{D_j - B_j A_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{B_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - B_j A_{j-1}} \tag{3.52}$$

ซึ่งเมื่อทำการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการ (3.52) กับสมการ (3.50) จะสามารถหาค่า A_j และ C'_j ออกมาได้

เพราะฉะนั้น เราสามารถเขียนสมการรูปทั่วไปของวิธี TDMA ได้ดังนี้

$$\phi_j = A_j \phi_{j+1} + C'_j \tag{3.53}$$

เมื่อ $$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - B_j A_{j-1}}$$

และ $$C'_j = \frac{B_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - B_j A_{j-1}}$$

เนื่องจากเราทราบเงื่อนไขขอบของโดเมนที่ใช้ในการคำนวณ คือ ที่จุด $j=1$ และ $j = n+1$ ดังนั้นจะได้ค่าของ A_j และ C'_j ที่จุดเหล่านี้ ดังนี้

$A_{j=1} = 0$ และ $C'_{j=1} = \phi_1$

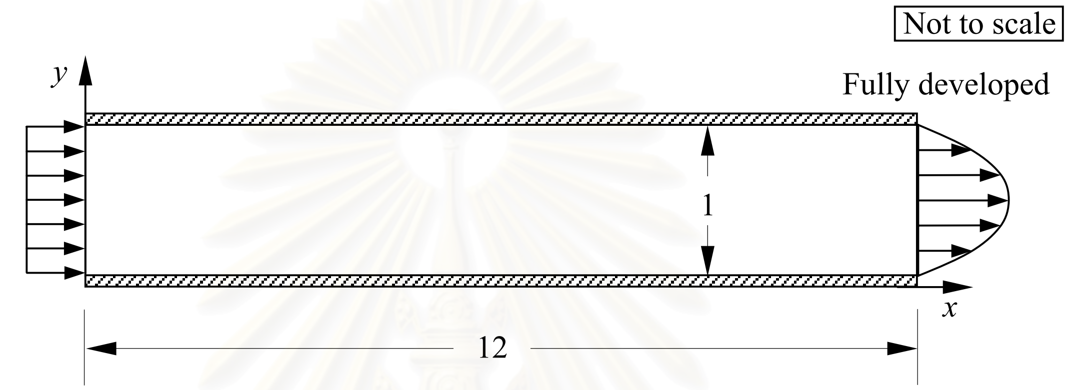
$A_{j=n+1} = 0$ และ $C'_{j=n+1} = \phi_{n+1}$

จากการที่เราทราบค่าดังกล่าว ทำให้เราสามารถแก้สมการหาค่าของผลลัพธ์ออกมาได้ ทั้งนี้โดยเริ่มจากการหาค่า A_j และ C'_j สำหรับทุกค่า j ($j = 1$ ถึง n) จากนั้นจึงหาค่าตัวแปร ϕ ของทุกจุดที่ต้องการ ย้อนกลับจาก ϕ_n ไปหา ϕ_1 โดยใช้วิธีแทนค่าย้อนกลับ (Backward substitution)

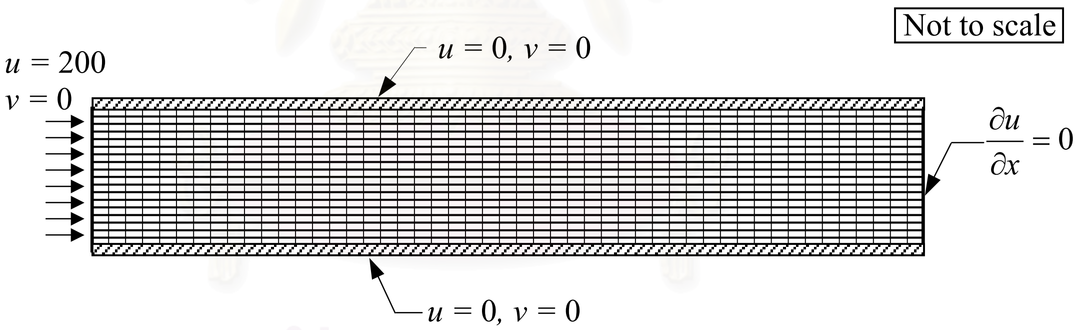
<u>ตัวอย่างที่ 2</u> การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว (Developing flow)

ลักษณะของปัญหาการไหลในตัวอย่างนี้ กำหนดให้มีการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform) เข้าทางด้านซ้าย ซึ่งการไหลดังกล่าวมีการปรับตัวจนกระทั่งการไหลมีลักษณะเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ (Fully-developed flow) ดังแสดงในรูปที่ 3.16 โดยกำหนดให้การไหลมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 200

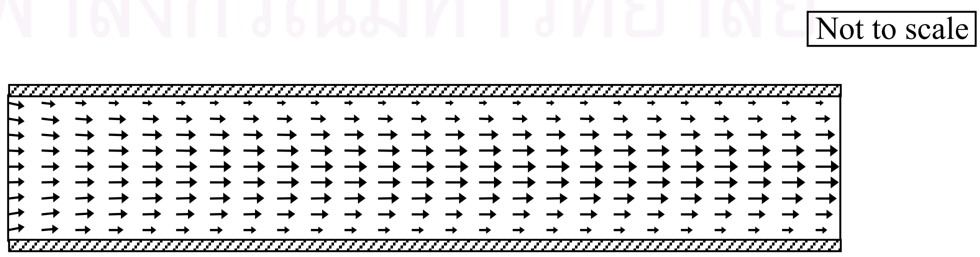
การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์วอลุมซึ่งประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมจำนวน 50×20 ช่อง ดังแสดงในรูปที่ 3.17 โดยกำหนดให้ความสูงของช่องการไหลมีค่าเท่ากับ 1 m และช่องการไหลยาวเท่ากับ 12 m สำหรับเงื่อนไขขอบของปัญหากำหนดให้ตลอดขอบของผนังทั้งด้านบนและด้านล่างถูกตรึงอยู่กับที่หรือความเร็วในแนวแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับ 0 m/s สำหรับตลอดขอบทางด้านเข้ากำหนดให้มีความเร็วในแนวราบ (u) เท่ากับ 200 m/s



รูปที่ 3.16 ลักษณะการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

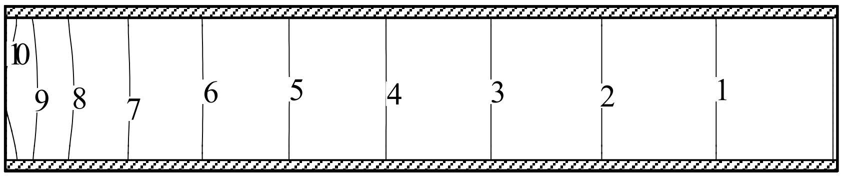


รูปที่ 3.17 รูปแบบจำลองไฟไนต์วอลุมพร้อมเงื่อนไขขอบของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานแบบมีการปรับตัว



รูปที่ 3.18 เวกเตอร์ของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

Not to scale



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p:	-11000	-7000	-3000	1000	5000	9000	13000	17000	21000	25000

รูปที่ 3.19 การกระจายตัวของความดันสำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

การกระจายตัวของความเร็วและความดันที่คำนวณได้แสดงในรูปที่ 3.18 และ 3.19 ตามลำดับ โดยจะเห็นว่าการปรับตัวของความดันเกิดขึ้นอย่างรวดเร็วในบริเวณที่ความเร็วกำลังทำการปรับตัวจากการไหลแบบสม่ำเสมอไปสู่การไหลแบบพัฒนาเต็มที่ ซึ่งจะเกิดความดันสูงสุดที่มุมของขอบทางเข้าและปรับตัวอย่างรวดเร็วจนกระทั่งการกระจายตัวของความดันมีค่าคงตัวและลดลงอย่างช้าๆ ไปยังทางออกของการไหล สิ่งที่จะพิจารณาต่อไปคือระยะในการปรับตัวเข้าสู่การไหลแบบพัฒนาเต็มที่ โดยที่ระยะดังกล่าวจะวัดจากปากทางเข้าจนถึงตำแหน่งที่ความเร็วในแนวแกนกลางของการไหลมีค่าเท่ากับ 99% ของค่าความเร็วสูงสุด ซึ่ง Shah and London (1978) ได้ให้ความสัมพันธ์ระหว่างระยะดังกล่าวกับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ดังแสดงในสมการด้านล่าง

$$\frac{L_e}{h} \cong 0.05\,\mathrm{Re} + 0.5 \tag{3.54}$$

โดยที่ L_e = ระยะการปรับตัวสู่การไหลแบบพัฒนาเต็มที่ (Entrance length)

h = ความสูงของช่องการไหล

ซึ่งสำหรับปัญหานี้จะได้ค่า L_e ประมาณเท่ากับ 10.5

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เนื่องจากปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาในหนึ่งมิติ คือไม่มีการไหลในทิศทางแกนดิ่ง หรือกำหนดให้ความเร็วในแนวแกนดิ่ง (v) มีค่าเป็นศูนย์ พร้อมกับข้อกำหนดที่ว่าการไหลที่ทางออกเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว ดังนั้นเมื่อใช้ข้อสมมติฐานเหล่านี้แทนลงในสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการ (สมการ (2.22a-b)) จะได้สมการใหม่เพื่อใช้หาผลเฉลยแม่นตรงดังนี้

สมการโมเมนตัมในแกน x:
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.55a}$$

สมการโมเมนตัมในแกน y: $$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.55b}$$

จากสมการ (3.55a) จะได้ว่า

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ทำการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร y สองครั้งจะได้สมการดังนี้

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2 + \frac{A}{\mu}y + B \tag{3.56}$$

โดยที่ตัวแปร A และ B คือค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยการแทนค่าเงื่อนไขขอบ

$$u(x,0) = 0 \tag{3.57a}$$

$$u(x,1) = 0 \tag{3.57b}$$

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขขอบทั้งสอง (สมการ (3.57a-b)) ลงในสมการ (3.56) จะได้ค่าของตัวแปรทั้งสองดังนี้

$$B = 0 \tag{3.58}$$

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{3.59}$$

จากนั้นแทนค่าคงที่ทั้งสองลงในสมการ (3.56) จะได้สมการสำหรับการกระจายตัวของความเร็วในแนวแกน x ดังนี้

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2 - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y \tag{3.60}$$

หรือ

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(y^2 - y\right) \tag{3.61}$$

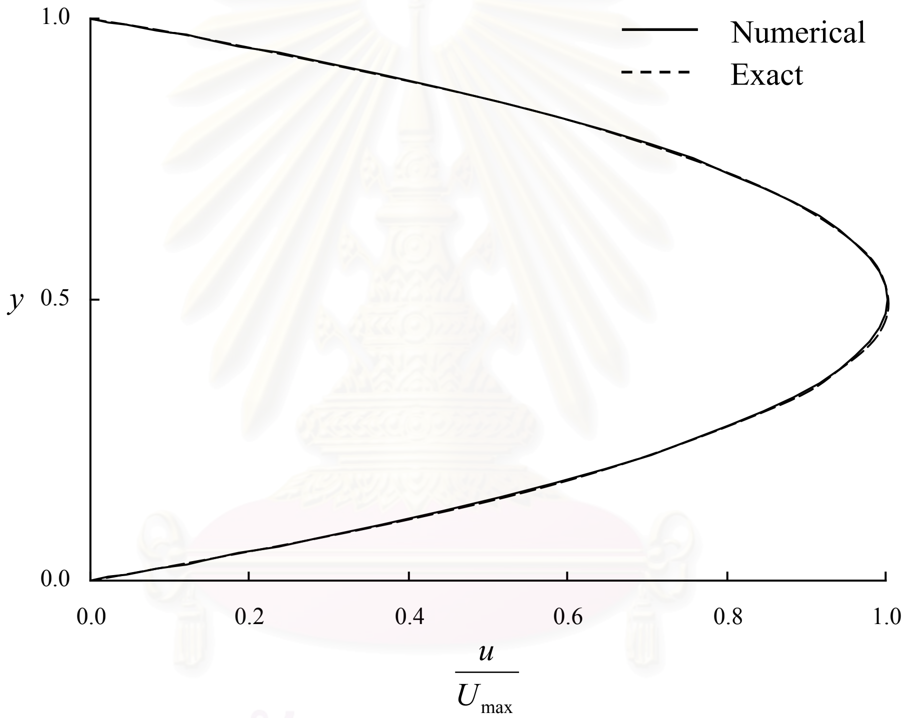
ในบริเวณทางออกของการไหลซึ่งมีลักษณะการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว ความเร็วในแนวแกน x มีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางแผ่นขนานหรือ $y = 0.5$ แทนค่าลงในสมการที่ (3.61) จะได้ความเร็วสูงสุดในแนวแกน x เป็น

$$U_{\max} = -\frac{1}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{3.62}$$

นำสมการที่ (3.61) หารด้วยสมการที่ (3.62) จะได้ความเร็วไร้มิติซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความเร็วที่ตำแหน่งใดๆ ต่อความเร็วสูงสุด

$$\frac{u}{U_{\max}} = 4\left(y - y^2\right) \tag{3.63}$$

รูปที่ 3.20 แสดงการเปรียบเทียบความเร็วไร้มิติที่บริเวณทางออกของการไหลระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรง (สมการที่ (3.62)) ณ ตำแหน่ง y ใดๆ จากการเปรียบเทียบจะเห็นได้ว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



รูปที่ 3.20 ความเร็วไร้มิติบริเวณด้านทางออกของการไหลที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ณ ตำแหน่ง y ใดๆ

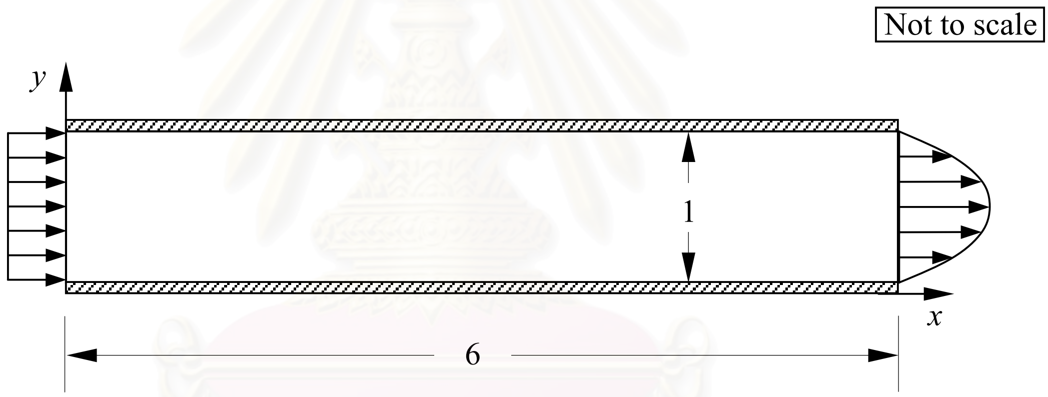
ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาการนำความร้อนและการพาความร้อนในช่องทางไหล (Thermal conduction and convection in channel flow)

ปัญหานี้เป็นการไหลของของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำไหลเข้าไปในช่องทางไหลซึ่งมีอุณหภูมิสูง โดยมีความเร็วที่ทางเข้าสม่ำเสมอและค่อยๆปรับตัวไปเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ (Fully-developed flow) ดังแสดงในรูปที่ 3.21 ความยาวและความกว้างของช่องทางไหลเท่ากับ 6 m และ 1 m ตามลำดับ สำหรับปัญหานี้จะต้องแก้สมการของการไหลก่อนแล้วนำความเร็วที่ได้

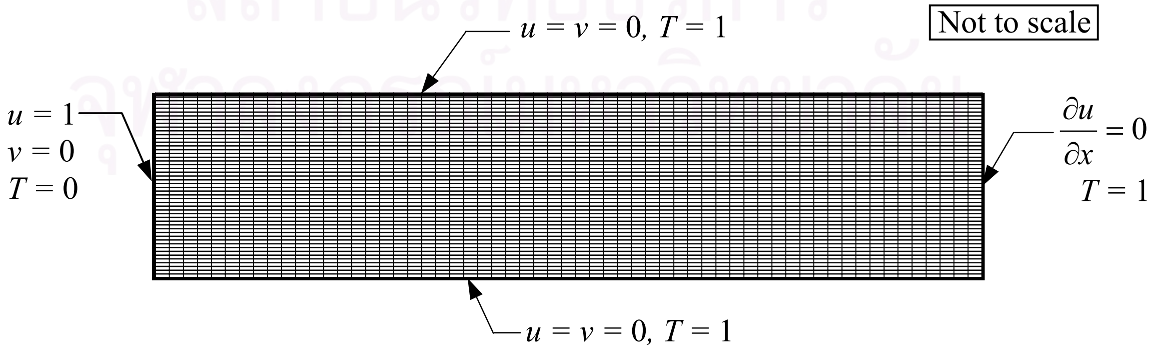
ไปใช้ในการแก้สมการของการถ่ายเทความร้อน โดยที่สมการทั้งสองไม่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน (Uncoupled) สำหรับสมการที่ครอบคลุมการถ่ายเทความร้อนในปัญหานี้ คือ

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{3.64}$$

สำหรับการแก้ปัญหานี้จะใช้รูปแบบจำลองไฟไนต์วอลุมซึ่งประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมจำนวน 60×50 ช่อง ดังรูปที่ 3.22 โดยมีเงื่อนไขขอบของการถ่ายเทความร้อนดังนี้ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2542) บริเวณผิวของช่องทางไหลด้านบนและด้านล่างมีอุณหภูมิเท่ากับ 1 ^{o}C ขณะที่ของไหลที่บริเวณทางเข้าและทางออกของการไหลมีอุณหภูมิเท่ากับ 0 ^{o}C และ 1 ^{o}C ตามลำดับ สำหรับค่าเพกเลตนัมเบอร์กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 7.5 และเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 150

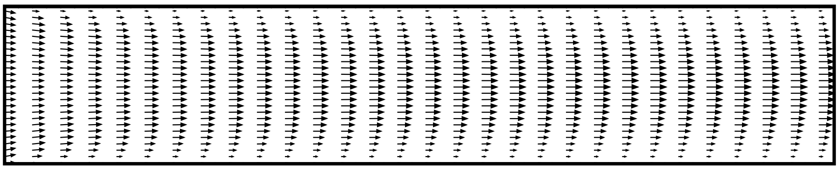


รูปที่ 3.21 ลักษณะการไหลและการถ่ายเทความร้อนภายในช่องทางไหล



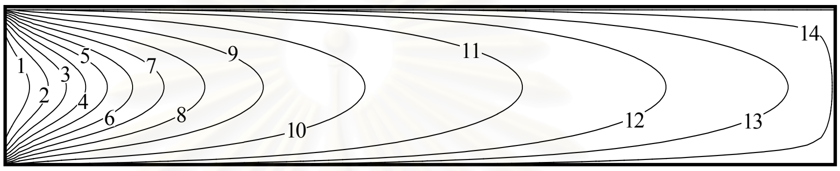
รูปที่ 3.22 รูปแบบจำลองไฟไนต์วอลุมพร้อมเงื่อนไขขอบของการไหล
และการถ่ายเทความร้อนภายในช่องทางไหล

Not to scale



รูปที่ 3.23 เวกเตอร์ของความเร็วในปัญหาการพาความร้อนภายในช่องทางไหล

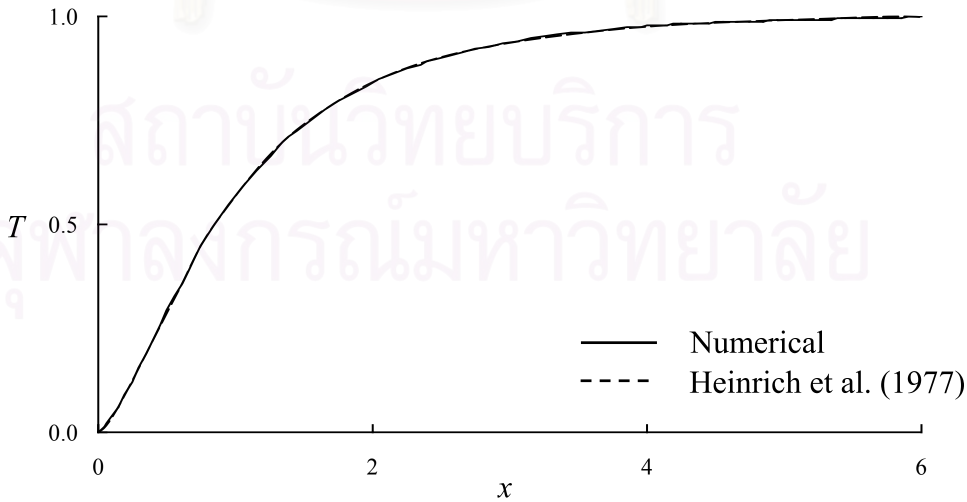
Not to scale



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T:	0.10	0.19	0.28	0.37	0.46	0.55	0.64	0.73	0.82	0.91	0.97	0.99	0.99	1.00

รูปที่ 3.24 การกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการพาความร้อนภายในช่องทางไหล

ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมถูกแสดงในรูปแบบการกระจายตัวของความเร็วและอุณหภูมิในรูปที่ 3.23 และ 3.24 ตามลำดับ โดยมีการเปรียบเทียบอุณหภูมิที่บริเวณกึ่งกลางช่องทางไหลระหว่างผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของ Heinrich et al. (1977) ดังรูปที่ 3.25 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการเปรียบเทียบดังกล่าวมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



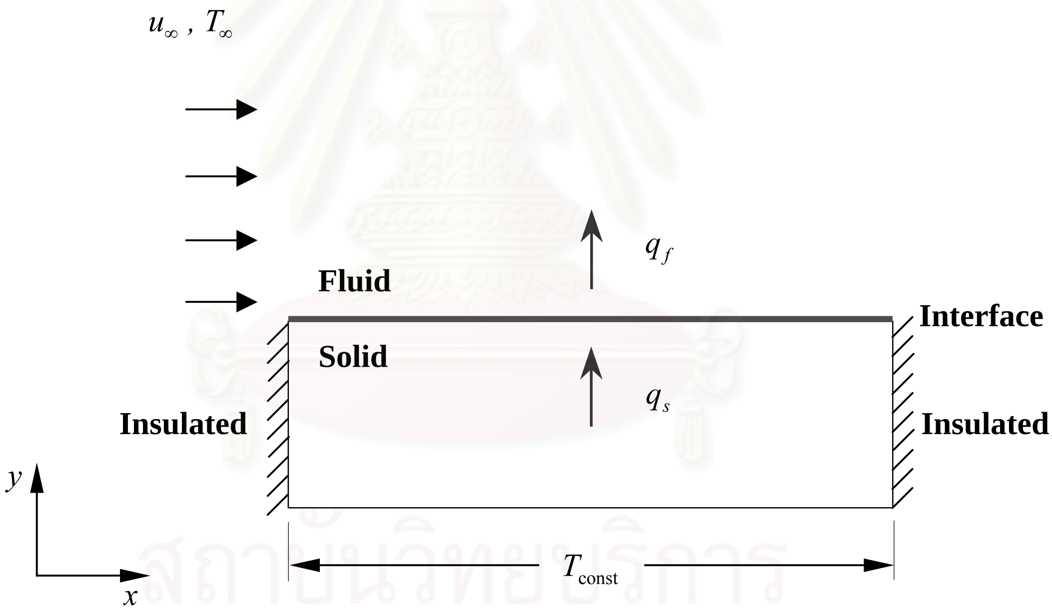
รูปที่ 3.25 อุณหภูมิที่บริเวณกึ่งกลางช่องทางไหลที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลของ Heinrich et al. (1977) ที่ Re = 150 และ Pe = 7.5

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.8 การคำนวณการถ่ายเทความร้อนคอนแบบจูเกต

สำหรับการถ่ายเทความร้อนบริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลมีการตั้งสมมติฐานให้ความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลต้องมีปริมาณเท่ากับปริมาณความร้อนที่ของไหลได้รับ ซึ่งจะเป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน ในรูปที่ 3.26 เป็นตัวอย่างของการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยมีทิศทางของความร้อนจากของแข็งไปสู่ของไหล ซึ่งบริเวณผิวด้านล่างของของแข็งกำหนดให้มีอุณหภูมิคงที่ (T_{const}) ส่วนผิวด้านซ้ายและขวากำหนดให้เป็นฉนวน ปริมาณความร้อนจากของแข็งที่ถ่ายเทสู่ของไหลมีค่าเท่ากับ q_s ในขณะที่ปริมาณความร้อนซึ่งของไหลได้รับจากของแข็งมีค่าเท่ากับ q_f จากกฎการอนุรักษ์พลังงานจะได้

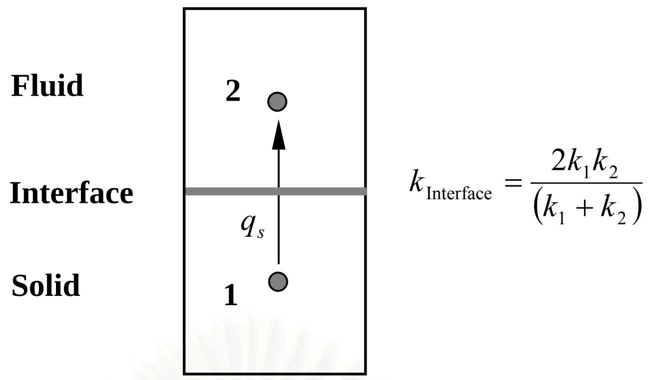
$$q_s = q_f \tag{3.65}$$



รูปที่ 3.26 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

บริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลสามารถคำนวณการถ่ายเทความร้อนได้ โดยแบ่งปริมาตรควบคุมดังรูปที่ 3.27 และกำหนดให้ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทจากปริมาตรควบคุมที่ 1 สู่ปริมาตรควบคุมที่ 2 ซึ่งเกิดจากการแพร่กระจายคือ

$$q_s = \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \tag{3.66}$$



รูปที่ 3.27 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ผิวรอยต่อระหว่างปริมาตรควบคุมของแข็งและของไหล

เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง (ปริมาตรควบคุมที่ 1) และของไหล (ปริมาตรควบคุมที่ 2) มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อ โดยในที่นี้ เลือกใช้ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก ดังแสดงในสมการที่ (3.67)

$$k_{\text{Interface}} = \frac{2k_1k_2}{(k_1 + k_2)} \tag{3.67}$$

โดยสามารถหาค่าฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านระหว่างปริมาตรควบคุมได้ดังนี้

$$q_s = -\frac{2k_1k_2}{(k_1 + k_2)}\frac{T_2 - T_1}{y_2 - y_1} \tag{3.68}$$

สมการข้างบนนี้เป็นส่วนสำคัญที่ใช้ในการเชื่อมโยงการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลเข้าด้วยกัน ทำให้สามารถคำนวณการถ่ายเทความร้อนทั้งสองลักษณะพร้อมกันภายในโดเมนเดียว ซึ่งจะช่วยให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีแบบ Iterative ซึ่งแยกการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในของแข็งและของไหลออกจากกันเป็นสองโดเมนโดยคำนวณหาค่าฟลักซ์ความร้อนในโดเมนหนึ่งแล้วจึงนำค่าฟลักซ์ความร้อนดังกล่าวไปเป็นเงื่อนไขขอบสำหรับการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในอีกโดเมนหนึ่ง (Dechaumphai and Limtrakarn, 1999)

บทที่ 4

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้ เราจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาตรวจสอบความถูกต้อง โดยนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปแก้ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน แล้วนำผลลัพธ์จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ผลจากการคำนวณและผลการทดลองของผู้วิจัยที่ได้ทำมาก่อน ซึ่งจะแบ่งการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นออกเป็นสองส่วนด้วยกัน ในส่วนที่หนึ่งจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาทดสอบปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบบังคับ ซึ่งมีทั้งหมด 2 ปัญหาด้วยกัน ดังนี้

1) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน
2) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อัน

สำหรับส่วนที่สองจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระ ซึ่งจะตรวจสอบความถูกต้องในส่วนนี้ 2 ปัญหา ได้แก่

1) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสโดยมีผลการคำนวณและผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์เปรียบเทียบ
2) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสโดยมีผลการทดลองเปรียบเทียบ

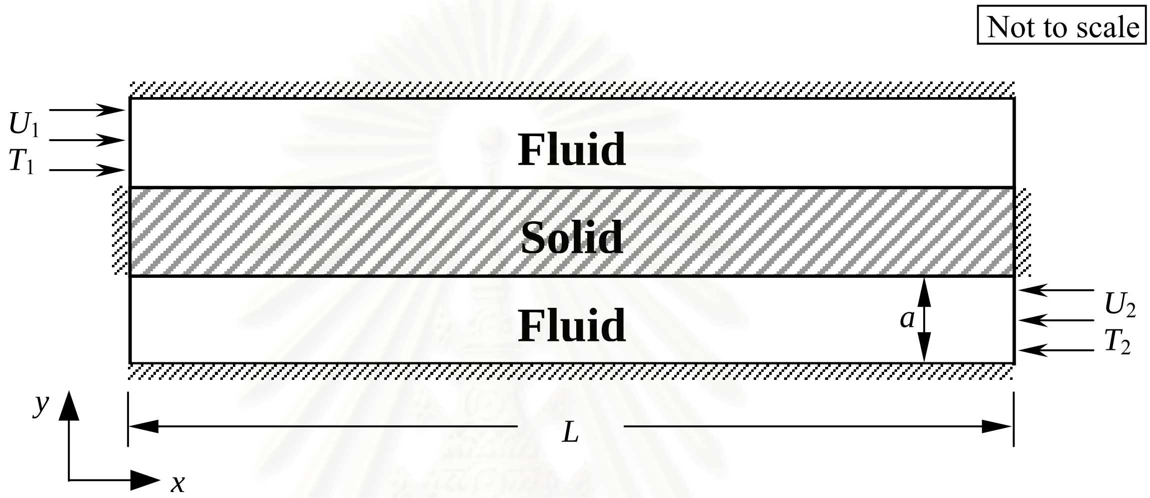
4.1 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบบังคับ

4.1.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน

การตรวจสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นด้วยปัญหานี้ กระทำโดยนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของ Chen and Han (2000) โดยมีโดเมนการ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนวณเป็นอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีลักษณะการไหลสวนทางกันและมีแผ่นเหล็กเป็นตัวกลางในการแลกเปลี่ยนความร้อนโดยมีปลายทั้งสองเป็นฉนวน สำหรับช่องทางไหลทั้งสองซึ่งมีทิศทางการไหลสวนทางกัน มีขอบด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวน ดังแสดงในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน

ช่องของการไหลทั้งสองมีขนาดเท่ากับความหนาของแผ่นเหล็ก (a) คือ 0.1 m และ L มีค่าเท่ากับ 1.0 m ความเร็วและอุณหภูมิที่ทางเข้าทั้งสองด้านมีค่าเป็น U_1= 0.2 m/s, T_1= 800 K, U_2= 0.1 m/s และ T_2= 300 K โดยที่คุณสมบัติต่างๆ ของของไหลมีค่าดังนี้

ρ_f = 1,000 kg/m^3
k_f = 10 W/m.K
μ_f = 0.15 kg/m.s
C_{pf} = 25 J/kg.K

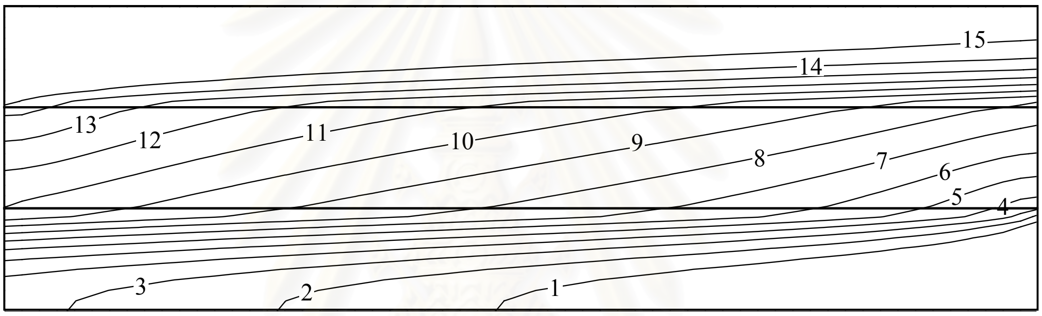
และคุณสมบัติต่างๆ ในส่วนของแข็งมีค่าดังนี้

ρ_s = 8,000 kg/m^3
k_s = 50 W/m.K

$C_{ps} \quad = \quad 500$ J/kg.K

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่น, k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน และ C_p คือ ความจุความร้อน โดยตัวห้อย f และ s คือ ของไหลและของแข็ง ตามลำดับ รูปแบบไฟไนต์วอลุมประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมที่มีขนาดสม่ำเสมอจำนวน 60×30 ช่อง

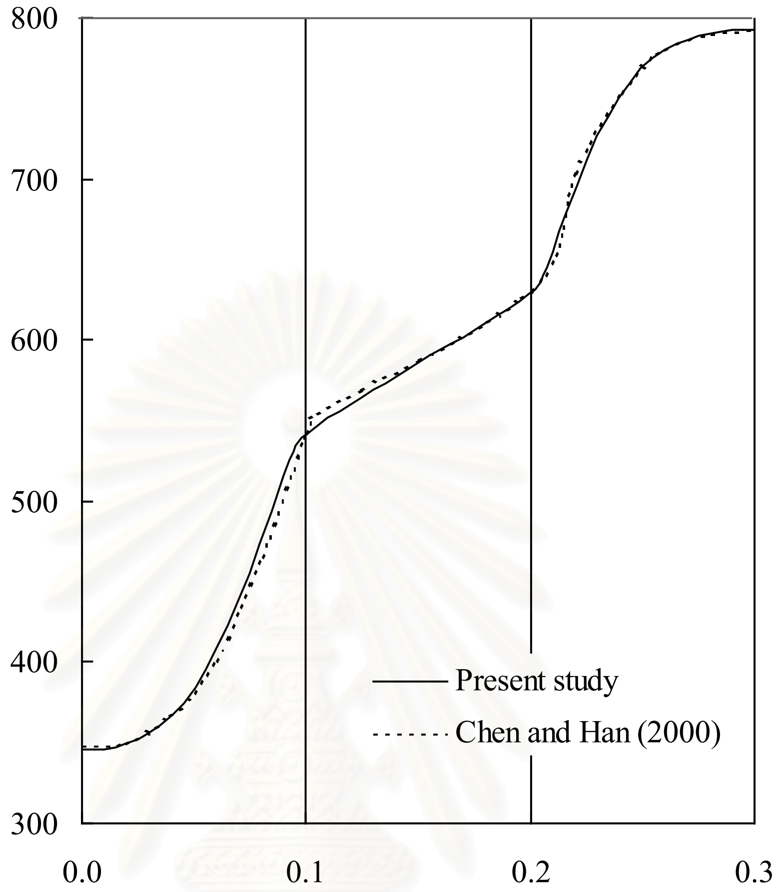
Not to scale



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T:	340	370	400	430	460	490	520	550	580	610	640	670	700	730	760

รูปที่ 4.2 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน

รูปที่ 4.2 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหานี้ ซึ่งจากการสังเกต พบว่าการถ่ายเทความร้อนภายในของแข็งเกิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่มีลักษณะเป็นเส้นตรง เนื่องจากมีการถ่ายเทความร้อนแบบการแพร่กระจาย ส่วนในของไหลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมีลักษณะเป็นเส้นโค้งเนื่องจากมีการถ่ายเทความร้อนแบบแพร่กระจายและแบบพาความร้อน จากการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลของ Chen and Han (2000) โดยทำการเปรียบเทียบอุณหภูมิที่กึ่งกลางของปัญหาตลอดแนวแกน y พบว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ดังแสดงในรูปที่ 4.3



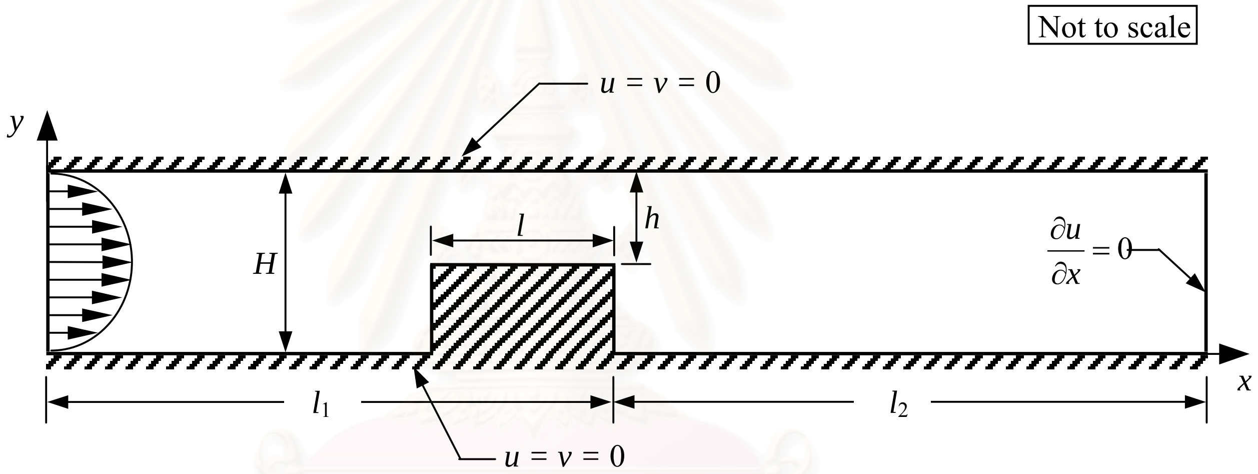
รูปที่ 4.3 อุณหภูมิที่ $x = 0.5$ m ตลอดแกน y ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์ของ Chen and Han (2000)

4.1.2 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อันภายในช่องทางไหล

สำหรับปัญหานี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วน โดยส่วนแรกจะทำการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 1 อัน ภายในช่องทางไหล เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในส่วนการคำนวณการไหลก่อนนำไปใช้ในส่วนที่สอง ซึ่งจะทำการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางจำนวน 3 อัน

1) การไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 1 อันภายในช่องทางไหล

ในส่วนนี้จะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวาง โดยจะนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Carvalho et al. (1987) ซึ่งผลจากการเปรียบเทียบจะเพิ่มความมั่นใจในส่วนการคำนวณการไหลก่อนที่จะเพิ่มการคำนวณในส่วนของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตต่อไป ลักษณะของปัญหาแสดงดังรูปที่ 4.4 โดยจะมีของไหลที่มีลักษณะการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้วบริเวณทางเข้าและมีสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมวางอยู่บริเวณผนังด้านล่างของช่องทางไหล โดยค่าตัวแปรต่างๆ ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 4.1



รูปที่ 4.4 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 1 อัน ในช่องทางไหล

รูปแบบการจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมของปัญหานี้ประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมที่มีขนาดสม่ำเสมอจำนวน 180×50 ช่อง โดยที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์คำนวณได้จาก

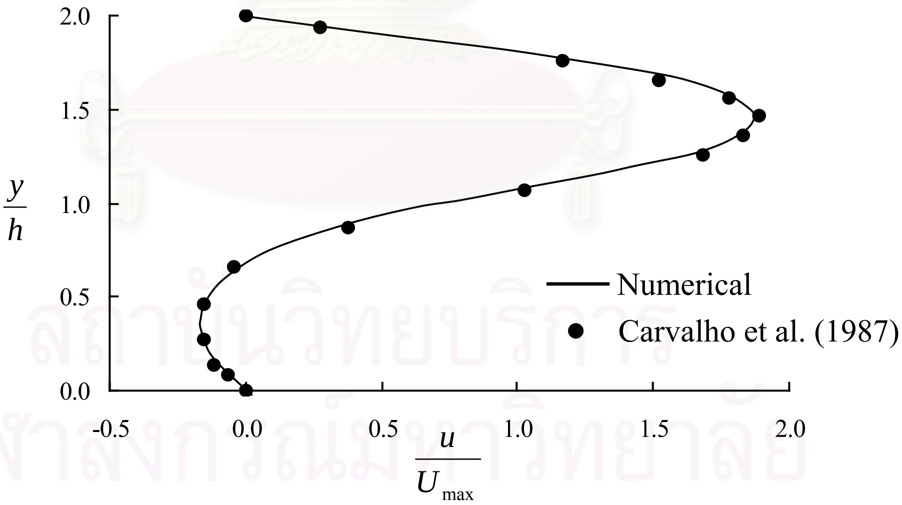
$$\mathrm{Re} = \frac{U_{\max}(H-h)\rho}{\mu} \tag{4.1}$$

โดยที่ค่า $U_{\max}$ คือความเร็วสูงสุดที่ทางเข้า เมื่อค่า Re ในที่นี้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 144

รูปที่ 4.5 แสดงการเปรียบเทียบความเร็วในแนวแกน x ระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลการทดลองซึ่งจะเห็นได้ว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีสำหรับรูปที่ 4.6 แสดงการกระจายตัวของความเร็วไร้มิติในแนวราบที่ตำแหน่งต่างๆ ตลอดแนวแกน x ที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 144 รูปแบบการกระจายตัวของความดันแสดงไว้ในรูปที่ 4.7 และสามารถดูรายละเอียดการกระจายตัวของความดันบริเวณสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยมที่มีเส้นประล้อมรอบได้ในรูปที่ 4.8

ตารางที่ 4.1 ขนาดของตัวแปรต่างๆ ในปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 1 อัน ในช่องทางไหล

H (mm)	l (mm)	h (mm)	$\frac{l}{H-h}$	$\frac{l_1}{H-h}$	$\frac{l_2}{H-h}$	Re
10	20	5	4	12	24	144

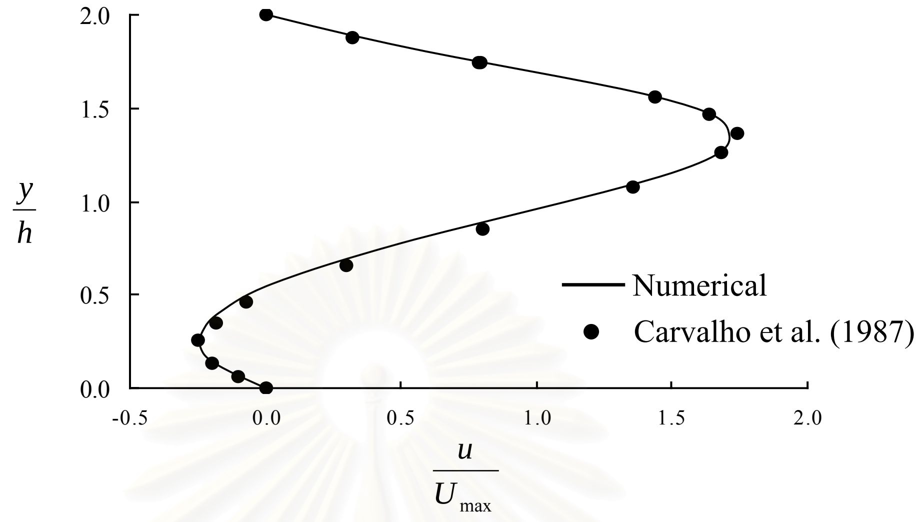


a)

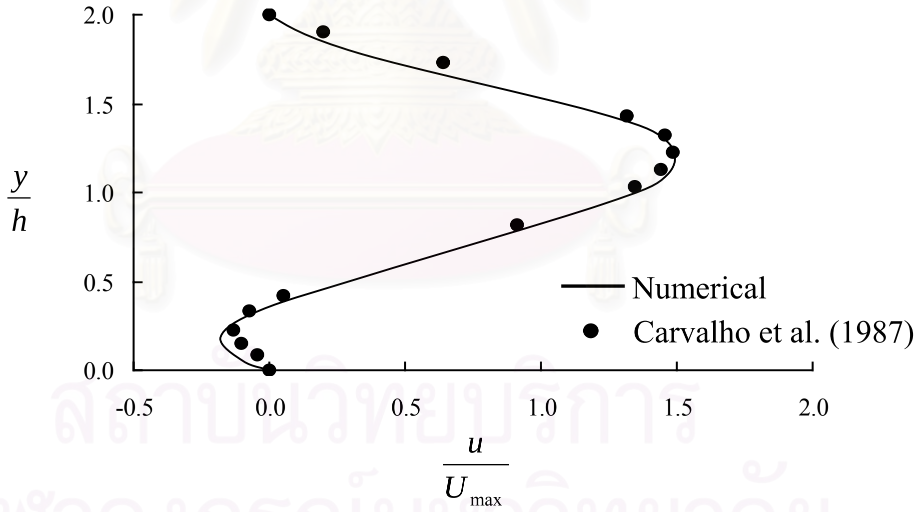
รูปที่ 4.5 การกระจายตัวของความเร็วไร้มิติในแนวราบที่ได้จากการคำนวณกับผลจากการทดลองของ Carvalho et al.(1987) ที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ

a) $x = 68$ mm b) $x = 80$ mm c) $x = 90$ mm d) $x = 100$ mm e) $x = 110$ mm

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



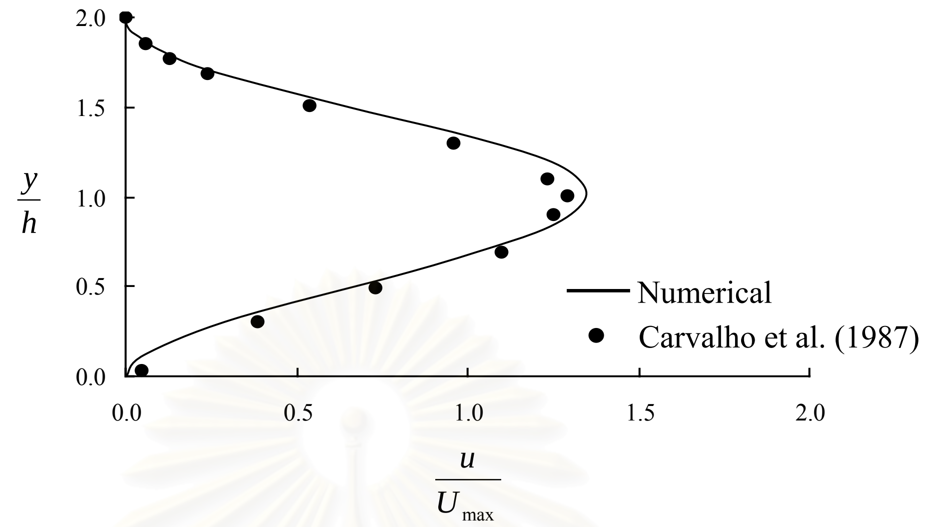
b)



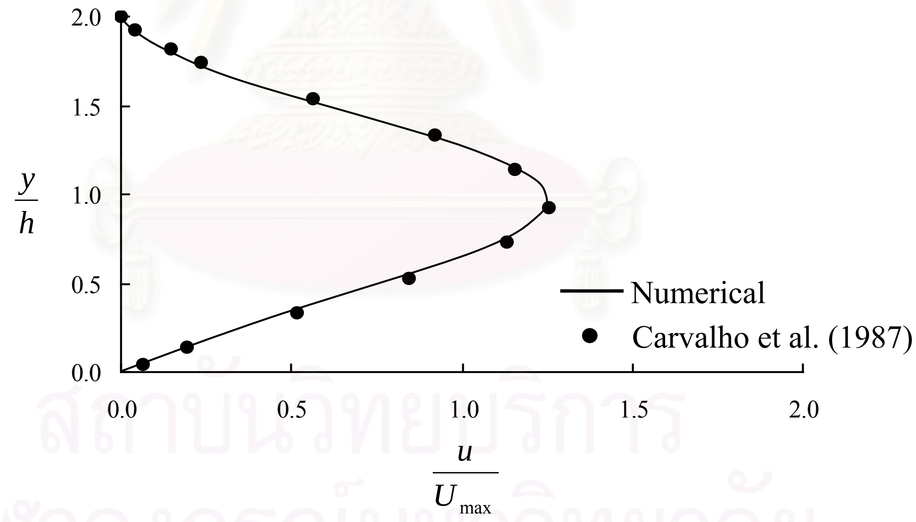
c)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.5(ต่อ) การกระจายตัวของความเร็วไร้มิติในแนวราบที่ได้จากการคำนวณกับผล
จากการทดลองของ Carvalho et al.(1987) ที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ
a) x = 68 mm b) x = 80 mm c) x = 90 mm d) x = 100 mm e) x = 110 mm



d)



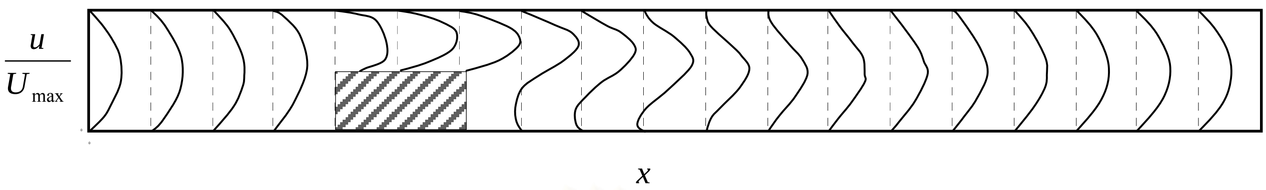
e)

รูปที่ 4.5(ต่อ) การกระจายตัวของความเร็วไร้มิติในแนวราบที่ได้จากการคำนวณกับผลจากการทดลองของ Carvalho et al.(1987) ที่ตำแหน่ง *x* ต่าง ๆ

a) x = 68 mm b) x = 80 mm c) x = 90 mm d) x = 100 mm e) x = 110 mm

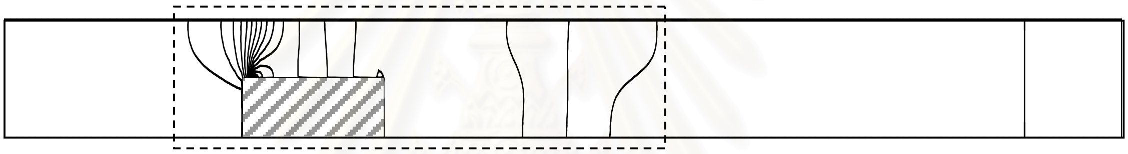
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Not to scale



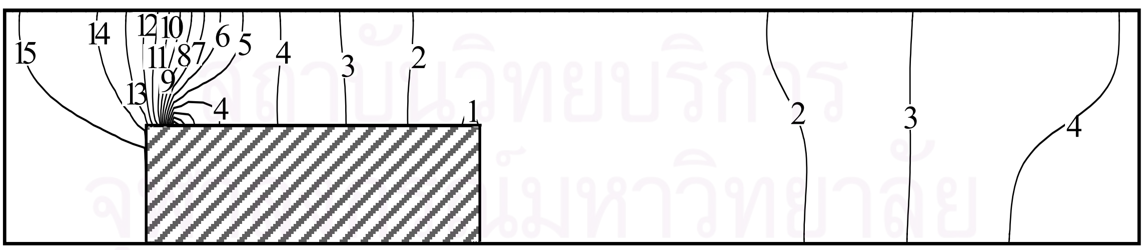
รูปที่ 4.6 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วไร้มิติในแนวแกน x สำหรับปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 1 อัน ในช่องทางไหลที่ Re =144

Not to scale



รูปที่ 4.7 ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 1 อัน ในช่องทางไหลที่ Re =144

Not to scale

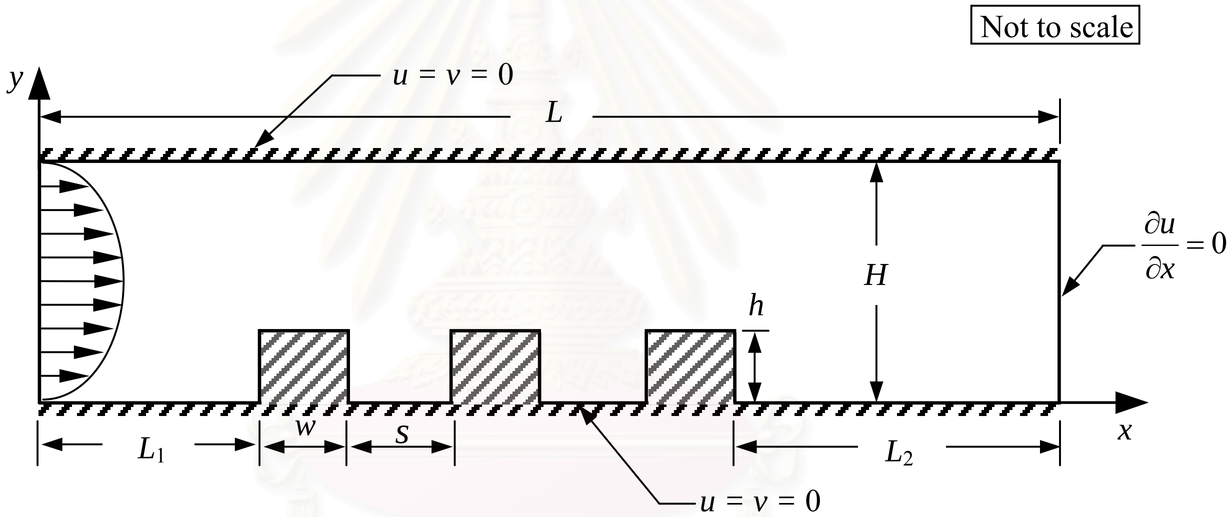


Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p:	-0.22	-0.18	-0.14	-0.10	-0.06	-0.02	0.02	0.06	0.10	0.14	0.18	0.22	0.25	0.29	0.33

รูปที่ 4.8 ลักษณะการกระจายตัวของความดันภายในกรอบเส้นประของรูปที่ 4.7 ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงความดันบริเวณสิ่งกีดขวาง ที่ Re = 144

2) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อันภายในช่องทางไหล

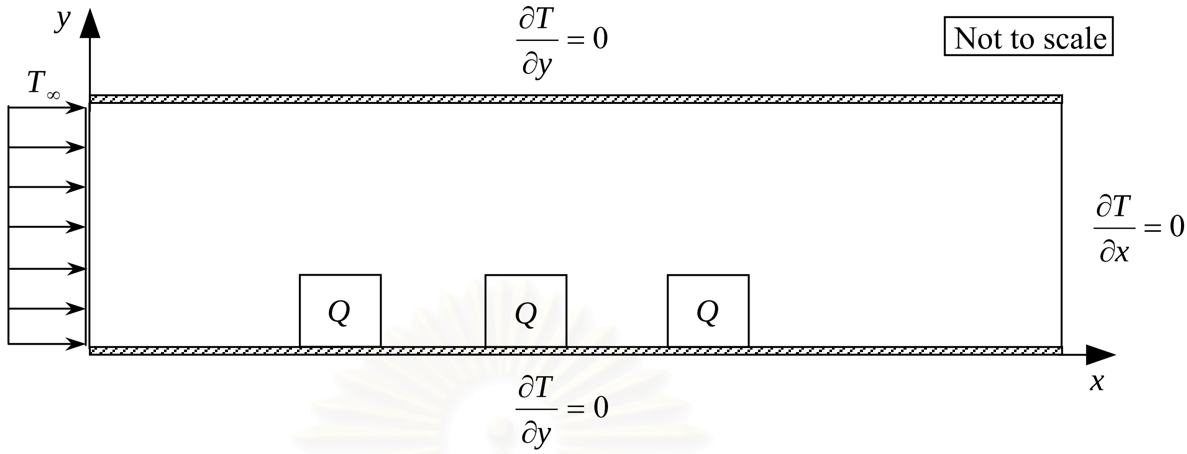
ลักษณะของปัญหาที่พิจารณาจะมีการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้วเข้ามาทางด้านซ้ายของขอบเขตปัญหาและมีสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยมวางอยู่ที่ผนังด้านล่างจำนวนสามอัน โดยแต่ละอันจะมีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในและมีทิศทางการถ่ายเทความร้อนสู่ของไหล ในส่วนการถ่ายเทความร้อนสำหรับปัญหานี้จะทำการวิเคราะห์เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยที่รูปแบบของการไหลแสดงดังรูปที่ 4.9 ขนาดของปัญหาแสดงในตารางที่ 4.2 และเงื่อนไขขอบในส่วนการถ่ายเทความร้อนแสดงในรูปที่ 4.10



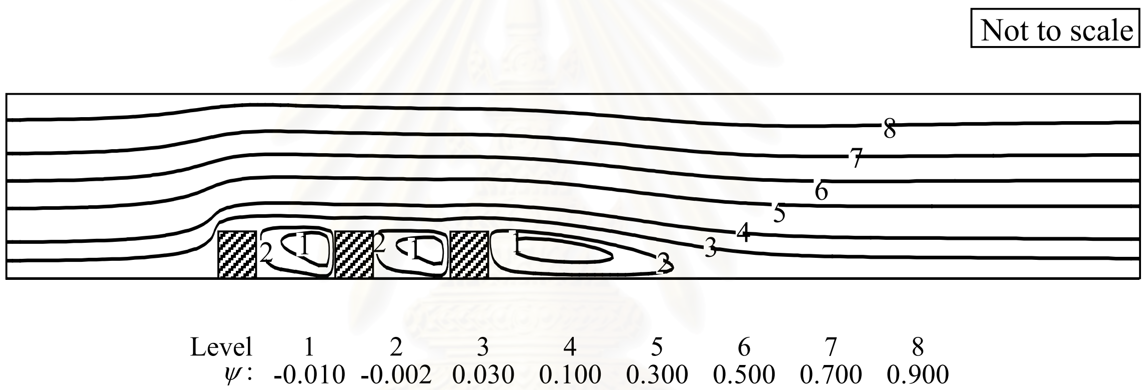
รูปที่ 4.9 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อัน ในช่องทางไหล

ตารางที่ 4.2 ขนาดของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อัน ในช่องทางไหล

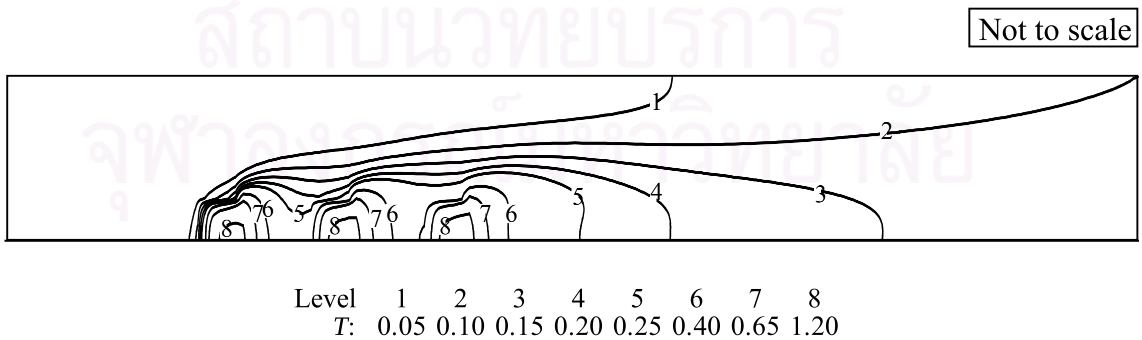
H (m)	h (m)	L_1 (m)	L_2 (m)	L (m)	s (m)	w (m)
1	0.25	3	9.5	15	1.0	5



รูปที่ 4.10 เงื่อนไขขอบของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อัน ในช่องทางไหล



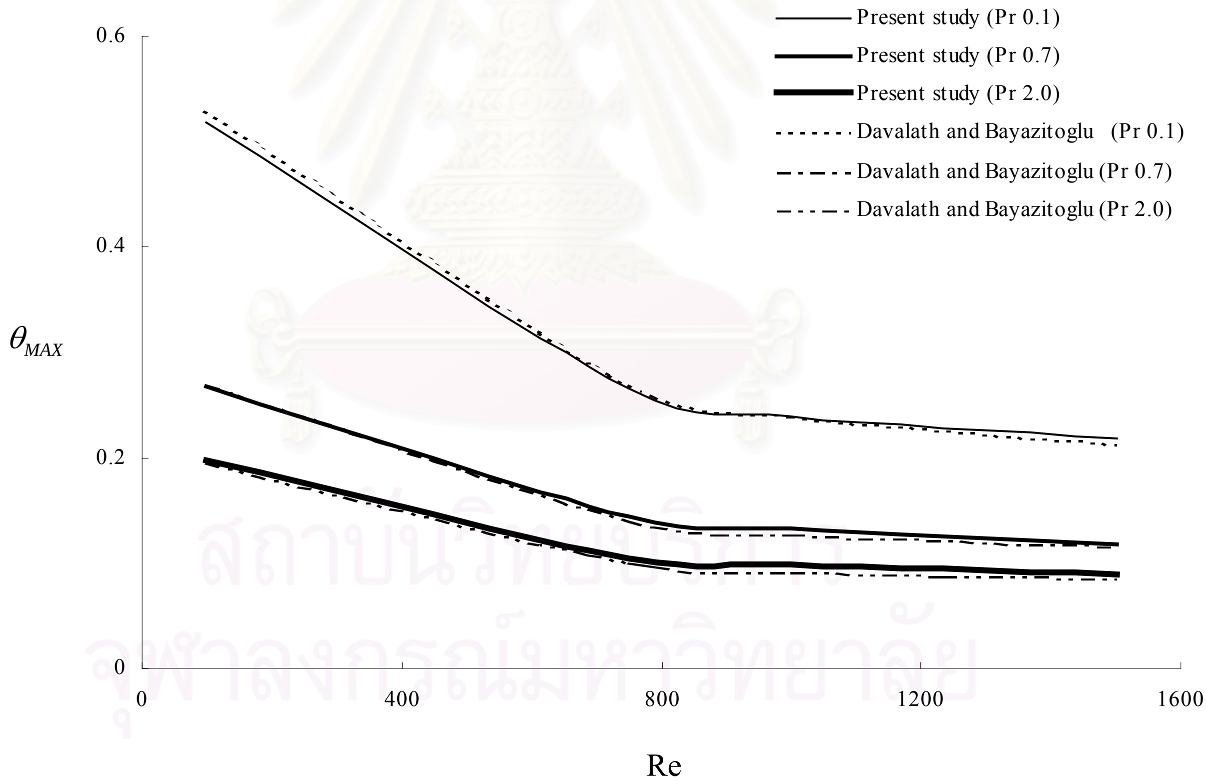
รูปที่ 4.11 สตรีมไลน์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อัน ในช่องทางไหลที่ Re = 750, Pr = 0.7 และ s =1.0 m



รูปที่ 4.12 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยม 3 อัน ในช่องทางไหลที่ Re = 750, Pr = 0.7 และ s = 1.0 m

รูปแบบการจำลองของปัญหานี้ประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมขนาดเท่ากัน จำนวน 150×100 ช่อง ซึ่งมีเงื่อนไขขอบของผนังด้านบนและด้านล่างของช่องทางไหลเป็นฉนวน และอุณหภูมิบริเวณทางเข้าด้านซ้ายมีค่าคงที่ โดยวิเคราะห์ปัญหาที่เรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100, 750, 1000 และ 1500 ในขณะที่ค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์มีค่าเป็น 0.1, 0.7 และ 2.0 ตามลำดับ สำหรับอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล ($k = k_s/k_f$) กำหนดให้เท่ากับ 10

สตรีมไลน์และการกระจายตัวความดันที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 750 พรันด์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 และระยะห่างระหว่างสิ่งกีดขวางเท่ากับ 1.0 m แสดงในรูปที่ 4.11 และ 4.12 ตามลำดับ



รูปที่ 4.13 อุณหภูมิสูงสุดภายในปัญหาที่ค่า Re ต่างๆ และ Pr เท่ากับ 0.1, 0.7 และ 2.0 จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Davalath and Bayazitoglu (1987) โดยที่ $\theta_{MAX} = \dfrac{(T_{max} - T_{\infty})}{Q/k_f}$

สำหรับปัญหาที่พิจารณานี้ได้มีการศึกษาด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องโดย Davalath and Bayazitoglu (1987) ซึ่งได้นำผลลัพธ์นั้นมาเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นโดยแสดงไว้ในรูปที่ 4.13 ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบอุณหภูมิไร้มิติ $\theta = \dfrac{\left(T - T_{\infty}\right)}{Q / k_f}$ ที่มีค่าสูงสุดภายในปัญหาและกำหนดค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 0.1, 0.7 และ 2.0 ตามลำดับ โดยจะเห็นได้ว่าผลการเปรียบเทียบมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ซึ่งเป็นสิ่งที่ยืนยันได้ว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจเมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยกัน นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อเพิ่มค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์หรือค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์แล้วจะมีผลกระทบต่อการถ่ายเทความร้อน โดยจะทำให้การถ่ายเทความร้อนสูงขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิสูงสุดในปัญหามีค่าลดลงซึ่งจะเห็นได้จากรูปที่ 4.13

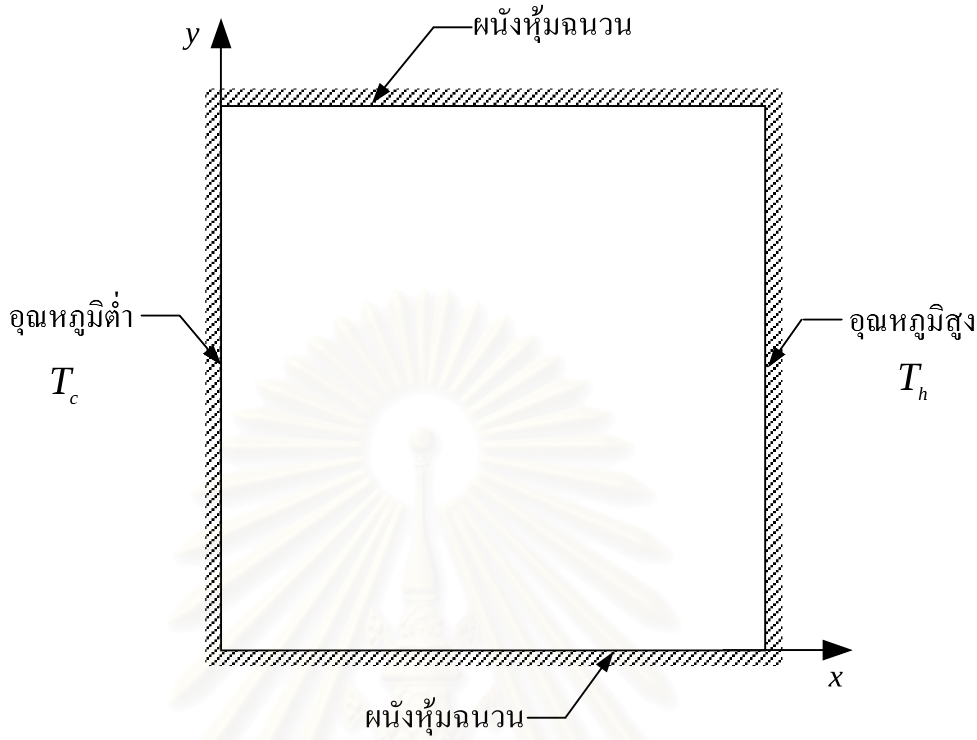
4.2 การถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระ

สำหรับปัญหาที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะเป็นการทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับปัญหาการถ่ายความร้อนซึ่งมีลักษณะการพาความร้อนแบบอิสระ (Free convection) ในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งเป็นปัญหาพื้นฐานที่มีการค้นคว้าวิจัยกันอย่างกว้างขวางทั้งทางการทดลองและการคำนวณ โดยจะนำผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นไปเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีเชิงวิเคราะห์และผลจากการทดลอง

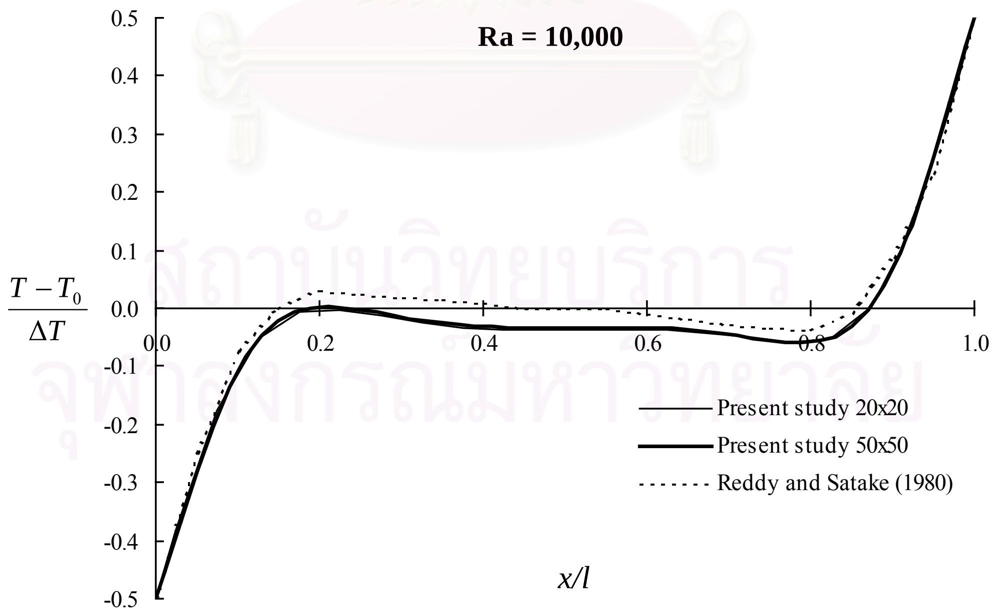
4.2.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (เปรียบเทียบกับผลการคำนวณและผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์)

ในที่นี้จะนำผลลัพธ์เชิงตัวเลขจากนักวิจัยท่านอื่นมาใช้ในการเปรียบเทียบ เพื่อตรวจสอบผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น รายละเอียดของปัญหาแสดงดังรูปที่ 4.14 (Wansopark and Dechaumphai, 2003) ซึ่งประกอบไปด้วยช่องปิดรูปทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสและเลือกใช้ปริมาตรควบคุมขนาดสม่ำเสมอจำนวน 50×50 ช่อง โดยที่ผนังทางด้านขวาของช่องปิดมีอุณหภูมิสูงกว่าด้านซ้าย ส่วนผนังบริเวณด้านบนและด้านล่างของช่องปิดถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อน

ในปัญหานี้ พรันด์เทิลนัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 0.7 โดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ (Ra) เท่ากับ 10^4 และ 10^5 ซึ่งผลลัพธ์จากการคำนวณจะนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งใช้ Penalty method ของ Reddy and Satake (1980)



รูปที่ 4.14 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนโดยมีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปที่ 4.15 อุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณด้วยปริมาตรควบคุมที่มีขนาดแตกต่างกันเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Reddy and Satake (1980) ที่ Ra = 10^4

สำหรับค่าเรย์เลห์นัมเบอร์คำนวณได้จากสมการข้างล่าง

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta \Delta T l^3}{\nu\alpha} \tag{4.2}$$

โดยที่

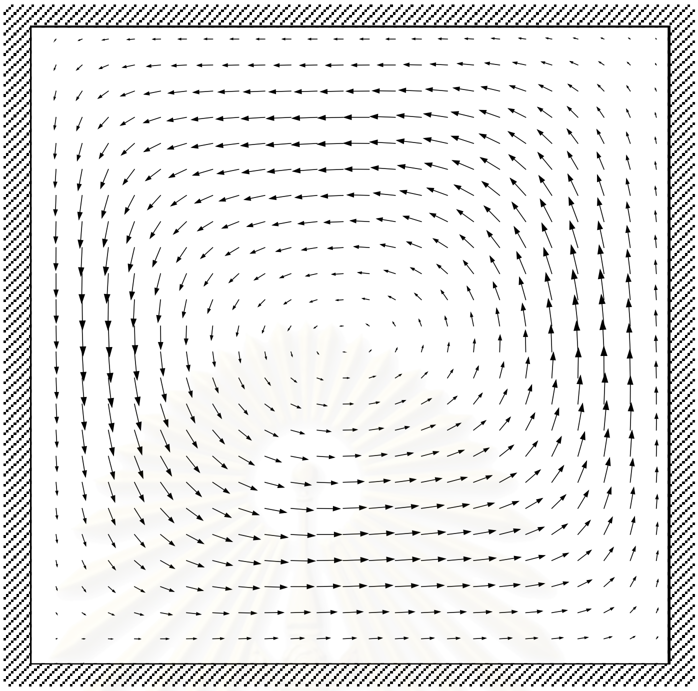
β คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน

ΔT คือ ผลต่างระหว่างอุณหภูมิที่ตำแหน่งใดๆ ในของไหลกับอุณหภูมิต่ำสุด

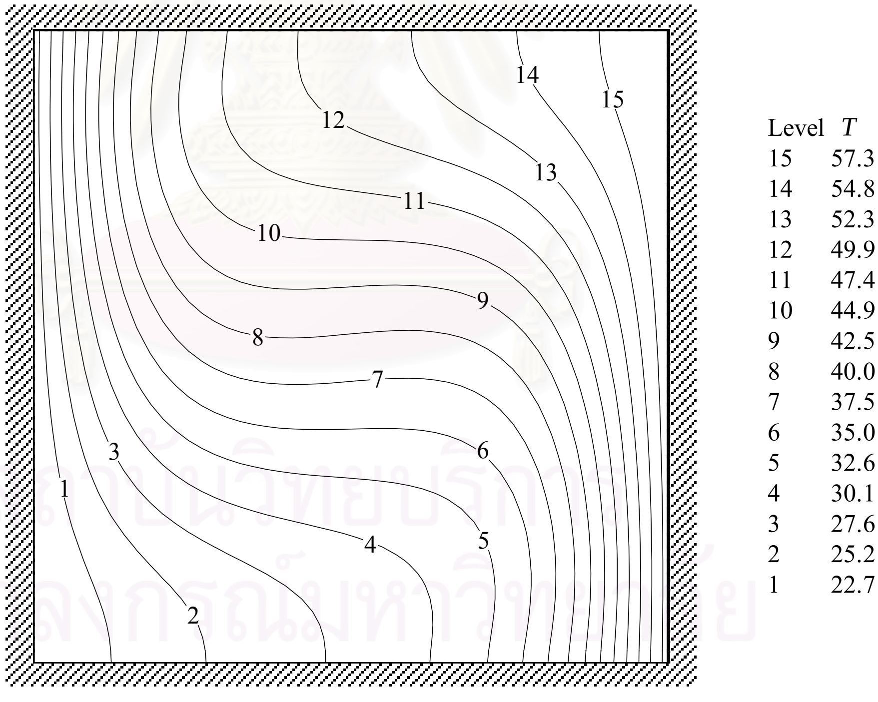
รูปที่ 4.16 แสดงรูปแบบการไหลและลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^4 จะเห็นได้ว่าเกิดลักษณะการไหลวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เนื่องจากผนังด้านขวามีอุณหภูมิสูงทำให้ของไหลได้รับความร้อนและลอยตัวสูงขึ้นในขณะที่ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิต่ำกว่าจึงลอยตัวต่ำลงมาเกิดเป็นลักษณะการไหลวนขึ้น ในรูปแบบที่ราบเรียบ ส่วนรูปที่ 4.17a-b แสดงลักษณะการไหลและการกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^5 พบว่ามีลักษณะการไหลวนในทิศทางเช่นเดียวกับค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ 10^4 แต่จะมีการไหลวนแยกเป็นสองจุดด้วยกันและในส่วนการกระจายตัวของอุณหภูมิบริเวณผนังจะมีการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนท์ของอุณหภูมิที่มากกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.16b

สำหรับการเปรียบเทียบผลลัพธ์กับผลการคำนวณของ Reddy and Satake นั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.18 โดยจะแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกเป็นการเปรียบเทียบความเร็วไร้มิติในแนวดิ่งที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิดและส่วนที่สองเป็นการเปรียบเทียบอุณหภูมิไร้มิติที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด ซึ่งจะเห็นได้ว่าการเปรียบเทียบมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี และเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นจาก 10^4 เป็น 10^5 แล้ว ความเร็วในแนวดิ่งจะมีค่าสูงขึ้นในบริเวณใกล้ผนังด้านซ้ายและด้านขวา เช่นเดียวกับอุณหภูมิที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงมากในบริเวณดังกล่าว

ตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ยที่ผนังด้านร้อนระหว่างผลลัพธ์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นกับงานวิจัยอื่นๆที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ ได้แก่ Sai et al. (1994) และ De Vahl Davis (1983) โดยผลลัพธ์ของ De Vahl Davis ได้รับการยอมรับว่ามีความถูกต้องมากที่สุดสำหรับปัญหานี้เนื่องจากเป็นผู้รวบรวมผลเฉลยด้วยวิธีต่างๆ ไว้เป็นมาตรฐาน (De Vahl Davis and Jones (1983)) ซึ่งตารางที่ 4.3 จะใช้ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของ De Vahl Davis เป็นค่าอ้างอิงสำหรับคำนวณความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น โดยจะเห็นได้ชัดเจนจากตารางว่าค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ De Vahl Davis แล้วมีค่าใกล้เคียงกัน



a)

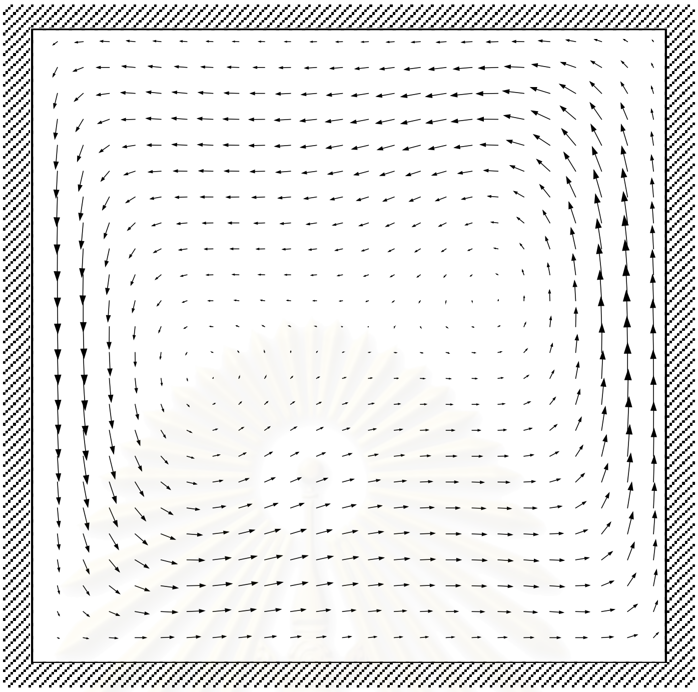


b)

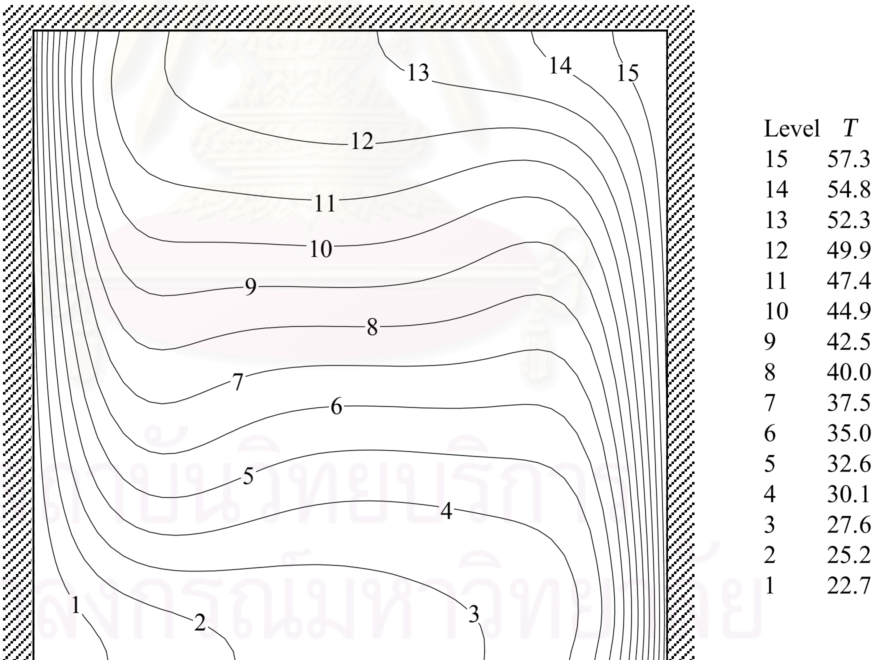
รูปที่ 4.16 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด โดยมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ Ra = 10^4 และ Pr = 0.7

a) รูปแบบการไหล b) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



a)

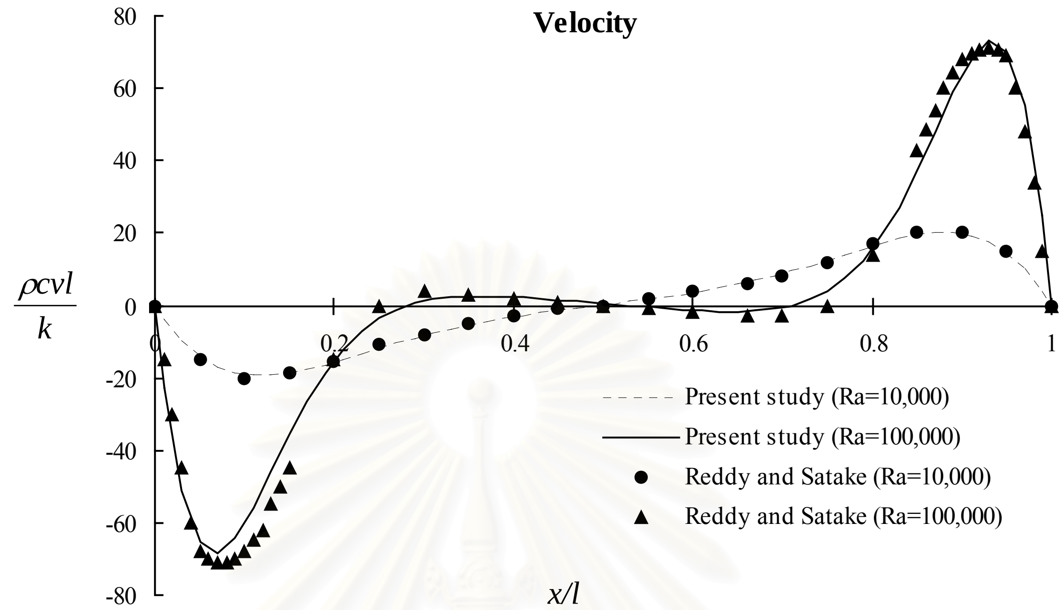


b)

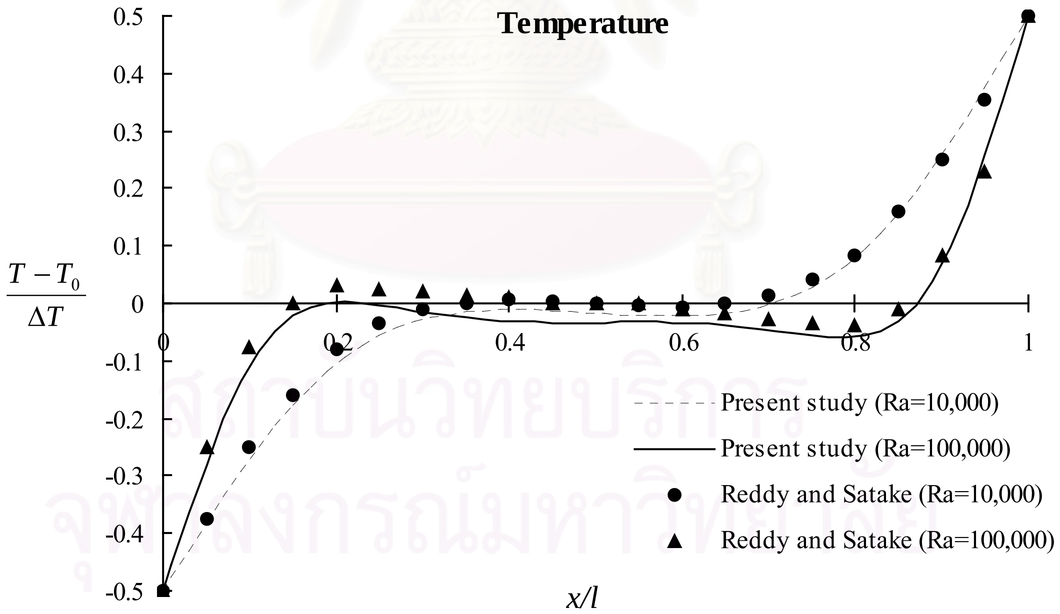
รูปที่ 4.17 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด โดยมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ Ra = 10^5 และ Pr = 0.7

a) รูปแบบการไหล b) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



a)



b)

รูปที่ 4.18 ผลลัพธ์จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Reddy and Satake (1980) ที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด a) ความเร็วไร้มิติในแนวดิ่ง b) อุณหภูมิไร้มิติ

ตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผนังร้อนซึ่งได้จากการคำนวณกับวิธีอื่นๆ

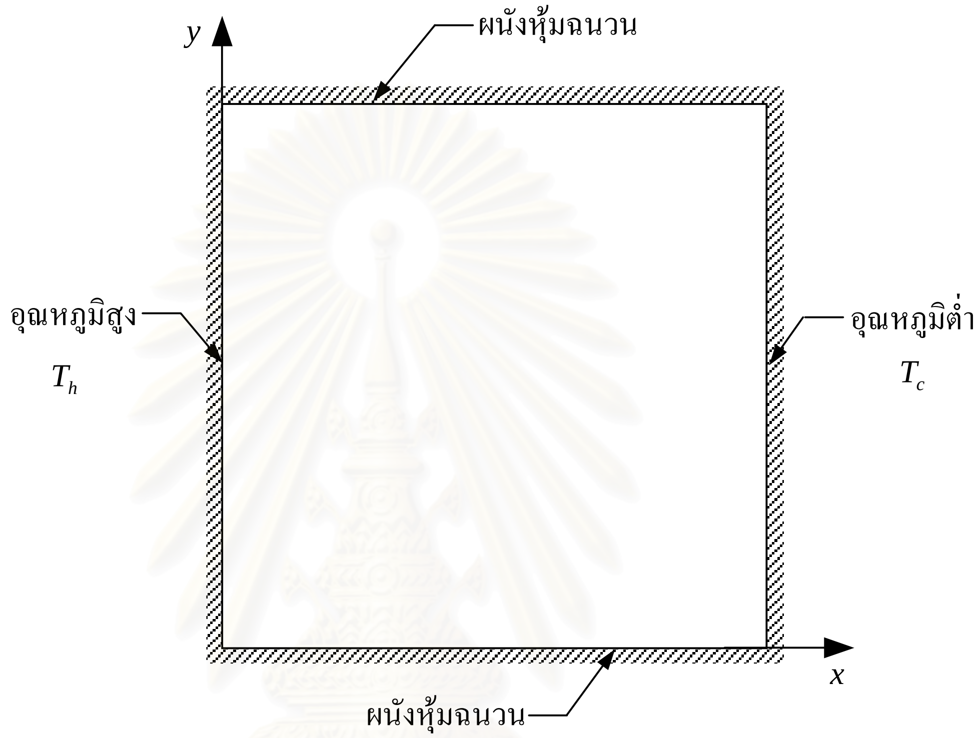
Ra	ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผนังร้อน				
	Finite volume	Finite element	Benchmark solution	ค่าความคลาดเคลื่อน % (เปรียบเทียบกับ Benchmark solution)	
	Present study	Sai et al. (1994)	De Vahl Davis (1983)	Present study	Sai et al. (1994)
10^4	2.278	2.289	2.238	1.79	2.30
10^5	4.611	4.688	4.509	2.26	4.00

4.2.2 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (เปรียบเทียบกับผลการทดลอง)

ปัญหาที่พิจารณามีลักษณะคล้ายกันกับปัญหาก่อนหน้านี้ แต่จะนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งลักษณะของปัญหาแสดงดังรูปที่ 4.19 ซึ่งรูปดังกล่าวจะมีลักษณะคล้ายกับรูปที่ 4.14 แต่ผนังที่มีอุณหภูมิสูงจะอยู่ทางด้านซ้ายและผนังที่มีอุณหภูมิต่ำอยู่ด้านขวาของช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

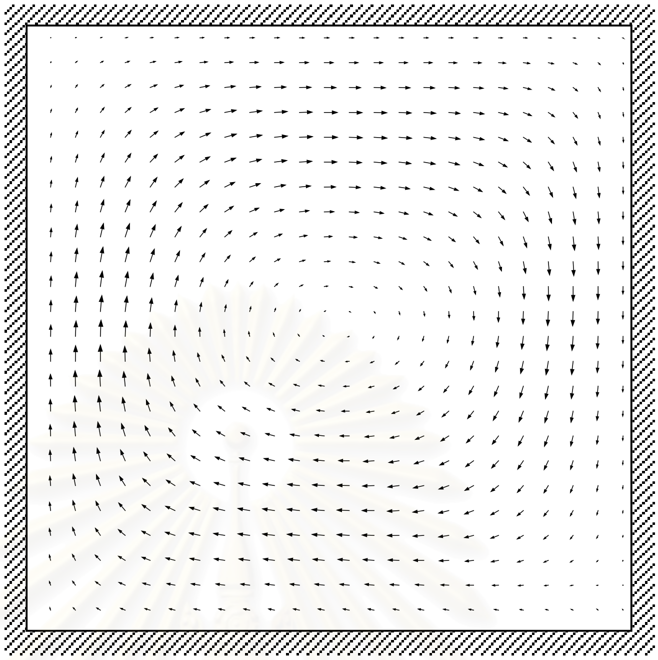
การจำลองปัญหานี้ใช้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดสม่ำเสมอจำนวน 50×50 ช่อง ผนังทางด้านซ้ายเป็นบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำโดยมีค่าเท่ากับ 0 ^oC ในบริเวณผนังอุณหภูมิสูงทางด้านขวามีอุณหภูมิเท่ากับ 4, 6 และ 12 ^oC ตามลำดับ โดยมีค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 และเรย์

เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^4, 1.5×10^4และ 3×10^4 ซึ่งค่าเรย์เลห์นัมเบอร์จะเพิ่มขึ้นตามผลต่างระหว่างอุณภูมิสูงสุดและอุณหภูมิต่ำสุดของปัญหาดังสมการ (4.2)

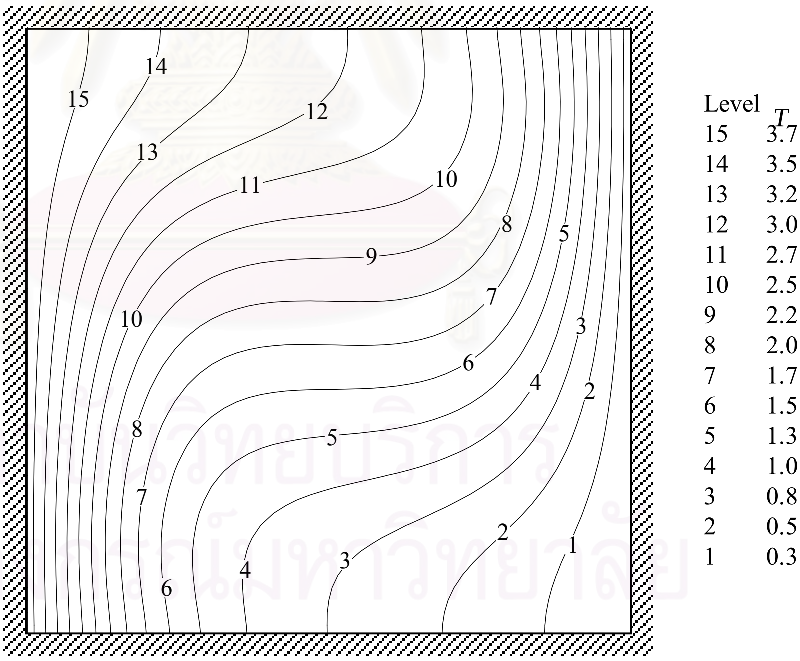


รูปที่ 4.19 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดซึ่งมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปที่ 4.20, 4.21 และ 4.22 แสดงรูปแบบการไหลและลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นจากการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความอิสระที่พารามิเตอร์ค่าต่างๆ จะเห็นได้ว่าลักษณะการไหลวนที่เกิดขึ้นมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา ทั้งนี้เนื่องจากอุณหภูมิบริเวณผนังด้านซ้ายมีค่าสูงทำให้ของไหลเกิดการลอยตัวขึ้น ในขณะที่บริเวณผนังด้านขวาซึ่งมีอุณหภูมิต่ำจะทำให้ของไหลลอยตัวต่ำลงเกิดการไหลในลักษณะหมุนวนตามเข็มนาฬิกาขึ้น และทั้งสามรูปจะกำหนดให้บริเวณที่มีอุณหภูมิสูงซึ่งเป็นผนังทางด้านซ้ายมีค่าเป็น 4, 6 และ 12 องศาเซลเซียส ตามลำดับ ผลของการเพิ่มอุณหภูมิจะทำให้ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งค่าเรย์เลห์นัมเบอร์จะมีผลต่อการไหลวนของของไหล โดยจะมีลักษณะการไหลที่เปลี่ยนไปเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มากขึ้น ซึ่งสังเกตได้จากรูปทั้งสามนี้



a)

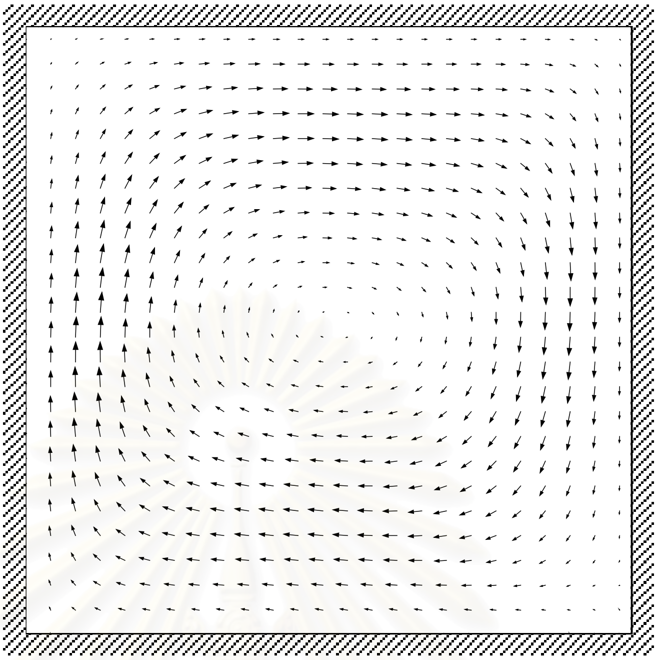


b)

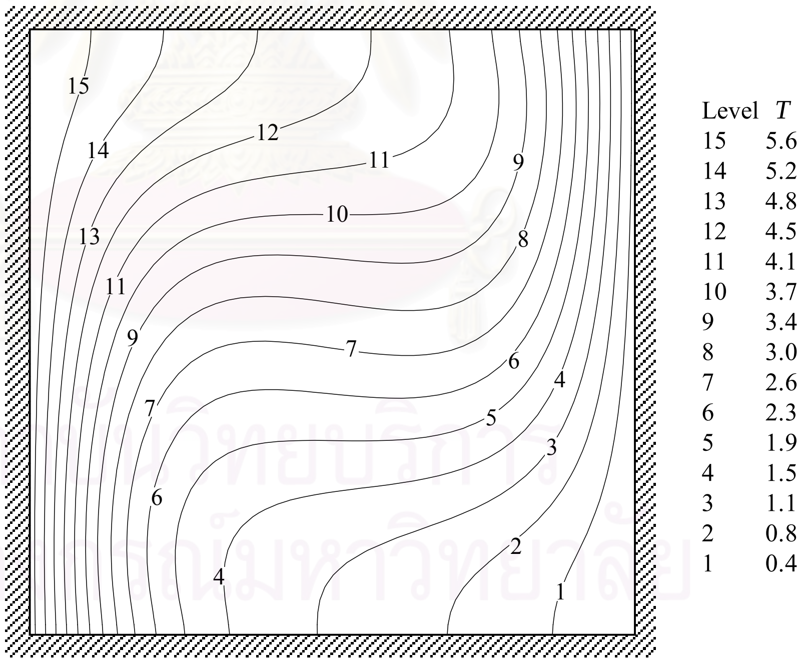
รูปที่ 4.20 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด โดยมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ Ra = 10^4, T_h = 4 ^oC และ Pr = 0.7

a) รูปแบบการไหล b) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



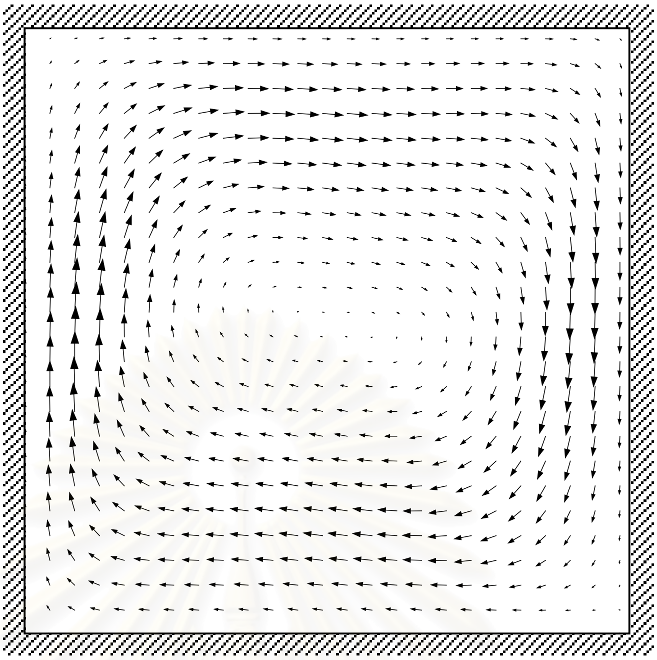
a)



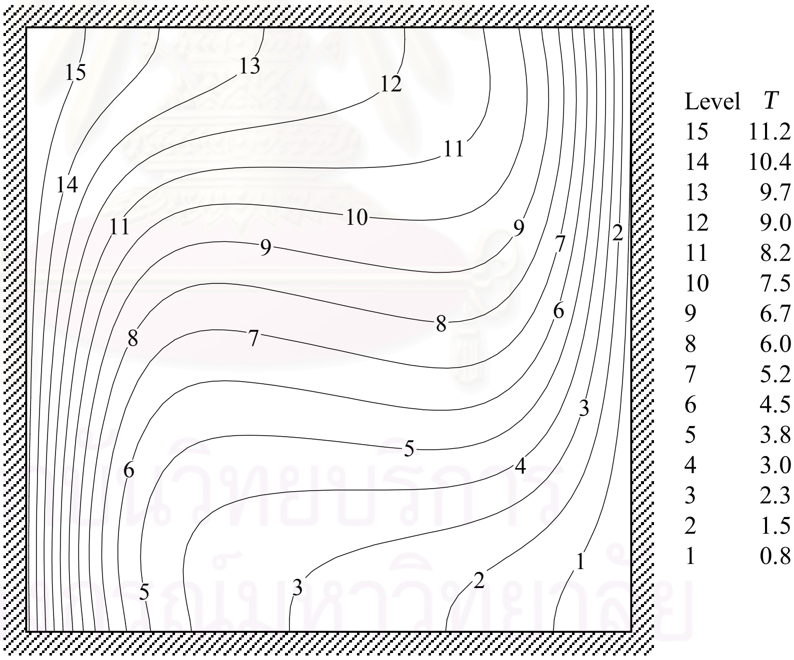
b)

รูปที่ 4.21 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด โดยมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ Ra = 1.5×10^4, T_h = 6 ^{o}C และ Pr = 0.7

a) รูปแบบการไหล b) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ



a)

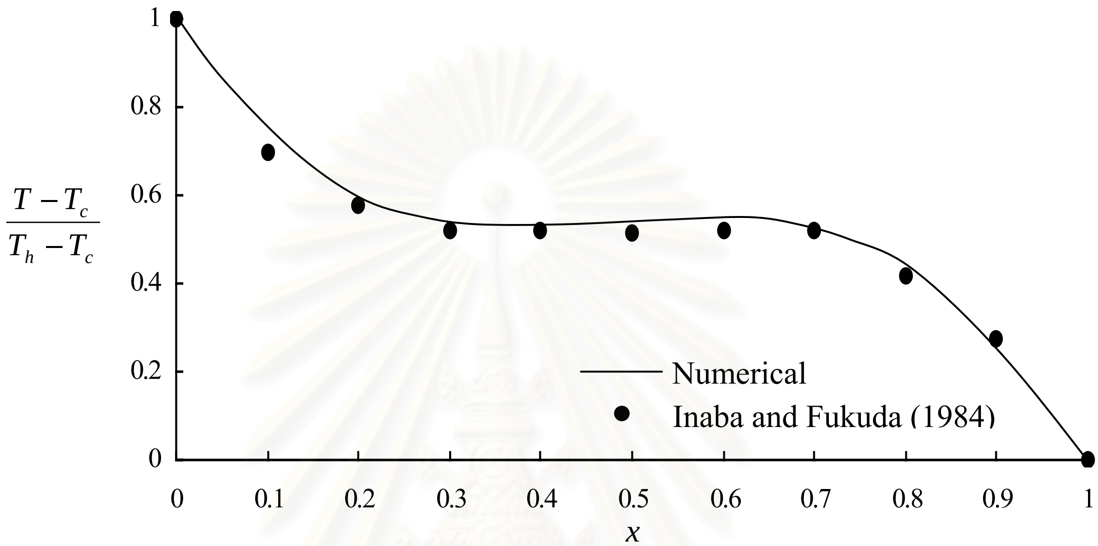


b)

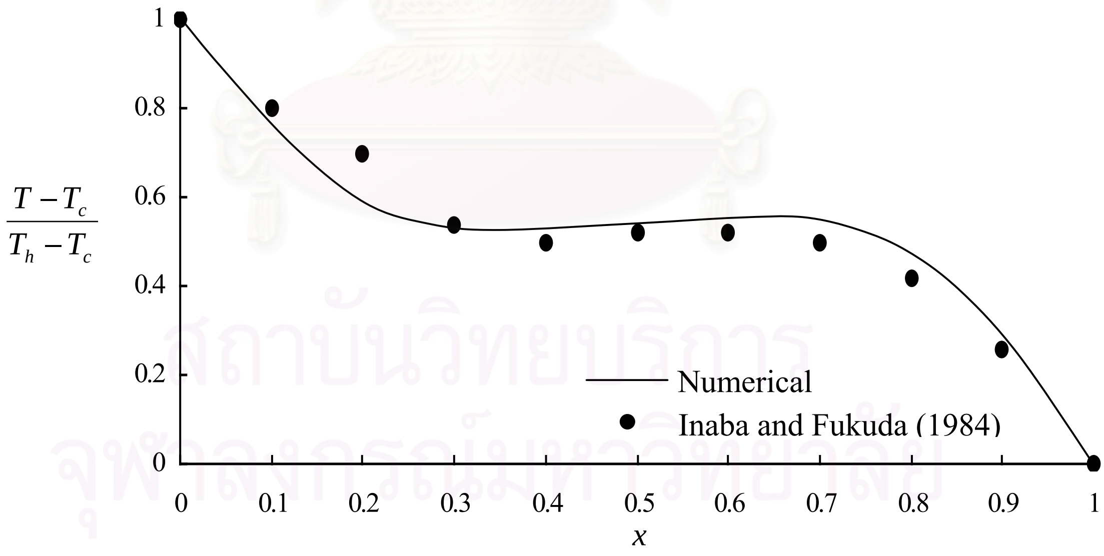
รูปที่ 4.22 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด โดยมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ Ra = 3×10^4, T_h = 12 °C และ Pr = 0.7

a) รูปแบบการไหล b) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Inaba and Fukuda (1984) โดยจะทำการเปรียบเทียบอุณหภูมิไร้มิติที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิดตลอดหน้าตัด (รูปที่ 4.23) ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลการเปรียบเทียบมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



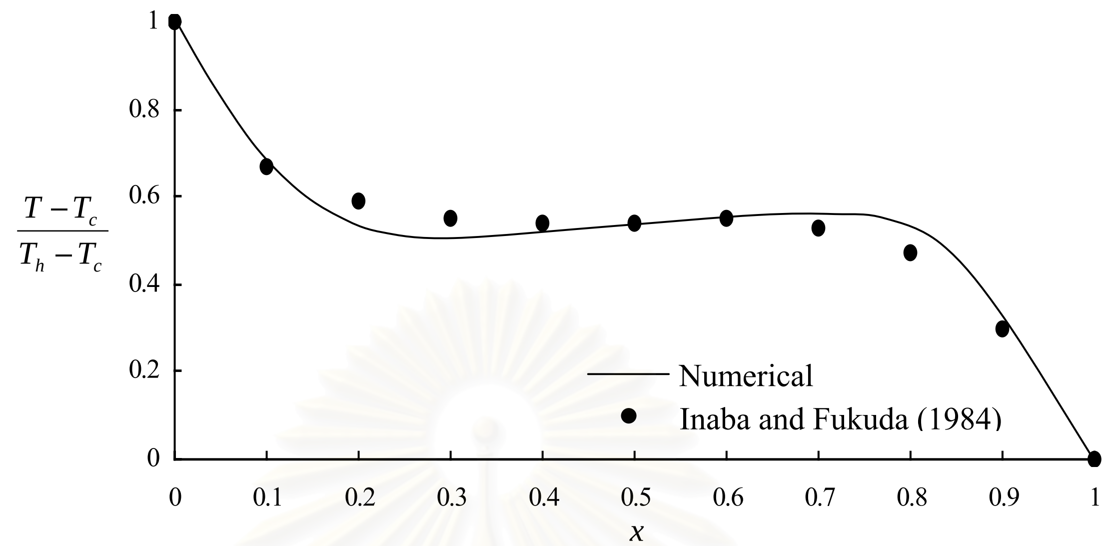
a)



b)

รูปที่ 4.23 อุณหภูมิไร้มิติจากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Inaba and Fukuda (1984) ที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด a) $T_h = 4$ °C b) $T_h = 6$ °C c) $T_h = 12$ °C

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



c)

รูปที่ 4.23(ต่อ) อุณหภูมิไร้มิติจากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Inaba and Fukuda (1984) ที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด a) $T_h = 4$ ^{o}C b) $T_h = 6$ ^{o}C c) $T_h = 12$ ^{o}C

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

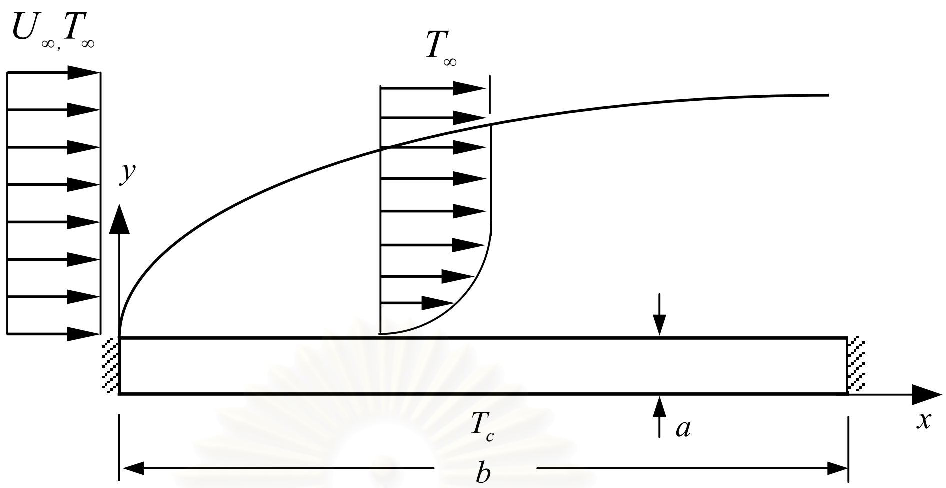
สำหรับบทนี้จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นและได้รับการตรวจสอบความถูกต้องมาแล้วในบทที่ 4 ไปวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยทำการศึกษาผลกระทบต่างๆ ที่มีผลต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งจะทำการวิเคราะห์ 3 ปัญหาด้วยกัน ได้แก่

1) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบและมีอุณหภูมิคงที่บริเวณผิวด้านล่างของแผ่นราบ
2) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบและมีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในของแข็ง ซึ่งปัญหานี้จะศึกษาผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติต่างๆที่มีต่อการถ่ายเทความร้อน
3) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหล โดยแบ่งการพิจารณาการพาความร้อนออกเป็นสองส่วน คือ การพาความร้อนแบบบังคับและการพาความร้อนแบบผสม ซึ่งส่วนการพาความร้อนแบบผสมนั้นจะมีทั้งการพาความร้อนแบบบังคับและการพาความร้อนแบบอิสระผสมกัน

5.1 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ

สำหรับปัญหานี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนได้แก่ การวิเคราะห์เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบและการพาความร้อนแบบที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ โดยมีการกำหนดเงื่อนไขขอบที่คล้ายกัน จะแตกต่างกันตรงที่การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจะมีการนำความร้อนในของแข็งด้วย

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ ได้กำหนดเงื่อนไขขอบให้บริเวณผิวด้านล่างของแผ่นบางมีอุณหภูมิคงที่ ดังรูปที่ 5.1 บริเวณด้านซ้ายและด้านขวาของแผ่นบางเป็นฉนวน ขณะที่บริเวณต้นการไหลมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิห้องและมีลักษณะการไหลเข้ามาแบบสม่ำเสมอ โดยของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ที่การไหลในสภาวะคงตัว



รูปที่ 5.1 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตผ่านแผ่นราบ

รูปแบบการจำลองด้วยวิธีไฟไนต์วอลุมของปัญหานี้ประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมจำนวน 100×100 ช่อง ความยาวแผ่นบาง (*b*) เท่ากับ 1.0 m ความหนาของแผ่นบาง (*a*) เท่ากับ 0.25 m และความสูงของขอบของของไหลคือ 0.75 m ซึ่งจะทำการวิเคราะห์ที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 500 และพรันด์เทิลนัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 100 โดยอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล ($k = k_s/k_f$) มีค่าเท่ากับ 1, 2 และ 5 ตามลำดับ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะนำไปเปรียบเทียบกับผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์ของ Vynnycky et al. (1998) ซึ่งคำนวณจากสมการ

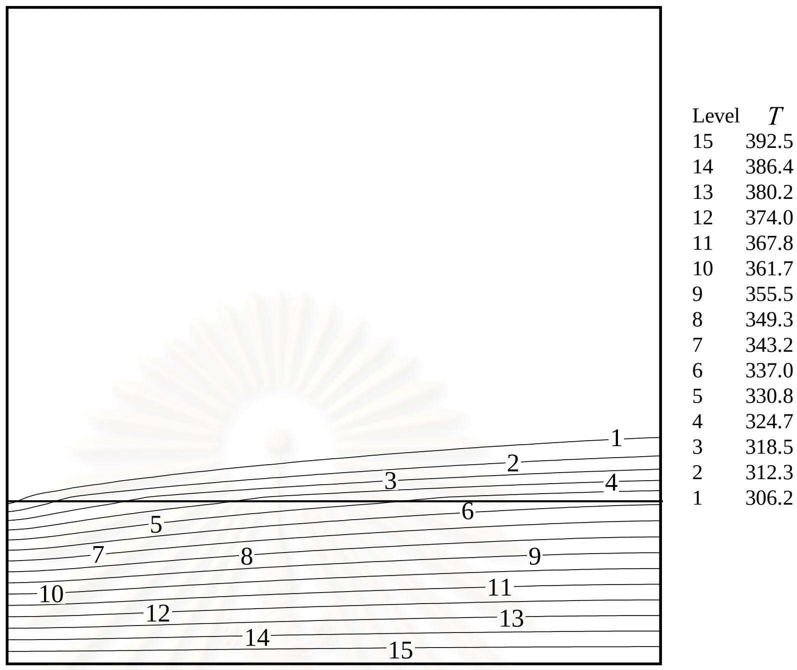
$$\theta_s(x,y) = -\frac{y}{\lambda} + 2(\gamma+1)\overline{\theta}_b \times \sum_{n=1}^{\infty} I_n \frac{\sinh n\pi(y+\lambda)}{\sinh(n\pi\lambda)} \cos n\pi\left(x+\frac{1}{2}\right) \tag{5.1}$$

โดยที่ $I_n = \int_0^1 x^{\gamma} \cos(n\pi x dx)$

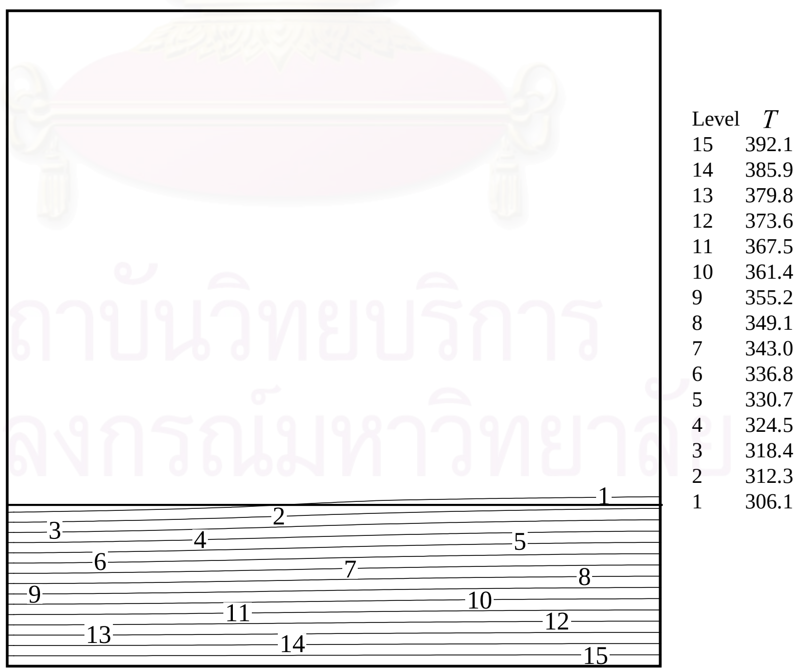
λ คือ อัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบาง

และ γ คือ ค่าคงที่ซึ่งขึ้นกับปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ สำหรับปัญหานี้จะใช้ค่า γ เท่ากับ 0.5

รูปที่ 5.2 และ 5.3 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 500 และ 10,000 ตามลำดับ (ช่วงการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบอยู่ในช่วง 0 ถึง 5×10^5 (Holman, 1997)) ในขณะที่พรันด์เทิลนัมเบอร์และอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลของทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากัน เมื่อเปรียบเทียบตำแหน่งของอุณหภูมิที่เท่ากันระหว่างรูปทั้งสองจะเห็นได้ว่าในรูปที่ 5.3 จะมีระยะห่างจากของแข็งน้อยกว่ารูปที่ 5.2 ซึ่งสามารถสรุปได้ว่าค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์มีผลต่อการถ่ายเทความร้อน โดยเมื่อค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เพิ่มมากขึ้นจะทำให้ประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนดีขึ้น



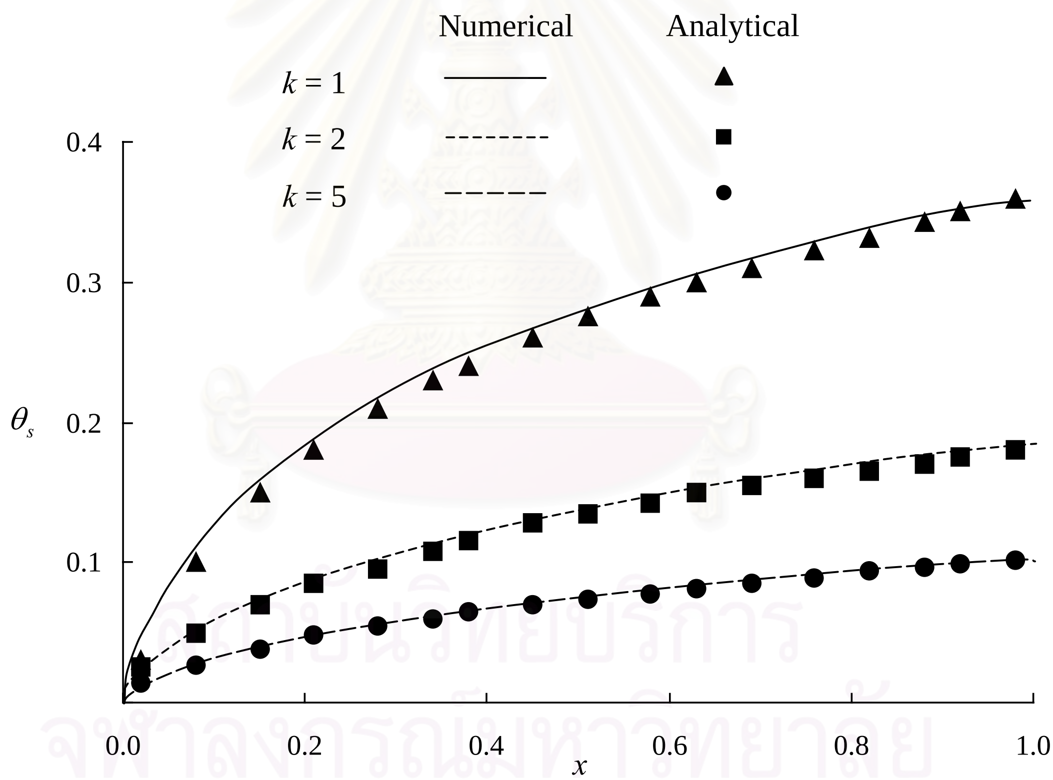
รูปที่ 5.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ผ่านแผ่นราบที่ Pr = 100, Re = 500 และ k = 5



รูปที่ 5.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ผ่านแผ่นราบที่ Pr =100, Re = 10,000 และ k = 5

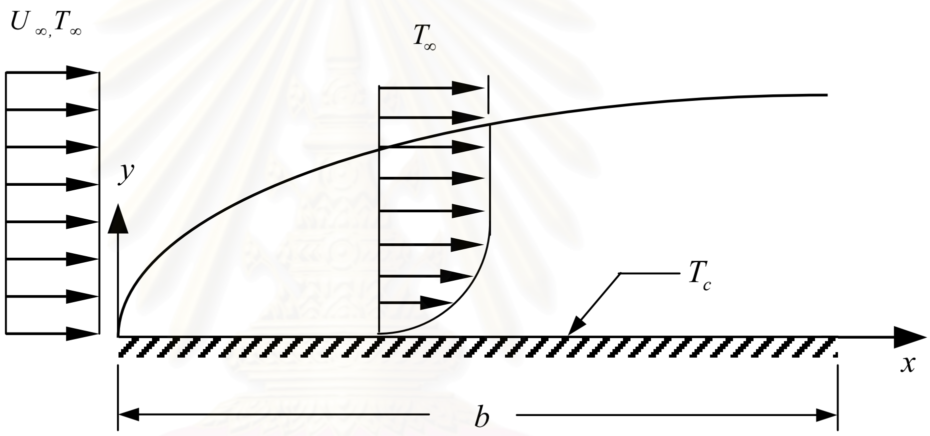
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลจากการเปรียบเทียบระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณกับวิธีเชิงวิเคราะห์ แสดงไว้ในรูปที่ 5.4 โดยมีแกนในแนวตั้งเป็นอุณหภูมิไร้มิติที่ผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล $\left(\theta_s = \dfrac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty}\right)$ และแกนในแนวนอนเป็นตำแหน่งของผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลที่ค่าต่างๆ กัน จากรูปที่ 5.4 จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความสอดคล้องกับผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์ และเมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลให้มีค่ามากขึ้นแล้วอุณหภูมิไร้มิติที่ผิวด้านบนของของแข็งจะมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากมีการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหลมากขึ้นนั่นเอง



รูปที่ 5.4 อุณหภูมิไร้มิติที่บริเวณรอยต่อของแข็งและของไหลที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์ของ Vynnycky et al. (1998) โดยมีค่า Pr = 100 และ Re = 500 ที่ค่า k ต่างๆ กัน

สำหรับในส่วนที่สองจะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการพาความร้อนที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ ซึ่งจะสมมติให้อุณหภูมิที่ผิวรอยต่อของของแข็งและของไหลมีค่าคงที่และไม่มีการนำความร้อนเกิดขึ้นในของแข็ง โดยรูปแบบของปัญหาและการกำหนดเงื่อนไขขอบแสดงในรูปที่ 5.4 โดยมีขอบการไหลสูงเท่ากับ 0.75 m ความยาวของแผ่นบางมีค่าเท่ากับ 1 m และกำหนดค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 500 ค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 100 และอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลมีค่าเท่ากับ 5 โดยเลือกใช้ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมจำนวน 50×70 ช่อง

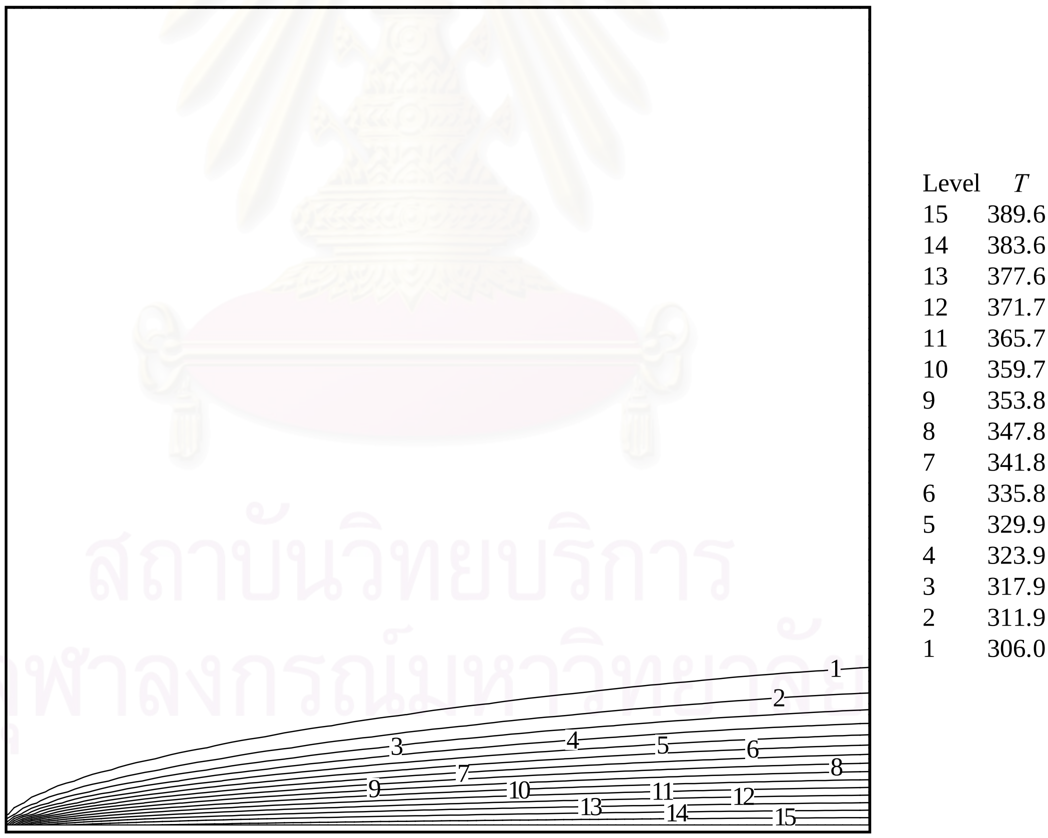


รูปที่ 5.5 ลักษณะของพาความร้อนผ่านแผ่นราบ

รูปที่ 5.6 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหานี้จะเห็นได้ว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิมีลักษณะแตกต่างไปจากรูปที่ 5.2 ซึ่งมีค่าคุณสมบัติต่างๆ เท่ากัน แต่วิเคราะห์เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

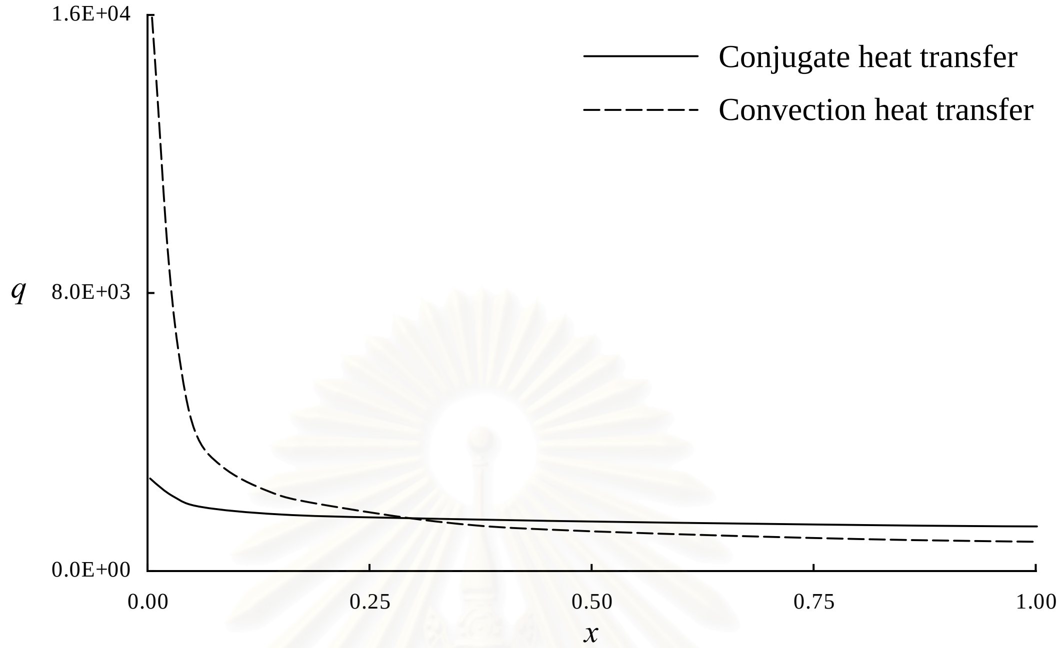
สำหรับรูปที่ 5.7 แสดงการเปรียบเทียบปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตกับการพาความร้อนที่ Re = 500, Pr = 100 และ $k = 5$ จากรูปจะเห็นได้ว่า ที่บริเวณต้นการไหล ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลในกรณีของการพาความร้อน มีค่ามากกว่าการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต เนื่องจากการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตมีการนำความร้อนที่เกิดขึ้นภายในของแข็งด้วยทำให้ปริมาณความร้อนบางส่วนอยู่ภายในของแข็งในขณะที่การพาความร้อนจะถ่ายเทปริมาณความร้อนออกไปได้ทั้งหมดจึง

ทำให้ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลในบริเวณต้นการไหลเป็นไปในลักษณะดังกล่าว ในบริเวณท้ายการ ไหลพบว่าปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลในกรณีการพาความร้อนมีค่าน้อยกว่าการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ทั้งนี้เป็นเพราะในการพาความร้อนของไหลที่บริเวณท้ายการไหลจะได้รับความร้อนจนกระทั่งอุณหภูมิของของไหลกับที่ผิวของแข็งมีค่าใกล้เคียงกันจึงทำให้ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทในบริเวณดังกล่าวมีค่าลดลงน้อยกว่ากรณีการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต และในส่วนการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตก็สามารถอธิบายได้ว่าอุณหภูมิระหว่างของไหลกับผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลมีความแตกต่างกันมากกว่ากรณีการพาความร้อน จึงทำให้ปริมาณการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหลในบริเวณดังกล่าวของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตมีค่ามากกว่ากรณีการพาความร้อน



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 5.6 การกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการพาความร้อนผ่านแผ่นราบที่ Pr = 100, Re = 500 และ k = 5



รูปที่ 5.7 ปริมาณความร้อนซึ่งถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลที่ตำแหน่ง x ต่างๆ โดยมีอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลเท่ากับ 25, 50 และ 100

สรุปผล

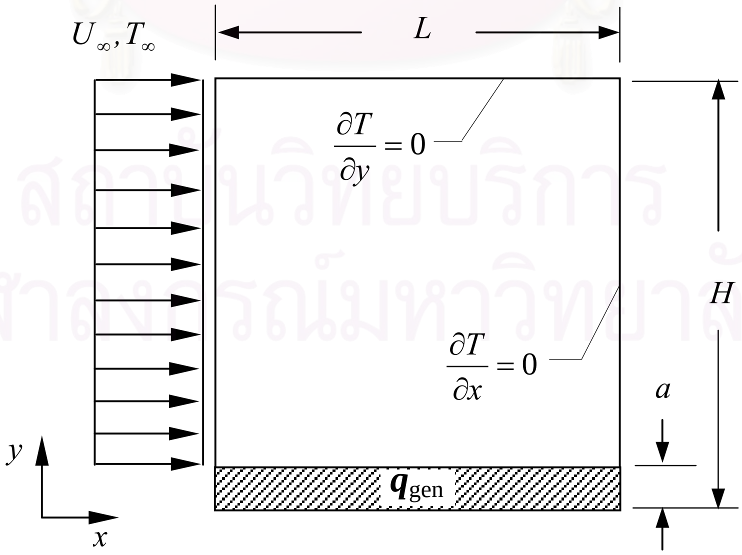
สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบและการพาความร้อนที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ สามารถสรุปผลการศึกษาได้ ดังต่อไปนี้

1. ผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์ของ Vynnycky et al. (1998) แล้วพบว่ามีความสอดคล้องกัน
2. ในการเปรียบเทียบการวิเคราะห์ปัญหานี้ด้วยการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตและการพาความร้อน พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความแตกต่างกัน ซึ่งโดยทั่วไปนั้นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนจะพิจารณาเฉพาะการพาความร้อนเท่านั้น แต่ในความเป็นจริงแล้วต้องคำนึงถึงการนำความร้อนภายในอุปกรณ์ด้วย และในการเปรียบเทียบปัญหานี้ระหว่างการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตกับการพาความร้อนก็มีความแตกต่างกันพอสมควร โดยเฉพาะในเรื่องของฟลักซ์ความร้อนที่ตำแหน่งต่างๆ

5.2 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบและมีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในของแข็ง

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบนี้ มีความแตกต่างจากปัญหาในหัวข้อ 5.1 กล่าวคือภายในของแข็งมีแหล่งกำเนิดความร้อนขนาดสม่ำเสมอ แทนที่จะกำหนดให้มีอุณหภูมิคงที่ โดยในการศึกษา มีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติต่างๆ ทั้งของแข็งและของไหลว่ามีผลกระทบต่อประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนอย่างไร ลักษณะของปัญหาแสดงในรูปที่ 5.8 ซึ่งประกอบไปด้วยแผ่นบางมีความหนา (a) 0.1 m และความยาว (L) 1.0 m โดยมีความสูงของโดเมน (H) เท่ากับ 1.0 m สำหรับของไหลจะไหลเข้าทางด้านซ้ายของโดเมนที่พิจารณาในลักษณะสม่ำเสมอ โดยมีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในของแข็ง ซึ่งแบ่งการศึกษาในแง่ของการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรต่างๆ ต่อไปนี้

1) เรย์โนลด์นัมเบอร์
2) ปริมาณความร้อนของแหล่งกำเนิดความร้อน
3) อัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล
4) อัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบาง

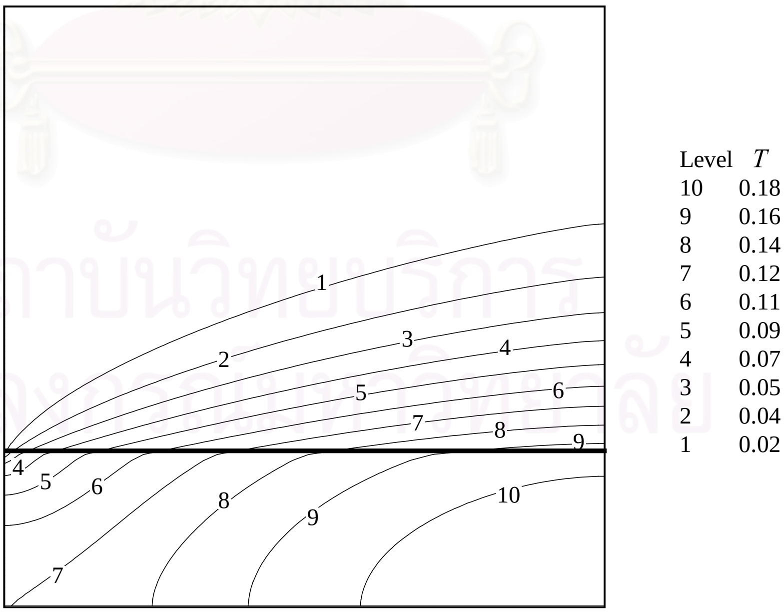


รูปที่ 5.8 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ

รูปแบบการจำลองปัญหาด้วยไฟไนต์วอลุมประกอบด้วยปริมาตรควบคุม จำนวน 100×50 ช่อง โดยมีเงื่อนไขขอบของปัญหาในส่วนการไหลดังนี้ บริเวณด้านล่างเป็นผนังและด้านบนจะเป็นการไหลแบบ Free stream โดยการถ่ายเทความร้อนได้กำหนดเงื่อนไขขอบให้บริเวณด้านล่าง ด้านซ้ายและขวาของแผ่นบางมีฉนวนห่อหุ้ม ในขณะที่ของไหลบริเวณทางเข้ามีอุณหภูมิคงที่ ส่วนบริเวณด้านบนและทางออกของการไหล กำหนดให้ไม่มีการสูญเสียความร้อน (Adiabatic)

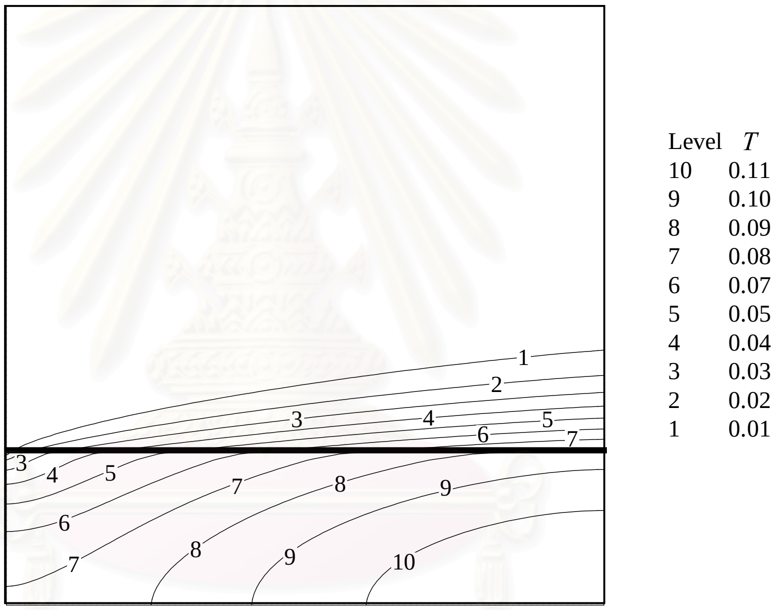
5.2.1 ผลกระทบของค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่อการถ่ายเทความร้อน

ในการศึกษา มีการเปลี่ยนแปลงค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์โดยกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 48, 240, 480 และ 1248 ตามลำดับ ซึ่งได้นำผลลัพธ์จากการคำนวณคืออุณหภูมิบริเวณผิวของแผ่นบางที่ตำแหน่งต่างๆ มาเปรียบเทียบระหว่างค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ที่ได้กำหนดไว้ ในรูปที่ 5.9 และ 5.10 โดยนำผลลัพธ์มาแสดงเป็นการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในโดเมนของปัญหา ซึ่งมีค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 ที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 48 และ 240 ตามลำดับ โดยกำหนดค่าอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลเท่ากับ 10



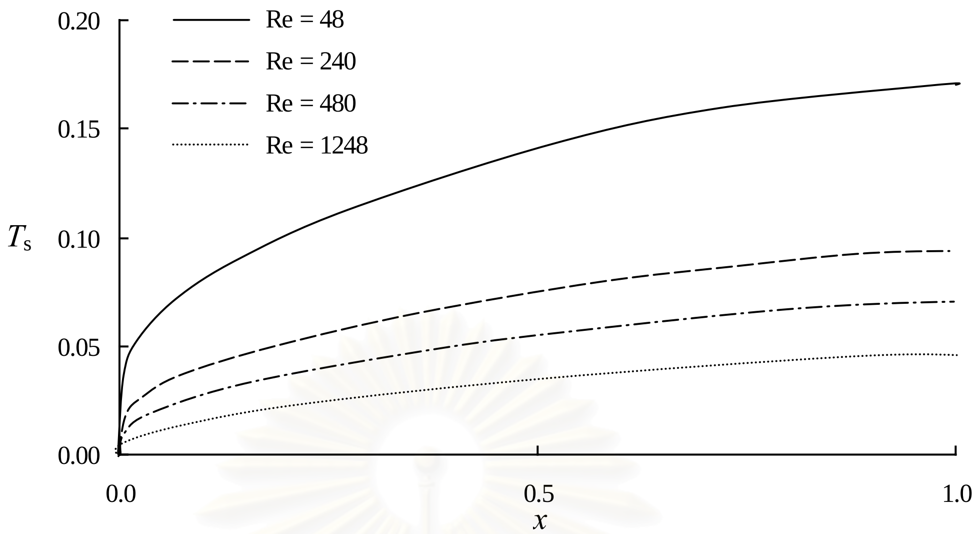
รูปที่ 5.9 การกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ ที่ Re = 48

จากรูปที่ 5.9 จะเห็นว่าชั้นขอบความร้อน (Thermal boundary layer) มีความหนามากทั้งนี้เป็นเพราะการถ่ายเทความร้อนในกรณีที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำจะมีประสิทธิภาพไม่ดี เพราะเทอมการพาของสมการอนุรักษ์พลังงาน (สมการ(2.42)) มีค่าน้อย สำหรับรูปที่ 5.10 จะพบว่าชั้นขอบความร้อนมีความหนาน้อยกว่าในรูปที่ 5.9 โดยรูปทั้งสองมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่างกัน กล่าวคือ ในรูปที่ 5.10 มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์มากกว่า ทำให้เทอมการพาในสมการอนุรักษ์พลังงานมีค่ามาก จึงถ่ายเทความร้อนได้ดี



รูปที่ 5.10 การกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ที่มีการไหลผ่านแผ่นราบ ที่ Re = 240

จากรูปที่ 5.11 จะเห็นได้ว่าเมื่อค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นแล้วอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อระหว่างของไหลและของแข็งมีค่าลดลง เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ทำให้พจน์ของ การพาในสมการอนุรักษ์พลังงานมีค่ามาก จึงส่งผลให้มีการถ่ายเทความร้อนมากขึ้น ทำให้อุณหภูมิบริเวณผิวของแข็งมีค่าลดลง



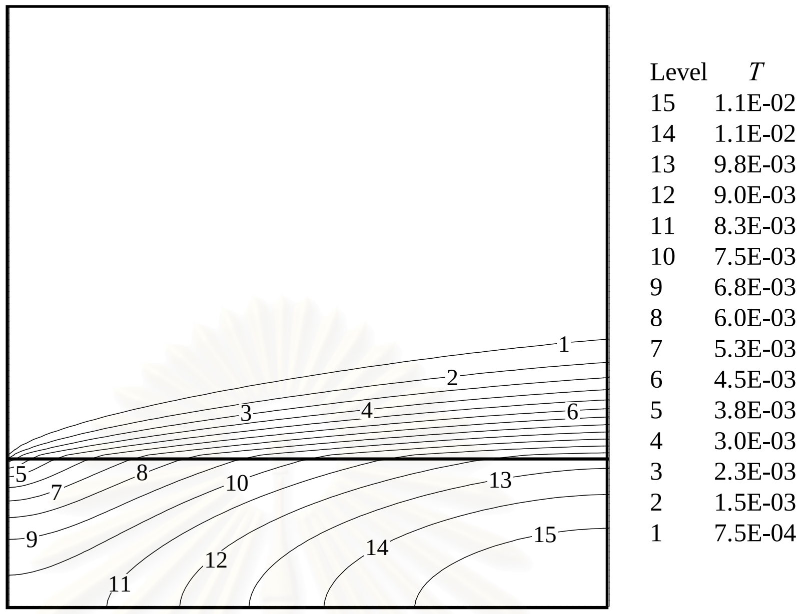
รูปที่ 5.11 อุณหภูมิที่ผิวของแข็งที่ Re = 48, 240, 480 และ 1248

5.2.2 ผลกระทบของปริมาณความร้อนของแหล่งกำเนิดความร้อนต่อการถ่ายเทความร้อน

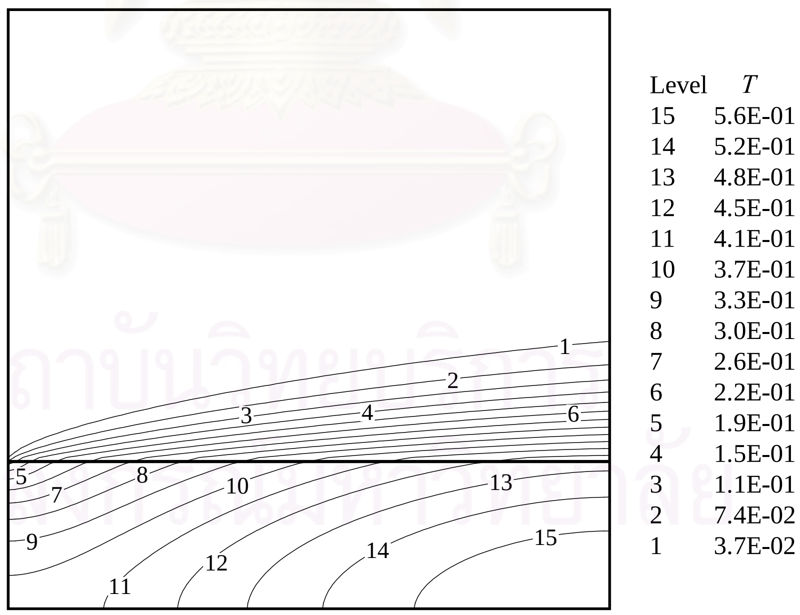
สำหรับการศึกษาในส่วนนี้มีการเปลี่ยนแปลงค่าความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของแหล่งกำเนิดความร้อนภายในของแข็ง เพื่อศึกษาผลกระทบที่มีต่อการถ่ายเทความร้อน ซึ่งกำหนดให้ความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของแหล่งกำเนิดความร้อนภายในของแข็งมีค่าเท่ากับ 0.1, 1, 5 และ 10 W/m^3 ตามลำดับ โดยวิเคราะห์ที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 240

รูปที่ 5.12 และ 5.13 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในโดเมนของปัญหาโดยมีค่าความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของแหล่งกำเนิดความร้อนภายในของแข็งเท่ากับ 0.1 และ 5 W/m^3 ตามลำดับ จากรูปทั้งสองจะเห็นได้ว่าลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิมีความใกล้เคียงกัน แต่อุณหภูมิที่ตำแหน่งเดียวกันภายในโดเมนของปัญหาทั้งสองมีค่าไม่เท่ากันเพราะปริมาณของแหล่งกำเนิดความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในบริเวณของแข็งมีค่าต่างกัน จึงเกิดการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหลในปริมาณที่ไม่เท่ากัน

จากรูปที่ 5.14 แสดงการเปรียบเทียบอุณหภูมิที่ผิวของแข็ง โดยมีปริมาณความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรแตกต่างกัน จะเห็นได้ว่าเมื่อปริมาณความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรมีค่ามากขึ้นแล้วอุณหภูมิที่บริเวณผิวของแข็งก็มีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วยเพราะปริมาณของแหล่งกำเนิดความร้อนในโดเมนของปัญหามีค่าไม่เท่ากัน และเมื่อพิจารณาอุณหภูมิที่บริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลตามแนวแกน x แล้วพบว่าอุณหภูมิมีค่ามากขึ้นเมื่อระยะในแนวแกน x มากขึ้น

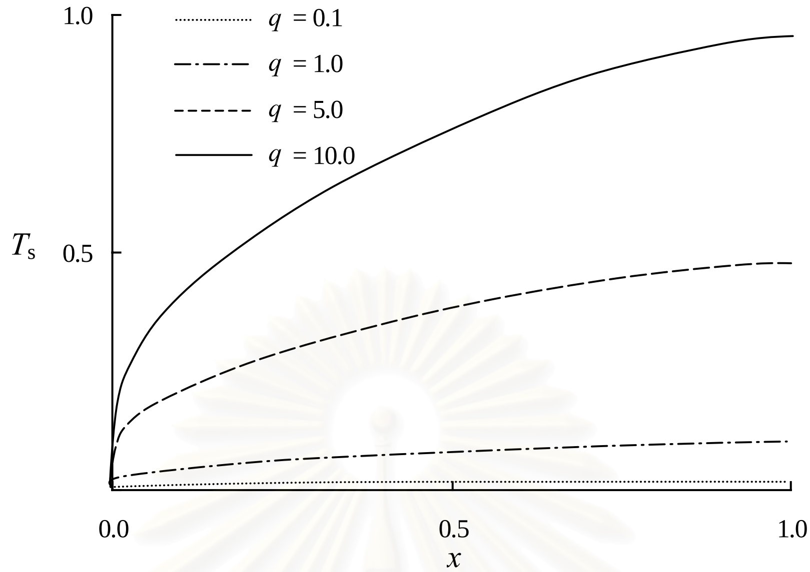


รูปที่ 5.12 การกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ที่มีการไหลผ่านแผ่นราบโดยมีปริมาณความร้อนของแหล่งกำเนิดความร้อนเท่ากับ 0.1 W/m^3



รูปที่ 5.13 การกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ที่มีการไหลผ่านแผ่นราบโดยมีปริมาณความร้อนของแหล่งกำเนิดความร้อนเท่ากับ 5 W/m^3

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



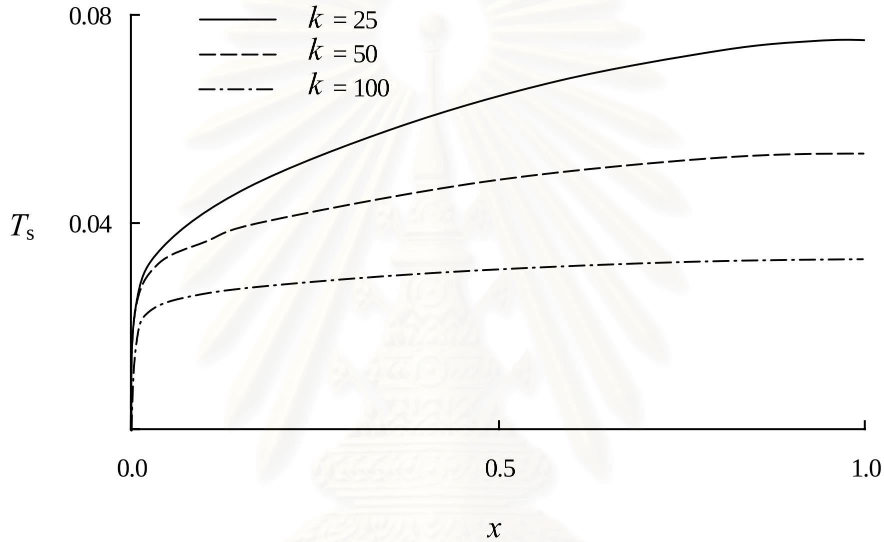
รูปที่ 5.14 อุณหภูมิที่ผิวของแข็งที่มีค่าปริมาณความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร เท่ากับ 0.1, 1, 5 และ 10 W/m^3

สำหรับงานทางวิศวกรรมนั้นวัสดุแต่ละชนิดมีขีดจำกัดของอุณหภูมิที่ยังคงสามารถรักษาคุณสมบัติต่างๆ ของวัสดุนั้นไว้ได้ โดยพิจารณาจากอุณหภูมิสูงสุดที่เกิดขึ้นภายในโดเมนของปัญหา ดังนั้นผลลัพธ์จากการคำนวณสามารถนำไปใช้ในการกำหนดปริมาณความร้อนมากสุดของแหล่งกำเนิดความร้อนที่วัสดุสามารถรับได้

5.2.3 ผลกระทบของอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลต่อการถ่ายเทความร้อน

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ค่าของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งและสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของไหล มีความสำคัญในการเชื่อมโยงการนำความร้อนและการพาความร้อนเข้าด้วยกัน ซึ่งจะทำให้สามารถคำนวณการถ่ายเทความร้อนทั้งสองลักษณะพร้อมกันภายในโดเมนเดียว (รายละเอียดของวิธีการคำนวณการถ่ายเทความร้อนที่บริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลแสดงในบทที่ 3) ดังนั้น ผลกระทบที่เกิดขึ้นในการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจากการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล (k) จึงมีประโยชน์ในการนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีความซับซ้อนต่อไป

สำหรับการเปรียบเทียบค่า k มีการกำหนดค่าเป็น 25, 50 และ 100 ตามลำดับ โดยมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 240 ผลของการคำนวณแสดงดังรูปที่ 5.15 ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อ k มีค่าเพิ่มขึ้นอุณหภูมิที่บริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลมีค่าลดลง ทั้งนี้เนื่องจากปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลมีค่ามากขึ้น โดยจะเห็นได้ชัดเจนจากรูปที่ 5.16 ซึ่งแสดงการเปรียบเทียบปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลที่ตำแหน่ง x ใดๆ

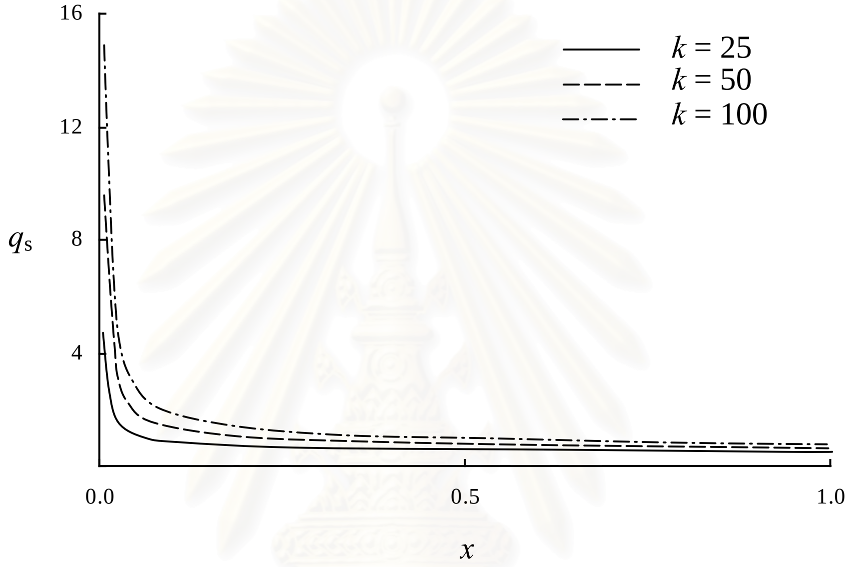


รูปที่ 5.15 อุณหภูมิที่ผิวของแข็งที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลเท่ากับ 25, 50 และ 100

ในรูปที่ 5.16 บริเวณทางเข้าโดเมนของปัญหามีปริมาณการถ่ายเทความร้อนมาก เพราะที่บริเวณทางเข้านั้นของไหลและของแข็งมีอุณหภูมิแตกต่างกันมาก จึงเกิดการถ่ายเทความร้อนปริมาณมากและปริมาณการถ่ายเทความร้อนจะลดลงเมื่อของไหลได้ไหลผ่านแผ่นบางที่ระยะ x เพิ่มขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากมีการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้นจนกระทั่งอุณหภูมิภายในของไหลและของแข็งมีค่าใกล้เคียงกันนั่นเอง

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณทั้งหมดสำหรับกรณีนี้ พบว่าของแข็งที่มีสัมประสิทธิ์การนำความร้อนสูงจะทำให้ความร้อนสามารถถ่ายเทสู่ของไหลได้ดี ดังนั้นในการเลือกวัสดุเพื่อให้อุปกรณ์ระบายความร้อนมีประสิทธิภาพสูง ควรจะเลือกใช้วัสดุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนสูงด้วย แต่ในงานทางด้านวิศวกรรมในบางครั้งอาจมีข้อจำกัดบางอย่าง เช่น วัสดุที่มีสัมประสิทธิ์

การนำความร้อนสูงมักจะมีราคาแพง ดังนั้นการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งสามารถวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตได้ จะสามารถจำลองปัญหาขึ้นมาแล้วนำผลลัพธ์มาเป็นข้อมูลเพื่อใช้ในการเลือกวัสดุที่มีความเหมาะสมทั้งด้านราคาและสามารถระบายความร้อนได้ตามความต้องการ



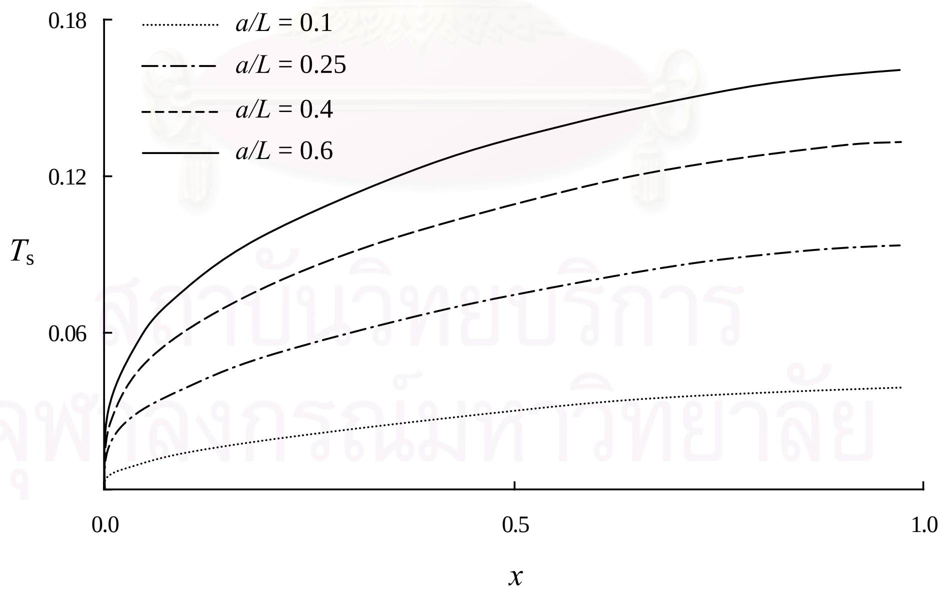
รูปที่ 5.16 ปริมาณความร้อนซึ่งถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลที่ตำแหน่ง x ต่างๆ โดยมีอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลเท่ากับ 25, 50 และ 100

5.2.4 ผลกระทบของอัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางต่อการถ่ายเทความร้อน

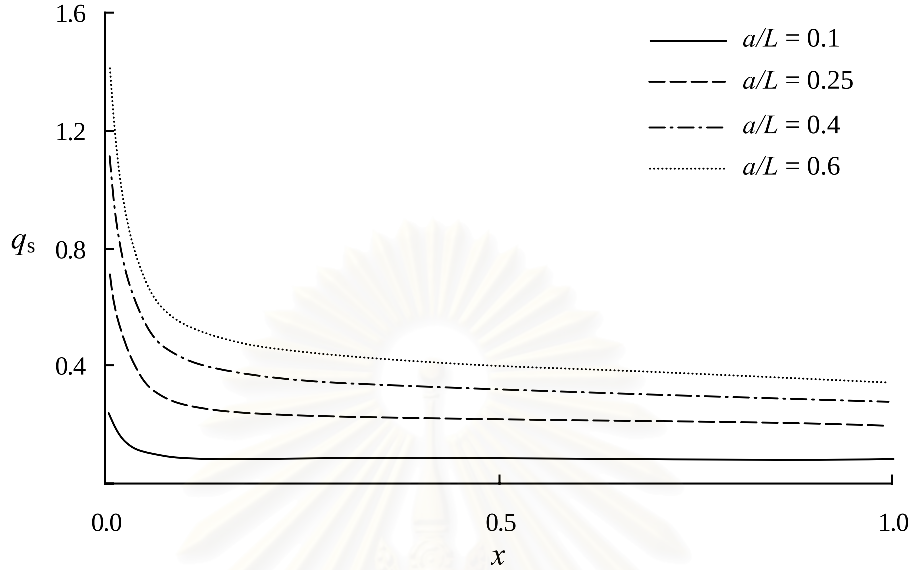
การศึกษาถึงผลกระทบที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางนั้น จะทำให้มีความเข้าใจถึงพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นเมื่อมีการเปลี่ยนรูปร่างของอุปกรณ์ที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในและสามารถนำไปเป็นข้อมูลสำหรับออกแบบการระบายความร้อนในอุปกรณ์ดังกล่าวให้มีประสิทธิภาพสูงสุด โดยการจำลองในกรณีนี้ได้กำหนดให้อัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางมีค่าเท่ากับ 0.1, 0.25, 0.4 และ 0.6 ตามลำดับ และมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 240

รูปที่ 5.17 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางที่ตำแหน่ง x ใดๆ ตลอดแผ่นบาง ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่ออัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วอุณหภูมิที่บริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากพื้นที่ของแหล่งกำเนิดความร้อนภายในของแข็งเพิ่มขึ้นจึงทำให้ปริมาณความร้อนมากขึ้น สำหรับรูปที่ 5.18 แสดงปริมาณความร้อนจากของแข็งซึ่งถ่ายเทสู่ของไหลที่มีค่าอัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางต่างๆ โดยจะเห็นได้ว่าปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลมีค่ามากขึ้นเมื่ออัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางเพิ่มขึ้นเพราะมีพื้นที่สำหรับเป็นแหล่งกำเนิดความร้อนมากขึ้นนั่นเอง

ในงานทางด้านออกแบบการระบายความร้อน เมื่อรูปร่างของแหล่งกำเนิดความร้อนมีสัดส่วนและขนาดแตกต่างกันจะทำให้ขั้นตอนในการออกแบบการระบายความร้อนมีความยากลำบากขึ้น ดังนั้นการศึกษานี้จึงเป็นข้อมูลพื้นฐานสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีความซับซ้อน เช่น การถ่ายเทความร้อนออกจากแท่งเชื้อเพลิงของเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ ครีบ และอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ เป็นต้น



รูปที่ 5.17 อุณหภูมิที่ผิวของแข็งที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างความหนาต่อความยาวของแผ่นบางซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1, 0.25, 0.4 และ 0.6



รูปที่ 5.18 ปริมาณความร้อนซึ่งถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลที่ตำแหน่ง x ต่างๆ ที่มีอัตราส่วนระหว่างความหนาต่อความยาวของแผ่นบาง ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1, 0.25, 0.4 และ 0.6

สรุปผล

สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบและมีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในของแข็ง สามารถสรุปผลการศึกษาได้ ดังต่อไปนี้

1. เมื่อเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้นจะทำให้การถ่ายเทความร้อนมีปริมาณมากขึ้น
2. ปริมาณความร้อนของแหล่งกำเนิดความร้อนมีผลต่อการถ่ายเทความร้อน โดยเมื่อปริมาณความร้อนของแหล่งกำเนิดความร้อนเพิ่มขึ้นจะทำให้ความร้อนที่เกิดภายในโดเมนของปัญหามีค่ามากขึ้น
3. อัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล (k) จะมีผลต่อปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทระหว่างของแข็งและของไหล โดยเมื่อค่า k มากขึ้น ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทระหว่างของแข็งและของไหลก็จะเพิ่มขึ้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. เมื่ออัตราส่วนของความหนาต่อความยาวของแผ่นบางเพิ่มขึ้นจะทำให้พื้นที่ซึ่งเป็นแหล่งกำเนิดความร้อนมากขึ้น ทำให้มีปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลมากขึ้นด้วย

5.3 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหล

การถ่ายเทความร้อนออกจากสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมเป็นปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่ง ซึ่งการถ่ายเทความร้อนชนิดนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในทางด้านวิศวกรรมอย่างแพร่หลาย ตัวอย่างเช่น การระบายความร้อนของครีบ การถ่ายเทความร้อนของชิพบนบอร์ดวงจรในอุตสาหกรรมอิเล็กทรอนิกส์ การระบายความร้อนภายในของใบพัดในเครื่องยนต์กังหันก๊าซ การถ่ายเทความร้อนในเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ และอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนต่างๆ

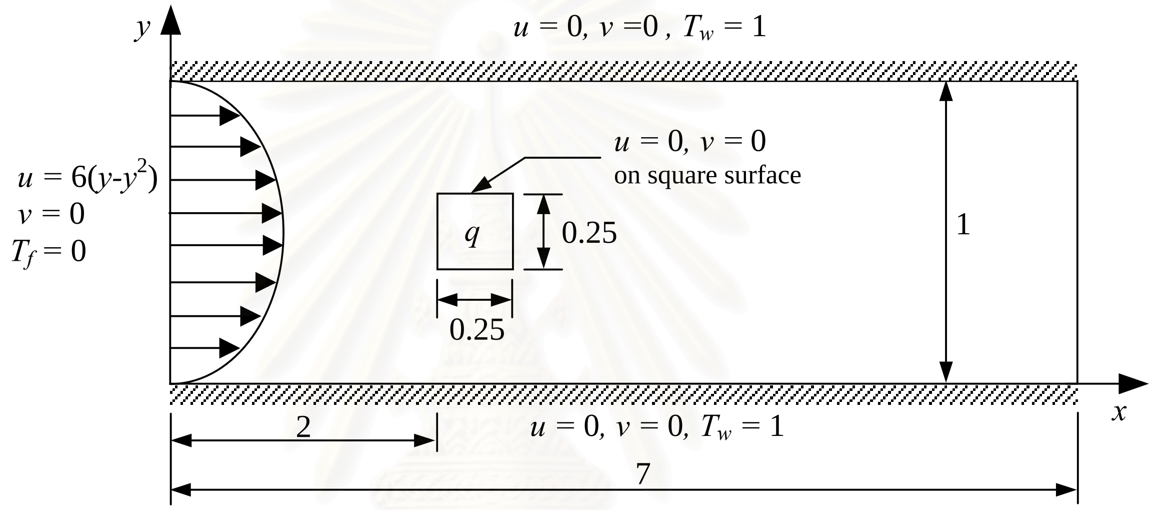
อุณหภูมิที่ใช้ในการคำนวณอยู่ในรูปแบบไร้มิติดังสมการข้างล่างนี้

$$T = \frac{(T_i - T_f)}{(T_w - T_f)} \tag{5.2}$$

สำหรับปัญหานี้จะมีลักษณะเช่นเดียวกับงานวิจัยของ Ramaswamy and Jue (1992) แต่ในที่นี้การถ่ายเทความร้อนออกจากสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมจะวิเคราะห์เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยพิจารณาการพาความร้อนออกเป็นสองลักษณะเช่นเดียวกัน คือ การพาความร้อนแบบบังคับ และการพาความร้อนแบบผสม (รวมการพาความร้อนแบบบังคับและแบบอิสระเข้าด้วยกัน)

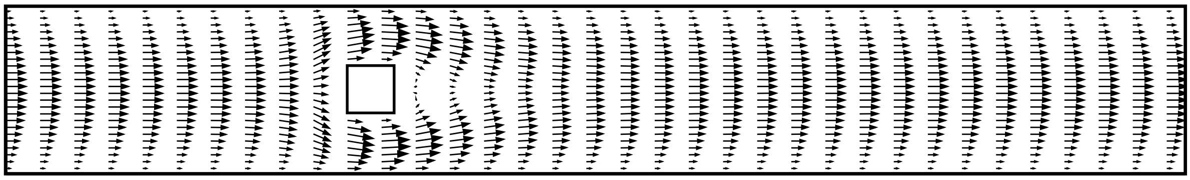
เงื่อนไขขอบของปัญหานี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.19 (Dechaumphai and Kanjanakijkasem, 1999) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้ การไหลเกิดขึ้นภายในช่องทางไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานโดยมีระยะห่างเท่ากับ 1 m และมีความยาวของช่องทางไหลเท่ากับ 7 เท่าของความกว้างของช่องทางไหล โดยมีสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความกว้างเท่ากับ 0.25 เท่าของความกว้างของช่องทางไหลวางอยู่บริเวณกึ่งกลางของช่องทางไหลและมีระยะห่างจากขอบด้านซ้ายเท่ากับ 2 เท่าของความกว้างช่องทางไหล ของไหลเข้าสู่โดเมนของปัญหาทางด้านซ้ายและมีลักษณะการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว สำหรับเงื่อนไขขอบของการถ่ายเทความร้อนมีการกำหนดให้ผนังของช่องทางไหลทั้งด้านบนและด้านล่างมีอุณหภูมิไร้มิติเท่ากับ 1 โดยอุณหภูมิของของไหลบริเวณทางเข้ามีค่าเท่ากับ 0 และในทรงกระบอกมีแหล่งกำเนิดความร้อนภายใน (q) มีค่าเท่ากับ 25 W/m^3

รูปแบบการจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมของปัญหานี้ประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมจำนวน 70×100 ช่อง โดยกำหนดให้เงื่อนไขขอบตลอดขอบผนังทั้งหมดมีความเร็วตามแนวแกนทั้งสองเท่ากับศูนย์ ในการจำลองปัญหานี้ได้เลือกใช้ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 และ 100 โดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 0, 570 และ 2300 ตามลำดับ

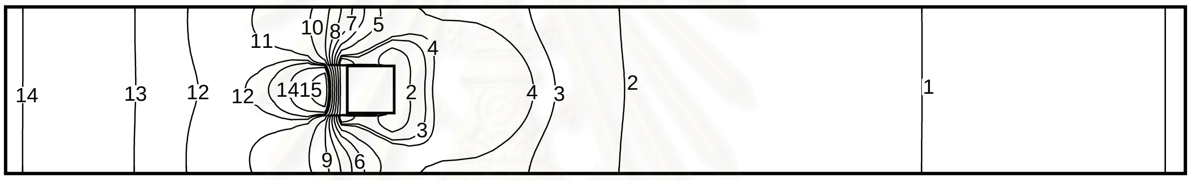


รูปที่ 5.19 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหล

รูปที่ 5.20-5.22 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 โดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 0 ในการจำลองส่วนนี้เป็นการพาความร้อนแบบบังคับเท่านั้น เนื่องจากไม่พิจารณาแรงลอยตัวที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิ (Ra = 0) ในรูปที่ 5.20 ซึ่งแสดงการกระจายตัวของความเร็วพบว่าการไหลมีลักษณะสมมาตรในแนวระดับ โดยการกระจายตัวของความดันและอุณหภูมิในรูปที่ 5.21 และ 5.22 ก็มีลักษณะสมมาตรในแนวระดับเช่นกัน

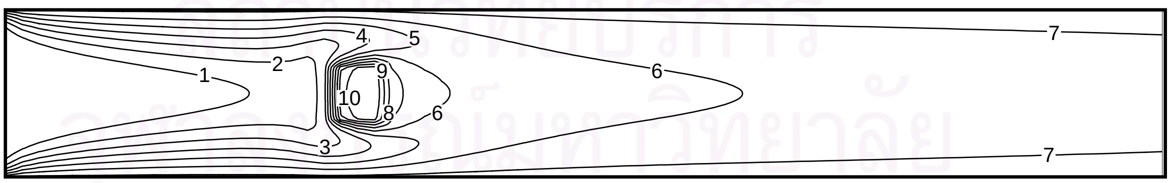


รูปที่ 5.20 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 0



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p:	-0.29	-0.17	-0.13	-0.11	-0.03	0.06	0.15	0.24	0.33	0.42	0.50	0.53	0.55	0.59	0.68

รูปที่ 5.21 ลักษณะการกระจายตัวของความดันในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 0



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T:	0.14	0.27	0.41	0.54	0.68	0.82	0.95	1.09	1.23	1.36

รูปที่ 5.22 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 0

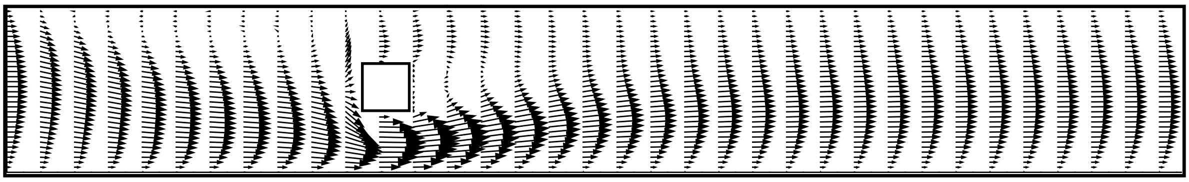
รูปที่ 5.23-5.25 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 โดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 570 จากรูปจะพบว่าการไหลมีลักษณะไม่สมมาตรในแนวระดับเพราะมีการพิจารณาผลของแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิ ซึ่งลักษณะการกระจายของความดันและอุณหภูมิก็ไม่สมมาตรในแนวระดับเช่นกัน

จากการกระจายตัวของความเร็วในรูปที่ 5.23 พบว่าบริเวณผนังด้านล่างมีความเร็วของการไหลสูงกว่าผนังด้านบนเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในเทอมของแรงลอยตัว (สมการที่ (2.48)) โดยเมื่อความเร็วในการไหลมีค่ามากขึ้นจะส่งผลให้เทอมการพาของสมการอนุรักษ์พลังงานสูงขึ้นจึงทำให้อุณหภูมิของของไหลในบริเวณด้านล่างของสิ่งกีดขวางมีค่าต่ำเพราะมีการถ่ายเทความร้อนสูงขึ้นจากการพาความร้อน ซึ่งจะเห็นจากการกระจายตัวของอุณหภูมิในรูปที่ 5.20

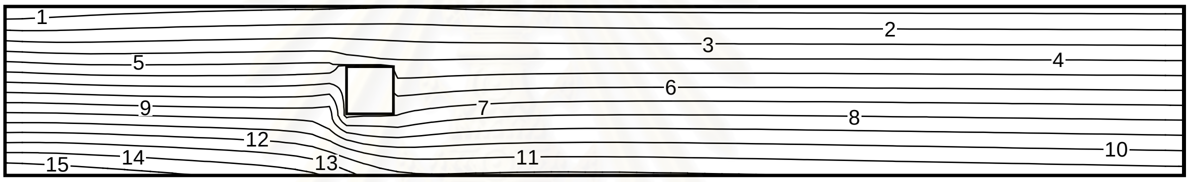
รูปที่ 5.26-5.28 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 โดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 2300 จากรูปจะพบว่ามีลักษณะการไหลวนขึ้นในบริเวณด้านหน้าสิ่งกีดขวาง ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของค่าแรงลอยตัวเพราะการเพิ่มขึ้นของค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์

จากรูปที่ 5.23 และ 5.26 จะเห็นได้ว่าความเร็วบริเวณด้านล่างของสิ่งกีดขวางของกรณีที่มีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 2300 มีค่ามากกว่ากรณีที่มีเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 570 จึงทำให้การถ่ายเทความร้อนบริเวณดังกล่าวมีประสิทธิภาพดีกว่า แต่ที่บริเวณด้านบนของสิ่งกีดขวาง การถ่ายเทความร้อนมีประสิทธิภาพลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่มีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 570 เพราะมีการไหลย้อนกลับในบริเวณดังกล่าว

รูปที่ 5.29-5.31 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100 และค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 0 จากรูปทั้งสามจะเห็นได้ว่าการกระจายตัวของ ความเร็ว ความดันและอุณหภูมิ มีลักษณะสมมาตรในแนวระดับ เพราะไม่พิจารณาผลของแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิ ซึ่งกรณีนี้มีลักษณะที่คล้ายกับรูปที่ 5.20-5.22 ซึ่งมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 และเมื่อเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิในรูปที่ 5.31 และรูปที่ 5.22 แล้วพบว่ามีลักษณะที่คล้ายกันแต่อุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ มีค่าแตกต่างกัน เนื่องจากเมื่อค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นจะทำให้เทอมการพาของสมการอนุรักษ์พลังงานมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย ทำให้การกระจายตัวของอุณหภูมิในรูปที่ 5.31 (Re = 50) มีค่าโดยรวมน้อยกว่าอุณหภูมิในรูปที่ 5.22 (Re = 50) เพราะของไหลสามารถพาความร้อนได้มากกว่า

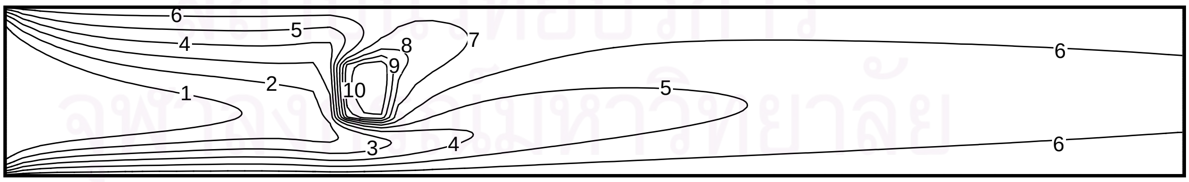


รูปที่ 5.23 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 570



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	-3.14	-2.58	-2.02	-1.47	-0.91	-0.35	0.21	0.76	1.32	1.88	2.43	2.99	3.55	4.10	4.66

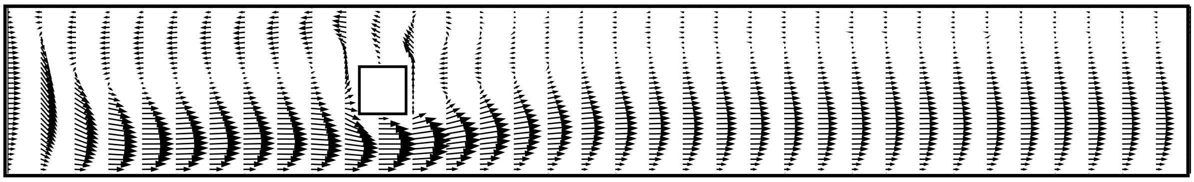
รูปที่ 5.24 ลักษณะการกระจายตัวของความดันในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 570



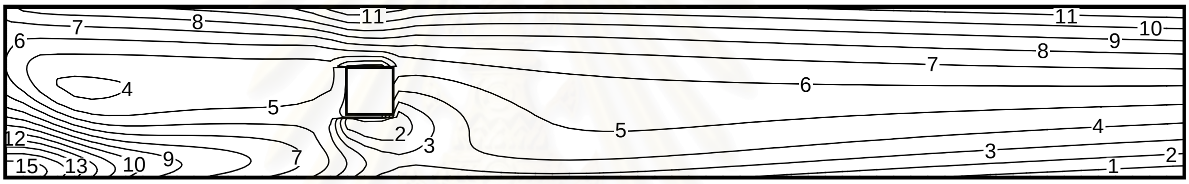
Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0.15	0.30	0.45	0.59	0.74	0.89	1.04	1.19	1.34	1.48

รูปที่ 5.25 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 570

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



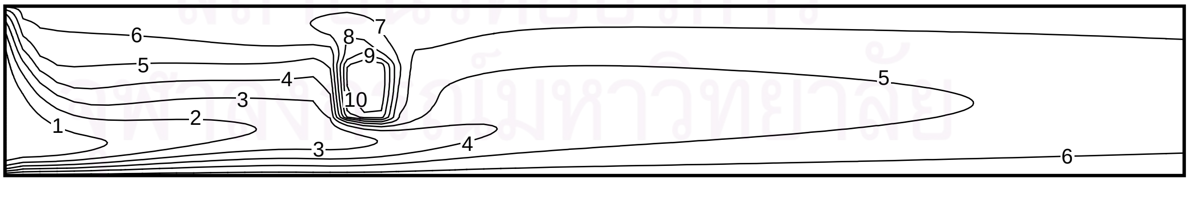
รูปที่ 5.26 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 2300



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p:	-1.87	-1.51	-1.14	-0.78	-0.42	-0.05	0.31	0.68	1.04	1.40	1.77	2.13	2.49	2.86	3.22

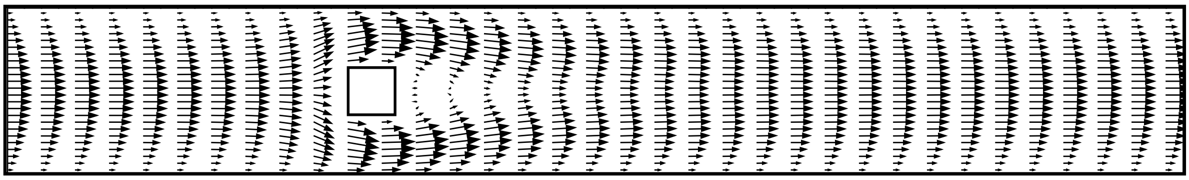
รูปที่ 5.27 ลักษณะการกระจายตัวของความดันในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 2300

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T:	0.15	0.31	0.46	0.61	0.76	0.92	1.07	1.22	1.37	1.53

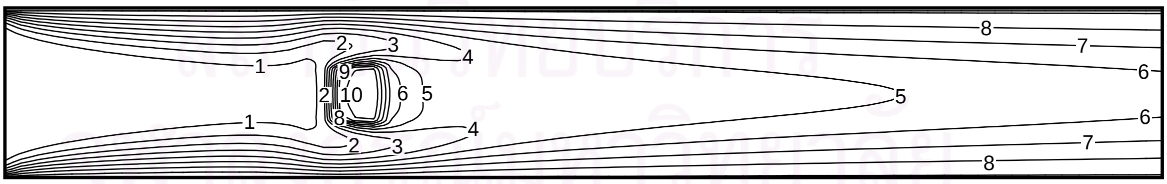
รูปที่ 5.28 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 50 และ Ra = 2300



รูปที่ 5.29 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 0

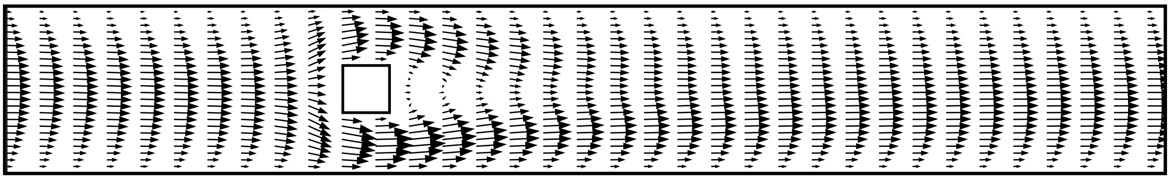
Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p:	-1.14	-0.91	-0.69	-0.46	-0.23	-0.00	0.23	0.45	0.68	0.91	1.14	1.36	1.59	1.82	2.05

รูปที่ 5.30 ลักษณะการกระจายตัวของความดันในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 0

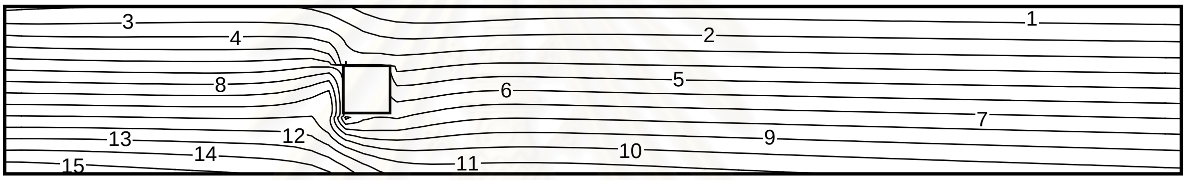


Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T:	0.11	0.22	0.33	0.43	0.54	0.65	0.76	0.87	0.98	1.09

รูปที่ 5.31 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 0

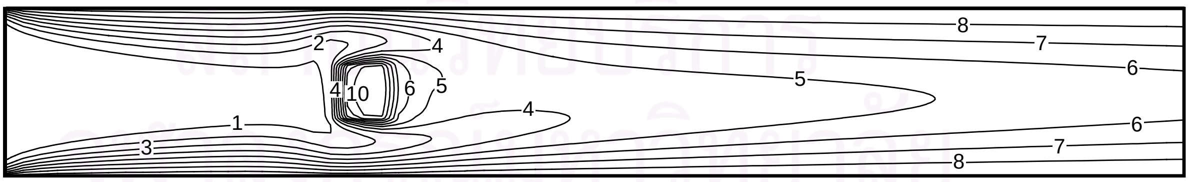


รูปที่ 5.32 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 570



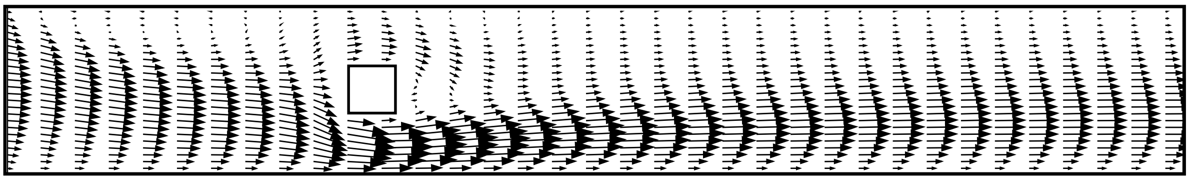
Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p:	-3.55	-2.90	-2.26	-1.62	-0.97	-0.33	0.31	0.96	1.60	2.25	2.89	3.53	4.18	4.82	5.46

รูปที่ 5.33 ลักษณะการกระจายตัวของความดันในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 570

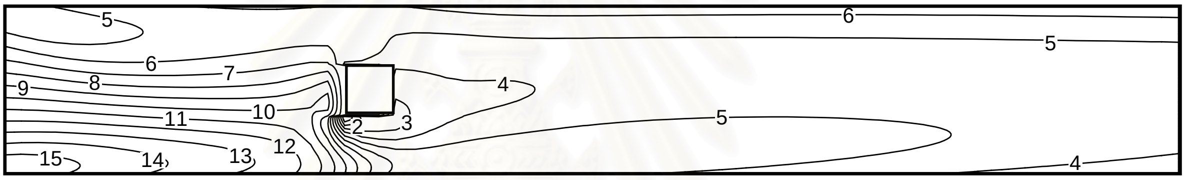


Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T:	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66	0.77	0.88	0.99	1.10

รูปที่ 5.34 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 570

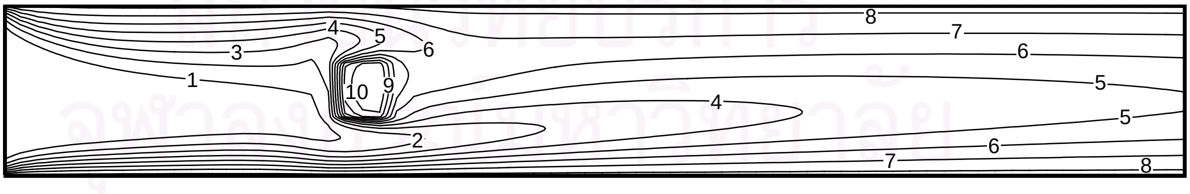


รูปที่ 5.35 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 2300



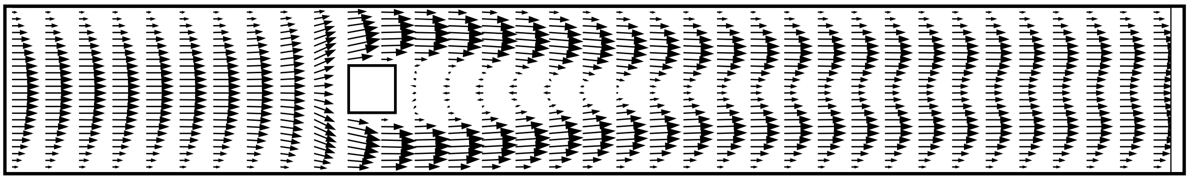
Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p:	-2.73	-2.19	-1.65	-1.11	-0.57	-0.03	0.51	1.05	1.59	2.13	2.67	3.21	3.75	4.29	4.83

รูปที่ 5.36 ลักษณะการกระจายตัวของความดันในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 2300

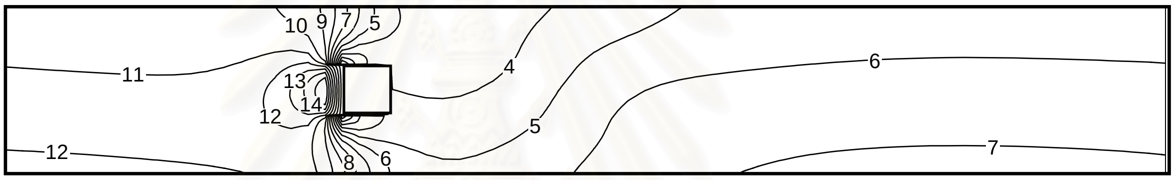


Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T:	0.12	0.24	0.36	0.48	0.60	0.71	0.83	0.95	1.07	1.19

รูปที่ 5.37 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 100 และ Ra = 2300

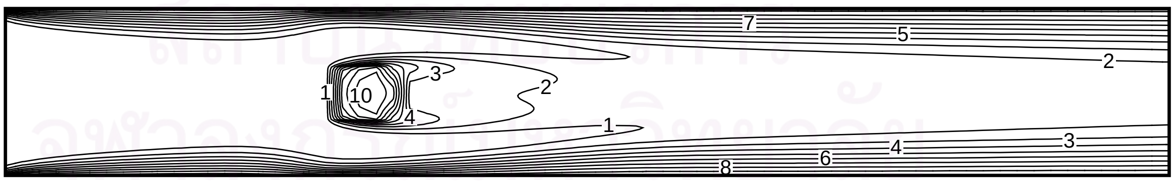


รูปที่ 5.38 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 500 และ Ra = 570



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p:	-30.28	-25.49	-20.71	-15.92	-11.14	-6.35	-1.57	3.22	8.00	12.79	17.58	22.36	27.15	31.93	36.72

รูปที่ 5.39 ลักษณะการกระจายตัวของความดันในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 500 และ Ra = 570



Level	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T:	0.09	0.19	0.28	0.38	0.47	0.57	0.66	0.75	0.85	0.94

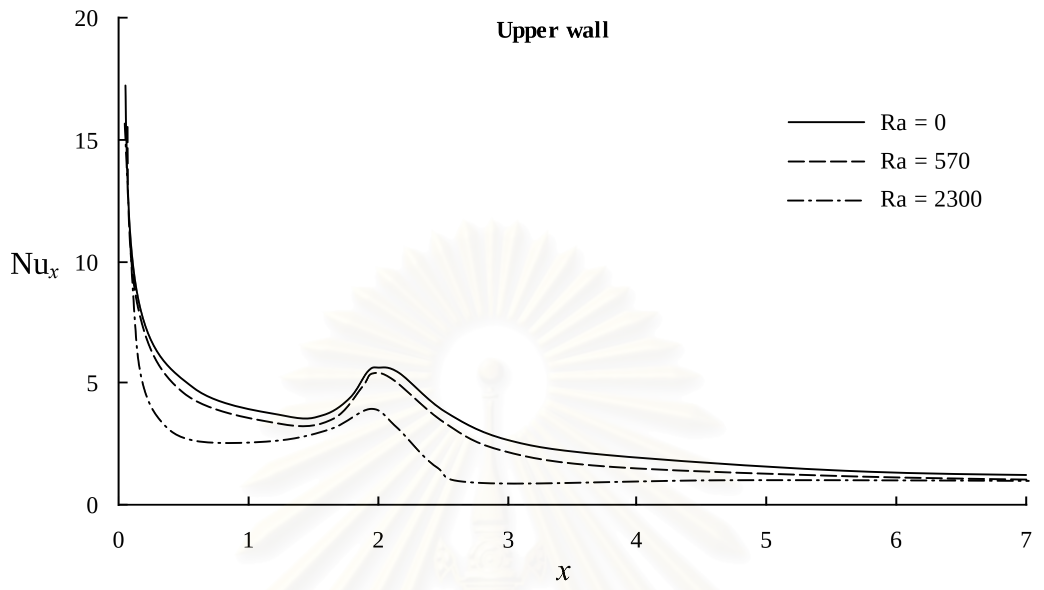
รูปที่ 5.40 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหลที่ Re = 500 และ Ra = 570

รูปที่ 5.32-5.34 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100 โดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 570 จากรูปที่แสดงการกระจายตัวของความเร็วในกรณีนี้ พบว่าการไหลมีลักษณะเปลี่ยนแปลงจากกรณีที่มีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 0 เพียงเล็กน้อย และมีการถ่ายเทความร้อนบริเวณด้านล่างของสิ่งกีดขวางมากกว่าบริเวณด้านบนของสิ่งกีดขวาง และเมื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของการถ่ายเทความร้อนในบริเวณด้านบนและด้านล่างของสิ่งกีดขวางสำหรับกรณีนี้กับกรณีที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 และมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 570 แล้วจะเห็นได้ว่าในกรณีนี้มีความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างบริเวณด้านบนและด้านล่างของสิ่งกีดขวางน้อยกว่า

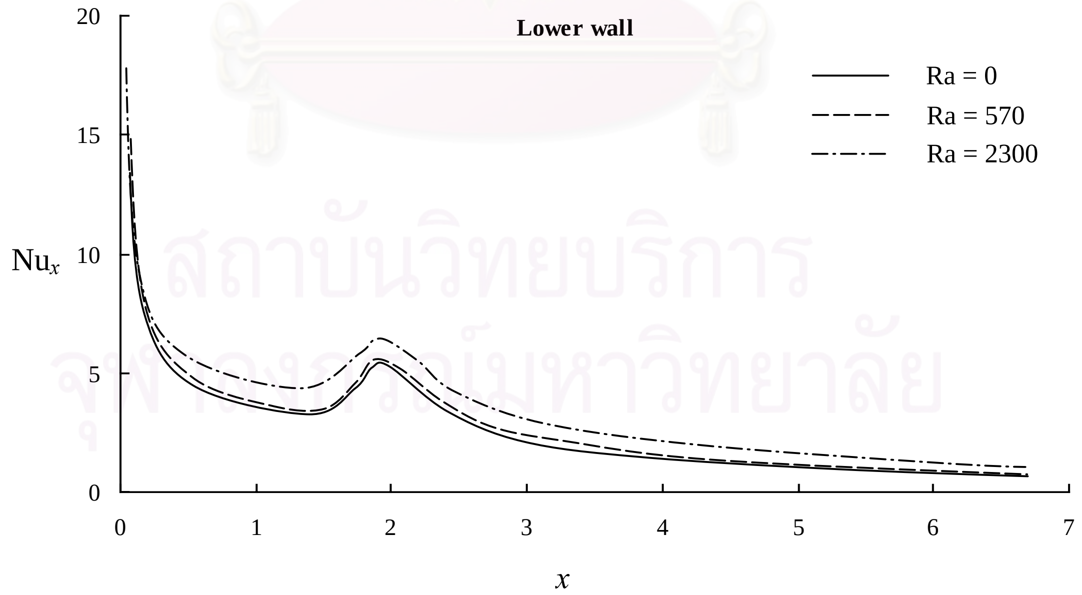
รูปที่ 5.35-5.37 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100 โดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 2300 ในกรณีนี้เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 5.26-5.28 ซึ่งมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 แล้วพบว่าไม่มีลักษณะการไหลวนเกิดขึ้นบริเวณด้านหน้าของสิ่งกีดขวาง ทั้งนี้เป็นเพราะได้รับอิทธิพลจากแรงลอยตัวน้อยกว่านั้นเอง

สำหรับรูปที่ 5.38-5.40 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิโดยมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 500 และมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 570 ในกรณีนี้สามารถเห็นได้ชัดเจนว่าผลของแรงลอยตัวเกิดขึ้นน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 และ100 ซึ่งแสดงไว้ก่อนหน้านี้ ดังนั้นอาจสรุปได้ว่าเมื่อค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์มากขึ้นแล้วจะทำให้ผลของแรงลอยตัวที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิลดลง

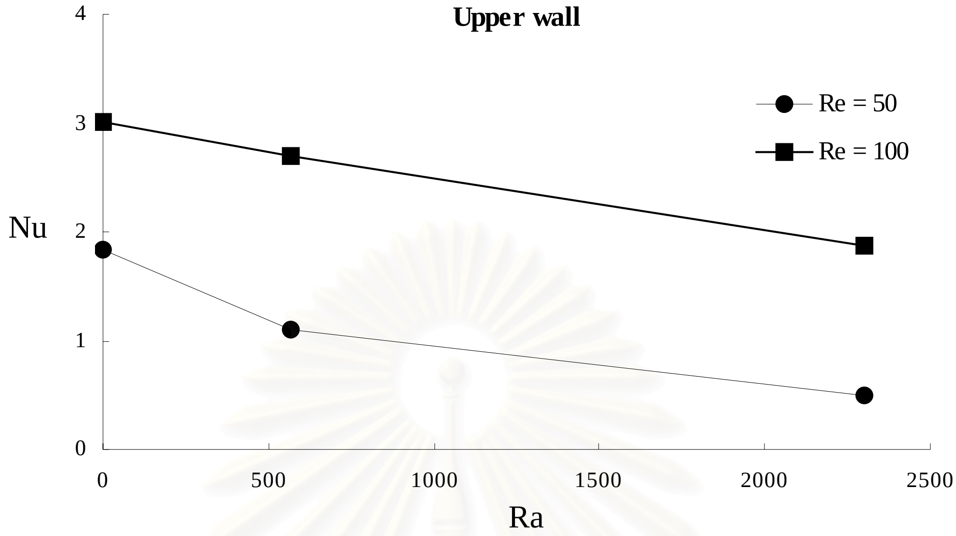
รูปที่ 5.41 แสดงค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ ของผนังด้านบนโดยมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100 และมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 0, 570 และ 2300 ซึ่งจากรูปจะเห็นได้ว่าบริเวณทางเข้าของโดเมนการไหลมีการถ่ายเทความร้อนปริมาณมากจึงทำให้นัสเซิลท์นัมเบอร์มีค่ามากจากนั้นค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ก็จะมีค่าลดลงจนกระทั่งมาถึงบริเวณที่มีสิ่งกีดขวางวางอยู่ นัสเซิลท์นัมเบอร์ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อยเพราะภายในของสิ่งกีดขวางมีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ทำให้มีปริมาณการถ่ายเทความร้อนเพิ่มขึ้น สำหรับบริเวณที่อยู่ถัดไปจากสิ่งกีดขวางนั้นนัสเซิลท์นัมเบอร์จะค่อยๆ ลดลงจนกระทั่งมีแนวโน้มคงที่ ที่บริเวณส่วนท้ายของโดเมนการไหล เมื่อเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่มีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างกันในรูปที่ 5.41 แล้วพบว่าในขณะที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นจะทำให้ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ลดลง เพราะผนังด้านบนจะมีความเร็วในการไหลลดลงเมื่อค่าแรงลอยตัวมากขึ้น ซึ่งความเร็วของการไหลนี้เองมีผลต่อเทอมการพาของสมการอนุรักษ์พลังงาน ในการพาความร้อนออกไป



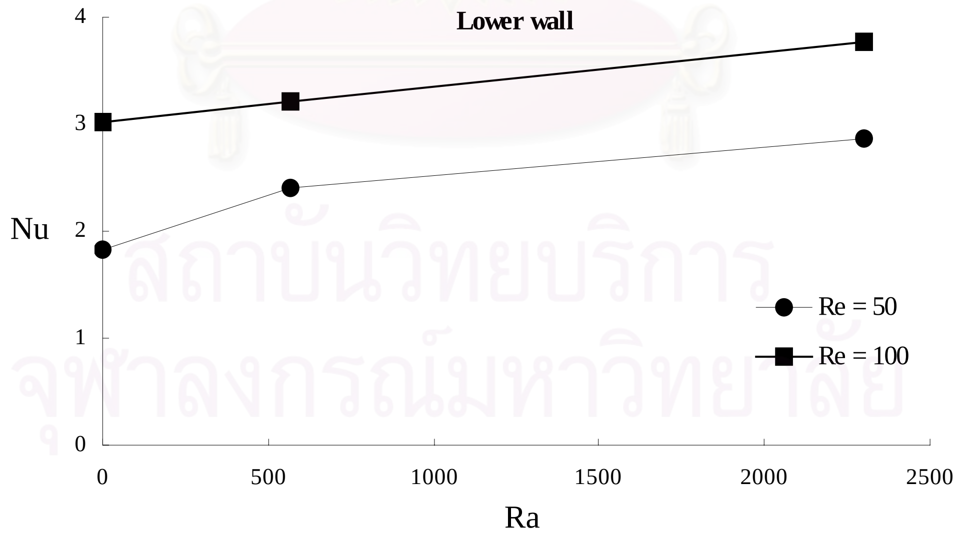
รูปที่ 5.41 นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ ของผนังด้านบนที่ Re = 100 และ Ra = 0, 570 และ 2300



รูปที่ 5.42 นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ ของผนังด้านล่างที่ Re = 100 และ Ra = 0, 570 และ 2300



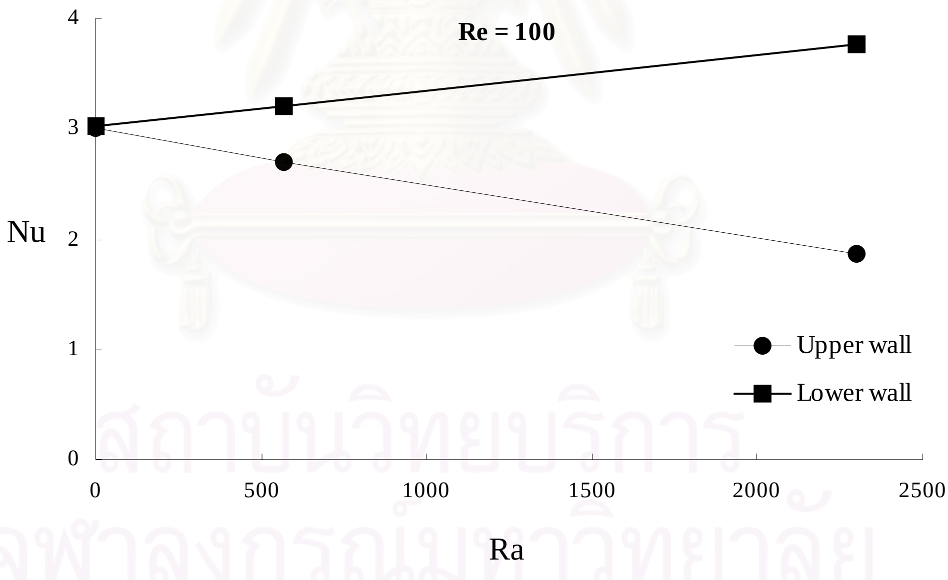
รูปที่ 5.43 นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังด้านบนที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างๆ ที่ Re = 50 และ 100



รูปที่ 5.44 นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังด้านล่างที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างๆ ที่ Re = 50 และ 100

รูปที่ 5.42 แสดงค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ ของผนังด้านล่างโดยมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100 และมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 0, 570 และ 2300 สำหรับค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผนังด้านล่างของปัญหานี้ มีแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เช่นเดียวกับผนังด้านบน เมื่อเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่มีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างกันของผนังด้านล่างพบว่ามีความแตกต่างจากผนังด้านบนคือ ขณะที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นจะทำให้ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์มีค่าเพิ่มด้วย

รูปที่ 5.43 และ 5.44 แสดงการเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังด้านบนและด้านล่างที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างๆ โดยมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 50 และ 100 ตามลำดับ จากรูปทั้งสองจะเห็นได้ว่าเมื่อค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังด้านบนและด้านล่างมีค่ามากเช่นกัน ทั้งนี้เป็นเพราะเมื่อความเร็วของของไหลสูงขึ้นแล้วเทอมการพาในสมการอนุรักษ์พลังงานก็จะมีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้มีการพาความร้อนมากขึ้น



รูปที่ 5.45 นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังด้านบนและด้านล่างที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างๆ ที่ Re = 100

รูปที่ 5.45 แสดงการเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังด้านบนและด้านล่างโดยมีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างๆ ที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100 ในรูปจะเห็นแนวโน้มของค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังทั้งสองดังนี้ กรณีค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 0 ผนังด้านบน

และผนังด้านล่างมีค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยเท่ากันและเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เพิ่มเป็น 570 แล้ว ผนังด้านบนจะมีค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยลดลง ในขณะที่ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของผนังด้านล่างมีค่าเพิ่มขึ้น โดยผลต่างระหว่างค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยระหว่างผนังด้านบนและด้านมีค่ามากขึ้นเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าเป็น 2300 เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนโดยรวมของปัญหานี้พบว่าที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์และค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากัน ประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนโดยรวมมีปริมาณพอๆ กันแต่จะมีปริมาณถ่ายเทความร้อนออกจากผนังด้านบนและด้านล่างต่างกัน

สรุปผล

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมภายในช่องทางไหล สามารถสรุปผลการศึกษาได้ดังต่อไปนี้

1. สำหรับปัญหานี้เมื่อเพิ่มการพิจารณาการพาความร้อนแบบอิสระทำให้การไหลเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมรวมทั้งการถ่ายเทความร้อนด้วย โดยในส่วนการถ่ายเทความร้อนนั้นผนังด้านบนจะมีปริมาณการถ่ายเทความร้อนลดลงแต่ผนังด้านล่างมีปริมาณการถ่ายเทความร้อนเพิ่มขึ้น และเมื่อพิจารณาประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนโดยรวมแล้วพบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นในการออกแบบการระบายความร้อนจะต้องคำนึงถึงปริมาณการถ่ายเทความร้อนที่แตกต่างกันระหว่างผนังด้านบนและด้านล่างด้วย
2. ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์สูงอาจไม่จำเป็นที่จะต้องพิจารณาผลแรงลอยตัวที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิในส่วนการพาความร้อนแบบอิสระ เนื่องจากผลของโมเมนตัมในการไหลมีค่ามากกว่าแรงลอยตัวมาก
3. สำหรับกรณีสิ่งกีดขวางทรงสี่เหลี่ยมซึ่งวางอยู่ที่บริเวณกึ่งกลางช่องทางไหลที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายใน ผลลัพธ์จากการคำนวณทำให้ทราบการกระจายตัวของอุณหภูมิที่แตกต่างกันภายในสิ่งกีดขวางและในส่วนนี้เองจะเป็นข้อมูลสำคัญสำหรับออกแบบการถ่ายเทความร้อนให้มีประสิทธิภาพสูงสุดต่อไป
4. การวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบผสมสามารถจำลองลักษณะการไหลและการถ่ายเทความร้อนได้ใกล้เคียงกับปรากฏการณ์ทางกายภาพที่คาดไว้

บทที่ 6

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวในสองมิติโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ซึ่งวิธีดังกล่าวสามารถที่จะใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนได้เป็นที่น่าพอใจ

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมจำเป็นที่จะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน โดยในบทที่ 2 ได้แสดงถึงระบบสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนในสองมิติไว้อย่างละเอียด ซึ่งประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์จำนวน 4 สมการ ได้แก่ สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y และสมการอนุรักษ์พลังงาน รวมทั้งอธิบายผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิซึ่งใช้ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระด้วย

สำหรับบทที่ 3 เป็นการแสดงขั้นตอนในการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับสมการพื้นฐานของการไหลและการถ่ายเทความร้อน ด้วยการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ตลอดปริมาตรควบคุม แล้วดิสครีไทซ์ (Discretize) ลงบนจุดต่างๆ บนปริมาตรควบคุมเพื่อเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการพีชคณิต ซึ่งการหาผลเฉลยของสมการพีชคณิตนั้นกระทำโดยใช้ขั้นตอนวิธี TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) ในการแก้ระบบสมการ สำหรับการแก้ปัญหาการไหลนั้นใช้ขั้นตอนการคำนวณของวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการคำนวณความเร็วและความดัน เพื่อทำให้ค่า u และ v ที่คำนวณได้จากสมการโมเมนตัมนั้นสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล โดยใช้ขั้นตอนการคำนวณนี้ ร่วมกับการวางกริดแบบเยื้อง (Staggered grid) ในการแก้ปัญหาการไหล สำหรับส่วนสุดท้ายของบทนี้จะแสดงการประยุกต์ใช้ไฟไนต์วอลุมกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมจะจัดรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตบนจุดต่อ (Node) ต่างๆ บนปริมาตรควบคุมซึ่งสมการพีชคณิตที่ได้จะถูกนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตต่อไป

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นในบทที่ 3 นั้นได้รับการตรวจสอบความถูกต้องในบทที่ 4 โดยการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในปัญหาอย่างง่ายแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับ ผลเฉลยแม่นตรง ผลจากการทดลองหรือผลการคำนวณด้วยวิธีอื่นๆ ของผู้วิจัยที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ โดยปัญหาที่นำมาตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมมีทั้งหมด 4 ปัญหาด้วยกัน ได้แก่ 1) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน 2) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสี่เหลี่ยม 3 อัน 3) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 4) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยเปรียบเทียบกับผลจากการทดลอง

เมื่อมีความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาแล้ว จึงนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้รับการตรวจสอบแล้ว ไปวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในลักษณะที่ซับซ้อนขึ้นในบทที่ 5 โดยปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ 1) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตผ่านแผ่นราบ โดยปัญหานี้จะแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตกับการพาความร้อนซึ่งใช้ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนโดยทั่วไป ผลที่ได้พบว่าการคำนวณด้วยวิธีการทั้งสองสำหรับปัญหานี้ให้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน การวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในวิทยานิพนธ์นี้สามารถลดหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ เนื่องจากได้รวมเอาโดเมนของของแข็งและของไหลเข้าด้วยกันและคำนวณการนำและการพาความร้อนได้ภายในครั้งเดียว ซึ่งจะทำให้เวลาในการคำนวณลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับการคำนวณแบบ Iterative ที่ละโดเมนซึ่งคำนวณหาค่าฟลักซ์ความร้อนในโดเมนหนึ่งแล้วจึงนำค่าฟลักซ์ความร้อนดังกล่าวไปเป็นเงื่อนไขขอบสำหรับการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในอีกโดเมนหนึ่ง 2) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตผ่านแผ่นราบโดยในปัญหานี้จะศึกษาผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ การเปลี่ยนแปลงปริมาณแหล่งกำเนิดความร้อน อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนใน

ของไหล และอัตราส่วนของความหนาแผ่นบางกับความยาวของแผ่นบาง ที่มีผลกระทบต่อการถ่ายเทความร้อน และ 3) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของสิ่งกีดขวางรูปทรงเหลี่ยมภายในช่องทางไหล ซึ่งปัญหานี้ได้วิเคราะห์ผลของการถ่ายเทความร้อนที่พิจารณาการพาความร้อนแบบบังคับและการพาความร้อนแบบผสม จากการศึกษาพบว่าที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำจะไม่สามารถละทิ้งการพาความร้อนแบบอิสระได้ ในกรณีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำ ผลของแรงลอยตัวที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิจากการพาความร้อนแบบอิสระทำให้ลักษณะการไหลของของไหลเปลี่ยนแปลงไปจากกรณีที่ไม่พิจารณาการพาความร้อนแบบอิสระ และเมื่อลักษณะการไหลมีการเปลี่ยนแปลงแล้วก็จะมีผลให้การถ่ายเทความร้อนมีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปด้วย

กล่าวโดยสรุปได้ว่าวิทยานิพนธ์นี้สามารถนำระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งเป็นการคำนวณการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลพร้อมกันได้เป็นอย่างดี การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนบริเวณรอยต่อของของแข็งและของไหลให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ นอกจากนี้ได้อธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติต่างๆ ที่มีผลต่อการถ่ายเทความร้อนและยังศึกษาผลกระทบที่มีต่อการไหลและการถ่ายเทความร้อนจากแรงลอยตัวที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิในการพาความร้อนแบบอิสระด้วย

6.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาสำคัญที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ คือ การค้นหาวิธีในการเชื่อมโยงการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหล ซึ่งเป็นส่วนที่สำคัญในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต จากนั้นปัญหาที่ตามมาก็คือการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเข้ากับวิธีการเชื่อมโยงการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลให้สามารถจำลองพฤติกรรมของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตได้ถูกต้องมากที่สุด

6.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตสามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์จากวิทยานิพนธ์นี้ไปพัฒนาเพิ่มเติมสำหรับการคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีรูปร่างซับซ้อนที่เกิดขึ้นจริงในงานวิศวกรรมได้ ซึ่งควรมีการพัฒนาเพิ่มเติมในส่วนต่อไปนี้

1) ปรับปรุงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสภาวะชั่วขณะ (Transient problem)
2) เพื่อให้การคำนวณมี Accuracy ที่ดีขึ้น จึงควรเพิ่ม 2^{nd}-order numerical scheme ประเภทอื่นๆ เช่น QUICK หรือ TVD scheme เข้าไปในโปรแกรม
3) พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสภาวะปั่นป่วน (Turbulent problem) ได้
4) เนื่องจากการไหลที่เกิดขึ้นจริงมักจะเกิดขึ้นในโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อน จึงควรพัฒนาโปรแกรมให้สามารถคำนวณบนพิกัดที่เหมาะสมกับโดเมนดังกล่าว เช่น พิกัดแบบกระชับขอบเขต (Body-fitted coordinates) เป็นต้น
5) พัฒนาให้โปรแกรมสามารถคำนวณการไหลในสามมิติได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

1. Carvalho, M.G., Durst, F. and Pereira, J.C.F. Predictions and Measurements of Laminar Flow Over Two-Dimensional Obstacles. Applied Mathematical Modeling 11 (1987): 23-34.

2. Chen, X. and Han, P. A Note on the Solution of Conjugate Heat Transfer Problems using SIMPLE-like algorithms. International Journal of Heat and Fluid Flow 21 (2000): 463-467.

3. Choi, C.Y. and Kim, S.J. Conjugate Mixed Convection in a Channel: Modified Five Percent Deviation Rule. International Journal of Heat and Mass Transfer 39 (1996): 1223-1234.

4. Cole, K.D. Conjugate Heat Transfer from a Small Heated Strip. International Journal of Heat and Mass Transfer 40 (1997): 2709-2719.

5. Courant, R., Isaacson, E. and Rees, M. On the Solution of Non-linear Hyperbolic Differential Equation by Finite Differences. Communications on Pure and Applied Mathematics 5 (1952): 243.

6. Davalath, J. and Bayazitoglu, Y. Forced Convection Cooling Across Rectangular Blocks. Journal of Heat Transfer 109 (1987): 321-328.

7. Dechaumphai, P. and Kanjanakijkasem, W. Finite Element Method for Viscous Incompressible Thermal Flows. ScienceAsia Journal 25 (1999): 165-172.

8. Dechaumphai, P. and Limtrakarn, W. Adaptive Cell-Centered Finite Element Technique for Compressible Flows. Journal of Energy, Heat and Mass Transfer 21 (1999): 57-65.

9. De Vahl Davis, G. and Jones, I.P. Natural Convection in a Square Cavity: Comparison Exercise. International Journal for Numerical Methods in Fluids 3 (1983): 227-248.

10. De Vahl Davis, G. Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution. International Journal for Numerical Methods in Fluids 3 (1983): 249-264.

11. Fiebig, M., Gorgemann, A.G., Chen, Y. and Mitra, N.K. Conjugate Heat Transfer of a Finned Tube PART A: Heat Transfer Behavior and Occurrence of Heat Transfer Reversal. Numerical Heat Transfer, Part A 28 (1995): 133-146.

12. Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S., Zienkiewicz, O.C. and Mitchell, A.R. An Upwind Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 12 (1977): 131-143.

13. Holman, J. P. Heat Transfer, Eighth Edition. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. Singapore: McGraw-Hill, 1997.

14. Hsu, C.H. and Hsiao K.L. Conjugate Heat Transfer of a Plate Fin in a Second-Grade Fluid Flow. International Journal of Heat and Mass Transfer 41 (1998): 1087-1102.

15. Inaba, H. and Fukuda, T. An Experimental Study of Natural Convection in an Inclined Rectangular Cavity Filled with Water at Its Density Extremum. Journal of Heat Transfer 106 (1984): 109-115.

16. Jilani, G., Jayaraj, S. and Ahmad, M.A. Conjugate Forced Convection-Conduction Heat Transfer Analysis of a Heat Generating Vertical Cylinder. International Journal of Heat and Mass Transfer 45 (2002): 331-341.

17. Luikov, A.V. Conjugate Convective Heat Transfer Problems. International Journal of Heat and Mass Transfer 17 (1974): 257-265.

18. Nakayama, W. and Park, S.H.. Conjugate Heat Transfer From a Single Surface-Mounted Block to Force Convective Air Flow in a Channel. Journal of Heat Transfer 118 (1996): 301-309.

19. Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. New York: Hemisphere, 1980.

20. Patankar, S.V. and Spalding, D.B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows. International Journal of Heat and Mass Transfer 15 (1972): 1787.

21. Pozzi, A. and Lupo, M. The Coupling of Conduction with Forced Convection Over a Flat Plate. International Journal of Heat and Mass Transfer 32 (1988): 1207-1214.

22. Putivisutisak, S. A Computer Program for Solving General Engineering Flow. Report no. 165-Mechanical-2543. Mech. Eng. Dept. Chulalongkorn University, Bangkok, (2002)

23. Ramaswamy, B. and Jue, T.C. Some Recent Trends and Developments in Finite Element Analysis for Incompressible Thermal Flows, International Journal for Numerical Methods in Engineering 35 (1992): 671-707.

24. Reddy, J.N. and Satake, A. A Comparison of a Penalty Finite Element Model with The Stream Function-Vorticity Model of Natural Convection in Enclosures. Journal of Heat Transfer 102 (1980): 659-666.

25. Rizk, T.A., Kleinstreuer, C. and Ozisik, M.N. Analytic Solution to the Conjugate Heat Transfer Problem of Flow past a Heated Block. International Journal of Heat and Mass Transfer 35 (1992): 1519-1525.

26. Sai, B.V.K.S., Seetharamu, K.N. and Narayana, P.A.A. Solution of Transient Laminar Natural Convection in a Square Cavity by an Explicit Finite Element Scheme. Numerical of Heat Transfer Part A 25 (1994): 593-609.

27. Shah, R.K. and London, A.L. Laminar Flow Forced Convection in Ducts. New York : Acadamic, 1978.

28. Sparrow, E.M. and Chyu, M.K. Conjugate Forced Convection-Conduction Analysis of Heat Transfer in a Plate Fin. International Journal of Heat and Mass Transfer 104 (1982): 204-206.

29. Spalding, D.B. A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. International Journal for Numerical Methods in Engineering 4 (1972): 551.

30. Sugavanam, R., Ortega, A. and Choi, C.Y. A Numerical Investigation of Conjugate Heat Transfer from a Flush Heat Source on a Conductive Board in Laminar Channel Flow. International Journal of Heat and Mass Transfer 38 (1995): 2969-2984.

31. Versteeg, H.K. and Malalasekera, W. An Introduction to Computation Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. London: Longman Scientific & Technical, 1995.

32. Vynnycky, M., Kimura, S., Kanev, K. and Pop, I. Forced Convection Heat Transfer from a Flat Plate: the Conjugate Problem. International Journal of Heat and Mass Transfer. 41 (1998): 45-59.

33. Wansophark, N., and Dechaumphai, P. Enhancement of Segregated Finite Element Techniqe for Compressible Flows. Accepted for publication in ScienceAsia Journal. 29 No. 2 2003.

34. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

35. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 16
14-16 ตุลาคม 2545 จังหวัดภูเก็ต

การคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

Calculation of Conjugate Heat Transfer Using Finite Volume Method

ยศกร ประทุมวัลย์ และ สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
โทร 0-2218-6637 โทรสาร 0-2252-2889 E-mail: fmespt@eng.chula.ac.th

Yotsakorn PRATUMWAL and Sompong PUTIVISUTISAK
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
Chulalongkorn University, Pathumwan, Bangkok 10330 Thailand
Tel: 0-2218-6637 Fax: 0-2252-2889 E-mail: fmespt@eng.chula.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน ซึ่งมีการพาความร้อนภายในของไหลและการนำความร้อนภายในของแข็งเกิดขึ้นควบคู่พร้อมกัน หรือที่เรียกว่าปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต แบบจำลองสำหรับการคำนวณได้รวมขอบเขตของของแข็งและของไหลไว้ด้วยกัน โดยในการคำนวณได้ใช้ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล การวางกริดในระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมนี้ใช้การวางกริดแบบเยื้องกัน การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมทำโดยเปรียบเทียบผลการคำนวณกับปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง ผลการคำนวณแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งในของแข็งและของไหลซึ่งค่าเหล่านี้สามารถนำมาใช้ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์การพาความร้อน ที่ตำแหน่งต่างๆ ที่รอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลได้

Abstract

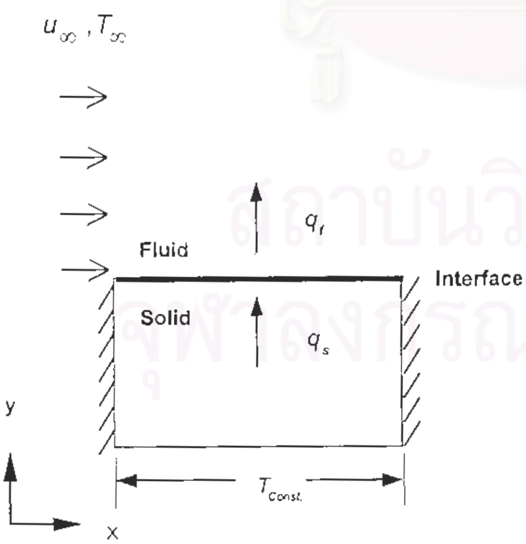
This paper presents a method for solving problems of coupled heat convection in fluid and heat conduction in solid, or so-called conjugate heat transfer problems. The solid and fluid regions are treated as a unitary computational domain. A harmonic mean of the diffusion coefficient is used. A finite volume procedure with staggered grids is employed in the calculation. The simulation is validated with heat transfer problem in simple flow which has analytical solutions. The calculation shows the temperature distribution in the domain which can be used to compute the local heat-transfer coefficient at the solid-fluid interface.

1. บทนำ

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตเป็นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งกับของไหล โดยพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน ซึ่งมีวิธีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อนและการพาความร้อนโดยใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้าและออกจากทั้งของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อของทั้งคู่ต้องมีค่าเท่ากัน ในอดีต เพื่อให้ปัญหามีความง่ายขึ้นจึงทำการตั้งสมมติฐานให้อุณหภูมิที่ผิวของแข็งมีค่าคงที่ ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหล ซึ่งในความเป็นจริงแล้วอุณหภูมิที่บริเวณดังกล่าวอาจมีค่าไม่คงที่ ทำให้การคำนวณการถ่ายเทความร้อนมีความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง ดังนั้นวิธีการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจึงมีความสำคัญในการนำมาแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลเพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้น ตัวอย่างของปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ได้แก่ การถ่ายเทความร้อนออกจากครีบของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน การถ่ายเทความร้อนออกจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ และการถ่ายเทความร้อนของรอยเชื่อมออกสู่อากาศ เป็นต้น

ที่ผ่านมา นักวิจัยพยายามวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลด้วยวิธีต่างๆ ทั้งการทดลอง การใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ และการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข Luikov [1] ได้นำระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์มาแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นในการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบ ทำให้ทราบความ

สัมพันธ์ระหว่างค่า Nusselt number (Nu_x) และ Brun number (Br_x) ที่ตำแหน่งต่างๆ Sparrow and Chyu [2] นำเอาปัญหาการถ่ายเทความร้อนของครีบมาวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ ทำให้ทราบถึงผลของ Prandtl number (Pr) ที่มีต่อการถ่ายเทความร้อน และคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) ที่ตำแหน่งต่างๆ ของครีบด้วย Rizk et al. [3] ได้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์สำหรับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต สำหรับการไหลผ่านก้อนสี่เหลี่ยมที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายใน ซึ่งทำให้ทราบการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งในส่วนของแข็งที่มีการนำความร้อนและในส่วนของไหลที่มีการพาความร้อน Nakayama and Park [4] นำผลการจำลองด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดลอง โดยศึกษาการถ่ายเทความร้อนจากแท่งสี่เหลี่ยมที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายในไปสู่ของไหลซึ่งเป็นอากาศ และผลจากการเปรียบเทียบมีความสอดคล้องกันเป็นที่น่าพอใจ Chen and Han [5] นำเสนอแนวคิดการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยการจัดสมการอนุรักษ์พลังงานให้เทอมการแพร่กระจายมีสัมประสิทธิ์เป็นอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนและค่าความจุความร้อน แต่การจัดสมการในรูปดังกล่าวจะทำให้เกิดปัญหาในการวิเคราะห์ในส่วนของแข็งกล่าวคือ ค่าความจุความร้อนของของแข็งมีค่าสูง ทำให้สัมประสิทธิ์ของเทอมการแพร่กระจายมีค่าน้อยและผลการจำลองที่ได้ไม่เป็นไปตามปรากฏการณ์จริง ดังนั้นจึงเลือกใช้ค่าความจุความร้อนของของไหลแทนการใช้ค่าความจุความร้อนของของแข็ง ทำให้ผลการจำลองที่ได้มีความสอดคล้องกับปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้น



รูปที่ 1 ตัวอย่างโดเมนของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

2. ทฤษฎีการคำนวณ

การวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตประกอบด้วยส่วนที่สำคัญคือ การถ่ายเทความร้อนบริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล ในงานวิจัยนี้ จะนำเสนอการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยแบ่งการคำนวณออกเป็นสองส่วนคือ การไหล และการถ่ายเทความร้อน ซึ่งลำดับการคำนวณเริ่มจากการคำนวณการไหลเพื่อหาค่าความเร็วแล้วนำความเร็ว ที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งในของแข็งและของไหล

การคำนวณจะกระทำในพิกัดคาร์ทีเซียนสองมิติโดยใช้ กริดแบบเยื้องกัน (Staggered grid) และใช้ SIMPLE algorithm [6] ในการคำนวณหาค่าความเร็ว u_i และความดัน p โดยจะมีสมมติฐานคือ ลักษณะการไหลเป็นแบบราบเรียบในสองมิติที่สภาวะคงตัว และของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ สมการที่ใช้ในการคำนวณในส่วนของการไหล ได้แก่ สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) และสมการโมเมนตัม (Momentum equation) ดังสมการที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2}$$

สำหรับการถ่ายเทความร้อนจะวิเคราะห์เป็นปัญหาในสภาวะคงตัว ซึ่งมีอุณหภูมิ T เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยสมการอนุรักษ์พลังงานในส่วนของไหลสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u_i c_p T)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

สำหรับของแข็งเทอมทางด้านซ้ายของสมการที่ 3 ซึ่งเป็นเทอมของการพาจะมีค่าเป็นศูนย์ สมการจึงลดรูปได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = 0 \tag{4}$$

รูปที่ 1 เป็นตัวอย่างของการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยมีทิศทางของความร้อนจากของแข็งไปสู่ของไหล ซึ่งที่ผิวด้านล่างของของแข็งกำหนดให้อุณหภูมิคงที่ ส่วนผิวด้านซ้ายและขวากำหนดให้เป็นฉนวน ปริมาณความร้อนที่ของแข็งถ่ายเทสู่ของไหลมีค่าเท่ากับ q_s ในขณะที่ปริมาณความร้อนที่ของไหลได้รับจากของแข็งมีค่าเท่ากับ q_f จากกฎการอนุรักษ์พลังงานจะได้

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

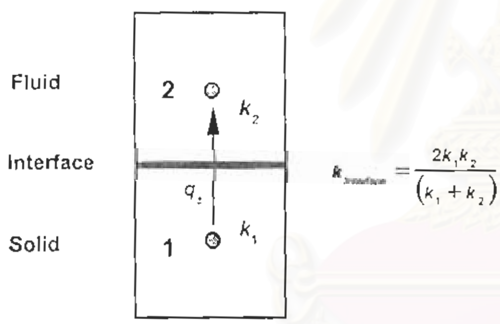
$$q_s = q_f \tag{5}$$

บริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลสามารถคำนวณการถ่ายเทความร้อนได้โดยแบ่งปริมาตรควบคุมดังรูปที่ 2 และกำหนดให้ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทจากปริมาตรควบคุมที่ 1 สู่ปริมาตรควบคุมที่ 2 ซึ่งเกิดจากการแพร่กระจายคือ

$$q_s = \left(-k\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s \tag{6}$$

เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง (ปริมาตรควบคุมที่ 1) และของไหล (ปริมาตรควบคุมที่ 2) มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่รอยต่อ โดยในที่นี้เลือกใช้ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก [6] ดังแสดงในสมการที่ 7

$$k_{Interface} = \frac{2k_1k_2}{\left(k_1 + k_2\right)} \tag{7}$$



รูปที่ 2 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ผิวรอยต่อระหว่างปริมาตรควบคุมของแข็งและของไหล

โดยสามารถหาค่าฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านระหว่างปริมาตรควบคุมได้ดังนี้

$$q_s = -\frac{2k_1k_2}{\left(k_1 + k_2\right)}\frac{T_2 - T_1}{y_2 - y_1} \tag{8}$$

3. ผลการคำนวณ

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต แบ่งออกเป็นสองปัญหา ได้แก่ การถ่ายเทความร้อนที่มีการไหลผ่านแผ่นราบและการถ่ายเทความร้อนภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน โดยปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการไหลผ่านแผ่นราบนั้นทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้กับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ ในขณะที่ปัญหาที่สองจะนำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของ Chen and Han [5] โดยในปัญหาที่หนึ่ง แผ่นราบมีความยาว L = 1.0 m ความสูง H = 1.0 m และความหนา a = 0.1 m ดังแสดงในรูปที่ 3 โดยของไหลคือ อากาศ ซึ่งมีความหนาแน่น ความหนืดสัมบูรณ์ ความจุความร้อนและสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ดังต่อไปนี้ ρ_f = 0.998 kg/m^3, μ_f = 2.075x10^{-5} $kg/(m.s)$, C_{pf} = 1.4 $J/(kg.K)$ และ k_f = 0.03003 $W/(m.K)$ ตามลำดับ โดยเลือกใช้ชนิดของวัสดุที่เป็นแผ่นบาง คือ ทองแดง อลูมิเนียมและเหล็ก ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนแต่ละชนิด มีค่าดังนี้ k_{Cu} = 385 $W/(m.K)$, k_{Al} = 202 $W/(m.K)$และ k_{Fe} = 43 $W/(m.K)$ ความเร็วและอุณหภูมิที่ทางเข้าคือ U_∞ = 0.001 m/s, T_∞ = 300 K อุณหภูมิที่ผิวล่างของของแข็ง T_s = 400 K และในบริเวณซ้ายและขวาของของแข็งเป็นฉนวน ซึ่งค่า Prandtl number (Pr) มีค่าเท่ากับ 0.7 และ Reynolds number (Re_L) เท่ากับ 48 โดยเลือกใช้กริดขนาด 102x102 ผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะทำให้ทราบค่าอุณหภูมิและนำไปหาค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ตำแหน่งต่างๆ ได้จากสมการ

$$h = \frac{k\dfrac{\partial T}{\partial y}}{T_w - T_\alpha} \tag{9}$$

และหาค่า Nusselt number ที่ตำแหน่งต่างๆ ได้โดยแทนค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนลงในสมการที่ 10

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} \tag{10}$$

จากนั้นจะนำค่า Nusselt number ที่ตำแหน่งต่างๆ ซึ่งได้จากสมการที่ 10 ไปเปรียบเทียบกับค่า Nusselt number ที่ตำแหน่งต่างๆ ที่ได้จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากสมการข้างล่าง

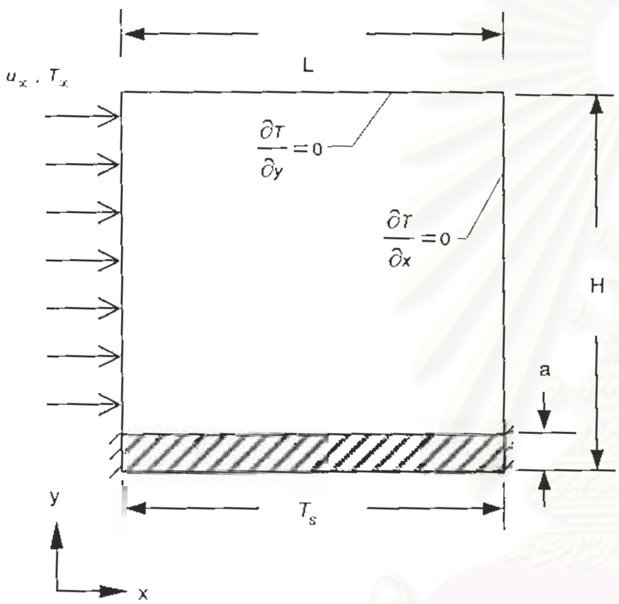
$$Nu_x = 0.332\,Pr^{1/3}\,Re_x^{1/2} \tag{11}$$

สมมติฐานสำหรับสมการที่ 11 ก็คืออุณหภูมิที่ของแข็งมีค่าเท่ากันทั้งหมด ดังนั้นการจำลองด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจะมีเงื่อนไขที่ตรงกับระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของแข็งมีค่ามากพอที่จะทำให้อุณหภูมิภายในของแข็งทั้งหมดมีค่าประมาณเท่ากับอุณหภูมิที่ผิวด้านล่าง

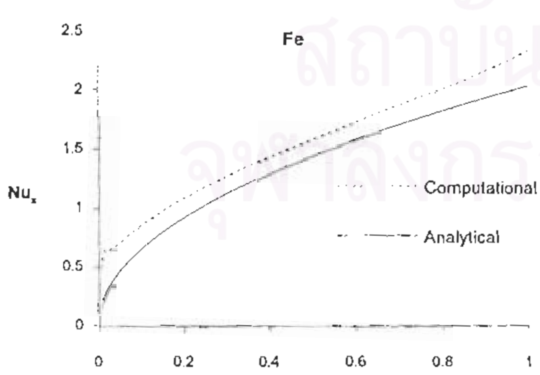
จากรูปที่ 4-6 พบว่าค่า Nu_x ที่ได้จากการคำนวณมีความสอดคล้องกับค่าที่ได้จากการคำนวณเชิงวิเคราะห์ เนื่องจากสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของทองแดงและอลูมิเนียมมีค่าสูงทำให้ภายในบริเวณของแข็งมีอุณหภูมิที่เท่ากันและเท่ากับอุณหภูมิผิวด้านล่าง ซึ่งทำให้เป็นไปตามเงื่อนไขของการใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ในการคำนวณหาค่า Nu_x แต่ในส่วนของเหล็กนั้น เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าต่ำกว่า จึงทำให้อุณหภูมิภายใน

ของแข็งทั้งหมดมีค่าไม่เท่ากับผิวด้านล่างทำให้ผลการคำนวณที่ได้ต่างไปจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ซึ่งก็เป็นที่คาดได้ในเบื้องต้นอยู่แล้ว จะเห็นได้ว่าค่า Nu_x ที่สูงกว่าก็เป็นผลมาจากผลต่างอุณหภูมิ (Temperature gradient) ที่เกิดขึ้นภายในแผ่นราบนั่นเอง

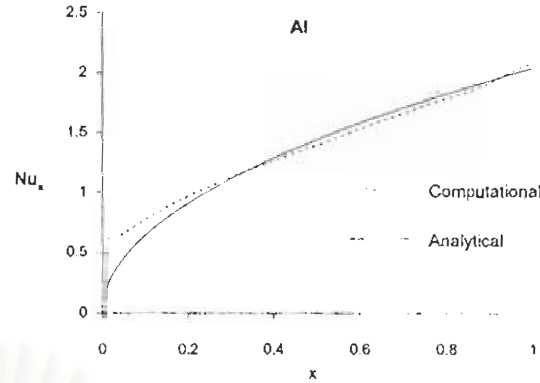
สำหรับผลของค่า Nu_x ที่ต้นการไหลมีความคลาดเคลื่อนนั้นเกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิของของไหลที่บริเวณทางเข้ากับอุณหภูมิที่ผิวของแข็งทำให้ผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนเล็กน้อย ค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่มีทองแดงเป็นของแข็งถูกแสดงในรูปที่ 7 ซึ่งเมื่อเราทราบ Temperature distribution นี้เราก็สามารถคำนวณหาค่า Local heat transfer coefficient ได้จากสมการที่ 9



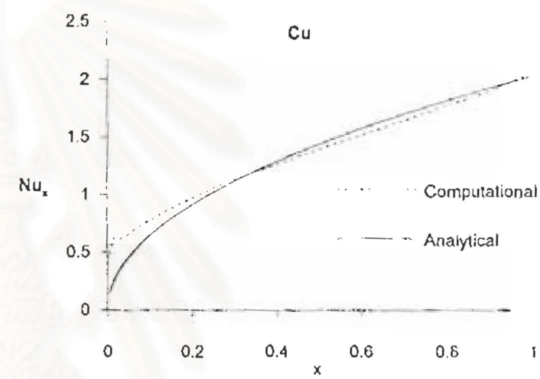
รูปที่ 3 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของแผ่นบาง



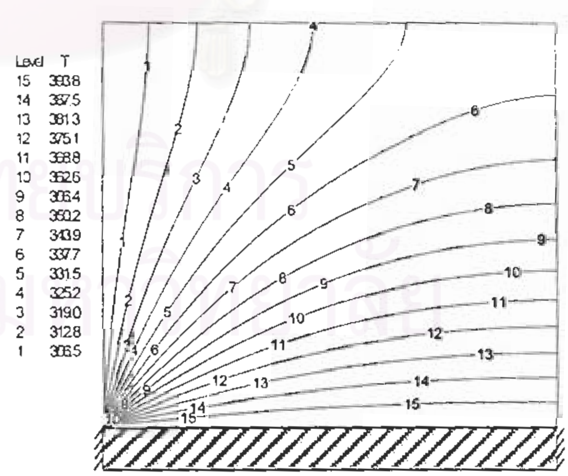
รูปที่ 4 เปรียบเทียบค่า Nu_x ที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและวิธีการวิเคราะห์โดยมีเหล็กเป็นของแข็ง



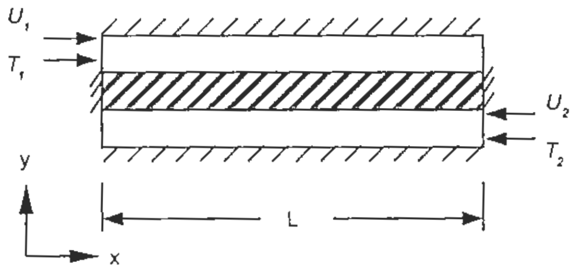
รูปที่ 5 เปรียบเทียบค่า Nu_x ที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข และวิธีการวิเคราะห์โดยมีอลูมิเนียมเป็นของแข็ง



รูปที่ 6 เปรียบเทียบค่า Nu_x ที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและวิธีการวิเคราะห์โดยมีทองแดงเป็นของแข็ง

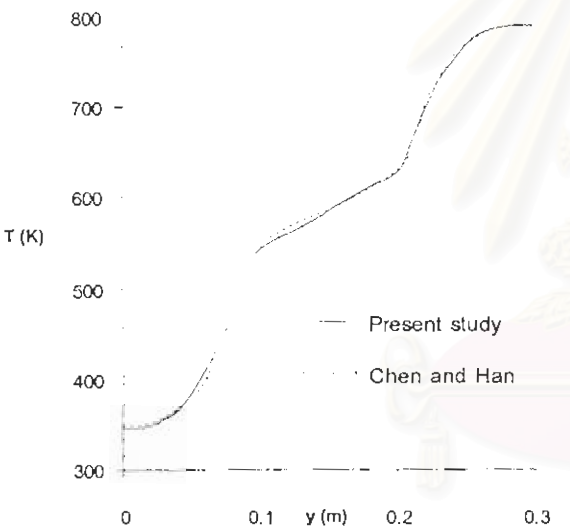


รูปที่ 7 การกระจายตัวของอุณหภูมิของในของแข็งและของไหลในปัญหาการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นบางที่มีทองแดงเป็นของแข็ง



รูปที่ 8 อุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนในสองมิติ

การตรวจสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นด้วยปัญหาที่สอง ทำโดยนำนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของ Chen and Han [5] โดยที่โดเมนการคำนวณเป็นอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีลักษณะการไหลสวนทางกันและมีแผ่นเหล็กเป็นตัวกลางในการแลกเปลี่ยนความร้อนซึ่งมีปลายทั้งสองเป็นฉนวน โดยมีช่องสำหรับของไหลซึ่งมีทิศทางการไหลสวนทางกัน โดยที่ขอบด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวน ดังรูปที่ 8



รูปที่ 9 ผลการคำนวณอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x = 0.5 m

ช่องของการไหลทั้งสองมีขนาดเท่ากับความหนาของแผ่นเหล็กคือ 0.1 m และ L มีค่าเท่ากับ 1.0 m ความเร็วและอุณหภูมิที่ทางเข้าทั้งสองด้านมีค่าเป็น U_1 = 0.2 m/s, T_1 = 800 K, U_2 = 0.1 m/s และ T_2 = 300 K โดยที่คุณสมบัติต่างๆ ของของไหล ได้แก่ ความหนาแน่นของไหล ρ_f = 1,000 kg/m^3 สัมประสิทธิ์การนำความร้อน k_f = 10 $W/(m.K)$ ความหนืดสัมบูรณ์ μ_f = 0.15 $kg/(m.s)$ และ ความจุความร้อน C_{pf} = 25 $J/(kg.K)$ คุณสมบัติต่างๆ ในส่วนของแข็งได้แก่ ความหนาแน่นของแข็ง ρ_s = 8,000 kg/m^3, สัมประสิทธิ์การนำความร้อน k_s = 50 $W/(m.K)$ และความจุความร้อน C_{ps} = 500 $J/(kg.K)$ ผลการคำนวณที่ได้พบว่ามีความสอดคล้องกับผลการคำนวณของ Chen and Han [5] เป็นอย่างดีดังรูปที่ 9 โดยจะสังเกตได้ว่า Temperature gradient ในของแข็งมีค่าน้อยกว่า Temperature gradient ในของเหลวร้อนและเย็นอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งปรากฏการณ์นี้เป็นที่คาดเดาได้จากลักษณะการถ่ายเทความร้อนในปัญหาเช่นนี้

4. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลควบคู่กันภายในโดเมนเดียวกัน การเชื่อมโยงระหว่างส่วนของแข็งกับของไหลกระทำได้โดยใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าหรือออกระหว่างของแข็งและของไหลต้องมีค่าเท่ากัน โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีดังกล่าวได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นและนำไปตรวจสอบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลลัพธ์ของปัญหาที่มีผู้วิจัยมาก่อนหน้านี้ ซึ่งพบว่าผลการคำนวณที่ได้มีค่าสอดคล้องกันเป็นที่น่าพอใจ

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) โดยผ่านทางทุนเมธีวิจัยอาวุโสสำหรับศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ และจากกองทุนวิจัยคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ขอแสดงความขอบคุณแหล่งทุนทั้งสอง ณ ที่นี้ด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] Luikov A. V. (1974), *Conjugate Convective Heat Transfer Problems*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 17; pp.257-265.

[2] Sparrow E. M. and Chyu M. K. (1982), *Conjugate Forced Convection-Conduction Analysis of Heat Transfer in a Plate Fin*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 104; pp.204-206.

[3] Rizk T. A., Kleinstreuer C. and Ozisik M. N. (1992), *Analytic Solution to the Conjugate Heat Transfer Problem of Flow past a Heated Block*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 35; pp.1519-1525.

[4] Nakayama W. and Park S. H. (1996), *Conjugate Heat Transfer From a Single Surface-Mounted Block to Force Convective Air Flow in a Channel*, Journal of Heat Transfer, vol. 118; pp.301-309.

[5] Chen X. and Han P. (2000), *A Note on the Solution of Conjugate Heat Transfer Problems using SIMPLE-like algorithms*, International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 21; pp.463-467.

[6] Patankar S. V. (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor & Francis Group, New York.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายยศกร ประทุมวัลย์ เกิดเมื่อวันที่ 28 เดือนพฤษภาคม พุทธศักราช 2522 จังหวัดสุราษฎร์ธานี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต จากสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี เมื่อปีการศึกษา 2542 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2543

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย