บทที่ 4

เทคนิค Computational Fluid Dynamics

4.1 ความหมายของเทคนิค Computational Fluid Dynamics

เทคนิค Computational Fluid Dynamics หรือเรียกแบบย่อว่า เทคนิค CFD เป็นเทคนิคที่ถูกนำมาใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์การไหลของของไหลในระบบที่ต้องการศึกษา โดยใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical) เพื่อแก้ชุดสมการที่เป็นตัวแทนของระบบที่ทำการศึกษา เช่น สมการความต่อเนื่อง สมการอนุรักษ์โมเมนตัม สมการอนุรักษ์พลังงาน ฯลฯ ในการคำนวณจะต้องมีการกำหนดสภาวะเงื่อนไข (Condition) อย่างถูกต้องและเหมาะสม ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณจะสามารถแสดงให้เห็นถึงรายละเอียดของการกระจายตัวของความดัน การกระจายตัวของความเร็ว และการกระจายตัวของอุณหภูมิ เป็นต้น ของระบบที่ทำการศึกษานั้นๆ

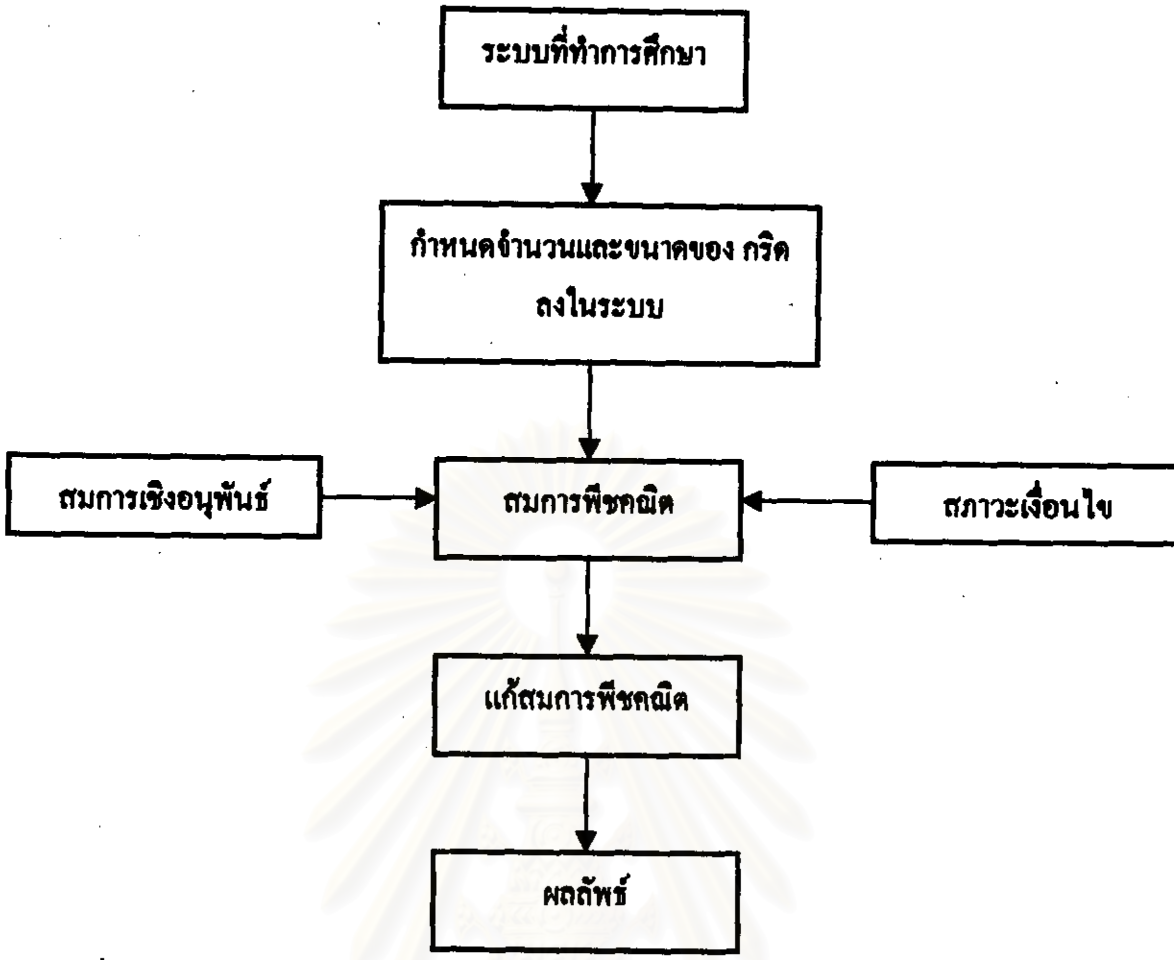
4.2 ลำดับขั้นตอนของเทคนิค CFD

ในงานวิจัยนี้จะใช้หลักการของไฟไนต์โวลุ่ม (Finite volume) ในการแก้สมการ ซึ่งลำดับขั้นตอนของวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค CFD สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.1 โดยสรุปได้เป็นลำดับดังนี้

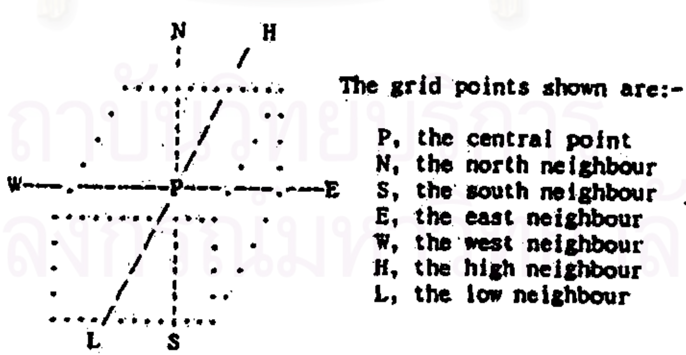
1. กำหนดกริด (Grid) ลงในระบบที่ต้องการทำการศึกษา
2. ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิต (Algebraic equation) เมื่อมีการกำหนดสภาวะเงื่อนไขที่เหมาะสม
3. แก้สมการพีชคณิต
4. ผลลัพธ์

4.2.1 กริด (Grid)

ขั้นตอนแรกของเทคนิค CFD คือ การแบ่งโดเมน (domain) ออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งสามารถดำเนินการได้โดยการกำหนดจำนวนและระยะห่างระหว่างเส้นกริดลงในระบบที่เราต้องการศึกษา ตำแหน่งที่ตัดกันของเส้นกริดจะเรียกว่า โนด (Node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เก็บค่าที่ได้จากการคำนวณของตัวแปรที่เราต้องการศึกษาของปริมาตรควบคุม (Control volume) ที่กำหนดขึ้น ดังรูปที่ 4.2 แสดงถึงปริมาตรควบคุมที่ใช้ในการคำนวณ โดยเส้นประจะแสดงถึงขอบเขตของปริมาตรควบคุมที่กำหนดขึ้น



รูปที่ 4.1 ลำดับขั้นตอนของวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค CFD



รูปที่ 4.2 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในการคำนวณ [15]

อักษร P แทนตำแหน่งของโนดที่ใช้ในการเก็บค่าตัวแปรหรือคือตัวแทนของปริมาตรควบคุมนี้ โดยอักษร N, S, E, W, H, L จะแทนตำแหน่งของโนดที่อยู่ในบริเวณรอบข้างของโนด P สำหรับรูปที่ 4.3 จะแสดงลักษณะของการแบ่งกริดซึ่งจะทำให้เกิดเป็นโนดขึ้นรวมทั้งแสดงลักษณะของปริมาตรควบคุมที่แสดงในแบบ 2 มิติ

ลักษณะของปริมาตรควบคุมที่บริเวณสภาวะของเขตแสดงได้ดังรูปที่ 4.4

4.2.2 การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิต

โดยทั่วไปสมการอนุรักษ์ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์จะประกอบด้วยพจน์ 4 พจน์ คือ พจน์ที่เปลี่ยนไปตามเวลา (Transient term), พจน์การพา (Convection term), พจน์การแพร่ (Diffusion term) และพจน์แหล่งกำเนิด (Source term) ตามลำดับ ดังแสดงได้ดังสมการที่ (4.1)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i\phi)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right]+S \tag{4.1}$$

เมื่อ ϕ แทนตัวแปรที่ต้องการศึกษาเช่น ความเร็ว อุณหภูมิ

Γ แทนค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของ ϕ เช่น ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในกรณีที่ ϕ แทนอุณหภูมิ

u_i แทนความเร็วในทิศทางต่างๆ

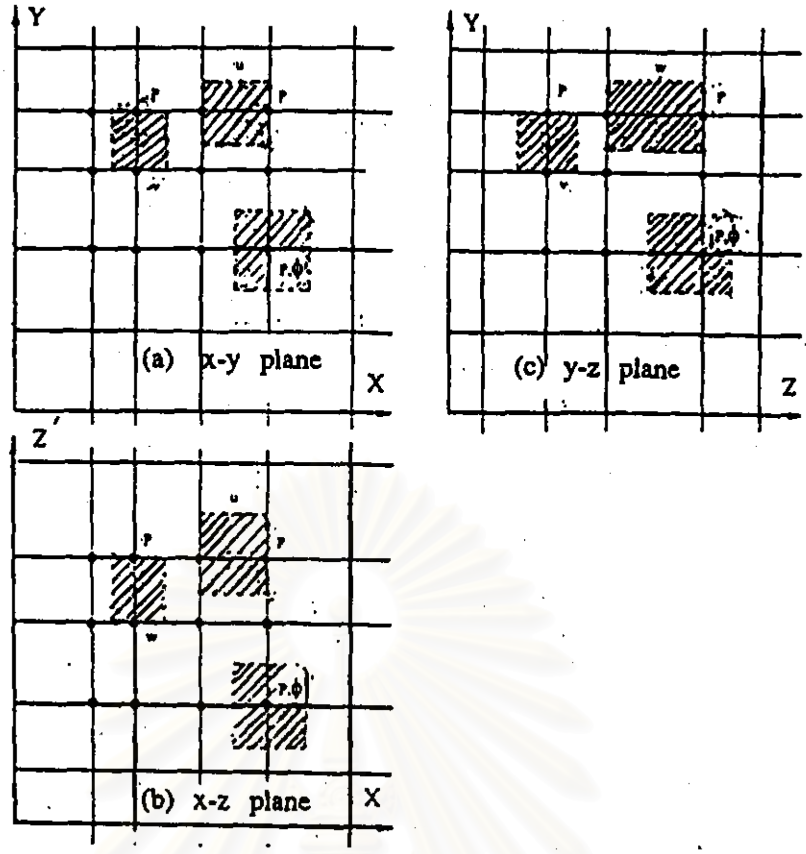
x_i แทนทิศทางในแนวแกนต่างๆ

S แทนแหล่งกำเนิด

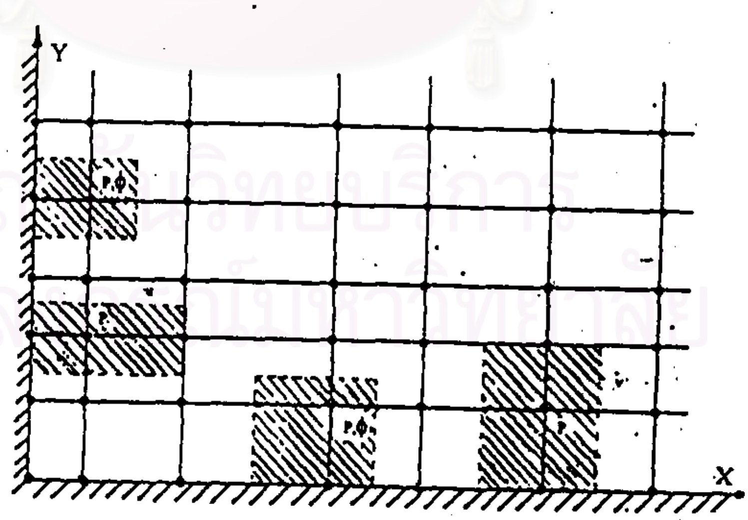
เพื่อให้ง่ายในการนำเสนอถึงวิธีการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิตซึ่งจะยังคงความหมายเช่นเดียวกับสมการเชิงอนุพันธ์เดิม จะทำการพิจารณาจากสมการในรูปแบบ 1 มิติ (แกน x) ที่ไม่ขึ้นอยู่กับเวลาและพิจารณาเฉพาะพจน์การพาและการนำเท่านั้น ดังนี้

$$\frac{d(\rho u\phi)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right] \tag{4.2}$$

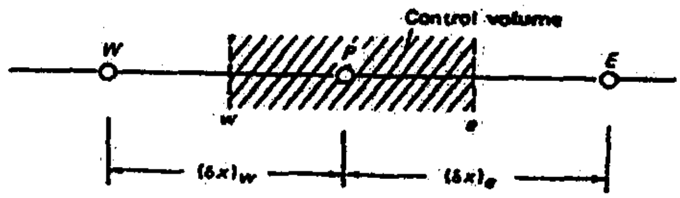
ลักษณะของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการจะแสดงได้ในรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.3 ลักษณะการแบ่งกริดและลักษณะของปริมาตรควบคุมที่แสดงในแบบ 2 มิติ [16]



รูปที่ 4.4 ลักษณะของปริมาตรควบคุมที่บริเวณสภาวะขอบเขต [16]



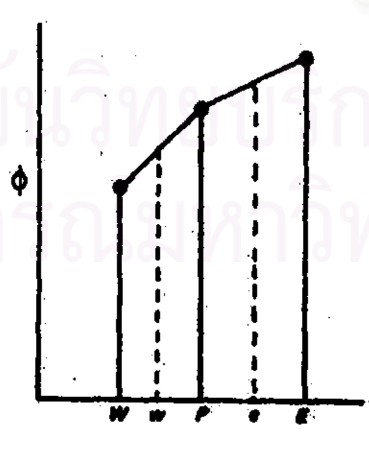
รูปที่ 4.5 ลักษณะของกริดที่ใช้ในสมการ (4.2) [17]

กำหนดให้จุด e อยู่กึ่งกลางระหว่าง P และ E และจุด w อยู่กึ่งกลางระหว่าง P และ W

ทำการอินทิเกรทสมการ (4.2) รอบปริมาตรควบคุมที่แสดงในรูปที่ 4.5 จะได้

$$(\rho u\phi)_e - (\rho u\phi)_w = \left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right]_e - \left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right]_w \tag{4.3}$$

จากสมการจะพบว่าในพจน์ของการแพร่จะมีพจน์ $\left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right]$ ที่ยังไม่ทราบค่า เช่นเดียวกันกับ $(\rho u\phi)$ ในพจน์ของการพา การประมาณค่าของพจน์ทั้งสองทำได้โดยสมมุติให้โพรไฟล์ของ ϕ ระหว่างโนดมีลักษณะเป็นเส้นตรง ดังแสดงในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 ลักษณะโพรไฟล์ของ ϕ ระหว่างโนดที่เป็นเส้นตรง [17]

จากรูปที่ 4.6 จะได้

$$\frac{d\phi_e}{dx} = \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} \quad ; \quad \frac{d\phi_w}{dx} = \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} \tag{4.4}$$

และ

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \quad ; \quad \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \tag{4.5}$$

เมื่อแทนสมการ (4.4)-(4.5) ลงในสมการ (4.3) จะได้สมการออกมาในรูป

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P + \phi_W) = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \tag{4.6}$$

เพื่อให้สมการ (4.6) อยู่ในรูปแบบที่กะทัดรัดขึ้น จึงได้นิยามตัวแปรขึ้นมาสองตัวนั้นคือ F และ D

โดยที่

$$F = \rho u \quad ; \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \tag{4.7}$$

ซึ่ง D จะมีค่าเป็นบวกเสมอ ในขณะที่ F จะมีได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ขึ้นอยู่กับทิศทางการไหลของของไหล ดังนั้นสมการ (4.6) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W \tag{4.8}$$

โดยที่

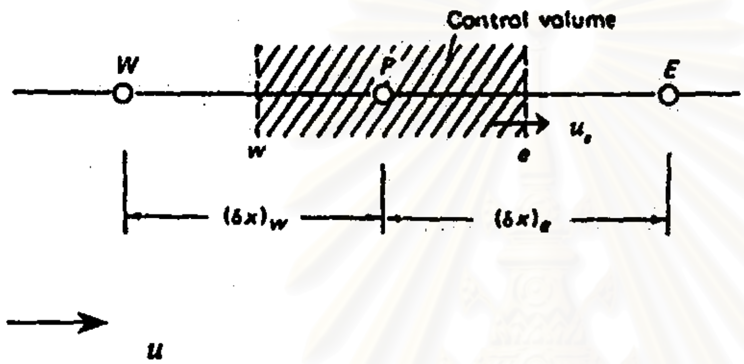
$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \tag{4.9 a}$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \tag{4.9 b}$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \tag{4.9 c}$$

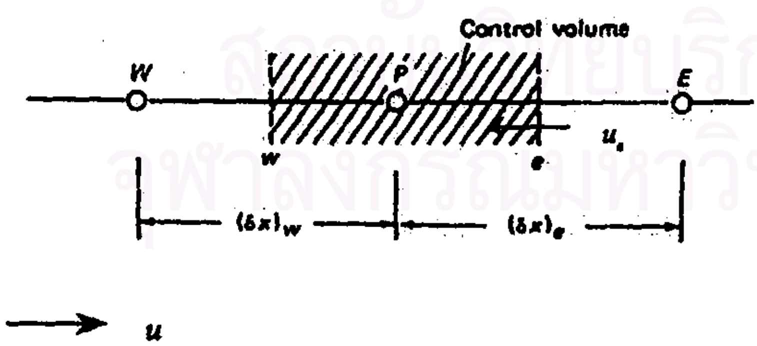
สมการ (4.8) เป็นสมการพีชคณิตที่ทำการแปลงมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่ (4.2) ซึ่งได้มาจากการตั้งสมมติฐานว่า โพรไฟล์ของ ϕ ระหว่างโนดจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง หรือที่รู้จักกันในชื่อของเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ (central – difference scheme) ซึ่งพบว่าวิธีนี้มีข้อจำกัดอยู่เฉพาะในกรณีของระบบที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำๆ เท่านั้น ทั้งนี้เพราะเมื่อใดที่ระบบมีค่า $|F|$ มากกว่า $2D$ จะทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการมีค่าเป็นลบซึ่งจะทำให้การแก้สมการไม่สามารถทำได้ [17] ด้วยเหตุ

นี้เพื่อป้องกันไม่ให้ปัญหาเช่นนี้เกิดขึ้น จึงมีการคิดวิธีขึ้นมาใหม่เรียกว่าอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ (upwind - difference scheme) ซึ่งจะทำการเปลี่ยนวิธีการประมาณค่าของ ϕ_e จากเดิมที่มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ ϕ_E และ ϕ_P ในวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ มาเป็นการกำหนดให้มีค่าเท่ากับค่า ϕ ของโนดที่อยู่ด้านหลังตามทิศทางการไหล ดังรูปที่ 4.7 a และ 4.7 b ซึ่งในกรณีที่ F_e มีค่าเป็นบวก ϕ_e จะมีค่าเท่ากับ ϕ_P และในกรณีที่ F_e มีค่าเป็นลบ ϕ_e จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ ϕ_E ตามลำดับ



เมื่อ $F_e > 0$ จะได้ $\phi_e = \phi_P$

รูปที่ 4.7 a การกำหนดค่า ϕ_e เมื่อ F_e มีค่าเป็นบวก ด้วยวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์



เมื่อ $F_e < 0$ จะได้ $\phi_e = \phi_E$

รูปที่ 4.7 b การกำหนดค่า ϕ_e เมื่อ F_e มีค่าเป็นลบ ด้วยวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์

ค่า ϕ_w ก็สามารถหาได้จากหลักการเดียวกันข้างต้น

สำหรับพจน์ $\frac{d\phi}{dx}$ ก็ยังคงใช้วิธีการคำนวณเหมือนกับวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ (สมการ4.4) ซึ่งตรงจุดนี้ก็จะทำให้เกิดปัญหาขึ้นในการใช้วิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ เนื่องจากในกรณีของระบบที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์สูงๆ ตามปกติแล้วพจน์ของการแพร่จะมีค่าน้อยหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือพจน์ $\frac{d\phi}{dx}$ จะมีค่าประมาณศูนย์ แต่ด้วยวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์จะยังมีการคำนวณพจน์ $\frac{d\phi}{dx}$ ด้วยสมมติฐานของวิธีการเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ ทำให้ผลลัพธ์ของพจน์การแพร่มีค่าสูงไปจากความเป็นจริง (overestimates) ด้วยเหตุนี้จึงได้มีการรวมคุณสมบัติของวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ และ อัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ เข้าด้วยกัน โดยมีชื่อเรียกว่าไฮบริดดิฟเฟอร์เรนท์ (hybrid-difference scheme) [18] (ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้) เกิดเป็นเงื่อนไขใหม่ดังนี้

เมื่อ $F_e < -2D_e$ จะได้ $\phi_e = \phi_E$ (4.10 a)

$-2D_e \le F_e \le 2D_e$ จะได้ $\phi_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e}$ (4.10 b)

$F_e > 2D_e$ จะได้ $\phi_e = \phi_P$ (4.10 c)

หรืออีกนัยหนึ่งคือในการคำนวนจะใช้เงื่อนไขของวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ เมื่อ $|F_e| \le 2D_e$ และเมื่อค่า F_e ไม่อยู่ในช่วงดังกล่าวจะเปลี่ยนไปใช้เงื่อนไขของวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ โดยกำหนดให้พจน์การแพร่มีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้นในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ (4.2) จึงสามารถกระทำได้ 3 วิธีคือ วิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ วิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์และวิธีไฮบริดดิฟเฟอร์เรนท์ ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา สำหรับในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์ 2 มิติ และ 3 มิติ ก็ใช้หลักการเดียวกับที่กล่าวมาข้างต้นในการแปลงเป็นสมการพีชคณิต

4.2.3 การคำนวณความเร็วของระบบ

จากที่กล่าวมาในหัวข้อ 4.2.2 ถึงวิธีการเปลี่ยนสมการอนุพันธ์เป็นสมการพีชคณิต พบว่ามีความจำเป็นที่จะต้องทราบถึงขนาดและทิศทางของความเร็วในตำแหน่งต่างๆ ซึ่งขนาดและทิศทางของความเร็วนั้นสามารถคำนวณได้จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมดังที่จะกล่าวถึงต่อไป

4.2.3.1 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเป็นสมการที่แสดงผลรวมของโมเมนตัมที่ผ่านเข้าออกในทุกทิศทางของปริมาตรควบคุม ซึ่งสมการ (4.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมได้เมื่อ $\phi = u$ หรือ $\bar{u}$, $\Gamma = \mu$ หรือ $\bar{\mu}$ เป็นต้น

ในการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิต ปริมาตรควบคุมที่ใช้จะมีรูปแบบที่แตกต่างจากกรณีของสมการทั่วๆ ไป ดังนี้

- ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทาง จะอยู่บริเวณเส้นกริดที่เชื่อมกันระหว่างโนดสองโนด ดังรูปที่ 4.8 ซึ่งแสดงได้ด้วยลูกศรเล็กๆ
- ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทาง จะอยู่คนละตำแหน่งกับตำแหน่งที่เก็บค่าความดัน

ดังนั้นรูปแบบของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการจึงมีลักษณะดังรูปที่ 4.9 ซึ่งเป็นลักษณะของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัมของ x – component จากรูปจะเห็นว่าลักษณะของปริมาตรควบคุมจะมีความแตกต่างจากปริมาตรควบคุมที่ใช้ในหัวข้อ 4.2.2 คือ ผิวหน้าของปริมาตรควบคุมในแนวแกน x จะอยู่ที่บริเวณโนดทั้งสองข้างพอดี ซึ่งจะเป็นเช่นนี้เฉพาะในแนวแกน x เท่านั้น เช่นเดียวกันลักษณะของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัมของ y – component ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.10 ผิวหน้าของปริมาตรควบคุมในแนวแกน y ก็จะอยู่ที่บริเวณโนดทั้งสองข้างพอดีและจะเป็นเฉพาะในแนวแกน y เท่านั้น

ด้วยรูปแบบของปริมาตรควบคุมที่กล่าวมาข้างต้น Patankar [17] ได้ทำการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัม x, y, z ให้อยู่ในรูปแบบสมการพีชคณิต ได้ดังสมการ (4.11a) – (4.11c) ตามลำดับ

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_P - P_E)A_e \qquad (4.11a)$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (P_P - P_N)A_n \qquad (4.11b)$$

$$a_l w_l = \sum a_{nb} w_{nb} + b + (P_P - P_L)A_l \qquad (4.11c)$$

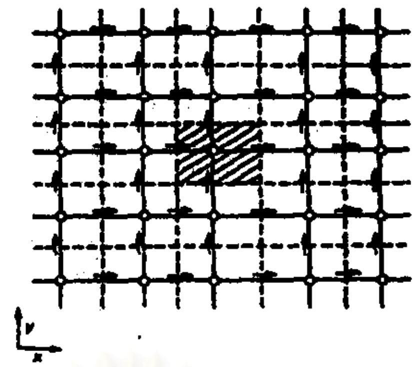
เมื่อ nb แทนค่า ณ ตำแหน่งข้างเคียง (neighbor)

A แทนพื้นที่ที่ตั้งฉากกับแรงดันที่กระทำ

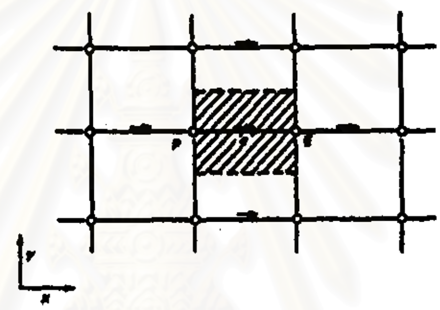
P แทนค่าความดันที่เก็บไว้ในโนดต่างๆ

a แทนค่าสัมประสิทธิ์

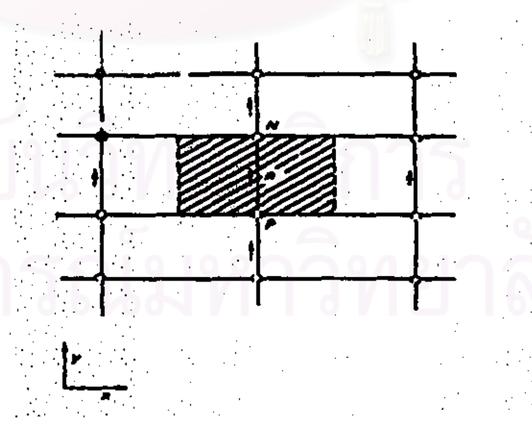
b แทนพจน์ที่ไม่สามารถจัดกลุ่มได้



รูปที่ 4.8 ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็ว [17]



รูปที่ 4.9 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในสมการโมเมนตัม x – component [17]



รูปที่ 4.10 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในสมการโมเมนตัม y – component [17]

4.2.3.2 วิธีการ SIMPLE

ในการแก้สมการโมเมนตัม เพื่อที่จะหาคำตอบขององค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทางจะทำได้ก็ต่อเมื่อทราบค่าการกระจายตัวของความดัน ในขณะเดียวกันค่าของความเร็วที่ได้จากการคำนวณก็จะต้องทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริงด้วย ซึ่งถ้าไม่ทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริง ก็แสดงว่าค่าความดันที่ใช้นั้นไม่ถูกต้องต้องทำการหาค่ามาใหม่หรือทำการปรับปรุงค่านั้นให้ถูกต้องยิ่งขึ้น ด้วยเหตุผลนี้ Patankar และ Spalding [18] จึงได้คิดค้นลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาขึ้นมาโดยมีชื่อว่า SIMPLE (Semi-Implict Pressure Linked Algorithm)

ลักษณะของขั้นตอนการแก้ปัญหาจะเริ่มจากการเดาค่าความดันเริ่มต้น ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ P^* แทนลงในสมการ โมเมนตัม (4.11a)-(4.11c) เพื่อทำการหาค่าความเร็ว u^*,v^*,w^* ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + \left(P_P^* - P_E^*\right) A_e \tag{4.12 a}$$
$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + \left(P_P^* - P_N^*\right) A_n \tag{4.12 b}$$
$$a_l w_l^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + \left(P_P^* - P_L^*\right) A_l \tag{4.12 c}$$

ขั้นตอนต่อไปคือทำการการปรับปรุงค่าความดัน P^* ที่สมมติขึ้น เพื่อให้ได้ค่าความดันที่ใกล้เคียงกับค่าจริงยิ่งขึ้น ด้วยค่าปรับปรุงความดัน P' ดังสมการ

$$P = P^* + P' \tag{4.13}$$

เช่นเดียวกันกับค่าความเร็ว u^*,v^*,w^* ที่ทำการปรับปรุงดังสมการ

$$u = u^* + u' \tag{4.14}$$
$$v = v^* + v' \tag{4.15}$$
$$w = w^* + w' \tag{4.16}$$

เมื่อนำสมการ (4.11a) ลบด้วยสมการ (4.12 a) จะได้

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (P'_P - P'_E)A_e \tag{4.17}$$

จากสมการ (4.17) จะกำหนดให้เทอม $\sum a_{nb} u'_{nb}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ [17] ดังนั้นจะได้

$$a_e u'_e = (P'_P - P'_E)A_e \tag{4.18}$$

หรือ

$$u'_e = d_e(P'_P - P'_E) \tag{4.19}$$

เมื่อ

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

จากสมการ (4.19) ทำให้สามารถเขียนสมการที่แสดงความเร็ว ณ ตำแหน่ง e ได้ดังนี้

$$u_e = u^*_e + d_e(P'_P - P'_E) \tag{4.20}$$

ซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า u^*_e กับค่าปรับปรุงความดัน P' เช่นเดียวกันกับความเร็วในตำแหน่งอื่นๆ

$$v_n = v^*_n + d_n(P'_P - P'_N) \tag{4.21}$$

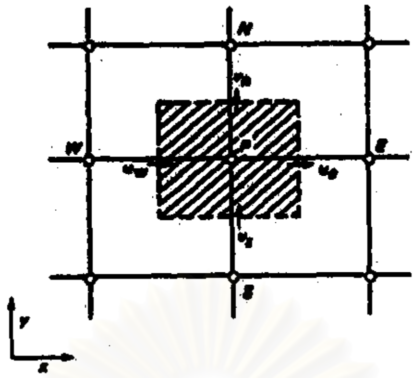
$$w_l = w^*_l + d_l(P'_P - P'_L) \tag{4.22}$$

พิจารณาสมการความต่อเนื่องที่ไม่ขึ้นกับเวลาในรูปแบบเดียวกับสมการ (3.18) ในบทที่ 3

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3.18}$$

เมื่อทำการแปลงสมการ (3.18) ให้อยู่เป็นสมการพีชคณิตด้วยวิธีที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 4.2.2 โดยอาศัยปริมาตรควบคุมในรูป 4.11 (แสดงไว้ในลักษณะ 2 มิติ เพื่อความสะดวก) จะได้สมการความต่อเนื่องในรูปแบบสมการพีชคณิตดังนี้

$$[u_e - u_w]\Delta y\Delta z + [v_n - v_s]\Delta x\Delta z + [w_h - w_l]\Delta x\Delta y = 0 \tag{4.23}$$



รูปที่ 4.11 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในสมการความต่อเนื่อง [17]

จากนั้นแทนค่าความเร็วต่างๆ ด้วยสมการที่อยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ (4.20)-(4.22) แล้วทำการจัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการพีชคณิตของ P' ดังนี้

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + a_H P'_H + a_L P'_L + b \qquad (4.24)$$

เมื่อ

$$a_E = d_e \Delta y \Delta z \qquad (4.25\text{ a})$$

$$a_W = d_w \Delta y \Delta z \qquad (4.25\text{ b})$$

$$a_N = d_n \Delta x \Delta z \qquad (4.25\text{ c})$$

$$a_S = d_s \Delta x \Delta z \qquad (4.25\text{ d})$$

$$a_H = d_h \Delta x \Delta y \qquad (4.25\text{ e})$$

$$a_L = d_l \Delta x \Delta y \qquad (4.25\text{ f})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_H + a_L \qquad (4.25\text{ g})$$

$$b = \left[u^*_w - u^*_e\right]\Delta y \Delta z + \left[v^*_s - v^*_n\right]\Delta x \Delta z + \left[w^*_h - w^*_l\right]\Delta x \Delta y \qquad (4.25\text{ h})$$

จากสมการข้างต้นพบว่า สมการ (4.25 h) มีรูปแบบเหมือนกับสมการ (4.23) ซึ่งเป็นสมการพีชคณิตของสมการความต่อเนื่อง เพียงแต่เปลี่ยนจากความเร็ว u,v,w เป็น u^*,v^*,w^* ตามลำดับ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า เมื่อใดที่สมการ (4.25 h) มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่าความดัน P^* ที่ใช้ เป็นค่าความดันที่เมื่อใช้ในการคำนวณค่าความเร็วจากสมการโมเมนตัมแล้วความเร็วที่คำนวณได้จะทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริง

จากสมการที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปเป็นลำดับขั้นตอนในการคำนวณหาคำตอบของวิธี SIMPLE ซึ่งเป็นลำดับขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณของงานวิจัยนี้ได้ดังนี้ [17]

1) เดาค่าความดันเริ่มต้น P^*
2) แก้สมการโมเมนตัม (4.12 a) –(4.12 c) เพื่อให้ได้ค่าความเร็ว u^*, v^*, w^*
3) แก้สมการ (4.24) เพื่อหาค่า P'
4) คำนวณ P จากสมการ (4.13)
5) คำนวณค่าความเร็ว u, v, w จากค่า u^*, v^*, w^* ที่ได้จากข้อ 2 ด้วยสมการ (4.20) – (4.22) ตามลำดับ
6) นำค่าความเร็ว u, v, w ที่ได้ไปทำการคำนวณสมการพีชคณิตอื่นๆ เช่น สมการอนุรักษ์พลังงาน สมการการไหลแบบปั่นป่วน
7) นำค่า P ที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 ไปเป็นค่าความดันเริ่มต้น P^* ในขั้นตอนที่ 1 จากนั้นทำการคำนวณตามขั้นตอนที่ 2 อีกครั้ง
8) ทำตามขั้นตอนเหล่านี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าที่คำนวณได้จากการคำนวณในรอบการคำนวณถัดกันมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อย

สำหรับวิธีที่ใช้ในการแก้สมการพีชคณิตจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

4.2.4 วิธีการแก้สมการพีชคณิต

สมการอนุรักษ์ต่างๆ เมื่อทำการแปลงให้เป็นสมการพีชคณิตแล้วจะมีรูปแบบทั่วๆ ไปดังต่อไปนี้

$$a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b \tag{4.26}$$

เมื่อ

P คือ โนดที่ทำการคำนวณ

nb คือ โนดข้างเคียงกับโนด P

ด้วยเหตุนี้จึงสามารถใช้วิธีเดียวกันในการแก้สมการเหล่านี้ได้ ซึ่งโดยทั่วไปในการแก้สมการพีชคณิตที่มีความซับซ้อนและอยู่ในรูปแบบหลายมิติ การแก้สมการจะนิยมใช้วิธีการคำนวณซ้ำ (Iterative method) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการเดาค่าเริ่มต้นของ ϕ บนทุกๆ โนดของระบบ แล้วทำการคำนวณเพื่อปรับปรุงค่า ϕ ในลักษณะเป็นรอบของการคำนวณ เมื่อใดที่ค่า ϕ ที่ได้จากการคำนวณ

ในรอบการคำนวณถัดกันมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อย แสดงว่าค่า ϕ ที่ได้จากการคำนวณในรอบนั้นคือคำตอบของสมการพีชคณิต

วิธีการคำนวณซ้ำที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ วิธีการเกาส์-ไซเดล แบบทีละจุด (Gauss-Seidel point-by-point method) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการเดาค่าเริ่มต้นของ ϕ บนทุกๆ โนดของระบบ จากนั้นจึงเริ่มทำการคำนวณจากโนดใดโนดหนึ่ง โดยที่อาศัยความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกับสมการ (4.26) ทำให้สามารถคำนวณค่า ϕ ณ โนดนั้นๆ ได้จาก

$$\phi_P = \frac{\sum a_{nb}\phi^*_{nb} + b}{a_P} \tag{4.27}$$

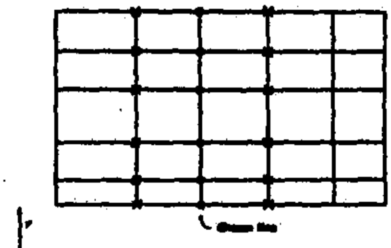
เมื่อ ϕ_P แทนค่า ϕ ของโนดที่ทำการคำนวณ

ϕ^*_{nb} แทนค่าที่มีอยู่ในปัจจุบันของโนดใกล้เคียงกับโนด P

เมื่อทุกๆ โนดในระบบได้รับการคำนวณตามสมการข้างต้น จะถือว่าเสร็จสิ้นรอบของการคำนวณหนึ่งรอบ

เนื่องจากในการคำนวณด้วยวิธีทีละจุดนี้ พบว่าใช้เวลาในการหาคำตอบของสมการมาก โดยเฉพาะในกรณีของระบบที่มีจำนวนของกริดมากๆ ดังนั้นจึงได้มีการคิดค้นวิธีการเกาส์-ไซเดลแบบทีละแถว (Gauss-Seidel line-by-line method) ซึ่งเป็นวิธีเดียวกับที่ใช้ในงานวิจัยนี้ขึ้นมา วิธีนี้เป็นการผสมกันระหว่างวิธีทีละจุดที่กล่าวมาข้างต้นกับวิธี TDMA (TriDiagonal-Matrix Algorithm) ซึ่งเป็นวิธีการแก้สมการพีชคณิตวิธีหนึ่ง (รายละเอียดของวิธีการ TDMA จะอยู่ในภาคผนวก)

การคำนวณด้วยวิธีทีละแถว จะเริ่มต้นจากการเดาค่าเริ่มต้นของ ϕ บนทุกๆ โนดของระบบเช่นเดียวกันกับวิธีทีละจุด แต่เปลี่ยนจากการคำนวณทีละจุดไปเป็นการคำนวณทีละแถว ดังแสดงได้จากรูป 4.12



รูปที่ 4.12 ลักษณะการแก้สมการด้วยวิธีทีละแถว [17]

จากรูป ถ้าทำการเลือกแถวขึ้นมาหนึ่งแถวตามแนวแกน y (แถวที่มีเครื่องหมายจุดสีดำ) โดยสมมุติว่าทราบค่า ϕ ของโนดที่อยู่บริเวณแถวข้างเคียง (แถวที่มีเครื่องหมายกากบาท) เมื่อทำการพิจารณาสมการพีชคณิตของโนดตามแนวของแถวที่เลือก (โนดที่มีเครื่องหมายจุดสีดำ) จะพบว่าสมการจะประกอบขึ้นจากความสัมพันธ์ของค่า ϕ ในโนดของแถวข้างเคียงซึ่งทราบค่าในปัจจุบัน (โนดที่มีเครื่องหมายกากบาท) ทำให้เมื่อได้สมการพีชคณิตของโนดตามแนวแกนของแถวที่เลือกครบทุกโนด จะกลายเป็นกลุ่มของสมการที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเฉพาะค่า ϕ ในตำแหน่งของโนดตามแนวของแถวเท่านั้น ทำให้สามารถแก้กลุ่มของสมการดังกล่าวได้ด้วยวิธี TDMA

เมื่อทำการคำนวณครบทุกแถวในระบบด้วยวิธีการข้างต้น จะถือว่าเสร็จสิ้นรอบของการคำนวณหนึ่งรอบ ซึ่งจะพบว่าด้วยวิธีทีละแถวนี้ จะใช้เวลาในการหาคำตอบน้อยกว่าวิธีทีละจุด และไม่จำเป็นต้องกังวลกับจำนวนของกริดที่มาก

4.2.4.1 รีแล็กเซชัน (Relaxation)

ในการแก้สมการพีชคณิตด้วยวิธีการคำนวณซ้ำ ในบางครั้งมีความจำเป็นที่จะต้องทำการเพิ่มหรือลดการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรในการคำนวณระหว่างรอบของการคำนวณที่อยู่ถัดกัน ซึ่งจะเรียกวิธีการดังกล่าวว่า โอเวอร์รีแล็กเซชัน (overrelaxation) สำหรับในกรณีที่ต้องการเพิ่ม และ อันเดอร์รีแล็กเซชัน (underrelaxation) ในกรณีที่ต้องการลดการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรที่คำนวณระหว่างรอบของการคำนวณที่อยู่ถัดกัน ดังมีวิธีการดังนี้

พิจารณาสมการ (4.26) จะสามารถจัดรูปสมการได้ใหม่คือ

$$\phi_P = \frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} \tag{4.28}$$

ทำการบวกและลบทางด้านขวามือของสมการ (4.28) ด้วย ϕ_P^* จะได้

$$\phi_P = \phi_P^* + \left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^*\right) \tag{4.29}$$

เมื่อ ϕ_P^* แทนค่า ϕ_P ที่ได้จากการคำนวณในรอบที่แล้ว

จากสมการ (4.29) จะพบว่าค่าที่อยู่ภายในวงเล็บก็คือค่าที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงระหว่างค่าที่คำนวณได้ในรอบที่อยู่ถัดกัน โดยสามารถทำการปรับปรุงค่าดังกล่าวได้จากค่า รีแล็คเซชันแฟกเตอร์ (Relaxation factor) α ดังสมการ

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha\left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^*\right) \tag{4.30}$$

นั้นคือถ้าค่าของ α อยู่ในช่วง 0-1 ก็จะเรียกวิธีการนี้ว่า อันเดอร์รีแล็คเซชัน และถ้า α มีค่ามากกว่า 1 ก็จะเรียกว่า โอเวอร์รีแล็คเซชัน

สำหรับในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการอันเดอร์รีแล็คเซชันร่วมกันกับวิธีการเกาส์-ไซเดลแบบทีละแถว ในการแก้สมการพีชคณิต