การวิเคราะห์สมรรถนะและการออกแบบตัวควบคุมสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิด ภายใต้การรบกวนที่มีขนาดมีขอบเขตและอนุพันธ์มีขอบเขต

นายวทัญญู คล้ายสงคราม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-2939-1

PERFORMANCE ANALYSIS AND CONTROLLER DESIGN FOR A BINARY DISTILLATION COLUMN UNDER DISTURBANCES WITH BOUNDED MAGNITUDES AND BOUNDED DERIVATIVES

Mr. Wathanyoo Khaisongkram

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2002
ISBN 974-17-2939-1

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์สมรรถนะและการออกแบบตัวควบคุมสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิดภายใต้การรบกวนที่มีขนาดมีขอบเขตและอนุพันธ์มีขอบเขต

โดย นายวทัญญู คล้ายสงคราม

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.สุชิน อรุณสวัสดิวงศ์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ)

วทัญญู คล้ายสงคราม: การวิเคราะห์สมรรถนะและการออกแบบตัวควบคุมสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิดภายใต้การรบกวนที่มีขนาดมีขอบเขตและอนุพันธ์มีขอบเขต (PERFORMANCE ANALYSIS AND CONTROLLER DESIGN FOR A BINARY DISTILLATION COLUMN UNDER DISTURBANCES WITH BOUNDED MAGNITUDES AND BOUNDED DERIVATIVES), อ. ที่ปรึกษา: ผศ.ดร. เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย, 177 หน้า, ISBN 974-17-2939-1

แนวทางในการจำลองการรบกวนที่เข้าสู่ระบบมีอยู่หลายลักษณะ ขึ้นอยู่กับสมบัติทางกายภาพของการรบกวนภายในระบบแต่ละระบบ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอแนวทางการจำลองการรบกวนในลักษณะของสัญญาณเข้าที่มีขอบเขตของขนาด และขอบเขตของอัตราการเปลี่ยนแปลง ดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาในที่นี้คือขนาดสูงสุดของสัญญาณออกเมื่อระบบอยู่ภายใต้การรบกวนดังกล่าว เราได้วิเคราะห์ลักษณะและสมบัติพื้นฐานของดรรชนีสมรรถนะนี้ แล้วแสดงให้เห็นว่าปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะอาจจัดให้อยู่ในรูปของปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุดได้ ซึ่งสามารถวิเคราะห์หาเงื่อนไขจำเป็นของปัญหาได้ทันที นอกจากนั้นยังได้พัฒนาโปรแกรมสำหรับคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะดังกล่าวอีกด้วย จากการสังเกตเราพบว่าดรรชนีสมรรถนะนี้เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ของระบบควบคุมวงปิด ดังนั้นจึงสามารถผนวกค่าดรรชนีสมรรถนะเข้ากับวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยใช้การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ได้ เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิผลในการจำลองการรบกวนแนวใหม่นี้เราได้ประยุกต์ใช้เทคนิคการออกแบบดังกล่าวกับระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด จุดประสงค์สมรรถนะคือขนาดสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ที่เบี่ยงเบนไปจากค่าที่จุดทำงาน ส่วนเงื่อนไขสมรรถนะคือขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุม เราสมมติให้ขนาดของการรบกวนที่เข้าสู่ระบบเปลี่ยนแปลงจากค่าที่จุดทำงานภายในขอบเขตจำกัด และอัตราการเปลี่ยนแปลงของการรบกวนดังกล่าวก็มีขอบเขตจำกัดด้วย ผลการจำลองระบบแสดงให้เห็นว่าสัญญาณควบคุมวางตัวอยู่ในระดับที่ยอมรับได้ ในขณะที่ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์เปลี่ยนแปลงไปจากจุดทำงานไม่เกินค่าจุดประสงค์ที่ลดได้ นอกจากนี้เราได้แสดงเส้นโค้งแลกเปลี่ยนระหว่างการเบี่ยงเบนของความเข้มข้นแต่ละตัวไว้ด้วย ผลลัพธ์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เผยให้เห็นถึงศักยภาพของการประยุกต์ใช้การวิเคราะห์ดรรชนีสมรรถนะและการสังเคราะห์ตัวควบคุมกับกระบวนการอุตสาหกรรมจริง

ภาควิชา ....วิศวกรรมไฟฟ้า.... ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา ....วิศวกรรมไฟฟ้า.... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา ....2545....

##4470504021: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: PERFORMANCE INDEX / MAGNITUDE BOUND/ RATE OF CHANGE BOUND / OPTIMAL CONTROL / CONVEX OPTIMIZATION / BINARY DISTILLATION COLUMN

WATHANYOO KHAISONGKRAM: PERFORMANCE ANALYSIS AND CONTROLLER DESIGN FOR A BINARY DISTILLATION COLUMN UNDER DISTURBANCES WITH BOUNDED MAGNITUDES AND BOUNDED DERIVATIVES, THESIS ADVISOR: DAVID BANJERDPONGCHAI, Ph.D., 177 pp., ISBN 974-17-2939-1

There are several ways to model system disturbances, depending on their physical characteristics. This thesis presents an approach to model disturbances as signals with bounds on their magnitudes and bounds on their rates of change. The performance index considered in this work is the maximum magnitude of the system output under the aforementioned disturbances. The analysis of the basic features and properties of the performance index is given. Then, we show that the performance analysis can be reformulated as an optimal control problem, whose necessary conditions can be readily determined. In addition, the computer program for calculating this performance index is also developed. We observe that this performance index is a convex function with respect to the closed-loop control system. Therefore, we can integrate the performance index in the framework of the controller synthesis via convex optimization. To demonstrate the effectiveness of the novel approach, we apply the design technique to a binary distillation column. The performance objectives are the maximum deviations of the product compositions, and the performance constraints are the maximum peaks of the control signals. The magnitudes of disturbance vary within the specified bound and their rates of change are also bounded. The simulation results show that the control signals are maintained in the acceptable levels, and the deviations of the product compositions do not exceed their minimized objectives. A tradeoff curve between composition deviations is also illustrated. The results of this thesis reveal the potential to employ the performance analysis and controller synthesis to real industrial processes.

Department ...Electrical Engineering... **Student's signature** ....
Field of study ...Electrical Engineering... **Advisor's signature** ...David Banj...
Academic year ...2002...

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ด้วยความช่วยเหลือของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้สละเวลาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่ทำให้นิสิตมีแนวความคิดในการทำวิทยานิพนธ์ รวมทั้งแรงจูงใจที่ทำให้ผู้วิจัยตัดสินใจศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต ผู้วิจัยจึงใคร่ขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร. สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้พื้นฐานในวิชาทางระบบควบคุม อันเป็นพื้นฐานในการศึกษาและทำวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร. มนตรี วงศ์ศรี ภาควิชาวิศวกรรมเคมี คณะวิศวกรรมศาสตร์ ที่ได้สละเวลาให้คำปรึกษาซึ่งเป็นพื้นฐานความรู้สำหรับระบบหอกลั่น และขอขอบพระคุณ Prof. Dr. William L. Luyben มหาวิทยาลัย Lehigh ประเทศสหรัฐอเมริกา ซึ่งได้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับข้อมูลทางกายภาพของระบบหอกลั่น

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจและกำลังทรัพย์ตลอดเวลา รวมทั้งให้โอกาสผู้วิจัยได้ศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต

ขอขอบคุณเพื่อนๆ รุ่นพี่ รุ่นน้องในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุมทั้งในภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและภาควิชาวิศวกรรมเคมี ที่ได้ให้กำลังใจและคำปรึกษา จนผู้วิจัยได้ทำวิทยานิพนธ์นี้ได้สำเร็จสมบูรณ์ ขอขอบคุณพี่ธีรวุฒิ พี่อนุชา พี่ศุภอรรถ พี่สุพรรณี กรรณวัฒน์ และเกียรติขจร สำหรับข้อมูลอันเป็นประโยชน์เกี่ยวกับระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด ขอขอบคุณพี่จิตโกมุท พี่ฐาปนา พี่กมลวรรณ และพี่เอกลักษณ์ สำหรับคำแนะนำประกอบการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับทรัพยากรต่างๆ ในการศึกษา ค้นคว้าและวิจัย

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

คำอธิบายสัญลักษณ์

$\mathbb{R}$	เซตจำนวนจริง
$\mathbb{R}^n$	เซตของเวกเตอร์ค่าจริงมิติ n
I	เมทริกซ์เอกลักษณ์
$\mathcal{U}(\cdot)$	ฟังก์ชันขั้นเฮวิไซด์
M	ขอบเขตของขนาดของสัญญาณเข้า
D	ขอบเขตของอนุพันธ์ของสัญญาณเข้า
$h(t)$	ผลตอบสนองอิมพัลส์ หรือเมทริกซ์ของผลตอบสนองอิมพัลส์
$s(t)$	ผลตอบสนองสัญญาณขั้น หรือเมทริกซ์ของผลตอบสนองสัญญาณขั้น
$H(s)$	ฟังก์ชันถ่ายโอนหรือเมทริกซ์ถ่ายโอน ซึ่งเป็นคู่การแปลงลาปลาซของ $h(t)$

ตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์สมรรถนะ

$\hat{z}$	ดรรชนีสมรรถนะหรือสัญญาณออกสูงสุด
$\hat{w}$	สัญญาณเข้าสูงสุด
$\hat{z}(T)$	ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลา T
$\hat{z}(\infty)$	ดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์
ϵ_∞	ค่าความแตกต่างระหว่างดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์กับดรรชนีสมรรถนะจริง
$\mathcal{J}$	ฟังก์ชันนัลต้นทุน
$\mathcal{H}$	ฟังก์ชันฮามิลโทเนียน
$p_{n+1}(t)$	ดรรชนีสวิตซ์
$\mathcal{T}_k$	เขตเปลี่ยนค่าที่ k
$\mathcal{S}_k$	เขตอิ่มตัวที่ k
$t_{0,k}$	เวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าหรือเขตอิ่มตัวที่ k โดยที่เขตสุดท้ายแทนด้วย $k = \text{end}$
$t_{f,k}$	เวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าหรือเขตอิ่มตัวที่ k
$t_{i,k}$	เวลาสวิตซ์ลำดับที่ i ของเขตเปลี่ยนค่าที่ k
s_k^{ref}	ค่าอ้างอิงการสวิตซ์ของเขตเปลี่ยนค่าที่ k
$\Delta t_{i,k}$	ความกว้างของเขตเปลี่ยนค่าย่อยลำดับที่ i ในเขตเปลี่ยนค่าที่ k
$CS_{i,k}$	ผลบวกสะสมแบบมีขั้วของความกว้างเขตเปลี่ยนค่าย่อยลำดับที่ i ในเขตเปลี่ยนค่าที่ k
t_i^{peak}	เวลายอดลำดับที่ i
$\mathcal{I}_i$	ช่วงเวลายอดถึงยอดลำดับที่ i
n_{samp}	จำนวนจุดในการสุ่มค่าเมื่อจำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้น
`stp[j]`	เวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองสัญญาณขั้น
`tsim[j]`	เวกเตอร์ข้อมูลเวลา
`int[j]`	เวกเตอร์ข้อมูลของช่วงเวลายอดถึงยอด
`intsign[j]`	เวกเตอร์ข้อมูลของเครื่องหมายของช่วงเวลายอดถึงยอด

$\mathcal{T}^{\text{work}}$	ช่วงทำงาน
t_i^{cut}	เวลาการตัดลำดับที่ i
TCS_i	ผลบวกสะสมทดสอบ ณ เวลาการตัดลำดับที่ i
R_i	ผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ ณ เวลาการตัดลำดับที่ i
$\mathcal{T}_F$	เขตเปลี่ยนค่าไม่แท้
$\mathcal{T}_T$	เขตเปลี่ยนค่าแท้
TTR_k	เขตเปลี่ยนค่าทดสอบที่ k
Π_{end}	เซตของรูปแบบเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายที่เป็นไปได้ทั้งหมด
Γ	เซตของช่วงที่เวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายที่เป็นไปได้ทั้งหมดไปตกอยู่
Π_{start}	เซตของรูปแบบเขตเปลี่ยนค่าเริ่มแรกที่เป็นไปได้ทั้งหมด
t_i^{sw}	เวลาสวิตช์ตำแหน่งที่ i ในเวกเตอร์สวิตช์
γ_i^{sw}	เครื่องหมายของช่วงตำแหน่งที่ i ในเวกเตอร์สวิตช์
`imp[j]`	เวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองอิมพัลส์
`maxinput[j]`	เวกเตอร์ข้อมูลสัญญาณเข้าสูงสุด

ตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบตัวควบคุม

P	ระบบควบคุมซึ่งอยู่ในรูปแบบมาตรฐาน
K	ตัวควบคุม
H_{zw}	ระบบวงปิดจากสัญญาณเข้า w ไปยังสัญญาณออก z
$\mathcal{H}_N$	ปริภูมิย่อยมิติจำกัดของ $\mathcal{H}_{\text{stab}}$
$\mathcal{L}$	วิวิธเชิงเส้น
$\mathcal{H}_{\text{stab}}$	ปริภูมิของระบบ H_{zw} ที่มีเสถียรภาพ
Q	ตัวแปรเสริมสำหรับการทำให้เป็นตัวแปรเสริม Q
K_{nom}	ตัวควบคุมที่ระบุ
F_{sfb}	อัตราขยายของการป้อนกลับสถานะ
L_{obs}	อัตราขยายของตัวประมาณสถานะ
$\varphi(H)$	ฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะจาก $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ ไปสู่ R
$\partial\phi(x)$	อนุพันธ์ย่อยของ $\phi(x)$ ที่จุด x
$\varphi^{\text{sg}}(H)$	เกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H)$
$\varphi^{\text{fin}}(x)$	ฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะจาก R^n ไปสู่ R
$\phi_{\text{obj}}(\cdot)$	ฟังก์ชันจุดประสงค์คอนเวกซ์
$\phi_{\text{con}}(\cdot)$	ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับคอนเวกซ์
$\mathcal{E}_k$	ทรงรีลำดับที่ k
DOF	จำนวนตัวแปรอิสระของระบบ
Q_{LQG}	เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักของตัวแปรสถานะในการออกแบบตัวควบคุมแอลคิวจี
R_{LQG}	เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักของสัญญาณควบคุมในการออกแบบตัวควบคุมแอลคิวจี
S_w	เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวน w
S_n	เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวน n

ตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับหอกลั่นแยกสารสองชนิด

M_D	ปริมาณของเหลวในเครื่องป้อนเวียนรอบ
M_B	ปริมาณของเหลวในฐานหอกลั่น
M_n	ปริมาณของเหลวในชั้นที่ n
x_n	ความเข้มข้นของสารผสมในสถานะของเหลวในชั้นที่ n
y_n	ความเข้มข้นของสารผสมในสถานะก๊าซในชั้นที่ n
L_n	อัตราไหลของของเหลวในชั้นที่ n
D	อัตราไหลของสารผลิตภัณฑ์ยอดหอ
B	อัตราไหลของสารผลิตภัณฑ์ฐานหอ
V	อัตราการต้มซ้ำ
L	อัตราการป้อนกลับสารที่ยอดหอ
F	อัตราการป้อนสารที่กลางหอ
x_F	ความเข้มข้นของสารที่ป้อนเข้ากลางหอ
x_D	ความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ยอดหอ
x_B	ความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ฐานหอ
α	ค่าความสามารถในการกลายเป็นไอสัมพัทธ์
β	ค่าพารามิเตอร์ในความสัมพันธ์ระหว่างสารป้อนกลับและโมลในแต่ละชั้นของหอกลั่น

สัญกรณ์

$\mathcal{L}(\cdot)$	ผลการแปลงลาปลาซ
$\lVert\cdot\rVert_1$	นอร์มหนึ่งของระบบ
$\triangleq$	นิยามเป็น
$\square$	จบการพิสูจน์
$\gg$	มากกว่ามากๆ
$\ll$	น้อยกว่ามากๆ
$\mathrm{argsup}\{\cdot\}$	อาร์กิวเมนต์ที่ทำให้เกิดค่าสูงสุด
$\mathrm{sgn}\{\cdot\}$	ฟังก์ชันซิกนัม

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

จุดประสงค์พื้นฐานอย่างหนึ่งของการออกแบบระบบควบคุมอัตโนมัติ คือการรักษาค่าสัญญาณออกของระบบให้อยู่ใกล้ๆ กับค่าที่ระบุ ภายใต้การกระทำของการรบกวนที่อาจเกิดขึ้นได้ ระบบทางกายภาพทั่วไปไม่ว่าจะเป็นระบบในอุตสาหกรรม หรือในห้องปฏิบัติการ มักจะมีผลจากการรบกวน (Disturbance) หรือสัญญาณรบกวน (Noise) ในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง การรบกวนเหล่านี้อาจมาจากภายนอกได้แก่สภาพแวดล้อมของระบบที่เปลี่ยนแปลงไป หรือปริมาณของวัตถุดิบหรือสัญญาณป้อนเข้าที่ผันแปรไปจากค่าปกติ ในขณะเดียวกันการรบกวนยังอาจเกิดขึ้นภายในระบบ เช่นการเปลี่ยนแปลงค่าความต้านทานของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อทำงานที่ความเร็วรอบต่างกัน และการเปลี่ยนไปของพารามิเตอร์บางตัวในระบบ ทำให้แบบจำลองที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมผิดไปจากระบบจริง รวมถึงความไม่แน่นอน (Uncertainty) ที่เกิดจากการประมาณระบบเป็นเชิงเส้น (Linearization) และความไม่แน่นอนในการประมาณอื่นๆ เมื่อคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจคิดได้ว่าเป็นการรบกวนอย่างหนึ่งของระบบ นอกจากนี้การรบกวนอาจหมายรวมถึงข้อผิดพลาด (Fault) ที่อาจเกิดขึ้นระหว่างการทำงานของระบบด้วย

ตัวควบคุมที่ดีมักจะรวมการชดเชยการรบกวนเหล่านี้ไว้ในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมแล้ว ดังเช่นการใส่เครื่องหาปริพันธ์ (Integrator) เข้าไปในระบบ เพื่อขจัดการรบกวน (Disturbance rejection) หรือการควบคุมคงทน (Robust control) ซึ่งจะให้ผลการควบคุมที่น่าพอใจถึงแม้จะมีการรบกวนเข้ามาในระบบ ถึงกระนั้นก็ตามการรบกวนที่ตัวควบคุมดังกล่าวสามารถจัดการได้ดี จะขึ้นอยู่กับสถานการณ์ที่ได้จำลองไว้ในขั้นตอนการออกแบบเท่านั้น แนวคิดในการจำลองการรบกวนเพื่อนำไปใช้ในการออกแบบระบบควบคุม จึงนับได้ว่าเป็นแนวคิดที่มีบทบาทสำคัญต่อการขจัดการรบกวนที่เกิดขึ้นจริงในระบบ นั่นคือหากการรบกวนที่จำลองขึ้นมีลักษณะใกล้เคียงกับการรบกวนจริงของระบบมาก ก็จะทำให้ตัวควบคุมที่ออกแบบบนพื้นฐานของการรบกวนจำลองดังกล่าว มีประสิทธิผลในการกำจัดการรบกวนจริงมากไปด้วย

1.1.1 แบบจำลองการรบกวน

ในการออกแบบตัวควบคุมทั่วๆไป มักจะจำลองการรบกวนในสองลักษณะคือ การรบกวนแบบสัญญาณขั้น (Step signal) และสัญญาณรบกวนแบบสุ่ม (Random noise) สัญญาณขั้นเป็นสัญญาณอย่างง่ายที่ใช้แทนการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ หรือสภาวะการทำงานของระบบ ซึ่งมีแนวคิดว่าการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นผันจากค่าหนึ่งไปเป็นอีกค่าหนึ่งในทันที และคงอยู่เช่นนั้นชั่วระยะเวลาหนึ่ง ในขณะที่สัญญาณรบกวนแบบสุ่มมีแนวคิดที่ว่า การรบกวนที่เข้ามามีการแปรผันอยู่ตลอดเวลาโดยไม่สามารถบ่งบอกค่าได้แน่นอน หากแต่การแปรผันดังกล่าวเกิดขึ้นรอบๆค่าเฉลี่ยค่าหนึ่ง และมีส่วนเบี่ยงเบนของการเปลี่ยนแปลง

คงที่ การจำลองการรบกวนทั้งสองแบบนี้สอดคล้องกับการรบกวนที่เกิดขึ้นจริงในระดับหนึ่ง แต่ยังคงมีบางจุดที่มีลักษณะไม่สมจริง ทำให้เกิดความอนุรักษ์ (Conservatism) ในการออกแบบตัวควบคุม ความไม่สมจริงของการรบกวนแบบสัญญาณขั้นดังรูปที่ 1.1 (a) มีลักษณะดังนี้

- อัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณ ณ จุดที่เกิดการเปลี่ยนแปลงมีค่าเป็นอนันต์ ซึ่งในความเป็นจริงนั้น สัญญาณทางกายภาพจำพวกอุณหภูมิ อัตราการไหล หรือความดัน ไม่สามารถเปลี่ยนค่าได้รวดเร็วถึงขั้นนั้น และจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งในการเปลี่ยนจากค่าหนึ่งไปยังอีกค่าหนึ่ง
- ลักษณะของสัญญาณขั้นจะมีค่าคงที่เป็นช่วงๆ (Piecewise constant) ซึ่งสัญญาณรบกวนในระบบจริงมักจะมีการผันเปลี่ยนค่าอยู่ตลอดเวลา

ส่วนความไม่สมจริงของสัญญาณรบกวนแบบสุ่มดังรูปที่ 1.1 (b) เป็นดังนี้

- ขนาดของสัญญาณแบบสุ่มนั้นแปรเปลี่ยนตลอดเวลา ถึงแม้ว่าจะมีส่วนเบี่ยงเบนที่จำกัด แต่สัญญาณในบางจุดอาจมีค่ามากอย่างไม่จำกัด ในขณะที่การรบกวนทางกายภาพไม่อาจมีค่าได้สูงอย่างไม่จำกัดเช่นนี้
- เช่นเดียวกับขนาดของสัญญาณ อัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณแบบสุ่มก็อาจมีค่าได้มากอย่างไม่จำกัดเช่นกัน เนื่องจากการแปรเปลี่ยนอย่างสุ่มของสัญญาณ ลักษณะดังนี้เป็นลักษณะที่ไม่สอดคล้องกับการรบกวนจริง

นอกจากนั้นในการออกแบบตัวควบคุมคงทนบางชนิดที่พิจารณาค่านอร์มของระบบ ยังได้พิจารณาเซตของการรบกวนทั้งหมดในลักษณะของสัญญาณที่มีขนาดจำกัด หรือมีพลังงานจำกัด [1, 2, 3] การรบกวนในลักษณะดังกล่าวนี้มีความสมเหตุสมผลในแง่หนึ่ง แต่มักมีความอนุรักษ์เกิดขึ้นเนื่องจากการรบกวนที่เป็นไปได้จริงเป็นเพียงส่วนหนึ่งของการรบกวนทั้งหมดที่ได้จำลองไว้ในการออกแบบ หากต้องการลดความอนุรักษ์เหล่านี้ จำเป็นต้องใช้การจำลองการรบกวนที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น ด้วยการพิจารณาโดยตรงจากการรบกวนที่เกิดขึ้นจริงในระบบแต่ละระบบ ซึ่งมีลักษณะของการรบกวนแตกต่างกันออกไป

แนวความคิดในการจำลองการรบกวนควรมีความสมเหตุสมผล และเข้ากันกับการรบกวนที่เป็นไปได้จริง เมื่อพิจารณาระบบทั่วๆไป ขนาดของการรบกวนจะมีค่าจำกัดอยู่ในขอบเขตหนึ่งๆ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากขีดจำกัดของอุปกรณ์ในระบบทำให้การรบกวนไม่อาจมีค่าสูงได้เกินกว่าค่าขอบเขตดังกล่าว หรืออาจเป็นเพราะลักษณะของการรบกวนเอง ดังตัวอย่างเช่นการรบกวนซึ่งเป็นภาระ (Load) ของระบบโรงจักรไฟฟ้าจะมีค่าได้มากที่สุดเท่ากับจำนวนผู้ใช้ในเขตนั้นทั้งหมด ในทำนองเดียวกันอัตราการเปลี่ยนแปลงของการรบกวนก็ไม่สามารถมีค่าสูงได้อย่างไม่จำกัด เนื่องจากสมบัติทางกายภาพของการรบกวนนั้นๆ ตัวอย่างเช่น ถ้าหากอุณหภูมิของห้องที่เปลี่ยนแปลงไปเป็นการรบกวนของระบบปรับอากาศ ย่อมเป็นไปไม่ได้ที่อุณหภูมิห้องจะเปลี่ยนแปลงจากค่าหนึ่งไปยังอีกค่าหนึ่งในทันทีทันใด แต่จะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งเพื่อที่จะเปลี่ยน (รบกวน) อุณหภูมิของมวลอากาศในห้อง

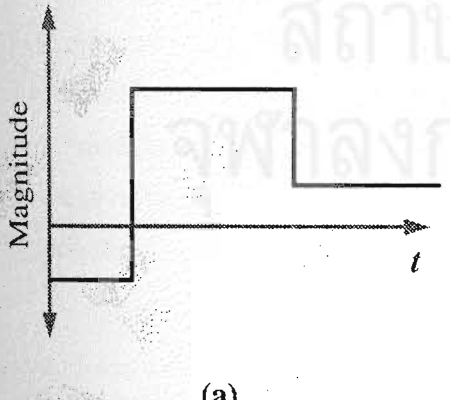
ระบบในอุตสาหกรรมบางระบบ การจำลองการรบกวนในลักษณะของสัญญาณทั้งหมดที่มีขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลง จำกัดที่ขอบเขตค่าหนึ่ง มีความสมเหตุสมผล ใกล้เคียงกับการรบกวนที่เกิดขึ้นจริง

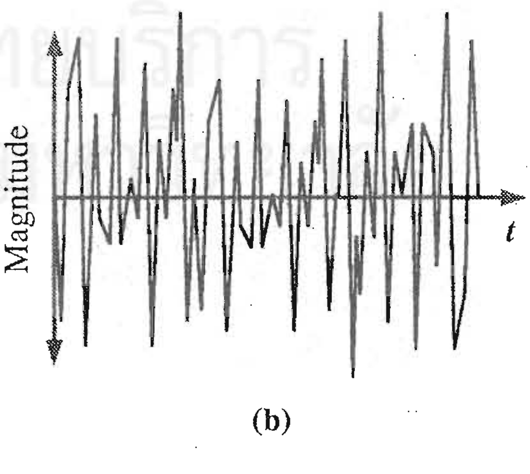
และลดความอนุรักษ์ในการออกแบบตัวควบคุมได้ ลักษณะของสัญญาณดังกล่าวเป็นดังรูปที่ 1.2 จะเห็นว่าสัญญาณในรูปมีขนาดจำกัดอยู่ในช่วงหนึ่ง และความชันก็ถูกจำกัดเช่นกัน อย่างไรก็ตามสัญญาณตัวอย่างในรูปเป็นสัญญาณที่ค่อนข้างไม่เรียบ (Not smooth) เพราะมีการหักมุมในบางจุด แต่ในความเป็นจริงการรบกวนอาจมีความราบเรียบมากกว่านี้ นอกจากนี้เซตของสัญญาณในลักษณะนี้ยังได้รวมถึงสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงไปมาตลอดเวลาอย่างสุ่มด้วย (ไม่จำเป็นเฉพาะต้องมีขนาดคงที่หรือความชันคงที่เป็นช่วงๆ ดังสัญญาณในรูปที่ 1.2)

ตัวอย่างของระบบที่มีการรบกวนดังกล่าวคือระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด (Binary distillation column) ซึ่งมีการรบกวนเป็นอัตราการป้อนสารวัตถุดิบเข้าหอ (Feed rate) และความเข้มข้นของสารที่วัตถุดิบที่ป้อนเข้า (Feed composition) เมื่อพิจารณาอัตราการป้อนสารเข้าหอ จะเห็นว่าขนาดของท่อลำเลียง และอุปกรณ์ที่ป้อนสารเข้าหอ ล้วนมีผลต่ออัตราการป้อนสารเข้าหอ ทำให้อัตราของสารที่ป้อนเข้าถูกจำกัดอยู่ในขอบเขตค่าหนึ่ง นอกจากนี้อัตราการเปลี่ยนแปลงของอัตราการป้อนสารเข้าหอก็ถูกจำกัดโดยมวลสารของวัตถุดิบและกำลังของเครื่องสูบสารเข้าหอเช่นเดียวกัน สำหรับความเข้มข้นของสารที่ป้อนเข้าก็ขึ้นอยู่กับโรงปฏิกรณ์เคมี (Chemical reactor) ที่อยู่ก่อนหน้าจุดป้อนสาร ทำให้ความเข้มข้นมีค่าจำกัดอยู่ในช่วงค่าหนึ่ง และเช่นเดียวกันอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นดังกล่าวก็ไม่สามารถเปลี่ยนได้อย่างทันทีทันใด แต่จะต้องมีข้อจำกัดอยู่ เนื่องจากความเข้มข้นคือสัดส่วนของสารผสม การที่ความเข้มข้นจะเปลี่ยนจากค่าหนึ่งไปยังอีกค่าหนึ่งอย่างรวดเร็ว หมายถึงปริมาณของสารผสมแต่ละชนิดที่เข้ามาจะต้องเปลี่ยนอย่างรวดเร็วเช่นกัน แต่สารวัตถุดิบมีมวลและต้องการเวลาระยะหนึ่งในการปรับเปลี่ยนค่า เวลานี้เป็นข้อจำกัดของการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารที่ป้อนเข้านั่นเอง

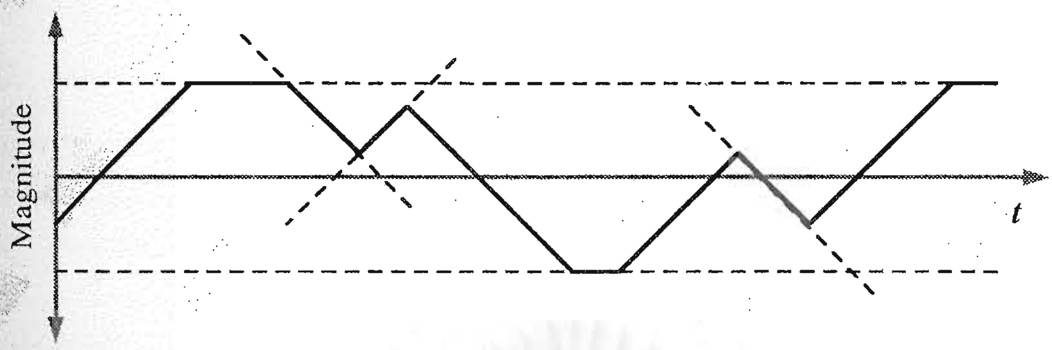
1.1.2 การคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ

สำหรับการจัดการกับการรบกวนแบบสัญญาณขั้นอาจทำได้โดยใส่เครื่องหาปริพันธ์เข้าไปในระบบ ในขณะเดียวกัน สัญญาณรบกวนแบบสุ่มอาจกำจัดได้โดยใช้ตัวกรองที่เหมาะสม นอกจากนี้เราอาจลดผลของ





รูปที่ 1.1: ลักษณะการรบกวนพื้นฐาน: (a) การรบกวนแบบสัญญาณขั้น (b) สัญญาณรบกวนแบบสุ่ม



รูปที่ 1.2: การรบกวนที่มีความสมจริงมากขึ้น โดยมีขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วงจำกัดหนึ่ง ๆ

สัญญาณรบกวนที่มีข้อจำกัดของขนาด (นอร์มอนันต์) หรือมีข้อจำกัดของนอร์มสอง ได้โดยการลดค่านอร์มหนึ่ง ($\mathcal{L}_1$ norm) นอร์มสอง ($\mathcal{H}_2$ norm) หรือนอร์มอนันต์ ($\mathcal{H}_\infty$ norm) ของระบบ ซึ่งเป็นลักษณะหนึ่งของการออกแบบตัวควบคุมคงทนที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย เนื่องจากในการออกแบบตัวควบคุม เราพิจารณาค่านอร์มเหล่านี้เป็นค่าจุดประสงค์หรือนำมาใช้เป็นตัววัดสมรรถนะ (Performance measure) ของระบบควบคุมที่จะออกแบบ ค่าเหล่านี้จึงถูกเรียกว่า*ดรรชนีสมรรถนะ* (Performance index) ในการออกแบบตัวอย่างหนึ่งซึ่งเป็นที่รู้กันอย่างแพร่หลายคือค่านอร์มหนึ่งของระบบ

สำหรับระบบเชิงเส้นที่มีเสถียรภาพเมื่อถูกป้อนด้วยสัญญาณเข้าขนาดจำกัดย่อมให้สัญญาณออกที่มีขนาดจำกัดเช่นกัน และขนาดสูงสุดของสัญญาณออกในกรณีเลวที่สุด (Worst-case output) มีค่าเท่ากับผลคูณของขนาดสูงสุดของสัญญาณเข้าที่เป็นไปได้ กับนอร์มหนึ่ง[1] ของระบบเชิงเส้นนั้น เนื่องจากขนาดสูงสุดของสัญญาณเข้าที่เป็นไปได้ เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการจำลองการรบกวนซึ่งไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมที่ต้องการลดค่าสัญญาณออกกรณีเลวสุด จึงอาจทำได้โดยการลดค่านอร์มหนึ่งของระบบควบคุม ในที่นี้จึงถือว่านอร์มหนึ่งเป็นดรรชนีสมรรถนะของการออกแบบ อย่างไรก็ตามสำหรับกรณีที่สัญญาณเข้ามีข้อจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลงด้วยแล้วนั้น ขนาดสูงสุดของสัญญาณออกที่เป็นไปได้จะมีค่าต่ำลงกว่าในกรณีที่สัญญาณเข้ามีข้อจำกัดของขนาดอย่างเดียว เนื่องจากสัญญาณเข้าไม่สามารถที่จะเปลี่ยนค่าได้ทันทีทันใด จึงไม่อาจสร้างสัญญาณออกได้สูง (เลว) มากนัก ในปัจจุบันนี้ยังไม่มีรูปแบบปิด (Closed form) ของขนาดสูงสุดของสัญญาณออกที่เป็นไปได้ (ในเทอมของระบบและพารามิเตอร์ของสัญญาณเข้า) ดังนั้นดรรชนีสมรรถนะที่เราจะใช้จึงอยู่ในรูปของขนาดของสัญญาณออกโดยตรงดังที่จะกล่าวอีกครั้งอย่างละเอียดในตอนที่ 2.2

[1]นอร์มหนึ่ง ($\mathcal{L}_1$ norm) หรือ $||h(t)||_1$ ของระบบซึ่งมีผลตอบสนองอิมพัลส์ (Impulse response) เท่ากับ $h(t)$ มีค่าดังนี้

$$||h(t)||_1 \quad = \quad \int_0^\infty |h(t)|dt$$

และสำหรับสัญญาณเข้า $w \in \{w : |w(t)| \leq M, \forall t \geq 0\}$ ถ้านิยามสัญญาณออกของระบบที่เวลาใดสำหรับสัญญาณเข้า w หนึ่งๆ ให้เท่ากับ $z(t,w)$ จะได้ว่า

$$|z(t,w)| \quad \leq \quad M||h(t)||_1 \qquad \forall t \geq 0$$

1.1.3 การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

เนื่องจากดรรชนีสมรรถนะดังกล่าวมีลักษณะเป็นนอร์มกรณีเลวสุด (Worst-case norm) [4] ซึ่งเป็นนอร์มแบบหนึ่ง ดังนั้นดรรชนีสมรรถนะที่เราพิจารณานี้จึงมีความเป็นคอนเวกซ์ (Convexity) และอาจนำไปใช้ได้กับการออกแบบตัวควบคุมโดย*วิธีเชิงคอนเวกซ์* (Convex design method) [5, 4] โดยเทคนิควิธีที่จะนำมาใช้ออกแบบคือเทคนิค*การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์* (Convex optimization) หรือการหาค่าเหมาะที่สุดที่นำมาใช้กับปัญหาคอนเวกซ์นั่นเอง วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี (Ellipsoid algorithm) ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีที่นิยมนำมาใช้กับการแก้ปัญหาเชิงคอนเวกซ์วิธีหนึ่ง อันที่จริงแล้วกรรมวิธีพื้นฐานที่มักใช้ออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นมีอยู่ด้วยกัน 2 วิธี วิธีแรกมีพื้นฐานอยู่บนการหาค่าเหมาะที่สุดโดยใช้กรรมวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) คำนวณหาคำตอบ ในขณะที่วิธีที่สองใช้กระบวนการวิเคราะห์ (Analytical method) มาออกแบบ แต่สำหรับวิธีเชิงคอนเวกซ์นั้นได้รวมข้อดีของกรรมวิธีออกแบบตัวควบคุมสองชนิดเอาไว้ด้วยกัน กล่าวคือสามารถพิจารณาเงื่อนไขการออกแบบ (ทั้งในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่) ได้โดยตรงโดยไม่ต้องปรับเปลี่ยนหรือดัดแปลงเงื่อนไขการออกแบบดังกล่าวเช่นเดียวกับการออกแบบเชิงการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวแปรเสริม (Parameter optimization) และตัวควบคุมที่ออกแบบได้ก็จะทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพเช่นเดียวกับการออกแบบตัวควบคุมแบบเหมาะที่สุด (Optimal control design) การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ถือว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิผล เนื่องจากวิธีนี้สามารถหาคำตอบได้ก็ต่อเมื่อปัญหามีคำตอบเท่านั้น กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือวิธีนี้จะทำให้เราทราบว่าปัญหามีคำตอบหรือไม่ ถ้าปัญหาไม่มีคำตอบนั่นหมายถึงไม่มีตัวควบคุมตัวใดเลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการออกแบบ สำหรับคำตอบที่ได้จะเป็นผลเฉลยในวงกว้าง (Global solution) เนื่องจากความเป็นคอนเวกซ์ของปัญหา ที่สำคัญคือการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์นี้มีขั้นตอนวิธีที่เป็นระบบ (Systematic) และมีลำดับขั้นที่แน่นอน

แรงจูงใจหนึ่งในการเลือกใช้วิธีเชิงคอนเวกซ์ คือความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีของตัวประมวลผลสัญญาณควบคุม ซึ่งสามารถสร้างสัญญาณควบคุมด้วยกรรมวิธีที่ซับซ้อนได้ รวมถึงความก้าวหน้าทางคอมพิวเตอร์ทั้งฮาร์ดแวร์และซอฟท์แวร์ ที่สนับสนุนการวิเคราะห์ และสังเคราะห์ตัวควบคุมหรือระบบควบคุมที่ยุ่งยากในการคำนวณมากขึ้น และพัฒนาการของตัวตรวจวัดและตัวขับเร้าซึ่งทำให้สร้างระบบควบคุมที่มีความเที่ยงตรงและความแม่นยำสูงได้ด้วยต้นทุนที่ต่ำลง ทั้งนี้เนื่องจากวิธีเชิงคอนเวกซ์เป็นวิธีซึ่งอาศัยการคำนวณที่ค่อนข้างซับซ้อนและต้องการความแม่นยำ และตัวควบคุมที่ได้ (ตัวควบคุมเชิงเส้น) อาจมีอันดับค่อนข้างสูง

1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

ปัญหาการคำนวณค่าสูงสุดของสัญญาณออกของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา (Linear time-invariant system) ในกรณีที่สัญญาณเข้ามีข้อจำกัดของขนาด M และอัตราการเปลี่ยนแปลง D ที่ทราบค่า นั้น

ได้ศึกษาโดย Birch และ Jackson [6], Bongiorno Jr. [7] และ Lane [8] นอกจากนี้งานวิจัยของ Saridis และ Rekasius [9] ซึ่งพิจารณาเซตของสัญญาณเข้าในลักษณะเดียวกัน มิได้ใช้เกณฑ์สมรรถนะ (Performance criterion) ในเทอมของขนาดสูงสุดของสัญญาณออก แต่ใช้เกณฑ์สมรรถนะในเทอมของขนาดสูงสุดของดรรชนีสมรรถนะซึ่งเรียกว่า เกณฑ์ค่าผิดพลาด (Error criterion) ซึ่งมีลักษณะเป็นต้นทุนเวลาสุดท้าย (Terminal cost) แสดงดังนี้

$$E(T) \quad = \quad g(x(T), T) \tag{1.1}$$

เมื่อ T เป็นเวลาสุดท้ายที่พิจารณา เกณฑ์ค่าผิดพลาดดังกล่าวอาจอยู่ในรูปของพจน์กำลังสอง (Quadratic term) ของตัวแปรสถานะ (State variable) ของระบบเช่น

$$x_1^2(T) + x_2^2(T) + x_3^2(T)$$

หรืออาจอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้น (Linear combination) ของตัวแปรสถานะก็ได้ ซึ่งครอบคลุมถึงสัญญาณออกของระบบด้วย นอกจากการพิจารณาเซตของสัญญาณเข้าในลักษณะที่ถูกจำกัดขนาดและอนุพันธ์ด้วยค่า M และ D แล้วนั้น ยังมีกรณีพิเศษของเซตของสัญญาณเข้าซึ่งคำนวณได้ค่าดรรชนีสมรรถนะเป็นสูตร (Formula) ในรูปอย่างง่าย อันได้แก่กรณีที่ข้อจำกัดของอนุพันธ์ของสัญญาณเข้ามีค่าไม่เข้มงวด ($D \gg M$) และกรณีที่ข้อจำกัดของอนุพันธ์ของสัญญาณเข้ามีค่าเข้มงวดมากๆ ($D \ll M$) การหาค่าดรรชนีสมรรถนะในกรณีแรกซึ่งข้อจำกัดของสัญญาณเข้ามีเพียงข้อจำกัดขนาดเพียงอย่างเดียวนั้น เป็นปัญหาที่ศึกษากันมานานแล้วดังจะเห็นได้จาก [6, 10, 11] ส่วนหนึ่งในงานวิจัยของ Birch กับ Jackson ก็กล่าวถึงรูปแบบปิดของดรรชนีสมรรถนะในลักษณะนี้เช่นกัน ส่วนงานของ Howard กับ Rekasius [12] ซึ่งเป็นงานวิจัยก่อนหน้างานของ Saridis กับ Rekasius [9] ก็พิจารณาเซตของสัญญาณเข้าที่มีขนาดจำกัดอย่างเดียวร่วมกับการพิจารณาเกณฑ์ค่าผิดพลาดที่ได้กล่าวถึงข้างต้น สำหรับกรณีพิเศษชนิดที่สองซึ่งข้อจำกัดของสัญญาณเข้ามีเพียงข้อจำกัดอนุพันธ์เพียงอย่างเดียวนั้น Zakian ได้แสดงผลเฉลยไว้ใน [13] โดยมีเงื่อนไขว่าสัญญาณเข้าเริ่มต้นต้องเป็นศูนย์ และผลตอบสนองสัญญาณขั้น (Step response) ต้องมีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อเวลาเข้าสู่อนันต์ ถึงแม้ในกรณีพิเศษทั้งสองจะมีผลเฉลยซึ่งเป็นรูปแบบปิด แต่ในกรณีที่สัญญาณเข้ามีทั้งข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์นั้น ยังไม่มีผู้ใดคำนวณรูปแบบปิดของค่าดรรชนีสมรรถนะไว้เลย

งานวิจัยของ Birch กับ Jackson ในกรณีที่พิจารณาทั้งข้อจำกัด M และ D นั้น มีแนวทางในการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะโดยการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด (Maximal input) หรือสัญญาณเข้าเลวสุด (Worst-case input) ซึ่งเมื่อพิจารณาจากสัญญาณเข้าทุกๆ สัญญาณที่เป็นไปได้แล้ว สัญญาณเข้าสูงสุดตัวนี้จะให้ค่าสัญญาณออกที่มีค่ามากที่สุด (ในขณะเวลาหนึ่งๆ) ซึ่งค่าสัญญาณออกสูงสุด (Maximal output) หรือสัญญาณออกเลวสุด (Worst-case output) นี้ก็จะเป็นค่าดรรชนีสมรรถนะที่ต้องการ Birch และ Jackson ได้แสดงเงื่อนไขต่างๆ ซึ่งแสดงลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุด และพยายามค้นหาและสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเหล่านั้น (เมื่อได้สัญญาณเข้าดังกล่าวมาแล้ว ก็สามารถคำนวณสัญญาณออกสูงสุดได้โดยคำนวณค่าปริพันธ์ (Integration) เพื่อหาสังวัตนาการ (Convolution) ของสัญญาณเข้านั้นกับระบบ) เงื่อนไขที่ Birch และ Jackson ให้ไว้นั้นเป็นเพียงเงื่อนไขเพียงพอสำหรับสัญญาณเข้าสูง

สุดเท่านั้น ดังนั้นวิธีของทั้งสองยังมีปัญหาอยู่ นั่นคือในบางกรณีจะไม่สามารถหาสัญญาณเข้าสูงสุดที่สอดคล้องเงื่อนไขได้ ทั้งๆ ที่สัญญาณเข้าสูงสุดมีอยู่จริง จากนั้น Birch และ Jackson ได้พิจารณากรณีระบบมีอันดับเท่ากับสอง และแบ่งระบบดังกล่าวเป็นสองประเภทคือ ประเภทที่ต้องพิจารณาสัญญาณสูงสุดเข้าจากเงื่อนไขที่ทั้งสองได้ให้ไว้ และประเภทที่สัญญาณออกสูงสุดอาจคำนวณจากสูตรได้โดยตรง แล้วจึงพัฒนาโปรแกรมเพื่อคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบอันดับสอง โดยแยกประเภทของระบบก่อนแล้วจึงคำนวณค่าสัญญาณออกสูงสุดตามแต่ละประเภท นอกจากนี้ทั้งสองได้นำเสนอวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดในกรณีทั่วไปเช่นกัน อย่างไรก็ตามกรรมวิธีที่ Birch และ Jackson ได้นำเสนอนั้นค่อนข้างซับซ้อน และไม่กระจ่างในรายละเอียดบางจุด อันที่จริงแล้วกรรมวิธีการสร้างสัญญาณเข้าในกรณีทั่วไปของทั้งคู่ดูเหมือนยังอธิบายไม่จบสมบูรณ์ อีกทั้งผู้แต่งทั้งสองก็มิได้แสดงให้เห็นว่ากรรมวิธีที่นำเสนอนั้นสามารถสร้างสัญญาณเข้าซึ่งเป็นสัญญาณเข้าสูงสุดจริง

ใน [14] Jackson ได้ประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาจาก [6] มาควบคุมระบบอันดับสอง ซึ่งเป็นระบบควบคุมระดับน้ำ และใช้การควบคุมแบบพีไอ (PI) การรบกวนในระบบคืออัตราการไหลของน้ำที่เข้ามาในระบบ ซึ่งมีข้อจำกัดของขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลง สัญญาณออกที่พิจารณาคือระดับน้ำ สัญญาณควบคุมซึ่งเป็นอัตราการไหลแบบหนึ่ง และอัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณควบคุมดังกล่าว จากนั้น Jackson ได้แสดงคอนทัวร์ (Contour) ของค่าสัญญาณออกสูงสุด (ซึ่งก็คือดรรชนีสมรรถนะ) ของสัญญาณออกแต่ละชนิด เทียบกับค่าอัตราขยายสัดส่วน (Proposional gain) และช่วงเวลาการคำนวณค่าปริพันธ์ (Integral time) แล้วจึงใช้คอนทัวร์ดังกล่าวมาพิจารณาออกแบบตัวควบคุม

เงื่อนไขที่เป็นลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดได้พิจารณาอยู่ใน [10] เช่นกัน โดย Horowitz ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นของสัญญาณเข้าสูงสุดในเซตของสัญญาณเข้าที่มีข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ไว้ และแสดงให้เห็นว่ามีสัญญาณเข้าเพียงตัวเดียวเท่านั้นในเซตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว จึงสรุปได้ว่าสัญญาณเข้าใดๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวจะเป็นสัญญาณเข้าสูงสุดโดยปริยาย อย่างไรก็ตาม Horowitz ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ว่าเงื่อนไขจำเป็นดังกล่าวเป็นเงื่อนไขเพียงพอด้วย

Chang [15] ได้พิจารณาการควบคุมเวลาเหมาะที่สุด (Time optimal control) ของระบบเชิงเส้นเมื่อสัญญาณควบคุมถูกจำกัดขนาดและอนุพันธ์ Chang ได้พิจารณาปัญหาการหาค่าสัญญาณออกสูงสุดเป็นเพียงปัญหาย่อย แต่ก็ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นสำหรับสัญญาณเข้าสูงสุดไว้ นอกจากนี้ Bongiorno [7] ได้แสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขของ Chang เป็นเงื่อนไขเพียงพอเช่นกัน และยังให้เงื่อนไขที่สัญญาณเข้าสูงสุดมีอยู่เพียงสัญญาณเดียว (Uniqueness condition) อย่างไรก็ตามทั้งสองไม่ได้กล่าวถึงวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด

โดยสรุปแล้วงานของ Horowitz, Chang และ Bongiorno เพียงแต่ให้เงื่อนไขจำเป็น และ/หรือ เงื่อนไขเพียงพอไว้เท่านั้น แต่มิได้นำเสนอวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดจากเงื่อนไขดังกล่าว ส่วนเงื่อนไขเพียงพอในงานของ Birch และ Jackson นั้นยังหละหลวมอยู่ และวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดของทั้งสองก็ยังมีความคลุมเครืออยู่เช่นกัน ต่อจากนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่ได้นำเสนอวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดไว้ด้วย ซึ่งเป็นงานของ Saridis กับ Rekasius [9] และงานของ Lane [8]

ดังที่กล่าวไปแล้ว Saridis และ Rekasius [9] ได้พิจารณาเกณฑ์ค่าผิดพลาดดังสมการ (1.1) แทนที่จะพิจารณาแต่เพียงสัญญาณออกของระบบ อย่างไรก็ตามทั้งสองได้พิจารณาเซตของสัญญาณเข้าที่มีข้อ

จำกัดของขนาดและอนุพันธ์เช่นกัน ปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะถูกกำหนดรูปแบบใหม่ (Reformulate) ในลักษณะของปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด (Optimal control) คล้ายกับปัญหาของ Chang แต่มีเกณฑ์สมรรถนะเป็นต้นทุนเวลาสุดท้าย และสัญญาณควบคุมกับตัวแปรสถานะตัวหนึ่ง (ซึ่งเป็นปริพันธ์ของสัญญาณควบคุมนั้น) ถูกจำกัดขนาด ปัญหาที่กำหนดได้เป็นปัญหาค่าขอบเขตสองจุด (Two point boundary value problem: TPBVP) Saridis และ Rekasius ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นสำหรับสัญญาณเข้าสูงสุด (ในที่นี้คือสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุด) ซึ่งอยู่ในรูปของสมการพลวัต เงื่อนไขค่าขอบเขตและเงื่อนไขมุมของไวแยร์สตราส-เอิร์ดแมน (Weierstrass-Erdman corner conditions) จากนั้นผู้แต่งทั้งสองได้นำเอาวิธีเชิงวิเคราะห์มาประสมกับวิธีเชิงตัวเลข [2] เพื่อคำนวณหาสัญญาณเข้าสูงสุด โดยวิเคราะห์เวลาการสวิตช์ (Switching time) หรือเวลาที่สัญญาณเข้าเกิดการหักมุม จากเงื่อนไขมุมที่ได้ และนำไปพิจารณาร่วมกับขั้นตอนวิธีเชิงตัวเลขที่คิดขึ้นเพื่อหาคำตอบของปัญหา

วิธีเชิงตัวเลขที่ Saridis และ Rekasius นำเสนอมีลักษณะเป็นวิธีวนซ้ำ (Iterative method) คล้ายกับวิธีเกรเดียนท์ (Gradient) เงื่อนไขมุมที่ทั้งสองได้เสนอไว้เพื่อคำนวณเวลาสวิตช์นั้น นับเป็นเงื่อนไขที่ค่อนข้างสมบูรณ์ แต่ผู้แต่งทั้งสองกลับวิเคราะห์เงื่อนไขดังกล่าวอย่างคร่าวๆ จนเกินไป ทำให้แนวทางการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดที่ได้นำเสนอจำกัดอยู่แค่เพียงระบบที่มีคาบการแกว่งมากกว่าค่า $\frac{2M}{D}$ อีกนัยหนึ่งคือค่าข้อจำกัดอนุพันธ์ D ของสัญญาณเข้า จะต้องมีค่าสูงพอจึงจะใช้ขั้นตอนวิธีที่เสนอไว้ได้ นอกจากนี้การพิจารณาเกณฑ์ค่าผิดพลาดสูงสุดแทนการพิจารณาสัญญาณออกสูงสุด ทำให้โครงสร้างของปัญหาเปลี่ยนไป ดังนั้นสำหรับเกณฑ์ค่าผิดพลาดบางลักษณะ ปัญหาที่ได้อาจไม่ใช่ปัญหาคอนเวกซ์ และคำตอบที่ได้จึงขึ้นกับจุดเริ่มต้น (Initial point) ที่เลือก ซึ่งอาจเป็นเพียงค่าต่ำสุดเฉพาะที่ (Local minimum) เท่านั้น การแก้ปัญหาจึงต้องมีขั้นตอนในการเดาสุ่มจุดเริ่มต้น (Trial and error) และเปรียบเทียบคำตอบที่ได้ในแต่ละครั้งของการเดา แล้วเลือกเอาคำตอบที่ต่ำที่สุด แต่จุดที่เป็นปัญหามากที่สุดคือขั้นตอนวิธีที่ทั้งสองได้นำเสนอนั้นยังไม่สามารถพิสูจน์การลู่เข้าได้ (Convergence) ดังนั้นจึงไม่อาจรับประกันได้ว่าวิธีนี้จะลู่เข้าทุกกรณี

ใน [8] Lane ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของสัญญาณเข้าที่เป็นสัญญาณเข้าสูงสุดและพิสูจน์ให้เห็นจริง จากนั้นได้นำเสนอวิธีสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด Lane เริ่มจากการสร้างฟังก์ชันการสวิตช์ (Switching function) ด้วยกฎชุดหนึ่ง จากนั้นจึงสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดจากฟังก์ชันการสวิตช์ที่สร้างขึ้นอีกที สำหรับฟังก์ชันการสวิตช์ที่ Lane นำเสนอ ได้อนุมานจากอาร์กิวเมนต์ของการโปรแกรมเชิงพลวัต (Dynamic programming argument) [18, 19] อย่างไรก็ตามมิได้มีการพิสูจน์ที่มาของกฎดังกล่าวหรือวิธีการสร้างสัญญาณเข้าให้ได้เป็นสัญญาณเข้าสูงสุด แต่ได้ใช้วิธีอธิบายและให้เหตุผล (Describe and justify) ว่าสัญญาณเข้าที่สร้างด้วยกฎและวิธีดังกล่าวจะเป็นสัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ให้ไว้ในตอนแรก กล่าวอีกนัยหนึ่งคือไม่ได้มีการแสดงให้เห็นว่าสัญญาณเข้าสูงสุดทุกตัวจะสร้างได้ด้วยวิธีนี้ นอกจากนี้ Lane ได้ยอมรับว่าขั้นตอนการอนุมานฟังก์ชันการสวิตช์ยังอยู่บนพื้นฐานของการ

---

[2] เราพบว่าการแก้ปัญหาไม่สามารถใช้วิธีเชิงตัวเลขเพียงอย่างเดียวได้ เนื่องจากปัญหาที่กำหนดได้มีลักษณะของผลเฉลยเอกฐานอยู่ (Singular solution) ซึ่งเป็นลักษณะที่สัญญาณควบคุมมีค่าเป็นศูนย์ตลอดช่วงระยะเวลาหนึ่ง ปัญหาในลักษณะนี้ต้องทราบข้อมูลของเวลาการสวิตช์ (Switching time) ซึ่งต้องใช้การวิเคราะห์โดยตรงเพื่อค้นหาค่าเวลาดังกล่าว Sage และ White [16] และ Kirk [17] ได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาค่าขอบเขตสองจุด ซึ่งสัญญาณควบคุมมีข้อจำกัดของขนาดหรือตัวแปรสถานะมีข้อจำกัดของขนาด โดย Sage และ White ได้แสดงวิธีการคำนวณคำตอบเชิงตัวเลขโดยละเอียดไว้ด้วย อย่างไรก็ตาม Sage, White และ Kirk มิได้มีการพิจารณากรณีที่ทั้งสัญญาณควบคุมและตัวแปรสถานะมีข้อจำกัดของขนาดพร้อมกัน

คาดคะเน (Conjecture) และยังไม่เข้มงวด (Not rigorous) นัก

ในตอนท้ายของงานวิจัย Lane ได้ให้ตัวอย่างการออกแบบระบบโดยอาศัยค่าดรรชนีสมรรถนะที่นำเสนอ ระบบตัวอย่างที่นำมาประยุกต์ใช้คือระบบเครื่องกลึงไม้ (Wood-turning machine) สัญญาณออกที่สนใจคือค่าความผิดพลาดในการกลึงไม้ ซึ่งจะต้องรักษาให้มีขนาดจำกัดที่ค่าหนึ่ง (นั่นหมายถึงดรรชนีสมรรถนะต้องต่ำกว่าค่าๆ นั้น) สัญญาณอ้างอิงคือระดับของคานแม่แบบของเครื่องกลึง (Sander beam) และสัญญาณเข้าซึ่งถือเป็นการรบกวนคืออัตราเร็วของระดับคานแม่แบบในการที่เคลื่อนขึ้นลง ซึ่งเป็นการรบกวนที่มีขนาดจำกัด ส่วนอนุพันธ์ของอัตราเร็วของระดับคานแม่แบบนี้ (ซึ่งก็คืออัตราเร่งของระดับแม่แบบ) ก็มีขนาดจำกัดเช่นกัน Lane ได้ออกแบบด้วยวิธีอสมการ และเป้าหมายในการออกแบบคือการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวขับเร้า (Actuator) ของเครื่องกลึงสองชนิด ระหว่างตัวขับเร้าเชิงกลไฟฟ้า (Electro-mechanical) และตัวขับเร้าแบบเซอร์โวไฮดรอลิก (Servo hydraulic) การออกแบบด้วยวิธีดังกล่าวสามารถที่จะกำหนดรูปแบบของตัวควบคุมได้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากปัญหาที่ได้มิใช่ปัญหาคอนเวกซ์ แต่เป็นโปรแกรมไม่เชิงเส้น (Nonlinear programming) ซึ่งใช้ขั้นวิธีเชิงตัวเลขมาค้นหาคำตอบ ดังนั้นถ้าหากไม่สามารถหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวได้ ก็มิอาจบอกได้ว่าปัญหาดังกล่าวไม่มีคำตอบ วิธีการออกแบบดังกล่าวจึงยังขาดประสิทธิผลอยู่บางส่วน

นอกจากงานวิจัยเกี่ยวกับดรรชนีสมรรถนะแล้ว ยังมีงานวิจัยส่วนหนึ่ง [4, 20, 21] ที่กล่าวถึงขอบเขตบน (Upper bound) และขอบเขตล่าง (Lower bound) ของดรรชนีสมรรถนะดังกล่าว Zakian [21] ได้ให้สูตรคำนวณขอบเขตบนของดรรชนีสมรรถนะซึ่งคำนวณได้ง่าย และในการออกแบบหากสามารถทำให้ขอบเขตบนต่ำกว่าเงื่อนไขที่ระบุ (Specification) ได้แล้วนั้น ก็เพียงพอที่จะบอกว่าดรรชนีสมรรถนะย่อมต่ำกว่าเงื่อนไขที่ระบุด้วย อย่างไรก็ตามการใช้ขอบเขตบนมาออกแบบแทนในลักษณะนี้ย่อมก่อให้เกิดการอนุรักษ์ขึ้น นอกจากนี้ใน [20] Schneider ได้เสนอขอบเขตล่างของดรรชนีสมรรถนะ โดยพิจารณาในโดเมนความถี่กล่าวคือให้เซตของสัญญาณเข้าที่เป็นสับเซตของเซตที่เราพิจารณา นั่นคือเซตของสัญญาณเข้ารูปไซน์ (Sinusoidal input) ที่มีข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ และใน [4] Boyd และ Barratt ได้เสนอวิธีการคำนวณขอบเขตบนและขอบเขตล่างของดรรชนีสมรรถนะของระบบใดๆ ในรูปของนอร์มหนึ่งของระบบนั้นซึ่งถ่วงน้ำหนักด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสม ทำให้ได้ขอบเขตบนซึ่งมีค่าสามเท่าของขอบเขตล่าง และค่าประมาณของดรรชนีสมรรถนะคือค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (Geometric average) ของขอบเขตบนและขอบเขตล่างดังกล่าว

สำหรับงานวิจัยทางด้านการออกแบบด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์นั้นมีอยู่มากมายเช่น [5, 4, 22, 23, 24] แต่ได้นำเสนอครั้งแรกใน [5] และเสนอโดยละเอียดใน [4] โดย Boyd และคณะ นอกจากนี้ใน [25, 26] Khaisongkram และ Banjerdpongchai ได้พัฒนาโปรแกรมช่วยออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ ซึ่งได้รวมเอาการลดอันดับตัวควบคุม และส่วนเชื่อมต่อกับผู้ใช้เชิงกราฟฟิก (Graphical user interfaces: GUIs) เข้าไว้ด้วย อย่างไรก็ตามยังมิได้มีการใช้วิธีออกแบบเชิงคอนเวกซ์นี้กับดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาเลย

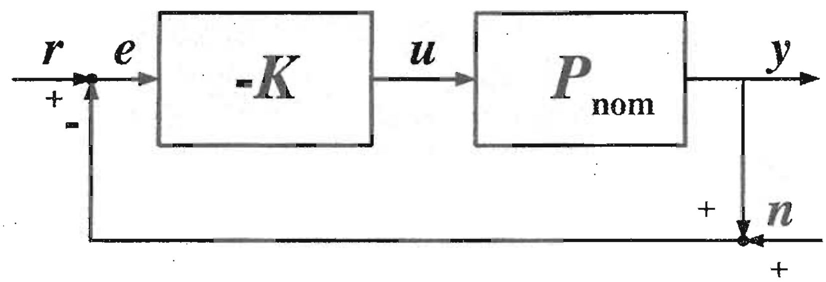
งานวิจัยทางด้านหอกลั่นแยกสารสองชนิดในปัจจุบัน มีทั้งงานทางด้านระบบควบคุมสำหรับหอกลั่นซึ่งใช้ระบบหอกลั่นเป็นกรณีศึกษา อันได้แก่ [27, 28, 29, 30, 31, 32] และงานวิจัยที่กล่าวถึงพล

วัดและการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหอกลั่นโดยตรง ซึ่งส่วนใหญ่เป็นงานวิจัยทางวิศวกรรมควบคุมกระบวนการ (Process control engineering) เช่นงานวิจัยของ Wood และ Berry [33] ที่ได้คำนวณแบบจำลองของหอกลั่นแยกสารสองชนิดโดยใช้อันดับต่ำ และหนังสือของ Luyben [34] ซึ่งได้ให้ความรู้ในเรื่องพลวัตของหอกลั่นแยกสารสองชนิดในอุดมคติ (Ideal binary distillation column) ไว้โดยละเอียด นอกจากนี้ Luyben ยังได้เป็นบรรณาธิการสำหรับหนังสือเกี่ยวกับการควบคุมกระบวนการกลั่นในทางปฏิบัติ [35] ซึ่งได้อธิบายรายละเอียดของโครงสร้างการควบคุมหอกลั่นหลายรูปแบบ ทั้งนี้ยังมีหนังสือที่มีข้อมูลของระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิดเช่นหนังสือของ Morari และ Zafiriou [36] หนังสือของ Skogestad และ Postlethwaite [37] และใน [38, 39, 40, 41, 42, 43] งานวิจัยทางด้านหอกลั่นโดยทั่วไปมักจำลองการรบกวนแบบสัญญาณขั้นหรือสัญญาณรบกวนขาว แต่ยังไม่มีงานวิจัยชิ้นใดที่พิจารณาการรบกวนในลักษณะที่กล่าวถึงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลย

1.3 วัตถุประสงค์

ดังที่ได้กล่าวไว้ในตอนที่ 1.1.1 ตัวควบคุมอาจมีประสิทธิภาพมากขึ้นถ้าเราจำลองการรบกวนที่เกิดขึ้นในระบบให้แม่นยำขึ้น โดยจำลองในลักษณะของสัญญาณที่มีข้อจำกัดของขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นจุดประสงค์หลักของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือเพื่อคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ ซึ่งนิยามโดยค่าสูงสุดของสัญญาณออกเมื่อสัญญาณเข้าถูกจำกัดขนาดและอนุพันธ์ ในที่นี้เราจะพิจารณาตั้งแต่การคิดค้นวิธีการและแนวทางในการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะซึ่งมีหลักการที่พิสูจน์ได้โดยตรง รวมถึงการพัฒนาโปรแกรมที่ใช้คำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะดังกล่าว และการทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น เราต้องการเน้นว่าถึงแม้ Lane ได้คิดค้นวิธีคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะนี้ไว้แล้ว [8] แต่วิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดยังอยู่บนพื้นฐานของการคาดเดา การสร้างกฎที่ซับซ้อน แล้วจึงแสดงให้เห็นว่าผลที่ได้ตรงกับกฎที่ตั้งไว้ จึงเป็นการให้เหตุผลที่ยังไม่สมบูรณ์นัก เราจึงต้องการค้นหาวิธีใหม่ซึ่งพิสูจน์ได้อย่างสมบูรณ์ การกำหนดรูปแบบปัญหา (Problem formulation) ในวิธีใหม่นี้อยู่บนพื้นฐานของการแก้ปัญหาการควบคุมระบบเหมาะที่สุด (Optimal system control) โดยใช้หลักการค่าสูงสุดของ Pontryagin (Pontryagin's maximum principle) มาหาเงื่อนไขจำเป็นในการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ แล้วจากนั้นจึงวิเคราะห์ (Analitical method) เงื่อนไขจำเป็นที่ได้โดยตรง เพื่อกำหนดขั้นตอนในการคำนวณดรรชนีสมรรถนะดังกล่าวและนำไปใช้ในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป อย่างไรก็ตามแม้ว่าวิธีใหม่นี้จะแตกต่างกับวิธีเดิม แต่เงื่อนไขจำเป็นในการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะและผลการคำนวณควรจะถูกต้องตรงกัน

นอกจากนี้เพื่อแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้ค่าดรรชนีสมรรถนะในการสังเคราะห์ระบบควบคุม จุดประสงค์รองจึงเป็นการนำค่าดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณได้ มาใช้จริงในการออกแบบตัวควบคุม โดยเจาะจงใช้วิธีการออกแบบเชิงคอนเวกซ์ ซึ่งเป็นวิธีที่มีประสิทธิผลดังที่ได้กล่าวไปแล้วในตอนที่ 1.1.3 แม้ว่าการสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์จะไม่สามารถกำหนดรูปแบบของตัวควบคุมได้ (เทียบกับการออกแบบทั่วๆ ไปรวมทั้งวิธีที่นำเสนอโดย Lane ใน [8] ด้วย) แต่ข้อมูลที่ได้จากการออกแบบบ่งบอกถึงขีดจำกัดของสมรรถนะ (Limit of performance) ซึ่งอาจใช้เป็นบรรทัดฐานสำหรับกำหนดเกณฑ์การออกแบบ



รูปที่ 1.3: แผนภาพระบบควบคุมแบบแผนเดิม

ในการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีอื่นๆ ต่อไป ถึงแม้วิธีการออกแบบเชิงคอนเวกซ์จะเป็นที่รู้จักกันพอสมควร แต่กระบวนการที่ใช้ค่อนข้างซับซ้อนซึ่งต้องใช้เทคนิคจำพวกการหาค่าเหมาะที่สุดแบบวนซ้ำ (Iterative optimization) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องพัฒนาโปรแกรมช่วยออกแบบ (Computer-aided design program) เพื่อใช้ในสังเคราะห์ระบบควบคุมด้วย ตัวควบคุมที่จะสังเคราะห์เป็นตัวควบคุมพลวัตเชิงเส้นทั่วไป และใช้โครงสร้างการควบคุมแบบแผนเดิม (Classical control) ดังรูปที่ 1.3 สำหรับระบบที่จะนำมาสังเคราะห์ตัวควบคุมคือระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด (Binary distillation column) ซึ่งเป็นระบบที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย และมีการประยุกต์ใช้จริงในอุตสาหกรรมเคมีและปิโตรเคมี ผลการออกแบบตัวควบคุมที่ได้จึงอาจนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อนหน้าได้ สำหรับดรรชนีสมรรถนะจริงในระบบหอกลั่นที่เราพิจารณาคือ ค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอ (Top & bottom composition) ซึ่งเป็นสัญญาณออกของระบบที่ต้องการลดค่าให้น้อยที่สุด และอัตราการป้อนกลับที่ยอดหอกับอัตราการการต้มซ้ำที่ฐานหอ ซึ่งเปรียบเสมือนสัญญาณควบคุมของระบบซึ่งต้องรักษาให้อยู่ในขอบเขตที่กำหนด สำหรับการรบกวนที่เข้ามาในระบบคืออัตราการป้อนเข้าของวัตถุดิบกลางหอ ซึ่งแน่นอนว่าเป็นการรบกวนที่มีทั้งข้อจำกัดของขนาดและข้อจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลงด้วย

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. คิดค้นหาวิธีการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะอันได้แก่ขนาดสัญญาณออกสูงสุดของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา และเป็นระบบเวลาต่อเนื่อง เมื่อขนาดของสัญญาณเข้ามีขอบเขต และอนุพันธ์ของสัญญาณเข้ามีขอบเขต
2. เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้คำนวณดรรชนีสมรรถนะในข้อ 1
3. สังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงเส้นสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิด โดยฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับในการออกแบบ กำหนดในเทอมของดรรชนีสมรรถนะในข้อ 1

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ค้นคว้าและศึกษาบทความที่เกี่ยวกับการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ รวมทั้งการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะที่เกี่ยวข้อง ดังเช่นค่าดรรชนีสมรรถนะของกรณีพิเศษที่ $D \gg M$ หรือ $D \ll M$ ดังที่กล่าวไว้ในตอนที่ 1.2

2. ค้นหาวิธีการกำหนดรูปแบบปัญหาทางคณิตศาสตร์จากปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ และศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง วิธีการที่ได้ศึกษานั้นมีทั้ง การแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปปัญหาคู่กัน (Dual problem) และการแยกส่วนโดยการแปลงให้อยู่ในรูปปัญหาคู่กัน (Dual decomposition) การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงเส้นในมิติอนันต์ (Infinite dimension linear programming) การแก้ปัญหาในระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete time) วิธีต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่านอร์มหนึ่ง การย้ายปัญหาไปคำนวณในปริภูมิคู่กัน (Dual space) การคำนวณขอบเขตบนและขอบเขตล่างของดรรชนีสมรรถนะในลักษณะต่างๆ และสุดท้ายแนวทางที่เลือกใช้คือแนวทางการกำหนดรูปแบบปัญหาแบบการควบคุมแบบเหมาะที่สุด ด้วยหลักการค่าสูงสุดของปอนตรียากิน (Pontryagin's maximum principle) อันที่จริงแล้วแนวทางสุดท้ายนี้ยังแบ่งวิธีการกำหนดรูปแบบปัญหาออกไปอีกหลายรูปแบบ

3. ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาที่กำหนดได้ ซึ่งมีทั้งวิธีเชิงตัวเลข และวิธีเชิงวิเคราะห์ และความเป็นไปได้ในการนำวิธีทั้งสองมาแก้ปัญหาและพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์

4. แก้ปัญหาที่กำหนดขึ้นโดยได้เลือกใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ มาพิจารณาหาเงื่อนไขจำเป็นของสัญญาณเข้าสูงสุด และคิดค้นวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดเมื่อทราบข้อมูลระบบและค่า M, D

5. นำวิธีที่พัฒนาขึ้นมาเขียนเป็นโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ ในที่นี้เราเลือกเขียนโปรแกรมบน MATLAB เนื่องจาก MATLAB เป็นโปรแกรมที่ใช้ทั่วไปในการศึกษาทางด้านระบบควบคุม ถึงแม้จะมีการวนรอบคำนวณที่ช้ากว่าภาษา C หรือ Fortran ก็ตาม

6. ทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น โดยใช้วิธีการทดสอบสองวิธีคือ วิธีขยายเวลาสุดท้ายในการคำนวณดรรชนีสมรรถนะ และอีกวิธีคือเลือกระบบมาคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะโดยใช้ค่า M และ D หลายๆ ค่า แล้วนำมาเทียบกับขอบเขตบนของดรรชนีสมรรถนะที่ค่า M และค่า D เดียวกัน

7. ศึกษาวิธีการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ และคำนวณเกรเดียนท์ย่อย[3] (Subgradient)

---

[3]ให้ $x \in X$ โดยที่ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space) ใดๆ ซึ่งอาจมีมิติจำกัดหรือมิติอนันต์ก็ได้ เกรเดียนท์ย่อย $\phi^{sg}(x)$ ของฟังก์ชันคอนเวกซ์ $\phi(x)$ ใดๆ คือฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) ที่สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$\phi(x_2) \quad \geq \quad \phi(x_1) + \phi^{sg}(x_2 - x_1)$$

เมื่อ $x_1, x_2 \in X$ เราทราบกันดีแล้วว่า*ค่าลบ*ของเกรเดียนท์ของฟังก์ชันใดๆ (ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์) จะชี้ทิศทางที่ฟังก์ชันนั้นลาดลง (Descent direction) แต่สำหรับ*ค่าลบ*ของเกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชันคอนเวกซ์จะชี้ไปในครึ่งระนาบ (Half plane) ที่มีจุดต่ำสุดอยู่เท่านั้นโดยไม่จำเป็นต้องเป็นทิศทางที่ลาดลง อันที่จริงแล้วสำหรับฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด เกรเดียนท์ย่อยและเกรเดียนท์จะเป็นค่าเดียวกัน แต่สำหรับฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกจุด และฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่ไม่มีรูปแบบปิดนั้น (ดังเช่นฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นต้น) ค่าเกรเดียนท์ย่อยจะเป็นประโยชน์อย่างมากเพื่อนำไปใช้ในการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

ของดรรชนีสมรรถนะ (ซึ่งเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์) เนื่องจากต้องนำมาใช้เป็นฟังก์ชันค่าจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับในการออกแบบด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์

8. ศึกษาระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด ตั้งแต่ลักษณะทั่วไปของระบบควบคุมหอกลั่น วิธีการคำนวณหาแบบจำลองของระบบและข้อสมมติที่ใช้ (Assumption) แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของระบบ (มีลักษณะไม่เชิงเส้น) จากนั้นจึงประมาณแบบจำลองของระบบให้เป็นเชิงเส้น

9. จำลองการรบกวนที่เข้าระบบหอกลั่น ด้วยแนวคิดที่ว่าการรบกวนต้องมีข้อจำกัดของขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลง

10. สร้างแบบจำลองของหอกลั่นแยกสารสองชนิด (แบบไม่เชิงเส้น) ด้วย MATLAB/Simulink เพื่อใช้ในการจำลอง

11. เขียนโปรแกรมช่วยออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ โดยใช้ดรรชนีสมรรถนะที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และคำนวณตัวควบคุมสำหรับระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด รวมทั้งคำนวณขีดจำกัดสมรรถนะของค่าเบี่ยงเบนของทั้งความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอ และฐานหอ

12. จำลองผลตัวควบคุมที่ออกแบบได้กับระบบไม่เชิงเส้นของหอกลั่น แล้วจึงวิเคราะห์และประเมินผลของการควบคุม

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ความรู้พื้นฐานและเทคนิคทางคณิตศาสตร์ ทั้งบทนิยามของดรรชนีสมรรถนะ การกำหนดรูปแบบปัญหา การหาเงื่อนไขจำเป็นของสัญญาณเข้าสูงสุด รวมทั้งการวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหา ได้แสดงไว้อย่างละเอียดและอาจนำไปขยายผลเพื่อใช้กับกรณีที่สัญญาณเข้ามีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น หรือค่าสุดท้าย กรณีระบบเชิงเส้นหลายตัวแปร (Multivariable linear systems) กรณีระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง กรณีที่ข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ของสัญญาณเข้าแปรผันตามเวลา หรือแม้แต่กรณีที่สัญญาณเข้ามีข้อจำกัดของอนุพันธ์อันดับสูงกว่าหนึ่ง

2. เนื่องจากโปรแกรมการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะที่พัฒนาขึ้น มิได้จำกัดการใช้อยู่กับระบบหอกลั่นแต่เพียงเท่านั้น แต่อาจใช้กับระบบใดๆ ก็ได้ และค่าจำกัดของสัญญาณเข้า M และ D จะมีค่าเท่าใดก็ได้เช่นกัน จึงนับเป็นประโยชน์กับงานวิจัยในอนาคตที่ต้องการเลือกใช้ดรรชนีสมรรถนะในลักษณะนี้ เพียงแต่ใส่ค่าระบบที่พิจารณาและค่า M, D ก็จะได้ค่าดรรชนีสมรรถนะ สัญญาณเข้าสูงสุด และค่าอื่นๆ ที่อาจเป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์ค่าดรรชนีสมรรถนะด้วย

3. ในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิด เราได้พิจารณาขีดจำกัดสมรรถนะของค่าเบี่ยงเบนของทั้งความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอ และฐานหอพร้อมๆกัน กล่าวโดยละเอียดคือเมื่อพิจารณาค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอ (ฐานหอ) ที่ค่าหนึ่งๆ จะสามารถลดค่าเบี่ยง

เบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ฐานหอ (ยอดหอ) ได้ถึงขีดจำกัดค่าหนึ่งเท่านั้น (นั่นหมายถึงถ้าต้องการลดค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอ (ฐานหอ) ให้ต่ำลง ก็ย่อมต้องยอมให้ค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ฐานหอ (ยอดหอ) มีค่าสูงขึ้นจากเดิมด้วย) ข้อมูลที่ได้นี้นับว่ามีประโยชน์มาก ทำให้ทราบว่าเราอาจประนีประนอม (Compromise) ค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ทั้งสองได้มากน้อยเท่าไร

4. ดังที่ได้กล่าวไว้ในตอนที่ 1.1.1 ว่าการจำลองการรบกวนที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ มีความสมจริงและเข้ากันกับการรบกวนจริงที่เกิดขึ้นในระบบบางระบบ ดังนั้นแนวทางการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จึงอาจใช้ได้กับการออกแบบระบบควบคุมอื่นๆ อีกที่มีการรบกวนในลักษณะคล้ายกัน เช่น ระบบควบคุมอุณหภูมิ ระบบควบคุมเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน ระบบควบคุมระดับน้ำ ระบบควบคุมเตาปฏิกรณ์เคมี และระบบควบคุมเซลล์เชื้อเพลิง เป็นต้น

1.7 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์

ในบทถัดไปเราได้อธิบายนิยามของดรรชนีสมรรถนะอย่างละเอียด รวมถึงนิยามของปริภูมิสัญญาณเข้าที่พิจารณา จากนั้นจึงวิเคราะห์สมบัติบางประการของดรรชนีสมรรถนะอันได้แก่ เงื่อนไขซึ่งทำให้ดรรชนีสมรรถนะมีค่าจำกัด ความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะ ขอบเขตบนบางชนิดของดรรชนีสมรรถนะ สมบัติเหล่านี้ทำให้เข้าใจความหมายของดรรชนีสมรรถนะมากขึ้น ต่อจากนั้นในบทที่ 3 เราได้แสดงการคำนวณดรรชนีสมรรถนะโดยเริ่มจากการกำหนดรูปแบบปัญหา ซึ่งแบ่งออกเป็นการกำหนดรูปแบบปัญหาปฐมภูมิและการกำหนดรูปแบบปัญหาทุติยภูมิ ในส่วนของการกำหนดรูปแบบปัญหาปฐมภูมิ เราได้แสดงให้เห็นถึงการจัดรูปปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ผลที่ได้คือปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงเส้นในปริภูมิมิติอนันต์ สำหรับส่วนของการกำหนดรูปแบบปัญหาทุติยภูมิ เราได้แปลงปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดที่ได้ให้อยู่ในรูปปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด ซึ่งมีข้อจำกัดขนาดของสัญญาณควบคุมและข้อจำกัดขนาดของตัวแปรสถานะ เมื่อวิเคราะห์เงื่อนไขจำเป็นที่ได้จากการพิจารณาปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุดดังกล่าวแล้ว จึงแสดงลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งก่อให้เกิดสัญญาณออกสูงสุดหรือค่าดรรชนีสมรรถนะนั่นเอง ลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดได้อธิบายไว้อย่างละเอียด โดยกำหนดเป็นทฤษฎีบทซึ่งแสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของสัญญาณเข้าสูงสุด ซึ่งพิจารณาแยกกันในช่วงเวลาแต่ละช่วงที่จำแนกตามลักษณะของสัญญาณเข้าเอง เมื่อได้วิธีการคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุดแล้วค่าดรรชนีสมรรถนะก็อาจคำนวณได้โดยง่าย ถัดมาในบทที่ 4 เรานำเอาวิธีการคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุดรวมถึงการคำนวณดรรชนีสมรรถนะมาพัฒนาเป็นโปรแกรม ในบทนี้ได้อธิบายกรรมวิธีและเทคนิคในการเขียนโปรแกรมเพื่อให้ได้สัญญาณเข้าสูงสุดตามต้องการโดยใช้ทฤษฎีบทที่ให้ไว้ในบทที่ 3 เทคนิคดังกล่าวได้แก่ การจำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบ การคำนวณเวลาสวิตช์ซึ่งเป็นเวลาที่สัญญาณเข้าเปลี่ยนความชัน การสร้างสัญญาณเข้าโดยใช้ข้อมูลเวลาสวิตช์ และการหาสังวัตนาการทางเวลาเพื่อคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะจากสัญญาณเข้าสูงสุดที่สร้างได้ ในตอนท้ายของบทที่ 4 นี้ยังได้แสดงการทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับระบบตัวอย่างเพื่อตรวจสอบและประเมินการทำงานของโปรแกรมดังกล่าว

ในบทที่ 5 เราได้กล่าวถึงหลักการและความรู้พื้นฐานการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ ตั้งแต่การกำหนดรูปแบบปัญหาอันได้แก่การจัดรูประบบควบคุมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน การทำให้เป็นตัวแปรเสริมของตัวควบคุมทั้งหมดที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพ และการประมาณปัญหามิติอนันต์ให้เป็นปัญหาในมิติจำกัดซึ่งทั้งหมดนี้ให้ผลเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ จากนั้นจึงอธิบายถึงการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งกำหนดขึ้นโดยใช้ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี ทั้งนี้เราได้แสดงวิธีคำนวณค่าเกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะเอาไว้ด้วยเพื่อใช้ในขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี ต่อมาในบทที่ 6 เราได้ให้ตัวอย่างการออกแบบระบบควบคุมสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิด เนื้อหาในบทนี้ครอบคลุมถึงแบบจำลองของหอกลั่น โครงสร้างการควบคุม และโครงสร้างระบบควบคุมหอกลั่น การประมาณระบบให้มีอันดับต่ำเพื่อใช้ในการออกแบบ และวิธีการออกแบบระบบควบคุมหอกลั่นด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 5 ผลที่ได้ในบทที่ 6 นี้ คือค่าขีดจำกัดสมรรถนะของค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอภายใต้ข้อจำกัดของขนาดของสัญญาณควบคุม และผลการจำลองตัวควบคุมที่ออกแบบได้กับแบบจำลองไม่เชิงเส้นของหอกลั่นซึ่งใช้การรบกวนตัวอย่างบางลักษณะ สำหรับบทสุดท้ายคือบทสรุปของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยกล่าวถึงสิ่งที่ได้ทำในวิทยานิพนธ์อย่างย่อ เน้นย้ำในจุดที่สำคัญ และเสนอแนวทางในการขยายผลของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไปสู่กรณีเฉพาะต่างๆ เช่นการคำนวณดรรชนีสมรรถนะในระบบเวลาไม่ต่อเนื่องเป็นต้น

บทที่ 2

ดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบควบคุม

ในบทนี้เราได้กล่าวถึงนิยามของดรรชนีสมรรถนะอย่างละเอียด รวมถึงนิยามของปริภูมิสัญญาณเข้าที่มีข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ ซึ่งใช้ในการนิยามดรรชนีสมรรถนะ นอกจากนี้ยังได้แสดงเงื่อนไขซึ่งทำให้ดรรชนีสมรรถนะมีค่าจำกัด เพื่อกำหนดข้อจำกัดของระบบเชิงเส้นที่อาจคำนวณดรรชนีสมรรถนะได้ จากนั้นจึงพิสูจน์ความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะ ซึ่งจำเป็นในการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ที่ได้ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ นอกจากนั้นยังกล่าวถึงขอบเขตบนบางชนิดซึ่งใช้เป็นส่วนหนึ่งในการทดสอบโปรแกรมสำหรับคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ และยังได้ขยายผลของนิยามดรรชนีสมรรถนะไปสู่ระบบหลายสัญญาณเข้า-หลายสัญญาณออก ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยดรรชนีสมรรถนะของระบบหนึ่งสัญญาณเข้า-หนึ่งสัญญาณออก ในตอนท้ายสุดเราได้ขยายผลของดรรชนีสมรรถนะให้ครอบคลุมระบบที่มีเวลาประวิงด้วยเช่นกัน

2.1 ปริภูมิสัญญาณเข้า

ในตอนนี้เราพิจารณาเซตของสัญญาณเข้าที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในตอนที่ 1.1.1 สำหรับระบบในอุตสาหกรรมบางระบบ การรบกวนควรจำลองในลักษณะของสัญญาณที่มีข้อจำกัดของขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลงหรือค่าอนุพันธ์ ซึ่งทำให้การรบกวนที่จำลองสมจริงมากขึ้น ในที่นี้เราสมมติให้ค่า $M, D > 0$ เป็นค่าจำกัดบนขนาดและอนุพันธ์ของสัญญาณเข้า w ตามลำดับ ให้สัญญาณเข้า w มีความต่อเนื่องตลอดทุกๆ ค่า $t \geq 0$ และกำหนดให้อนุพันธ์ $\dot{w}$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ จากค่า M และ D ดังกล่าว เรานิยามปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ดังต่อไปนี้

นิยาม 2.1 *ปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ซึ่งครอบคลุมสัญญาณเข้าทุกๆ สัญญาณที่มีข้อจำกัดขนาดเท่ากับ M และมีข้อจำกัดอนุพันธ์เท่ากับ D คือ*

$$\mathcal{W} \triangleq \{w(t) : |w(t)| \leq M, \ |\dot{w}(t)| \leq D, \ \ \forall t \geq 0\}^1 \tag{2.1}$$

[1]ข้อจำกัดของอนุพันธ์ของ w อาจแสดงในอีกรูปแบบหนึ่งที่สมมูลกันได้ดังนี้

$$\left|\frac{w(t_2) - w(t_1)}{t_2 - t_1}\right| \leq D \qquad \forall t_1, \ t_2 \geq 0$$

ข้อจำกัดในลักษณะนี้สามารถใช้ได้กับทุกๆ จุดเวลา เนื่องจาก w มีความต่อเนื่องทุกๆ ค่าเวลา $t \geq 0$ แต่ข้อจำกัดของอนุพันธ์ของ w ในสมการ (2.1) ไม่สามารถใช้ได้ในจุดที่อนุพันธ์ของ w ไม่นิยาม (เนื่องจากเรากำหนดเพียงว่า $\dot{w}$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ จึงมีบางจุดที่ $\dot{w}$ ไม่สามารถหาค่าได้เช่นจุดที่สัญญาณหักมุม) อย่างไรก็ตามข้อจำกัดของอนุพันธ์ของ w ในสมการ (2.1) อาจเข้าใจได้ง่ายกว่าเราจึงนิยามปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ในลักษณะดังกล่าว

โดยที่ M และ D มีค่าจำกัด ในที่นี้เราสนใจเฉพาะสัญญาณเข้าที่เวลา $t \geq 0$ และกำหนดให้

$$w(t) \;=\; 0, \qquad t < 0$$

นอกจากนี้จะเห็นว่าค่า D ซึ่งเป็นตัวกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเข้า จะเป็นตัวกำหนดความกว้างของแถบความถี่ (Bandwidth) ของปริภูมิสัญญาณที่เราพิจารณาด้วย ซึ่งสมเหตุสมผลกว่าการพิจารณากลุ่มสัญญาณที่มีขนาดจำกัดด้วยค่า M เท่านั้น

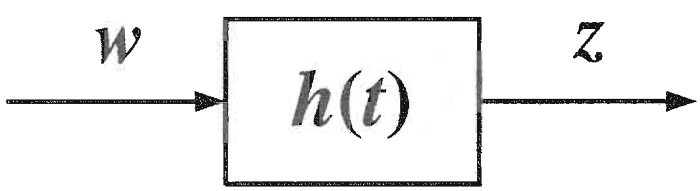
2.2 นิยามของดรรชนีสมรรถนะ

เราอาจนิยามดรรชนีสมรรถนะของสัญญาณคลาดเคลื่อน (Error signal) สัญญาณควบคุม (Control signal) หรือสัญญาณออกที่วัดได้ (Measured output) ของระบบ อย่างไรก็ตามในระบบควบคุม เราอาจเลือกให้สัญญาณใดๆเป็นสัญญาณออกก็ได้ ดังนั้นการนิยามดรรชนีสมรรถนะโดยพิจารณาเฉพาะสัญญาณออกของระบบควบคุม จึงสะดวกและครอบคลุมถึงสัญญาณต่างๆ ในระบบที่เราสนใจด้วย ในบทนี้เราพิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ซึ่งมีสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณในที่นี้หมายถึงสัญญาณรบกวนจากภายนอก และสัญญาณออกหนึ่งสัญญาณดังรูปที่ 2.1 นอกจากนี้เราจะสมมติให้ระบบมีสมบัติเหมาะสมโดยแท้ (Strictly proper) ระบบนี้ถึงแม้จะเป็นระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณ (SISO) แต่ดรรชนีสมรรถนะที่เราจะนิยามต่อไปนี้ ก็สามารถขยายผลไปสู่กรณีของระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ (MIMO) ได้ไม่ยากนัก

ในที่นี้จะสมมติให้สัญญาณเข้า w และสัญญาณออก z เป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real valued functions) ของเวลา t ซึ่งมีความหมายที่ทุกๆ ค่า $t \geq 0$ เนื่องจากสัญญาณออก z ขึ้นอยู่กับค่าของสัญญาณเข้า w ดังนั้นเราจะอ้างถึงสัญญาณ z ที่เวลาใดๆ ด้วยอาร์กิวเมนต์ (Argument) w และ t กล่าวคือ $z(t,w)$ หมายถึงสัญญาณออก z ที่เวลา t เมื่อสัญญาณเข้าเป็น w อย่างไรก็ตามในบางกรณีเราอาจอ้างอิงสัญญาณ z ด้วยอาร์กิวเมนต์ t เพียงอย่างเดียว ในกรณีที่กำลังพิจารณาสัญญาณเข้า w หนึ่งๆโดยเฉพาะ เช่นอาจกำลังพิจารณาสัญญาณเข้าสูงสุดอยู่เป็นต้น กำหนดให้สัญญาณเข้า w ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นสมาชิกของเซต $\mathcal{W}$ ดังสมการ (2.1) ดรรชนีสมรรถนะที่เราสนใจ $\hat{z}$ มีนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 2.2 *ดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ ของสัญญาณออก $z(t,w)$ ของระบบเชิงเส้น $h(t)$ ภายใต้สัญญาณเข้า $w \in \mathcal{W}$ มีค่าเท่ากับ*

$$\hat{z} \;\triangleq\; \sup_{w\in\mathcal{W}} \sup_{t\geq 0} |z(t,w)| \tag{2.2}$$



รูปที่ 2.1: ระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์เป็น

ดรรชนีสมรรถนะนี้หมายถึงขนาดของสัญญาณออกที่มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ซึ่งพิจารณาจากทุกๆ จุดเวลา $t \geq 0$ ในขณะที่ระบบถูกป้อนด้วยสัญญาณเข้า w ซึ่งพิจารณาจากสัญญาณเข้าทุกสัญญาณที่เป็นสมาชิกของเซต $\mathcal{W}$ (จะเห็นว่า $\hat{z}$ เป็นค่าคงตัวซึ่งไม่ขึ้นกับ t หรือ w) เกณฑ์สมรรถนะที่ใช้ในการออกแบบซึ่งอาจเกิดจากข้อจำกัดของระบบหรือเป็นข้อกำหนดของผู้ออกแบบ จะอยู่ในรูปของอสมการ

$$|z(t,w)| \quad \leq \quad \epsilon \tag{2.3}$$

สำหรับทุกๆ สัญญาณเข้า $w \in \mathcal{W}$ และทุกๆ เวลา $t \geq 0$ จากค่าดรรชนีสมรรถนะใน (2.2) ได้ว่าเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของสมการ (2.3) คือ

$$\hat{z} \quad \leq \quad \epsilon \tag{2.4}$$

นอกจากนี้เราอาจใช้เกณฑ์สมรรถนะนี้เป็นจุดประสงค์ในการออกแบบก็ได้เช่นกัน สังเกตว่าการนิยามดรรชนีสมรรถนะในลักษณะนี้ ไม่ได้เจาะจงถึงรูปแบบความสัมพันธ์ของ z กับ w กล่าวคือ w อาจสัมพันธ์กับ z ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) หรือแม้แต่แปรผันตามเวลา (Time-varying) อย่างไรก็ตามในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เรากำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่าง w กับ z เป็นเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ซึ่งมีความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้า-สัญญาณออกของแบบปริพันธ์ของสังวัตนาการ (Convolution integral) ดังต่อไปนี้

$$z(t,w) \quad = \quad \int_0^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.5}$$

ที่จริงแล้วระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีรูปแบบความสัมพันธ์ดังสมการ (2.5) นี้ หมายรวมทั้งระบบมิติจำกัด (Finite dimensional system) และระบบมิติอนันต์ (Infinite dimensional system) เช่นระบบที่มีเวลาประวิง (Delay time) หรือระบบซึ่งแทนได้โดยสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) เป็นต้น อย่างไรก็ตามวิทยานิพนธ์ฉบับนี้พิจารณาเฉพาะระบบในมิติจำกัดซึ่งแทนได้ด้วยแบบจำลองในปริภูมิสถานะ (State space model) เท่านั้น ซึ่งถือเป็นส่วนหนึ่งจากงานวิจัยของ Lane [8] เนื่องจาก Lane นั้นได้กำหนดรูปแบบปัญหาผ่านทางความสัมพันธ์ในสมการ (2.5) โดยตรง ทำให้วิธีการคำนวณดรรชนีสมรรถนะของ Lane สามารถประยุกต์ใช้กับระบบมิติจำกัดหรือมิติอนันต์ก็ได้ ขึ้นอยู่กับว่าสามารถคำนวณผลตอบสนองสัญญาณขั้น และสามารถทดสอบเสถียรภาพของระบบได้หรือไม่

ถ้ากำหนดให้ $\mathcal{L}(h(t)) = H(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $h(t)$ และ $H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right]$ สมการสถานะของระบบในรูปที่ 2.1 จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ z(t,w) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

เมื่อ $x(t) \in \mathrm{R}^{n_{\mathrm{state}}}$ เป็นสถานะของระบบ (ระบบมีมิติเท่ากับ n_{state}) สังเกตว่าเมทริกซ์ป้อนผ่านตลอด (Feedthrough matrix) หรือค่า $H(\infty)$ นั้น ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจากเราสมมติให้ระบบ $h(t)$ มีสมบัติเหมาะสมโดยแท้ อนึ่งในกรณีที่ระบบไม่มีสมบัติเหมาะสมโดยแท้นั้นอยู่นอกเหนือขอบข่ายของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ แต่เราอาจนำการกำหนดรูปแบบปัญหาในบทที่ 3 มาประยุกต์ใช้กับกรณีดังกล่าวได้ในงานวิจัยภายหน้า

เมื่อเราพิจารณาสัญญาณเข้าทุกตัวในปริภูมิ $\mathcal{W}$ จะพบว่ามีสัญญาณเข้า $\hat{w}$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้เกิดค่าดรรชนีสมรรถนะขึ้น กล่าวคือ

$$\hat{w} \;=\; \underset{w\in\mathcal{W}}{\operatorname{argsup}}\{\sup_{t\geq 0}|z(t,w)|\} \tag{2.7}$$

เราจะเรียกค่า $\hat{w}$ นี้ว่า*สัญญาณเข้าสูงสุด* (Maximal input) หรือ *สัญญาณเข้ากรณีเลวสุด* (Worst-case input) Birch และ Jackson [6] ได้ให้ลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดไว้ ซึ่งมีลักษณะของการหักมุม (อนุพันธ์ไม่ต่อเนื่องบางจุด) ดังรูปที่ 1.2 อนึ่งหากการนิยามใน (2.1) พิจารณาเฉพาะสัญญาณเข้า w ที่มีอนุพันธ์ตลอดทุกๆ $t \geq 0$ (โดยไม่รวมเอาสัญญาณที่มีอนุพันธ์เป็นช่วงๆ) จะพบว่าสัญญาณเข้าสูงสุดดังกล่าว $\hat{w}$ ไม่ได้อยู่ใน $\mathcal{W}$ แต่จะอยู่ในส่วนปิดคลุม[2] (Closure) ของ $\mathcal{W}$ อย่างไรก็ตามในกรณีการนิยาม $\mathcal{W}$ ลักษณะนี้ ถึงแม้ $w \notin \mathcal{W}$ แต่เราอาจหาสัญญาณเข้า $w \in \mathcal{W}$ ที่ใกล้เคียงกับ $\hat{w}$ เท่าใดก็ได้ (Arbitrarily close to $\hat{w}$)

และเพื่อให้เป็นที่เข้าใจถูกต้องตรงกัน เมื่อใดที่กล่าวถึงดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ ในสมการ (2.2) จะหมายความถึงดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาบนเซต $\mathcal{W}$ ดังนิยาม (2.1) เท่านั้น ยกเว้นจะระบุอย่างชัดเจนว่าให้พิจารณาบนเซตอื่นโดยเฉพาะ

2.3 เงื่อนไขค่าจำกัดของดรรชนีสมรรถนะ

ก่อนที่จะเริ่มคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะในสมการ (2.2) เพื่อเป็นการทำความเข้าใจดรรชนีสมรรถนะนี้ให้มากขึ้นนั้น จำเป็นต้องพิจารณาก่อนว่าเงื่อนไขใดที่ทำให้ค่าดรรชนีนี้มีค่าจำกัด (Finite value) กล่าวคือเงื่อนไขใดที่ทำให้

$$\hat{z} \;<\; \infty \tag{2.8}$$

อย่างไรก็ตามเราได้พบว่าเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับสมการ (2.8) คือ ระบบ $h(t)$ จะต้องมีเสถียรภาพ ซึ่งอาจแสดงไว้เป็นบทตั้งดังนี้

บทตั้ง 2.1 *สำหรับดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ ของระบบเชิงเส้น $h(t)$ ใดๆ พบว่า $\hat{z} < \infty$ ก็ต่อเมื่อ $h(t)$ มีเสถียรภาพ*

พิสูจน์

เริ่มจากเงื่อนไขเพียงพอ (Sufficient condition) โดยสมมติให้ระบบ $h(t)$ มีเสถียรภาพ เราจะพบว่านอร์มหนึ่งของระบบมีค่าจำกัด หรือ

$$\int_0^\infty |h(t)|dt \;<\; \infty \tag{2.9}$$

ต่อจากนั้นพิจารณาปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}_{1-\text{norm}}$ ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\mathcal{W}_{1-\text{norm}} \;\triangleq\; \{w(t) : |w(t)| \leq M, \forall t \geq 0\} \tag{2.10}$$

[2] ส่วนปิดคลุมของเซตใดคือยูเนียน (Union) ของเซตนั้นกับจุดลิมิต (Limit point) ทั้งหมดของเซตดังกล่าว กล่าวอย่างง่ายคือส่วนปิดคลุมเป็นผลรวมของเซตๆนั้นกับ*ขอบ*ทั้งหมดรอบๆ ตัวมันเอง เพื่อให้ได้เป็นเซตปิดสมบูรณ์

จะเห็นว่า $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_{1-\text{norm}}$ นั่นคือสัญญาณเข้าทุกรูปแบบที่อยู่ใน $\mathcal{W}$ จะอยู่ใน $\mathcal{W}_{1-\text{norm}}$ เช่นกัน (เราจะกล่าวถึงส่วนนี้อีกครั้งในตอนที่ 2.5) ดังนั้นถ้าให้ดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณบนเซต $\mathcal{W}_{1-\text{norm}}$ มีค่าเท่ากับ $\hat{z}_{1-\text{norm}}$ จะพบว่า

$$\hat{z} \;\le\; \hat{z}_{1-\text{norm}} \tag{2.11}$$

แต่เนื่องจาก [6, 10, 11]

$$\hat{z}_{1-\text{norm}} \;=\; M\int_0^\infty |h(t)|dt \tag{2.12}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.9) ซึ่งแสดงความมีค่าจำกัดของนอร์มหนึ่ง และสมการ (2.11) จะได้ว่า

$$\hat{z} \;\le\; \hat{z}_{1-\text{norm}} \;<\; \infty \qquad \square$$

ต่อจากนี้จะพิสูจน์เงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) โดยจะใช้การพิสูจน์แบบประพจน์แย้งสลับที่ (Contrapositive) กล่าวคือสมมติว่าระบบ $h(t)$ ไม่มีเสถียรภาพ ต้องพิสูจน์ว่าให้ได้ว่า $\hat{z} = \infty$ เห็นได้ว่าถ้าหากระบบไม่มีเสถียรภาพแล้วนั้น $h(t) \to \infty$ เมื่อ $t \to \infty$ และทำให้

$$\left|\int_0^\infty h(t)dt\right| \;=\; \infty \tag{2.13}$$

เมื่อพิจารณาสัญญาณ $\bar{w} = M$ จะเห็นว่าสัญญาณนี้อยู่ในเซต $\mathcal{W}$ และจากสมการ (2.13) พบว่าสัญญาณ $\bar{w}$ นี้ทำให้

$$\sup_{t\ge 0}|z(t,\bar{w})| \;=\; \sup_{t\ge 0}\left|\int_0^t Mh(\tau)d\tau\right| \;=\; M\left|\int_0^\infty h(\tau)d\tau\right| \;=\; \infty \tag{2.14}$$

นั่นหมายถึงค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z} = \sup_{t\ge 0}\sup_{w\in\mathcal{W}}|z(t,w)| > \sup_{t\ge 0}|z(t,\hat{w})|$ จะมีค่าเป็นอนันต์ หรือ

$$\hat{z} \;=\; \infty \qquad \square$$

ดังนั้นระบบ $h(t)$ จะสามารถคำนวณดรรชนีสมรรถนะได้ก็ต่อเมื่อระบบมีเสถียรภาพเท่านั้น หากกล่าวโดยสรุปแล้ววิทยานิพนธ์ฉบับนี้พิจารณาระบบ $h(t)$ แบบ SISO ซึ่งเป็นเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา มีสมบัติเหมาะสมโดยแท้และมีเสถียรภาพเท่านั้น และต่อจากนี้เป็นต้นไปเราจะเรียกแทนระบบ $h(t)$ ที่มีลักษณะดังกล่าวว่า*ระบบเชิงเส้นที่เหมาะสม*

2.4 ความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้วิธีการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ สำหรับออกแบบตัวควบคุมบนเกณฑ์การออกแบบซึ่งกำหนดโดยดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ ในสมการ (2.2) ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องพิสูจน์ความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะนี้เสียก่อน โดยเราจะพิจารณาความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะบนเซตของระบบเชิงเส้นที่เหมาะสม

บทตั้ง 2.2 *กำหนดให้* h_1, h_2 *เป็นระบบเชิงเส้นที่เหมาะสม ให้* $\hat{z}_{h_1}$ *และ* $\hat{z}_{h_2}$ *เป็นดรรชนีสมรรถนะที่สัมพันธ์กันกับ* h_1 *และ* h_2 *ตามลำดับ ให้* $w(t) \in \mathcal{W}$ *ให้* α *เป็นจำนวนจริงซึ่ง* $0 \leq \alpha \leq 1$ *และให้* $\hat{z}_{\alpha h_1+(1-\alpha)h_2}$ *เป็นดรรชนีสมรรถนะของระบบ* $\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2$ *ซึ่งเป็นระบบที่เหมาะสมเช่นกัน พบว่า*

$$\hat{z}_{\alpha h_1+(1-\alpha)h_2} \leq \alpha\hat{z}_{h_1} + (1-\alpha)\hat{z}_{h_2}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์สามารถทำได้อย่างตรงไปตรงมาดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{\alpha h_1+(1-\alpha)h_2} &= \sup_{w\in\mathcal{W}}\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t (\alpha h_1(\tau) + (1-\alpha)h_2(\tau))w(t-\tau)d\tau\right| \\
&= \sup_{w\in\mathcal{W}}\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t (\alpha h_1(\tau)w(t-\tau) + (1-\alpha)h_2(\tau)w(t-\tau))d\tau\right| \\
&\leq \sup_{w\in\mathcal{W}}\sup_{t\geq 0}\left\{\alpha\left|\int_0^t h_1(\tau)w(t-\tau)d\tau\right| + (1-\alpha)\left|\int_0^t h_2(\tau)w(t-\tau)d\tau\right|\right\} \\
&\leq \alpha\left\{\sup_{w\in\mathcal{W}}\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t h_1(\tau)w(t-\tau)d\tau\right|\right\} + (1-\alpha)\left\{\sup_{w\in\mathcal{W}}\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t h_2(\tau)w(t-\tau)d\tau\right|\right\} \\
&= \alpha\hat{z}_{h_1} + (1-\alpha)\hat{z}_{h_2}
\end{aligned}$$

□

โดยการพิสูจน์นี้จึงสรุปได้ว่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ของระบบเชิงเส้น $h(t)$ ที่เหมาะสม นอกจากนี้เราได้กล่าวไปแล้วในตอนที่ 1.1.3 ว่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ มีลักษณะเป็นนอร์มเลวสุดแบบหนึ่ง ดังนั้นอันที่จริงแล้วการพิสูจน์ข้างต้นจึงเป็นเพียงการพิสูจน์อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality) ของนอร์มนั่นเอง

2.5 ขอบเขตบนของดรรชนีสมรรถนะ

ดรรชนีสมรรถนะบางชนิดอาจคำนวณได้ยากหรือยังไม่มีวิธีที่คำนวณได้ ในขณะที่การคำนวณขอบเขตบน (Upper bound) ของดรรชนีสมรรถนะนั้นอาจทำได้ง่ายกว่า และไม่ซับซ้อน ขอบเขตบนจึงมักถูกใช้เป็นเกณฑ์ในการออกแบบแทนค่าดรรชนีสมรรถนะ ถึงกระนั้นก็ตามการใช้ขอบเขตบนในการวิเคราะห์หรือสังเคราะห์ระบบควบคุม ทำให้เกิดความอนุรักษ์แก่ตัวควบคุมไม่มากก็น้อย ความอนุรักษ์นี้เป็นข้อเสียเปรียบของการใช้ขอบเขตบนซึ่งต้องแลกกับความสะดวกในการคำนวณที่ได้มา อนึ่งในบางกรณีเมื่อสมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณขอบเขตบน มีลักษณะใกล้เคียงกับสมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณดรรชนีสมรรถนะ ความอนุรักษ์ที่เกิดขึ้นจะลดลง กล่าวคือขอบเขตบนที่คำนวณได้จะเข้าใกล้ค่าของดรรชนีสมรรถนะนั่นเอง เราจะขยายความในส่วนนี้อีกครั้งหนึ่ง เมื่อเรากล่าวถึงขอบเขตบนของ $\hat{z}$ แล้ว

2.5.1 ขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง

ขอบเขตบนชนิดแรกที่จะกล่าวถึงจะเกี่ยวข้องกับนอร์มหนึ่งของระบบ $h(t)$ ดังที่ได้กล่าวไว้ในตอนที่ 2.3 ขอบเขตบนชนิดนี้ใช้นิยามของดรรชนีสมรรถนะตามสมการ (2.2) เช่นเดียวกับค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ หาก

แต่ปริภูมิของสัญญาณเข้าที่ใช้จะเป็นดังนี้

$$\mathcal{W}_{1-\mathrm{norm}} \triangleq \{w(t) : |w(t)| \leq M, \forall t \geq 0\} \tag{2.15}$$

กล่าวคือขอบเขตบนชนิดนี้เป็นขอบเขตบนน้อยสุด (Least upper bound) เช่นเดียวกับ $\hat{z}$ แต่เปลี่ยนปริภูมิสัญญาณเข้าที่พิจารณาจาก $\mathcal{W}$ มาเป็น $\mathcal{W}_{1-\mathrm{norm}}$ ทั้งนี้จากนิยาม (2.1) และ (2.15) จะเห็นได้ว่าสัญญาณเข้าทุกตัวใน $\mathcal{W}$ อยู่ภายใน $\mathcal{W}_{1-\mathrm{norm}}$ รวมถึงสัญญาณเข้าสูงสุด $\hat{w}$ ด้วย ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาสัญญาณเข้าทั้งหมดในเซต $\mathcal{W}_{1-\mathrm{norm}}$ ซึ่งมิได้จำกัดอัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเข้า จึงมีโอกาสที่จะพบสัญญาณซึ่งให้ค่าดรรชนีสมรรถนะที่สูงกว่า $\hat{z}$

บทตั้ง 2.3 *กำหนดให้ดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาบนเซต $\mathcal{W}_{1-\mathrm{norm}}$ คือ $\hat{z}_1^*$ (เป็นดรรชนีสมรรถนะตัวเดียวกันกับ $\hat{z}_{1-\mathrm{norm}}$ ในตอนที่ 2.3 แต่เปลี่ยนสัญกรณ์ (Notation) เพื่อแสดงให้เห็นว่าเป็นขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง) จะพบว่า*

$$\hat{z} \leq \hat{z}_1^*$$

ค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}_1^*$ นี้เป็นที่รู้จักมานาน [6, 10, 11] และมีค่าดังนี้

$$\hat{z}_1^* = M\int_0^\infty |h(t)|dt = M\|h(t)\|_1 \tag{2.16}$$

เมื่อปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ มีข้อจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลงที่อ่อนลงหรือเข้มงวดน้อยลง ($D \gg M$) จะพบว่า $\mathcal{W}$ มีลักษณะใกล้เคียงกับ $\mathcal{W}_{1-\mathrm{norm}}$ มากขึ้น ดังนั้นในกรณีนี้ขอบเขตบน $\hat{z}_1^*$ จะมีค่าเข้าใกล้ $\hat{z}$ มากขึ้นไปด้วย นั่นคือมีความอนุรักษ์น้อยลง

2.5.2 ขอบเขตบนชนิดที่สอง

ขอบเขตบนที่จะกล่าวต่อไปนี้มิได้เป็นขอบเขตบนน้อยสุดในลักษณะอื่นใดเหมือนในกรณีขอบเขตบนชนิดแรก แต่หากเป็นขอบเขตบนซึ่งพิสูจน์ได้โดยตรงว่ามากกว่าหรือเท่ากับดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$

บทตั้ง 2.4 *กำหนดให้ขอบเขตบนชนิดที่สองแทนด้วย $\hat{z}_2^*$ ซึ่งมีค่าดังนี้*

$$\hat{z}_2^* = M(\sup_{t\geq 0}|s(t)| + |s_{ss}|) + D\|s(t) - s_{ss}\|_1 \tag{2.17}$$

เมื่อ $s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$ เป็นผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบเชิงเส้น $h(t)$ ในรูปที่ 2.1 และ $s_{ss} = \lim_{t\to\infty} s(t) = H(0)$ เป็นค่าอัตราขยายกระแสตรง (DC-gain) ของระบบ $h(t)$ จะได้ว่า

$$\hat{z} \leq \hat{z}_2^*$$

พิสูจน์

ความสัมพันธ์ของค่าอนุพันธ์ของ $w(t-\tau)s(\tau)$, $w(t-\tau)$ และ $s(\tau)$ เทียบกับ τ เป็นดังนี้

$$d(w(t-\tau)s(\tau)) = \left(w(t-\tau)\frac{ds(\tau)}{d\tau}\right)d\tau + \left(s(\tau)\frac{dw(t-\tau)}{d\tau}\right)d\tau \tag{2.18}$$

เมื่อคำนวณค่าปริพันธ์ทั้งสองข้างสมการจาก $\tau = 0$ ถึง $\tau = t$ จัดรูปสมการ และแทน $\frac{ds(\tau)}{d\tau} = h(\tau)$ และ $\frac{dw(t-\tau)}{d\tau} = -\dot{w}(t-\tau)$ จะได้ว่า

$$\int_0^t w(t-\tau)h(\tau)d\tau \;=\; w(t-\tau)s(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \dot{w}(t-\tau)s(\tau)d\tau \tag{2.19}$$

แต่จากความสัมพันธ์ (2.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z(t,w) &= \int_0^t w(t-\tau)h(\tau)d\tau \;=\; w(t-\tau)s(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \dot{w}(t-\tau)s(\tau)d\tau \\ &= w(0)s(t) - w(t)s(0) + \int_0^t \dot{w}(t-\tau)s(\tau)d\tau \end{aligned}$$

แต่ $s(0) = 0$ ดังนั้นจะได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของ $z(t,w)$ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} |z(t,w)| &= \left| w(0)s(t) + \int_0^t \dot{w}(t-\tau)s(\tau)d\tau \right| \\ &= \left| w(0)s(t) + \int_0^t \dot{w}(t-\tau)(s(\tau)-s_{ss})d\tau + \int_0^t \dot{w}(t-\tau)s_{ss}d\tau \right| \\ &\le |w(0)s(t)| + \left| \int_0^t \dot{w}(t-\tau)(s(\tau)-s_{ss})d\tau \right| + \left| \int_0^t \dot{w}(t-\tau)s_{ss}d\tau \right| \\ &\le |w(0)||s(t)| + \int_0^t |\dot{w}(t-\tau)||s(\tau)-s_{ss}|d\tau + |s_{ss}| \left| \int_0^t \dot{w}(t-\tau)d\tau \right| \\ &= |w(0)||s(t)| + \int_0^t |\dot{w}(t-\tau)||s(\tau)-s_{ss}|d\tau + |s_{ss}||w(t)| \\ &\le M|s(t)| + M|s_{ss}| + D\int_0^t |s(\tau)-s_{ss}|d\tau \\ &\le M\sup_{t\ge 0}|s(t)| + M|s_{ss}| + D\int_0^\infty |s(\tau)-s_{ss}|d\tau \\ &= M(\sup_{t\ge 0}|s(t)| + |s_{ss}|) + D\|s(t)-s_{ss}\|_1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $|z(t,w)| \le M(\sup_{t\ge 0}|s(t)| + |s_{ss}|) + D\|s(t)-s_{ss}\|_1$ ทุกๆ ค่า t และ w ดังนั้นย่อมได้ว่า

$$\sup_{w\in\mathcal{W}}\sup_{t\ge 0}|z(t,w)| \;=\; \hat{z} \;\le\; M(\sup_{t\ge 0}|s(t)|+|s_{ss}|)+D\|s(t)-s_{ss}\|_1 \qquad \square$$

จะเห็นว่าขอบเขตบนชนิดที่สองนี้ได้รวมเอาผลของอนุพันธ์ของ w เข้ามาคำนวณด้วย จึงมีค่า D ปรากฏอยู่ในสูตรการคำนวณ และเมื่อค่า D สูงขึ้นจะทำให้ขอบเขตบน $\hat{z}_2^*$ นี้สูงขึ้นด้วยเนื่องจากมีความอนุรักษ์มากขึ้น จนอาจสูงเกินกว่าขอบเขตบนชนิดแรก ถึงกระนั้นก็ตาม สำหรับระบบ $h(t)$ ที่ผลตอบสนองอิมพัลส์มีทั้งส่วนที่เป็นบวกและลบ[3] ถ้าค่า D มีค่าน้อยๆ ถึงจุดหนึ่ง $(D \ll M)$ นั่นคือปริภูมิสัญญาณ

[3]ถ้าผลตอบสนองอิมพัลส์มีค่ามากกว่าศูนย์ตลอดเวลา หรือน้อยกว่าศูนย์ตลอดเวลา (มีเครื่องหมายเดียวกันตลอดเวลา) จะพบว่า

$$\|h(t)\|_1 \;=\; \int_0^\infty |h(\tau)|d\tau \;=\; \left|\int_0^\infty h(\tau)d\tau\right| \;=\; |s_{ss}|$$

ดังนั้นเมื่อพิจารณาค่าของ $\hat{z}_1^*$ ในสมการ (2.16) และค่าของ $\hat{z}_2^*$ ในสมการ (2.17) จะพบว่าในกรณีนี้

$$\hat{z}_1^* \;\le\; \hat{z}_2^*$$

ทุกๆ ค่า M และ D ดังนั้นถ้า $h(t)$ มีเครื่องหมายเดียวกันตลอดทุกเวลา t เราจะใช้ขอบเขตบนชนิดแรกเพียงชนิดเดียว

เข้า W มีข้อจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เข้มงวดมากพอ จะทำให้ขอบเขตบน $\hat{z}_2^*$ เข้าใกล้ค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ มากขึ้น และมีความอนุรักษ์น้อยลง Zakian [13] ได้พิจารณาขอบเขตบนในลักษณะนี้เช่นกัน โดยสมมติให้ผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(t)$ มีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์หรือ $s_{ss} = 0$ และสมมติให้ $w(0) = 0$ ทำให้เทอมแรกทางซ้ายมือของสมการ (2.17) ที่คูณอยู่กับ M หายไป และรูปแบบของขอบเขตบนจะง่ายขึ้น โดยจะขึ้นกับค่า D อย่างเดียว

อนึ่งเงื่อนไขซึ่งทำให้ขอบเขตบนทั้งสองมีค่าจำกัดเป็นเงื่อนไขเดียวกันกับที่ทำให้ค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ มีค่าจำกัด นั่นคือระบบ $h(t)$ จะต้องมีเสถียรภาพ พิจารณาดังนี้ ในกรณีขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง ค่าของขอบเขตบนขึ้นกับนอร์มหนึ่งของระบบ และเป็นที่รู้กันดีว่าระบบที่นอร์มหนึ่งมีค่าจำกัดจะต้องมีเสถียรภาพ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้าให้ $H(s) = \mathcal{L}(h(t)) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right]$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $h(t)$ แล้วจะได้ว่าเมทริกซ์พลวัต (Dynamic matrix) A จะต้องมีค่าเจาะจง (Eigenvalue) อยู่ทางซ้ายของแกนจินตภาพทั้งหมด

ส่วนในกรณีขอบเขตบนชนิดที่สอง ค่าของขอบเขตบนขึ้นอยู่กับค่า $\sup_{t\geq 0}|s(t)|$, s_{ss} และ $\|s(t) - s_{ss}\|_1$ เห็นได้ชัดว่าค่า $\sup_{t\geq 0}|s(t)|$ และ s_{ss} จะมีค่าจำกัดก็ต่อเมื่อระบบ $h(t)$ มีเสถียรภาพ แต่สำหรับค่า $\|s(t) - s_{ss}\|_1$ นั้นจะมีค่าจำกัดก็ต่อเมื่อระบบ $s(t) - s_{ss}$ มีเสถียรภาพ ซึ่งอาจตรวจสอบได้ดังนี้ สมมติให้ $S(s) = \mathcal{L}(s(t) - s_{ss})$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $s(t) - s_{ss}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{H(s) - H(0)}{s} = \frac{1}{s}(C(sI - A)^{-1}B + CA^{-1}B) \\ &= \frac{1}{s}(C(sI - A)^{-1}(A + (sI - A))A^{-1}B) \\ &= C(sI - A)^{-1}A^{-1}B \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A & A^{-1}B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

เห็นได้ว่าเมทริกซ์พลวัตของ $S(s)$ คือ A เช่นเดียวกับ $H(s)$ ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่าระบบ $s(t) - s_{ss}$ จะเสถียรก็ต่อเมื่อระบบ $h(t)$ เสถียร นั่นคือ $\|s(t) - s_{ss}\|_1$ จะมีค่าจำกัดหรือไม่ขึ้นอยู่กับเสถียรภาพของ $h(t)$ ดังนั้นขอบเขตบนชนิดที่สอง $\hat{z}_2^*$ จะมีค่าจำกัดก็ต่อเมื่อระบบ $h(t)$ มีเสถียรภาพ

2.6 ดรรชนีสมรรถนะในระบบเชิงเส้นแบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ

สำหรับดรรชนีสมรรถนะในระบบเชิงเส้นแบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ ถึงแม้จะมิได้พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้โดยตรง แต่ก็อาจคำนวณได้ในเทอมของดรรชนีสมรรถนะของระบบเชิงเส้นสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณดังนี้ พิจารณาระบบซึ่งมีสัญญาณเข้า p สัญญาณและสัญญาณออก m สัญญาณ กำหนดให้ $h(t)$ เป็นเมทริกซ์ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบดังกล่าวซึ่งมีมิติ $m \times p$ และให้ $z(t, w) \in R^m$ เป็นสัญญาณออกและ $w(t) \in R^p$ เป็นสัญญาณเข้าของระบบนี้ นิยามปริ

ภูมิสัญญาณเข้าในลักษณะเดียวกับระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณดังนี้

$$\mathcal{W}_p \triangleq \{[w_1(t), \ldots, w_p(t)]^T : w_i(t) \in \mathcal{W},\ i = 1, \ldots, p\} \tag{2.20}$$

เมื่อปริภูมิ $\mathcal{W}$ คือปริภูมิสัญญาณเข้าในกรณีระบบเชิงเส้นสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณตามสมการ (2.1) ส่วนดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาคือ

$$\hat{z} \triangleq \sup_{w \in \mathcal{W}_p} \|z(t, w)\|_\infty \tag{2.21}$$

เมื่อ $\|\cdot\|_\infty$ เป็นนอร์มอนันต์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (Vector value function) ซึ่งนิยามโดย

$$\|z(t, w)\|_\infty \triangleq \max_{1 \le i \le m} \{\sup_{t \ge 0} |z_i(t, w)|\} \tag{2.22}$$

เพราะฉะนั้นดรรชนีสมรรถนะในสมการ (2.21) อาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\hat{z} = \sup_{w \in \mathcal{W}_p} \max_{1 \le i \le m} \{\sup_{t \ge 0} |z_i(t, w)|\} \tag{2.23}$$

เนื่องจากความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้า-สัญญาณออกของระบบ $h(t)$ คือ

$$z_i(t, w) = \sum_{j=1}^{p} w_j(t) * h_{ij}(t), \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.24}$$

ดังนั้นสมการ (2.23) อาจแสดงได้ในเทอมของสัญญาณเข้าดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \sup_{w \in \mathcal{W}_p} \max_{1 \le i \le m} \left\{ \sup_{t \ge 0} \left| \sum_{j=1}^{p} w_j(t) * h_{ij}(t) \right| \right\} \\ &= \max_{1 \le i \le m} \sup_{w \in \mathcal{W}_p} \left| \sum_{j=1}^{p} \sup_{t \ge 0} \{w_j(t) * h_{ij}(t)\} \right| \end{aligned}$$

และเนื่องจากพจน์ของสังวัตนาการทางเวลาประกอบด้วย w_i ตัวใดตัวหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \max_{1 \le i \le m} \left| \sum_{j=1}^{p} \sup_{w \in \mathcal{W}_p} \sup_{t \ge 0} \{w_j(t) * h_{ij}(t)\} \right| \\ &= \max_{1 \le i \le m} \left| \sum_{j=1}^{p} \sup_{w_j \in \mathcal{W}} \sup_{t \ge 0} \{w_j(t) * h_{ij}(t)\} \right| \end{aligned} \tag{2.25}$$

ในกรณีของสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณนั้น เราพบว่า

$$\sup_{w_j \in \mathcal{W}} \sup_{t \ge 0} \{w_j(t) * h_{ij}(t)\} \ge 0 \tag{2.26}$$

(สำหรับเหตุผลในจุดนี้จะกล่าวโดยละเอียดในบทถัดไป) ดังนั้นเราจึงสามารถละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ในสมการ (2.27) ได้ดังนี้

$$\hat{z} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \sum_{j=1}^{p} \sup_{w_j \in \mathcal{W}} \sup_{t \ge 0} \{w_j(t) * h_{ij}(t)\} \right\} \tag{2.27}$$

นิยาม $\hat{z}_{ij}$ เป็นดรรชนีสมรรถนะย่อยของระบบ $h(t)$ ซึ่งคำนวณจากผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_{ij}(t)$ และสัญญาณเข้า $w_j(t)$

$$\hat{z}_{ij} \;=\; \sup_{w_j \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} \{w_j(t) * h_{ij}(t)\} \tag{2.28}$$

จะพบว่าสมการ (2.27) อาจแสดงได้ใหม่ตามนิยามของ $\hat{z}_{ij}$ ดังต่อไปนี้

$$\hat{z} \;=\; \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^{p} \hat{z}_{ij} \right\} \tag{2.29}$$

และเนื่องจาก $\hat{z}_{ij}$ เป็นดรรชนีสมรรถนะของระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณ ดังนั้นจึงสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สมการ (2.29) แสดงให้เห็นแล้วว่าถ้าหากสามารถคำนวณดรรชนีสมรรถนะในระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณได้ ก็อาจคำนวณดรรชนีสมรรถนะในระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณได้เช่นกัน

2.7 ดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีเวลาประวิง

ระบบที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาในมิติจำกัด (Finite dimensional linear time-invariant system) ดังนั้นการกำหนดรูปแบบปัญหาที่จะนำเสนอในบทถัดไปจึงไม่สามารถจัดการกับระบบที่มีเวลาประวิงได้โดยตรง อย่างไรก็ตามในตอนนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าดรรชนีสมรรถนะของระบบที่มีเวลาประวิงนั้น สามารถคำนวณในเทอมของดรรชนีสมรรถนะของระบบที่ไม่มีเวลาประวิงได้ ในที่นี้กำหนดให้ $h_d(t)$ เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีเวลาประวิงเท่ากับ τ_d และมีค่าดังนี้

$$h_d(t) \;=\; h(t - \tau_d)$$

เมื่อ $h(t)$ เป็นระบบเชิงเส้นในมิติจำกัดหรือระบบตรรกยะ (Rational system) ซึ่งแทนได้ด้วยแบบจำลองในปริภูมิสถานะเช่นเดียวกับสมการ (2.6) กำหนดให้ $z(t,w)$ แทนสัญญาณออกของระบบ $h(t)$ และให้ดรรชนีสมรรถนะของระบบ $h(t)$ มีค่าเท่ากับ $\hat{z}$ ซึ่งเป็นดังสมการ (2.2) ต่อจากนั้นกำหนดให้ $z_d(t,w)$ เป็นสัญญาณออกของระบบ $h_d(t)$ และให้ดรรชนีสมรรถนะของระบบ $h_d(t)$ มีค่าเท่ากับ $\hat{z}_d$ จะพบว่า

$$\hat{z}_d \;=\; \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} |z(t,w)| \;=\; \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} |w(t) * h_d(t)| \;=\; \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t h_d(\tau) w(t-\tau) d\tau \right| \tag{2.30}$$

เนื่องจากผลตอบ $h_d(t)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ตั้งแต่เวลา 0 ถึง τ_d ดังนั้นเราจึงไม่จำเป็นต้องพิจารณาสัญญาณออก $z_d(t,w)$ ที่เวลา $t < \tau_d$ นั่นคือไม่จำเป็นต้องพิจารณาสังวัตนาการ $w(t) * h_d(t)$ ที่เวลาก่อนหน้า τ_d ยิ่งกว่านั้นเราสามารถละเลยค่าสังวัตนาการตั้งแต่เวลา $t = 0$ ถึงเวลา $t = \tau_d$ ได้ ดังนั้นจากสมการ (2.30) เราได้ว่า

$$\hat{z}_d \;=\; \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq \tau_d} \left| \int_{\tau_d}^t h_d(\tau) w(t-\tau) d\tau \right| \tag{2.31}$$

ถ้าเรากำหนดตัวแปรเวลา σ แทนตัวแปรเวลา t ดังนี้

$$\sigma \;=\; t - \tau_d$$

จะได้ว่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}_d$ ในสมการ (2.31) อาจแปลงให้อยู่ในรูป

$$\hat{z}_d = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{\sigma \geq 0} \left| \int_{\tau_d}^{\sigma+\tau_d} h_d(\tau) w((\sigma+\tau_d)-\tau) d\tau \right| \tag{2.32}$$

ต่อไปถ้าเราเปลี่ยนตัวแปรหุ่น (Dummy variable) ในการหาค่าปริพันธ์จาก τ เป็น λ โดยที่ $\lambda = \tau - \tau_d$ แล้วแทนในสมการ (2.32) จะได้ว่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}_d$ มีค่าดังนี้

$$\hat{z}_d = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{\sigma \geq 0} \left| \int_0^{\sigma} h_d(\lambda+\tau_d) w((\sigma+\tau_d)-(\lambda+\tau_d)) d\lambda \right| = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{\sigma \geq 0} \left| \int_0^{\sigma} h_d(\lambda+\tau_d) w(\sigma-\lambda) d\lambda \right|$$

เห็นได้ว่าผลตอบ $h_d(\lambda+\tau_d)$ นั้นมีค่าเท่ากับ $h(\lambda)$ ดังนั้นค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}_d$ อาจแสดงในเทอมของผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ได้ดังนี้

$$\hat{z}_d = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{\sigma \geq 0} \left| \int_0^{\sigma} h(\lambda) w(\sigma-\lambda) d\lambda \right| = \hat{z} \tag{2.33}$$

โดยที่ $\hat{z}$ คือดรรชนีสมรรถนะของระบบ $h(t)$ ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีที่เสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จากสมการ (2.33) จะเห็นว่าดรรชนีสมรรถนะของระบบที่มีเวลาประวิงอาจคำนวณผ่านทางการคำนวณดรรชนีสมรรถนะของระบบที่ไม่มีเวลาประวิงได้ ในบทถัดไปกล่าวถึงการคำนวณหาค่าดรรชนีสมรรถนะซึ่งเริ่มจากการกำหนดรูปแบบปัญหาเสียก่อน แล้วจึงประยุกต์ใช้หลักวิธีเชิงวิเคราะห์ในการแก้ปัญหาดังกล่าว

2.8 สรุป

เนื้อหาในบทนี้เริ่มจากนิยามของดรรชนีสมรรถนะรวมถึงปริภูมิของสัญญาณเข้าที่พิจารณา จากนั้นเราได้วิเคราะห์ลักษณะสมบัติพื้นฐานของดรรชนีสมรรถนะ ได้แก่เงื่อนไขซึ่งทำให้ดรรชนีสมรรถนะมีค่าจำกัดและความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะ นอกจากนี้เราได้กล่าวถึงขอบเขตบนสองชนิดของค่าดรรชนีสมรรถนะ ซึ่งมีประโยชน์สำหรับการทดสอบค่าดรรชนีสมรรถนะต่อไป สุดท้ายเนื้อหายังครอบคลุมถึงการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ โดยอาศัยการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณ และการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบที่มีเวลาประวิงอีกด้วย

บทที่ 3

การคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ

Zakian [44] ได้พิจารณาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ บนปริภูมิสัญญาณเข้าที่เกิดจากการรวมกันของปริภูมิสัญญาณเข้าย่อยๆ ในบางลักษณะ ตัวอย่างเช่นถ้าเราพิจารณาปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ที่มีทั้งสัญญาณที่มีข้อจำกัดของขนาดเพียงอย่างเดียว กับสัญญาณที่มีข้อจำกัดของอนุพันธ์เพียงอย่างเดียว กำหนดให้ $\mathcal{W}_M \triangleq \{w_M : |w_M| \leq M\}$ แทนปริภูมิสัญญาณเข้าที่มีข้อจำกัดขนาด และ $\mathcal{W}_D \triangleq \{w_D : |\dot{w}_D| \leq D, w(0) = 0\}$ แทนปริภูมิสัญญาณเข้าที่มีข้อจำกัดของอนุพันธ์ แล้วนิยาม $\mathcal{W}$ ดังนี้

$$\mathcal{W} \triangleq \{w_1 + w_2 : w_1 \in \mathcal{W}_1, w_2 \in \mathcal{W}_2\} \tag{3.1}$$

จะได้ว่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ ซึ่งเป็นค่าสัญญาณออกสูงสุดของระบบ $h(t)$ ที่เหมาะสม (โดยมีเงื่อนไขว่า $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$) มีค่าดังนี้

$$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 \tag{3.2}$$

เมื่อ $\hat{z}_1$ และ $\hat{z}_2$ มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{z}_1 &= M\int_0^\infty |h(t)|dt \\ \hat{z}_2 &= D\int_0^\infty |s(t)|dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

โดย $s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$ นอกจากนี้ถ้าเราพิจารณาปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ซึ่งเป็นยูเนียนของ $\mathcal{W}_1$ และ $\mathcal{W}_2$ หรือ $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ จะได้ว่าค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ มีค่าดังนี้

$$\hat{z} = \max\{\hat{z}_1, \hat{z}_2\} \tag{3.4}$$

เมื่อ $\hat{z}_1$ และ $\hat{z}_2$ มีค่าดังสมการ (3.3) จากทั้งสองตัวอย่างจะเห็นได้ว่าถ้าเราทราบการคำนวณดรรชนีสมรรถนะที่เกี่ยวพันกับเฉพาะ $\mathcal{W}_1$ และ $\mathcal{W}_2$ แต่ละตัว เราก็อาจคำนวณดรรชนีสมรรถนะที่เกี่ยวพันกับ $\mathcal{W}$ ซึ่งซับซ้อนขึ้นได้ อย่างไรก็ตามยังไม่มีวิธีคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะสำหรับ $\mathcal{W}$ ซึ่งเป็นอินเตอร์เซกชันระหว่าง $\mathcal{W}_1$ และ $\mathcal{W}_2$ ($\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$) มิเช่นนั้นแล้วงานในการคำนวณดรรชนีสมรรถนะ สำหรับปริภูมิสัญญาณเข้าที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ (ซึ่งมีทั้งข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ของสัญญาณ) ก็อาจสำเร็จได้ไม่ยากนัก

3.1 การกำหนดรูปแบบปัญหาปฐมภูมิ

แนวทางในการกำหนดรูปแบบปัญหาปฐมภูมิ เริ่มต้นจากการทำให้ดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาอยู่ในรูปที่ง่ายก่อน ดรรชนีสมรรถนะที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นดังที่นิยามไว้ในตอนที่ 2.2 นั่นคือ

$$\hat{z} = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} |z(t,w)| \tag{3.5}$$

เมื่อ w และ z ถูกกำหนดดังนี้

$$w \in \{w(t) : |w(t)| \leq M, \ |\dot{w}(t)| \leq D, \ \forall t \geq 0\} \tag{3.6}$$

$$z(t,w) = \int_0^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.7}$$

ดรรชนีสมรรถนะในสมการ (3.5) อาจแสดงได้ในลักษณะของสังวัตนาการทางเวลาของสัญญาณเข้า และผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบที่พิจารณาดังนี้

$$\hat{z} = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} |w(t) * h(t)| \tag{3.8}$$

นอกจากนั้นเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ที่ปรากฏอยู่ข้างซ้ายของสมการ (3.8) อาจละทิ้งได้กล่าวคือ

$$\hat{z} = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} \{w(t) * h(t)\} \tag{3.9}$$

ทั้งนี้เนื่องจากความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้า-สัญญาณออกในสมการ (3.7) เป็นเชิงเส้น และข้อจำกัดของสัญญาณเข้า w ทางด้านบวก $(+M, \ +D)$ และทางด้านลบ $(-M, \ -D)$ ในสมการ (3.6) มีขนาดเท่ากัน แตกต่างกันเพียงเครื่องหมาย ดังนั้นเมื่อพิจารณาจากสมการ (3.7) สัญญาณออกที่มีค่าสูงสุด (ซึ่งเป็นค่าบวก) และค่าสัญญาณออกที่มีค่าต่ำสุด (ซึ่งเป็นค่าลบ) จะมีขนาดเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงข้ามกัน (นั่นคือสัญญาณเข้าซึ่งให้ค่าสัญญาณออกสูงสุด และสัญญาณเข้าซึ่งให้ค่าสัญญาณออกต่ำสุดจะมีขนาดเท่ากันที่เวลาใดๆ แต่เครื่องหมายตรงข้ามกัน) และค่าสัญญาณออกที่มีค่าสูงสุดนี้ (ซึ่งเป็นค่าบวก) ก็จะเท่ากันกับค่าดรรชนีสมรรถนะในสมการ 3.8 (เนื่องจากค่าสัมบูรณ์ของจำนวนบวกคือตัวมันเอง)

ต่อไปถ้าเราพิจารณาดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}(t)$ ที่มีนิยามดังนี้

$$\hat{z}(t) \triangleq \sup_{w \in \mathcal{W}} \{w(t) * h(t)\} \tag{3.10}$$

ในที่นี้ $\hat{z}(t)$ คือค่าสัญญาณออกสูงสุดที่เป็นไปได้ซึ่งพิจารณาจากสัญญาณเข้า w ทุกสัญญาณที่เป็นสมาชิกของเซต $\mathcal{W}$ แต่พิจารณาที่เวลาเจาะจง t ใดๆ ดังนั้นเราจึงใส่อาร์กิวเมนต์ t เพิ่มเข้าไปในสัญกรณ์ $\hat{z}$ ถ้าสมมติให้ $w(0) = 0$ จะพบว่า $\hat{z}(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ลดลง (Nondecreasing function) ของเวลา [8] กล่าวคือ ถ้าเราให้ w_1 เป็นสัญญาณเข้าสูงสุด ที่ทำให้เกิดค่าสัญญาณออกสูงสุดที่เวลา t_1 หรือค่าดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}(t_1)$ นั่นคือ

$$w_1 = \operatorname*{argsup}_{w \in \mathcal{W}} \{w(t_1) * h(t_1)\} \tag{3.11}$$

เมื่อพิจารณาสัญญาณออก $z(t_2, w)$ ที่ $t_2 > t_1$ จะพบว่ามี w_2 ตัวหนึ่งซึ่งทำให้ $z(t_2, w_2) = \hat{z}(t_1)$ โดย w_2 มีค่าดังนี้

$$w_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \Delta t \\ w_1(t - \Delta t), & t \ge \Delta t \end{cases} \tag{3.12}$$

เมื่อ $\Delta t = t_2 - t_1$ รูปที่ 3.1 แสดงสัญญาณเข้า w_1, w_2 และผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t_1 - t)$ ที่นำมาสังวัตน์กับ w_1 ในช่วงเวลา 0 ถึง t_1 และ $h(t_2 - t)$ ที่นำมาสังวัตน์กับ w_2 ในช่วงเวลา 0 ถึง t_2

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าที่เวลา $t_2 > t_1$ จะมี $z(t_2, w_2)$ ซึ่ง $z(t_2, w_2) = \hat{z}(t_1)$ นั่นหมายถึง $\hat{z}(t_2) \ge \hat{z}(t_1)$ หรือ

$$\sup_{w \in \mathcal{W}} \{w(t_2) * h(t_2)\} \ \ge \ \sup_{w \in \mathcal{W}} \{w(t_1) * h(t_1)\} \tag{3.13}$$

เพราะฉะนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่า

$$\sup_{w \in \mathcal{W}} \lim_{t \to \infty} \{w(t) * h(t)\} \ \ge \ \sup_{w \in \mathcal{W}} \{w(\tau) * h(\tau)\} \qquad \text{เมื่อ } \tau < \infty \tag{3.14}$$

ดังนั้นถ้าเราเพิ่มข้อกำหนด $w(0) = 0$ เข้าไปในปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ แล้ว ดังนั้นดรรชนีสมรรถนะในสมการ (3.9) อาจเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\hat{z} = \sup_{w \in \mathcal{W}} \lim_{t \to \infty} \{w(t) * h(t)\} \tag{3.15}$$

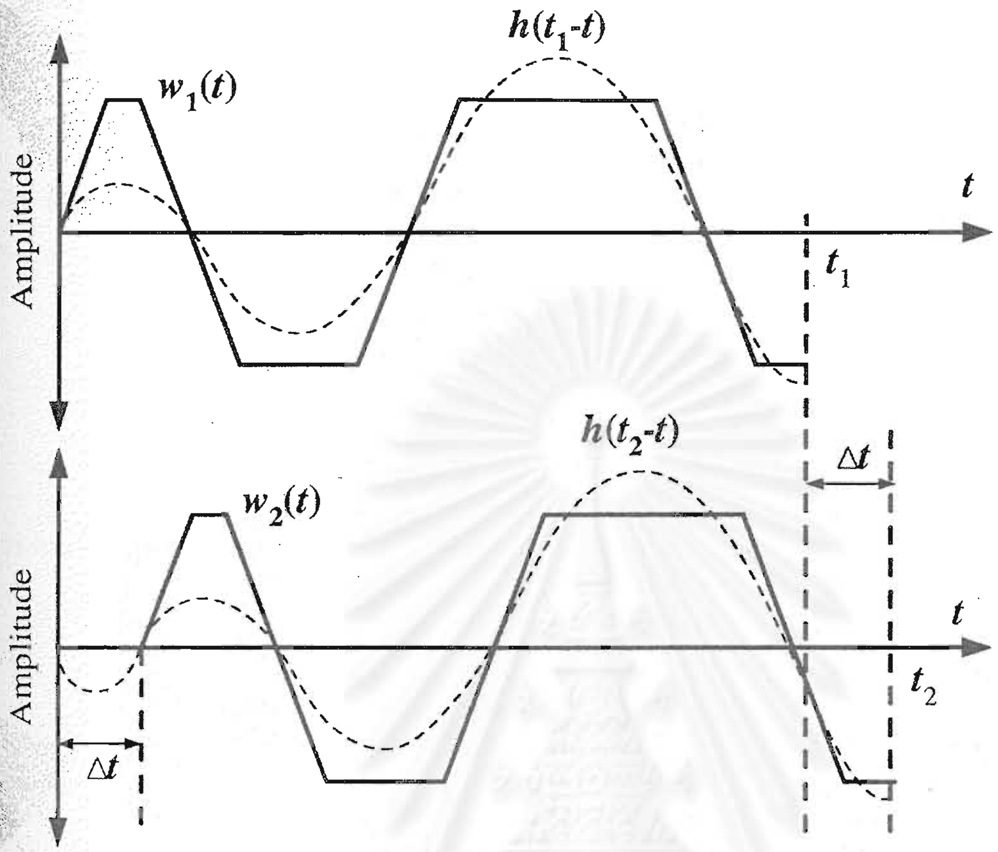
กล่าวอย่างง่ายคือ ถ้าเราขยายช่วงเวลาของสังวัตนาการให้กว้างขึ้นระยะในการคำนวณค่าปริพันธ์ก็จะสูงขึ้น ค่าสัญญาณออกสูงสุดที่เป็นไปได้ก็จะมีค่ามากขึ้น ดังนั้นค่าดรรชนีสมรรถนะหรือค่าสัญญาณออกสูงสุดสำหรับ w ทุกตัวใน $\mathcal{W}$ และสำหรับทุกๆ เวลา $t \ge 0$ จะเกิดขึ้นเมื่อเราขยายช่วงเวลาของสังวัตนาการไปถึงอนันต์นั่นเอง

ค่าประมาณเวลาจำกัดของดรรชนีสมรรถนะ

ตามที่ได้กล่าวไปในตอนก่อนหน้านี้ เราพบว่าในกรณีที่สัญญาณเข้าสูงสุดมีข้อกำหนดบนค่าเริ่มต้น $w(0) = 0$ ดรรชนีสมรรถนะหรือสัญญาณออกสูงสุดจะเกิดขึ้นที่เวลาเท่ากับอนันต์ อย่างไรก็ตามในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราพิจารณาปริภูมิของสัญญาณเข้าที่มีข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์เท่านั้น โดยไม่จำกัดค่าเริ่มต้น นั่นคือ $w(0)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\hat{z}(t)$ อาจไม่เป็นฟังก์ชันที่ไม่ลดลงตามเวลากล่าวคือไม่เป็นฟังก์ชันทางเดียว (Monotonic function) อีกนัยหนึ่งคือดรรชนีสมรรถนะหรือสัญญาณออกสูงสุดไม่จำเป็นต้องเกิดที่เวลาเท่ากับอนันต์ ในที่นี้เรากำหนดให้ความแตกต่างระหว่างค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์ในสมการ (3.15) ซึ่งแทนโดย $\hat{z}(\infty)$ กับค่าดรรชนีสมรรถนะจริง มีค่าเท่ากับ ϵ_∞ นั่นคือ

$$\hat{z} - \hat{z}(\infty) = \epsilon_\infty \tag{3.16}$$

สังเกตว่าค่า ϵ_∞ ต้องเป็นค่าบวกเนื่องจากดรรชนีสมรรถนะซึ่งคำนวณที่เวลาอนันต์ย่อมน้อยกว่าดรรชนีสมรรถนะจริง ถ้าหากค่าความแตกต่าง ϵ_∞ นี้มีค่าสูงอย่างมีนัยสำคัญ ก็อาจทำให้ค่าดรรชนีสมรรถนะที่



รูปที่ 3.1: สังวัตนาการระหว่าง $h(t_1 - t)$ กับสัญญาณเข้า w_1 ตั้งแต่ 0 ถึง t_1 และสังวัตนาการระหว่าง $h(t_2 - t)$ กับสัญญาณเข้า w_2 ตั้งแต่ 0 ถึง t_2

คำนวณได้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นเพียงขอบเขตล่างของดรรชนีสมรรถนะจริงเท่านั้น ถึงกระนั้นก็ตามเราพบว่าสำหรับระบบใดๆ ที่พิจารณาบนปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ หนึ่งๆ ถ้าหากค่าจำกัดอนุพันธ์ D มีค่าสูง ($\frac{2M}{D}$ น้อยกว่าค่าคงตัวเวลาของระบบในระดับหนึ่ง) ค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์จะใกล้เคียงกับค่าดรรชนีสมรรถนะจริงนั่นคือ $\epsilon_\infty \approx 0$ อนึ่งในตอนท้ายของบทที่ 4 เราได้ทดสอบโปรแกรมซึ่งพัฒนาขึ้นเพื่อคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ และได้แสดงให้เห็นถึงระบบตัวอย่างบางระบบซึ่งมีค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์ใกล้เคียงกับค่าดรรชนีสมรรถนะจริง ($\epsilon_\infty \approx 0$) และระบบตัวอย่างซึ่งมีค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์แตกต่างกับค่าดรรชนีสมรรถนะจริง ($\epsilon_\infty > 0$)

เนื่องจากค่า ϵ_∞ นั้นไม่สามารถคำนวณได้ ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงพิจารณาเพียงการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์เท่านั้น นั่นคือต้องการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะในสมการ (3.15) ซึ่งอาจมีความแตกต่างจากค่าดรรชนีสมรรถนะจริงบ้างในบางกรณี เมื่อเราพิจารณาค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์พบว่าเราอาจคำนวณค่าประมาณของค่าดรรชนีสมรรถนะดังกล่าวให้มีความแม่นยำเท่าใดก็ได้ (Arbitrarily accurate) โดยการประมาณเวลาสุดท้าย T ในการคำนวณสังวัตนาการ $w(t) * h(t)$ ถึงแค่จุดเวลาค่าหนึ่ง ระดับความแม่นยำของการประมาณในลักษณะนี้จะมีค่าตามต้องการได้ถ้าหากขยายเวลา

ในการคำนวณค่าปริพันธ์ T ให้มีขนาดใหญ่เพียงพอ นิยามค่าประมาณเวลาจำกัดของดรรชนีสมรรถนะ (Finite horizon approximated performance index) ที่เวลา T ดังต่อไปนี้

$$\hat{z}(T) \triangleq \sup_{w\in\mathcal{W}} \{w(T) * h(T)\} \tag{3.17}$$

ค่าผิดพลาดในการประมาณอาจคำนวณได้ดังนี้ สมมติให้ระบบเชิงเส้น $h(t)$ เป็นระบบที่เหมาะสมจะได้ว่า $h(t)$ มีเสถียรภาพ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty$$

ดังนั้นสำหรับจำนวนบวก ϵ ใดๆ จะมีเวลา T ที่ทำให้

$$\int_T^\infty |h(t)|dt < \epsilon$$

เพราะฉะนั้นถ้าพิจารณาค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\hat{z}(\infty) &= \sup_{w\in\mathcal{W}} \lim_{t\to\infty} \{w(t) * h(t)\} \\
&= \sup_{w\in\mathcal{W}} \lim_{t\to\infty} \left\{\int_0^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau\right\} \\
&= \sup_{w\in\mathcal{W}} \lim_{t\to\infty} \left\{\int_0^T h(\tau)w(T-\tau)d\tau + \int_T^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau\right\} \\
&= \sup_{w\in\mathcal{W}} \left\{\int_0^T h(\tau)w(T-\tau)d\tau + \lim_{t\to\infty}\int_T^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau\right\} \\
&\le \sup_{w\in\mathcal{W}} \left\{\int_0^T h(\tau)w(T-\tau)d\tau\right\} + \sup_{w\in\mathcal{W}} \left\{\lim_{t\to\infty}\int_T^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau\right\} \\
&= \hat{z}(T) + \sup_{w\in\mathcal{W}} \left\{\lim_{t\to\infty}\int_T^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau\right\} \\
&\le \hat{z}(T) + \left\{\int_T^\infty M\,\mathrm{sgn}\{h(\tau)\}h(\tau)d\tau\right\} \\
&= \hat{z}(T) + M\left\{\int_T^\infty |h(\tau)|d\tau\right\} \\
&= \hat{z}(T) + M\epsilon
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่าค่าผิดพลาดในการประมาณเวลาจำกัดที่เวลา T มีค่าดังต่อไปนี้

$$\hat{z}(\infty) - \hat{z}(T) \le M\epsilon \tag{3.18}$$

จากสมการ (3.16) และสมการ (3.18) พบว่าค่าผิดพลาดรวมในการประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด T คือ

$$\hat{z} - \hat{z}(T) \le M\epsilon + \epsilon_\infty \tag{3.19}$$

เมื่อพิจารณาจากสมการ (3.19) จะเห็นได้ว่าการประมาณเวลาจำกัดที่เวลา T ดังสมการ (3.17) นับเป็นการประมาณภายใน (Inner approximation) กล่าวคือค่าที่ประมาณได้จะเข้าใกล้ค่าจริงทางด้าน*ลบ* เมื่อเวลา

$T \to \infty$ หรือค่าที่ประมาณได้มีค่าน้อยกว่าค่าแท้จริงเสมอ ($M\epsilon$, $\epsilon_\infty > 0$) และจะเห็นได้ว่าถ้าเพิ่มค่า T ให้สูงขึ้น จะทำให้ค่า ϵ ลดลง และความผิดพลาดในการประมาณก็มีค่าต่ำลง หรือประมาณได้แม่นยำขึ้นนั่นเอง เพื่อให้การอ้างถึงดรรชนีสมรรถนะทำได้ง่ายขึ้นจึงขอตั้งข้อตกลงว่า เมื่อใดที่กล่าวถึงค่าประมาณเวลาจำกัดของดรรชนีสมรรถนะที่เวลา $T \gg \tau$ (เมื่อ τ เป็นค่าคงตัวเวลา (Time constant) ของระบบ) หรือค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์ก็ตาม เราจะเรียกปริมาณทั้งสองว่าค่าดรรชนีสมรรถนะเช่นกัน

3.2 การกำหนดรูปแบบปัญหาทุติยภูมิ

เมื่อพิจารณาดรรชนีสมรรถนะในสมการ (3.17) จะพบว่าปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ อาจกำหนดให้อยู่ในรูปการหาค่าสูงสุดของสัญญาณออกของระบบ $h(t)$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{rlcll} \sup\limits_{w} & z(T,w) & & & \\ \text{subject to} & z(t,w) & = & \int_0^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau & \forall t \geq 0 \\ & |w(t)| & \leq & M & 0 \leq t \leq T \\ & |\dot{w}(t)| & \leq & D & 0 \leq t \leq T \end{array} \tag{3.20}$$

ปัญหาการหาค่าสูงสุดดังกล่าวมีลักษณะเป็นโปรแกรมเชิงเส้นในมิติอนันต์ (Infinite dimensional linear programming) เนื้อหาเกี่ยวกับการหาค่าเหมาะที่สุดในลักษณะนี้กล่าวอยู่ใน [45] การที่ปัญหามีลักษณะเป็นเชิงเส้นย่อมหมายถึงปัญหามีลักษณะคอนเวกซ์ด้วย ความเป็นคอนเวกซ์ของปัญหานี้ทำให้เราทราบว่าค่าสูงสุดนั้นมีค่าเดียว และเงื่อนไขจำเป็นสำหรับคำตอบสูงสุด (สัญญาณเข้าสูงสุด) ย่อมเป็นเงื่อนไขเพียงพอด้วยเช่นกันเนื่องจากปัญหาไม่มีจุดสุดขีด (Extremum) อื่นอีก

นอกจากนี้ถ้าให้ $H(s) = \mathcal{L}(h(t)) = C(sI - A)^{-1}B$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $h(t)$ สมการสถานะของระบบคือสมการ (2.6) โดยที่ (A, B, C) เป็นผลสัมฤทธิ์ต่ำสุด (Minimal realization) ของระบบ $H(s)$ จะได้ว่าปัญหาการหาค่าสูงสุดในสมการ (3.20) อาจแสดงได้ในอีกลักษณะหนึ่งดังนี้

$$\begin{array}{rlcll} \sup\limits_{w} & Cx(T) & & & \\ \text{subject to} & \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bw(t) & \\ & |w(t)| & \leq & M & 0 \leq t \leq T \\ & |\dot{w}(t)| & \leq & D & 0 \leq t \leq T \end{array} \tag{3.21}$$

ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดในสมการ (3.21) นี้ มีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรสถานะ มีเงื่อนไขสมการพลวัต (Dynamic equality constraint) เงื่อนไขอสมการ (Inequality constraint) และอสมการพลวัต (Dynamic inequality constraint) จะเห็นได้ว่าสัญญาณเข้า w มีทั้งเงื่อนไขอสมการของขนาดและอนุพันธ์ ต่อไปนี้เราจะนำปัญหาดังกล่าวมากำหนดรูปแบบปัญหาอีกครั้งโดยเปลี่ยนให้อยู่ในรูปปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด (Optimal control) ที่มีเงื่อนไขอสมการบนสัญญาณควบคุม และเงื่อนไขอสมการบนตัวแปรสถานะ ซึ่งทำได้โดยนิยามตัวแปรใหม่ $x_{n+1}(t)$ เป็นเสมือนตัวแปรสถานะของระบบ

$h(t)$ ที่เพิ่มขึ้นมา และ $u(t)$ เป็นสัญญาณควบคุมดังนี้

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &\triangleq w(t) \\ u(t) &\triangleq \dot{w}(t) \end{aligned}$$

พิจารณาเวลาเริ่มต้นเป็น 0 และเวลาสุดท้ายเป็น T นิยามฟังก์ชันนัลต้นทุน (Cost functional) J ดังนี้

$$\mathcal{J} \triangleq Cx(T) \tag{3.22}$$

สังเกตว่า $\mathcal{J}$ ประกอบด้วยต้นทุนเวลาสุดท้าย (Terminal cost) เท่านั้น นั่นคือ $\mathcal{J}$ ขึ้นกับค่าตัวแปรสถานะที่เวลาสุดท้ายโดยไม่พิจารณาที่เวลาอื่นๆ ปัญหาการหาค่าสูงสุดที่กำหนดใหม่อีกครั้งเป็นดังนี้

$$\begin{array}{lll} \sup\limits_{u} & \mathcal{J} & \\ \text{subject to} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx_{n+1}(t) & x(0) = 0 \\ & \dot{x}_{n+1}(t) = u(t) & x_{n+1}(0) \text{ ไม่กำหนด} \\ & -M \le x_{n+1}(t) \le M & 0 \le t \le T \\ & -D \le u(t) \le D & 0 \le t \le T \end{array} \tag{3.23}$$

เราจะนำปัญหาที่กำหนดได้นี้มาคำนวณหาคำตอบ $u(t)$ และ $x_{n+1}(t)$ โดยประยุกต์ใช้วิธีเชิงตัวเลข และวิธีเชิงวิเคราะห์ตามลำดับ

3.3 แนวทางการหาคำตอบด้วยวิธีเชิงตัวเลข

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้พิจารณาการแก้ปัญหาที่กำหนดขึ้นด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์เป็นหลัก อย่างไรก็ตามเราจะแสดงแนวทางในการแก้ปัญหาด้วยวิธีเชิงตัวเลขไว้ด้วย (ซึ่งเป็นวิธีที่ได้เลือกใช้ในตอนแรก) ทั้งนี้เพื่อให้เห็นภาพของปัญหากว้างขึ้นและเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์ซึ่งจะนำเสนอในตอนถัดไปด้วย

สำหรับวิธีเชิงตัวเลขนี้ Sage และ White ได้กล่าวไว้ใน [16] อสมการบนตัวแปรสถานะ $x_{n+1}(t)$ อาจแทนได้ด้วยสมการพลวัตของตัวแปรสถานะใหม่ x_{n+2} และ x_{n+3} ดังต่อไปนี้

$$\dot{x}_{n+2}(t) = (x_{n+1}(t) - M)^2\mathcal{U}(x_{n+1}(t) - M) \qquad x_{n+2}(0) = x_{n+2}(T) = 0 \tag{3.24}$$

$$\dot{x}_{n+3}(t) = (x_{n+1}(t) + M)^2\mathcal{U}(-x_{n+1}(t) - M) \qquad x_{n+3}(0) = x_{n+3}(T) = 0 \tag{3.25}$$

เมื่อ $\mathcal{U}(x)$ คือฟังก์ชันขั้นเฮวิไซด์ (Heaviside step function) ซึ่งนิยามดังนี้

$$\mathcal{U}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases}$$

จากสมการ (3.24), (3.25) จะเห็นได้ว่าค่าอนุพันธ์ $\dot{x}_{n+2}(t)$ และ $\dot{x}_{n+2}(t)$ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ โดยที่จะมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $x_{n+1}(t)$ อยู่ภายในบริเวณที่กำหนด ($-M \le x_{n+1} \le M$) และมีค่ามากกว่าศูนย์เมื่อ $x_{n+1}(t)$ ละเมิดข้อจำกัด แต่เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ของ

$x_{n+2}(t)$ และ $x_{n+3}(t)$ ที่เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นหมายความว่า $\dot{x}_{n+2}(t) = 0$ และ $\dot{x}_{n+2}(t) = 0$ ตลอดเวลา $0 \leq t \leq T$ ซึ่งชี้ให้เห็นว่า $x_{n+1}(t)$ ต้องอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนดเท่านั้นตลอดเวลา $0 \leq t \leq T$ จากนั้นเรานิยามฟังก์ชันฮามิลโทเนียน (Hamiltonian) เพื่อใช้สำหรับหาเงื่อนไขจำเป็นดังนี้

$$\mathcal{H}(x, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, u, p, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}) \triangleq p^T(Ax + Bx_{n+1}) + p_{n+1}u$$
$$+ \; p_{n+2}\{(x_{n+1}(t) - M)^2\mathcal{U}(x_{n+1}(t) - M)\} \; + \; p_{n+3}\{(x_{n+1}(t) + M)^2\mathcal{U}(-x_{n+1}(t) - M)\}$$

เมื่อ $p(t)$ ตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange multiplier) ที่เกี่ยวข้องกับ $x(t)$ โดยจะเป็นเวกเตอร์หรือสเกลาร์ก็ได้ ขึ้นอยู่กับมิติของ $x(t)$

$p_{n+1}(t)$ ตัวคูณลากรานจ์ที่เกี่ยวข้องกับ $x_{n+1}(t)$

$p_{n+2}(t)$ ตัวคูณลากรานจ์ที่เกี่ยวข้องกับ $x_{n+2}(t)$

$p_{n+3}(t)$ ตัวคูณลากรานจ์ที่เกี่ยวข้องกับ $x_{n+3}(t)$

สังเกตว่าฟังก์ชันฮามิลโทเนียนไม่ขึ้นกับฟังก์ชันนัลต้นทุน $\mathcal{J}$ เลย เนื่องจาก $\mathcal{J}$ มีแต่พจน์ของต้นทุนเวลาสุดท้ายเท่านั้น ส่วนเงื่อนไขจำเป็นสำหรับสัญญาณควบคุม $u(t)$ ที่เหมาะที่สุด (Optimal control signal) เงื่อนไขจำเป็นสำหรับวิถีโคจรของ $x(t)$ และ $x_{n+1}(t)$ ที่เหมาะที่สุด (Optimal trajectory) และเงื่อนไขค่าขอบเขตของ $p_i(T)$, $i = 1, \ldots, n+3$ อาจคำนวณได้ดังต่อไปนี้

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad i = 1, \ldots, n+3$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \qquad i = 1, \ldots, n+3$$
$$p_i(T) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i(T)}$$
$$\mathcal{H}(x, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, u^*, p, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}) \geq \mathcal{H}(x, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, u, p, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3})$$

เมื่อ $u^*(t)$ คือสัญญาณควบคุมที่เหมาะที่สุด ปัญหาที่ได้มีลักษณะเป็น*ปัญหาค่าขอบเขตสองจุด* (Two point boundary value problem: TPBVP) จุดหนึ่งคือที่เวลาเริ่มต้น และอีกจุดที่เวลาสุดท้าย ปัญหาค่าขอบเขตสองจุดนี้อาจหาคำตอบได้โดยง่ายถ้าระบบเป็นเชิงเส้น แต่จะเห็นได้ว่าสมการพลวัตของ x_{n+2} และ x_{n+3} ไม่เป็นเชิงเส้น วิธีการแก้ปัญหาจึงยุ่งยากขึ้น ขั้นตอนวิธีที่มักนำมาใช้คือวิธีเกรเดียนท์ (Gradient method) และวิธีทำให้เป็นกึ่งเชิงเส้น (Quasilinearization) สำหรับปัญหาที่มีทั้งข้อจำกัดของสัญญาณควบคุมและตัวแปรสถานะในลักษณะนี้มักใช้วิธีเกรเดียนท์มาหาคำตอบ อย่างไรก็ตามเงื่อนไขจำเป็นที่คำนวณได้นั้นไม่อาจนำไปคำนวณหาสัญญาณควบคุม $u(t)$ ที่เหมาะที่สุดด้วยวิธีเชิงตัวเลขได้โดยตรง เนื่องจากวิธีเกรเดียนท์ไม่สามารถบังคับให้ x_{n+2} และ x_{n+3} สอดคล้องเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองจุดได้ และยังไม่สามารถบังคับให้ $u(t)$ อยู่ภายในขอบเขตได้เช่นกัน ดังนั้นจึงต้องเพิ่มพจน์สำหรับลงโทษ (Penalty term) ลงไปในฟังก์ชันนัลต้นทุน เพื่อให้ต้นทุนมีค่าสูงเมื่อเงื่อนไขบังคับบน $u(t)$ หรือ $x_{n+1}(t)$ ถูกละเมิดในแต่ละรอบการ

คำนวณ ฟังก์ชันนัลต้นทุนใหม่จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} J &= Cx(T) + \frac{1}{2}S_1 x_{n+2}^2(T) + \frac{1}{2}S_2 x_{n+3}^2(T) \\ &\quad + \int_0^T Q_1(u-D)^2 \mathcal{U}(u-D) + Q_2(u+D)^2 \mathcal{U}(-u-D)dt \end{aligned} \tag{3.26}$$

เมื่อ S_1, S_2 เป็นพจน์ลงโทษสำหรับค่าขอบเขตที่เวลาสุดท้ายของ $x_{n+2}(t)$, $x_{n+3}(t)$ ซึ่งพยายามลดค่า $x_{n+2}(T)$ และ $x_{n+3}(T)$ ให้มีค่าต่ำๆ (เข้าใกล้ศูนย์) ซึ่งหมายความว่า $x_{n+1}(t)$ มีแนวโน้มที่จะวางตัวอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนด ส่วน Q_1, Q_2 เป็นพจน์ลงโทษสำหรับสัญญาณควบคุมดังจะเห็นได้จากสมการ (3.26) ถ้าสัญญาณควบคุมมีค่าเกินขอบเขตที่กำหนด ฟังก์ชันขั้นเฮวิไซด์ก็จะไม่เป็นศูนย์และทำให้ฟังก์ชันนัลต้นทุนมีค่าสูงขึ้นไปด้วย จากนั้นจึงนิยามฟังก์ชันฮามิลโทเนียนใหม่ตามฟังก์ชันนัลต้นทุนนี้ และคำนวณเงื่อนไขจำเป็นชุดใหม่ก่อนนำไปหาคำตอบด้วยวิธีเกรเดียนท์ รายละเอียดเพิ่มเติมศึกษาได้จาก [16] อย่างไรก็ตามใน [16] นี้มิได้พิจารณากรณีที่มีข้อจำกัดของสัญญาณควบคุม $u(t)$ และบนตัวแปรสถานะ $x_{n+1}(t)$ พร้อมๆ กัน แต่หากพิจารณาแยกกันแต่ละกรณี นั่นคือฟังก์ชันนัลต้นทุนที่พิจารณาในแต่ละกรณีจะไม่เต็มรูปแบบเหมือนในสมการ (3.26) เมื่อทดลองใช้ฟังก์ชันนัลต้นทุนเต็มรูปแบบ และใช้วิธีเกรเดียนท์คำนวณคำตอบพบว่า วิธีเกรเดียนท์ลู่ออกถึงแม้จะแปรค่าเริ่มต้นไปหลายลักษณะแล้วก็ตาม นอกจากนี้ตามที่แสดงไว้ใน [16] จะเห็นว่ากรณีที่สัญญาณ $u(t)$ มีข้อจำกัด จำเป็นจะต้องเดาเวลาสวิตช์ (Switching time) สำหรับสัญญาณ $u(t)$ ด้วย ปัญหาและความซับซ้อนเหล่านี้ทำให้วิธีเชิงตัวเลขนำมาใช้จริงได้ยาก ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงมุ่งประยุกต์ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ ในการวิเคราะห์ค่าสัญญาณแต่ละตัวออกมาโดยตรง ซึ่งได้กล่าวอยู่ในตอนถัดไป

3.4 แนวทางการหาคำตอบด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์

การหาคำตอบด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ที่เสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้แนวคิดมาจาก [9] โดยเริ่มจากการแปลงอสมการบนตัวแปรสถานะ $x_{n+1}(t)$ ให้อยู่ในรูปเงื่อนไขสมการดังต่อไปนี้

$$x_{n+1}^2(t) + \alpha^2(t) = M^2 \tag{3.27}$$

เมื่อ $\alpha(t)$ เป็นสัญญาณค่าจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการ (3.27) เห็นได้ว่าที่เวลา t หนึ่งๆ $\alpha(t)$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์เมื่อ $x_{n+1}(t)$ มีขนาดน้อยกว่า M ในทางกลับกันถ้าหาก $x_{n+1}(t) = \pm M$ ก็จะได้ว่า $\alpha = 0$ การแทนอสมการด้วยสมการในลักษณะนี้เป็นที่รู้จักกันดีและมักใช้ในกรณีที่สัญญาณบางตัวในระบบมีข้อจำกัดของขนาด จากนั้นเรานิยามฟังก์ชันฮามิลโทเนียนเพื่อใช้สำหรับหาเงื่อนไขจำเป็นดังนี้

$$\mathcal{H}(x, x_{n+1}, u, \alpha, p, p_{n+1}, p_{n+2}) \triangleq p^T(Ax + Bx_{n+1}) + p_{n+1}u + p_{n+2}(M^2 - x_{n+1}^2 - \alpha^2) \tag{3.28}$$

เมื่อ $p(t)$ ตัวคูณลากรานจ์ที่เกี่ยวข้องกับ $x(t)$ โดยจะเป็นเวกเตอร์หรือสเกลาร์ก็ได้ ขึ้นอยู่กับมิติของ $x(t)$

$p_{n+1}(t)$ ตัวคูณลากรานจ์ที่เกี่ยวข้องกับ $x_{n+1}(t)$

$p_{n+2}(t)$ ตัวคูณลากรานจ์ที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขบังคับในสมการ (3.27)

สังเกตว่าฟังก์ชันฮามิลโทเนียนที่นิยามขึ้นไม่มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันนัล $\mathcal{J}$ นั่นเพราะ $\mathcal{J}$ ประกอบด้วยต้นทุนเวลาสุดท้ายเท่านั้น

3.4.1 เงื่อนไขจำเป็นของปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด

สำหรับเงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขค่าขอบเขตอาจคำนวณได้ในทำนองเดียวกันกับวิธีเชิงตัวเลขคือ

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} & \qquad i = 1, \ldots, n+3 \\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} & \qquad i = 1, \ldots, n+3 \\
p_i(T) &= \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i(T)} \\
\mathcal{H}(x, x_{n+1}, u^*, \alpha, p, p_{n+1}) &\geq \mathcal{H}(x, x_{n+1}, u, \alpha, p, p_{n+1})
\end{aligned}
$$

เมื่อ $u^*(t)$ คือสัญญาณควบคุมที่เหมาะที่สุด นอกจากนี้ยังรวมถึงเงื่อนไขจำเป็นของตัวคูณลากรานจ์ $p_{n+2}(t)$ และ $\alpha(t)$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{n+2}} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} &= 0
\end{aligned}
$$

เงื่อนไขจำเป็นทั้งหมดสรุปได้ดังนี้

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx_{n+1}(t) \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{n+1}} = \dot{x}_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}_{n+1}(t) = u(t) \tag{3.30}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \dot{p} \quad \Longrightarrow \quad \dot{p}(t) = -A^T p(t) \tag{3.31}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{n+1}} = \dot{p}_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \dot{p}_{n+1}(t) = -B^T p(t) - 2p_{n+2}(t)x_{n+1}(t) \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{n+2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1}^2(t) + \alpha^2(t) = M^2 \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha(t)p_{n+2}(t) = 0 \tag{3.34}$$

สำหรับเงื่อนไขจำเป็นสำหรับสัญญาณควบคุม $u(t)$ ที่เหมาะที่สุด (ต่อจากนี้ไปเราจะละสัญลักษณ์ '$*$' ซึ่งแสดงถึงคำตอบเหมาะที่สุด โดยเป็นข้อตกลงว่าสัญญาณควบคุมที่จะพิจารณาต่อไปจากนี้ถือเป็นสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุด) อาจพิจารณาได้จากเทอมของฟังก์ชันฮามิลโทเนียน กล่าวคือสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุดต้องทำให้ฟังก์ชันฮามิลโทเนียนมีค่าสูงสุดในบรรดาสัญญาณควบคุมที่เป็นไปได้ทั้งหมด เนื่องจากฟังก์ชันฮามิลโทเนียนดังสมการ (3.28) สัมพันธ์กับสัญญาณควบคุมในรูปแบบเชิงเส้น โดยพจน์ที่คูณอยู่กับสัญญาณควบคุมคือ $p_{n+1}(t)$ ดังนั้นถ้าหากสัญญาณควบคุมมีขนาดสูงสุดได้ไม่เกิน D หรือ $|u(t)| < D$ ก็จะพบว่าสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุดต้องอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$u(t) = D\text{sgn}\{p_{n+1}(t)\} \tag{3.35}$$

เห็นได้ว่าสัญญาณควบคุมดังสมการ (3.35) มีขนาดใหญ่ที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ (คือมีขนาดเป็น D) นอกจากนี้พจน์ของสัญญาณควบคุมในฟังก์ชันฮามิลโทเนียนเมื่อแทนด้วยสมการ (3.35) แล้วจะได้เท่ากับ $D|p_{n+1}(t)|$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอและมีขนาดใหญ่ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ซึ่งทำให้ฟังก์ชันฮามิลโทเนียนมีค่าสูงสุดเทียบกับสัญญาณควบคุมที่เป็นไปได้ทั้งหมด ส่วนเงื่อนไขค่าขอบเขตหรือเงื่อนไขขวาง (Transversality conditions) เป็นดังนี้

$$p(T) = C^T \tag{3.36}$$

$$p_{n+1}(0) = 0 \tag{3.37}$$

$$p_{n+1}(T) = 0 \tag{3.38}$$

จากชุดเงื่อนไขขวางในสมการ (3.36), (3.37) และ (3.38) จะเห็นว่าปัญหาที่ได้นี้เป็นปัญหาค่าขอบเขตสองจุดเช่นเดียวกับการกำหนดรูปแบบปัญหาสำหรับวิธีเชิงตัวเลข อย่างไรก็ตามการกำหนดรูปแบบปัญหาในตอนนี้จะแก้ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ แต่ก่อนนำเงื่อนไขจำเป็นที่ได้ไปวิเคราะห์ เราจะจัดรูปให้เงื่อนไขจำเป็นทั้งหมดมีรูปแบบที่เข้าใจได้ง่ายขึ้น โดยพิจารณาเป็นรายสมการ เริ่มจากสมการ (3.33) ซึ่งเป็นสมการที่เราใช้แทนข้อจำกัดขนาดของตัวแปรสถานะ $x_{n+1}(t)$ พบว่าที่เวลา t ใดๆ

$$|x_{n+1}(t)| < M \iff \alpha(t) \neq 0 \tag{3.39}$$

$$|x_{n+1}(t)| = M \iff \alpha(t) = 0 \tag{3.40}$$

นอกจากนี้จากสมการ (3.34) เห็นได้ว่าที่จุดเวลา t ใดๆ เมื่อ $\alpha(t) \neq 0$ จะทำให้ $p_{n+2}(t) = 0$ ในทางกลับกันถ้าหาก $p_{n+2}(t) \neq 0$ ย่อมได้ว่า $\alpha(t) = 0$ สำหรับสมการ (3.31) เป็นสมการอนุพันธ์รูปแบบเชิงเส้น ซึ่งเมื่อพิจารณาเงื่อนไขค่าขอบเขตที่เวลาสุดท้ายในสมการ (3.36) จะได้ว่า

$$p(t) = e^{A^T(T-t)}C^T \tag{3.41}$$

เมื่อนำค่า $p(t)$ ในสมการ (3.41) ไปแทนในสมการ (3.32) จะได้ว่า

$$\dot{p}_{n+1}(t) = -h(T-t) - 2p_{n+2}(t)x_{n+1}(t) \tag{3.42}$$

และเมื่อคำนวณค่าปริพันธ์สองข้างของสมการ (3.42) ตั้งแต่เวลา t_1 จนถึง t_2 จะได้ผลดังนี้

$$p_{n+1}(t_2) - p_{n+1}(t_1) = \{s(T-t_2) - s(T-t_1)\} - 2\int_{t_1}^{t_2} p_{n+2}(t)x_{n+1}(t)dt \tag{3.43}$$

เมื่อ $s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$ เป็นผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบ $h(t)$ สมการ (3.43) เป็นสมการหลักที่จะใช้ในการวิเคราะห์หาสัญญาณควบคุม $u(t)$ ที่เหมาะที่สุด และวิถีโคจร (Trajectory) ของตัวแปรสถานะ $x_{n+1}(t)$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $u(t)$ ดังกล่าว

3.4.2 ผลเฉลยเอกฐานของปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด

เงื่อนไขจำเป็นของสัญญาณควบคุม $u(t)$ ที่เหมาะที่สุดดังสมการ (3.35) ได้มาจากเงื่อนไขจำเป็นที่ว่าฟังก์ชันฮามิลโทเนียนของการควบคุมที่เหมาะที่สุด จะต้องมีค่ามากที่สุดเสมอ ดังนั้นเมื่อฟังก์ชันฮามิลโทเนียน

ในสมการ (3.28) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ $u(t)$ เงื่อนไข $u(t) = D\text{sgn}\{p_{n+1}(t)\}$ จึงทำให้ $u(t)$ เป็นสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุด อย่างไรก็ตามจากสมการ (3.28) จะเห็นว่าถ้า $p_{n+1}(t) = 0$ ตลอดช่วงเวลา $t_1 \leq t \leq t_2$ ค่าฟังก์ชันฮามิลโทเนียนจะไม่ขึ้นกับ $u(t)$ ทำให้เราต้องคำนวณสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุดด้วยวิธีอื่นแทน สัญญาณคำตอบ $u(t)$ ที่ได้จากการคำนวณในเหตุการณ์ลักษณะนี้เรียกว่า*ผลเฉลยเอกฐาน* (Singular solution) ของปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด

ขั้นตอนการพิจารณาค่าสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุดในช่วงเวลา $t_1 \leq t \leq t_2$ ทำได้ดังนี้

1. เนื่องจาก $p_{n+1}(t) = 0$ ตลอดทั้งช่วงเวลา ดังนั้นอนุพันธ์ $\dot{p}_{n+1} = 0$ ทั้งช่วงเวลาเช่นกัน
2. ดังนั้นจากสมการ (3.42) จะได้ว่า $2p_{n+2}(t)x_{n+1}(t) = -h(T-t)$
3. แต่เพราะผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ เป็นผลตอบของระบบเชิงเส้นทำให้ $h(T-t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด (Differentiable) ดังนั้น $p_{n+2} \neq 0$ ตลอดทั้งช่วงเวลา (อย่างไรก็ตาม p_{n+2} อาจเท่ากับ 0 ได้ในบางจุดเวลา)
4. จากสมการ (3.34) เมื่อ p_{n+2} ไม่เป็น 0 ตลอดทั้งช่วงเวลา ทำให้ $\alpha(t) = 0$ ทั้งช่วง
5. ดังนั้นจากสมการ (3.33) จะได้ว่า $|x_{n+1}(t)| = M$ ทั้งช่วงเวลา
6. นั่นหมายถึงอนุพันธ์ $\dot{x}_{n+1}(t) = 0$ และจากสมการ (3.30) ได้ว่า $u(t) = 0$ ตลอดทั้งช่วงเวลา

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $u(t) = 0$ ในช่วงเวลา $t_1 \leq t \leq t_2$ เมื่อ $p_{n+1}(t) = 0$ ดังนั้นเงื่อนไขจำเป็น $u(t) = D\text{sgn}\{p_{n+1}(t)\}$ ดังสมการ (3.35) ยังคงใช้ได้อยู่ การควบคุมในลักษณะนี้คล้ายกับการควบคุมแบบแบง-แบง (Bang-Bang control) ซึ่งสัญญาณควบคุมวางตัวอยู่ที่ค่าสุดขีด (Extremum value) ที่เป็นไปได้สองค่า (ในที่นี้คือ $\pm D$) แต่สำหรับการควบคุมที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะมีบางช่วงเวลาที่เป็นศูนย์ตลอด ซึ่งเป็นส่วนที่แตกต่างจากการควบคุมแบบ Bang-Bang

จากการวิเคราะห์ดังกล่าวอาจสรุปความสัมพันธ์ของเงื่อนไข $p_{n+1}(t) = 0$, $u(t) = 0$, และเงื่อนไข $|x_{n+1}(t)| = M$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} p_{n+1}(t) = 0 & \Longleftrightarrow & u(t) = 0 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & |x_{n+1}(t)| = M & \end{array}$$

อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าไม่เพียงแต่ $p_{n+1}(t) = 0 \longrightarrow |x_{n+1}(t)| = M$ เท่านั้น หากแต่ $|x_{n+1}(t)| = M \longrightarrow u(t) = 0 \longrightarrow p_{n+1}(t) = 0$ เช่นกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$|x_{n+1}(t)| = M \quad \Longleftrightarrow \quad p_{n+1}(t) = 0 \tag{3.44}$$

นอกจากนี้เนื่องจากสัญญาณควบคุม $u(t)$ มีขนาดได้ไม่เกิน D และ $u(t)$ ก็เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $x_{n+1}(t)$ (ตามที่นิยามไว้) ดังนั้น $x_{n+1}(t)$ จึงไม่สามารถเปลี่ยนค่าระหว่าง $+M$ และ $-M$ ได้ทันที กล่าวคือ

$x_{n+1}(t)$ ต้องมีค่าต่อเนื่องในช่วงนี้ซึ่ง $p_{n+1}(t) = 0$ ดังนั้นสมการ (3.44) อาจแสดงได้อีกแบบหนึ่งคือ

$$p_{n+1}(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_{n+1}(t) &= +M \quad \text{หรือ} \\ x_{n+1}(t) &= -M \end{cases} \tag{3.45}$$

ตลอดช่วงเวลา t ซึ่งเกิดผลเฉลยเอกฐานขึ้น ความรู้ที่ได้จากสมการนี้จะเป็นส่วนสำคัญเพื่อใช้วิเคราะห์สัญญาณ $u(t)$ และ $x_{n+1}(t)$ ต่อไป

3.4.3 เงื่อนไขมุม

วิถีโคจรที่เป็นไปได้ทั้งหมด (Admissible trajectories) ของปัญหา (3.23) (ในที่นี้ได้แก่วิถีโคจรของสัญญาณควบคุมและตัวแปรสถานะทุกตัว) ได้พิจารณารวมถึงวิถีโคจรที่ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ทุกจุด (Nondifferentiable) ด้วยเช่นกัน วิถีโคจรในลักษณะนี้อาจมีบางจุดที่อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งไม่ต่อเนื่อง หรือเกิดการ*หักมุม*ขึ้นนั่นเอง อย่างไรก็ตามที่จุดหักมุมแต่ละจุดนี้มีเงื่อนไขจำเป็นเงื่อนไขหนึ่งซึ่งบังคับให้วิถีโคจรเหมาะที่สุดต้องเป็นไปตามข้อกำหนด เราเรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขมุม (Corner conditions) หรือมีชื่อเต็มว่า*เงื่อนไขมุมของไวแยร์สตราส-เอิร์ดแมน* (Weierstrass-Erdman corner conditions) ซึ่งกล่าวไว้ว่า *ที่จุดหักมุมแต่ละจุด ฟังก์ชันฮามิลโทเนียนและตัวคูณลากรานจ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรสถานะของระบบจะต้องต่อเนื่อง* เมื่อพิจารณาฟังก์ชันฮามิลโทเนียนในสมการ (3.28) พบว่าพจน์ที่ต้องมีความต่อเนื่องคือ

$$p^T(t)(Ax(t) + Bx_{n+1}(t))$$

$$p_{n+1}(t)u(t)$$

$$p_{n+2}(t)(M^2 - x_{n+1}(t)^2 - \alpha^2(t))$$

สถานะ $x(t)$ และ $x_{n+1}(t)$ เป็นสถานะของระบบเชิงเส้น ดังนั้นจึงมีความต่อเนื่อง และสำหรับ $p(t)$ จากสมการ (3.41) เห็นได้ว่ามีความต่อเนื่องเช่นกัน ดังนั้น $p^T(t)(Ax(t) + Bx_{n+1}(t))$ จึงมีความต่อเนื่อง ส่วนพจน์ $p_{n+2}(t)(M^2 - x_{n+1}(t)^2 - \alpha^2(t))$ นั้น ถ้าการควบคุมเป็นการควบคุมแบบเหมาะที่สุดจริง เงื่อนไขขนาดของ $x_{n+1}(t)$ ตามสมการ (3.33) ก็ต้องสอดคล้อง ดังนั้นพจน์ $p_{n+2}(t)(M^2 - x_{n+1}(t)^2 - \alpha^2(t))$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดเวลา (ซึ่งต่อเนื่องตลอดเวลาเช่นกัน) ดังนั้นจึงเหลือเพียงพจน์ $p_{n+1}(t)u(t)$ ที่จะต้องพิจารณา แต่จากค่าสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุดในสมการ (3.35) จะได้ว่า

$$p_{n+1}(t)u(t) \;=\; D|p_{n+1}(t)|$$

ดังนั้นพารามิเตอร์ที่จะต้องมีความต่อเนื่องคือ $p_{n+1}(t)$ ความจริงนี้จะทำให้เราหาเงื่อนไขของสัญญาณควบคุม $u(t)$ และตัวแปรสถานะในกรณีของการควบคุมแบบเหมาะที่สุดได้

3.5 ลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุด

ในตอนที่ผ่านมาเราได้กำหนดรูปแบบปัญหาการหาค่าสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ ให้อยู่ในรูปการควบคุมแบบเหมาะที่สุด โดยแก้ปัญหาในเทอมของสัญญาณควบคุม $u(t)$ ที่เหมาะที่สุด ในตอนนี้เมื่อเงื่อนไขจำเป็นของ

การควบคุมแบบเหมาะที่สุดเป็นที่ทราบแล้ว เราจะเริ่มการวิเคราะห์เพื่อสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ โดยละเอียด และเนื่องจากเนื้อหาตอนนี้ได้กล่าวถึงสัญญาณเข้าสูงสุดโดยตรงดังนั้นเราจึงเปลี่ยนตัวแปรกลับมาในลักษณะเดิมคือ

$$\begin{aligned} w(t) &= x_{n+1}(t) \\ \dot{w}(t) &= u(t) \end{aligned}$$

เงื่อนไขจำเป็นต่างๆ จากสมการ (3.35), (3.39), (3.40), (3.43), (3.45) รวมทั้งส่วนของการวิเคราะห์ผลเฉลยเอกฐานในตอนที่ 3.4.2 และการวิเคราะห์เงื่อนไขมุมในตอนที่ 3.4.3 สรุปในเทอมของสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ และอนุพันธ์ของตัวมันเอง $\dot{w}(t)$ ได้ต่อไปนี้

$$\dot{w}(t) = D\mathrm{sgn}\{p_{n+1}(t)\} \tag{3.46}$$

$$p_{n+1}(t) = 0 \iff \begin{cases} w(t) = +M & \text{หรือ} \\ w(t) = -M \end{cases} \tag{3.47}$$

$$|w(t)| < M \iff \alpha \neq 0 \implies p_{n+2}(t) = 0 \tag{3.48}$$

$$p_{n+1}(t_2) - p_{n+1}(t_1) = \{s(T-t_2) - s(T-t_1)\} - 2\int_{t_1}^{t_2} p_{n+2}(t)w(t)dt \tag{3.49}$$

$$p_{n+1}(t) \ \text{ต่อเนื่องทุกขณะเวลา}\ t \geq 0 \tag{3.50}$$

เมื่อ $p_{n+1}(t)$, $p_{n+2}(t)$ คือตัวคูณลากรานจ์ และ $s(t)$ คือผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบ $h(t)$ ในที่นี้ดังที่เห็นได้จากสมการ (3.46) ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $w(t)$ ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของตัวคูณลากรานจ์ $p_{n+1}(t)$ ดังนั้นจากนี้ไปเราจะเรียก $p_{n+1}(t)$ ว่า*ดรรชนีสวิตช์* (Switching index) ของ $w(t)$ และจะเรียกจุดเวลา t ซึ่งดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ เปลี่ยนเครื่องหมายว่า*เวลาสวิตช์* (Switching time)

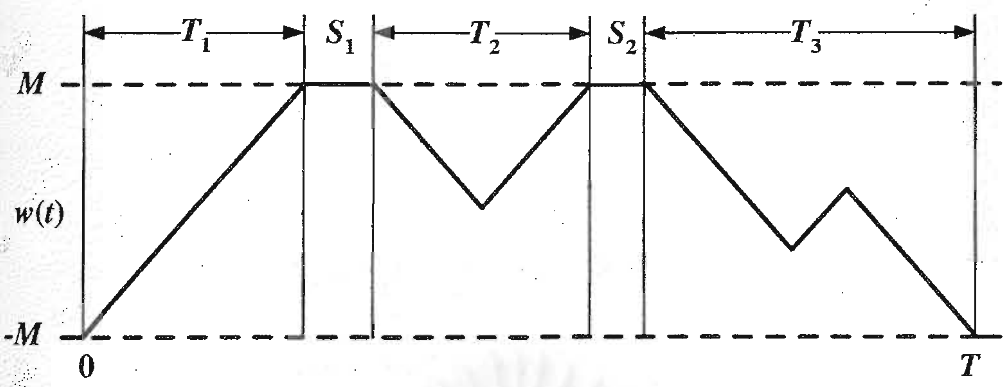
หลักการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ คือการวิเคราะห์ลักษณะในการเปลี่ยนแปลงสัญญาณเข้า และคำนวณเวลาของการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว โดยพิจารณาสมบัติของดรรชนีสวิตช์ร่วมกับข้อจำกัดขนาดของสัญญาณเข้าเอง แต่ก่อนที่จะวิเคราะห์ได้นั้น เราจะแยกพิจารณาช่วงเวลาที่สัญญาณเข้ามีลักษณะแตกต่างกันสองลักษณะคือ ช่วงเวลาที่สัญญาณเข้ามีขนาดเท่ากับ M และช่วงเวลาที่สัญญาณเข้ามีขนาดน้อยกว่า M นิยามของช่วงเวลาทั้งสองกล่าวโดยละเอียดดังนี้

นิยาม 3.1 เขตอิ่มตัว *(Saturation region) ที่ k ของสัญญาณเข้า w ซึ่งแทนด้วย S_k คือช่วงเวลาเปิด $(t_{0,k}, t_{f,k})$ ที่ต่อเนื่องทุกจุด และสัญญาณ $w(t)$ มีขนาดเท่ากับ M ตลอดเวลา $t \in (t_{0,k}, t_{f,k})$ โดยจะไม่มีช่วงเปิดต่อเนื่อง $(\hat{t}_0, \hat{t}_f)$ อื่นใดซึ่ง $(t_{0,k}, t_{f,k}) \subsetneq (\hat{t}_0, \hat{t}_f)$*[1]

นิยาม 3.2 เขตเปลี่ยนค่า *(Transition region) ที่ k ของสัญญาณเข้า w ซึ่งแทนด้วย T_k คือช่วงเวลาปิด $[t_{0,k}, t_{f,k}]$ ที่ต่อเนื่องทุกจุด และสัญญาณ $w(t)$ มีขนาดน้อยกว่าหรือเท่ากับ M ตลอดเวลา $t \in [t_{0,k}, t_{f,k}]$ อนึ่งสำหรับแต่ละจุดเวลา t จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $w(\tau) \neq M$ ทุกๆ $\tau \in [t-\delta, t) \cup (t, t+\delta]$ และจะต้องไม่มีช่วงปิดต่อเนื่อง $[\hat{t}_0, \hat{t}_f]$ อื่นใดซึ่ง $[t_{0,k}, t_{f,k}] \subsetneq [\hat{t}_0, \hat{t}_f]$*

---

[1] $B \subsetneq A \longleftrightarrow B \subset A$ และ $B \neq A$



รูปที่ 3.2: เขตอิ่มตัว $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ และเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ ของสัญญาณ $w(t)$ เมื่อ $0 < t < T$

จากนิยามข้างต้นทั้งสองเราจะเรียก $t_{0,k}$ ว่า*เวลาเริ่มต้น* และเรียก $t_{f,k}$ ว่า*เวลาสุดท้าย* นิยามทั้งคู่บ่งบอกว่าจะต้อง*ไม่มี* ช่วงเปิด (ปิด) อื่นใดที่มีสมบัติเดียวกันกับเขตอิ่มตัว (เขตเปลี่ยนค่า) หนึ่งๆ และครอบคลุมเขตอิ่มตัว (เขตเปลี่ยนค่า) ดังกล่าว นั่นคือทั้งเขตอิ่มตัวและเขตเปลี่ยนค่าต้องครอบคลุมบริเวณทั้งหมดที่เป็นไปได้ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือขอบเขตสองข้างของเขตอิ่มตัวต้องเป็นเขตเปลี่ยนค่า และขอบเขตสองข้างของเขตเปลี่ยนค่าก็ต้องเป็นเขตอิ่มตัว ดังนั้นเมื่อพิจารณาสัญญาณเข้าหนึ่งๆ ก็จะพบเพียงเขตอิ่มตัวและเขตเปลี่ยนค่าสลับกันไป

สำหรับนิยามของเขตเปลี่ยนค่าที่กล่าวว่า *แต่ละจุดเวลา* t *จะมี* $\delta > 0$ *ซึ่ง* $w(\tau) \neq M$ *ทุกๆ* $\tau \in [t-\delta, t) \cup (t, t+\delta]$ อาจกล่าวได้อย่างง่ายว่า เขตเปลี่ยนค่าอาจประกอบด้วยจุดเวลา t โดดๆ ซึ่ง $|w(t)| = M$ ได้ แต่ต้องไม่ประกอบด้วยช่วงเวลา $[t_1, t_2]$ ซึ่ง $|w(t)| = M \quad \forall t \in [t_1, t_2]$ ทั้งนี้เพราะ $[t_1, t_2]$ ในลักษณะนี้ต้องอยู่ภายในเขตอิ่มตัวเท่านั้น ตัวอย่างของจุดเวลา t โดดๆ ซึ่ง $|w(t)| = M$ และอยู่ภายในเขตเปลี่ยนค่าก็คือ $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ นั่นเอง

อนึ่งการนิยามเขตเปลี่ยนค่าในลักษณะนี้ รวมทั้งการนิยามเขตอิ่มตัวด้วยช่วงเปิด และนิยามเขตเปลี่ยนค่าด้วยช่วงปิดนั้น ก็เพื่อที่จะสื่อให้เห็นว่าเขตทั้งสองเป็นส่วนเติมเต็มของกันและกัน (Complement) กล่าวคือเมื่อพิจารณา ณ เวลา t ใดๆ จะได้ว่าเวลา t นั้นย่อมเป็นสมาชิกของเขตอิ่มตัวหรือเขตเปลี่ยนค่าเขตใดเขตหนึ่งเท่านั้น

การให้ลำดับของเขตอิ่มตัวแต่ละเขต และเขตเปลี่ยนค่าแต่ละเขต จะเรียงลำดับในทิศทางของเวลา รูปที่ 3.2 แสดงให้เห็นถึงเขตอิ่มตัวและเขตเปลี่ยนค่าแต่ละเขตภายในสัญญาณเข้า $w(t)$ จากเวลา 0 ถึง T ถึงแม้สัญญาณเข้าดังรูปที่ 3.2 จะมีความชันคงที่ในเขตเปลี่ยนค่า แต่นิยามของเขตอิ่มตัวและเขตเปลี่ยนค่าครอบคลุมถึง $w(t) \in \mathcal{W}$ ทุกรูปแบบ

เมื่อได้นิยามเขตอิ่มตัวและเขตเปลี่ยนค่าแล้ว การสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดก็จะพิจารณาแยกตามเขตดังกล่าว โดยจะเริ่มจากการสร้างสัญญาณเข้าในเขตเปลี่ยนค่าก่อน แล้วจึงสร้างสัญญาณเข้าในเขตอิ่มตัว การสร้างสัญญาณเข้าในเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใดๆ อยู่บนพื้นฐานของการใช้สมการเงื่อนไขต่างๆ ใน (3.46), (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) มาคำนวณเวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ เวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าว รวมทั้งเวลาสวิตช์ภายในเขตเปลี่ยนค่านี้ด้วย เมื่อสร้างเขตเปลี่ยนค่าได้แล้วก็อาจสร้าง

เขตอิ่มตัวได้โดยง่ายเนื่องจากเขตอิ่มตัวมีลักษณะเป็นค่าคงที่ $+M$ หรือ $-M$ เท่านั้น

3.5.1 การวิเคราะห์ในเขตเปลี่ยนค่า

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าแนวทางการวิเคราะห์ภายในเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใดๆ คือการคำนวณจุดเวลาเริ่มต้น เวลาสุดท้ายและเวลาสวิตช์ทั้งหมด จากนิยามของเขตเปลี่ยนค่า สัญญาณเข้า $w(t)$ ภายในเขตนี้มีขนาดน้อยกว่า M ดังนั้นจากสมการ (3.48) จะได้ว่า

$$p_{n+2}(t) \;=\; 0, \qquad t_{0,k} \leq t \leq t_{f,k} \tag{3.51}$$

เนื่องจากการวิเคราะห์พิจารณาแต่ในเขตเปลี่ยนค่า ดังนั้นต่อไปเมื่อกล่าวถึงตัวแปรใดๆ จะหมายถึงตัวแปรนั้นๆ ในเวลา t ซึ่ง $t_{0,k} \leq t \leq t_{f,k}$ เท่านั้น นอกเสียจากจะกล่าวเป็นอย่างอื่น เมื่อนำค่า $p_{n+2}(t)$ ใน (3.51) ไปแทนในสมการ (3.49) พบว่า

$$p_{n+1}(t_2) - p_{n+1}(t_1) \;=\; s(T-t_2) - s(T-t_1) \tag{3.52}$$

จากเงื่อนไขในสมการ (3.50) ทำให้ค่า $p_{n+1}(t_{0,k})$ และ $p_{n+1}(t_{f,k})$ (ซึ่งเป็นรอยต่อของเขตเปลี่ยนค่ากับเขตอิ่มตัวรอบข้าง) ต้องต่อเนื่องกับค่า $p_{n+1}(t)$ ภายนอกเขตเปลี่ยนค่า (ภายในเขตอิ่มตัวรอบข้าง) นั่นคือ

$$p_{n+1}(t_{0,k}) \;=\; \lim_{t\to t_{0,k}^-} p_{n+1}(t) \tag{3.53}$$

$$p_{n+1}(t_{f,k}) \;=\; \lim_{t\to t_{f,k}^+} p_{n+1}(t) \tag{3.54}$$

แต่จากสมการ (3.47) ชี้ให้เห็นว่าค่า $p_{n+1}(t)$ ภายในเขตอิ่มตัวรอบข้างมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอด เนื่องจากสัญญาณเข้า $w(t)$ ภายในเขตอิ่มตัวมีค่าเท่ากับ $+M$ หรือ $-M$ เท่านั้น ดังนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{t\to t_{0,k}^-} p_{n+1}(t) \;=\; \lim_{t\to t_{f,k}^+} p_{n+1}(t) \;=\; 0 \tag{3.55}$$

ซึ่งทำให้ได้เงื่อนไขค่าขอบเขตที่เวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ดังนี้

$$p_{n+1}(t_{0,k}) \;=\; p_{n+1}(t_{f,k}) \;=\; 0 \tag{3.56}$$

เพราะฉะนั้นเมื่อแทนค่า t_2, t_1 ในสมการ (3.52) ด้วยค่า $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ ตามลำดับ และใช้เงื่อนไขขอบเขตในสมการ (3.56) จะได้ว่า

$$p_{n+1}(t_{0,k}) - p_{n+1}(t_{f,k}) \;=\; 0 \;=\; s(T-t_{0,k}) - s(T-t_{f,k})$$

$$s(T-t_{0,k}) \;=\; s(T-t_{f,k}) \tag{3.57}$$

จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองสัญญาณขั้นที่เวลา $T-t_{0,k}$ และ $T-t_{f,k}$ จะต้องมีค่าเท่ากัน เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขแรก และเป็นเงื่อนไขพื้นฐานในการพิจารณาหาค่า $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ เมื่อพิจารณาที่เขตเปลี่ยนค่าที่ k หรือ $\mathcal{T}_k$ ใดๆ เรานิยาม*ค่าอ้างอิงการสวิตช์* (Switching reference) s_k^{ref} ตามสมการ (3.57) ดังนี้

นิยาม 3.3 *สำหรับเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใด ๆ ค่าอ้างอิงการสวิตช์ s_k^{ref} ภายในเขตเปลี่ยนค่านั้น ๆ มีค่าเท่ากับ*

$$s_k^{\text{ref}} \triangleq s(T - t_{0,k}) = s(T - t_{f,k}) \tag{3.58}$$

เมื่อมองในเชิงรูปภาพ (ในระนาบเดียวกับผลตอบ $s(T-t)$) ค่าอ้างอิงการสวิตช์ s_k^{ref} คือเส้นระดับที่มีค่าเท่ากับ $s(T - t_{0,k})$ และ $s(T - t_{f,k})$ โดยลากจากเวลา $t = t_{0,k}$ ไปจนถึง $t = t_{f,k}$ ตลอดทั้งเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$

นอกจากนั้นเมื่อเราแทนค่า t_2, t_1 ในสมการ (3.52) ด้วยค่า t และ $t_{f,k}$ ตามลำดับ โดย t อยู่ภายในเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ($t_{0,k} \leq t \leq t_{f,k}$) จะได้ว่า

$$p_{n+1}(t) = s(T - t) - s_k^{\text{ref}} \tag{3.59}$$

จากสมการ (3.59) นี้ อาจกล่าวได้ว่าค่าดรรชนีสวิตช์ คือค่าของผลตอบสนองสัญญาณขั้นสัมพัทธ์กับค่าอ้างอิงการสวิตช์ s_k^{ref} ดังนั้นค่า s_k^{ref} นี้จึงเปรียบเหมือนค่าออฟเซต (Offset) ในการคำนวณดรรชนีสวิตช์ นี่เป็นสาเหตุที่เราเรียก s_k^{ref} ว่าค่าอ้างอิงการสวิตช์ รูปที่ (3.3) แสดงการหาค่าดรรชนีสวิตช์จากผลตอบสนองสัญญาณขั้น ในเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ และ $\mathcal{T}_3$ ภายใต้ข้อสมมติว่าเขตเปลี่ยนค่าเป็นที่ทราบมาก่อนแล้ว อย่างไรก็ตาม ณ จุดนี้ยังไม่สามารถคำนวณเขตเปลี่ยนค่าได้ และต้องพิจารณากันต่อไป สำหรับสมการ (3.59) เมื่อนำไปแทนในสมการค่าอนุพันธ์ของสัญญาณเข้าหรือสมการ (3.46) เราจะได้

$$\dot{w}(t) = D\text{sgn}\{s(T - t) - s_k^{\text{ref}}\} \tag{3.60}$$

สมการ (3.60) ให้ความรู้อย่างหนึ่งซึ่งเป็นประโยชน์สำหรับทั้งการวิเคราะห์ในเขตเปลี่ยนค่า และการวิเคราะห์ในเขตอิ่มตัวที่จะพิจารณาในตอนถัดไป ความรู้ดังกล่าวคือความสัมพันธ์ของค่าสัญญาณเข้าที่เวลาเริ่มต้น $w(t_{0,k})$ กับอนุพันธ์ที่เวลาเริ่มต้นของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $\frac{d}{dt}s(T - t_{0,k})$ ซึ่งวิเคราะห์ได้ดังนี้ กำหนดให้ $\delta t > 0$ มีขนาดเล็กๆ ($\delta t \ll t_{f,k} - t_{0,k}$) พิจารณาดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ ที่เวลา $t_{0,k} + \delta t$ จากสมการ (3.59) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t_{0,k} + \delta t) &= s(T - (t_{0,k} + \delta t)) - s_k^{\text{ref}} \\ &= s(T - (t_{0,k} + \delta t)) - s(T - t_{0,k}) \end{aligned} \tag{3.61}$$

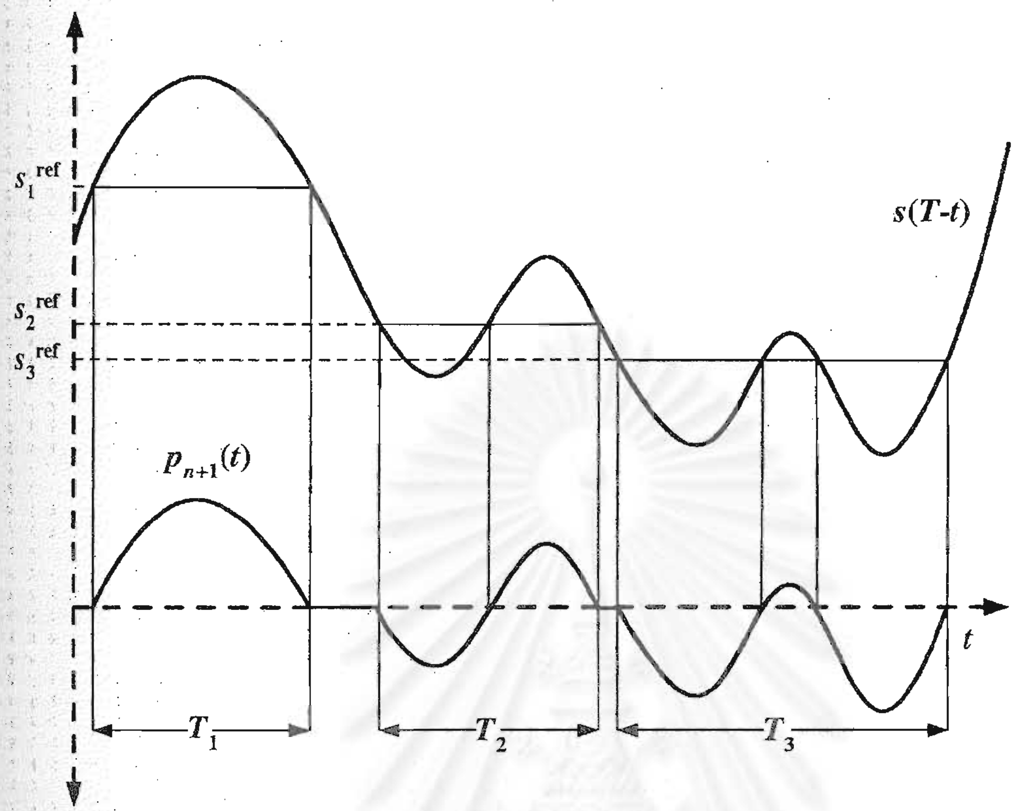
ค่าดรรชนีสวิตช์นี้อาจจำแนกเพื่อการวิเคราะห์ได้เป็นสองกรณี คือกรณีที่ $p_{n+1}(t_{0,k} + \delta t) > 0$ และกรณีที่ $p_{n+1}(t_{0,k} + \delta t) < 0$ อย่างไรก็ตามเราจะไม่พิจารณากรณีที่ $p_{n+1}(t_{0,k} + \delta t) = 0$ เนื่องจากกรณีดังกล่าวไม่เกิดขึ้นในเขตเปลี่ยนค่า[2]

กรณีที่ 1: $p_{n+1}(t_{0,k} + \delta t) > 0$

จากสมการ (3.59) เราได้ว่า

$$\dot{w}(t_{0,k}) > 0$$

[2]ทั้งนี้เพราะเราได้กำหนดให้ δt มีขนาดเล็กมาก ดังนั้นดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ ในช่วง $t_{0,k} \leq t \leq t_{0,k} + \delta t$ จึงประมาณได้เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายที่ $t_{0,k}$ และ $t_{0,k} + \delta t$ เนื่องจากดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ ที่จุดปลาย $t_{0,k}$ เท่ากับศูนย์ตามสมการ (3.56) เพราะฉะนั้นถ้า $p_{n+1}(t_{0,k} + \delta t) = 0$ ด้วยแล้ว ส่วนของเส้นตรงเส้นนี้มีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดทั้งเส้น นั่นหมายถึงช่วงเวลา $[t_{0,k},\ t_{0,k} + \delta t]$ ต้องอยู่ในเขตอิ่มตัวเท่านั้นมิได้อยู่ในเขตเปลี่ยนค่า



รูปที่ 3.3: การคำนวณดรรชนีสวิตช์ (Switching index) จากค่าอ้างอิงการสวิตช์ (Switching reference) s_1^{ref}, s_2^{ref} และ s_3^{ref} สำหรับเขตเปลี่ยนค่า (Transition region) $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ และ $\mathcal{T}_3$ ตามลำดับ

นั่นหมายถึง $w(t_{0,k}) = -M$ เท่านั้น เพราะถ้าหาก $w(t_{0,k}) = +M$ จะได้ว่า $w(t_{0,k} + \delta t) > +M$ ซึ่งไม่สอดคล้องข้อจำกัดขนาดและไม่อยู่ในปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ดังนั้นสรุปได้ว่า

$$p_{n+1}(t_{0,k} + \delta t) > 0 \iff w(t_{0,k}) = -M$$

จากสมการ (3.61) ทำให้ได้ว่า

$$s(T - (t_{0,k} + \delta t)) - s(T - t_{0,k}) > 0 \iff w(t_{0,k}) = -M \tag{3.62}$$

แต่เพราะว่าเรากำหนดไว้ให้ $\delta t > 0$ ดังนั้น $s(T - (t_{0,k} + \delta t)) - s(T - t_{0,k}) > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{s(T-(t_{0,k}+\delta t)) - s(T-t_{0,k})}{\delta t} > 0$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (3.62) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{s(T - (t_{0,k} + \delta t)) - s(T - t_{0,k})}{\delta t}\right\} > 0 \quad &\iff \quad w(t_{0,k}) = -M \\
\lim_{\delta t \to 0} \left\{\frac{s(T - (t_{0,k} + \delta t)) - s(T - t_{0,k})}{\delta t}\right\} > 0 \quad &\iff \quad w(t_{0,k}) = -M \\
\frac{d}{dt} s(T - t_{0,k}) > 0 \quad &\iff \quad w(t_{0,k}) = -M
\end{aligned} \tag{3.63}$$

เมื่อ $\frac{d}{dt}s(T - t_{0,k}) = -h(T - t)$ อนุพันธ์หรือความชันของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T - t)$ ที่มองย้อนกลับทางเวลา (Backward in time)

กรณีที่ 2: $p_{n+1}(t_{0,k}+\delta t) < 0$
จากสมการ (3.59) เราได้ว่า

$$\dot{w}(t_{0,k}) \ < \ 0$$

นั่นหมายถึง $w(t_{0,k}) = +M$ เท่านั้น ทำนองเดียวกับเหตุผลของการพิจารณาในกรณีที่ 1 ดังนั้นจะพบว่า

$$s(T-(t_{0,k}+\delta t)) - s(T-t_{0,k}) < 0 \iff w(t_{0,k}) = +M \tag{3.64}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\frac{d}{dt}s(T-t_{0,k}) < 0 \iff w(t_{0,k}) = +M \tag{3.65}$$

จากทั้งสองกรณี อาจสรุปรวมสมการ (3.63) และสมการ (3.65) ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lcl} \frac{d}{dt}s(T-t_{0,k}) < 0 & \iff & w(t_{0,k}) = +M \\ \frac{d}{dt}s(T-t_{0,k}) > 0 & \iff & w(t_{0,k}) = -M \end{array} \tag{3.66}$$

ทั้งนี้ความสัมพันธ์คล้ายกันนี้ที่เวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่า อาจวิเคราะห์หาได้ในทำนองเดียวกัน และพบว่า

$$\begin{array}{lcl} \frac{d}{dt}s(T-t_{f,k}) < 0 & \iff & w(t_{f,k}) = +M \\ \frac{d}{dt}s(T-t_{f,k}) > 0 & \iff & w(t_{f,k}) = -M \end{array} \tag{3.67}$$

สมการ (3.66) และสมการ (3.67) อาจสรุปเป็นทฤษฎีบทที่เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 *สำหรับเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใดๆ ค่าสัญญาณเข้าที่เวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ มีความสัมพันธ์กับอนุพันธ์ของผลตอบสนองสัญญาณขั้นย้อนกลับทางเวลา $s(T-t)$ คือ*

$$\begin{aligned} w(t_{0,k}) &= -M\mathrm{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T-t_{0,k})\} \\ w(t_{f,k}) &= -M\mathrm{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T-t_{f,k})\} \end{aligned}$$

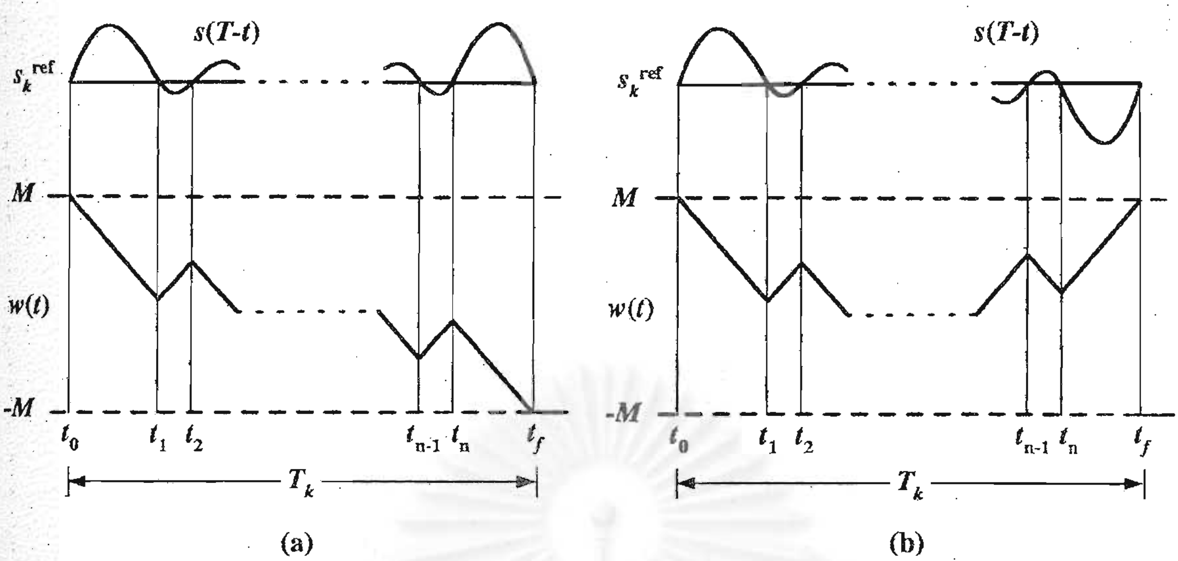
ก่อนที่จะพิจารณาขั้นต่อไป ขอสรุปขั้นตอนที่ผ่านมาดังนี้ อนุพันธ์ของสัญญาณเข้าสามารถคำนวณได้จากสมการ (3.60) โดยจำเป็นต้องทราบค่าอ้างอิงการสวิตช์ s_k^{ref} ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (3.58) แต่ก็ต้องใช้ค่า $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ ซึ่งหามาจากสมการ (3.57) อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าสมการ (3.57) นี้ ยังมีข้อมูลไม่เพียงพอสำหรับการคำนวณค่า $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ เนื่องจากระบบ $h(t)$ บางระบบอาจมีตำแหน่งเวลามากมายนับไม่ถ้วนที่มีค่าผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(t)$ เท่ากัน จึงต้องมีเงื่อนไขอื่นที่เพิ่มเข้ามาเพื่อใช้ในการระบุค่า $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ขั้นถัดไปต่อจากนี้

3.5.1.1 เงื่อนไขบนเวลาสวิตช์ของเขตเปลี่ยนค่า

สำหรับเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใดๆ พิจารณาจุดเวลา $t_{1,k}, t_{2,k}, \ldots, t_{n,k}$ ทุกๆ จุดที่เป็นไปได้ ซึ่ง

$$s(T-t_{1,k}) \ = \ s(T-t_{2,k}) \ = \cdots = \ s(T-t_{n,k}) \ = \ s_k^{\mathrm{ref}} \qquad \text{และ}$$

$$t_{0,k} \ < \ t_{1,k} < t_{2,k} < \cdots < t_{n,k} \ < \ t_{f,k}$$



รูปที่ 3.4: เขตเปลี่ยนค่าย่อย $[t_{i-1,k}, t_{i,k}]$, $i = 1, \ldots, n+1$ ซึ่งแบ่งเขตโดยเวลาสวิตช์ $t_{i,k}$, $i = 1, \ldots, n$ ที่ได้มาจากจุดตัดของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ กับค่าอ้างอิงการสวิตช์ s_k^{ref} ในกรณีของ (a) เขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ (b) เขตเปลี่ยนค่าแบบคู่

เนื่องจากที่จุดเวลาเหล่านี้มีค่าผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ เท่ากับ s_k^{ref} ดังนั้นจากสมการ (3.59) จึงได้ว่าดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t) = 0$ ณ จุดเวลา $t_{1,k}, \ldots, t_{n,k}$ นี้ และนั่นหมายถึงดรรชนีสวิตช์เปลี่ยนค่าที่จุดเหล่านี้ ดังนั้นจุดเวลาเหล่านี้จึงเป็น*เวลาสวิตช์* ของดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ นอกจากนี้เราจะเรียกช่วงเวลาระหว่างเวลาสวิตช์ที่อยู่ถัดกันหรือ $[t_{i-1,k}, t_{i,k}]$, $i = 1 \ldots, n$ ว่า*เขตเปลี่ยนค่าย่อย* (Sub-transition region) ลำดับที่ i และความกว้างของเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่ i หรือ $\triangle t_{i,k}$ นิยามดังนี้

$$\triangle t_{i,k} \triangleq t_{i,k} - t_{i-1,k}$$

รูปที่ 3.4 แสดงให้เห็นการคำนวณเวลาสวิตช์ (ค่า $t_{1,k}, \ldots, t_{n,k}$) ของเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ โดยพิจารณาค่าตรงจุดที่ผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ เท่ากับค่าอ้างอิง s_k^{ref} อนึ่งเพื่อให้การอ้างถึงหมายเลขของเวลาสวิตช์ $(1, \ldots, n)$ รวมเอาเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายเข้าไปด้วย เราจึงแทนสัญกรณ์ของ $t_{f,k}$ ด้วย $t_{n+1,k}$ (อย่างไรก็ตามการใช้สัญกรณ์แบบใดแบบหนึ่งนั้นขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของสภาพการนั้นๆ) ดังนั้นจะได้ว่าจุดเวลา t ทั้งหมดในเขตเปลี่ยนค่า T_k ซึ่งให้ค่าผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t) = s_k^{\text{ref}}$ หรือให้ค่าดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ เท่ากับศูนย์คือ $t_{0,k}, t_{1,k}, \ldots, t_{n,k}, t_{n+1,k}$ พึงสังเกตว่าค่า $n+1$ เป็นจำนวนคี่ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ และเป็นจำนวนคู่ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ จากนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าข้อจำกัดของขนาดของสัญญาณเข้า $w(t)$ ถ่ายทอดมาเป็นข้อจำกัดของ $t_{0,k}, t_{1,k}, \ldots, t_{n,k}, t_{n+1,k}$ ได้ โดยพิจารณาแยกตามกรณีของค่าสัญญาณเข้าที่เวลาเริ่มต้น $w(t_{0,k})$ สำหรับค่าสัญญาณเริ่มต้นที่เป็นไปได้นั้นคือ $w(t_{0,k}) = \pm M$ เนื่องจากสัญญาณเข้านี้ต่อเนื่องมาจากเขตอิ่มตัวก่อนหน้าซึ่งมีค่าสัญญาณเข้าเท่ากับ $\pm M$ เราสามารถแยกกรณีพิจารณากรณีดังนี้

กรณีที่ 1: $w(t_{0,k}) = -M$

จากสมการ (3.60) เมื่อคำนวณค่าปริพันธ์ของอนุพันธ์ของสัญญาณเข้า $\dot{w}(t)$ จากเวลา $t_{0,k}$ ถึง t จะพบว่า

$$
\begin{aligned}
\int_{t_{0,k}}^{t} \dot{w}(t)dt &= \int_{t_{0,k}}^{t} D\mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt \\
w(t) - w(t_{0,k}) &= D\int_{t_{0,k}}^{t} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt \\
w(t) &= D\int_{t_{0,k}}^{t} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt + w(t_{0,k}) \\
&= D\int_{t_{0,k}}^{t} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt - M \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

สังเกตว่าสัญญาณเข้า $w(t)$ ภายในเขตเปลี่ยนค่านั้น มีลักษณะเชิงเส้นเป็นช่วงๆ (Piecewise linear) เนื่องจากอนุพันธ์ของตัวมันมีลักษณะคงที่เป็นช่วงๆ (Piecewise constant) พิจารณาเทอม $\int_{t_{0,k}}^{t} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt$ พบว่ามีค่าดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{0,k}}^{t} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt \\
&= \mathrm{sgn}\{s(T-\tau_{i+1,k}) - s_k^{\mathrm{ref}}\}(t - t_{i,k}) + \sum_{m=1}^{i} \mathrm{sgn}\{s(T-\tau_{m,k}) - s_k^{\mathrm{ref}}\}(t_{m,k} - t_{m-1,k}) \\
&= \mathrm{sgn}\{s(T-\tau_{i+1,k}) - s_k^{\mathrm{ref}}\}(t - t_{i,k}) + \sum_{m=1}^{i} \mathrm{sgn}\{s(T-\tau_{m,k}) - s_k^{\mathrm{ref}}\}\triangle t_{m,k} \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $\tau_{m,k}$ เป็นเวลาใดๆ ก็ได้ในเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่ m หรือช่วง $[t_{m-1,k}, t_{m,k}]$ และ t อยู่ภายในเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่ $i+1$ นั่นคือ t สอดคล้องกับสมการ $t_{i,k} \leq t \leq t_{i+1,k}$ อนึ่งขณะนี้เรากำลังพิจารณากรณีที่ $w(t_{0,k}) = -M$ ซึ่งจากสมการ (3.62) จะพบว่า $s(T-t) - s(T-t_{0,k}) > 0$ ในเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่ 1 ซึ่งทำให้ $\mathrm{sgn}\{s(T-\tau_{1,k}) - s_k^{\mathrm{ref}}\} = 1$ และเนื่องจาก $t_{1,k}$ เป็นเวลาสวิตช์ ดังนั้นในเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่ 2 จะให้ค่า $\mathrm{sgn}\{s(T-\tau_{2,k}) - s_k^{\mathrm{ref}}\} = -1$ และเป็นเช่นนี้สลับกันไปทุกๆ เขตเปลี่ยนค่าย่อย สรุปแล้วจะได้ว่าค่าปริพันธ์ในสมการ (3.69) มีค่าดังนี้

$$
\int_{t_{0,k}}^{t} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt = (-1)^{i+1}(t - t_{i,k}) + \sum_{m=1}^{i} (-1)^{m+1}\triangle t_{m,k} \qquad (3.70)
$$

เมื่อนำค่าปริพันธ์ในสมการ (3.70) ไปแทนลงในสมการ (3.68) จะได้ว่า

$$
w(t) = D\left\{(-1)^{i+1}(t - t_{i,k}) + \sum_{m=1}^{i} (-1)^{m+1}\triangle t_{m,k}\right\} - M \qquad (3.71)
$$

เงื่อนไขขนาดสำหรับ $w(t)$ ก็คือ $|w(t)| \leq M$ หรือ $-M \leq w(t) \leq M$ สำหรับทุกเวลา t ในเขตเปลี่ยนค่า

T_k ดังนั้นจากสมการ (3.71) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
-M &\leq D \left\{(-1)^{i+1}(t-t_{i,k})+\sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,k}\right\} -M \leq M \\
0 &\leq D \left\{(-1)^{i+1}(t-t_{i,k})+\sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,k}\right\} \leq 2M \\
0 &\leq \left\{(-1)^{i+1}(t-t_{i,k})+\sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,k}\right\} \leq \frac{2M}{D}
\end{aligned}
$$

เงื่อนไขบังคับที่ได้นี้เป็นเงื่อนไขจำเป็น ที่จะช่วยให้เราสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดที่มีขนาดน้อยกว่าหรือเท่ากับ M อย่างไรก็ตามสมการเงื่อนไข (3.72) นี้ อาจทำให้อยู่ในรูปง่ายขึ้นได้ โดยสังเกตว่าภายในเขตเปลี่ยนค่าย่อยแต่ละเขตนั้น สัญญาณเข้า $w(t)$ มีลักษณะเชิงเส้นเป็นช่วงๆ เพราะฉะนั้นจึงได้ว่าขนาดของสัญญาณเข้าที่เวลา $t \in [t_{i-1,k}, t_{i,k}]$ เป็นดังนี้

$$
\min\{|w(t_{i-1,k})|, |w(t_{i,k})|\} < |w(t)| < \max\{|w(t_{i-1,k})|, |w(t_{i,k})|\}
$$

ดังนั้นเงื่อนไข $-M \leq w(t) \leq M,\ \forall t \in [t_{0,k}, t_{f,k}]$ อาจลดให้เหลือเพียง $-M \leq w(t_{i,k}) \leq M,\ i = 1, \ldots, n$ ซึ่งจะได้ว่า

$$
0 \leq \left\{\sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,k}\right\} \leq \frac{2M}{D} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.72}
$$

เพื่อความสะดวกในการอ้างถึงค่าผลบวกในสมการ (3.72) เราจึงนิยามปริมาณผลบวกสะสมดังต่อไปนี้

นิยาม 3.4 *สำหรับเขตเปลี่ยนค่าใดๆ ผลบวกสะสมแบบมีขั้วของความกว้างเขตเปลี่ยนค่าย่อย (Cumulative polar-summation of sub-transition regions' length) ลำดับที่ i หรือเรียกสั้นๆ ว่าผลบวกสะสมซึ่งแทนโดย $CS_{i,k}$ คือ*

$$
CS_{i,k} \triangleq \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,k} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.73}
$$

เหตุที่เรียกผลบวกสะสมนี้ว่าผลบวกสะสม*แบบมีขั้ว* นั่นก็เพราะพจน์ $(-1)^{m+1}$ ที่ปรากฏอยู่ในนิยาม (3.73) ทำให้ความกว้างของเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่นำมาบวกมีเครื่องหมาย (ขั้ว) เปลี่ยนสลับไปมา เงื่อนไขในสมการ (3.72) อาจเขียนในเทอมของผลบวกสะสม $CS_{i,k}$ ดังนี้

$$
0 \leq CS_{i,k} \leq \frac{2M}{D} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.74}
$$

เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขหลักเงื่อนไขหนึ่ง ที่เรานำมาพิจารณาเพื่อสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดในเขตเปลี่ยนค่าต่อไปจะพิจารณากรณีที่สัญญาณเข้าที่เวลาเริ่มต้น $w(t_{0,k})$ มีค่าเท่ากับ M และหาเงื่อนไขในแนวทางเดียวกับการหาเงื่อนไขในสมการ (3.74)

กรณีที่ 2: $w(t_{0,k}) = M$

ในกรณีนี้เราวิเคราะห์ตามลำดับขั้นตอนเดียวกันกับกรณีที่หนึ่ง จากสมการ (3.60) เมื่อคำนวณค่าปริพันธ์

ของอนุพันธ์ของสัญญาณเข้า $\dot{w}(t)$ จากเวลา $t_{0,k}$ ถึง t จะพบว่า

$$\begin{aligned}\int_{t_{0,k}}^{t} \dot{w}(t)dt &= \int_{t_{0,k}}^{t} D\text{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\text{ref}}\}dt \\ w(t)-w(t_{0,k}) &= D\int_{t_{0,k}}^{t} \text{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\text{ref}}\}dt \\ w(t) &= D\int_{t_{0,k}}^{t} \text{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\text{ref}}\}dt + M \qquad (3.75)\end{aligned}$$

พิจารณาเทอม $\int_{t_{0,k}}^{t} \text{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\text{ref}}\}dt$ พบว่ามีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}\int_{t_{0,k}}^{t} \text{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\text{ref}}\}dt &= \text{sgn}\{s(T-\tau_{i+1,k})-s_k^{\text{ref}}\}(t-t_{i,k}) \\ &+ \sum_{m=1}^{i} \text{sgn}\{s(T-\tau_{m,k})-s_k^{\text{ref}}\}\triangle t_{m,k} \qquad (3.76)\end{aligned}$$

และเนื่องจากกรณีนี้ $w(t_{0,k}) = +M$ ดังนั้นจากสมการ (3.64) จะได้ว่า $s(T-t)-s(T-t_{0,k}) < 0$ ในเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่ 1 และสลับเครื่องหมายทุกๆ เขตเปลี่ยนค่าย่อย ดังนั้นค่าปริพันธ์ในสมการ (3.76) จึงมีค่าดังนี้

$$\int_{t_{0,k}}^{t} \text{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\text{ref}}\}dt = (-1)^i(t-t_{i,k}) + \sum_{m=1}^{i}(-1)^m\triangle t_{m,k} \qquad (3.77)$$

และเมื่อนำค่าปริพันธ์ในสมการ (3.77) ไปแทนลงในสมการ (3.75) จะได้ว่า

$$w(t) = D\left\{(-1)^i(t-t_{i,k}) + \sum_{m=1}^{i}(-1)^m\triangle t_{m,k}\right\} + M \qquad (3.78)$$

ดังที่กล่าวในตอนท้ายของกรณีที่ 1 แล้วว่าเงื่อนไขขนาดสำหรับ $w(t)$ อาจแสดงโดย $-M \leq w(t_{i,k}) \leq M,\ i = 1,\ldots,n$ ดังนั้นจากสมการ (3.78) จะได้ว่า

$$-\frac{2M}{D} \leq \left\{\sum_{m=1}^{i}(-1)^m\triangle t_{m,k}\right\} \leq 0 \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (3.79)$$

ถ้าหากเราคูณตลอดสมการ (3.79) ด้วย -1 พบว่า

$$0 \leq \left\{\sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\triangle t_{m,k}\right\} \leq \frac{2M}{D} \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (3.80)$$

เงื่อนไขในสมการ (3.80) นี้ เหมือนกันกับเงื่อนไขในสมการ (3.72) และเปลี่ยนให้อยู่ในเทอมของผลบวกสะสม $CS_{i,k}$ ได้ดังสมการ (3.74) เช่นกัน รูปที่ 3.4 แสดงสัญญาณเข้า $w(t)$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขในสมการ (3.74) โดยเวลาสวิตช์ $t_{1,k},\ldots,t_{n,k}$ ได้จากจุดที่ระดับ s_k^{ref} ตัดกับผลตอบ $s(T-t)$ และขนาดของสัญญาณเข้า $|w(t)| < M$ ตลอดเวลา

จากที่วิเคราะห์มาข้างต้น เราได้เงื่อนไขจำเป็นบนเวลาสวิตช์ $t_{1,k},\ldots,t_{n,k}$ ไปแล้ว แต่ยังขาดเงื่อนไขจำเป็นที่เวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ (หรือ $t_{n+1,k}$) อยู่ เพื่อให้การวิเคราะห์เงื่อนไขในการคำนวณเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้ายทำได้สะดวกขึ้น เราจำเป็นต้องนิยามรูปแบบของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใดๆ ซึ่งจำแนกได้เป็นสอง

ลักษณะคือ ลักษณะที่สัญญาณเข้า w เปลี่ยนจากค่า $+M$ ไปสู่ค่า $-M$ (หรือ $-M$ ไปสู่ค่า $+M$) และลักษณะที่สัญญาณเข้า w เปลี่ยนจากค่า $+M$ กลับมายังค่า $+M$ เหมือนเดิม (หรือ $-M$ กลับมายังค่า $-M$) นิยามของรูปแบบการเปลี่ยนค่าทั้งสองเป็นดังนี้

นิยาม 3.5 *เราเรียกเขตเปลี่ยนค่า T_k ใด ๆ ว่า*เขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ *(Odd-transition region) เมื่อสัญญาณเข้า $w(t)$ ที่เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายในเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าวมีความสัมพันธ์คือ $w(t_{0,k}) = -w(t_{f,k})$ เราจะเรียกการเปลี่ยนค่าลักษณะนี้ว่า*การเปลี่ยนค่าแบบคี่ *(Odd transition)*

นิยาม 3.6 *เราเรียกเขตเปลี่ยนค่า T_k ใด ๆ ว่า*เขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ *(Even-transition region) เมื่อสัญญาณเข้า $w(t)$ ที่เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายในเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าวมีความสัมพันธ์คือ $w(t_{0,k}) = w(t_{f,k})$ เราจะเรียกการเปลี่ยนค่าลักษณะนี้ว่า*การเปลี่ยนค่าแบบคู่ *(Even transition)*

เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 3.2 จะได้ว่า T_1, T_3 เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ ในขณะที่ T_2 เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ และสำหรับเฉพาะสัญญาณเข้า w ที่มีการหักมุมดังรูปที่ 3.2 สังเกตว่าจำนวนครั้งในการเปลี่ยนค่า (จำนวนเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดหักมุมสองจุด) ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ (คู่) มีค่าเป็นจำนวนคี่ (คู่) ตอนต่อจากนี้ไปได้นำเสนอเงื่อนไขจำเป็นบนเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ โดยแบ่งตามชนิดของเขตเปลี่ยนค่า

3.5.1.2 เงื่อนไขบนเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่

ในตอนนี้เราใช้ประโยชน์จากสมการ (3.60) ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตของสัญญาณเข้าในเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ (ณ เวลา $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$) นั่นคือเงื่อนไข

$$\begin{aligned} w(t_{0,k}) &= \pm M \\ w(t_{f,k}) &= \mp M \end{aligned} \tag{3.81}$$

อย่างไรก็ตามเราจะพิจารณากรณีที่ $w(t_{0,k}) = -M = -w(t_{f,k})$ เท่านั้น ส่วนกรณีที่ $w(t_{0,k}) = +M = -w(t_{f,k})$ อาจพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน การวิเคราะห์เริ่มจากคำนวณค่าปริพันธ์ของสมการ (3.60) โดยตรงจาก $t_{0,k}$ ถึง $t_{f,k}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \dot{w}(t)dt &= w(t_{f,k}) - w(t_{0,k}) \\ \int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} D\mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt &= w(t_{f,k}) - w(t_{0,k}) \end{aligned}$$

พิจารณาเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ซึ่ง $w(t_{0,k}) = -M = -w(t_{f,k})$ พบว่า

$$\begin{aligned} \int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} D\mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt &= M - (-M) \\ D\left\{\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt\right\} &= 2M \\ \int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt &= \frac{2M}{D} \end{aligned} \tag{3.82}$$

สำหรับเทอม $\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลบวกสะสมได้ดังนี้

$$\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt \;=\; \sum_{m=1}^{n+1}(-1)^m \Delta t_{m,k} \;=\; CS_{n+1,k} \tag{3.83}$$

เมื่อแทนค่าปริพันธ์ในสมการ (3.83) ลงในสมการ (3.82) พบว่า

$$CS_{n+1,k} \;=\; \frac{2M}{D} \tag{3.84}$$

สมการนี้เป็นเงื่อนไขบนเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ อนึ่งอาจกำหนดสัญกรณ์ $CS_{f,k} = CS_{n+1,k}$ เพื่อให้สอดคล้องกับสัญกรณ์ $t_{f,k} = t_{n+1,k}$ สำหรับกรณีที่ $w(t_{0,k}) = -w(t_{f,k}) = +M$ เมื่อพิจารณาแล้วจะได้เงื่อนไขดังสมการ (3.84) เช่นกัน จากรูปที่ 3.4 (a) จะเห็นได้ว่าถ้าผลบวกสะสมของความกว้างเขตเปลี่ยนค่าย่อยสอดคล้องกับสมการ (3.84) สัญญาณเข้า $w(t)$ ที่เวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ จะบรรจบกับขอบเขตล่างพอดี (กรณีนี้ $w(t_{0,k}) = +M$)

3.5.1.3 เงื่อนไขบนเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่

การวิเคราะห์หาเงื่อนไขบนเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่นั้น ทำได้ในแนวทางเดียวกันกับเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ โดยเราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $w(t_{0,k}) = -M = w(t_{f,k})$ เท่านั้น ส่วนกรณีที่ $w(t_{0,k}) = +M = w(t_{f,k})$ อาจวิเคราะห์ได้ในทำนองเดียวกัน เมื่อคำนวณค่าปริพันธ์ในสมการ (3.60) จาก $t_{0,k}$ ถึง $t_{f,k}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \dot{w}(t)dt &= w(t_{f,k}) - w(t_{0,k}) \\
\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} D\mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt &= w(t_{f,k}) - w(t_{0,k}) \\
\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} D\mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt &= -M - (-M) \\
D\left\{\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt\right\} &= 0 \\
\int_{t_{0,k}}^{t_{f,k}} \mathrm{sgn}\{s(T-t) - s_k^{\mathrm{ref}}\}dt &= 0 \\
CS_{f,k} &= 0
\end{aligned} \tag{3.85}$$

สมการ (3.85) เป็นเงื่อนไขบนเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ ส่วนในกรณีที่ $w(t_{0,k}) = +M = w(t_{f,k})$ ก็ให้เงื่อนไขในลักษณะเดียวกันนี้ จากรูปที่ 3.4 (b) เห็นได้ชัดเจนว่าหากผลบวกสะสมของความกว้างเขตเปลี่ยนค่าย่อยสอดคล้องกับสมการ (3.85) สัญญาณเข้า $w(t)$ ที่เวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ จะบรรจบกับขอบเขตบนพอดี (กรณีนี้ $w(t_{0,k}) = +M$)

สรุปแล้วเงื่อนไขจำเป็นบนเวลาสวิตช์ $t_{1,k},\ldots,t_{n,k}$ และเงื่อนไขจำเป็นบนเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ในเขตเปลี่ยนค่านั้น อาจกล่าวเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 *สำหรับเวลาสวิตช์ $t_{1,k},\ldots,t_{n,k}$ ใดๆ ในเขตเปลี่ยนค่า จะได้ว่า $0 \le CS_{i,k} \le \frac{2M}{D}$ เมื่อ $CS_{i,k} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,k} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}(t_{m,k} - t_{m-1,k})$*

ทฤษฎีบท 3.3 *สำหรับเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ จะได้ว่า $CS_{f,k} = \frac{2M}{D}$ เมื่อ $CS_{f,k} = CS_{n+1,k}$*

ทฤษฎีบท 3.4 *สำหรับเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ จะได้ว่า $CS_{f,k} = 0$ เมื่อ $CS_{f,k} = CS_{n+1,k}$*

3.5.2 การวิเคราะห์ในเขตอิ่มตัว

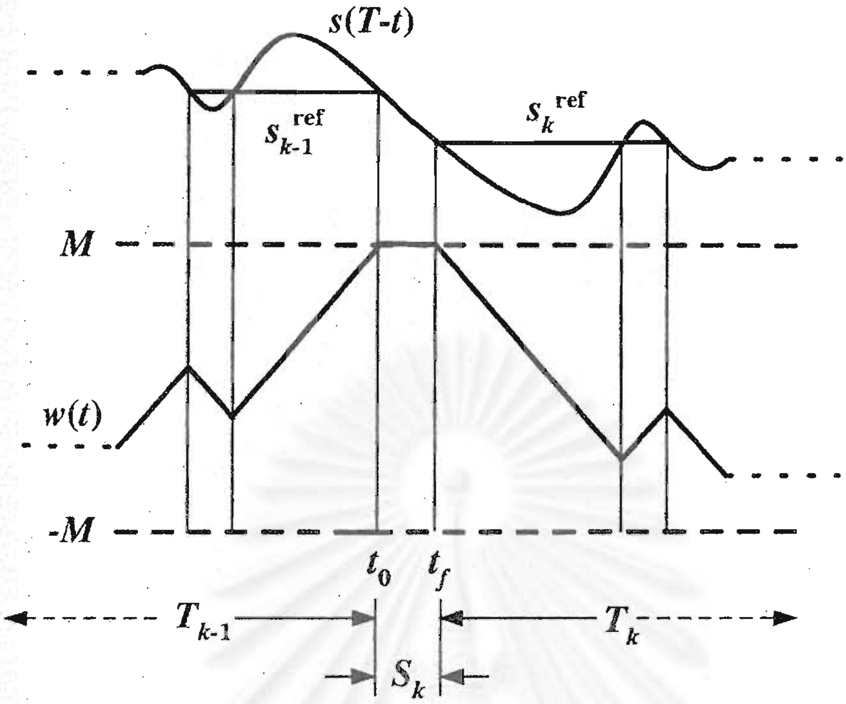
การวิเคราะห์ในเขตเปลี่ยนค่าดังที่ได้แสดงไว้ในตอนที่ 3.5.1 นั้นค่อนข้างซับซ้อน ในทางตรงกันข้ามการวิเคราะห์ในเขตอิ่มตัวนั้นง่ายและตรงไปตรงมามากกว่า กำหนดให้ $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ เป็นเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายของเขตอิ่มตัว $\mathcal{S}_k$ อนึ่งเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายนี้เป็นคนละเวลากับที่ใช้อยู่ในการวิเคราะห์เขตเปลี่ยนค่า นิยามเขตอิ่มตัวนั้นกล่าวว่าภายในเขตนี้ขนาดของสัญญาณเข้า $|w(t)| = M$ ดังนั้นจากสมการ (3.47) จึงได้ว่าดรรชนีสวิตช์ในเขตนี้เป็นศูนย์ตลอด อันที่จริงแล้วในเขตอิ่มตัวนี้เป็นเขตที่เกิดผลเฉลยเอกฐานขึ้นนั่นเอง

สมการ (3.66) กล่าวถึงความสัมพันธ์ของอนุพันธ์หรือความชันของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T - t)$ กับค่าของสัญญาณเข้าที่เวลาเริ่มต้นในเขตเปลี่ยนค่า ส่วนสมการ (3.67) ก็กล่าวถึงความสัมพันธ์ดังกล่าวที่เวลาสุดท้ายในเขตเปลี่ยนค่า เมื่อพิจารณาเขตอิ่มตัว $\mathcal{S}_k$ ใดๆ จะเห็นได้ว่าเขตอิ่มตัวดังกล่าวถูกขนาบข้างด้วยเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{k-1}$ และ $\mathcal{T}_k$ ดังนั้นสมการ (3.67) และสมการ (3.66) จึงชี้ให้เห็นว่าความชันของ $s(T-t)$ ณ เวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{k-1}$ ต้องมีค่าเท่ากับความชันของ $s(T-t)$ ณ เวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ เนื่องจาก $w(t)$ มีค่าคงที่เท่ากับ $\pm M$ ในเขตอิ่มตัว เงื่อนไขนี้ทำให้เราทราบการวางตัวของเขตอิ่มตัวระหว่างเขตเปลี่ยนค่าสองเขต กล่าวอีกนัยหนึ่งคือเมื่อรู้ข้อมูลของเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งแล้วทำให้เราทราบว่าเขตเปลี่ยนค่าถัดไปควรอยู่บริเวณใด รูปที่ 3.5 แสดงลักษณะของเขตอิ่มตัว $\mathcal{S}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว (จากรูป เขตอิ่มตัว $\mathcal{S}_k$ ถูกขนาบข้างด้วยเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{k-1}$ และ $\mathcal{T}_k$ อย่างไรก็ตามเขตเปลี่ยนค่าที่ขนาบอยู่อาจเป็น $\mathcal{T}_k$ และ $\mathcal{T}_{k+1}$ ก็ได้ ขึ้นอยู่กับว่าสัญญาณเข้า w เริ่มต้นที่เขตใดก่อน)

นิยาม 3.7 เวลายอด *(Peak time) ลำดับที่ i ของผลตอบสนองสัญญาณขั้นย้อนกลับทางเวลา $s(T - t)$ หรือแทนด้วย t_i^{peak} คือเวลาที่อนุพันธ์ $\frac{d}{dt}s(T - t)$ มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งมีลำดับเท่ากับ i เมื่อนับตามทิศทางของเวลา*

นิยาม 3.8 ช่วงเวลายอดถึงยอด *(Peak-to-peak time interval) ลำดับที่ i ของผลตอบสนองสัญญาณขั้นย้อนกลับทางเวลา $s(T - t)$ ซึ่งแทนด้วย $\mathcal{I}_i$ คือช่วงเวลา $[t_i^{\text{peak}}, t_{i-1}^{\text{peak}}]$ เมื่อ t_i^{peak} และ t_{i-1}^{peak} เป็นเวลายอดลำดับที่ i และ $i-1$ ตามลำดับ*

เนื่องจาก $\frac{d}{dt}s(T - t) = -h(t - T)$ ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าเวลายอด t_i^{peak} คือจุดเวลาที่ $h(T - t) = 0$ นั่นเอง และช่วงเวลายอดก็คือช่วงเวลาระหว่างเวลายอดสองจุดซึ่ง $h(T - t)$ มีเครื่องหมายเดียวกันตลอด เพื่อให้การอ้างถึงลำดับของเวลายอดสมบูรณ์ สำหรับผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T - t)$ ซึ่งมีเวลายอด p จุด เรา



รูปที่ 3.5: เขตอิ่มตัว $\mathcal{S}$ และเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{k-1}$ และ $\mathcal{T}_k$ รอบข้าง

จึงนิยามเวลายอดที่ศูนย์ และเวลายอดที่ $p+1$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
t_0^{\text{peak}} &= 0 \\
t_{p+1}^{\text{peak}} &= T
\end{aligned}
$$

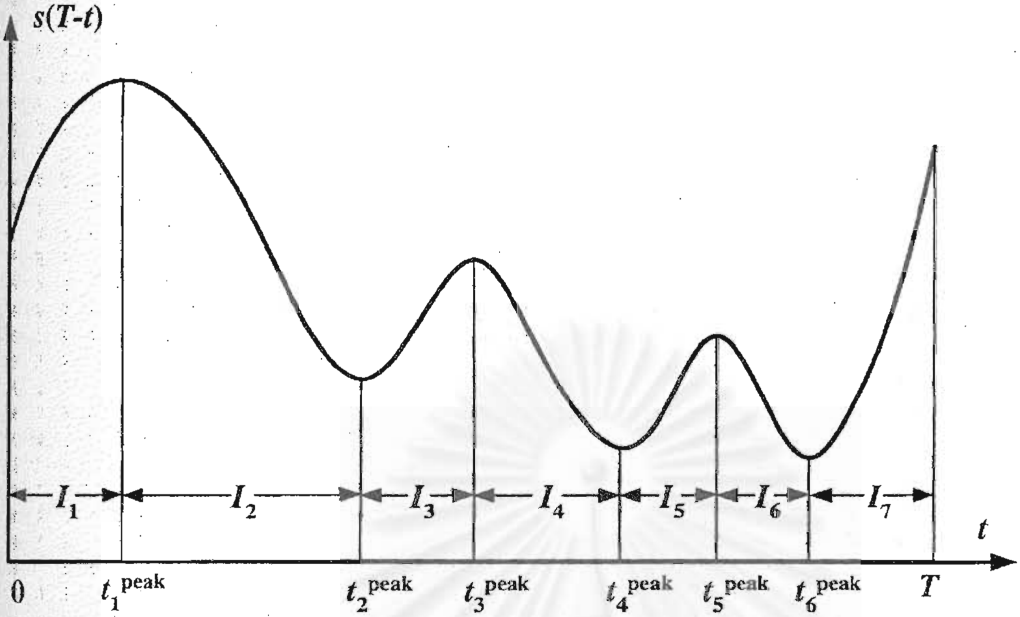
รูปที่ 3.6 แสดงช่วงเวลายอดถึงยอด และเวลายอดแต่ละจุดของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ เงื่อนไขบนเขตอิ่มตัวอาจกล่าวตามนิยามของเวลายอด และช่วงเวลายอดถึงยอดของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.5 *สำหรับเวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตอิ่มตัว $\mathcal{S}_k$ ใดๆ พบว่า $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ ต้องอยู่ภายในช่วงเวลายอดถึงยอดเดียวกัน*

ทฤษฎีบทนี้อาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า $h(T-t)$ ในเขตอิ่มตัวใดๆ ต้องมีเครื่องหมายเดียวกันตลอดและสัญญาณเข้าในเขตอิ่มตัวนั้นมีค่าดังนี้

$$w(t) \;=\; M\operatorname{sgn}\{h(T-t)\} \qquad t_{0,k} \le t \le t_{f,k}$$

ทั้งหมดที่ได้กล่าวมาสรุปได้ว่า สัญญาณเข้าสูงสุดต้องสอดคล้องกับทฤษฎีบท 1–5 และเนื่องจากความเป็นคอนเวกซ์ของปัญหาการหาสัญญาณเข้าสูงสุดในสมการ (3.20) เงื่อนไขจำเป็นที่นำเสนอไปจึงเป็นเงื่อนไขเพียงพอเช่นกัน นอกจากนี้เราพบว่ากฎการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดที่ Lane อธิบายไว้ใน [8] สมมูลกับทฤษฎีบท 1–5 ที่เราได้นำเสนอไปอีกด้วย กล่าวคือ Lane ได้พิจารณาสัญญาณเข้าซึ่งมีลักษณะเชิงเส้นเป็น



รูปที่ 3.6: เวลายอด $t_1^{\text{peak}}, \ldots, t_6^{\text{peak}}$ และช่วงเวลายอดถึงยอด $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_7$ ของผลตอบสนองสัญญาณขั้นย้อนกลับทางเวลา $s(T-t)$

ช่วงๆ แต่ละช่วงแบ่งได้เป็น 4 ลักษณะ [3] คือ

1. สัญญาณเข้า $w(t)$ มีค่าคงที่เท่ากับ M
2. สัญญาณเข้า $w(t)$ มีค่าคงที่เท่ากับ $-M$
3. สัญญาณเข้า $w(t)$ มีอนุพันธ์คงที่เท่ากับ D
4. สัญญาณเข้า $w(t)$ มีอนุพันธ์คงที่เท่ากับ $-D$

เห็นได้ว่าสัญญาณเข้าดังกล่าวมีลักษณะเหมือนกับสัญญาณเข้าที่เราสร้างได้ ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างในรูปที่ 3.7) จากนั้น Lane ได้ให้ทฤษฎีบทไว้ (ทฤษฎีบท 1 ใน [8]) ซึ่งแบ่งออกแบบข้อย่อยๆ ดังนี้ (ในที่นี้จะนำเสนอโดยใช้สัญกรณ์เดียวกันกับที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นข้อความอาจแตกต่างจากในต้นฉบับเล็กน้อย)

1. *ข้อย่อยที่ 1*: ในช่วง $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ ซึ่ง $w(t) = M$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของผลตอบสนองสัญญาณขั้น

$$\frac{d}{dt}s(T-t) \quad \leq \quad 0, \qquad \forall t \in [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$$

2. *ข้อย่อยที่ 2*: ในช่วง $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ ซึ่ง $w(t) = -M$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของผลตอบสนองสัญญาณขั้น

$$\frac{d}{dt}s(T-t) \quad \geq \quad 0, \qquad \forall t \in [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$$

[3] Birch และ Jackson ได้พิสูจน์ไว้ใน [6] ว่า สำหรับสัญญาณเข้า $w(t)$ ใดๆ ที่อยู่ภายในปริภูมิ $\mathcal{W}$ เมื่อพิจารณาที่เวลา τ ใดๆ จะสามารถหาสัญญาณเข้า $\hat{w}(t)$ ซึ่งมีลักษณะดังกล่าวและให้ค่าสัญญาณออก ณ เวลา τ สูงกว่าสัญญาณเข้า $w(t)$ ได้เสมอ

3. *ข้อย่อยที่ 3*: ในช่วง $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ ซึ่ง $\dot{w}(t) = D$ จะได้ว่าผลตอบสนองสัญญาณขั้น

$$s(T-t) \;\;\geq\;\; s(T-t_{\text{start}}), \qquad \forall t \in [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$$

4. *ข้อย่อยที่ 4*: ในช่วง $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ ซึ่ง $\dot{w}(t) = -D$ จะได้ว่าผลตอบสนองสัญญาณขั้น

$$s(T-t) \;\;\leq\;\; s(T-t_{\text{start}}), \qquad \forall t \in [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$$

5. *ข้อย่อยที่ 5*: ในช่วง $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ ซึ่ง $\dot{w}(t) = \pm D$ จะได้ว่าผลตอบสนองสัญญาณขั้น

$$s(T-t_{\text{start}}) \;\;=\;\; s(T-t_{\text{end}}), \qquad \forall t \in [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$$

เห็นได้ว่าช่วงที่ $w(t) = \pm M$ นั้นตรงกับเขตอิ่มตัวที่เราได้นิยามไว้ ดังนั้นข้อย่อยที่ 1 และ 2 จึงสมมูลกับทฤษฎีบท 5 นอกจากนี้ช่วงที่ $\dot{w}(t) = \pm D$ ก็ตรงกับนิยามของเขตเปลี่ยนค่าย่อย เพราะฉะนั้นข้อย่อยที่ 3 และ 4 จึงสอดคล้องกับสมการ (3.60) และข้อย่อยที่ 5 นั้นก็สอดคล้องกับสมการ (3.57) และนิยามของเวลาสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่าย่อยแต่ละเขต ด้วยเหตุว่าสมการ (3.60) และ (3.57) เป็นสมการหลักที่ทำให้เราได้มาซึ่งทฤษฎีบท 2–4 ดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่าข้อย่อยที่ 3–5 สมมูลกับทฤษฎีบท 2–4 ที่เราได้ให้ไว้ ในตอนต่อไปกล่าวถึงตัวอย่างของสัญญาณเข้าสูงสุดเพื่อให้เข้าใจทฤษฎีบท 1–5 ได้ดีขึ้น

3.5.3 ตัวอย่างสัญญาณเข้าสูงสุด

ตอนนี้แสดงให้เห็นถึงตัวอย่างของสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ ว่าต้องมีลักษณะอย่างไรจึงจะสอดคล้องกับทฤษฎีบท 1–4 ในเขตเปลี่ยนค่า และสอดคล้องทฤษฎีบท 5 ในเขตอิ่มตัว พิจารณารูปที่ 3.7 เขตเปลี่ยนค่าที่ 1 หรือ T_1 คือช่วงเวลา $[t_1, t_2]$ เขตเปลี่ยนค่าที่ 2 คือช่วงเวลา $[t_3, t_5]$ และเขตเปลี่ยนค่าที่ 3 คือช่วงเวลา $[t_6, t_9]$ สำหรับเขตอิ่มตัวที่ 1 และเขตอิ่มตัวที่สองคือช่วงเวลา $[t_2, t_3]$ และช่วงเวลา $[t_5, t_6]$ ตามลำดับ ลักษณะของเขตแต่ละเขตเป็นดังนี้ (สำหรับดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ ที่เกี่ยวข้องกับตัวอย่างนี้ ดูได้จากรูปที่ 3.3)

เขตเปลี่ยนค่า T_1

ในเขตนี้ $t_{0,1} = t_1$ และ $t_{f,1} = t_2$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $w(t_{0,1}) = \frac{d}{dt}s(T-t_{0,1}) = -M$ และ $w(t_{f,1}) = \frac{d}{dt}s(T-t_{f,1}) = +M$ จะเห็นว่าเขตเปลี่ยนค่านี้เปลี่ยนค่าจาก $-M$ เป็น $+M$ ดังนั้นเขตเปลี่ยนค่านี้จึงเป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ และเพราะว่าไม่มีจุดที่ค่า $s(T-t) = s_1^{\text{ref}}$ (หรือจุดที่ $p_{n+1}(t) = 0$) ดังนั้นจำนวนของเวลาสวิตช์ n จึงมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้เราไม่ต้องพิจารณาทฤษฎีบท 2 เนื่องจากในเขตเปลี่ยนค่านี้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของดรรชนีสวิตช์เลย และเนื่องจากเขตเปลี่ยนค่านี้เป็นแบบคี่ ดังนั้นจึงต้องพิจารณาเงื่อนไขที่เวลาสุดท้ายในทฤษฎีบท 3 ซึ่งพบว่า

$$CS_{f,2} \;=\; \sum_{m=1}^{1}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,1} \;=\; (-1)^2\Delta t_{f,1} \;=\; t_2 - t_1 \;=\; \frac{2M}{D}$$

จะเห็นว่าสัญญาณเข้า $w(t)$ จะสอดคล้องตามทฤษฎีบท 3 ก็ต่อเมื่อ $t_2 - t_1$ มีค่าเท่ากับ $\frac{2M}{D}$

เขตเปลี่ยนค่า T_2

ในเขตนี้ $t_{0,2} = t_3$ และ $t_{f,2} = t_5$ เมื่อพิจารณาทฤษฎีบท 1 พบว่า $w(t_{0,2}) = w(t_{f,2}) = +M$ ดังนั้นเขตเปลี่ยนค่านี้เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ สำหรับจุดที่ ค่า $s(T-t) = s_1^{\mathrm{ref}}$ นั้นมี 1 จุด ได้แก่จุด $t_{1,2} = t_4$ ดังนั้นจำนวนเวลาสวิตช์ $n = 1$ จากนั้นพิจารณาทฤษฎีบท 2 สำหรับเวลาสวิตช์พบว่า

$$\begin{aligned} CS_{1,2} &= \sum_{m=1}^{1}(-1)^2\Delta t_{1,2} \leq \frac{2M}{D} \\ CS_{1,2} &= \sum_{m=1}^{1}(-1)^2\Delta t_{1,2} \geq 0 \end{aligned}$$

ถ้าเงื่อนไขนี้สอดคล้อง เราจะพบว่าสัญญาณเข้า $w(t)$ จะวางตัวอยู่ในขอบเขต $\pm M$ ตลอดเวลา t ซึ่ง $t_3 \leq t \leq t_4$ และสัญญาณเข้าในรูปก็เป็นไปตามนั้น ต่อไปพิจารณาทฤษฎีบท 4 นั่นคือ

$$CS_{f,2} = \sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,2} = (-1)^2\Delta t_{1,2} + (-1)^3\Delta t_{f,2} = (t_4 - t_3) - (t_5 - t_4) = 0$$

ดังนั้นเห็นได้ว่าสัญญาณเข้า $w(t)$ จะสอดคล้องตามทฤษฎีบท 4 ก็ต่อเมื่อ $(t_4 - t_3) = (t_5 - t_4)$

เขตเปลี่ยนค่า T_3

สำหรับเขตนี้ $t_{0,3} = t_6$ และ $t_{f,3} = t_9$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $w(t_{0,3}) = -M$ และ $w(t_{f,3}) = +M$ ดังนั้นเขตเปลี่ยนค่านี้เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ ส่วนจุดที่ค่า $s(T-t) = s_1^{\mathrm{ref}}$ มีจำนวน 2 จุดคือ $t_{1,3} = t_7$ และ $t_{2,3} = t_8$ ทำให้จำนวนเวลาสวิตช์ $n = 2$ เมื่อพิจารณาทฤษฎีบท 2 สำหรับเวลาสวิตช์ทั้งสองจะได้ว่า

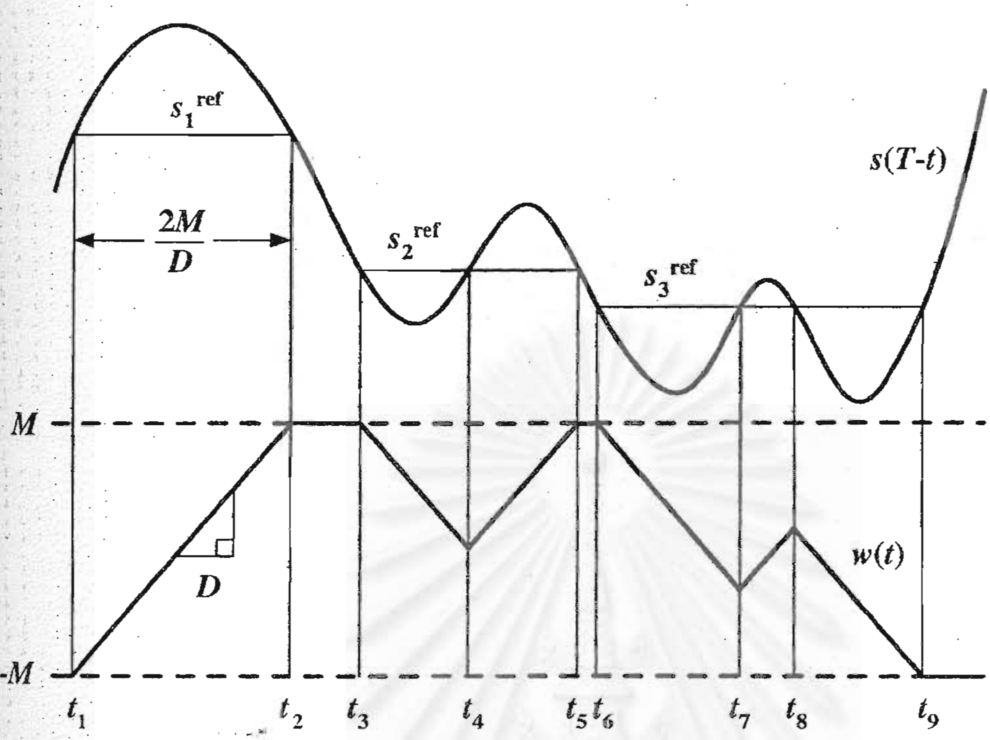
$$CS_{1,3} = \sum_{m=1}^{1}(-1)^2\Delta t_{1,3} \leq \frac{2M}{D}, \qquad CS_{1,3} = \sum_{m=1}^{1}(-1)^2\Delta t_{1,3} \geq 0$$

$$CS_{2,3} = \sum_{m=1}^{1}(-1)^3\Delta t_{2,3} \leq \frac{2M}{D}, \qquad CS_{2,3} = \sum_{m=1}^{1}(-1)^3\Delta t_{2,3} \geq 0$$

หากเงื่อนไขในสมการนี้สอดคล้อง เราจะพบว่าสัญญาณเข้า $w(t)$ จะมีขนาดน้อยกว่า M ตลอดเวลา t ซึ่ง $t_6 \leq t \leq t_8$ เห็นได้ว่าสัญญาณเข้าในรูปก็มีลักษณะดังกล่าว ต่อไปพิจารณาทฤษฎีบท 3 เนื่องจากเขตเปลี่ยนค่านี้เป็นแบบคี่ พบว่า

$$\begin{aligned} CS_{f,3} &= \sum_{m=1}^{3}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,3} \\ &= (-1)^2\Delta t_{1,3} + (-1)^3\Delta t_{2,3} + (-1)^4\Delta t_{f,3} \\ &= (t_7 - t_6) - (t_8 - t_7) + (t_9 - t_8) = \frac{2M}{D} \end{aligned}$$

เห็นได้ว่าสัญญาณเข้า $w(t)$ จะสอดคล้องตามทฤษฎีบท 3 ก็ต่อเมื่อ $(t_7 - t_6) - (t_8 - t_7) + (t_9 - t_8)$ มีค่าเท่ากับ $\frac{2M}{D}$



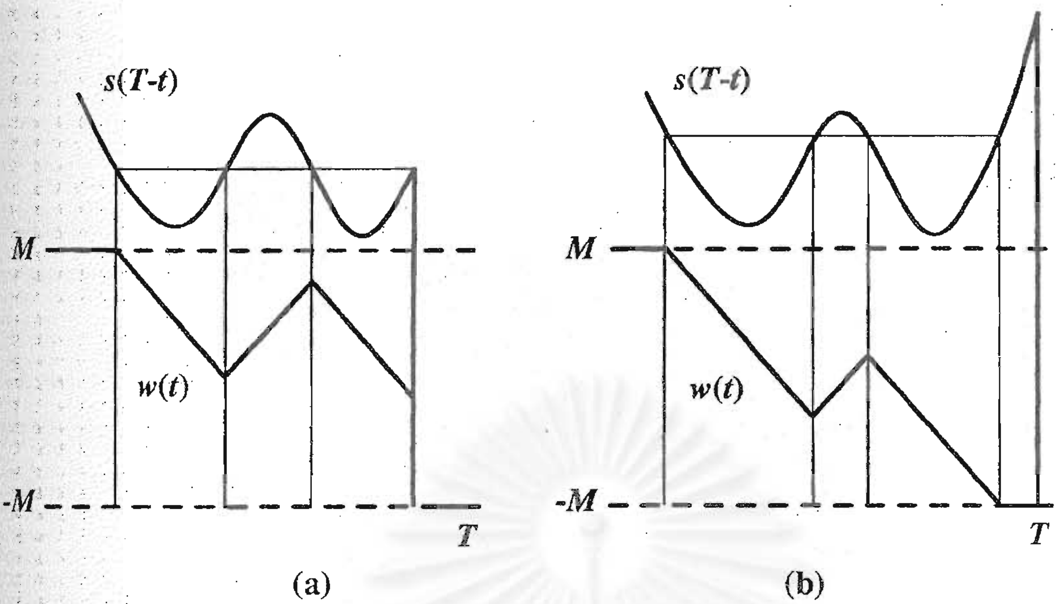
รูปที่ 3.7: ตัวอย่างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ เทียบกับผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$

เขตอิ่มตัว S_1 และ S_2

ในเขตอิ่มตัวทั้งสองนั้นเห็นได้ชัดว่าสอดคล้องกับทฤษฎีบท 5 นั่นคือ t_2 กับ t_3 อยู่ในช่วงเวลายอดถึงยอดเดียวกัน และ t_5 กับ t_6 ก็อยู่ในช่วงเวลายอดถึงยอดเดียวกันเช่นกัน รูปที่ 3.6 แสดงช่วงเวลายอดถึงยอดที่เกี่ยวข้องกับตัวอย่างนี้

3.5.4 เงื่อนไขที่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ และเวลาสุดท้าย $t = T$ ของสัญญาณเข้า

การสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนั้น กระทำอยู่ภายในช่วงเวลา $t \in (0, T)$ กล่าวคือ เวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่าและเขตอิ่มตัวแต่ละเขตอยู่บนข้อสมมติที่ว่า $0 < t_{0,k} < t_{f,k} < T$ (เราจะเรียกเวลา $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ ที่มีลักษณะนี้ว่า*รอยต่อปกติ*ระหว่างเขตเปลี่ยนค่าและเขตอิ่มตัวหรือกลับกัน) โดยมิได้พิจารณารวมเอา*จุดปลาย*ของสัญญาณเข้า $w(t)$ แต่อย่างใด อีกนัยหนึ่งคือมิได้พิจารณาเขตซึ่งเป็นเขตแรก (เขตซึ่งมี $t_{0,k} = 0$) และเขตสุดท้าย (เขตซึ่งมี $t_{f,k} = T$) ของสัญญาณเข้า ในตอนนี้เราจะแสดงเงื่อนไขจำเป็นบนสัญญาณเข้าในเขตแรกและเขตสุดท้ายดังกล่าว อนึ่งปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ที่ได้สมมติไว้มิได้ระบุค่า $w(0)$ และ $w(T)$ โดยถือว่าอาจมีค่าเท่าใดก็ได้ ดังนั้นการวิเคราะห์เงื่อนไขจำเป็นในเขตแรกและเขตสุดท้ายของสัญญาณเข้า จึงต้องพิจารณาข้อสมมติข้อนี้ด้วย การวิเคราะห์เริ่มจากเขตสุดท้ายของสัญญาณเข้าก่อนแล้วจึงวิเคราะห์เขตแรกของสัญญาณเข้า



รูปที่ 3.8: เขตสุดท้ายของสัญญาณเข้าสูงสุดในลักษณะของ (a) เขตเปลี่ยนค่า (b) เขตอิ่มตัว

3.5.4.1 เขตสุดท้ายของสัญญาณเข้า

เขตสุดท้ายของสัญญาณเข้าซึ่งแทนด้วย $\mathcal{T}_{\text{end}}$ หรือ $\mathcal{S}_{\text{end}}$ คือเขตซึ่งมีเวลาสุดท้าย $t_{f,\text{end}}$ เท่ากับ T ซึ่งเป็นเวลาสุดท้ายของสัญญาณเข้าด้วย เวลาสุดท้ายนี้มิได้เป็นรอยต่อปกติระหว่างเขตสองเขต แต่เป็นจุดปลายสุดของสัญญาณเข้า $w(t)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $w(T)$ ที่เราไม่ทราบค่า ดังนั้นจึงไม่อาจพิจารณา $t_{f,\text{end}}$ ในเขตสุดท้ายนี้ตามลักษณะของเขตอิ่มตัวหรือเขตเปลี่ยนค่าปกติได้ อย่างไรก็ตามเวลาเริ่มต้น $t_{0,\text{end}}$ ในเขตสุดท้ายนี้เป็นรอยต่อปกติ ทำให้เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 1–5 ได้ สัญญาณเข้า $w(t)$ อาจสิ้นสุดในลักษณะเดียวกับเขตเปลี่ยนค่าหรือเขตอิ่มตัวก็ได้ กล่าวคือเขตสุดท้ายนี้อาจเป็นเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{\text{end}}$ หรือเขตอิ่มตัว $\mathcal{S}_{\text{end}}$ ก็ได้ดังรูปที่ 3.8 (a) และ 3.8 (b) ตามลำดับ ดังนั้นการวิเคราะห์ในเขตสุดท้ายจึงจำแนกได้เป็นสองกรณีดังนี้

กรณีเขตสุดท้ายของ $w(t)$ เป็นเขตเปลี่ยนค่า

สำหรับทฤษฎีบท 1 จะใช้ได้เฉพาะที่เวลาเริ่มต้น $t_{0,\text{end}}$ เท่านั้น กล่าวคือ

$$w(t_{0,\text{end}}) \quad = \quad -M\text{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T - t_{0,\text{end}})\} \tag{3.86}$$

เนื่องจากเรากำลังพิจารณาในกรณีของเขตเปลี่ยนค่า ดังนั้นจึงไม่พิจารณาทฤษฎีบท 4 ซึ่งใช้กับเขตอิ่มตัว นอกจากนี้เนื่องจากเวลาสุดท้ายของเขตนี้คือ $t_{f,\text{end}} = T$ ซึ่งมิได้เป็นรอยต่อปกติ นั่นคือเวลาสุดท้ายนี้มิได้ไปต่อกับเขตอิ่มตัวอื่นใด ทำให้ค่าสัญญาณเข้าที่เวลาสุดท้ายนี้ไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากับ $\pm M$ ดังนั้นทฤษฎีบท 3 จึงไม่อาจใช้กับเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายนี้ได้ อย่างไรก็ตามทฤษฎีบท 2 ยังคงใช้ได้อยู่เนื่องจากเราพิจารณาค่า $w(t_{0,\text{end}})$ ตามทฤษฎีบท 1 ได้ ยิ่งกว่านั้นทฤษฎีบท 2 นี้ยังมีผลรวมถึงเวลาสุดท้าย $t_{f,\text{end}}$

(หรือ $t_{n+1,\text{end}}$) ด้วย กล่าวคือ

$$0 \;\leq\; CS_{i,\text{end}} \;\leq\; \frac{2M}{D}, \qquad i = 1,\ldots,n+1 \tag{3.87}$$

เมื่อ $CS_{i,\text{end}} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\Delta t_{m,\text{end}} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}(t_{m,\text{end}} - t_{m-1,\text{end}})$ และ n คือจำนวนเวลาสวิตช์ทั้งหมด สำหรับค่า $s_{\text{end}}^{\text{ref}}$ หรือค่าอ้างอิงการสวิตช์ที่เขตสุดท้ายนี้มีค่าเท่ากับ $s(T - t_{f,\text{end}}) = s(0)$ นั่นคือเท่ากับสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ที่จุดปลาย $t = T$

กรณีเขตสุดท้ายของ $w(t)$ เป็นเขตอิ่มตัว

ในกรณีที่เขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัว ทฤษฎีบท 5 อาจนำมาใช้ได้โดยตรงคือ *เวลาเริ่มต้น $t_{0,\text{end}}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,\text{end}} = T$ ต้องอยู่ในช่วงเวลายอดถึงยอดเดียวกัน*

3.5.4.2 เขตแรกของสัญญาณเข้า

สาเหตุที่เราวิเคราะห์สัญญาณเข้าในเขตสุดท้ายก่อนวิเคราะห์สัญญาณเข้าในเขตแรก เนื่องจาก $t_{0,\text{end}}$ ในเขตสุดท้ายเป็นขอบรอยต่อปกติระหว่างเขตอิ่มตัวกับเขตเปลี่ยนค่า และทฤษฎีบท 1–5 นั้นก็อยู่บนข้อสมมติที่ว่า $t_{0,k}$ ใดๆ ต้องเป็นรอยต่อปกติเช่นกัน[4] แต่สำหรับ $t_{0,1}$ ในเขตแรกนั้นมีค่าเป็น 0 และมิได้เป็นขอบรอยต่อของเขตสองเขตใดๆ แต่เป็นจุดปลายสุดของสัญญาณเข้า $w(t)$ จึงไม่อาจใช้ทฤษฎีบท 1–5 ได้โดยตรงเนื่องจาก $w(0)$ มิได้ระบุค่า อย่างไรก็ตามสังเกตว่า $t_{f,1}$ ในเขตแรกนี้เป็นรอยต่อปกติ ดังนั้นการที่จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 1–5 กับเขตแรกนี้ได้ ต้องนิยามดรรชนีเวลาใหม่ขึ้นมาดังนี้

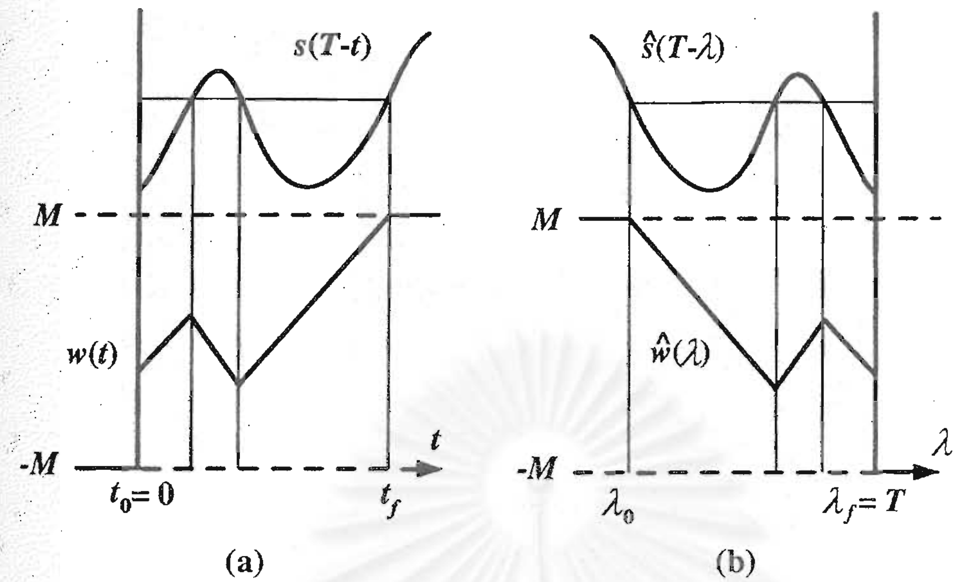
$$\tau \;\triangleq\; T - t \tag{3.88}$$

จะเห็นว่าการนิยามในลักษณะนี้ทำให้ $\tau = T$ เมื่อ $t = 0$ และ $\tau = 0$ เมื่อ $t = T$ ทำให้เขตแรกในดรรชนีเวลา t กลายเป็นเขตสุดท้ายในดรรชนีเวลา τ และยังทำให้ $\tau_{0,\text{end}}$ ในเขตแรกนี้ตรงกับจุดที่เคยเป็น $t_{f,1}$ มาก่อน ($\tau_{0,\text{end}} = T - t_{f,1}$) นั่นคือจะได้ว่า $\tau_{0,\text{end}}$ เป็นรอยต่อปกติ จากนั้นนิยามปริมาณต่างๆ ที่จำเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{w}(\tau) &\;\triangleq\; w(T-\tau) \;=\; w(t) \\
\hat{c}(T-\tau) &\;\triangleq\; s(\tau) \;=\; s(T-t) \\
\hat{c}_k^{\text{ref}} &\;\triangleq\; s_{n_{\text{trans}}-k+1}^{\text{ref}}
\end{aligned}$$

เมื่อ n_{trans} คือจำนวนของเขตเปลี่ยนค่าทั้งหมดซึ่งไม่รวมเขตแรกและเขตสุดท้าย รูปที่ 3.9 (a) แสดงเขตแรกของสัญญาณเข้า $w(t)$ ซึ่งเริ่มต้นที่ 0 และจบลงที่ $t_{f,1}$ ส่วนรูปที่ 3.9 (b) แสดงเขตสุดท้ายของสัญญาณเข้า $\hat{w}(\tau)$ ซึ่งเริ่มต้นที่ $\tau_{0,\text{end}}$ และจบลงที่ T (เขตที่แสดงในรูปเป็นเขตเปลี่ยนค่า อย่างไรก็ตามสำหรับ $w(t)$ อื่นเขตนี้อาจเป็นเขตอิ่มตัวก็ได้) ซึ่งได้ว่า $\tau_{0,\text{end}}$ เป็นรอยต่อปกติระหว่างเขตสองเขต จากนั้นจึงพิจารณาเงื่อนไขบนเขตสุดท้ายของสัญญาณเข้า $\hat{w}(\tau)$ ในลักษณะเดียวกับเงื่อนไขบนเขตสุดท้ายของ

[4] ในตอนที่ 3.5.1 เราพิจารณาแยกกรณีตามค่า $w(t_{0,k})$ โดยแบ่งเป็น $w(t_{0,k}) = -M$ และ $w(t_{0,k}) = +M$ การแบ่งกรณีในลักษณะนี้ใช้ได้เฉพาะเมื่อ $t_{0,k}$ เป็นรอยต่อปกติเท่านั้น



รูปที่ 3.9: สัญญาณเข้าเมื่อใช้การแปลง $\tau = T - t$ (a) เขตแรกของสัญญาณเข้า $w(t)$ ซึ่งเริ่มต้นที่ 0 (b) เขตสุดท้ายของสัญญาณเข้า $\hat{w}(\tau)$ ซึ่งจบลงที่ T

สัญญาณเข้า $w(t)$ โดยแยกเป็นกรณีของเขตเปลี่ยนค่าและเขตอิ่มตัวดังนี้

กรณีเขตแรกของ $w(t)$ เป็นเขตเปลี่ยนค่า

ทฤษฎีบท 1 นั้นใช้ได้ในเวลาเริ่มต้น $\tau_{0,\text{end}}$ เท่านั้น นั่นคือ

$$w(\tau_{0,\text{end}}) \;\; = \;\; -M\text{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T - \tau_{0,\text{end}})\} \tag{3.89}$$

เนื่องจากเขตที่กำลังพิจารณาอยู่นี้เป็นเขตเปลี่ยนค่า ดังนั้นจึงไม่ใช้ทฤษฎีบท 4 ที่ใช้สำหรับเขตอิ่มตัว นอกจากนี้เนื่องจากเวลาสุดท้ายของเขตนี้คือ $\tau_{f,\text{end}} = T$ ซึ่งมิได้เป็นรอยต่อปกติ ทำให้ค่าสัญญาณเข้าที่เวลานี้ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $\pm M$ ดังนั้นเราจึงไม่ใช้ทฤษฎีบท 3 กับเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายนี้ ถึงกระนั้นก็ตามทฤษฎีบท 2 ยังคงมีผลอยู่เนื่องจากเราพิจารณาค่า $w(\tau_{0,\text{end}})$ ตามทฤษฎีบท 1 ได้ ยิ่งกว่านั้นทฤษฎีบท 2 นี้ยังมีขยายผลไปถึงเวลาสุดท้าย $\tau_{f,\text{end}}$ (หรือ $\tau_{n+1,\text{end}}$) ด้วย นั่นคือ

$$0 \;\; \leq \;\; CS_{i,\text{end}} \;\; \leq \;\; \frac{2M}{D}, \qquad i = 1, \ldots, n+1 \tag{3.90}$$

เมื่อ $CS_{i,\text{end}} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}\triangle\tau_{m,\text{end}} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}(\tau_{m,\text{end}} - \tau_{m-1,\text{end}})$ และ n คือจำนวนเวลาสวิตช์ทั้งหมด สำหรับค่า $\hat{c}^{\text{ref}}_{\text{end}}$ หรือค่าอ้างอิงการสวิตช์ที่เขตสุดท้ายนี้มีค่าเท่ากับ $\hat{c}(T - \tau_{f,\text{end}}) = \hat{c}(0) = s(T)$

กรณีเขตแรกของ $w(t)$ เป็นเขตอิ่มตัว

ในกรณีที่เขตสุดแรก (ในดรรชนีเวลา t) เป็นเขตอิ่มตัว เราอาจนำทฤษฎีบท 5 มาใช้ได้โดยตรงคือ *เวลาเริ่มต้น $\tau_{0,\text{end}}$ และเวลาสุดท้าย $\tau_{f,\text{end}} = T$ ต้องอยู่ในช่วงเวลายอดถึงยอดเดียวกัน*

ท้ายที่สุดแล้วเมื่อคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ ได้ ดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ หรือสัญญาณออกสูงสุด ก็สามารถทำได้โดยตรงด้วยการหาสังวัตนาการของสัญญาณเข้าที่ได้กับระบบ $h(t)$ ดังนี้

$$\hat{z} \;=\; \int_0^T w(t)h(T-t)dt \tag{3.91}$$

อันที่จริงแล้วดรรชนีสมรรถนะนี้เป็นค่าประมาณที่เวลา T ดังสมการ (3.17) ตามที่กล่าวไว้ในตอนที่ 3.1 และในที่นี้เราต้องใช้เวลา T ซึ่งมีค่ามากกว่าค่าคงตัวเวลาของระบบ $h(t)$ มากๆ

3.6 สรุป

ในบทนี้เราได้จัดรูปแบบปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น โดยละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ และประมาณด้วยค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายเข้าใกล้อนันต์ ซึ่งส่งผลให้ปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะเปลี่ยนเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงเส้นในมิติอนันต์ ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังกล่าวถูกกำหนดรูปแบบใหม่ให้เป็นปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด ซึ่งมีเงื่อนไขบังคับของขนาดของตัวแปรสถานะ และเงื่อนไขบังคับของขนาดของสัญญาณควบคุม ต่อจากนั้นจึงกล่าวถึงเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการควบคุมแบบเหมาะที่สุดดังกล่าว รวมทั้งช่วงผลเฉลยเอกฐานของการควบคุม และเงื่อนไขมุม ในเทอมของสัญญาณควบคุม ตัวแปรสถานะ และดรรชนีการสวิตช์ เรานำข้อมูลดังกล่าวมาวิเคราะห์หาลักษณะของสัญญาณควบคุมสูงสุด ซึ่งก็คือสัญญาณเข้าสูงสุดที่ทำให้เกิดค่าดรรชนีสมรรถนะนั่นเอง ในที่นี้ช่วงเวลาในการวิเคราะห์ถูกแยกออกเป็นสองเขตได้แก่เขตอิ่มตัวและเขตเปลี่ยนค่า เขตทั้งสองนี้กำหนดโดยลักษณะของสัญญาณเข้าเอง สุดท้ายเราได้ให้ทฤษฎีบทซึ่งอธิบายลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดในเทอมของเวลาสวิตช์ และค่าอ้างอิงการสวิตช์ของสัญญาณเข้าในเขตทั้งสอง

บทที่ 4

โปรแกรมช่วยคำนวณดรรชนีสมรรถนะ

ในบทที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึงการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดทางทฤษฎี และได้ให้ทฤษฎีบทซึ่งประกอบกันเป็นเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับสัญญาณเข้าสูงสุด สัญญาณเข้าสูงสุดสำหรับระบบใดๆอาจคำนวณได้ด้วยมือ และอาจกระทำกับผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบโดยตรงผ่านทางเครื่องมือวัดที่เหมาะสม อย่างไรก็ตามการใช้คำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ย่อมให้ผลที่แม่นยำกว่าและมีความสะดวกรวดเร็วในการใช้งาน ในบทนี้เราจึงนำทฤษฎีบทที่ได้ในบทที่แล้วมาเป็นหลักการสำหรับพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ

แนวทางการสร้างสัญญาณเข้าทางทฤษฎีที่กล่าวไว้ในบทที่ 3 นั้นเริ่มจากการใช้ทฤษฎีบท 1–5 วิเคราะห์หาดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ ซึ่งเมื่อหาได้จะทำให้เราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเข้า หรือ $\dot{w}(t)$ จากนั้นจึงหาสัญญาณเข้าโดยการคำนวณค่าปริพันธ์ของ $\dot{w}(t)$ ที่เวลา t ใดๆ อย่างไรก็ตามการสร้างสัญญาณเข้าซึ่งใช้ในโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นได้ลัดขั้นตอนดังกล่าว นั่นคือเราใช้ทฤษฎีบท 1–5 มาค้นหารูปแบบการสวิตช์และคำนวณสัญญาณเข้า $w(t)$ โดยตรง ขั้นตอนการคำนวณดรรชนีสมรรถนะอาจสรุปได้คร่าวๆ ดังต่อไปนี้

- จำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(t)$ ของระบบที่สนใจ โดยจะได้ผลตอบเป็นการประมาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time approximation) เนื่องจากเป็นการจำลองเชิงตัวเลข (Numerical simulation) จากนั้นจึงเก็บข้อมูลที่ได้ในลักษณะของเวกเตอร์ข้อมูล

- ผลตอบสนองสัญญาณขั้นที่ได้ยังมิอาจนำมาใช้ได้ทันที หากแต่ต้องนำข้อมูลมาเรียงย้อนกลับทางเวลาเพื่อที่จะได้เป็นผลตอบ $s(T-t)$

- ใช้ผลตอบสัญญาณที่ปรับเปลี่ยนแล้วเป็นข้อมูลเพื่อคำนวณรูปแบบเขตที่เป็นไปได้ทั้งหมด บริเวณจุดปลาย $t = T$ (เขตสุดท้าย) และ $t = 0$ (เขตแรก) ของสัญญาณเข้า

- เริ่มต้นจากเขตแรก ทดลองใช้รูปแบบเขตแรกที่คำนวณไว้ทีละรูปแบบเพื่อค้นหาเขตเปลี่ยนค่า/เขตอิ่มตัวถัดไป และค้นหาเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเขตเปลี่ยนค่า/เขตอิ่มตัวไปจบลงที่รูปแบบใดรูปแบบหนึ่งของเขตสุดท้าย (พึงจำไว้ว่าผลตอบสนองสัญญาณขั้นที่ใช้ในขณะนี้คือ $s(T-t)$ ดังนั้นการค้นหาในทิศทางจาก $t = 0$ ไป $t = T$ จึงเสมือนเป็นการค้นหาในทิศทางย้อนกลับเวลาซึ่งกระทำกับผลตอบ $s(t)$) ข้อมูลที่ได้ในเขตนี้คือเวกเตอร์สวิตช์ซึ่งเก็บข้อมูลของดรรชนีสวิตช์ (นั่นคือเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าแต่ละเขต และเวลาสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่านั้นๆ)

- สร้างสัญญาณเข้าสูงสุดทั้งในส่วนของเขตเปลี่ยนค่าและเขตอิ่มตัว โดยตีความจากเวกเตอร์สวิตช์

- คำนวณดรรชนีสมรรถนะจากสัญญาณเข้าสูงสุดที่สร้างได้ โดยหาสังวัตนาการของสัญญาณเข้าสูงสุดกับผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ

ถึงแม้ขั้นตอนในโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นจะมีลำดับขั้นดังกล่าว การอธิบายที่ปรากฏในบทนี้ก็มิได้เรียงตามลำดับขั้นการคำนวณนั้น แต่จะเรียบเรียงเพื่อให้เข้าใจแนวความคิดของการสร้างสัญญาณเข้า ตลอดจนการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะที่ใช้ในโปรแกรม เราจะเริ่มจากการจำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ก่อน

4.1 การจำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้น

ในที่นี้ระบบที่เราสนใจคือ $h(t)$ ซึ่งเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีสมบัติเหมาะสมโดยแท้และมีเสถียรภาพ ซึ่งสอดคล้องกับสมการสถานะใน (2.6) การคำนวณผลตอบสนองสัญญาณขั้นทำได้โดยการป้อนสัญญาณ $w(t)$ เป็นสัญญาณขั้น (นั่นคือจะได้ $s(t) = z(t, w)$ ในกรณีนี้) และแปลงสัญญาณเข้านี้เป็นสัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่องโดยใช้การสุ่มค่า ส่วนการหาสัญญาณออกทำได้โดยการหาปริพันธ์ของสมการสถานะของระบบโดยตรง อย่างไรก็ตามเนื่องจากเราคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลข จึงต้องประมาณให้เป็นระบบเวลาไม่ต่อเนื่องก่อน แล้วจึงแก้สมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equations) แทนสมการอนุพันธ์ (Differential equations) คาบการสุ่มถูกกำหนดบนพื้นฐานของพลวัตของระบบ (ค่าคงตัวเวลาและความถี่ธรรมชาติในแต่ละ mode ของระบบ) อย่างไรก็ตามเรากำหนดความละเอียดการสุ่มค่าให้มีจำนวนการสุ่มค่าอย่างน้อย 1000 จุด กระจายอย่างสม่ำเสมอจากเวลาเริ่มต้นถึงเวลาสุดท้ายในการจำลองผลตอบ หากความละเอียดต่ำเกินไปจะทำให้การคำนวณดรรชนีสมรรถนะมีความแม่นยำน้อยลง ตรงกันข้ามหากความละเอียดสูงเกินไปก็จะทำให้การคำนวณใช้เวลามากขึ้น สำหรับวิธีการหาคำตอบของสมการผลต่างเชิงเส้นนั้น เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายจึงไม่ขอกล่าวในรายละเอียด ส่วนผลที่ได้จากการจำลองคือเวกเตอร์ข้อมูล 2 เวกเตอร์ เวกเตอร์หนึ่งคือค่าของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(t)$ ที่จุดเวลาต่างๆ เรียกว่าเวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองสัญญาณขั้น (Step response data vector) ซึ่งแทนโดย `stp[j]` และอีกเวกเตอร์หนึ่งระบุจุดเวลาที่สัมพันธ์กับเวกเตอร์แรก เรียกว่าเวกเตอร์ข้อมูลเวลา (Time data vector) ซึ่งแทนโดย `tsim[j]` เวกเตอร์ทั้งสองมีความยาวเท่ากับจำนวนจุดที่ใช้สุ่มค่า

ตามที่กล่าวไว้ในตอนที่ 3.1 เราไม่สามารถจำลองผลตอบไปจนถึงเวลาเป็นอนันต์ได้ จึงต้องประมาณเวลาสุดท้ายของผลตอบด้วยเวลาจำกัด T ค่าหนึ่ง โดยดรรชนีสมรรถนะที่ได้ก็เป็นเพียงค่าประมาณที่เวลา T เท่านั้น อย่างไรก็ตามเราต้องการให้เวลา T มีค่าใหญ่เพียงพอ (เข้าใกล้อนันต์) เพื่อที่ค่าผิดพลาดในการประมาณดรรชนีสมรรถนะมีค่าน้อย ดังนั้นการตรวจสอบว่าเวลาสุดท้ายมีค่าสูงพอหรือไม่นั้นจึงอาจตรวจสอบได้โดยตรงจากค่าผิดพลาดซึ่งกล่าวไว้ในตอนที่ 3.1 โดยค่าผิดพลาดดังกล่าวซึ่งเป็นผลต่างระหว่างค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์ $\hat{z}(\infty)$ และค่าประมาณ $\hat{z}(T)$ มีค่าดังนี้

$$\hat{z}(\infty) - \hat{z}(T) \quad \leq \quad M \int_T^\infty |h(t)| dt$$

ดังนั้นเวลาสุดท้าย T ดังกล่าวควรมีค่ามากพอจนทำให้ค่า $h(t)$ มีค่าใกล้ศูนย์เมื่อ $t > T$ หรืออีกนัยหนึ่ง

คือ $h(T)$ เข้าสู่สภาวะอยู่ตัว (Steady state) แล้ว ในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นการคำนวณค่า T นี้ทำได้โดยใช้เกณฑ์บนขนาดของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ รอบๆ เวลา T เพื่อวัดการลู่เข้าของผลตอบสนองสัญญาณขั้นว่าเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวแล้วหรือไม่ กล่าวโดยละเอียดคือถ้าหากความละเอียดในการสุ่มค่ามีจำนวน n_{samp} จุดแล้ว ต้องจำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(t)$ ไปจนถึงเวลา T ซึ่ง

$$\left(\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}\{\texttt{stp}[n_{\text{samp}}-i]-s_{ss}\}^2\right)^{\frac{1}{2}} < 0.01 \max_{1\leq j\leq n_{\text{samp}}}\{\texttt{stp[j]}\} \tag{4.1}$$

เมื่อ $s_{ss} = \lim_{t\to\infty} = \int_0^\infty h(t)dt$ คือค่าอัตราขยายกระแสตรงของผลตอบ $s(t)$ ซึ่งคำนวณได้จากค่า $H(0)$ เมื่อ $H(s)$ เป็นคู่การแปลงลาปลาซของ $h(t)$ สมการ (4.1) กล่าวอย่างง่ายคือค่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของจุด 3 จุดสุดท้ายของเวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองสัญญาณขั้นสัมพัทธ์กับค่าสัญญาณขั้นที่อนันต์ จะต้องมีค่าต่ำกว่า 1% ของค่าสูงสุดของผลตอบสนองสัญญาณขั้นที่ทุกๆ จุดของเวกเตอร์ข้อมูลเวลา การที่ใช้จุดข้อมูลเวลาถึง 3 จุดก็เพื่อเพิ่มความแน่นอนในการคำนวณ เพราะถ้าหากใช้เพียงจุดเดียวหรือสองจุดมีโอกาสมากที่จุดดังกล่าวจะเป็นเพียงจุดที่ผลตอบ $s(t)$ ที่ตัดผ่านค่า s_{ss} เท่านั้น โดยผลตอบอาจยังมีการแกว่งอยู่ (ยังไม่เข้าสู่สภาวะอยู่ตัว) สำหรับการหาผลตอบ $s(T-t)$ จากผลตอบ $s(t)$ นั้นทำได้โดยบิดหมุนเวกเตอร์ข้อมูลทั้งสองเวกเตอร์ แล้วลบเวกเตอร์ข้อมูลเวลาทั้งเวกเตอร์ด้วย T (อย่างไรก็ตามเพื่อไม่ให้เป็นการใช้สัญลักษณ์ฟุ่มเฟือย เราจะยังคงใช้ `stp[j]` และ `tsim[j]` แทนเวกเตอร์ข้อมูลสัญญาณขั้นและเวกเตอร์ข้อมูลเวลาที่ปรับเปลี่ยนแล้วนี้ โดยเป็นข้อตกลงว่าหลังจากนี้ไป `stp[j]` และ `tsim[j]` หมายถึงเวกเตอร์ที่บิดหมุนแล้ว)

4.2 การค้นหาเขตเปลี่ยนค่า

ในตอนนี้เราจะอธิบายวิธีการค้นหาตำแหน่งและคำนวณลักษณะของเขตเปลี่ยนค่า โดยเริ่มพิจารณาจากจุดภายในช่วงเวลา $[0, T]$ ก่อน กล่าวคือยังไม่พิจารณาจุดปลายทั้งสองข้างของผลตอบ ในที่นี้เมื่อเรากล่าวถึงคำว่าจุด `j` ใดๆ ให้หมายถึงจุดหนึ่งหรือตำแหน่งหนึ่งในเวกเตอร์ข้อมูลเวลา `tsim[j]` และเวกเตอร์ข้อมูลสัญญาณขั้น `stp[j]` ที่ `j` นอกจากนี้เพื่อความสะดวกเราจะเรียก*ช่วงเวลายอดถึงยอด* (Peak-to-peak interval) ว่า*ช่วง* (Interval) เท่านั้น และไม่ควรนำไปสับสนกับคำว่า*ช่วงเวลา* (Time interval) ในตอนนี้ขั้นตอนแรกคือการระบุเวลายอดของผลตอบ $s(T-t)$ หรือเวลาที่ $h(T-t) = 0$ อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาในแง่ของเวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองสัญญาณขั้น `stp[j]` เวลายอดจะตรงกับจุดที่เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดเฉพาะที่ รวมกับเวลาเริ่มต้น $t = 0$ และเวลาสุดท้าย $t = T$ ซึ่งเห็นได้ว่าช่วงเวลาระหว่างเวลายอดเหล่านี้ก็คือช่วงๆ หนึ่ง อนึ่งเวลายอดซึ่งเป็นจุดแบ่งช่วง 2 ช่วงใดๆ จะกำหนดให้เป็นสมาชิกของช่วงที่อยู่ก่อนหน้าตัวมันเองทางเวลา ซึ่งทำให้เวลายอด t_i^{peak} มีลักษณะเป็นขอบเขตบนของช่วงที่มันอยู่ นั่นคือ t_i^{peak} จะอยู่ในช่วง $\mathcal{I}_i$ ซึ่ง

$$t_i^{\text{peak}} \geq t, \qquad \forall t \in \mathcal{I}_i$$

รูปที่ 3.6 ในตอนที่ 3.5.2 แสดงให้เห็นถึงเวลายอดที่ i และช่วงที่ i สำหรับเวลา $t = 0$ จะกำหนดให้อยู่ในช่วงแรก และเวลา $t = T$ จะกำหนดให้อยู่ในช่วงสุดท้าย ในโปรแกรมนี้เราได้คำนวณเวกเตอร์ข้อมูล

ของช่วง (Interval data vector) ซึ่งแทนโดย `int[j]` เอาไว้ด้วย กล่าวคือเมื่อพิจารณาจุด `j` ใดๆ ในเวกเตอร์ข้อมูลเวลา `tsim[j]` ก็อาจหาช่วงของจุดนั้นได้จากเวกเตอร์ข้อมูลของช่วงที่ตำแหน่งเดียวกัน นอกจากนั้นยังคำนวณเวกเตอร์ข้อมูลของ*เครื่องหมายของช่วง* (Interval-sign data vector) ซึ่งแทนโดย `intsign[j]` เอาไว้เช่นกัน เครื่องหมายของช่วงในที่นี้คือเครื่องหมายของ $h(T-t)$ (หรือ $-\frac{d}{dt}s(T-t)$) ในช่วงนั้นๆ ทั้งนี้เราได้กล่าวไว้ในตอนที่ 3.5.2 แล้วว่าในช่วงใดๆ เครื่องหมายของ $h(T-t)$ มีค่าเท่ากันตลอดทั้งช่วง เวกเตอร์ข้อมูลของช่วงทำให้เราทราบตำแหน่งช่วงในการทำงาน ส่วนเวกเตอร์ข้อมูลเครื่องหมายของช่วงนั้นช่วยในการสร้างสัญญาณเข้าในแต่ละเขต

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าเริ่มจากต้นทางที่ $t=0$ ไปสู่ $t=T$ ดังนั้นจึงนิยาม*ทิศทางการค้นหา* (Search direction) เป็นทิศที่ชี้จาก $t=0$ ไปยัง $t=T$ ไม่ว่าจะพิจารณาจากจุดใดๆ ของเวลาก็ตาม นอกจากนี้สมมติให้การค้นหาเริ่มจากเวลายอดที่ i แล้วเคลื่อนตามทิศการค้นหาไปยังจุดถัดไป และนั่นหมายถึงเคลื่อนไปสู่ช่วงที่ $i+1$ เราเรียกช่วงที่กำลังพิจารณาอยู่นี้ว่า*ช่วงทำงาน* (Working interval) ซึ่งแทนโดย $\mathcal{I}^{\text{work}}$ และถ้ามองไปในทิศทางการค้นหา (นั่นคือมองจากช่วงทำงานไปยังจุดปลาย $t=T$) จะนิยามช่วงที่มองเห็นได้เป็นสองลักษณะดังต่อไปนี้

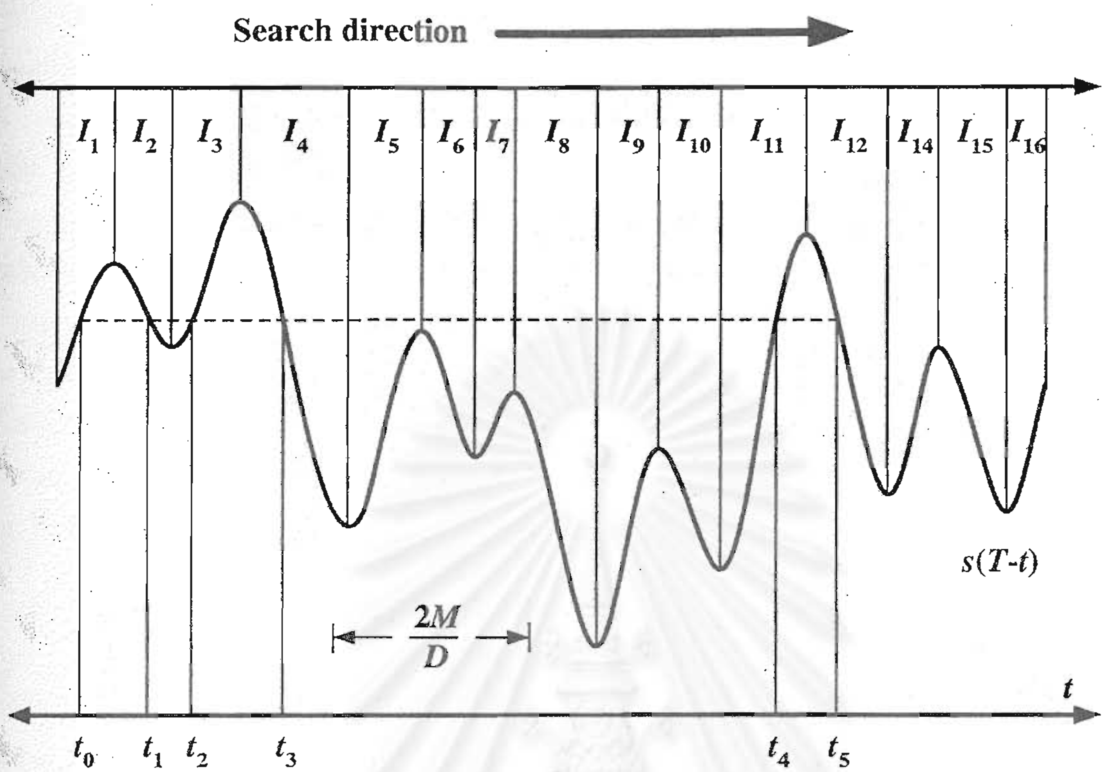
นิยาม 4.1 *เราจะเรียกช่วง $\mathcal{I}$ ใดๆ ว่าช่วงคี่ (Odd interval) เมื่อ $\frac{d}{dt}s(T-t) = -\frac{d}{dt}s(T-t^{\text{work}})$, $\forall t \in \mathcal{I}$ และ $t^{\text{work}} \in \mathcal{I}^{\text{work}}$*

นิยาม 4.2 *เราจะเรียกช่วง $\mathcal{I}$ ใดๆ ว่าช่วงคู่ (Even interval) เมื่อ $\frac{d}{dt}s(T-t) = \frac{d}{dt}s(T-t^{\text{work}})$, $\forall t \in \mathcal{I}$ และ $t^{\text{work}} \in \mathcal{I}^{\text{work}}$*

กล่าวอย่างง่ายคือความชันของผลตอบ $s(T-t)$ ในช่วงคี่มีเครื่องหมายตรงข้ามกับความชันของผลตอบ $s(T-t)$ ในช่วงทำงาน และความชันของผลตอบ $s(T-t)$ ในช่วงคู่มีเครื่องหมายเดียวกันกับความชันของผลตอบ $s(T-t)$ ในช่วงทำงาน จากรูปที่ 3.6 ถ้าสมมติให้ช่วงทำงานคือช่วง $\mathcal{I}_2$ จะได้ว่าช่วงคี่คือช่วง $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{I}_5$ และ $\mathcal{I}_7$ ส่วนช่วงคู่คือช่วง $\mathcal{I}_4$ และ $\mathcal{I}_6$ นอกจากนี้ถ้ากำหนดให้ช่วงทำงานคือช่วงเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ (ช่วงที่มีเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่านั้นๆ อยู่) จะเห็นว่าเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่จบลงในช่วงคี่ และเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ก็จบลงในช่วงคู่ ดังจะเห็นได้ในรูปที่ 3.7 ความจริงข้อนี้มีส่วนช่วยให้เราค้นหาเขตเปลี่ยนค่าได้

4.2.1 เวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ

ในขณะนี้เรากำลังพิจารณาจุดแรก (ในเวกเตอร์ข้อมูลเวลา `tsim[j]`) ของช่วงทำงาน บนระนาบของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ กำหนดให้จุดดังกล่าวเรียกว่า $\hat{j}$ ลากเส้นระดับขนานกับแกนเวลาไปในทิศทางของการค้นหา โดยเริ่มจากจุดบนรูปกราฟสัญญาณขั้นที่ตำแหน่ง $\hat{j}$ ขนาดความสูงของเส้นที่ลากไปย่อมมีค่าเท่ากับขนาดของสัญญาณขั้นในเวกเตอร์ข้อมูลสัญญาณขั้น ณ จุด $\hat{j}$ นี้ หรือเท่ากับ `stp[ĵ]` นั่นเอง เส้นตรงนี้เป็นเสมือนเส้นอ้างอิงการสวิตช์ของเขตเปลี่ยนค่า แต่เพราะยังไม่ทราบว่าจุด $\hat{j}$ เป็นจุดเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าจริงหรือไม่ เราจึงเรียกขนาดความสูงของเส้นระดับนี้ว่า*ค่าอ้างอิงการสวิตช์ทดสอบ* (Testing switching reference) เส้นตรงดังกล่าวตัดกับรูปกราฟของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$



รูปที่ 4.1: การหาเวลาการตัด $t_1, \ldots, t_5$ ในทิศทางการค้นหา เมื่อเริ่มจากจุด `tsim[j]` $= t_0$ กำหนดให้ค่า $\frac{2M}{D}$ เป็นดังแสดงในรูป

ที่เวลาใด ก็ให้เรียกเวลานั้นว่า*เวลาการตัด* (Interception time) และเรียกช่วงที่มีเวลาการตัดนั้นอยู่ว่า*ช่วงการตัด* (Interception interval) ในความเป็นจริงแล้วเวลาการตัดอาจไม่ตรงกับเวลาในเวกเตอร์ข้อมูลเวลาเสียทีเดียว ดังนั้นจึงต้องคำนวณเวลาการตัดโดยใช้การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) ค่าเวลาสองค่าที่จุด `j` และ `j+1` ซึ่งคร่อมเวลาการตัดนั้นๆ อยู่ กล่าวคือถ้าให้เวลาการตัดเป็น t^{cut} จะได้ว่า

$$t^{\mathrm{cut}} = \mathtt{tsim[j]} + \left(\frac{T}{n_{\mathrm{samp}} - 1}\right)\left(\frac{\mathtt{stp[\hat{j}]} - \mathtt{stp[j]}}{\mathtt{stp[j+1]} - \mathtt{stp[j]}}\right) \tag{4.2}$$

เมื่อ $T/(n_{\mathrm{samp}} - 1)$ คือความกว้างของคาบการสุ่มซึ่งมีค่าเท่ากับ $\mathtt{tsim[\hat{j}+1]} - \mathtt{tsim[\hat{j}]}$ นั่นเอง กำหนดให้ $\mathtt{tsim[\hat{j}]} = t_0^{\mathrm{cut}}$ เป็นเวลาเริ่มต้นของเส้นตรงที่ลากนี้ และให้เวลาการตัดแต่ละจุดเป็น $t_1^{\mathrm{cut}}, \ldots, t_{n_{\mathrm{cut}}}^{\mathrm{cut}}$ เมื่อ n_{cut} เป็นจำนวนจุดตัดทั้งหมด รูปที่ 4.1 แสดงการตัดของเส้นที่ลากขนานแกนเวลาจาก t_0^{cut} ในช่วงทำงาน $\mathcal{I}_1$ จำนวนจุดตัด $n_{\mathrm{cut}} = 5$ โดยมีเวลาการตัดคือ $t_1, \ldots, t_5$ และช่วงการตัดคือ $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_{11}$ และ $\mathcal{I}_{12}$ สังเกตว่าเส้นที่ลากนี้คล้ายกับระดับของค่าอ้างอิงการสวิตช์ s^{ref} และค่าของ $s(T - t) - \mathtt{stp[\hat{j}]}$ ที่เวลา t ใดๆ ระหว่างเวลาการตัดที่ประชิดกันนั้นมีเครื่องหมายเดียวกัน ซึ่งทำให้เห็นว่าช่วงเวลาระหว่างเวลาการตัดที่ประชิดกันนี้มีลักษณะเหมือนเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่แสดงไว้ในตอนที่ 3.5.1.1

สิ่งที่เรากำลังทำอยู่ขณะนี้คือทดสอบว่าจุด `ĵ` (หรือเวลาที่ `tsim[ĵ]`) เป็นจุดเริ่มต้นของเขตเปลี่ยน

ค่าหรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีที่ 2–4 ในตอนที่ 3.5.1 มาทดสอบ ก่อนอื่นเราต้องทำความเข้าใจว่ามีความเป็นไปได้น้อยมากที่เวลา `tsim[ĵ]` จะเป็นจุดเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าพอดี เนื่องจากในความเป็นจริงจุดใน `tsim[j]` ที่สุ่มมานั้นเป็นเพียงจุดไม่ต่อเนื่องจำนวนหนึ่งซึ่งสุ่มมาจากเวลาต่อเนื่องซึ่งมีจำนวนจุดเป็นอนันต์ ดังนั้นการที่เวลาการตัด $t_1^{\text{cut}}, \ldots, t_{n_{\text{cut}}}^{\text{cut}}$ จะสอดคล้องกับทฤษฎีบท 3 หรือ 4 นั้นจึงแทบเป็นไปไม่ได้เลย อย่างไรก็ตามอาจตรวจสอบได้ว่าการค้นหาจากจุด $\hat{\jmath}$ ไปยังจุด $\hat{\jmath}+1$ ได้ข้ามผ่านเวลาเริ่มต้นหรือจุดเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าหรือไม่ จากนั้นจึงใช้วิธีการค้นหาละเอียด (Fine search) เพื่อค้นหาเขตเปลี่ยนค่าระหว่างเวลา `tsim[ĵ]` และ `tsim[ĵ+1]` อีกทีหนึ่ง ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการตรวจสอบการข้ามผ่านเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่า เราจะนิยามปริมาณที่จำเป็นสำหรับการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 2–4 ปริมาณหนึ่งคือ*ผลบวกสะสมทดสอบ* (Testing cumulative summation) ของเวลาการตัด ซึ่งมีนิยามคล้ายกับผลบวกสะสมของความกว้างเขตเปลี่ยนค่าย่อยที่ปรากฏในตอนที่ 3.5.1.1 ผลบวกสะสมทดสอบหรือ TCS_i ของเวลาการตัด t_i^{cut} ใดๆ มีนิยามดังต่อไปนี้

$$TCS_i \triangleq \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}(t_m^{\text{cut}} - t_{m-1}^{\text{cut}}) \tag{4.3}$$

อีกปริมาณหนึ่งที่จำเป็นต้องใช้คือ*ผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์* (Relative testing cumulative summation) ซึ่งแทนด้วย R_i และมีนิยามบนผลบวกสะสมทดสอบ TCS_i และเวลาการตัด t_i^{cut} ดังนี้

$$R_i \triangleq \begin{cases} TCS_i - \dfrac{2M}{D} & \text{เมื่อ } t_i^{\text{cut}} \text{ อยู่ในช่วงคี่} \\ TCS_i - 0 & \text{เมื่อ } t_i^{\text{cut}} \text{ อยู่ในช่วงคู่} \end{cases} \tag{4.4}$$

จากนั้นพิจารณาใช้ทฤษฎีบท 2 เพื่อกำจัดเอาเวลาการตัดที่ไม่สามารถเป็นไปได้ออกไปก่อน กล่าวโดยละเอียดคือเรามองเวลาการตัดเสมือนหนึ่งเป็นเวลาสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่าซึ่งมีเวลาเริ่มต้นเป็น $t_0^{\text{cut}} =$ `tsim[ĵ]` แต่ทฤษฎีบท 2 กล่าวเอาไว้ว่าสำหรับเวลาสวิตช์ $t_{i,k}$ ในเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใดๆ จะได้ว่า

$$0 \leq CS_{i,k} \leq \frac{2M}{D}$$

เมื่อ $CS_{i,k} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}(t_{m,k} - t_{m-1,k})$ และจำนวนเวลาสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่าเท่ากับ n ดังนั้นหากเราพิจารณาค่าผลบวกสะสมทดสอบ TCS_i ของเวลาการตัด t_i^{cut} ใดๆ แล้วพบว่ามีการละเมิดทฤษฎีบท 2 กล่าวคือ

$$TCS_i > \frac{2M}{D} \quad \text{หรือ} \quad TCS_i < 0 \tag{4.5}$$

เราสามารถกำจัดเวลาการตัด $t_{i+1}^{\text{cut}}, \ldots, t_{n_{\text{cut}}}^{\text{cut}}$ ออกไปได้ จะเห็นว่าเวลาการตัด t_i^{cut} มิได้ถูกตัดทิ้งไปด้วย ทั้งนี้ก็เพราะว่ามีกรณีที่ $TCS_i > \frac{2M}{D}$ แต่ $TCS_i \approx \frac{2M}{D}$ (เมื่อ t_i^{cut} อยู่ในช่วงคี่) หรือ $TCS_i < 0$ แต่ $TCS_i \approx 0$ (เมื่อ t_i^{cut} อยู่ในช่วงคู่) กรณีทั้งสองนี้ชี้ให้เห็นว่า t_i^{cut} เป็นเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ซึ่งมีเวลาเริ่มต้นคือ t_0^{cut} และเวลาสวิตช์คือ $t_1^{\text{cut}}, \ldots, t_{i-1}^{\text{cut}}$ จากรูปที่ 4.1 ถ้าหากค่า $\frac{2M}{D}$ เป็นดังที่แสดงในรูปจะได้ว่าเวลาการตัด t_5 สามารถตัดทิ้งได้

เมื่อกำจัดเวลาการตัดบางส่วนทิ้งไปแล้ว ตอนนี้เราจะตรวจสอบว่าการค้นหาจากจุด $\hat{\jmath}$ ไปยังจุด $\hat{\jmath}+1$ ได้ข้ามผ่านเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าหรือไม่ การตรวจสอบดังกล่าวใช้ประโยชน์จากทฤษฎีบท

3-4 เกี่ยวกับผลบวกสะสมที่เวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ใดๆ ซึ่งกล่าวไว้ว่า

$$\begin{aligned} CS_{f,k} &= \frac{2M}{D} && \text{ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่} \\ CS_{f,k} &= 0 && \text{ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่} \end{aligned}$$

เมื่อ $CS_{f,k} = \sum_{m=1}^{n+1}(-1)^{m+1}(t_{m,k} - t_{m-1,k})$ ดังนั้นหากเราพิจารณาค่าผลบวกสะสมทดสอบ TCS_i ของเวลาการตัด t_i^{cut} ใดๆ แล้วพบว่า

$$\begin{aligned} TCS_i &= \frac{2M}{D} && \text{เมื่อ } t_i^{\text{cut}} \text{ อยู่ในช่วงคี่} \\ TCS_i &= 0 && \text{เมื่อ } t_i^{\text{cut}} \text{ อยู่ในช่วงคู่} \end{aligned} \tag{4.6}$$

ก็จะได้ว่าเวลาการตัด t_i^{cut} เป็นเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ซึ่งมีเวลาเริ่มต้นคือ t_0^{cut} และเวลาสวิตช์คือ $t_1^{\text{cut}}, \ldots, t_{i-1}^{\text{cut}}$ สมการ (4.6) อาจแสดงได้ในรูปของผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ R_i ดังนี้

$$R_i = 0 \tag{4.7}$$

อย่างไรก็ตามแนวความคิดนี้มีปัญหาอยู่ที่ความละเอียดของการสุ่มค่าในการคำนวณเวกเตอร์ข้อมูล `tsim[j]` เพราะดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าจุดใน `tsim[j]` ที่สุ่มมานั้นเป็นเพียงจุดไม่ต่อเนื่องจำนวนหนึ่งซึ่งสุ่มมาจากเวลาต่อเนื่องซึ่งมีจำนวนจุดเป็นอนันต์ ดังนั้นการค้นหาที่จุด $\jmath$ จะมีค่าผิดพลาดไปจากเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ของจริงหรือมีค่าผลต่าง $t_0^{\text{cut}} - t_{0,k}$ ไม่เกินครึ่งหนึ่งของคาบการสุ่ม

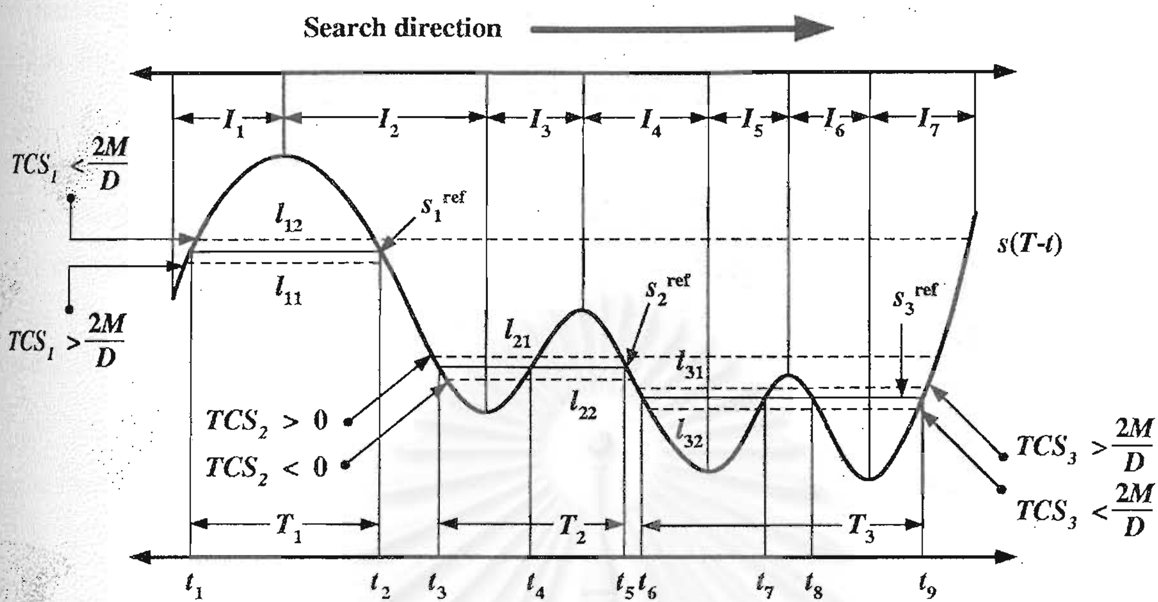
$$\frac{T}{2(n_{\text{samp}} - 1)}$$

ดังนั้นถ้าต้องการความแม่นยำในการคำนวณเขตเปลี่ยนค่า ก็ยิ่งต้องเพิ่มจำนวนการสุ่มให้สูงขึ้น แต่นั่นหมายถึงจำนวนจุดที่ต้องค้นหาจะเพิ่มมากขึ้น และทำให้เวลาการค้นหาสูงขึ้นตามไปด้วย นี่เองเป็นที่มาของแนวความคิดในการค้นหาแบบคร่าวๆ ก่อน (ไม่ต้องใช้จำนวนการสุ่มมาก) แล้วทำการค้นหาละเอียดภายหลังจากที่พบบริเวณที่น่าจะเป็นเขตเปลี่ยนค่า สำหรับการค้นหาแบบละเอียดนั้นจะกล่าวถึงในตอนถัดไป ส่วนการค้นหาแบบคร่าวๆเพื่อที่จะหาจุด $\jmath$ และจุด $\jmath + 1$ ที่คร่อมเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าสามารถอธิบายได้ดังนี้ พิจารณาที่จุด $\jmath$ กำหนดให้เวลาเริ่มต้นที่จุดนี้มีค่า $t_0^{\text{cut},\jmath} = \texttt{tsim[}\jmath\texttt{]}$ และกำหนดให้เวลาการตัดที่ i เป็น $t_i^{\text{cut},\jmath}$ และให้ผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ ณ เวลาการตัดที่ i เป็น $R_i^{\jmath}$ จากนั้นพิจารณาที่จุด $\jmath + 1$ กำหนดให้เวลาเริ่มต้น $t_0^{\text{cut},\jmath+1} = \texttt{tsim[}\jmath+1\texttt{]}$ และกำหนดให้เวลาการตัดที่ i เป็น $t_i^{\text{cut},\jmath+1}$ และให้ผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ ณ เวลาการตัดที่ i เป็น $R_i^{\jmath+1}$ เราพบว่าถ้าหาก

$$\operatorname{sgn}\{R_i^{\jmath}\} = -\operatorname{sgn}\{R_i^{\jmath+1}\} \tag{4.8}$$

หรือค่าผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ R_i มีการเปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อเคลื่อนจากจุด $\jmath$ มายังจุด $\jmath + 1$ จะชี้ให้เห็นว่าบริเวณที่ค่า $R_i = 0$ ย่อมอยู่ระหว่างสองจุดนี้ กล่าวให้ชัดเจนก็คือเวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ เขตหนึ่ง อยู่ในบริเวณต่อไปนี้

$$t_0^{\text{cut},\jmath} < t_{0,k} < t_0^{\text{cut},\jmath+1} \tag{4.9}$$



รูปที่ 4.2: ตัวอย่างการข้ามผ่านเขตเปลี่ยนค่าซึ่งอยู่ระหว่างจุด $\hat{\jmath}$ และจุด $\hat{\jmath}+1$ สามลักษณะ

โดยที่เวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ อยู่ในบริเวณต่อไปนี้

$$t_i^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}} \;<\; t_{f,k} \;<\; t_i^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1} \tag{4.10}$$

เพื่อให้เข้าใจมากขึ้น ลองพิจารณาตัวอย่างในรูปที่ 4.2 จะเห็นว่ามีเขตการข้ามผ่านเขตเปลี่ยนค่า 3 เขต เขตเปลี่ยนค่าแรก $\mathcal{T}_1 = [t_1, t_2]$ เขตการเปลี่ยนที่สอง $\mathcal{T}_2 = [t_3, t_5]$ และเขตเปลี่ยนค่าที่สาม $\mathcal{T}_3 = [t_6, t_9]$ โดยมีค่าอ้างอิงที่สัมพันธ์กันคือ s_1^{ref}, s_2^{ref} และ s_3^{ref} ตามลำดับ เราพิจารณาตามลำดับได้ดังนี้

เขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_1$

เวลาเริ่มต้น $t_{0,1}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,1}$ ของเขตนี้มีค่าเท่ากับ t_1 และ t_2 ตามลำดับ กำหนดให้ `tsim[`$\hat{\jmath}$`]` $< t_{0,1} <$ `tsim[`$\hat{\jmath}+1$`]` และเส้นระดับที่ลากจากจุด $\hat{\jmath}$ คือเส้น l_{11} ส่วนเส้นระดับที่ลากจากจุด $\hat{\jmath}+1$ คือเส้น l_{12} ช่วงทำงานในขณะนี้คือช่วง $\mathcal{I}_1$ พบว่าผลบวกสะสมทดสอบที่เวลาตัด $t_1^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ หรือ $TCS_1^{\hat{\jmath}}$ มีค่ามากกว่า $\frac{2M}{D}$ นั่นคือ

$$R_1^{\hat{\jmath}} > 0$$

และพบว่าผลบวกสะสมทดสอบที่เวลาตัด $t_1^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ หรือ $TCS_1^{\hat{\jmath}+1}$ มีค่าน้อยกว่า $\frac{2M}{D}$ นั่นคือ

$$R_1^{\hat{\jmath}+1} < 0$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ทั้งสองมีเครื่องหมายต่างกัน ข้อมูลนี้เองที่เป็นตัวชี้บอกได้ว่ามีเขตเปลี่ยนค่าเริ่มต้นขึ้นในระหว่างเวลา `tsim[`$\hat{\jmath}$`]` และ `tsim[`$\hat{\jmath}+1$`]` นอกจากนั้นสังเกตว่าช่วงการตัด $\mathcal{I}_1^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ (ช่วง $\mathcal{I}_2$) ที่สัมพันธ์กับเวลาการตัด $t_1^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ บนเส้น l_{11} และช่วงการตัด $\mathcal{I}_1^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ (ช่วง $\mathcal{I}_2$)

ที่สัมพันธ์กับเวลาการตัด $t_1^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ บนเส้น l_{12} เป็นช่วงคี่ทั้งคู่เมื่อวัดจากช่วงทำงาน ($\mathcal{I}_1$) ซึ่งก็จะได้ว่าเขตเปลี่ยนค่าที่อยู่ระหว่างเส้น l_{11} และ l_{12} นี้ เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่เช่นกัน

เขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_2$

เวลาเริ่มต้น $t_{0,2}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,2}$ ของเขตนี้มีค่าเท่ากับ t_3 และ t_5 ตามลำดับ กำหนดให้ $\mathtt{tsim}[\hat{\jmath}] < t_{0,2} < \mathtt{tsim}[\hat{\jmath}+1]$ และเส้นระดับที่ลากจากจุด $\hat{\jmath}$ คือเส้น l_{21} ส่วนเส้นระดับที่ลากจากจุด $\hat{\jmath}+1$ คือเส้น l_{22} ช่วงทำงานในขณะนี้คือช่วง $\mathcal{I}_2$ พบว่าผลบวกสะสมทดสอบที่เวลาตัด $t_2^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ หรือ $TCS_2^{\hat{\jmath}}$ มีค่ามากกว่า 0 นั่นคือ

$$R_2^{\hat{\jmath}} > 0$$

และพบว่าผลบวกสะสมทดสอบที่เวลาตัด $t_2^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ หรือ $TCS_2^{\hat{\jmath}+1}$ มีค่าน้อยกว่า 0 นั่นคือ

$$R_2^{\hat{\jmath}+1} < 0$$

เห็นได้ว่าค่าผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ทั้งสองมีเครื่องหมายต่างกัน ซึ่งบ่งบอกถึงเขตเปลี่ยนค่าที่เริ่มต้นขึ้นในระหว่างเวลา $\mathtt{tsim}[\hat{\jmath}]$ และ $\mathtt{tsim}[\hat{\jmath}+1]$ นี้ และสังเกตว่าช่วงการตัด $\mathcal{I}_2^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ (ช่วง $\mathcal{I}_4$) ที่สัมพันธ์กับเวลาการตัด $t_2^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ บนเส้น l_{21} และช่วงการตัด $\mathcal{I}_2^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ (ช่วง $\mathcal{I}_4$) ที่สัมพันธ์กับเวลาการตัด $t_2^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ บนเส้น l_{22} เป็นช่วงคู่ทั้งคู่เมื่อวัดจากช่วงทำงาน ($\mathcal{I}_2$) ซึ่งก็จะได้ว่าเขตเปลี่ยนค่าที่อยู่ระหว่างเส้น l_{21} และ l_{22} นี้ เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่เช่นกัน

เขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_3$

เวลาเริ่มต้น $t_{0,3}$ และเวลาสุดท้าย $t_{f,3}$ ของเขตนี้มีค่าเท่ากับ t_6 และ t_9 ตามลำดับ กำหนดให้ $\mathtt{tsim}[\hat{\jmath}] < t_{0,3} < \mathtt{tsim}[\hat{\jmath}+1]$ และเส้นระดับที่ลากจากจุด $\hat{\jmath}$ คือเส้น l_{31} ส่วนเส้นระดับที่ลากจากจุด $\hat{\jmath}+1$ คือเส้น l_{32} ช่วงทำงานในขณะนี้คือช่วง $\mathcal{I}_4$ พบว่าผลบวกสะสมทดสอบที่เวลาตัด $t_3^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ หรือ $TCS_3^{\hat{\jmath}}$ มีค่ามากกว่า $\frac{2M}{D}$ นั่นคือ

$$R_3^{\hat{\jmath}} > 0$$

และพบว่าผลบวกสะสมทดสอบที่เวลาตัด $t_3^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ หรือ $TCS_3^{\hat{\jmath}+1}$ มีค่าน้อยกว่า $\frac{2M}{D}$ นั่นคือ

$$R_3^{\hat{\jmath}+1} < 0$$

เช่นเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว เครื่องหมายของผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ทั้งสองบ่งชี้ถึงการข้ามผ่านเขตเปลี่ยนค่าจากเวลา $\mathtt{tsim}[\hat{\jmath}]$ ไปยังเวลา $\mathtt{tsim}[\hat{\jmath}+1]$ สำหรับช่วงการตัด $\mathcal{I}_3^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ (ช่วง $\mathcal{I}_7$) ที่สัมพันธ์กับเวลาการตัด $t_3^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ บนเส้น l_{31} และช่วงการตัด $\mathcal{I}_3^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ (ช่วง $\mathcal{I}_7$) ที่สัมพันธ์กับเวลาการตัด $t_3^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}+1}$ บนเส้น l_{32} เป็นช่วงคี่ทั้งคู่เมื่อวัดจากช่วงทำงาน ($\mathcal{I}_4$) ซึ่งก็จะได้ว่าเขตเปลี่ยนค่าที่อยู่ระหว่างเส้น l_{31} และ l_{32} นี้ เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่เช่นกัน

ภายในโปรแกรมผลที่ได้จากขั้นตอนนี้คือเวกเตอร์ที่เก็บข้อมูลของการค้นหาที่จุด $\hat{\jmath}$ ข้อมูลดังกล่าวคือเวลาการตัด $t_i^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ (กำจัดเวลาการตัดที่เป็นไปไม่ได้ออกไปแล้ว) ผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ $R_i^{\hat{\jmath}}$ และ

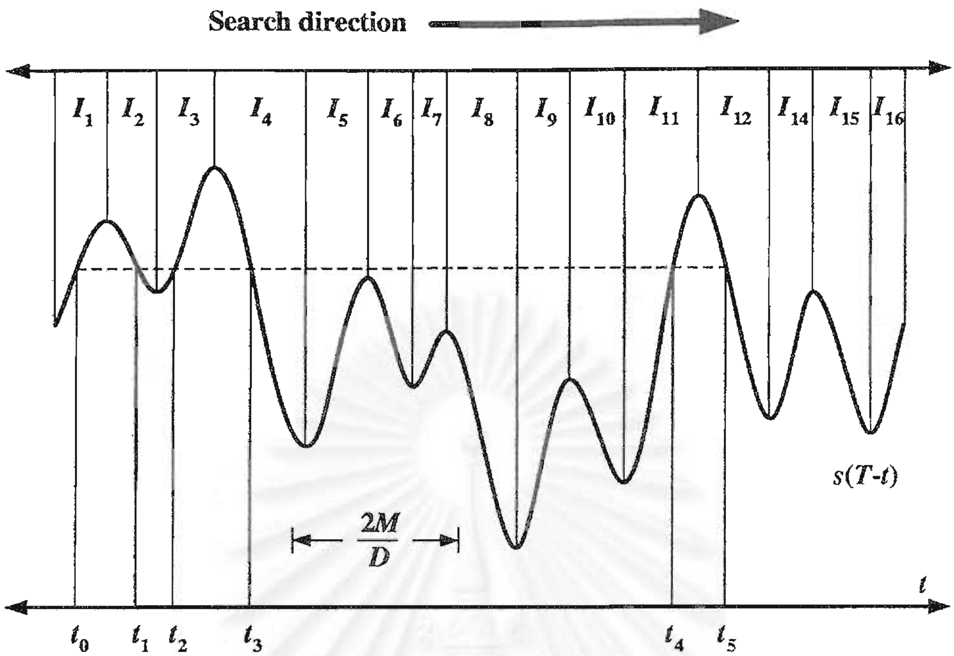
เครื่องหมายของผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ดังกล่าว เราเรียกเวกเตอร์นี้ว่า*เวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ* (Testing switching vector) ซึ่งมีรูปแบบ[1]ดังแสดงในรูปที่ 4.3, 4.4 และ 4.5 กล่าวคือแต่ละหลักของเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบแทนช่วงๆ หนึ่ง ดังนั้นจำนวนหลักทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับจำนวนช่วงทั้งหมด แถวแรกคือเวลาการตัด $t_i^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ ซึ่งต้องใส่ให้ตรงกับหลักที่แทนช่วงการตัดที่สัมพันธ์กัน ถ้าหลักใดไม่มีข้อมูลให้ใส่ค่าศูนย์ไว้ สำหรับแถวที่สองคือผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ $R_i^{\hat{\jmath}}$ ที่ต้องใส่ให้ตรงกับหลักเช่นเดียวกัน และแถวสุดท้ายคือเครื่องหมายของผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ดังกล่าว (ใช้ค่า $+1$ หรือ -1) สำหรับสองแถวสุดท้ายนี้ถ้าไม่มีข้อมูลจะใส่ค่า ∞ เนื่องจากเหตุผลทางเทคนิคในการเขียนโปรแกรม พิจารณาการสร้างเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบในรูปดังกล่าวตามลำดับดังนี้

ตัวอย่างที่ 1: การสร้างเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบแสดงในรูปที่ 4.3
จากรูปช่วงทำงานคือช่วง $\mathcal{I}_1$ และค่า $\frac{2M}{D}$ เป็นดังที่แสดงไว้ ให้จุดที่กำลังพิจารณาคือ $\hat{\jmath}$ ดังนั้นเวลาเริ่มต้น t_0^{cut} มีค่าเท่ากับ `tsim[ĵ]` ซึ่งในรูปคือ t_0 สำหรับเวลาตัดทั้งหมดคือ $t_1,\ldots,t_5$ ซึ่งอยู่ในช่วงการตัด $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_{11}$ และ $\mathcal{I}_{12}$ ตามลำดับ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก t_4 ให้ค่าผลบวกสะสมทดสอบ TCS_4 ที่ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 หรือนั่นคือ $TCS_4 < 0$ สอดคล้องกับสมการ (4.5) ดังนั้น t_5 ต้องถูกตัดทิ้ง จากนั้นใส่ $t_0,t_1,\ldots,t_4$ ลงในหลักที่ $1,2,3,4,11$ ตามลำดับ แล้วใส่ค่าผลบวกทดสอบสัมพัทธ์และเครื่องหมายของตัวมันเองลงในหลักที่สัมพันธ์กัน (สังเกตว่าไม่ต้องใส่ผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์หรือเครื่องหมายในหลักที่ 1 หรือช่วงการทำงาน) ถึงแม้ค่าผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ R_i ต้องทำการวัดถึงจะทราบค่าแท้จริงได้ แต่เครื่องหมายของมันอาจหาได้จากนิยาม (4.4) และจากรูปโดยตรง

ตัวอย่างที่ 2: การสร้างเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบแสดงในรูปที่ 4.4
จากรูปช่วงทำงานคือช่วง $\mathcal{I}_4$ และค่า $\frac{2M}{D}$ เป็นดังที่แสดงไว้ ให้จุดที่กำลังพิจารณาคือ $\hat{\jmath}$ ดังนั้นเวลาเริ่มต้น t_0^{cut} มีค่าเท่ากับ `tsim[ĵ]` ซึ่งในรูปคือ t_0 สำหรับเวลาตัดทั้งหมดคือ $t_1,\ldots,t_9$ ซึ่งอยู่ในช่วงการตัด $\mathcal{I}_5,\ldots,\mathcal{I}_8$ และ $\mathcal{I}_{11},\ldots,\mathcal{I}_{16}$ ตามลำดับ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก t_5 ให้ค่าผลบวกสะสมทดสอบ TCS_5 ที่ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 หรือนั่นคือ $TCS_5 > \frac{2M}{D}$ ดังนั้น $t_6,\ldots,t_9$ ต้องถูกตัดทิ้ง จากนั้นใส่ $t_0,t_1,\ldots,t_5$ ลงในหลักที่ $4,5,6,7,8,11$ ตามลำดับ แล้วใส่ค่าผลบวกทดสอบสัมพัทธ์และเครื่องหมายของตัวมันเองลงในหลักที่สัมพันธ์กัน

ตัวอย่างที่ 3: การสร้างเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบแสดงในรูปที่ 4.5
จากรูปช่วงทำงานคือช่วง $\mathcal{I}_8$ และค่า $\frac{2M}{D}$ เป็นดังที่แสดงไว้ ให้จุดที่กำลังพิจารณาคือ $\hat{\jmath}$ ดังนั้นเวลาเริ่มต้น t_0^{cut} มีค่าเท่ากับ `tsim[ĵ]` ซึ่งในรูปคือ t_0 สำหรับเวลาตัดทั้งหมดคือ $t_1,\ldots,t_7$ ซึ่งอยู่ในช่วงการตัด $\mathcal{I}_9,\ldots,\mathcal{I}_{15}$ ตามลำดับ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก t_6 ให้ค่าผลบวกสะสมทดสอบ TCS_6 ที่ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 หรือนั่นคือ $TCS_6 < 0$ สอดคล้องกับสมการ 4.5 ดังนั้น t_7 ต้องถูกตัดทิ้ง จากนั้นใส่ $t_0,t_1,\ldots,t_6$ ลง

[1]รูปแบบที่นำเสนอนี้เป็นรูปแบบของเวกเตอร์แนวนอน อย่างไรก็ตามรูปแบบจริงที่ใช้ภายในโปรแกรมเป็นรูปแบบของเวกเตอร์แนวตั้ง



Interval number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Interception time	t_0	t_1	t_2	t_3	0	0	0	0	0	0	t_4	0	0	0	0
Relative *TCS*	∞	R_1	R_2	R_3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	R_4	∞	∞	∞	∞
Sign of Relative *TCS*	∞	-1	+1	-1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-1	∞	∞	∞	∞

Working interval

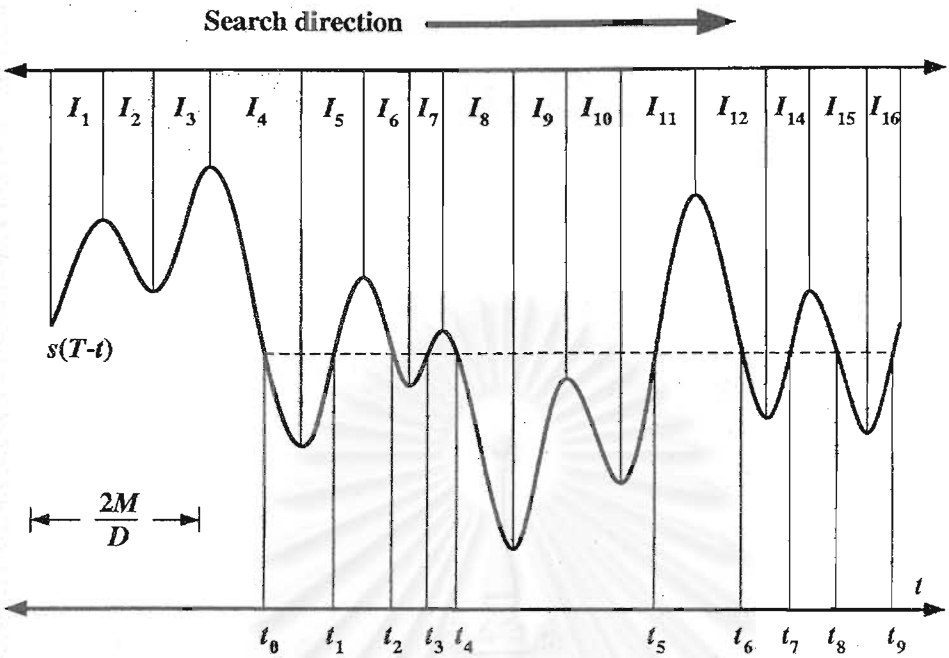
รูปที่ 4.3: ตัวอย่างที่ 1 ของรูปแบบและการคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ

ในหลักที่ 8,...,14 ตามลำดับ แล้วใส่ค่าผลบวกทดสอบสัมพัทธ์และเครื่องหมายของตัวมันเองลงในหลักที่สัมพันธ์กัน

สรุปได้ว่าเมื่อทราบเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบในการค้นหาที่จุด j ใดๆ แล้วสร้างเวกเตอร์ทดสอบที่จุด $j+1$ ถัดไป ก็อาจใช้ความจริงในสมการ (4.8) ตรวจสอบได้ว่ามีเขตเปลี่ยนค่าเกิดขึ้นอยู่ระหว่างสองจุดนี้หรือไม่ และถ้าหากได้ข้ามผ่านเขตเปลี่ยนค่าจริง ขั้นตอนต่อไปคือการค้นหาโดยละเอียดเพื่อที่จะระบุตำแหน่งของเขตเปลี่ยนค่าให้แม่นยำยิ่งขึ้น อนึ่งจะเห็นได้ว่าการตรวจสอบการข้ามผ่านเขตเปลี่ยนค่า ต้องอาศัยข้อมูลของเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบที่จุดปัจจุบันและจุดก่อนหน้าด้วย ดังนั้นโปรแกรมจึงเก็บค่าเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบที่คำนวณได้ในจุดหนึ่งๆ ไว้ใช้เทียบกับเวกเตอร์สวิตช์ที่จุดถัดไปเสมอ

4.2.2 เวกเตอร์สวิตช์ย่อย

การค้นหาละเอียดที่ปรากฏในโปรแกรมใช้ขั้นตอนวิธีแบ่งสองส่วน (Bisection method) ร่วมกับหลักการที่กล่าวไปในตอนที่แล้วเพื่อคำนวณขอบเขตบนและขอบเขตล่างของเวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$



Interval number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Interception time	0	0	0	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	0	0	t_5	0	0	0	0
Relative *TCS*	∞	∞	∞	∞	R_1	R_2	R_3	R_4	∞	∞	R_5	∞	∞	∞	∞
Sign of Relative *TCS*	∞	∞	∞	∞	-1	+1	-1	+1	∞	∞	+1	∞	∞	∞	∞

Working interval

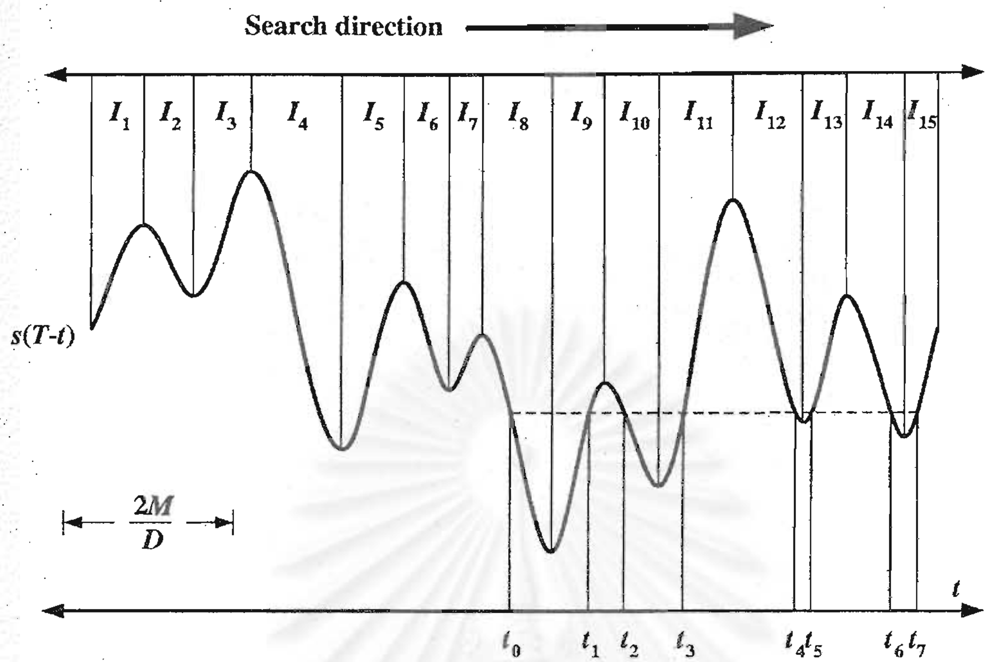
รูปที่ 4.4: ตัวอย่างที่ 2 ของรูปแบบและการคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ

โดยให้ระยะห่างระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างมีค่าน้อยเท่าที่ต้องการ นั่นหมายถึงมีความแม่นยำเท่าที่ต้องการด้วย และเมื่อได้เวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ ซึ่งเป็นค่าประมาณในระดับความแม่นยำที่ต้องการแล้ว ก็อาจคำนวณเวลาสวิตช์รวมไปถึงเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าวได้โดยอัตโนมัติ ขั้นตอนวิธีแบ่งสองส่วนที่ใช้เป็นดังนี้

1. กำหนดให้ τ_{up}^0 และ τ_{low}^0 เป็นขอบเขตบนและขอบเขตล่างเริ่มแรกของ $t_{0,k}$ ตามลำดับ ซึ่งถ้าพิจารณาจากตอนที่แล้วจะได้ว่าขอบเขตบน τ_{up}^0 ดังกล่าวคือ `tsim[ĵ+1]` และขอบเขตล่าง τ_{low}^0 ดังกล่าวก็คือ `tsim[ĵ]` และให้ช่วงการตัดที่ $\hat{\imath}$ เป็นช่วงการตัดที่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายของผลบวกสะสมสัมพัทธ์ $R_{\hat{\imath}}$

2. สมมติว่าขณะนี้เป็นรอบการคำนวณที่ N คำนวณเวลากึ่งกลางระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่าง $\tau_{\mathrm{mid}}^N = \frac{(\tau_{\mathrm{up}}^N + \tau_{\mathrm{low}}^N)}{2}$

3. คำนวณเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ ณ เวลา τ_{mid}^N แล้วพิจารณาตามสมการ (4.8) นั่นคือต้องตรวจสอบว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมายของผลบวกสะสมทดสอบสัมพัทธ์ $R_{\hat{\imath}}$ หรือไม่ ซึ่งอาจเป็นไปได้สองกรณีคือ



Interval number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Interception time	0	0	0	0	0	0	0	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	0
Relative *TCS*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	∞
Sign of Relative *TCS*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-1	+1	-1	+1	-1	-1	∞

Working interval

รูปที่ 4.5: ตัวอย่างที่ 3 ของรูปแบบและการคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ

- R_i *ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย* ซึ่งหมายถึง τ^N_{mid} ยังมิได้ข้ามผ่านเขตเปลี่ยนค่า (ยังมิได้ข้ามผ่าน $t_{0,k}$) เพราะฉะนั้นเวลา τ^N_{mid} นี้ถือว่ายังเป็นขอบเขตล่างของ $t_{0,k}$ อยู่ แต่เวลา τ^N_{mid} มีค่ามากกว่าเวลา τ^N_{low} จึงต้องตั้งขอบเขตล่างใหม่ดังนี้ $\tau^{N+1}_{\text{low}} = \tau^N_{\text{mid}}$
- R_i *เปลี่ยนเครื่องหมาย* ซึ่งหมายถึง τ^N_{mid} ได้ข้ามผ่านเขตเปลี่ยนค่าไปแล้ว (ข้ามผ่าน $t_{0,k}$ แล้ว) เพราะฉะนั้นเวลา τ^N_{mid} นี้จะเป็นขอบเขตบนของ $t_{0,k}$ แต่เพราะเวลา τ^N_{mid} มีค่าน้อยกว่าเวลา τ^N_{up} จึงต้องตั้งขอบเขตบนใหม่ดังนี้ $\tau^{N+1}_{\text{up}} = \tau^N_{\text{mid}}$

4. คำนวณระยะระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่าง แล้วตรวจสอบว่าความกว้างดังกล่าวมีขนาดเล็กพอหรือไม่ นั่นคือแม่นยำได้ตามระดับที่กำหนดแล้วหรือยัง เกณฑ์สำหรับความกว้างดังกล่าวที่ใช้ภายในโปรแกรม มีค่าเท่ากับหนึ่งในร้อยของคาบการสุ่มหรือ $0.01T/(n_{\text{samp}} - 1)$ ถ้ายังแม่นยำไม่เพียงพอ ให้ค่า $N = N + 1$ และกลับไปที่ขั้นตอนที่สองอีกครั้ง แต่หากแม่นยำเพียงพอแล้วก็หยุดการคำนวณ

5. ประมาณเวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่าด้วย τ^N_{mid} จากนั้นคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบที่จุดนี้

วิธีแบ่งสองส่วนที่ได้กล่าวไปให้ผลเป็นเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบที่ค่าประมาณเวลา $t_{0,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า ขั้นต่อไปคือการตรวจสอบค่า $R_{\hat{\jmath}}$ ในเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบว่ามีค่าประมาณศูนย์หรือไม่ เนื่องจากถ้าหากค่าประมาณเวลา $t_{0,k}$ (ที่ถึงแม้จะมีค่าใกล้เคียงกับ $t_{0,k}$ มาก) ได้ข้ามผ่านค่า $t_{0,k}$ จริงไป เวกเตอร์สวิตช์ทดสอบก็อาจรวมเอาเวลาการตัดสุดท้ายซึ่งให้ผลบวกสะสมที่ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 (ดังเช่นกรณีในรูปที่ 4.3 จะเห็นว่าเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบได้รวมเอาเวลาการตัดสุดท้าย t_4 ในช่วง $\mathcal{I}_{11}$ เข้าไปด้วย เพราะทฤษฎีบท 2 เกิดการขัดแย้งที่เวลาการตัดดังกล่าวพอดี เวลาการตัดนั้นจึงมิได้ถูกกำจัดออกไปจากเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ) กล่าวอย่างง่ายคือเวลาการตัดสุดท้ายอาจเกินมาได้ จึงต้องตรวจสอบว่าค่าผลบวกสะสมสัมพัทธ์ ณ เวลาการตัดใดที่มีค่าใกล้เคียงศูนย์ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเวลาการตัด $t_{\hat{\imath}}^{\mathrm{cut},\hat{\jmath}}$ ที่จุดนั้นเป็นเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า และเวลาการตัดระหว่าง $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ นั้นก็คือเวลาสวิตช์ของเขตเปลี่ยนค่านั่นเอง

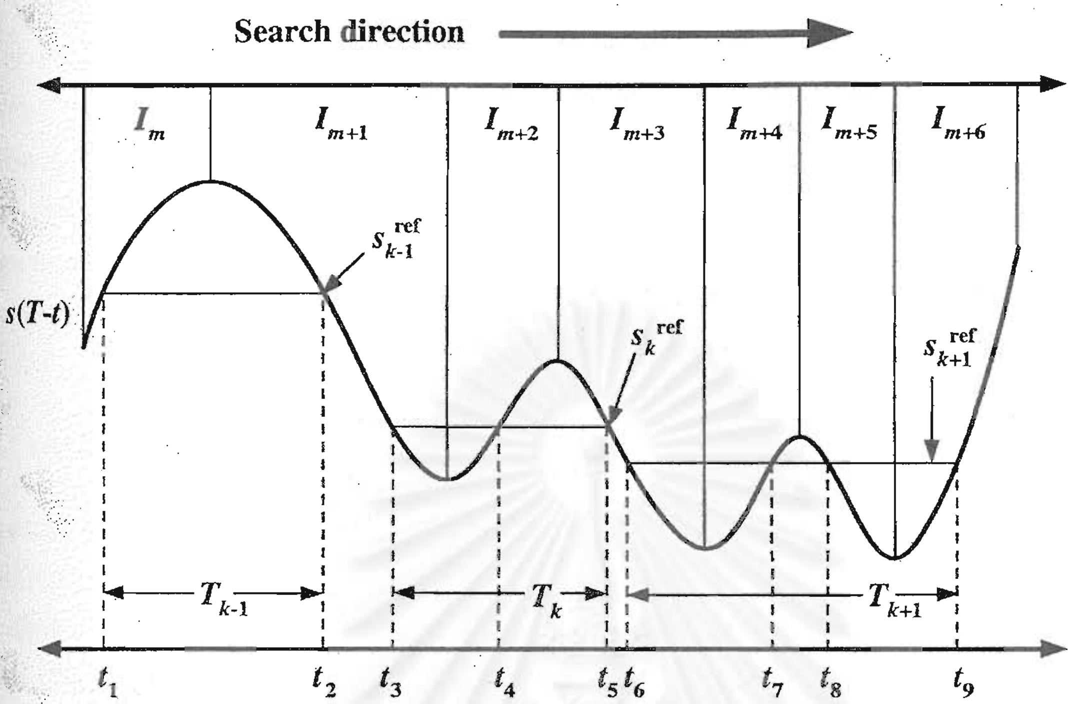
ภายในโปรแกรม เกณฑ์ที่ใช้ตรวจสอบว่าค่าผลบวกสะสมสัมพัทธ์ $R_{\hat{\jmath}}$ มีค่าใกล้เคียงศูนย์แล้วหรือไม่ คือค่าเกณฑ์ที่เท่ากับหนึ่งในสิบของคาบการสุ่มหรือ $0.1T/(n_{\mathrm{samp}}-1)$ จะเห็นว่าค่า $R_{\hat{\jmath}}$ ของเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบที่ผ่านขั้นตอนวิธีแบ่งสองส่วนด้วยความแม่นยำระดับ $0.01T/(n_{\mathrm{samp}}-1)$ ย่อมต้องผ่านเกณฑ์ขนาด $0.1T/(n_{\mathrm{samp}}-1)$ เสมอ

เมื่อได้เวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ เวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ และเวลาสวิตช์ที่แต่ละจุดสำหรับเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ หนึ่งๆ แล้ว เราจะบันทึกข้อมูลของเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าวลงในเวกเตอร์อีกเวกเตอร์หนึ่งที่เรียกว่า*เวกเตอร์สวิตช์ย่อย* (Sub-switching vector) ซึ่งมีรูปแบบ[2]ดังต่อไปนี้ แต่ละหลักของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยแทนลำดับการสวิตช์หนึ่งๆ แถวแรกคือเวลาสวิตช์ที่ลำดับการสวิตช์นั้น แถวที่สองคือเครื่องหมายของช่วงที่มีเวลาสวิตช์นั้นอยู่ (ใช้ค่า $+1$ หรือ -1) เครื่องหมายของช่วงนี้ได้มาจากเวกเตอร์ข้อมูลเครื่องหมายของช่วงหรือ `intsign[j]` สำหรับเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่าเราใช้ค่า $+\infty$ หรือ $-\infty$ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดต่อไป สำหรับแถวสุดท้ายคือจุดการสุ่มที่อยู่หลังจากเวลา $t_{0,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า ในที่นี้คือจุด $\hat{\jmath}+1$ โดยใส่ไว้ในหลักเดียวกับเวลาเริ่มต้น $t_{0,k}$ เท่านั้น เราเรียกจุดนี้ว่า*จุดกันการผิดพลาด* (Fail-safe point) ซึ่งใช้ในกรณีที่เกิดการผิดพลาดในการค้นหาเขตเปลี่ยนค่า เราจะนำเสนอประเด็นนี้ในตอนถัดไป พิจารณาตัวอย่างของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในรูปที่ 4.6 ซึ่งประกอบไปด้วยเขตเปลี่ยนค่า 3 เขต คือเขต $\mathcal{T}_{k-1}=[t_1,t_2]$ เขต $\mathcal{T}_k=[t_3,t_5]$ และเขต $\mathcal{T}_{k+1}=[t_6,t_9]$ ซึ่งเขตทั้งสามให้เวกเตอร์สวิตช์ดังนี้

เขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{k-1}$

เขตนี้มีเวลาเริ่มต้นคือ $t_{0,k-1}=t_1$ ซึ่งอยู่ในช่วง $\mathcal{I}_m$ และเวลาสุดท้ายคือ $t_{f,k-1}=t_2$ ซึ่งอยู่ในช่วง $\mathcal{I}_{m+1}$ แต่ไม่มีเวลาสวิตช์ แถวแรกของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตนี้จึงประกอบด้วยเวลา t_1, t_2 ส่วนแถวที่สองคือเครื่องหมายของช่วง $\mathcal{I}_m$ ซึ่งครอบคลุมเวลา t_1 และเครื่องหมายของช่วง $\mathcal{I}_{m+1}$ ซึ่งครอบคลุมเวลา t_2 ตามลำดับ (สำหรับเครื่องหมายของช่วง คือ*ค่าลบ*ของความชันของผลตอบ $s(T-t)$ ในช่วงนั้น) อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก t_2 เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่านี้ เครื่องหมายของช่วง $\mathcal{I}_{m+1}$ ที่ใส่ไว้จึงเป็น $+\infty$ แทนที่จะเป็น $+1$ สำหรับแถวสุดท้ายในหลักที่ตรงกับเวลาเริ่มต้น t_1 เป็นจุด P_{k-1} ซึ่งเป็นจุดการสุ่มจุดแรกที่อยู่

[2]รูปแบบที่นำเสนอเป็นรูปแบบของเวกเตอร์แนวนอน ส่วนรูปแบบจริงที่ใช้ภายในโปรแกรมจะเป็นเวกเตอร์แนวตั้ง



Interval number	*m*	*m+1*	*m+1*	*m+2*	*m+3*	*m+3*	*m+4*	*m+5*	*m+6*
Switching time	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
Interval sign	-1	$+\infty$	+1	-1	$+\infty$	+1	-1	+1	$-\infty$
Beginning point	P_{k-1}	0	P_k	0	0	P_{k+1}	0	0	0

รูปที่ 4.6: ตัวอย่างเวกเตอร์สวิตช์แสดงข้อมูลของเขตเปลี่ยนค่า 3 เขต

หลังเวลา t_1

เขตเปลี่ยนค่า T_k

เวลาเริ่มต้นในเขตนี้คือ $t_{0,k} = t_3$ ซึ่งอยู่ในช่วง $\mathcal{I}_{m+1}$ และเวลาสุดท้ายคือ $t_{f,k} = t_5$ ซึ่งอยู่ในช่วง $\mathcal{I}_{m+3}$ และมีเวลาสวิตช์ $t_{1,k} = t_4$ อยู่ในช่วง $\mathcal{I}_{m+2}$ ดังนั้นแถวแรกของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตนี้จึงประกอบด้วยเวลา t_3, t_4, t_5 ส่วนแถวที่สองคือเครื่องหมายของช่วง $\mathcal{I}_{m+1}$, $\mathcal{I}_{m+2}$ และ $\mathcal{I}_{m+3}$ ตามลำดับ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก t_5 เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่านี้ เครื่องหมายของช่วง $\mathcal{I}_{m+3}$ จึงเป็น $+\infty$ สำหรับแถวสุดท้ายในหลักที่ตรงกับเวลาเริ่มต้น t_3 เป็นจุด P_k ซึ่งเป็นจุดการสุ่มจุดแรกที่อยู่หลังเวลา t_3

เขตเปลี่ยนค่า T_{k+1}

เวลาเริ่มต้นในเขตนี้คือ $t_{0,k+1} = t_6$ ซึ่งอยู่ในช่วง $\mathcal{I}_{m+3}$ และเวลาสุดท้ายคือ $t_{f,k+1} = t_9$ ซึ่งอยู่ในช่วง $\mathcal{I}_{m+6}$ และมีเวลาสวิตช์ $t_{1,k+1} = t_7$ และ $t_{2,k+1} = t_8$ อยู่ในช่วง $\mathcal{I}_{m+4}$ และ $\mathcal{I}_{m+5}$ ตามลำดับ ดังนั้นแถว

แรกของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตนี้จึงประกอบด้วยเวลา t_6, t_7, t_8, t_9 ส่วนแถวที่สองคือเครื่องหมายของช่วง $\mathcal{I}_{m+3}$, $\mathcal{I}_{m+4}$, $\mathcal{I}_{m+5}$ และ $\mathcal{I}_{m+6}$ ตามลำดับ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก t_9 เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่านี้ เครื่องหมายของช่วง $\mathcal{I}_{m+3}$ จึงเป็น $-\infty$ สำหรับแถวสุดท้ายในหลักที่ตรงกับเวลาเริ่มต้น t_6 เป็นจุด P_{k+1} ซึ่งเป็นจุดการสุ่มจุดแรกที่อยู่หลังเวลา t_6 พอดี

เวกเตอร์สวิตช์ย่อยที่คำนวณได้นี้ยังไม่สามารถนำไปคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุดได้ทันที เนื่องจากเป็นเพียงเวกเตอร์สวิตช์ของเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ เท่านั้น ในตอนถัดไปจะอธิบายวิธีการและเงื่อนไขที่สามารถนำเวกเตอร์สวิตช์ย่อยแต่ละเวกเตอร์มาต่อกันให้เป็นเวกเตอร์สวิตช์หนึ่งเดียวได้

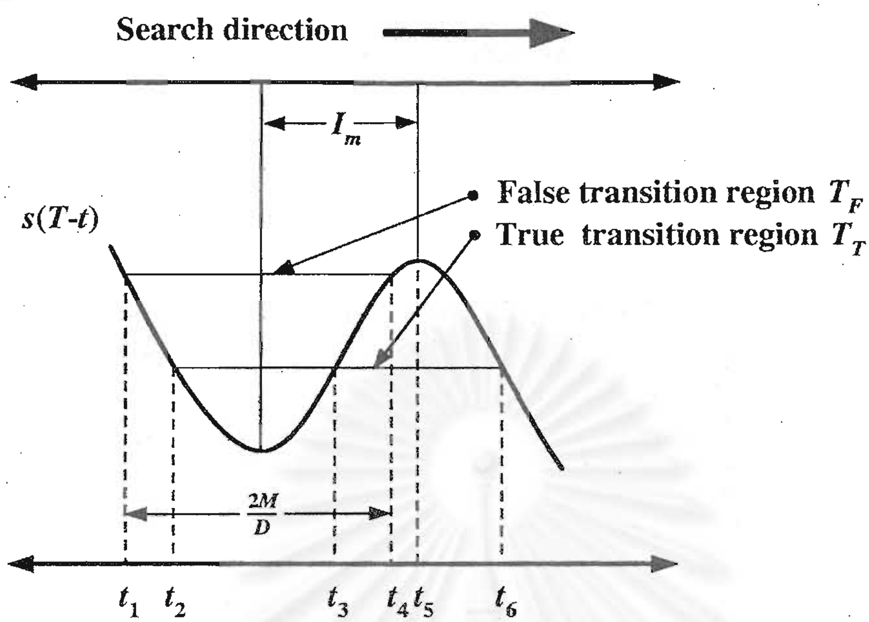
4.3 การค้นหาเขตอิ่มตัว

เมื่อสามารถค้นหาเขตเปลี่ยนค่าและคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ย่อยได้แล้ว งานในการค้นหาหรือระบุเขตอิ่มตัวก็มิใช่เรื่องยาก การระบุตำแหน่งของเขตอิ่มตัวใช้ความรู้ของทฤษฎีบท 5 ในตอนที่ 3.5.2 ซึ่งกล่าวไว้ว่าเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายต้องอยู่ภายในช่วงเดียวกัน ดังนั้นเมื่อพบเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ แล้ว การเริ่มค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไปก็ให้เริ่มกระทำต่อจากเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าล่าสุดในทิศทางการค้นหา ถ้าหากพบเขตเปลี่ยนค่าถัดไป และคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ย่อยได้แล้ว ก็ให้นำเวกเตอร์สวิตช์ย่อยมาต่อพ่วงกับเวกเตอร์สวิตช์ย่อยเดิม และต่อไปเรื่อยๆ เวกเตอร์ผลลัพธ์ที่ได้จากการรวมกันของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยนั้นเรียกว่า*เวกเตอร์สวิตช์*

จากรูปที่ 4.6 เมื่อระบุตำแหน่งของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{k-1}$ และสร้างเวกเตอร์สวิตช์ย่อยได้แล้ว การค้นหาจะเริ่มกระทำจากเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่านี้นั่นคือ t_2 และก็ได้พบกันเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ ที่เวลา t_3 ถึง t_5 จากนั้นจึงนำเวกเตอร์สวิตช์ย่อยของเขตนี้ต่อพ่วงเข้ากับเวกเตอร์สวิตช์ย่อยของเขต $\mathcal{T}_{k-1}$ ก่อนหน้า แล้วจึงเริ่มการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไปจากเวลา t_5 ซึ่งก็จะพบกับเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_{k+1}$ และได้เวกเตอร์สวิตช์ย่อยที่เขตนี้ เมื่อได้เวกเตอร์สวิตช์ย่อยที่เขตนี้แล้วก็นำไปต่อกับเวกเตอร์สวิตช์ย่อยก่อนหน้า ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ เราก็จะได้เวกเตอร์สวิตช์สำหรับสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ อนึ่งเห็นได้ว่าในเขตอิ่มตัวไม่มีเวลาสวิตช์ เพราะค่าสัญญาณเข้า $w(t)$ มีค่าคงที่ตลอดช่วงการอิ่มตัวนี้

เขตเปลี่ยนค่าไม่แท้

ความจริงอย่างหนึ่งที่เราพบระหว่างการพัฒนาโปรแกรมคือภายในช่วงทำงานหนึ่งๆ นั้น อาจค้นพบเขตเปลี่ยนค่าได้หลายเขต ซึ่งไม่อาจทราบได้ทันทีว่าเขตเปลี่ยนค่าใดเป็น*เขตเปลี่ยนค่าแท้* (True transition region) หรือ*เขตเปลี่ยนค่าไม่แท้* (False transition region) สมมติว่าช่วงที่เวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ หนึ่งๆ ไปตกอยู่ (หรือช่วงของจุดสิ้นสุดของเขตเปลี่ยนค่านี้) คือช่วง $\mathcal{I}_m$ ถ้าหากเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าวเป็นเขตเปลี่ยนค่าแท้แล้ว การค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไปก็อาจทำได้โดยไม่มีอุปสรรคใดๆ แต่หากเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าวเป็นเขตเปลี่ยนค่าไม่แท้ ก็จะเกิดการผิดพลาดขึ้นในการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไป นั่นคือไม่อาจค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไปที่อยู่ภายในช่วง $\mathcal{I}_m$ ได้ กล่าวให้ชัดเจนคือการค้นหาที่เริ่มต่อจากเวลา



รูปที่ 4.7: ลักษณะของเขตเปลี่ยนค่าแท้ และเขตเปลี่ยนค่าไม่แท้ เมื่อกำลังทำการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าในช่วงทำงาน I_m

$t_{f,k}$ ได้กระทำไปจนถึงเวลายอดของช่วง m หรือ t_m^{peak} แล้ว แต่ไม่พบกับเขตเปลี่ยนค่าใดเลย

ดังนั้นสิ่งที่โปรแกรมทำเมื่อพบเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ ก็คือสมมติให้เขตเปลี่ยนค่านั้นเป็นเขตเปลี่ยนค่าแท้ จากนั้นจึงสร้างเวกเตอร์สวิตช์ย่อยที่เขตนั้น และต่อเข้ากับเวกเตอร์สวิตช์ตามปกติ ถ้าหากเกิดการผิดพลาดในการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไป การผิดพลาดที่เกิดขึ้นนี้ย่อมชี้ให้เห็นว่าเขตเปลี่ยนค่าล่าสุดที่สมมติไว้ว่าเป็นเขตเปลี่ยนค่าแท้นั้น ที่จริงแล้วเป็นเขตเปลี่ยนค่าไม่แท้ ดังนั้นโปรแกรมจะลบข้อมูลของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยล่าสุดนี้ออกไป และเริ่มการค้นหาที่จุดถัดมาจากเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าที่เพิ่งลบออกไปนั้น จุดเริ่มการค้นหาดังกล่าวก็คือจุดกันการผิดพลาดที่บันทึกไว้ในแถวที่สามหลักแรกของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยล่าสุดที่ถูกเพิกถอนออกไป นอกจากนี้โปรแกรมยังลบค่าเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบก่อนหน้าออกไปด้วย เพื่อให้เห็นภาพชัดขึ้นพิจารณารูปที่ 4.7 เขตเปลี่ยนค่าที่พบเขตแรกหรือ T_F เริ่มที่เวลา t_1 และจบลงที่เวลา t_4 ซึ่งอยู่ภายในช่วง $\mathcal{I}_m$ เห็นได้ว่าถ้าเราค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไปโดยเริ่มจากเวลา t_4 จะไม่สามารถหาเขตเปลี่ยนค่าใดภายในเวลา t_5 (เวลาสุดท้ายของช่วง $\mathcal{I}_m$) ได้เลย นั่นก็เพราะเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_F$ เป็นเขตเปลี่ยนค่าไม่แท้ ดังนั้นโปรแกรมจะลบเวกเตอร์สวิตช์ย่อยของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_F$ ออกเสีย แล้วเริ่มการค้นหาใหม่ที่เวลา t_1 จากรูปจะเห็นว่าเขตเปลี่ยนค่าแท้ $\mathcal{T}_T$ ที่อยู่ถัดกับเขตเปลี่ยนค่าไม่แท้นั้น เริ่มต้นที่เวลา t_2 และสิ้นสุดที่เวลา t_6

สังเกตว่าในกรณีของรูปที่ 4.7 นี้ เขตเปลี่ยนค่าไม่แท้เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่ และเขตเปลี่ยนค่าแท้เป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่ เราพิสูจน์ได้ว่าถ้าช่วงทำงานใดมีเขตเปลี่ยนค่าไม่แท้แล้ว เขตเปลี่ยนค่าไม่แท้นั้นจะเป็นเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่เท่านั้น นอกจากนั้นเรายังค้นพบการเรียงตัวของเขตเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ในช่วงทำงานหนึ่งๆ อย่างไรก็ตามความรู้ข้อนี้มิได้อำนวยประโยชน์ในการคำนวณค่าสัญญาณเข้าสูงสุด

เราจึงไม่อธิบายในรายละเอียด การทดสอบเขตเปลี่ยนค่าแท้-ไม่แท้ ในลักษณะนี้ อยู่บนสมมติฐานของการมีอยู่จริง (Existence) ของสัญญาณเข้าสูงสุด ในการแก้ปัญหาค่าสูงสุด (Maximization problem) ของสัญญาณออกในลักษณะของโปรแกรมเชิงเส้นดังที่กล่าวไว้ในตอนที่ 3.2

อนึ่งเขตเปลี่ยนค่าแท้และไม่แท้ อาจอยู่ใกล้กันมากกว่าคาบการสุ่ม $T/(n_{\text{samp}} - 1)$ ซึ่งใช้ในการจำลองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าในลักษณะที่ค้นหาคร่าวๆ ก่อนแล้วจึงค้นแบบละเอียดภายหลัง ที่กล่าวไว้ในตอนที่ผ่านมา มีประโยชน์อย่างมากในการลดจำนวนจุดที่ต้องสุ่มในการจำลองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ เมื่อต้องแยกแยะเขตเปลี่ยนค่าแท้และไม่แท้ที่อยู่ชิดกันมากๆ

4.4 การสร้างสัญญาณเข้าในเขตแรกและเขตสุดท้าย

ย้อนกลับไปในตอนที่ 4.2 ซึ่งเป็นการเริ่มต้นค้นหาเขตเปลี่ยนค่า ข้อสมมติหนึ่งที่ได้ให้ไว้คือ จุดเริ่มของการค้นหาต้องอยู่ภายในช่วงเวลา $[0, T]$ เท่านั้น ดังนั้นสิ่งที่ยังขาดหายไปในการสร้างเวกเตอร์สวิตช์ให้สมบูรณ์ คือเวกเตอร์สวิตช์ย่อยแรกสุดซึ่งมีเวลาเริ่มต้นเป็น $t = 0$ และเวกเตอร์สวิตช์ย่อยท้ายสุดที่มีเวลาสุดท้ายเป็น $t = T$ ในตอนนี้เราจะพิจารณาการคำนวณเวลาสวิตช์และสร้างเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตทั้งสองดังกล่าว อย่างไรก็ตามเนื่องจากปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ที่พิจารณาตั้งแต่แรก มิได้กำหนดค่าเริ่มต้น $w(0)$ หรือค่าสุดท้าย $w(T)$ มาให้ (ค่า $w(0)$ และ $w(T)$ ไม่ตายตัว) ดังนั้นเราจึงไม่อาจทราบได้ว่าสัญญาณเข้าเริ่มขึ้นหรือจบลงที่ค่าใด แนวทางที่จะคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตแรกและเขตสุดท้ายนั้นจึงมีลักษณะเป็นการหาเวกเตอร์สวิตช์ย่อยทั้งหมดที่เป็นไปได้ และทดสอบเวกเตอร์สวิตช์ย่อยเหล่านั้นว่าเวกเตอร์ใดที่อาจก่อให้เกิดเวกเตอร์สวิตช์ที่สมบูรณ์ได้โดยไม่มีการผิดพลาด ลักษณะนี้คล้ายกับวิธีทดสอบเขตเปลี่ยนค่าแท้-ไม่แท้ที่ได้กล่าวในตอนที่ผ่านมา

4.4.1 สัญญาณเข้าในเขตสุดท้าย

จากตอนที่ 3.5 เราได้วิเคราะห์เงื่อนไขจำเป็นของสัญญาณเข้าสูงสุดในเขตสุดท้าย ทั้งในกรณีที่เขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัวและเป็นเขตเปลี่ยนค่า ในตอนนี้เราจะนำเงื่อนไขจำเป็นดังกล่าวมาพัฒนาโปรแกรมในเขตสุดท้าย พึงจำไว้ว่าเราต้องคำนวณและพิจารณาทุกรูปแบบที่เป็นไปได้ ซึ่งแน่นอนว่าอาจจำแนกได้เป็นสองลักษณะดังนี้

เขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัว

ตอนที่ 3.5.4.1 กล่าวไว้ว่าถ้าหากเขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัวแล้ว เวลาเริ่มต้นของเขตนี้ต้องอยู่ภายในช่วงเดียวกันกับเวลาสุดท้าย $t = T$ นั่นหมายถึงเวลาเริ่มต้นของเขตนี้ต้องอยู่ภายใน*ช่วงสุดท้าย*เท่านั้น แต่เวลาเริ่มต้นของเขตอิ่มตัวเขตสุดท้ายนี้ ก็คือเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าก่อนหน้า (ซึ่งก็เป็นเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายของสัญญาณเข้า) ดังนั้นถ้าเขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัว อาจกล่าวได้ว่า*การค้นหาเวกเตอร์สวิตช์จะสิ้นสุดในช่วงสุดท้ายของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ โดยอัตโนมัติ* กล่าวอีกนัยหนึ่งคือเมื่อใดที่เวลาสุด

ท้าย $\hat{t}$ ของเวกเตอร์สวิตช์ย่อยตกลงในช่วงสุดท้ายของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ก็จะได้ว่าเขตสุดท้ายของสัญญาณเข้าเป็นเขตอิ่มตัวซึ่งครอบคลุมช่วงเวลา $[\hat{t},T]$ สังเกตว่าถ้าเขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัว เวลาสวิตช์สุดท้ายที่ปรากฏอยู่ในเวกเตอร์สวิตช์ จะเป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าท้ายสุด ซึ่งไม่ใช่เวลาสุดท้าย $t=T$ ของสัญญาณเข้า

เขตสุดท้ายเป็นเขตเปลี่ยนค่า

การค้นหาเขตเปลี่ยนค่านั้นไม่จำเป็นต้องตกลงในช่วงสุดท้ายพอดี กรณีดังกล่าวทำให้เขตสุดท้ายต้องเป็นเขตเปลี่ยนค่าเท่านั้น ถึงกระนั้นรูปแบบของเขตเปลี่ยนค่าที่เขตสุดท้ายก็มีได้หลายรูปแบบ วิธีการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่มีเวลาสุดท้ายเป็น $t=T$[3] อาจทำได้ในลักษณะคล้ายกับการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าแบบปกติ นั่นคือเราต้องระบุเวลาสวิตช์ทั้งหมดของเขตเปลี่ยนค่าให้ได้ อย่างไรก็ตามพึงระลึกไว้ว่าสัญญาณเข้าที่เวลาสุดท้ายไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากับ $\pm M$ ดังนั้นจึงต้องพิจารณาเงื่อนไขจำเป็นตามที่ให้ไว้ในตอนที่ 3.5.4.1 นั่นคือ

$$0 \le CS_{i,\mathrm{end}} \le \frac{2M}{D}, \qquad i=1,\ldots,n+1 \tag{4.11}$$

เมื่อ $CS_{i,\mathrm{end}} = \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}(t_{m,\mathrm{end}}-t_{m-1,\mathrm{end}})$ การค้นหารูปแบบเขตเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้สำหรับเขตสุดท้ายเริ่มต้นดังนี้ ลากเส้นระดับซึ่งแทนค่าอ้างอิงการสวิตช์ทดสอบของเขตสุดท้าย (ในกรณีที่เขตสุดท้ายเป็นเขตเปลี่ยนค่า) จากเวลาสุดท้าย $t=T$ ย้อนกลับกับทิศทางการค้นหา คำนวณเวลาการตัดโดยใช้การประมาณค่าในช่วงตามสมการ (4.2) ในลักษณะเดียวกับการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าปกติ สมมติให้เวลาการตัดทั้งหมดคือ $t_1^{\mathrm{cut}},\ldots,t_{n_{\mathrm{cut}}}^{\mathrm{cut}}$ เมื่อ n_{cut} เป็นจำนวนจุดตัดทั้งหมด อนึ่งเพื่อความสะดวกเราจะถือว่าเวลาสุดท้าย $t=T$ เป็นเวลาการตัดที่ $n_{\mathrm{cut}}+1$ รูปที่ 4.8 แสดงเวลาการตัดทั้งหมด $t_1,\ldots,t_7$ ที่เกิดจากการตัดของเส้นระดับกับกราฟผลตอบ $s(T-t)$

เนื่องจากเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายนี้อาจเริ่มต้นที่เวลาการตัดใดๆ ก็ได้ ตั้งแต่ $1,\ldots,n_{\mathrm{samp}}$ ดังนั้นเราจึงนิยามเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ (Testing transition region) TTR_k ซึ่งเริ่มต้นที่เวลาการตัด t_k^{cut} ดังนี้

$$TTR_k \triangleq [t_k^{\mathrm{cut}},T], \qquad k=1,\ldots,n_{\mathrm{cut}} \tag{4.12}$$

โดยที่เวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k แทนโดย $t_0^k = t_k^{\mathrm{cut}}$ เราพบว่าจำนวนเวลาสวิตช์ทั้งหมดภายในเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k (ไม่รวมเวลาเริ่มต้น t_0^k และเวลาสุดท้าย $t=T$) มีค่าเท่ากับ

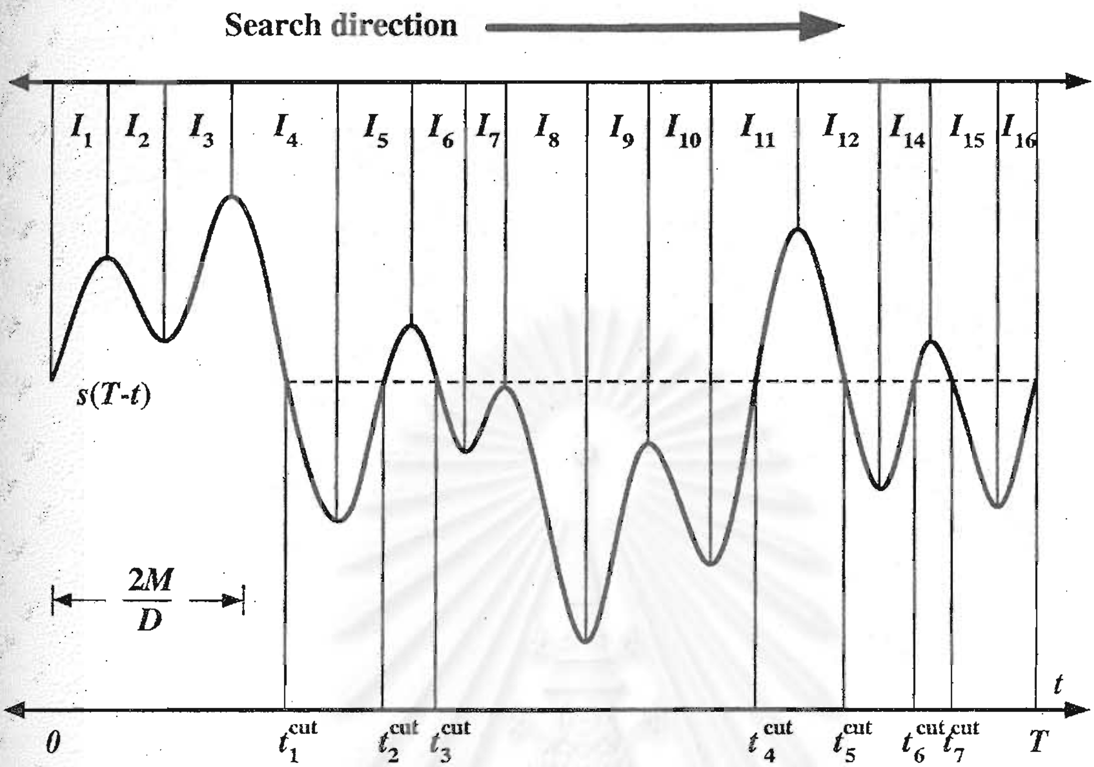
$$n_{\mathrm{cut}}^k = n_{\mathrm{cut}}-k, \qquad k=1,\ldots,n_{\mathrm{cut}}$$

ซึ่งเห็นได้ว่าเวลาสวิตช์ที่ i ภายในเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k ซึ่งแทนด้วย t_i^k มีค่าดังนี้

$$t_i^k = t_{k+i}^{\mathrm{cut}}$$

และในลักษณะเดียวกับที่ได้กล่าวมาแล้วเราจะถือว่าเวลาสุดท้าย $t=T$ เป็นเวลาสวิตช์ที่ n_{cut}^k+1 เมื่อพิจารณาในเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k ใดๆ พิจารณาตัวอย่างในรูปที่ 4.8 เนื่องจากมีเวลาการตัด 7 จุด

[3] จุดการสุ่มในตำแหน่งนี้คือ $\mathtt{j} = n_{\mathrm{samp}}$ ดังนั้น $T = \mathtt{tsim}[n_{\mathrm{samp}}]$



รูปที่ 4.8: เวลาการตัด $t_1,\ldots,t_7$ ของเส้นระดับที่ลากจากเวลาสุดท้าย $t=T$ กับผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$

(นั่นคือจำนวนเวลาการตัด $n_{\text{cut}}=7$) จึงมีเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ 7 เขตเช่นกัน ถ้าพิจารณาเขตเปลี่ยนค่า TTR_3 ซึ่งเริ่มที่เวลา $t_0^3=t_3^{\text{cut}}$ และจบลงที่เวลา $t=T$ จะได้ว่าจำนวนเวลาสวิตช์ทั้งหมดภายในเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_3 (ไม่รวมเวลาเริ่มต้น t_0^k และเวลาสุดท้าย $t=T$) มีค่าดังนี้ $n_{\text{cut}}^3=n_{\text{cut}}-3=7-3=4$ และเวลาสวิตช์ t_i^k สัมพัทธ์กับเวลาเริ่มต้น t_0^3 เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
t_1^3 &= t_4^{\text{cut}} \\
t_2^3 &= t_5^{\text{cut}} \\
t_3^3 &= t_6^{\text{cut}} \\
t_4^3 &= t_7^{\text{cut}} \\
t_5^3 &= t_8^{\text{cut}} = T
\end{aligned}$$

โดยที่ $t_5^3=T$ เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_3 นี้ ต่อไปให้ผลบวกสะสมทดสอบที่ i ของเขตเปลี่ยนค่าทดสอบที่ k ซึ่งแทนโดย TCS_i^k นิยามในเทอมของเวลาสวิตช์ t_i^k ภายในเขตเปลี่ยนค่าทดสอบดังนี้

$$TCS_i^k \triangleq \sum_{m=1}^{i}(-1)^{m+1}(t_m^k-t_{m-1}^k) \qquad i=1,\ldots,n_{\text{cut}}^k \tag{4.13}$$

จากนี้เราจะทดสอบว่าเขตเปลี่ยนค่าทดสอบเหล่านี้มีเขตเปลี่ยนค่าใดบ้างที่สอดคล้องกับเงื่อนไขจำเป็น ซึ่ง

อาจเป็นเขตเปลี่ยนค่าที่เราต้องการ การทดสอบเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k เป็นไปตามสมการเงื่อนไข (4.11) ดังนี้

$$0 \leq TCS_i^k \leq \frac{2M}{D}, \quad i = 1, \ldots, n+1 \tag{4.14}$$

กล่าวคือถ้ามีเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k ใดๆ ซึ่งมีผลบวกสะสมทดสอบ TCS_i^k ที่ละเมิดสมการ (4.14) ก็จะได้ว่าเขตเปลี่ยนค่าทดสอบนั้นไม่สามารถใช้เป็นเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายได้ นั่นคือเขตเปลี่ยนค่าทดสอบนี้มิใช่รูปแบบหนึ่งของเขตสุดท้ายอย่างแน่นอน สำหรับเขตเปลี่ยนค่าทดสอบที่มีผลบวกสะสมทุกๆ ค่า i สอดคล้องสมการ (4.14) จะถือว่าเป็นรูปแบบหนึ่งของเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายได้ เรานิยามเซตของรูปแบบเขตเปลี่ยนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดดังนี้

$$\Pi_{\text{end}} \triangleq \{TTR_k : TTR_k \text{ เป็นรูปแบบหนึ่งของเขตเปลี่ยนค่าสุดท้าย}\} \tag{4.15}$$

เราบันทึกช่วงที่เวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าที่เป็นไปได้เหล่านี้ไปตกอยู่ โดยนิยามเซตของช่วงซึ่งมีเวลาเริ่มต้นดังกล่าวอยู่ดังนี้

$$\Gamma \triangleq \{\mathcal{I}_k : t_0^k = t_k^{\text{cut}} \in \mathcal{I}_k \quad \text{โดยที่} \quad TTR_k \in \Pi_{\text{end}}\} \tag{4.16}$$

วิธีการที่โปรแกรมใช้ในการตัดสินว่าเขตเปลี่ยนค่าทดสอบใดใน Π_{end} เป็นเขตเปลี่ยนค่าทดสอบที่แท้จริงนั้น มีลักษณะเดียวกับการที่เขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัว กล่าวคือโปรแกรมจะค้นหาเขตเปลี่ยนค่ามาเรื่อยๆ จนกระทั่งเวลาสุดท้าย $t_{f,l}$ ของเขตเปลี่ยนค่า T_l หนึ่งๆ มาตกลงในช่วง $\mathcal{I}_k$ ช่วงใดช่วงหนึ่งซึ่งเป็นสมาชิกของเซต Γ โดยที่เวลาสุดท้าย $t_{f,l}$ ต้องสอดคล้องกับเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k นั่นคือ

$$t_{f,l} < t_0^k \tag{4.17}$$

ก็จะได้ว่าเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k เป็นเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายของสัญญาณเข้าโดยทันที ต่อจากนั้นเวกเตอร์สวิตช์ย่อยของเขตเปลี่ยนค่าทดสอบ TTR_k ก็จะถูกต่อพ่วงเข้ากับเวกเตอร์สวิตช์ สำหรับเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตเปลี่ยนค่าสุดท้ายนี้มีรูปแบบเดียวกันกับเวกเตอร์สวิตช์ย่อยปกติ ซึ่งสร้างขึ้นจากเวลาสวิตช์และเครื่องหมายของช่วง แต่ไม่จำเป็นต้องใส่จุดกันการผิดพลาด เนื่องจากเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตสุดท้ายนี้เป็นเวกเตอร์สวิตช์ย่อยสุดท้ายของเวกเตอร์สวิตช์แล้ว สังเกตว่าถ้าเขตสุดท้ายเป็นเขตเปลี่ยนค่า เวลาสวิตช์สุดท้ายที่ปรากฏอยู่ในเวกเตอร์สวิตช์ จะเป็นเวลาสุดท้ายเวลาสุดท้าย T ของสัญญาณเข้า

สรุปได้ว่าถ้าหากการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าดำเนินมาจนถึงช่วงใดๆ ที่อยู่ในเซต Γ หรือดำเนินมาถึงช่วงสุดท้าย ก็จบการค้นหาได้ทันที และกระทำกับเขตสุดท้ายแยกไปตามแต่ละกรณี เนื่องจากการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ นั้น อยู่บนสมมติฐานการมีอยู่จริงของสัญญาณเข้าดังกล่าว ดังนั้นจึงมั่นใจว่าการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าจะสืบเนื่องมาจนถึงช่วงใดๆ ในเซต Γ หรือในช่วงสุดท้ายเท่านั้น ในขั้นต่อไปเราจะพิจารณาการสร้างสัญญาณเข้าในเขตแรก

4.4.2 สัญญาณเข้าในเขตแรก

เช่นเดียวกันกับเขตสุดท้าย สัญญาณเข้าในเขตแรกอาจเป็นเขตเปลี่ยนค่าหรือเขตอิ่มตัวก็ย่อมได้ เงื่อนไขในตอนที่ 3.5.4.2 จะนำมาประยุกต์ใช้กับเขตแรกในลักษณะเดียวกับที่เงื่อนไขในตอนที่ 3.5.4.1 ถูกนำมาใช้กับเขตสุดท้าย อย่างไรก็ตามวิธีการเขียนโปรแกรมจะแตกต่างกันเล็กน้อย แยกพิจารณาตามลักษณะของเขตดังนี้

เขตแรกเป็นเขตอิ่มตัว

ในตอนที่ 3.5.4.2 เงื่อนไขจำเป็นระบุไว้ว่าหากเขตแรกเป็นเขตอิ่มตัวแล้ว เวลาเริ่มต้นของเขตนี้ต้องอยู่ในช่วงเดียวกับเวลาเริ่มต้น $t = 0$ นั่นหมายถึงเวลาสุดท้ายของเขตนี้ต้องอยู่ใน*ช่วงแรก*หรือ $\mathcal{I}_1$ เท่านั้น แต่เวลาสุดท้ายของเขตอิ่มตัวเขตแรกนี้ ก็คือเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าถัดไป (ซึ่งเป็นเขตเปลี่ยนค่าแรกของสัญญาณเข้า) เพราะฉะนั้นถ้าหากเขตแรกเป็นเขตอิ่มตัว *จะพบว่าการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าที่เริ่มต้นจากช่วงแรก $\mathcal{I}_1$ จะไม่เกิดการผิดพลาด*[4] *ขึ้นเลยจนกระทั่งถึงเขตสุดท้าย* (โดยใช้หลักการสร้างสัญญาณเข้าในเขตสุดท้ายตามที่กล่าวไว้ในตอนที่ผ่านมา) ถ้าพบว่าการค้นหาเขตเปลี่ยนค่าทั้งช่วงเวลา $[0, T]$ ที่เริ่มจากช่วง $\mathcal{I}_1$ ไม่พบการผิดพลาดเลย และเขตเปลี่ยนค่าเขตแรกของสัญญาณเข้าเริ่มต้นที่ $\hat{t}$ จะได้ว่าเขตแรกของสัญญาณเข้าเป็นเขตอิ่มตัวซึ่งครอบคลุมช่วงเวลา $[0, \hat{t}]$ สังเกตว่าถ้าเขตแรกสุดของสัญญาณเข้าเป็นเขตอิ่มตัว เวลาสวิตช์เวลาแรกที่ปรากฏอยู่ในเวกเตอร์สวิตช์ จะเป็นเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าแรกสุด ซึ่งไม่ใช่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ ของสัญญาณเข้า

เขตแรกเป็นเขตเปลี่ยนค่า

การพิจารณาเขตแรกในกรณีที่เป็นเขตเปลี่ยนค่านั้น อาจกระทำได้ในแนวทางเดียวกับการพิจารณาเขตสุดท้าย เพียงแต่ใช้เทคนิคการหมุนแกนเวลาลักษณะเดียวกับที่ใช้ในตอนที่ 3.5.4.2 อีกนัยหนึ่งคือเราจะพิจารณาผลตอบ $s(t)$ แทนที่จะพิจารณาผลตอบ $s(T - t)$ และนิยามปริมาณต่างๆ ในลักษณะย้อนกลับเช่นกันรวมทั้งเขตเปลี่ยนค่าทดสอบด้วย จากนั้นจึงใช้เงื่อนไขจำเป็นในตอนที่ 3.5.4.2 มาพิจารณาว่าเขตเปลี่ยนค่าทดสอบใดมีโอกาสเป็นเขตเปลี่ยนค่าที่แท้จริงได้ กล่าวคือใช้สมการ (4.14) มาพิจารณาว่าเขตเปลี่ยนค่าทดสอบใดมีผลบวกสะสมทดสอบทุกๆตัว ที่ไม่ละเมิดเงื่อนไขในสมการดังกล่าว ซึ่งจะได้ว่าเขตเปลี่ยนค่าทดสอบนั้นอาจเป็นเขตเปลี่ยนค่าที่แท้จริง จากนั้นหมุนแกนเวลากลับมาในลักษณะเดิม แล้วจึงสร้างเวกเตอร์สวิตช์ย่อยในเขตแรกทุกๆเวกเตอร์ที่เป็นไปได้ในทำนองเดียวกับการคำนวณในเขตสุดท้าย ในที่นี้กำหนดให้เซตรูปแบบเขตเปลี่ยนค่าเริ่มแรกทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ Π_{start}

สำหรับการพิจารณาว่าเขตเปลี่ยนค่าใดใน Π_{start} เป็นเขตเปลี่ยนค่าที่แท้จริงนั้นทำได้อย่างง่ายโดยทดสอบใช้เขตเปลี่ยนค่าทุกตัวใน Π_{start} ว่าเขตเปลี่ยนค่าเริ่มแรกเขตใดที่ทำให้การค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดๆ ไปสามารถกระทำได้โดยไม่เกิดการผิดพลาดขึ้นเลยจนกระทั่งสิ้นสุดทั้งสัญญาณ การพิจารณาทดสอบเขตแรกของสัญญาณเข้าในลักษณะนี้ อยู่บนสมมติฐานการมีอยู่จริงของสัญญาณเข้าสูงสุด เช่นเดียว

---

[4] การผิดพลาดในที่นี้เป็นการผิดพลาดเดียวกันกับที่กล่าวไว้ในตอนที่ 4.3 ซึ่งหมายถึง การที่เขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ ที่ค้นพบจบลงที่จุดเวลาสุดท้ายจุดหนึ่ง ในช่วง $\mathcal{I}_m$ แล้วไม่สามารถค้นหาเขตเปลี่ยนค่าถัดไปที่เริ่มต้นภายในช่วง $\mathcal{I}_m$ ได้เลย

กับการพิจารณาทดสอบเขตสุดท้ายของสัญญาณเข้า ดังนั้นจึงแน่ใจได้ว่าจะมีเขตเปลี่ยนค่าเริ่มแรกซึ่งสอดคล้องกับการทดสอบดังกล่าวอย่างแน่นอน

4.5 การสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดจากเวกเตอร์สวิตช์

ที่กล่าวมาทั้งหมดคือการสร้างเวกเตอร์สวิตช์จากผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ที่จำลองขึ้น ในตอนนี้เราได้แสดงวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ จากเวกเตอร์สวิตช์ที่ได้โดยตรง อนึ่งเวกเตอร์สวิตช์นี้ ยังช่วยให้เราสร้างอนุพันธ์ของสัญญาณเข้า $\dot{w}(t)$ และดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ ได้โดยตรงเช่นกัน แต่มิได้กล่าวถึงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ข้อมูลของเวกเตอร์สวิตช์ที่จำเป็นต้องใช้นั้นมีเพียงข้อมูลในแถวแรก ซึ่งเป็นเวลาสวิตช์ และแถวที่สองซึ่งเป็นเครื่องหมายของช่วงเท่านั้น ส่วนข้อมูลในแถวสุดท้ายหรือจุดกันการผิดพลาดนั้น ไม่มีความจำเป็นต้องใช้เนื่องจากมีไว้ใช้ในขณะที่กำลังสร้างเวกเตอร์สวิตช์ ในที่นี้เราแบ่งการพิจารณาเวกเตอร์สวิตช์เป็นสามกรณี ดังต่อไปนี้

1. เวกเตอร์สวิตช์เป็นเวกเตอร์ว่าง (Empty vector)
2. เวลาสวิตช์แรกสุดของเวกเตอร์สวิตช์ไม่ใช่ศูนย์ นั่นคือเขตแรกของสัญญาณเข้าเป็นเขตอิ่มตัว
3. เวลาสวิตช์แรกสุดของเวกเตอร์สวิตช์เป็นศูนย์ นั่นคือเขตแรกของสัญญาณเข้าเป็นเขตเปลี่ยนค่า

อนึ่งเวลาสวิตช์ที่ตำแหน่ง i ใดๆ (นับลำดับตามตำแหน่งของหลักของเวกเตอร์สวิตช์) ให้เขียนแทนด้วย t_i^{sw} ดังนั้นเวกเตอร์สวิตช์ในประเภทที่ 2 ก็คือเวกเตอร์สวิตช์ที่มีเวลาสวิตช์ $t_1^{sw} \neq 0$ ส่วนเวกเตอร์สวิตช์ในประเภทที่ 3 จะมีเวลาสวิตช์ $t_1^{sw} = 0$ นอกจากนี้เนื่องจากดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}(T)$ ที่พิจารณาขณะนี้เป็นค่าประมาณที่เวลาจำกัด (ที่เวลา T) ดังนั้นสัญญาณเข้าสูงสุดที่พิจารณาในบทนี้จึงอยู่เพียงในช่วง $[0,T]$ โดยจะไม่สนใจสัญญาณเข้าที่เวลาหลังจาก $t=T$ เริ่มการพิจารณาจากประเภทที่หนึ่งก่อน

4.5.1 เวกเตอร์สวิตช์เป็นเวกเตอร์ว่าง

ในกรณีนี้กล่าวได้ว่าไม่มีการสวิตช์เกิดขึ้นเลยในสัญญาณเข้า $w(t)$ นั่นหมายถึงสัญญาณเข้าเป็นไปได้สองลักษณะคือ

1. $w(t) \;=\; +M, \qquad \forall t \in [0,T]$
2. $w(t) \;=\; -M, \qquad \forall t \in [0,T]$

เวกเตอร์สวิตช์ในลักษณะนี้เกิดขึ้นกับผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ซึ่งมีลักษณะเพิ่มขึ้นหรือลดลงในทิศทางเดียว (Monotonic) หรืออาจกล่าวได้ว่าผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t) \geq 0, \ \forall t \in [0,T]$ หรือ $h(t) \leq 0, \ \forall t \in [0,T]$ ทำให้สัญญาณเข้าสูงสุดมีเพียงเขตอิ่มตัว S_1 เขตเดียวโดดๆ และครอบคลุมทั้งช่วง

$[0,T]$ ค่าของสัญญาณเข้าจะเป็น $+M$ หรือ $-M$ พิจารณาได้จากทฤษฎีบท 5 ที่แสดงไว้ในตอนที่ 3.5.2 ซึ่งกล่าวว่าสัญญาณเข้าในเขตอิ่มตัวมีค่าดังนี้

$$w(t) \;=\; M\text{sgn}\{h(T-t)\} \;=\; -M\text{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T-t)\}, \qquad t_{0,1} < t < t_{f,1} \tag{4.18}$$

แต่เนื่องจากในเขตอิ่มตัวนี้ครอบคลุมตั้งแต่เวลาเริ่มต้น $t_{0,1} = 0$ จนถึงเวลาสุดท้าย $t_{f,1} = T$ ดังนั้นสัญญาณเข้า $w(t)$ ในกรณีนี้จึงมีค่าเท่ากับ $-M\text{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T-t)\}$ ตลอดทั้งช่วงเวลา $[0,T]$

4.5.2 เวลาสวิตช์แรกสุดของเวกเตอร์สวิตช์ไม่ใช่ศูนย์

ตอนที่ 3.5 แสดงเอาไว้ว่าสัญญาณเข้าสูงสุดมีลักษณะเชิงเส้นเป็นช่วงๆ (Piecewise linear) นั่นคือเป็นค่าคงที่ $\pm M$ ในเขตอิ่มตัว และมีอัตราการเปลี่ยนแปลงคงที่ $\pm D$ ในเขตเปลี่ยนค่า เนื่องจากความเป็นเชิงเส้นนี้หมายถึงสัญญาณเข้าสูงสุดระหว่างจุดหักมุมประชิดสองจุด (จุดเวลาสวิตช์) วางตัวอยู่บนเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดทั้งสอง ดังนั้นหากเราทราบจุดหักมุมประชิดทั้งสอง ก็อาจทราบค่าสัญญาณเข้าระหว่างนั้นได้โดยใช้การประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น ด้วยเหตุที่กล่าวมานี้การสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดจึงกระทำเฉพาะในจุดหักมุม หรืออีกนัยหนึ่งคือเราต้องการทราบเพียงค่าสัญญาณเข้าสูงสุดที่เวลาสวิตช์ใดๆ ที่เวลาเริ่มต้น $t=0$ และที่เวลาสุดท้าย $t=T$ เท่านั้น

สำหรับกรณีที่เวลาสวิตช์แรกสุดของเวกเตอร์สวิตช์ไม่ใช่ศูนย์ ซึ่งหมายถึงเขตแรกของสัญญาณเข้าสูงสุดเป็นเขตอิ่มตัวและมีค่าคงที่เท่ากับ $+M$ หรือ $-M$ จากที่กล่าวไว้ในตอนที่แล้ว ตามสมการ (4.18) สัญญาณเข้าในเขตแรกนี้ (ตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึงเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าเขตแรก) จะมีค่าบวกหรือลบขึ้นกับค่าอนุพันธ์ $-\frac{d}{dt}s(T-t)$ ในช่วงแรกของสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ค่าอนุพันธ์ดังกล่าวก็คือเครื่องหมายของช่วงซึ่งได้บันทึกไว้ในเวกเตอร์ข้อมูลของช่วง `intsign[j]` ดังนั้นถ้าให้จุด $\hat{\jmath}$ เป็นจุดใดๆ ที่อยู่ในช่วงแรก ก็จะได้ว่าสัญญาณเข้าที่เวลา $t=0$ มีค่าเท่ากับ

$$w(0) \;=\; \texttt{intsign}[\hat{\jmath}]\,M \tag{4.19}$$

อนึ่งเครื่องหมายของช่วงแรกนี้ก็ได้บันทึกไว้ในเวกเตอร์สวิตช์แล้วเช่นกัน เพราะตามที่ได้กล่าวไว้ในตอนที่ 4.4.2 ในกรณีที่เขตแรกของสัญญาณเข้าเป็นเขตอิ่มตัว S_1 เวลาสุดท้าย $t_{f,1}$ ของเขตอิ่มตัวนี้ ต้องอยู่ในช่วงเดียวกับเวลาเริ่มต้น $t_{0,1}$ ซึ่งก็คือเวลา $t=0$ นั่นหมายถึง $t_{f,1}$ จะต้องอยู่ในช่วงแรกของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ แต่เวลาสุดท้าย $t_{f,1}$ ของเขตอิ่มตัวเขตแรกนี้ย่อมเป็นเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าถัดมา ซึ่งถือว่าเป็นเขตเปลี่ยนค่าเขตแรกสุดของสัญญาณเข้า และที่จริงแล้วเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่านี้ก็คือเวลาสวิตช์แรกสุดในเวกเตอร์สวิตช์นั่นเอง สรุปได้ว่าเวลาสวิตช์แรกสุดในเวกเตอร์สวิตช์อยู่ในช่วงแรกของผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ดังนั้นเครื่องหมายของช่วง (ซึ่งได้บันทึกไว้ในแถวที่สองของเวกเตอร์สวิตช์) ที่ตรงกับเวลาสวิตช์แรกสุด (อยู่ในหลักเดียวกัน) ย่อมเป็นเครื่องหมายของช่วงแรกสุดเช่นกัน ถ้ากำหนดให้จำนวนเวลาสวิตช์มีจำนวนทั้งหมด n_{sw} นั่นคือเวกเตอร์สวิตช์มีจำนวนหลักเท่ากับ n_{sw} และให้เวลาสวิตช์ที่แต่ละหลักของเวกเตอร์สวิตช์แทนด้วย t_i^{sw} และสุดท้ายให้ γ_i^{sw} แทนเครื่อง

หมายของช่วงที่ตำแหน่งเวลาสวิตช์ t_i^{sw} จะได้ว่า

$$\gamma_1^{\mathrm{sw}} \;=\; \mathtt{intsign}[\hat{\mathtt{j}}]$$

ดังนั้นจากสมการ (4.19) พบว่า

$$w(0) \;=\; \gamma_1^{\mathrm{sw}} M \tag{4.20}$$

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาสัญญาณเข้าที่เวลาสวิตช์แรกสุดหรือ $w(t_1^{\mathrm{sw}})$ พบว่าย่อมมีค่าเท่ากับสัญญาณเข้าที่เวลา $t = 0$ ทั้งนี้เนื่องจากเขตแรกสุดของสัญญาณเข้าเป็นเขตอิ่มตัวและสัญญาณเข้ามีค่าคงที่ตลอดทั้งเขตตั้งแต่ $t = 0$ จนถึง $t = t_1^{\mathrm{sw}}$ (ซึ่งเป็นเวลาสุดท้ายของเขตอิ่มตัวเขตแรกนี้) ดังนั้นจึงได้ว่าสัญญาณเข้าที่เวลาสวิตช์ t_1^{sw} มีค่าดังนี้

$$w(t_1^{\mathrm{sw}}) \;=\; w(0) \;=\; \gamma_1^{\mathrm{sw}} M \tag{4.21}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาค่าสัญญาณเข้าที่เวลาสวิตช์แต่ละจุดในเวกเตอร์สวิตช์ สมมติให้เวลาสวิตช์ที่กำลังพิจารณาเป็นเวลาสวิตช์ที่ i เมื่อกำลังพิจารณาสัญญาณเข้าที่เวลาสวิตช์ t_i^{sw} ใดๆหรือ $w(t_i^{\mathrm{sw}})$ ให้ถือว่าสัญญาณเข้าที่เวลาสวิตช์ก่อนหน้าหรือ $w(t_{i-1}^{\mathrm{sw}})$ เป็นที่ทราบแล้ว เนื่องจากสัญญาณเข้าที่เวลาสวิตช์แรกสุดหรือ $w(t_1^{\mathrm{sw}})$ ได้คำนวณเอาไว้แล้ว สัญญาณเข้าสูงสุดที่เวลา t_i^{sw} ใดๆ อาจเป็นไปได้สองลักษณะขึ้นกับเครื่องหมายของช่วงในตำแหน่งที่ $i-1$ ดังนี้

เครื่องหมายของช่วง $\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}} = \pm\infty$

ถ้าเครื่องหมายของช่วงที่ตำแหน่ง $i-1$ มีขนาดเป็นอนันต์ นั่นหมายถึงเวลาสวิตช์ t_{i-1}^{sw} เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ และเป็นเวลาเริ่มต้นของเขตอิ่มตัวถัดมา ดังนั้นเวลาสวิตช์ที่ตำแหน่งปัจจุบัน t_i^{sw} จึงเป็นเวลาสุดท้ายของเขตอิ่มตัวดังกล่าว ซึ่งก็เป็นเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่าถัดไปอีก จากทฤษฎีบท 1 ที่กล่าวไว้ในตอนที่ 3.5.1 กล่าวไว้ว่า

$$w(t_{0,k}) \;=\; -M\mathrm{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T-t_{0,k})\} \;=\; M\mathrm{sgn}\{-\frac{d}{dt}s(T-t_{0,k})\} \tag{4.22}$$

เมื่อ $t_{0,k}$ เป็นเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่า T_k ใดๆ ซึ่งในที่นี้คือ t_i^{sw} จะเห็นได้ว่าค่าสัญญาณเข้าสูงสุดที่จุดนี้ขึ้นกับเครื่องหมายของช่วงที่จุดนี้หรือ γ_i^{sw} ดังนั้นจึงได้ว่า

$$w(t_i^{\mathrm{sw}}) \;=\; \gamma_i^{\mathrm{sw}} M \tag{4.23}$$

สังเกตว่า γ_i^{sw} มีเครื่องหมายเดียวกับ $\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}$ เพราะ t_{i-1}^{sw} และ t_i^{sw} ต่างเป็นเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายของเขตอิ่มตัวเดียวกันจึงต้องอยู่ในช่วงเดียวกัน แต่ γ_i^{sw} มิได้มีขนาดเป็นอนันต์ (เนื่องจากเวลา t_i^{sw} เป็นเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่า) ดังนั้นเราจึงเลือกที่จะใช้ค่า γ_i^{sw} เพื่อกำหนดค่าสัญญาณเข้าที่เวลาสวิตช์ t_i^{sw} แทนที่จะใช้ค่า $\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}$ ซึ่งมีขนาดเป็นอนันต์

เครื่องหมายของช่วง $\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}} = \pm 1$

การที่เครื่องหมายของช่วงที่ตำแหน่ง $i-1$ เป็นค่า ± 1 หมายความว่าเวลาสวิตช์ที่ $i-1$ เป็นเวลาเริ่มต้น

หรือเวลาสวิตช์ภายในของเขตเปลี่ยนค่าหนึ่งๆ จากตอนที่ 3.5.1 สมการที่ (3.60) กล่าวไว้ว่า

$$\dot{w}(t) \;=\; D\mathrm{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\mathrm{ref}}\}, \qquad t_{0,k} < t < t_{f,k} \tag{4.24}$$

เมื่อ $t_{0,k}$ และ $t_{f,k}$ เป็นเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ และ s_k^{ref} เป็นค่าอ้างอิงการสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่าดังกล่าว ในที่นี้ $t_{0,k} \le t_{i-1}^{\mathrm{sw}} < t_i^{\mathrm{sw}} \le t_{f,k}$ ถ้าเครื่องหมายของช่วง $\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}$ มีค่าเท่ากับ 1 นั่นหมายความว่าอัตราการเปลี่ยนแปลง $\frac{d}{dt}s(T-t)$ ที่เวลาสวิตช์ t_i^{sw} มีค่าเป็น -1 (ความชันเป็นลบ) เพราะฉะนั้นผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ ระหว่างเวลา t_{i-1}^{sw} ถึง t_i^{sw} ต้องมีค่าน้อยกว่าค่าอ้างอิงการสวิตช์ s_k^{ref} (ที่เวลาสวิตช์ t_i^{sw} ใดๆ ค่าอ้างอิงการสวิตช์มีค่าเท่ากับผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t_i^{\mathrm{sw}})$ นั่นคือค่าของ $\mathrm{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\mathrm{ref}}\}$ ระหว่างเวลา t_{i-1}^{sw} ถึง t_i^{sw} มีค่าเท่ากับ -1 ซึ่งเท่ากับ $-\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}$ สำหรับกรณีที่ $\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}$ มีค่าเท่ากับ -1 ก็อาจพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน และได้ว่า $\mathrm{sgn}\{s(T-t)-s_k^{\mathrm{ref}}\} = -\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}$ ระหว่างเวลา t_{i-1}^{sw} ถึง t_i^{sw} เช่นกัน ดังนั้นจะได้ว่าอนุพันธ์ของสัญญาณเข้าสูงสุดระหว่างเวลาสวิตช์ t_{i-1}^{sw} และ t_i^{sw} มีค่าดังนี้

$$\dot{w}(t) \;=\; -\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}D, \qquad t_{i-1}^{\mathrm{sw}} < t < t_i^{\mathrm{sw}}$$

เพราะฉะนั้นเราจึงได้ความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้าที่เวลา t_{i-1}^{sw} กับสัญญาณเข้าที่เวลา t_i^{sw} เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\left(\frac{w(t_i^{\mathrm{sw}})-w(t_{i-1}^{\mathrm{sw}})}{t_i^{\mathrm{sw}}-t_{i-1}^{\mathrm{sw}}}\right) &= -\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}D \\
w(t_i^{\mathrm{sw}})-w(t_{i-1}^{\mathrm{sw}}) &= -\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}D(t_i^{\mathrm{sw}}-t_{i-1}^{\mathrm{sw}}) \\
w(t_i^{\mathrm{sw}}) &= w(t_{i-1}^{\mathrm{sw}}) - \gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}D(t_i^{\mathrm{sw}}-t_{i-1}^{\mathrm{sw}})
\end{aligned} \tag{4.25}$$

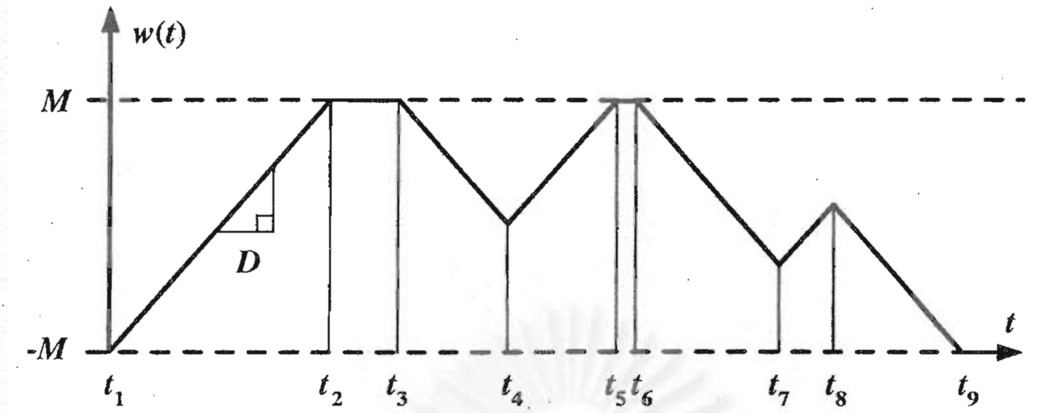
ดังนั้นเมื่อทราบสัญญาณเข้าที่เวลา t_{i-1}^{sw} ก็อาจคำนวณสัญญาณเข้าที่เวลา t_i^{sw} โดยใช้สมการ (4.25) นี้ สังเกตว่าถ้าเวลา t_i^{sw} เป็นเวลาสุดท้าย $t_{f,k}$ ของเขตเปลี่ยนค่า $\mathcal{T}_k$ หนึ่งๆ สัญญาณเข้าสูงสุดที่จุดนี้จะมีค่าเท่ากับ $+M$ (หรือ $-M$) โดยอัตโนมัติ และสอดคล้องกับทฤษฎีบท 1 ซึ่งกล่าวว่า

$$w(t_{f,k}) \;=\; -M\mathrm{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T-t_{f,k})\} \tag{4.26}$$

ทั้งนี้เป็นเพราะว่าการสร้างเวกเตอร์สวิตช์ ซึ่งได้มาจากการค้นหาเขตเปลี่ยนค่า (ดูตอนที่ 4.2) นั้นมีพื้นฐานอยู่บนทฤษฎีบท 2 (ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคี่) และทฤษฎีบท 3 (ในเขตเปลี่ยนค่าแบบคู่) ซึ่งบังคับให้เขตเปลี่ยนค่าที่เริ่มต้นในจุดที่สัญญาณเข้ามีค่า $+M$ $(-M)$ ต้องจบลงในจุดที่สัญญาณเข้ามีค่า $-M$ $(+M)$ โดยปริยาย รูปที่ 4.9 แสดงตัวอย่างการสร้างสัญญาณเข้าในช่วงเวลาสวิตช์ t_1 ถึง t_9 ซึ่งประกอบไปด้วยเขตเปลี่ยนค่า 3 เขต และเขตอิ่มตัว 2 เขตซึ่งวางตัวอยู่ระหว่างเขตเปลี่ยนค่าทั้งสาม การสร้างสัญญาณที่เวลาสวิตช์ t_1, t_3 และ t_6 ซึ่งเป็นเวลาเริ่มต้นของเขตเปลี่ยนค่า อาศัยสมการ (4.23) ส่วนการสร้างสัญญาณที่เวลาสวิตช์อื่นๆ เป็นไปตามสมการ (4.25)

สุดท้ายเมื่อการสร้างสัญญาณเข้าสำเร็จจนถึงเวลาสวิตช์ท้ายสุดหรือ $t_{n_{\mathrm{sw}}}^{\mathrm{sw}}$ ถ้าสัญญาณเข้าจบลงในเขตเปลี่ยนค่า หรือเวลาสวิตช์สุดท้าย $t_{n_{\mathrm{sw}}}^{\mathrm{sw}} = T$ ก็สิ้นสุดการสร้างสัญญาณเข้าแต่เพียงเท่านี้ แต่หากสัญญาณเข้าจบลงในเขตอิ่มตัวหรือ เวลาสวิตช์สุดท้าย $t_{n_{\mathrm{sw}}}^{\mathrm{sw}} \neq T$ เราก็อาจคำนวณสัญญาณเข้าที่เวลาสุดท้ายได้ดังนี้

$$w(T) \;=\; w(t_{n_{\mathrm{sw}}}^{\mathrm{sw}}) \tag{4.27}$$



Switching time	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
Interval sign	-1	$+\infty$	$+1$	-1	$+\infty$	$+1$	-1	$+1$	$-\infty$
Beginning point	P_{k-1}	0	P_k	0	0	P_{k+1}	0	0	0

รูปที่ 4.9: การสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ จากเวกเตอร์สวิตช์ในจุดเวลาสวิตช์แต่ละจุด

เนื่องจากเมื่อเขตสุดท้ายเป็นเขตอิ่มตัว สัญญาณเข้าจึงมีค่าคงที่ตลอดทั้งเขตตั้งแต่เวลา $t = t^{\mathrm{sw}}_{n_{\mathrm{sw}}}$ (ซึ่งเป็นเวลาเริ่มต้นของเขตอิ่มตัวสุดท้ายนี้) จนถึงเวลา $t = T$

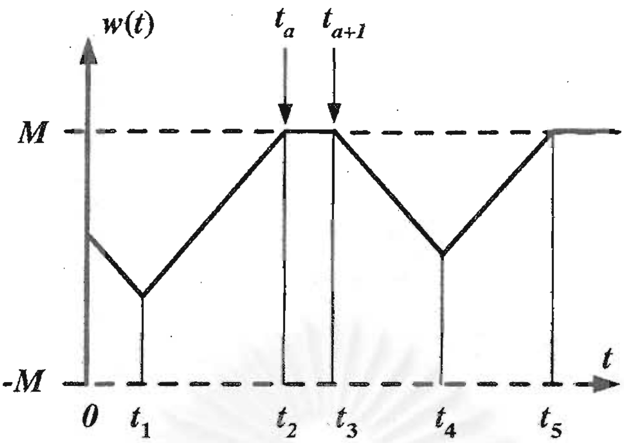
4.5.3 เวลาสวิตช์แรกสุดของเวกเตอร์สวิตช์เป็นศูนย์

ต่อไปเป็นกรณีที่สัญญาณเข้าเริ่มต้นในเขตเปลี่ยนค่า นั่นคือเวลาสวิตช์แรกสุดในเวกเตอร์สวิตช์มีค่าเท่ากับ 0 กรณีนี้ไม่สามารถเริ่มสร้างสัญญาณเข้าจากเวลาเริ่มต้น $t = 0$ ได้ เนื่องจากเราไม่ทราบค่าสัญญาณเข้าที่เวลาเริ่มต้น $w(0)$ อย่างไรก็ตามถ้าพิจารณาเขตอิ่มตัวแรกซึ่งอยู่ถัดจากเขตเปลี่ยนค่าแรกสุดนี้ ก็จะสามารถสร้างค่าสัญญาณเข้าในเขตอิ่มตัวดังกล่าวได้ และสร้างสัญญาณเข้าย้อนกลับมาสู่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ ได้

กล่าวโดยละเอียดดังนี้ ให้ t^{sw}_a เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าเขตแรกสุด (เป็นเวลาเริ่มต้นของเขตอิ่มตัวถัดมา) แน่นอนว่าเครื่องหมายของช่วง ณ จุดนี้ต้องมีค่าเป็น ∞ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง แต่จากทฤษฎีบท 1 เราพบว่า

$$w(t_{f,k}) \quad = \quad -M\mathrm{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T - t_{f,k})\} \tag{4.28}$$

เมื่อ $t_{f,k}$ เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่า T_k ซึ่งในกรณีนี้คือ t^{sw}_a ค่า $-\mathrm{sgn}\{\frac{d}{dt}s(T - t^{\mathrm{sw}}_a)\}$ คือเครื่องหมายของช่วงในตำแหน่ง a อย่างไรก็ตามเนื่องจากเครื่องหมายของช่วง ณ ตำแหน่งนี้มีขนาดเป็นอนันต์ เราจึงเลื่อนไปใช้เครื่องหมายของช่วงในตำแหน่ง $a+1$ ซึ่งเวลาสวิตช์ในตำแหน่ง $a+1$ นี้คือเวลาสุดท้ายของเขตอิ่มตัว (ซึ่งมี t^{sw}_a เป็นเวลาเริ่มต้นของเขตอิ่มตัวดังกล่าว) ดังนั้นเครื่องหมายของช่วงในทั้งสอง



Switching time	*0*	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Interval sign	*+1*	*-1*	$+\infty$	*+1*	*-1*	$+\infty$
Beginning point	P_0	*0*	*0*	P_1	*0*	*0*

รูปที่ 4.10: เวกเตอร์สวิตซ์และรูปแบบสัญญาณเข้าสูงสุดในกรณีที่มีเขตเปลี่ยนค่าเป็นเขตแรก และมีเวลาสวิตซ์ t_a^{sw} เป็นเวลาสุดท้ายของเขตเปลี่ยนค่าแรก (เป็นเวลาเริ่มต้นของเขตอิ่มตัวถัดไป)

ตำแหน่งจึงเป็นเครื่องหมายเดียวกัน เพราะฉะนั้นจึงได้ว่า

$$w(t_a^{\mathrm{sw}}) \;=\; \gamma_{a+1}^{\mathrm{sw}} M \tag{4.29}$$

รูปที่ 4.10 แสดงให้เห็นเวกเตอร์สวิตซ์สำหรับสัญญาณเข้าที่เริ่มต้นด้วยเขตเปลี่ยนค่า และแสดงตำแหน่งเวลา t_a^{sw} ต่อไปเลื่อนมาพิจารณาที่เวลาสวิตซ์ t_i^{sw} ถัดไป ซึ่งอาจใช้วิธีพิจารณาเช่นเดียวกับที่ได้กล่าวในตอนที่ 4.5.2 ตามสมการ (4.23) และ (4.25) นั่นคือจะพบว่าถ้าเครื่องหมายของช่วงในตำแหน่งก่อนหน้า $\gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}}$ มีขนาดเป็นอนันต์จะได้

$$w(t_i^{\mathrm{sw}}) \;=\; \gamma_i^{\mathrm{sw}} M \tag{4.30}$$

ส่วนในกรณีที่เครื่องหมายของช่วงในตำแหน่งก่อนหน้าเท่ากับ ± 1 เราจะได้

$$w(t_i^{\mathrm{sw}}) \;=\; w(t_{i-1}^{\mathrm{sw}}) \;-\; \gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}} D(t_i^{\mathrm{sw}} - t_{i-1}^{\mathrm{sw}}) \tag{4.31}$$

นั่นคือสัญญาณเข้า $w(t_i^{\mathrm{sw}})$ อาจคำนวณได้จาก $w(t_{i-1}^{\mathrm{sw}})$ และเวลาสวิตซ์ที่ตำแหน่งทั้งสอง และเมื่อสร้างสัญญาณเข้ามาจนถึงเวลาสวิตซ์สุดท้ายแล้วพบว่าเวลาสวิตซ์สุดท้ายไม่เท่ากับ T ก็ให้คำนวณสัญญาณเข้าที่เวลา $t = T$ ด้วย โดยมีค่าดังนี้ $w(T) = w(t_{n_{\mathrm{sw}}}^{\mathrm{sw}})$

สำหรับสัญญาณเข้าในเขตเปลี่ยนค่าแรกสุดที่ยังมิได้พิจารณานั้น อาจคำนวณสัญญาณเข้าที่แต่ละตำแหน่งโดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (4.25) เช่นเดียวกัน หากแต่กรณีนี้ต้องคำนวณจากเวลา t_a^{sw} ถอยหลังไปยังเวลา $t = 0$ ซึ่งเท่ากับว่าเราทราบค่า $w(t_i^{\mathrm{sw}})$ และต้องการคำนวณ $w(t_i^{\mathrm{sw}})$ ดังนั้นจึงอาจใช้

สมการ (4.25) ที่จัดรูปใหม่ดังนี้

$$w(t_{i-1}^{\mathrm{sw}}) \;=\; w(t_i^{\mathrm{sw}}) \;+\; \gamma_{i-1}^{\mathrm{sw}} D(t_i^{\mathrm{sw}} - t_{i-1}^{\mathrm{sw}}) \tag{4.32}$$

เท่านี้ก็สามารถคำนวณเวลาสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่าแรกสุดได้ทุกจุดจนถึงตำแหน่ง $t = 0$

สำหรับที่ได้อธิบายมาทั้งหมดนั้นเพียงเพื่อจะสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด $w(t)$ เท่านั้น แต่กระบวนการทั้งหมดยังไม่สิ้นสุดจนกว่าจะได้คำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ ซึ่งได้กล่าวไว้ในตอนถัดไป

4.6 การคำนวณดรรชนีสมรรถนะจากสัญญาณเข้าสูงสุด

การคำนวณดรรชนีสมรรถนะ (ค่าสัญญาณออกสูงสุด) จากสัญญาณเข้าสูงสุดที่สร้างได้อาจทำได้มากกว่าหนึ่งวิธี เช่นอาจป้อนสัญญาณเข้าในสมการ (2.6) ด้วยสัญญาณเข้าสูงสุดแล้วแก้สมการจนถึงเวลา T ค่าสัญญาณออกที่ได้ที่เวลาดังกล่าวจะเป็นค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลา T สำหรับวิธีที่ใช้ในโปรแกรมเป็นวิธีที่ได้กล่าวไว้ในส่วนท้ายสุดของตอนที่ 3.5 ในสมการ (??) คือการหาสังวัตนาการทางเวลาของสัญญาณเข้า $w(t)$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ $h(t)$ ซึ่งผลที่ได้ก็คือสัญญาณออกของระบบ และถ้าคำนวณที่เวลา $t = T$ ก็จะได้เป็นค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลา T เช่นกัน กล่าวคือ

$$\hat{z}(\infty) \;\approx\; \hat{z}(T) \;=\; \int_0^T w(t)h(T-t)dt \tag{4.33}$$

ในที่นี้เราใช้การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration) โดยใช้สมการดังกล่าว ก่อนอื่นต้องจำลองผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(T-t)$ ผลตอบนี้จำลองได้ในทำนองเดียวกับการจำลองผลตอบ $s(T-t)$ ผ่านทางสมการสถานะ (2.6) อย่างไรก็ตามการจำลองผลตอบสนองอิมพัลส์ต้องใส่สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณอิมพัลส์ซึ่งมิอาจสร้างได้ในทางปฏิบัติ แต่เราสังเกตว่าผลตอบค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ (Zero state response) ของระบบในสมการ (2.6) ที่สัญญาณเข้าเป็นสัญญาณอิมพัลส์ ตรงกับผลตอบสัญญาณเข้าเป็นศูนย์ (Zero input response) ของสมการดังกล่าวในกรณีที่ค่าเริ่มต้น $x(0) = b$ เมื่อทราบดังนี้แล้วก็อาจคำนวณผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(T-t)$ ด้วยการแก้สมการอนุพันธ์ใช้การประมาณเวลาไม่ต่อเนื่องและแก้สมการผลต่างสืบเนื่อง ในที่นี้เราใช้จำนวนการสุ่มเดียวกันกับที่ใช้ในการจำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้น $s(T-t)$ เวกเตอร์ข้อมูลที่ได้คือเวกเตอร์ข้อมูลเวลา และเวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองอิมพัลส์ อย่าลืมว่าเราต้องนำเวกเตอร์ที่ได้มาบิดหมุนก่อนเพื่อให้ได้เป็นผลตอบ $h(T-t)$ สุดท้ายเวกเตอร์ข้อมูลเวลาที่ได้จะมีค่าเดียวกันกับเวกเตอร์ `tsim[j]` ส่วนเวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองอิมพัลส์กำหนดให้แทนด้วย `imp[j]`

ต่อไปพิจารณาทางด้านสัญญาณเข้าสูงสุดบ้าง ตามที่ได้กล่าวไปแล้วในตอนที่ 4.5 ว่าสัญญาณเข้าสูงสุดถึงแม้จะทราบเพียงค่าที่จุดเวลาสวิตช์เท่านั้น แต่สัญญาณเข้าที่จุดเวลาอื่นๆ อาจคำนวณได้โดยใช้การประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น ดังนั้นเราจึงประมาณค่าสัญญาณเข้าดังกล่าวที่ตำแหน่งเวลาซึ่งกำหนดโดยเวกเตอร์ข้อมูลเวลา `tsim[j]` และให้เวกเตอร์ข้อมูลสัญญาณเข้าสูงสุดที่ประมาณค่าได้แทนด้วย `maxinput[j]` (ถึงแม้เราจะใช้วิธีการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น แต่ค่าที่ได้ก็เป็นค่าแท้จริงมิใช่ค่าประมาณ ทั้งนี้เนื่องจากสัญญาณเข้ามีลักษณะเชิงเส้นเป็นช่วงๆ) วิธีเชิงตัวเลขที่นำมาใช้คำนวณค่าปริพันธ์

ในสมการ (4.33) คือวิธีเชิง*สี่เหลี่ยมคางหมู* (Trapizoidal numerical integration) โดยคูณเวกเตอร์ข้อมูลผลตอบสนองอิมพัลส์เข้ากับเวกเตอร์ข้อมูลสัญญาณเข้าสูงสุดที่จุดเวลาแต่ละจุดที่ตรงกัน ในที่นี้แทนด้วย `maxinput[j]imp[j]` ถ้าให้คาบการสุ่มเป็น $T/(n_{\rm samp}-1)$ จากวิธีเชิงสี่เหลี่ยมคางหมูจะได้สัญญาณออกสูงสุด หรือค่าดรรชนีสมรรถนะจากสมการ (4.33) คือ

$$\begin{aligned}\hat{z}(\infty) &= \frac{T}{2(n_{\rm samp}-1)}\sum_{\rm j=1}^{n_{\rm samp}-1}(\texttt{maxinput[j+1]imp[j+1]}+\texttt{maxinput[j]imp[j]}) \\ &= \frac{T}{n_{\rm samp}-1}\sum_{\rm j=2}^{n_{\rm samp}-1}(\texttt{maxinput[j]imp[j]}) \\ &+ \frac{T}{2(n_{\rm samp}-1)}(\texttt{maxinput[}n_{\rm samp}\texttt{]imp[}n_{\rm samp}\texttt{]}+\texttt{maxinput[1]imp[1]}) \quad (4.34)\end{aligned}$$

ค่าดรรชนีสมรรถนะที่ได้เป็นคำตอบสุดท้ายของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น อย่างไรก็ตามในบทถัดไปกล่าวถึงการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์ ซึ่งในกระบวนการออกแบบไม่เพียงแต่ใช้ค่าดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณได้ แต่ยังต้องใช้สัญญาณเข้าสูงสุดที่สร้างได้เช่นกัน ผังงานในรูปที่ 4.11 สรุปขั้นตอนทั้งหมดของการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะที่ใช้ในโปรแกรม

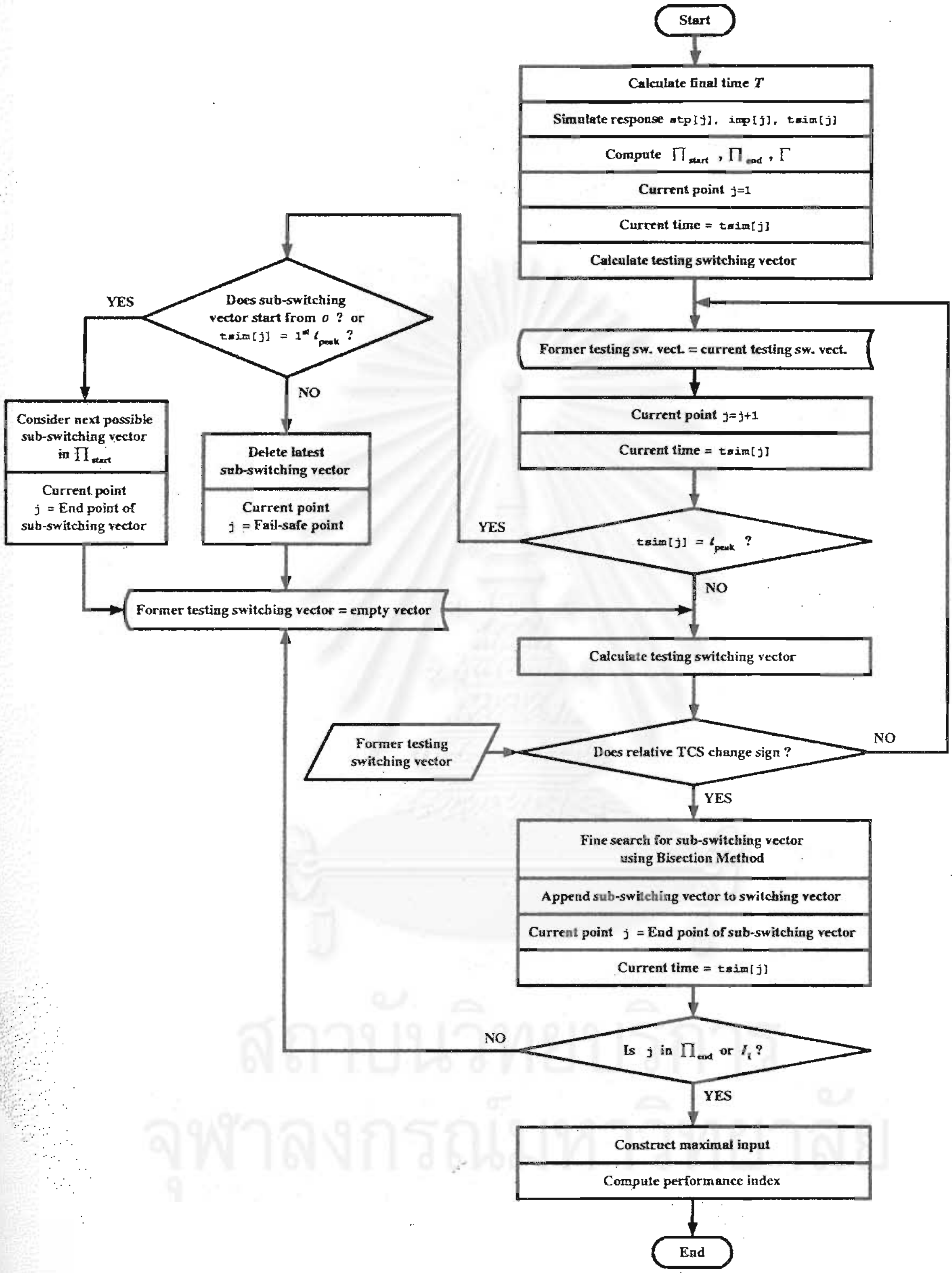
4.7 การทดสอบโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นใช้ทฤษฎีบทแต่ละทฤษฎีมาช่วยในขั้นตอนการคำนวณแต่ละขั้นตอน การทำงานของโปรแกรมแต่ละขั้นนั้น มีลักษณะตรงไปตรงมาและเป็นการนำผลที่ได้จากขั้นตอนก่อนหน้ามาใช้เป็นข้อมูลในการคำนวณขั้นถัดไป ตั้งแต่การคำนวณเวกเตอร์สวิตช์ทดสอบ เวกเตอร์สวิตช์ย่อย เวกเตอร์สวิตช์ของทั้งสัญญาณตั้งแต่ปลาย $t=0$ ถึง $t=T$ และสร้างสัญญาณเข้าจากเวกเตอร์สวิตช์ที่ได้ ดังนั้นจึงมั่นใจได้ว่าถ้าขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสอดคล้องกับทฤษฎีบททั้งหมด ดรรชนีสมรรถนะคำนวณได้ย่อมถูกต้องตามทฤษฎีบทและเป็นสัญญาณออกสูงสุดจริง อย่างไรก็ตามเพื่อตรวจสอบความถูกต้องในส่วนของขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม เราจึงทดสอบโปรแกรมโดยใช้วิธีเลือกระบบตัวอย่างขึ้นมาแล้วใช้การทดสอบ 2 ประเภทคือ

1. ทดสอบขยายเวลาสุดท้าย T ในการคำนวณค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด
2. ทดสอบเทียบค่าดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณได้กับขอบเขตบนชนิดต่าง ๆ

ระบบเชิงเส้นตัวอย่างที่เลือกใช้ในที่นี้มี 3 ระบบ เป็นระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณ โดยมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}G_1(s) &= \frac{0.4s+1.2}{s^2+1.2s+8} \\ G_2(s) &= \frac{4.26s^3-29.01s^2+737.2s-2994}{s^4+22.02s^3+2719s^2+5.133\times10^4s+2.404\times10^5} \\ G_3(s) &= \frac{0.2s+0.4}{s^2+0.4s+8}\end{aligned}$$



รูปที่ 4.11: ผังงานแสดงกระบวนการในการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบเชิงเส้น $h(T-t)$

4.7.1 การทดสอบขยายเวลาสุดท้าย

ดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณด้วยโปรแกรมนี้เป็นค่าประมาณของดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด T เท่า

นั้น ดังนั้นเราจึงต้องการทดสอบว่าค่าที่ประมาณได้นั้นใกล้เคียงกับค่าดรรชนีสมรรถนะจริงเท่าใด อย่างไรก็ตามเนื่องจากค่าดรรชนีสมรรถนะที่แท้จริง $\hat{\nu}$ ไม่อาจคำนวณได้ในทางปฏิบัติ จึงไม่สามารถใช้เป็นตัวทดสอบได้ แต่จากที่กล่าวไว้ในตอนที่ 3.1 เราทราบว่าถ้าหากผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ลู่เข้า (ระบบมีเสถียรภาพ) ค่าผิดพลาดจากการประมาณที่เวลาจำกัดก็จะลู่เข้าสู่ค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์เมื่อ $T \to \infty$ เช่นกัน นั่นหมายถึงค่าประมาณของดรรชนีสมรรถนะมี*แนวโน้ม*ที่จะลู่เข้าสู่ค่าดรรชนีสมรรถนะเมื่อ $T \to \infty$ ถึงแม้จะไม่มีลักษณะลู่เข้าแบบเพิ่มขึ้นอย่างเดียว (Monotonic increasing) ก็ตาม ดังนั้นในการทดสอบนี้เราจึงขยายเวลาสุดท้าย T ออกไปให้มากกว่าเวลาสุดท้ายปกติ $\texttt{tsim[}n_{\text{samp}}\texttt{]}$ ที่ใช้ในโปรแกรม โดยแปรค่าไปหลายๆ ค่า แล้วคำนวณค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะ $\hat{\nu}_T$ ที่ใช้เวลาสุดท้ายเหล่านั้น จากนั้นจึงนำมาเปรียบเทียบกับค่าประมาณของดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายปกติที่ใช้ในโปรแกรม สำหรับการคำนวณค่าเวลาสุดท้ายในโปรแกรมได้อธิบายไว้ในตอนที่ 4.1 โดยคำนวณจากสมการ (4.1)

เวลาสุดท้ายของระบบ $G_1(s)$ เมื่อคำนวณโดยสมการ (4.1) มีค่าประมาณ $\texttt{tsim[}n_{\text{samp}}\texttt{]} = 10$ วินาที การขยายเวลาสุดท้ายนี้อาจขยายไปจนสังเกตเห็นการลู่เข้าของค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้าย T ค่าต่างๆ ไม่จำเป็นต้องขยายจน T มีค่ามากเกินไป ในกรณีของระบบ $G_1(s)$ เราขยายจาก $T = \texttt{tsim[}n_{\text{samp}}\texttt{]} = 10$ ไปจนถึง $T = 20$ วินาที โดยใช้ค่าเวลา T ทั้งหมด 100 ค่า ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้าย T คำนวณบนปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ต่อไปนี้

$$\mathcal{W} \;=\; \{w(t) : |w(t)| \le 5,\ |\dot{w}(t)| \le 10,\ \forall t \ge 0\}$$

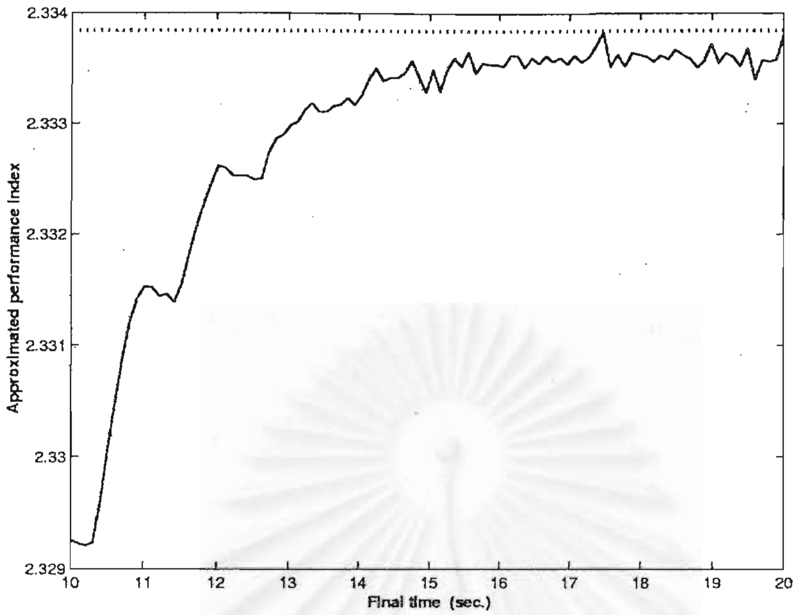
ผลที่ได้เป็นดังแสดงในรูปที่ 4.12 จะเห็นว่าถึงแม้ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะจะมีค่าขึ้นลง แต่เมื่อเวลาสุดท้าย T เพิ่มมากขึ้น ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะก็มี*แนวโน้ม*ที่จะลู่เข้าสู่ค่าๆ หนึ่ง ซึ่งก็คือค่าดรรชนีสมรรถนะที่แท้จริง อย่างไรก็ตามจากรูปยังมิอาจบ่งชี้ได้ว่าค่าใดคือค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์แท้จริง (ยกเว้นจะขยายเวลาสุดท้ายไปถึงอนันต์เท่านั้น) ดังนั้นในการทดสอบนี้เราจึงเลือกใช้ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่มีค่ามากที่สุด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2.338 (ตามเส้นประในรูป) เพื่อใช้เป็นตัวเปรียบเทียบกับค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายที่ใช้ในโปรแกรม (หรือที่เวลา $T = 10$ วินาที) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2.329 เปอร์เซนต์ความผิดพลาดมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(2.338 - 2.329)}{2.338} \times 100 \;=\; 0.385\%$$

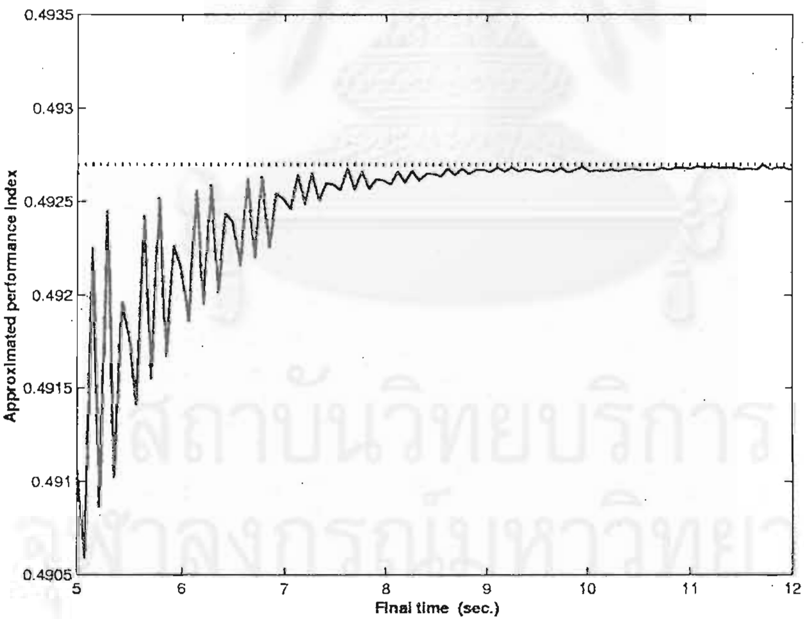
สำหรับระบบ $G_2(s)$ อาจคำนวณเวลาสุดท้ายโดยสมการ (4.1) ได้ประมาณ $\texttt{tsim[}n_{\text{samp}}\texttt{]} = 5$ วินาที และขยายเวลาในการคำนวณค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะไปจนถึง $T = 12$ วินาที และสุ่มใช้เวลาสุดท้ายทั้งหมด 100 จุด โดยปริภูมิสัญญาณเข้าเป็นปริภูมิเดียวกันกับระบบแรก ผลที่ได้เป็นดังรูปที่ 4.13

เห็นได้ว่าค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด T ของระบบ $G_2(s)$ มีแนวโน้มที่จะลู่เข้าสู่ค่าๆ หนึ่ง ถึงแม้จะมีการกระเพื่อมขึ้นลง ค่าสูงสุดของค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายต่างๆ มีค่าเท่ากับ 0.4927 ในขณะที่ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายที่ใช้ในโปรแกรม ($T = 5$) มีค่าเท่ากับ 0.4911 ดังนั้นเปอร์เซนต์ความผิดพลาดมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(0.4927 - 0.4911)}{0.4927} \times 100 \;=\; 0.325\%$$



รูปที่ 4.12: ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะของระบบ $G_1(s)$ ที่แปรเวลาสุดท้าย T ในการคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุด จาก 10 วินาที ถึง 20 วินาที



รูปที่ 4.13: ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะของระบบ $G_2(s)$ ที่แปรเวลาสุดท้าย T ในการคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุด จาก 5 วินาที ถึง 12 วินาที

สำหรับระบบ $G_3(s)$ คำนวณเวลาสุดท้ายได้ประมาณ $\texttt{tsim[}n_{\text{samp}}\texttt{]} = 30$ วินาที และขยายเวลาในการคำนวณค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะไปจนถึง $T = 100$ วินาที และสุ่มใช้เวลาสุดท้ายทั้งหมด 100 จุด โดยปริภูมิสัญญาณเข้าเป็นปริภูมิเดียวกันกับสองระบบแรก ผลที่ได้เป็นดังรูปที่ 4.14

ลักษณะของค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด T ของระบบ $G_3(s)$ มีส่วนคล้ายกับกรณีของระบบ $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ กล่าวคือค่าประมาณมีแนวโน้มที่จะลู่เข้าสู่ค่าๆ หนึ่งเมื่อ $T \to \infty$ อย่างไรก็ตามในกรณีของระบบ $G_3(s)$ นี้ เห็นได้ชัดว่าที่เวลาประมาณ $T = 70$ วินาที ดรรชนีสมรรถนะมีค่าพุ่งขึ้นสูงที่สุดซึ่งเท่ากับ 2.7690 และอาจถือได้ว่าเป็นค่าดรรชนีสมรรถนะจริงซึ่งมีค่ามากกว่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2.7666 การที่ดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์มีค่าแตกต่างจากดรรชนีสมรรถนะจริงนี้แสดงให้เห็นถึงความจริงที่กล่าวไว้ในตอนที่ 3.1 ในส่วนของค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด นั่นคือค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์อาจไม่ใช่ค่าดรรชนีสมรรถนะจริงๆ และจะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับดรรชนีสมรรถนะจริงเสมอ ดังแสดงในสมการ (3.16) ค่าความแตกต่างระหว่างดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์และดรรชนีสมรรถนะจริงหรือค่า ϵ_∞ มีค่าเท่ากับ

$$\epsilon_\infty = \frac{(2.7690 - 2.7666)}{2.7690} \times 100 = 0.087\%$$

ส่วนค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายที่ใช้ในโปรแกรม ($T = 30$) มีค่าเท่ากับ 2.7601 เพราะฉะนั้นเปอร์เซนต์ความผิดพลาดจะมีค่าดังนี้

$$\frac{(2.7690 - 2.7601)}{2.7690} \times 100 = 0.322\%$$

ค่าผิดพลาดในการประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายที่ใช้ในโปรแกรม ในกรณีของ $G_1(s)$, $G_2(s)$ และ $G_3(s)$ มีค่าอยู่ในช่วง $0.3\% \sim 0.4\%$ ถ้าหากต้องการให้ค่าประมาณมีความแม่นยำมากกว่านี้อาจทำได้โดยลดค่าเกณฑ์ 0.01 ในสมการ (4.1) ให้ต่ำลง อย่างไรก็ตามการลดค่าเกณฑ์ดังกล่าวย่อมยังผลให้เวลาสุดท้ายในการคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุดมีค่ามากขึ้น ทำให้มีภาระในการคำนวณมากขึ้นและใช้เวลาประมวลผลสูงขึ้นด้วยเช่นกัน

4.7.2 การทดสอบเทียบกับขอบเขตบน

ขอบเขตบนชนิดต่างๆ ของดรรชนีสมรรถนะ เป็นดังที่ได้กล่าวไว้ในตอนที่ 2.5 ขอบเขตบนชนิดแรก $\hat{z}_1^*$ มีค่าดังนี้

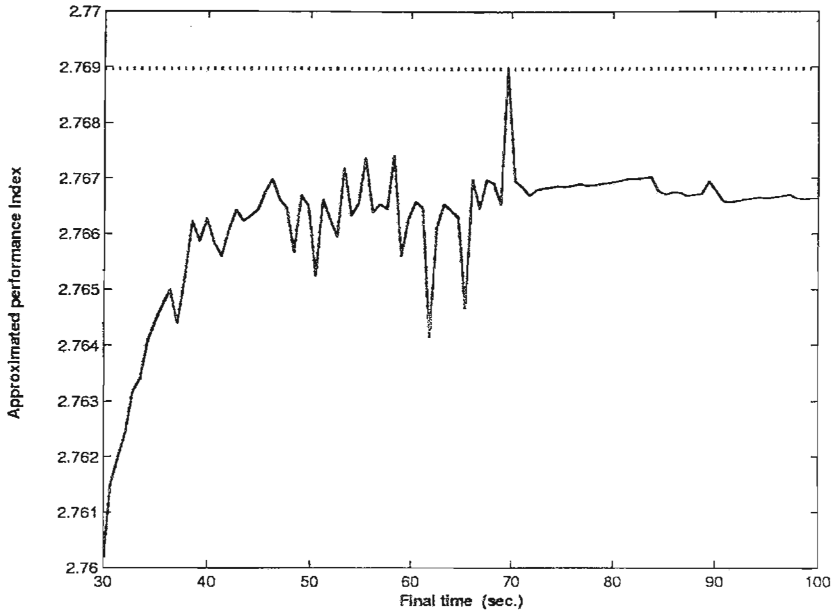
$$\hat{z}_1^* = M \int_0^\infty |h(t)|dt = M\|h(t)\|_1$$

ส่วนขอบเขตบนชนิดที่สองหรือ $\hat{z}_2^*$ คือ

$$\hat{z}_2^* = M(\sup_{t\geq 0}|s(t)| + |s_{ss}|) + D\|s(t) - s_{ss}\|_1$$

ผลของการทดสอบควรสอดคล้องกับธรรมชาติของขอบเขตบนและดรรชนีสมรรถนะ นั่นคือดรรชนีสมรรถนะควรเข้าใกล้ขอบเขตบนเมื่อความอนุรักษ์ของขอบเขตบน (ขึ้นอยู่กับค่า M และ D) มีค่าน้อยลง

สำหรับกรณีของดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง ความอนุรักษ์จะน้อยลงเมื่อปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ มีข้อจำกัดของอนุพันธ์ของ $w(t)$ ที่เข้มงวดน้อยลง หรือค่า $D \gg M$ นั่นเอง และถ้า D มีค่าสูงมากเข้าใกล้อนันต์แล้วยังพบว่าปริภูมิสัญญาณเข้าที่ใช้คำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ จะมีลักษณะตรง

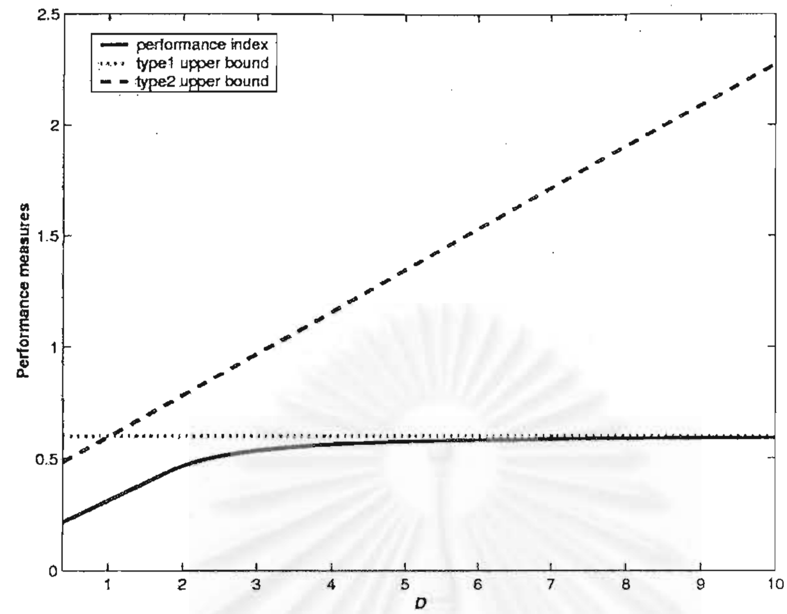


รูปที่ 4.14: ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะของระบบ $G_3(s)$ ที่แปรเวลาสุดท้าย T ในการคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุดจาก 30 วินาที ถึง 100 วินาที

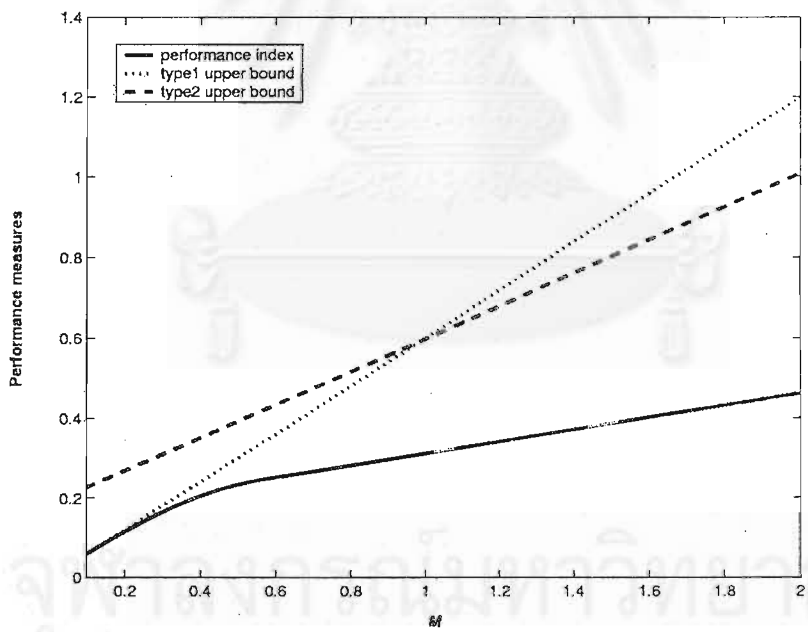
กันกับปริภูมิสัญญาณเข้าที่ใช้คำนวณขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง หรืออีกนัยหนึ่งคือดรรชนีสมรรถนะจะลู่เข้าสู่ขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งเมื่อ $D \gg M$ ส่วนขอบเขตบนชนิดที่สองนั้นมีความอนุรักษ์ค่อนข้างสูง (สังเกตจากการพิสูจน์ในตอนที่ 2.5.2) และขอบเขตบนชนิดนี้ยังขึ้นกับทั้งค่า M และ D ดังนั้นไม่ว่า $M \gg D$ หรือ $D \gg M$ ค่าดรรชนีสมรรถนะก็อาจไม่ลู่เข้าขอบเขตบนชนิดนี้ อย่างไรก็ตามขอบเขตบนชนิดนี้อาจมีความอนุรักษ์ต่ำกว่าขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง เมื่อค่า D สูงกว่าค่า M จนถึงจุดหนึ่ง

ในการทดสอบกับระบบ $G_1(s)$, $G_2(s)$ และ $G_3(s)$ เราได้กระทำในสองลักษณะ ลักษณะแรกคือใช้ค่า M คงที่ค่าหนึ่งจากนั้นแปรค่า D ไปหลายๆ ค่า และคำนวณดรรชนีสมรรถนะที่ค่า M และค่า D นั้นๆ ส่วนในลักษณะที่สองจะกระทำตรงกันข้ามคือกำหนดค่า D ตายตัวแล้วแปรค่า M แล้วคำนวณดรรชนีสมรรถนะ สำหรับช่วงค่าของ M และ D ที่เราจะแปรค่านั้น เป็นช่วงที่เห็นการเปลี่ยนแปลงของค่าดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนอย่างชัดเจน หรือกล่าวในกรณีของขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งคือ สามารถเห็นการลู่เข้าของดรรชนีสมรรถนะเข้าสู่ขอบเขตบนได้อย่างชัดเจน

ผลการแปรค่า D อย่างเดียว และการแปรค่า M อย่างเดียว สำหรับดรรชนีสมรรถนะของระบบ $G_1(s)$ เป็นดังรูปที่ 4.15 และรูปที่ 4.16 ตามลำดับ ในกรณีแรกค่า $M = 1$ และแปรค่า D ตั้งแต่ 0.4 ถึง 10 ส่วนกรณีที่สองค่า $D = 1$ และแปรค่า M ตั้งแต่ 0.05 ถึง 2 จากรูปทั้งสองจะเห็นได้ชัดว่าในกรณีที่ค่า $D \gg M$ ในรูปที่ 4.15 (หรือ $M \ll D$ ในรูปที่ 4.16) ดรรชนีสมรรถนะจะลู่เข้าสู่ขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง และเมื่อ $M \gg D$ ดรรชนีสมรรถนะจะลู่ออกจากขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง แต่ก็มิได้ลู่เข้าขอบเขตบนชนิดที่สอง แต่เห็นได้ชัดว่าถ้า D ต่ำกว่า M ถึงจุดๆ หนึ่ง (รูปที่ 4.15 จุด $D = 1.01$) หรือ M สูงกว่า D ถึงจุดๆ หนึ่งแล้ว (รูปที่ 4.16 จุด $M = 0.989$) ขอบเขตบนชนิดที่สองจะใกล้กับค่าดรรชนีสมรรถนะมากกว่าขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง นั่นคือขอบเขตบนชนิดที่สองจะมีความอนุรักษ์น้อยกว่าขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งเมื่อ



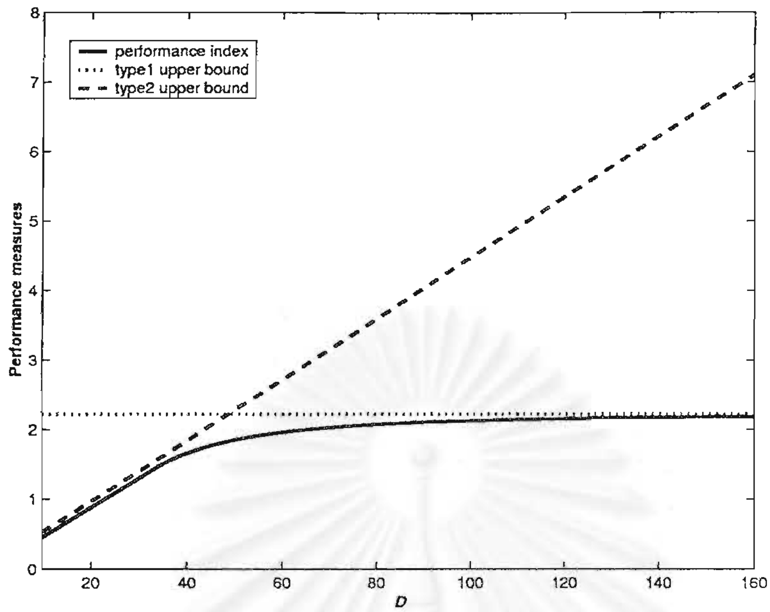
รูปที่ 4.15: ค่าดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งและขอบเขตบนชนิดที่สองสำหรับระบบ $G_1(s)$ ที่ค่า $M = 1$ และค่า D ตั้งแต่ 0.4 ถึง 10



รูปที่ 4.16: ค่าดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งและขอบเขตบนชนิดที่สองสำหรับระบบ $G_1(s)$ ที่ค่า $D = 1$ และค่า M ตั้งแต่ 0.05 ถึง 2

ผ่านจุดดังกล่าวไปแล้วนั่นเอง

สำหรับระบบ $G_2(s)$ การแปรค่า D อย่างเดียวเป็นดังรูปที่ 4.17 และการแปรค่า M อย่างเดียวเป็นดังรูปที่ 4.18 ในกรณีแรกค่า $M = 1$ และแปรค่า D ตั้งแต่ 10 ถึง 160 ส่วนกรณีที่สองค่า $D = 1$ และแปร

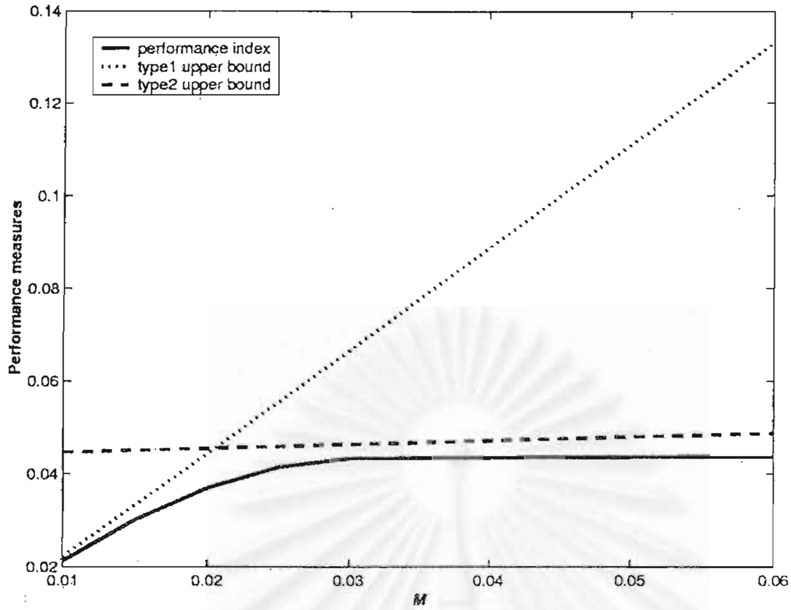


รูปที่ 4.17: ค่าดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งและขอบเขตบนชนิดที่สองสำหรับระบบ $G_2(s)$ ที่ค่า $M = 1$ และค่า D ตั้งแต่ 10 ถึง 160

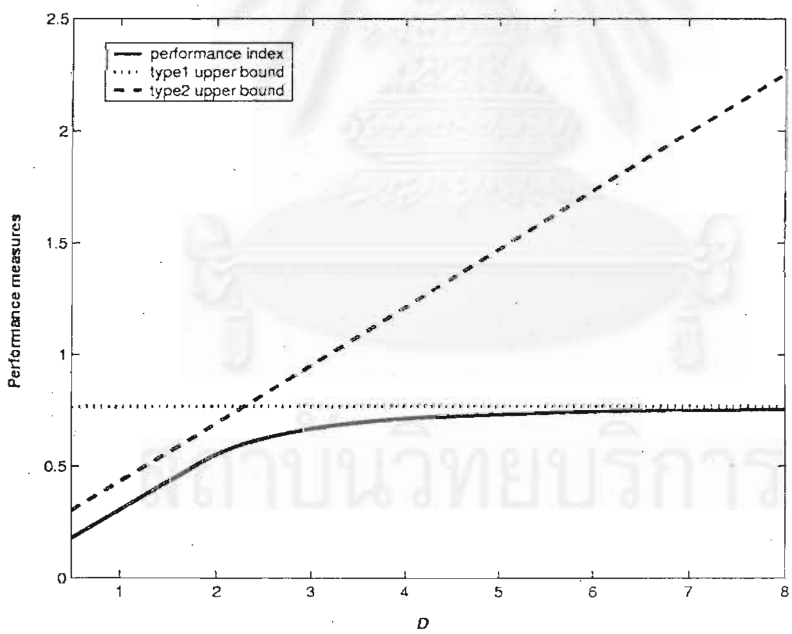
ค่า M ตั้งแต่ 0.01 ถึง 0.06 ผลการแปรค่า M และ D จากรูปทั้งสองมีลักษณะคล้ายกับผลจากระบบ $G_1(s)$ ทั้งในกรณีที่ $D \gg M$ และ $M \gg D$ ในรูปที่ 4.17 เราจะเห็นการลู่เข้าของค่าดรรชนีสมรรถนะอย่างชัดเจน โดยดรรชนีสมรรถนะจะลู่เข้าสู่ขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งเมื่อ $D \gg M$ และลู่เข้าสู่ขอบเขตบนชนิดที่สองเมื่อ $D \ll M$ เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.15 ในกรณีของระบบ $G_1(s)$ จะเห็นได้ว่าถึงแม้ $D \ll M$ ดรรชนีสมรรถนะในรูปที่ 4.15 ยังมีความแตกต่างกับขอบเขตบนชนิดที่สองอย่างมีนัยสำคัญ ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าในกรณีที่ข้อจำกัดของอนุพันธ์ D มีค่าต่ำๆ ขอบเขตบนชนิดที่สองของดรรชนีสมรรถนะของระบบ $G_2(s)$ อาจใช้เป็นตัวประมาณดรรชนีสมรรถนะของระบบดังกล่าวได้อย่างมีประสิทธิภาพมากกว่า กรณีของระบบ $G_1(s)$

สำหรับผลการแปรค่า D อย่างเดียว และการแปรค่า M อย่างเดียว ในกรณีของระบบ $G_3(s)$ เป็นดังรูปที่ 4.19 และ 4.20 ตามลำดับ ในกรณีแรกค่า $M = 1$ และแปรค่า D ตั้งแต่ 0.1 ถึง 1 ส่วนกรณีที่สองใช้ค่า $D = 1$ และแปรค่า M ตั้งแต่ 0.5 ถึง 8 จากรูปทั้งสองจะเห็นได้ชัดว่าในกรณีที่ค่า $D \gg M$ ในรูปที่ 4.19 (หรือ $M \ll D$ ในรูปที่ 4.20) ดรรชนีสมรรถนะจะลู่เข้าสู่ขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง และเมื่อ $M \gg D$ ดรรชนีสมรรถนะจะลู่ออกจากขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งแต่ก็มิได้ลู่เข้าขอบเขตบนชนิดที่สอง ถึงกระนั้นก็ตามยังเห็นได้ชัดว่าถ้า D ต่ำกว่า M ถึงจุดๆ หนึ่ง (รูปที่ 4.19 จุด $D = 2.294$) หรือ M สูงกว่า D ถึงจุดๆ หนึ่งแล้ว (รูปที่ 4.20 จุด $M = 0.436$) ขอบเขตบนชนิดที่สองจะเข้าใกล้ค่าดรรชนีสมรรถนะมากกว่าขอบเขตบนชนิดที่หนึ่ง กล่าวคือเมื่อผ่านจุดดังกล่าวไปแล้วขอบเขตบนชนิดที่สองจะมีความอนุรักษ์น้อยกว่าขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งนั่นเอง

การทดสอบทั้งสองแบบที่ได้แสดงไว้นี้ ถึงแม้ยังไม่เพียงพอที่จะรับประกันได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องสมบูรณ์ทุกประการ แต่ก็อาจสร้างความมั่นใจได้ระดับหนึ่ง ดังจะเห็นได้ว่าค่าดรรชนี

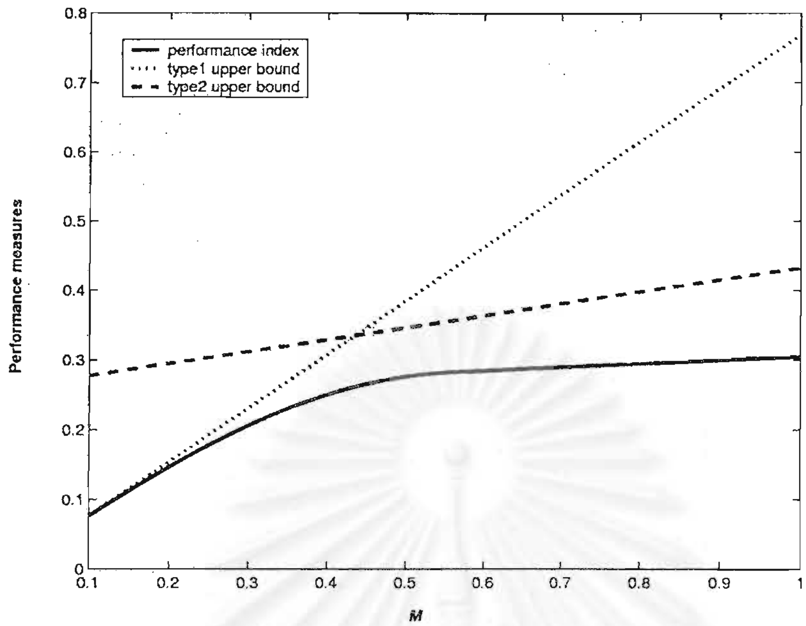


รูปที่ 4.18: ค่าดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งและขอบเขตบนชนิดที่สองสำหรับระบบ $G_2(s)$ ที่ค่า $D = 1$ และค่า M ตั้งแต่ 0.01 ถึง 0.06



รูปที่ 4.19: ค่าดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งและขอบเขตบนชนิดที่สองสำหรับระบบ $G_3(s)$ ที่ค่า $M = 1$ และค่า D ตั้งแต่ 0.5 ถึง 8

สมรรถนะมิได้ละเมิดขอบเขตบนทั้งสองชนิดสำหรับค่า M, D แต่ละค่า นอกจากนี้การลู่เข้าของค่าดรรชนีสมรรถนะในรูปที่ 4.17 ในกรณีของระบบ $G_2(s)$ ยังแสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องระหว่างดรรชนีสมรรถนะและขอบเขตบนแต่ละชนิดด้วย



รูปที่ 4.20: ค่าดรรชนีสมรรถนะเทียบกับขอบเขตบนชนิดที่หนึ่งและขอบเขตบนชนิดที่สองสำหรับระบบ $G_3(s)$ ที่ค่า $D = 1$ และค่า M ตั้งแต่ 0.1 ถึง 1

4.8 สรุป

ในบทนี้เราได้พัฒนาเครื่องมือสำหรับคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ โดยเริ่มจากการคิดค้นกระบวนวิธีการสร้างสัญญาณเข้าให้ได้ตามทฤษฎีบทซึ่งแสดงไว้ในบทที่ผ่านมา จากนั้นจึงพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ กระบวนวิธีการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดนี้ เกิดขึ้นจากการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดโดยตรง ทำให้สามารถคำนวณเวลาสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่าแต่ละเขต และสามารถสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดที่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ และเวลาสุดท้าย $t = T$ ได้ นอกจากนั้นเราได้อธิบายการนำเวลาสวิตช์แต่ละจุดมาสร้างเป็นสัญญาณเข้าสูงสุด แล้วคำนวณสัญญาณออกสูงสุดซึ่งเป็นค่าดรรชนีสมรรถนะตามต้องการ กระบวนวิธีดังกล่าวมีพื้นฐานหลักอยู่บนการมีอยู่จริงของสัญญาณเข้าสูงสุด ซึ่งทำให้มั่นใจได้ว่าวิธีที่ใช้ในโปรแกรมสามารถคำนวณสัญญาณเข้าสูงสุดสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่สนใจได้

สุดท้ายเรากล่าวถึงการทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาได้ โดยแยกเป็นการทดสอบขยายเวลาสุดท้ายในการคำนวณค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด และทดสอบเทียบค่าดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณได้กับขอบเขตบนสองชนิด ผลการทดสอบแบบแรกแสดงให้เห็นว่าค่าดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณได้ มีค่าใกล้เคียงกับดรรชนีสมรรถนะจริง ส่วนผลการทดสอบแบบที่สองก็บ่งชี้ถึงความสอดคล้องของดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณได้กับขอบเขตบนทั้งสองชนิด

บทที่ 5

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์

ถึงแม้การควบคุมระบบเชิงเส้นจะมีการวิจัยมายาวนานและมีงานวิจัยนับไม่ถ้วน แต่การออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา ก็ยังเป็นสิ่งที่ท้าทายความสามารถอยู่ ไม่ว่าจะเป็นการออกแบบเพื่อให้ระบบมีสมรรถนะสอดคล้องกับข้อกำหนด หรือเพื่อให้เกิดความคุ้มค่าสูงสุดก็ตาม กรรมวิธีพื้นฐานที่มักใช้ออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นมีอยู่ด้วยกัน 2 วิธี กล่าวคือ

1. กรรมวิธีการออกแบบซึ่งมีพื้นฐานอยู่บนการหาค่าเหมาะที่สุดโดยใช้กรรมวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) คำนวณหาคำตอบ
2. กรรมวิธีการออกแบบซึ่งมีพื้นฐานอยู่บนกระบวนการวิเคราะห์ (Analytical method)

สำหรับกรรมวิธีการออกแบบตัวควบคุมที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือ*วิธีเชิงคอนเวกซ์* (Convex method) ซึ่งหมายรวมถึงการกำหนดรูปแบบปัญหาเชิงคอนเวกซ์และเทคนิค*การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์* (Convex optimization) ซึ่งเป็นโปรแกรมไม่เชิงเส้นแบบหนึ่ง วิธีเชิงคอนเวกซ์นี้ได้รวมข้อดีของกรรมวิธีการออกแบบตัวควบคุมทั้งสองชนิดเอาไว้ด้วยกัน กล่าวคือสามารถพิจารณาเงื่อนไขการออกแบบ (ทั้งทางเวลาและทางความถี่) ได้โดยตรง โดยไม่ต้องปรับเปลี่ยนหรือดัดแปลงเงื่อนไขการออกแบบดังกล่าว เช่นเดียวกับการออกแบบเชิงการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวแปรเสริม (Parameter optimization) และตัวควบคุมที่ออกแบบได้ก็จะทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพเช่นเดียวกับการออกแบบตัวควบคุมเชิงเหมาะที่สุด (Optimal control design)

เทคนิคการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์นั้นถือว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิผล เนื่องจากวิธีนี้สามารถหาคำตอบได้ก็ต่อเมื่อปัญหามีคำตอบเท่านั้น กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ วิธีนี้จะทำให้เราทราบว่าปัญหามีคำตอบหรือไม่ ถ้าปัญหาไม่มีคำตอบนั่นหมายถึงไม่มีตัวควบคุมตัวใดเลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการออกแบบ สำหรับคำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบในวงกว้าง (Global solution) เนื่องจากความเป็นคอนเวกซ์ของปัญหา ที่สำคัญคือการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์นี้ มีขั้นตอนวิธีที่เป็นระบบระเบียบและอาจพัฒนาขึ้นเป็นโปรแกรมเพื่อช่วยคำนวณในขั้นตอนการออกแบบได้

สาเหตุหนึ่งในการเลือกใช้วิธีเชิงคอนเวกซ์ คือความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีของตัวประมวลผลสัญญาณควบคุม ซึ่งสามารถสร้างสัญญาณควบคุมด้วยกรรมวิธีที่ซับซ้อนได้ รวมถึงความก้าวหน้าทางคอมพิวเตอร์ทั้งฮาร์ดแวร์และซอฟท์แวร์ ที่สนับสนุนการวิเคราะห์ และสังเคราะห์ตัวควบคุมหรือระบบควบคุมที่ยุ่งยากในการคำนวณมากขึ้น และพัฒนาการของตัวตรวจวัดและตัวขับเร้าซึ่งทำให้สร้างระบบควบคุมที่มีความเที่ยงตรง และความแม่นยำสูงได้ ด้วยมูลค่าที่ต่ำลง ทั้งนี้เนื่องจากวิธีเชิงคอนเวกซ์เป็นวิธีซึ่งอาศัยการคำนวณที่ค่อนข้างซับซ้อนและต้องการความแม่นยำ และตัวควบคุมที่ได้ (ตัวควบคุมเชิงเส้น) อาจมีอันดับค่อนข้างสูง ที่สำคัญในตอนที่ 2.4 เราได้พิสูจน์แล้วว่าดรรชนีสมรรถนะที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้มีความเป็น

คอนเวกซ์สำหรับระบบ $h(t)$ ใดๆ ความจริงนี้ทำให้ดรรชนีสมรรถนะดังกล่าวสามารถประยุกต์ใช้เป็นจุดประสงค์การออกแบบ (Design objective) เกณฑ์การออกแบบ (Design criteria) หรือเงื่อนไขการออกแบบ (Design constraint) ตัวควบคุมสำหรับวิธีเชิงคอนเวกซ์ได้ นอกจากนี้ยังใช้ร่วมกับเงื่อนไขบังคับอื่นๆ ทั้งในเชิงเวลาและเชิงความถี่ที่มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ได้ด้วย เพราะการออกแบบเชิงคอนเวกซ์สามารถรองรับกาสังเคราะห์ระบบควบคุมในลักษณะหลายจุดประสงค์ (Multi-objective) ได้ โดยมีตัวอย่างให้เห็นใน [46, 47, 48, 49, 50, 51, 24, 52, 53, 54] อันที่จริงแล้วเราพบว่าปัญหาการสังเคราะห์ระบบควบคุมแบบหลายเงื่อนไข มักจะสมมูลกับปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ในมิติอนันต์ การออกแบบเชิงคอนเวกซ์นั้นอธิบายอย่างละเอียดโดย Boyd และคณะใน [5, 4] ซึ่งเป็นเอกสารอ้างอิงหลักสำหรับเนื้อหาในบทนี้ด้วย

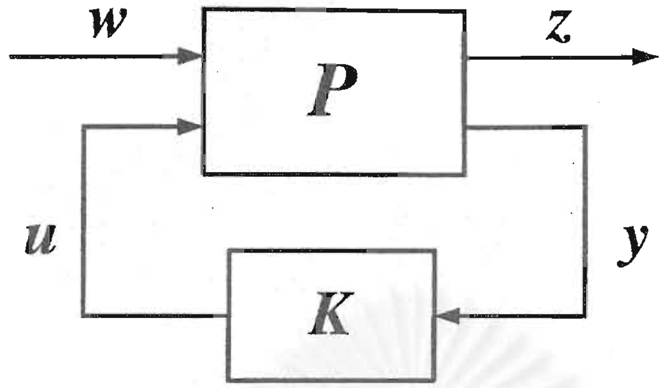
เนื่องจากการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์ค่อนข้างเป็นที่รู้จักดังนั้นในบทนี้จึงกล่าวถึงหลักการและขั้นตอนการออกแบบแต่เพียงคร่าวๆ เท่านั้น ซึ่งเป็นเนื้อหาหลักสำหรับการพัฒนาโปรแกรมช่วยออกแบบระบบควบคุมต่อไป

5.1 การกำหนดรูปแบบปัญหาเชิงคอนเวกซ์

ปัญหาการออกแบบระบบควบคุมที่มีฟังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไขบังคับต่างๆ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ จะเรียกสั้นๆ ว่าปัญหาคอนเวกซ์ ในตอนนี้จะกล่าวถึงกระบวนการกำหนดรูปแบบปัญหาซึ่งเริ่มจากปัญหาคอนเวกซ์ในเทอมของระบบควบคุมหนึ่งๆ และให้ผลเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ในมิติจำกัด พิจารณาระบบควบคุมมาตรฐานในรูปที่ 5.1 สัญญาณเข้าระบบ P อาจจำแนกได้เป็นสองชนิดคือ สัญญาณเข้าจากภายนอก (External input) ในรูปคือสัญญาณ w ซึ่งเป็นเวกเตอร์สัญญาณที่อาจประกอบด้วยการรบกวน (Disturbance), สัญญาณรบกวน (Noise) หรือสัญญาณอ้างอิง (Reference signal) ก็ได้ สัญญาณเข้าอีกชนิดหนึ่งคือสัญญาณควบคุม (Control signal) ในรูปคือสัญญาณ u ที่ส่งมาจากตัวควบคุม K สัญญาณ u นี้อาจเป็นเวกเตอร์ได้เช่นกัน ส่วนสัญญาณออกจากระบบ P นั้นก็จำแนกได้เป็นสองชนิดเช่นกัน ได้แก่สัญญาณที่ตรวจวัดได้ (Measured output) ในรูปคือสัญญาณ y ซึ่งจะถูกส่งให้กับตัวควบคุม K สัญญาณออกอีกสัญญาณหนึ่งคือสัญญาณที่ต้องการควบคุม (Regulated output) ในรูปคือสัญญาณ z ซึ่งเป็นส่วนที่เราจะตั้งข้อกำหนดในการออกแบบต่างๆ โดยเรามิได้คำนึงว่าสัญญาณ z จะเข้าถึงได้ (Accessible) จากตัวควบคุมหรือไม่ ในที่นี้เวกเตอร์สัญญาณ z อาจมีส่วนประกอบเป็นสัญญาณ u และสัญญาณ y ด้วยก็ได้ เมื่อพิจารณาสัญญาณเข้าและออกดังกล่าว เราอาจเขียนระบบ P ได้ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

ในที่นี้เราสมมติให้ระบบที่ต้องการควบคุม P เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (Linear Time-Invariant) โดยไม่คำนึงว่า P จะเป็นระบบต่อเนื่องทางเวลา (Continuous-time) หรือไม่ เนื่องจากสิ่งที่จะกล่าวต่อไปมิได้ขึ้นกับความต่อเนื่องทางเวลาของระบบ และในทางปฏิบัติระบบมักมีทั้งส่วนที่ต่อเนื่องทางเวลา และไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete-time) ร่วมกันอยู่ ระบบควบคุมในรูปแบบอื่นๆ นอกเหนือไปจากรูปแบบระบบ



รูปที่ 5.1: รูปแบบระบบควบคุมมาตรฐาน

ในรูปที่ ?? ต้องนำมาจัดให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวก่อนจึงจะสามารถใช้วิธีการออกแบบเชิงคอนเวกซ์ต่อไปได้ สำหรับพารามิเตอร์ต่างๆ ในสมการ (5.1) อาจคำนวณจากระบบที่จัดรูปแล้วโดยตรง

ให้ H_{zw} เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอนจากสัญญาณภายนอก w ไปสู่สัญญาณออก z จากรูปที่ 5.1 เราพบว่า

$$H_{zw} = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \tag{5.2}$$

จะเห็นได้ชัดว่า เงื่อนไขอย่างง่ายบน H_{zw} อาจกลายเป็นเงื่อนไขที่ซับซ้อนบนตัวควบคุม K แต่ในกรณีที่ $P_{yu} = 0$ เมทริกซ์ถ่ายโอนในสมการ (5.2) จะลดรูปลงเหลือ

$$H_{zw} = P_{zw} + P_{zu}KP_{yw} \tag{5.3}$$

ในตอนนี้จะเห็นว่าความสัมพันธ์ของ H_{zw} และ K จะง่ายขึ้นมาก และฟังก์ชันคอนเวกซ์ของ H_{zw} จะเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน K อีกด้วย อย่างไรก็ตามพึงระลึกว่ากรณีเช่นนี้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อฟังก์ชันถ่ายโอนจาก u ไป y เป็นศูนย์เท่านั้น หรือไม่มีการป้อนกลับผ่าน K นั่นเอง อย่างไรก็ตามระบบทั่วๆ ไป ไปจำเป็นจะต้องเป็นระบบวงเปิดเสมอไป ดังนั้นปัญหาการออกแบบตัวควบคุม K โดยตรงจึงอาจไม่เป็นปัญหาเชิงคอนเวกซ์ และไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ ในตอนถัดไปจะกล่าวถึงเทคนิควิธีที่ช่วยให้เราประยุกต์ใช้การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์กับระบบทั่วๆ ไปได้

5.1.1 การทำให้เป็นตัวแปรเสริมของตัวควบคุมทั้งหมดที่ทำให้ระบบเสถียร

ข้อกำหนดสำคัญและเป็นข้อกำหนดหลักในการออกแบบระบบควบคุมคือ ตัวควบคุมที่ได้จะต้องทำให้ระบบมีเสถียรภาพ ในที่นี้เราเรียกเซตของเมทริกซ์ถ่ายโอน H_{zw} ที่ได้จากตัวควบคุมทั้งหมดซึ่งทำให้ระบบเสถียรว่า*วิวิธเชิงเส้น* (Linear variety) วิวิธเชิงเส้น $\mathcal{L}$ ของปริภูมิเวกเตอร์ Υ สามารถแสดงได้ในรูปแบบของปริภูมิสู่ศูนย์ (Null space) ของการแปลงส่งสัมพรรค (Affine map) จาก Υ หรือพิสัย (Range) ของการแปลงส่งสัมพรรคไปยัง Υ ในกรณีแรกพิจารณาวิวิธเชิงเส้น $\mathcal{L}$ ในรูปแบบของปริภูมิสู่ศูนย์ซึ่งอาจแสดง

ได้ดังนี้

$$\mathcal{L} \;=\; \{v \in \Upsilon : \mathcal{A}v = \lambda\}$$

เมื่อ $\mathcal{A}$ เป็นการแปลงส่งเชิงเส้นจาก Υ ไปยัง Λ และ $\lambda \in \Lambda$ เมื่อ Λ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ใดๆ สำหรับรูปแบบนี้เซต $\mathcal{L}$ จะอยู่ในเทอมของเงื่อนไขบังคับสมการเชิงเส้น (Linear equality constraint) ในขณะเดียวกันเราอาจแสดงวิวิธเชิงเส้น $\mathcal{L}$ ในรูปของพิสัยของการแปลงส่งสัมพรรคได้เช่นกันดังนี้

$$\mathcal{L} \;=\; \{Cq + v : q \in \Theta\}$$

เมื่อ C เป็นการแปลงส่งเชิงเส้นจากปริภูมิเวกเตอร์ Θ ไปยัง Υ โดยที่ $v \in \Upsilon$ และ Θ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ใดๆ เราเรียกลักษณะการแทนค่า $Cq + v$ ในรูปแบบหลังนี้ว่าการแทนเชิงตัวแปรเสรี (free parametric representation)

สำหรับระบบควบคุมวงปิดในรูปที่ 5.1 หากเรานิยามเซต $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ ดังนี้

$$\mathcal{H}_{\text{stab}} \;=\; \{H_{zw} : H_{zw} \text{ มีเสถียรภาพ}\}$$

จะพบว่ารูปแบบการแทนเชิงตัวแปรเสรีมาตรฐานของ $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ รูปแบบหนึ่งที่ใช้โดย Doyle และคณะ [5, 4] คือรูปแบบการทำให้เป็นตัวแปรเสริม Q (Q-parameterization) หรือการทำให้เป็นตัวแปรเสริมของ Youla (Youla parameterization) ซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$\mathcal{H}_{\text{stab}} \;=\; \{T_1 + T_2QT_3 : Q \text{ มีเสถียรภาพ}\}$$

เมื่อ T_1, T_2 และ T_3 เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอนใดๆที่มีเสถียรภาพ สังเกตว่าการทำให้เป็นตัวแปรเสริม Q ในลักษณะซึ่ง $H_{zw} = T_1 + T_2QT_3$ นี้ มีรูปแบบเดียวกันกับสมการ 5.3 ซึ่งเป็นสมการของระบบวงเปิด นั่นคือไม่มีการป้อนกลับผ่าน Q และเนื่องจากการแทนเชิงตัวแปรเสรีนั้นเป็นการแปลงส่งสัมพรรค ดังนั้นฟังก์ชันคอนเวกซ์ใดๆ บนระบบวงปิด H_{zw} ก็ย่อมเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บนตัวแปร Q ด้วยเช่นกัน

สำหรับระบบวงปิด H_{zw} ใดๆ การทำให้เป็นตัวแปรเสริม Q อาจคำนวณได้จากทฤษฎี*การแยกตัวประกอบเฉพาะร่วมเชิงเสถียรภาพ* (Stable coprime factorization) [55] ร่วมกับบทตั้งการทำให้เป็นตัวแปรเสริมของ Youla (Youla parameterization lemma) [56] หรืออาจใช้แนวทางการหา*ตัวควบคุมเชิงตัวสังเกต* (Observer-based controller) [4] ของระบบวงปิดก็ได้ ทั้งสองวิธีให้ผลการทำให้เป็นตัวแปรเสริมที่สมมูลกัน อย่างไรก็ตามในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราเลือกใช้วิธีที่สองซึ่งใช้การคำนวณในปริภูมิสถานะทุกขั้นตอน ทำให้สะดวกและเหมาะสมในการพัฒนาเป็นโปรแกรมช่วยออกแบบ

การทำระบบวงปิด H_{zw} ให้เป็นตัวแปรเสริมนั้นจะส่งผลให้ตัวควบคุม K ถูกทำให้เป็นตัวแปรเสริมด้วย ดังนั้นแทนที่จะออกแบบตัวควบคุม K โดยตรง เราจะเปลี่ยนไปออกแบบตัวแปรเสริม Q แทน แล้วจึงนำมาคำนวณ K ในภายหลัง การทำให้เป็นตัวแปรเสริมที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ [4] เริ่มจากการพิจารณารูปแบบมาตรฐานของระบบควบคุมดังแสดงในรูปที่ 5.1 พลวัตของระบบในรูปดังกล่าวอาจแสดง

ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_P x + B_w w + B_u u \\ z &= C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \\ y &= C_y x + D_{yw} w + D_{yu} u \end{aligned} \quad (5.4)$$

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราพิจารณากรณีที่ไม่มีการป้อนผ่านตลอด (Feedthrough) จากสัญญาณควบคุม u ไปถึงสัญญาณ y นั่นคือ $D_{yu} = 0$ ซึ่งเราพบว่าระบบควบคุมส่วนใหญ่มักมีลักษณะเช่นนี้ ถ้าให้ตัวควบคุม $K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right]$ จะได้ว่าเมทริกซ์ถ่ายโอนวงปิด H_{zw} จะมีค่าดังต่อไปนี้

$$H_{zw}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_P + B_u D_K C_y & B_u C_K & B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K C_y & A_K & B_K D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K & D_{zw} + DzuD_K D_{yw} \end{array}\right] \quad (5.5)$$

เป็นที่รู้กันดีว่า ตัวควบคุมตัวหนึ่งที่ทำให้ระบบในสมการ 5.4 มีเสถียรภาพคือ

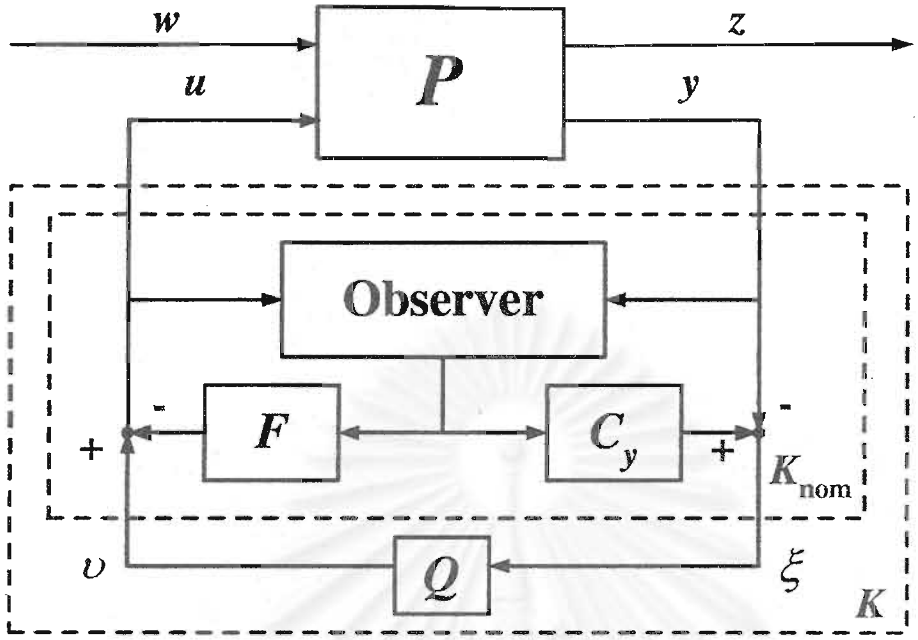
$$K_{\text{nom}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_P - B_u F_{\text{sfb}} - L_{\text{obs}} C_y & -L_{\text{obs}} \\ \hline F_{\text{sfb}} & 0 \end{array}\right] \quad (5.6)$$

เมื่อ F_{sfb} และ L_{obs} เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ $A_P - B_u F_{\text{sfb}}$ และ $A_P - L_{\text{obs}} C_y$ มีเสถียรภาพแบบเฮอร์วิทซ์[1] (Herwitz) ตามลำดับ [2] และให้สัญกรณ์ 0 หมายถึงเมทริกซ์ศูนย์ที่มีขนาดเหมาะสม (จากนี้เป็นต้นไปก็ใช้ข้อตกลงเดียวกันนี้) เราใช้ตัวห้อย (Subscript) nom เพื่อให้เข้าใจว่าตัวควบคุม K_{nom} นี้ เป็นตัวควบคุมเริ่มต้นที่จะใช้ในการทำระบบวงปิด H_{zw} ให้เป็นตัวแปรเสริม การคำนวณเมทริกซ์ F_{sfb} ที่ทำให้ $A_P - B_u F_{\text{sfb}}$ เสถียรนั้น อาจคำนวณได้โดยวิธีการออกแบบตัวควบคุมเอลคิวจี (LQG: Linear quadratic gaussian) [1, 37, 3] ซึ่งเป็นวิธีการออกแบบอัตราขยายของการป้อนกลับสถานะ (State feedback gain) และตัวประมาณสถานะ (State estimator) ที่ประกันเสถียรภาพของระบบ เนื่องจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มิได้เน้นในส่วนของการออกแบบตัวควบคุมเอลคิวจี ดังนั้นเราจึงกล่าวถึงทฤษฎีการออกแบบไว้ในภาคผนวก ก

มาถึงจุดนี้ถ้าเราเพิ่มสัญญาณ ν เข้าไปที่สัญญาณควบคุม u และให้สัญญาณ ξ เป็นความคลาดเคลื่อนจากการคาดเดาสัญญาณออก (Output prediction error) นั่นคือ $e = y - C\hat{x}$ เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนจาก ν ไป ξ เป็นศูนย์พอดี เนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการคาดเดาสถานะหรือ $x - \hat{x}$ ไม่สามารถควบคุมได้โดย ν ดังนั้นถ้าแทรกฟังก์ชันถ่ายโอน Q ที่มีเสถียรภาพ เข้าไประหว่างสัญญาณ ξ และสัญญาณ ν (สัญญาณผ่านจาก Q ไป ν) ดังในรูปที่ 5.2 จะได้ว่าเมทริกซ์ถ่ายโอนวงปิด H_{zw} จะถูกทำให้เป็นตัวแปรเสริม Q ดังนี้

$$H_{zw} = T_1 + T_2 Q T_3 \quad (5.7)$$

[1]ค่าเจาะจง (Eigenvalue) ทุกๆตัวของเมทริกซ์ที่มีเสถียรภาพแบบเฮอร์วิตซ์ จะมีส่วนจริงน้อยกว่าศูนย์



รูปที่ 5.2: การทำให้เป็นตัวแปรเสริมของตัวควบคุม ในลักษณะของตัวควบคุมเชิงตัวสังเกต

เมื่อ T_1, T_2 และ T_3 เป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_P & -B_uF_{\mathrm{sfb}} & B_w & B_u \\ L_{\mathrm{obs}}C_y & A_P - B_uF_{\mathrm{sfb}} - L_{\mathrm{obs}}C_y & L_{\mathrm{obs}}D_{yw} & B_u \\ \hline C_z & -D_{zu}F_{\mathrm{sfb}} & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & -C_y & D_{yw} & 0 \end{array}\right] \tag{5.8}$$

ตัวควบคุมในลักษณะดังรูปที่ 5.2 มีชื่อเรียกว่า*ตัวควบคุมเชิงตัวสังเกต* ตัวควบคุมทุกตัวที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบนี้ได้ โดยใช้ตัวควบคุม K_{nom} ที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพและใช้เมทริกซ์ถ่ายโอน Q ที่มีเสถียรภาพ ในทางกลับกันถ้าเราเลือกตัวควบคุม K_{nom} ใดๆ ที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพ และเลือกเมทริกซ์ Q ใดๆ ที่มีเสถียรภาพ แล้วจัดเข้ารูปแบบในรูปที่ 5.2 ก็จะพบว่าตัวควบคุม K ที่ได้ ทำให้ระบบมีเสถียรภาพเช่นกัน นอกจากนี้ถ้ากำหนดให้

$$Q(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array}\right] \tag{5.9}$$

พบว่าตัวควบคุมเชิงตัวสังเกตดังกล่าวอาจสร้างขึ้นใหม่ (Reconstruct) จากเมทริกซ์ถ่ายโอน Q และตัวควบคุม K_{nom} ได้ดังนี้

$$K(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_P - B_uF_{\mathrm{sfb}} - L_{\mathrm{obs}}C_y - B_uD_QC_y & B_uC_Q & L_{\mathrm{obs}} + B_uD_Q \\ -B_QC_y & A_Q & B_Q \\ \hline -F_{\mathrm{sfb}} - D_QC_y & C_Q & D_Q \end{array}\right] \tag{5.10}$$

จากการทำให้เป็นตัวแปรเสริมข้างต้น เราพบว่าฟังก์ชันคอนเวกซ์บนเมทริกซ์ถ่ายโอนวงปิด H_{zw} จะถ่ายทอดไปเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน Q ด้วย ซึ่งเราจะได้ใช้ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ และฟังก์ชัน

เงื่อนไขบังคับในโปรแกรมต่อไป อย่างไรก็ตามเซตของเมทริกซ์ถ่ายโอน Q เป็นเซตที่มีมิติอนันต์ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้เป็นตัวแปรในการคำนวณหาค่าเหมาะที่สุดโดยวิธีทั่วๆไปได้ เพราะฉะนั้นเราจะประมาณปริภูมิของ Q (และปริภูมิของ H_{zw} เช่นกัน) ด้วยปริภูมิย่อยมิติจำกัดโดยใช้การประมาณด้วยวิธีริตซ์ (Ritz approximation) ซึ่งจะกล่าวในตอนถัดไป

5.1.2 การประมาณริตซ์

ในตอนที่ผ่านมาเรามีฟังก์ชันคอนเวกซ์ของเมทริกซ์ถ่ายโอน Q เพื่อใช้เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขในการแก้ปัญหาเชิงคอนเวกซ์ แต่เนื่องจากปริภูมิของเมทริกซ์ถ่ายโอนเป็นปริภูมิมิติอนันต์ การแก้ปัญหาทางปฏิบัติในเทอมของตัวแปร Q จึงมีความซับซ้อนอย่างยิ่ง ดังนั้นในตอนนี้เราจะประมาณค่า Q ให้มีรูปแบบที่จำกัดนั่นคือประมาณปริภูมิมิติอนันต์ของตัวแปร Q ให้เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดด้วยการประมาณเรย์ลี-ริทซ์ (Rayliegh-Ritz approximation) หรืออาจเรียกสั้นๆ ว่าการประมาณริทซ์

กรรมวิธีริตซ์สำหรับแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดในมิติอนันต์ (Infinite-dimensional optimization) [4, 57] ประกอบไปด้วยการแก้ปัญหาดังกล่าวในมิติจำกัดขนาดใหญ่ซึ่งเป็นเซตย่อยของเซตอนันต์นั้น สำหรับกรรมวิธีการประมาณริตซ์ (Ritz approximation) ในปัญหาการออกแบบตัวควบคุมอาจแสดงโดยลำดับของเมทริกซ์ถ่ายโอน ซึ่งมีมิติเท่ากับ $n_z \times n_w$ (เมื่อ n_z, n_w คือจำนวนของสัญญาณออกและสัญญาณเข้า ตามลำดับ)

$$H_0,\ H_1,\ H_2, \ldots \in \mathcal{H}_{\text{stab}} \tag{5.11}$$

กำหนดให้

$$\mathcal{H}_N \ \triangleq\ \{H_0 + \sum_{i=0}^{N} x_i H_i : x \in \mathrm{R}^N\} \tag{5.12}$$

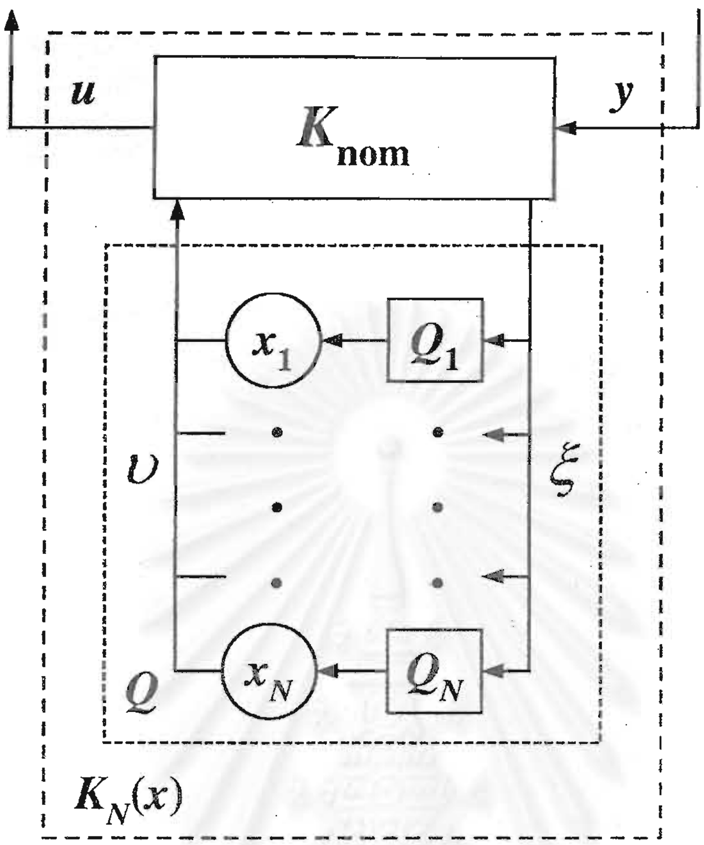
แทนเซตจำกัดย่อยสัมพรรคของ $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ ซึ่งกำหนดโดย H_0 และลำดับของเมทริกซ์ถ่ายโอนอีก N เมทริกซ์ เนื่องจากการแปลงจาก $x \in R_N$ ไปในเซต $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ มีลักษณะสัมพรรค ดังนั้นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ จึงเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน x ด้วย ทำให้เงื่อนไขคอนเวกซ์บน $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ เป็นเงื่อนไขคอนเวกซ์บน x ด้วย และถ้าหากลำดับ H_i ถูกเลือกอย่างเหมาะสมจะได้ว่าการคำนวณบนเซต $\mathcal{H}_N$ ซึ่งใช้จำนวนพจน์การประมาณริตซ์เท่ากับ N นั้น จะยิ่งเข้าใกล้การคำนวณบนเซตอนันต์ $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ เมื่อ $N \to \infty$

สำหรับการประมาณริตซ์ที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์นั้น จะมีพื้นฐานอยู่บนการทำให้เป็นตัวแปรเสริมของเมทริกซ์ถ่ายโอนวงปิดที่มีเสถียรภาพ (ดูตอนที่ 5.1.1) กล่าวคือ

$$\mathcal{H}_{\text{stab}} \ =\ \{T_1 + T_2 Q T_3 :\ Q \text{ มีเสถียรภาพ}\}$$

เราเลือกเมทริกซ์ถ่ายโอน $Q_1,\ Q_2,\ Q_3, \ldots Q_N$ ซึ่งมีมิติเท่ากับ $n_u \times n_y$ (เมื่อ n_u, n_y คือจำนวนของสัญญาณออก และสัญญาณเข้าตัวควบคุมตามลำดับ) จากนั้นจัดรูประบบวงปิดให้ตรงกับรูปแบบในสมการ (5.12) ทำให้ได้ว่าค่า H_i ในสมการ (5.11) เป็นดังนี้

$$H_0 \ =\ T_1 \qquad \text{และ} \qquad H_k \ =\ T_2 Q_k T_3 \qquad \text{เมื่อ}\ \ k = 1, 2, \ldots, N \tag{5.13}$$



รูปที่ 5.3: การประมาณริทซ์อันดับที่ N สำหรับตัวควบคุม $K_N(x)$ ประกอบด้วยสองส่วนใหญ่ๆ คือตัวควบคุม K_{nom} และเมทริกซ์ถ่ายโอน Q ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของเมทริกซ์ถ่ายโอน $Q_1,\ Q_2,\ Q_3, \ldots Q_N$

โดยสรุปแล้วแนวทางหนึ่งการประมาณค่า Q ให้มีรูปแบบจำกัดคือ ให้ $Q = x_1Q_1 + x_2Q_2 + \cdots + x_NQ_N$ รูปที่ 5.3 แสดงการประมาณเมทริกซ์ Q ด้วยวิธีริทซ์โดยใช้จำนวนพจน์การประมาณเท่ากับ N

โดยสรุปแล้วการกำหนดรูปแบบปัญหาเริ่มจากจัดรูปแบบระบบควบคุมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จากนั้นเราทำเมทริกซ์ถ่ายโอนวงปิด H_{zw} ให้เป็นตัวแปรเสริม ทำให้ปัญหาคอนเวกซ์บนระบบ H_{zw} กลายเป็นปัญหาคอนเวกซ์บนตัวแปร Q และสุดท้ายจึงประมาณปริภูมิของตัวแปร Q ให้มีมิติจำกัด ส่งผลให้ปัญหาสุดท้ายเป็นปัญหาคอนเวกซ์ในเทอมของตัวแปรมิติจำกัด x ปัญหาคอนเวกซ์สุดท้ายนี้จะอยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

5.2 การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

ในตอนที่ผ่านมาได้แสดงให้เห็นแล้วว่าปัญหาคอนเวกซ์ของระบบวงปิด H_{zw} ถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดในมิติจำกัดได้อย่างไร สำหรับตอนนี้เรานำเสนอการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังกล่าวด้วยวิธีเชิงตัวเลข วิธีเชิงตัวเลขที่มักใช้กับการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ เป็นวิธีที่อยู่บนพื้นฐานของการใช้ค่าเกรเดียนท์มาช่วยหาจุดเหมาะที่สุด (Gradient-based method) ขั้นตอนวิธีที่ใช้กันอย่าง

แพร่หลายคือ

1. ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี (Ellipsoid algorithm)

2. ระเบียบวิธีจุดภายใน (Interior point method)

วิธีที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือ*ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี* ซึ่งมีข้อได้เปรียบเหนือกว่าระเบียบวิธีจุดภายในคือ ฟังก์ชันจุดประสงค์หรือฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับของปัญหาที่ต้องการประยุกต์ใช้กับขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีนั้น ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด (Differentiable) ซึ่งเราก็พบว่าฟังก์ชันจุดประสงค์ (เงื่อนไขบังคับ) ในปัญหาการออกแบบระบบควบคุมส่วนหนึ่งไม่สามารถคำนวณค่าอนุพันธ์ได้ รวมถึงฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะที่เสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ด้วย ดังนั้นวิธีเชิงทรงรีจำเหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาการออกแบบระบบควบคุมซึ่งมีจุดประสงค์ (เงื่อนไขบังคับ) ในเทอมของค่าดรรชนีสมรรถนะดังกล่าว

ถึงแม้ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีสามารถใช้ได้กับปัญหาที่ฟังก์ชันจุดประสงค์ (เงื่อนไขบังคับ) หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกจุด แต่ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีก็ยังต้องการข้อมูลในการวิเคราะห์หาทิศทางในการหาค่าเหมาะที่สุด ข้อมูลดังกล่าวคือค่า*เกรเดียนท์ย่อย* (Subgradient) ของฟังก์ชันจุดประสงค์ (เงื่อนไขบังคับ) ดังนั้นเราจะอธิบายนิยามของเกรเดียนท์ย่อยก่อนแล้วจึงกล่าวถึงขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี

5.2.1 เกรเดียนท์ย่อย

กำหนดให้ $\phi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์และหาอนุพันธ์ได้ทุกจุด เราทราบดีว่า

$$\phi(x) \;\; \geq \;\; \phi(z) + \nabla\phi^T(x)(z-x), \qquad \forall z \in \mathrm{R}^n \tag{5.14}$$

สมการ (5.14) มีความหมายว่าระนาบที่สัมผัสกับ ϕ ที่จุด x จะวางตัวอยู่ภายใต้กราฟของ ϕ เสมอ ในทำนองเดียวกันถ้าหาก $\phi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์แต่ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ เราจะเรียก $g \in \mathrm{R}^n$ ว่า*เกรเดียนท์ย่อย*ของ ϕ ที่จุด x เมื่อ g สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$\phi(x) \;\; \geq \;\; \phi(z) + g^T(z-x), \qquad \forall z \in \mathrm{R}^n \tag{5.15}$$

จากสมการ (5.14) และ (5.15) เห็นได้ว่าเกรเดียนท์ของฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด จะเป็นเกรเดียนท์ย่อยตัวหนึ่งด้วย ตามหลักการวิเคราะห์เชิงคอนเวกซ์ (Convex analysis) ทำให้เราทราบข้อเท็จจริงที่ว่าฟังก์ชันคอนเวกซ์ทุกๆ ฟังก์ชันต้องมีเกรเดียนท์ย่อยอย่างน้อย 1 ค่า ที่จุดแต่ละจุดบนฟังก์ชันนั้น เราเรียกเซตของเกรเดียนท์ย่อย ϕ ทั้งหมดทุกตัวที่จุด x ว่าอนุพันธ์ย่อย (Subdifferential) ของ ϕ ที่จุด x ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\partial\phi(x)$

สมบัติของค่าเกรเดียนท์ย่อยแตกต่างไปจากค่าเกรเดียนท์ธรรมดา นั่นคือ*ค่าลบ*ของเกรเดียนท์ของฟังก์ชันใดๆ (ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์) ย่อมชี้ทิศทางที่ฟังก์ชันนั้นๆ ลาดลง (Descent direction) แต่สำหรับ*ค่าลบ*ของเกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชันคอนเวกซ์ จะชี้ไปในครึ่งระนาบ (Half plane) ที่มีจุดต่ำสุดอยู่เท่านั้น โดยไม่จำเป็นต้องเป็นทิศทางที่ลาดลง ดังนั้นเมื่อใช้ค่าเกรเดียนท์ย่อยในวิธีเชิงตัวเลขแทนการใช้

ค่าเกรเดียนท์ ก็จะพบว่าในขั้นตอนการค้นหาจุดต่ำสุดนั้น ฟังก์ชันจุดประสงค์อาจมิได้มีค่าลดลงเรื่อยๆ แต่ก็ยังมั่นใจได้ว่าการค้นหาได้เข้าใกล้จุดต่ำสุดมากขึ้นเรื่อยๆ

เมื่อวิเคราะห์สมการ (5.15) ในกรณีที่ $g^T(z-x) > 0$ จะได้ว่า $\phi(z) > \phi(x)$ กล่าวคือภายในครึ่งปริภูมิ (Half space) $\{z : g^T(z-x) > 0\}$ ค่าของ ϕ จะมีค่ามากกว่า ϕ ที่จุด x ดังนั้นหากเรากำลังหาจุด x ที่ให้ค่าฟังก์ชัน ϕ ต่ำที่สุด และทราบค่าของเกรเดียนท์ย่อย g ของ ϕ ที่จุด x ก็อาจตัดครึ่งปริภูมิส่วนที่ $g^T(z-x) > 0$ ทั้งหมด (หรือส่วนที่ $\phi(z) > \phi(x)$) ออกไปจากการคำนวณได้ ด้วยเหตุนี้จึงเรียกระนาบ $g^T(z-x) = 0$ ว่า*ระนาบการตัด* นอกจากนี้ถ้ามีค่า a ที่ $\phi(z) < a < \phi(x)$ เราอาจตัดแบ่งปริภูมิซึ่ง $g^T(z-x) > a - \phi(x)$ ออกไปจากการคำนวณได้ทั้งหมด สำหรับกรณีนี้เราเรียกระนาบ $g^T(z-x) = a - \phi(x)$ ว่า*ระนาบการตัดลึก* เนื่องจากระนาบดังกล่าวจะตัดส่วนที่ไม่นำมาพิจารณาได้กว้างกว่าระนาบการตัดปกติ

5.2.1.1 เกรเดียนท์ย่อยในกรณีมิติอนันต์

ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันนัลคอนเวกซ์บนปริภูมิเวกเตอร์ $\mathcal{V}$ (อาจมีมิติจำกัดหรือมิติอนันต์ก็ตาม) ฟังก์ชันนัล ϕ^{sg} ใดๆ จะเป็นเกรเดียนท์ย่อยของ ϕ ที่ v_0 ก็ต่อเมื่อ ϕ^{sg} เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นบน $\mathcal{V}$ และ

$$\phi(v) \;\; \geq \;\; \phi(v_0) + \phi^{\mathrm{sg}}(v - v_0), \qquad \forall v \in \mathcal{V} \tag{5.16}$$

ส่วนอนุพันธ์ย่อย $\partial\phi(v_0)$ จะประกอบด้วยเกรเดียนท์ย่อยของ ϕ ที่จุด v_0 สังเกตด้วยว่า $\partial\phi(v_0)$ เป็นเซตของฟังก์ชันนัล*เชิงเส้น*บน $\mathcal{V}$ นอกจากนี้ถ้าหาก $\mathcal{V} = \mathrm{R}^n$ ฟังก์ชันเชิงเส้นบน $\mathcal{V}$ จะมีรูปแบบเป็น $g^T v$ ซึ่งก็สอดคล้องกับนิยามของเกรเดียนท์ย่อยในสมการ (5.15)

5.2.1.2 เกรเดียนท์ย่อยสำหรับดรรชนีสมรรถนะ

เนื่องจากการออกแบบระบบควบคุมที่กล่าวในบทนี้อ้างถึงระบบวงปิดในโดเมนความถี่นั่นคือ H_{zw} ดังนั้นเพื่อให้สอดคล้องกันเราจึงเปลี่ยนสัญกรณ์ในการอ้างถึงระบบเชิงเส้นที่เหมาะสมซึ่งเคยใช้เป็น $h(t)$ โดยเปลี่ยนมาเป็น $H(s)$ หรือ H นอกจากนี้เพื่อแสดงให้เห็นว่าดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาบนปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ขึ้นอยู่กับระบบ H ที่สนใจ เราจึงนิยาม*ฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะ* $\varphi(H) : \mathcal{H}_{\mathrm{stab}} \to \mathrm{R}$ บนตัวแปร H ในเทอมของค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด T ดังนี้

$$\varphi(H) \;\; \triangleq \;\; \hat{z}(T) \tag{5.17}$$

โดยที่

$$\hat{z}(T) \;\; = \;\; \sup_{w \in \mathcal{W}} \{w(T) * h(t)\} \tag{5.18}$$

เราได้พิสูจน์ความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะไว้ในตอนที่ 2.4[2] เพราะฉะนั้นจึงได้ว่าฟังก์ชันดรรชนี

[2]ถึงแม้ดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}$ จะเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ของระบบ H แต่ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะ $\hat{z}(T)$ มิได้เป็นเช่นเดียวกัน อย่างไรก็ตามถ้าหากค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะมีค่าใกล้เคียงค่าดรรชนีสมรรถนะ ก็อาจใช้วิธีออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์ในเทอมของค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัดได้

สมรรถนะนี้เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และย่อมมีเกรเดียนท์ย่อยอย่างน้อยหนึ่งตัว ในที่นี้เราได้ให้ค่าเกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะไว้ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นในปริภูมิของเมทริกซ์ถ่ายโอนหรือ $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ และจะพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า ฟังก์ชันเชิงเส้นดังกล่าวสอดคล้องกับสมบัติของเกรเดียนท์ย่อยในมิติอนันต์ดังเช่นสมการ (5.16) สำหรับฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H)$ เกรเดียนท์ย่อยที่จุด H_0 ใดๆ มีค่าดังนี้

$$\varphi^{\text{sg}}(H) \quad = \quad \hat{w}(T) * h(T) \tag{5.19}$$

โดยที่

$$\hat{w} \quad = \quad \underset{w \in \mathcal{W}}{\operatorname{argsup}} \{w(T) * h_0(T)\} \tag{5.20}$$

เมื่อ $h_0(t) = \mathcal{L}^{-1}(H_0)$ เราอาจพิสูจน์สมบัติของเกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะได้ดังนี้

พิสูจน์

จากสมการ (5.16) พิจารณาเทอม $\varphi^{\text{sg}}(H - H_0)$ พบว่ามีค่าดังนี้

$$\varphi^{\text{sg}}(H - H_0) \quad = \quad \hat{w}(T) * (h(T) - h_0(T)) \quad = \quad \hat{w}(T) * h(T) - \hat{w}(T) * h_0(T)$$

ดังนั้นด้านขวาของสมการ (5.16) จึงมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \varphi(H_0) + \varphi^{\text{sg}}(H - H_0) &= \sup_{w \in \mathcal{W}} \{w(T) * h_0(T)\} + \hat{w}(T) * h(T) - \hat{w}(T) * h_0(T) \\ &= \hat{w}(T) * h_0(T) + \hat{w}(T) * h(T) - \hat{w}(T) * h_0(T) \\ &= \hat{w}(T) * h(T) \end{aligned}$$

และเมื่อแทนลงในสมการ (5.16) ก็จะพบว่า

$$\phi(H) \quad = \quad \sup_{w \in \mathcal{W}} \{w(T) * h(T)\} \quad \geq \quad \hat{w}(T) * h(T)$$

ซึ่งเป็นจริงเนื่องจากดรรชนีสมรรถนะของระบบ H ใดๆ ย่อมมากกว่าสังวัตนาการของระบบนั้นกับสัญญาณเข้า $\hat{w}$ เฉพาะเจาะจงค่าหนึ่ง □

5.2.1.3 เกรเดียนท์ย่อยบนปริภูมิย่อยมิติจำกัด

ในตอนที่แล้วเราได้กล่าวถึงค่าเกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะของระบบ $H(s)$ ใดๆ เกรเดียนท์ย่อยนี้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นบนปริภูมิมิติอนันต์ของเมทริกซ์ถ่ายโอนของระบบดังกล่าว ถึงกระนั้นก็ตาม การคำนวณโดยวิธีเชิงตัวเลขมักกระทำบนปริภูมิมิติจำกัด อีกนัยหนึ่งคือการหาค่าเหมาะที่สุดในเทอมของตัวแปรซึ่งเป็นเวกเตอร์มิติจำกัดย่อมสะดวก และไม่ซับซ้อนเท่ากับการหาค่าเหมาะที่สุดในเทอมของตัวแปรซึ่งเป็นเมทริกซ์ถ่ายโอน นั่นเป็นเหตุผลที่เราประมาณปริภูมิของระบบวงปิด $\mathcal{H}_{\text{stab}}$ ให้เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัด $\mathcal{H}_N$ ด้วยการประมาณริทซ์ดังนั้นในตอนนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าเกรเดียนท์ย่อย ในปริภูมิมิติอนันต์สามารถคำนวณบนปริภูมิย่อยในมิติจำกัดได้อย่างไร

ในตอนที่ 5.1.2 สมการ (5.12) และ (5.13) กล่าวไว้ว่าระบบวงปิด H_{zw} ถูกประมาณด้วยเมทริกซ์ถ่ายโอน $Q_1,\ Q_2,\ Q_3, \ldots Q_N$ ดังนี้

$$H_{zw} \;=\; T_1 + \sum_{i=0}^{N} x_i (T_2 Q_i T_3) \tag{5.21}$$

ดังนั้นฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะของตัวแปรในมิติจำกัด x ซึ่งแทนด้วย $\varphi^{\text{fin}} : \mathrm{R}^N \to \mathrm{R}$ จะมีค่าดังนี้

$$\varphi^{\text{fin}}(x) \;=\; \varphi\left(T_1 + \sum_{i=0}^{N} x_i (T_2 Q_i T_3)\right) \tag{5.22}$$

เกรเดียนท์ย่อย $g^{\text{fin}} \in \partial\varphi^{\text{fin}}(x)$ ของฟังก์ชันคอนเวกซ์ $\varphi^{\text{fin}}(x)$ ที่จุด x ใดๆ อาจคำนวณได้ดังนี้

$$g^{\text{fin}} \;=\; \begin{bmatrix} \phi^{\text{sg}}(T_2 Q_1 T_3) \\ \vdots \\ \phi^{\text{sg}}(T_2 Q_N T_3) \end{bmatrix} \;\in\; \partial\varphi^{\text{fin}}(x) \tag{5.23}$$

เมื่อทราบค่าเกรเดียนท์ย่อย g^{fin} ของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะซึ่งคำนวณบนปริภูมิมิติจำกัดของเวกเตอร์ x แล้ว เราก็สามารถใช้ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีเพื่อหาค่าเหมาะที่สุดในเทอมของตัวแปร x ได้ ซึ่งจะกล่าวถึงในตอนถัดไป

5.2.2 ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี

ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีเป็นกรรมวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้เทคนิควิธีการตัดแบ่งครึ่งระนาบ (Cutting-plane technique) เพื่อค้นหาค่าเหมาะที่สุด [58] ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีนับเป็นกรรมวิธีอย่างง่ายในการแก้ปัญหาโปรแกรมไม่เชิงเส้น (Nonlinear programming) ในรูปแบบ

$$\begin{array}{ll} \min_x & \phi_{\text{obj}}(x) \\ \text{subject to} & x \in S_{\text{con}}, \quad S_{\text{con}} = \{x \in \mathrm{R}^N : \phi_{\text{con}}(x) \le 0\} \end{array}$$

เมื่อ ϕ_{obj} และ ϕ_{con} เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ $x \in \mathrm{R}^n$ สมมติให้มีจุดที่เหมาะที่สุด $\bar{x} \in S_{\text{con}}$ กำหนดจุดเริ่มต้นในการค้นหาเป็น x_0 เริ่มจากใช้ทรงรีเริ่มต้นเป็น

$$\mathcal{E}_0 \;=\; \{x \in \mathrm{R}^N : (x - x_0)^T M_0^{-1} (x - x_0) \le 1\}$$

ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ x_0 และเมทริกซ์สมมาตร M_0 เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive definite matrix) ทรงรีนี้อยู่ภายใต้ข้อจำกัดคือ $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$ นั่นคือทรงรีเริ่มต้นต้องครอบคลุมจุดเหมาะที่สุดหรือจุดต่ำสุดเท่านั้น นอกจากนี้ทรงรีจะต้องมีปริมาตรเป็นจำนวนจริงบวกที่สามารถคำนวณได้ใน R^N รอบการคำนวณ (Iteration) แต่ละรอบสำหรับขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีประกอบด้วยขั้นตอนย่อย 3 ขั้นตอนดังนี้ [4]

1. เลือกจุดศูนย์กลาง x_0 และเมทริกซ์ M_0 ที่ทำให้ทรงรี $\mathcal{E}_0$ ครอบคลุมจุดที่เหมาะที่สุด $\bar{x}$ แล้วให้ $k = 1$
2. ในขั้นที่ 2 นี้จะแบ่งเป็น 2 กรณี กล่าวคือ

- *กรณีที่* 1: $\phi_{\text{con}}(x_k) > 0$: นั่นคือจุด x_k ละเมิดฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ $\phi_{\text{con}}(x)$ ในกรณีนี้เราเรียกรอบการคำนวณนี้ว่ารอบการคำนวณเชิงเงื่อนไขบังคับ (Constraint iteration) ซึ่งจะต้องคำนวณเกรเดียนท์ย่อย g_k ของฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ $\phi_{\text{con}}(x)$ ที่จุด x_k จากนั้นจึงคำนวณ

$$\tilde{g}_k = \frac{g_k}{\sqrt{g_k^T M_k g_k}}$$

ถ้าหากค่า $\tilde{g}_k$ มีค่ามากกว่า $\sqrt{g_k M_k g_k}$ ให้หยุดการคำนวณทั้งหมด เนื่องจากไม่มีค่า x ใดๆเลยที่สอดคล้องฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ

- *กรณีที่* 2 :$\phi_{\text{con}}(x_k) \leq 0$: นั่นคือจุด x_k สอดคล้องฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ $\phi_{\text{con}}(x)$ ในกรณีนี้เราเรียกรอบการคำนวณนี้ว่ารอบการคำนวณเชิงจุดประสงค์ (Objective iteration) ซึ่งจะต้องคำนวณเกรเดียนท์ย่อย g_k ของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุด x_k ถ้าหาก $g_k = 0$ ให้หยุดการคำนวณเนื่องจากจุด x_k เป็นจุดเหมาะที่สุดแล้ว (แต่ในทางปฏิบัติเรามักไม่สามารถหาจุดดังกล่าวได้พอดี ดังนั้นจึงต้องกำหนดเกณฑ์อย่างหนึ่งเพื่อให้หยุดการคำนวณเมื่อค่า x_k ใกล้กับจุดเหมาะที่สุดจนพอใจแล้ว ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป) จากนั้นคำนวณ

$$\tilde{g}_k = \frac{g_k}{\sqrt{g_k^T M_k g_k}}$$

3. เคลื่อนไปสู่จุดถัดไปในรอบการคำนวณที่ $k+1$ โดยคำนวณค่า x_{k+1}, M_{k+1} ดังนี้

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{M_k \tilde{g}_k}{n+1}\right),$$

$$M_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left(M_k - \frac{2M_k \tilde{g}_k \tilde{g}_k^T M_k}{n+1}\right)$$

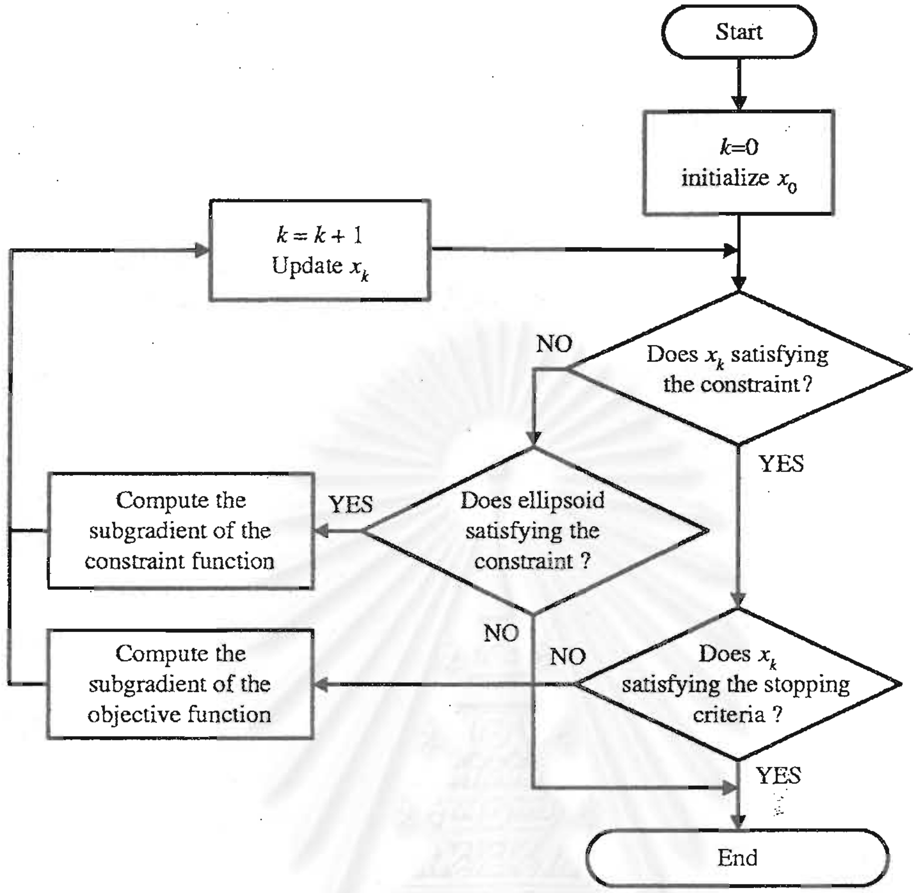
จากนั้นให้ $k = k+1$ แล้ววนกลับไปเริ่มขั้นที่ 1 ใหม่

แผนภูมิสายงานในรูปที่ 5.4 สรุปขั้นตอนพื้นฐานของขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีทั้งหมด

เราเริ่มต้นจากทรงรี $\mathcal{E}_0$ แล้วสร้างลำดับของทรงรีซึ่งมีขนาดเล็กลงเรื่อยๆ ถ้ากำหนดให้ $\mathcal{E}_k$ แทนทรงรีปัจจุบันซึ่งกำหนดโดยเมทริกซ์ M_k มีศูนย์กลางที่ x_k ทรงรีถัดไปจะมีจุดศูนย์กลางที่ x_{k+1} และกำหนดโดยเมทริกซ์ M_{k+1}

ทางเรขาคณิต สูตรของทรงรีที่สร้างขึ้นใหม่ในขั้นตอนที่ 3 นี้ มาจากการแบ่งครึ่งทรงรีเดิมในทิศทางของเกรเดียนท์ย่อยแล้วเลือกเอาครึ่งที่มีจุดเหมาะที่สุดอยู่ จากนั้นจึงสร้างทรงรีใหม่ให้ล้อมรอบครึ่งทรงรีเดิมพอดี กล่าวคือทรงรีใหม่เป็นทรงรีเพียงหนึ่งเดียวที่มีขนาดเล็กที่สุดซึ่งครอบคลุมครึ่งทรงรีเดิมที่มีจุดเหมาะที่สุด $\bar{x}$ เอาไว้ได้

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าในทางปฏิบัติไม่สามารถค้นหาจุดเหมาะที่สุด $\bar{x}$ ได้พอดี นั่นคือไม่สามารถค้นหาจุดซึ่ง $g_k = 0$ ได้ อย่างไรก็ตามเราอาจสร้างเกณฑ์อย่างหนึ่งเพื่อเป็นตัววัดความแม่นยำว่าค่า x_k ในรอบการคำนวณที่ k นี้ เข้าใกล้จุดเหมาะที่สุดมากพอหรือไม่ ค่าเกณฑ์ดังกล่าวเรียกว่าค่าเกณฑ์ยุติ



รูปที่ 5.4: แผนภูมิสายงานของขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี ซึ่งใช้ในการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด ภายในโปรแกรม

(Termination criterion) ค่าเกณฑ์ยุติสำหรับขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีจะอยู่ในเทอมของปริมาตรทรงรีที่รอบการคำนวณที่ k หรือ

$$\sqrt{g_k^T M_k g_k} \leq \epsilon$$

โดยเรากำหนดให้หยุดการคำนวณเมื่อใดก็ตามที่จุด x_k สอดคล้องตามเกณฑ์ดังกล่าว อย่างไรก็ตามสำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราใช้ค่าเกณฑ์ยุติเป็น $U_k - L_k \leq \epsilon$ โดยที่

$$\begin{aligned} U_k &= \min_k(\phi(x_k)), \\ L_k &= \max_k(\phi(x_k) - \sqrt{g_k^T M_k g_k}) \end{aligned}$$

เมื่อ $\phi(x)$ เป็นค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุด x เกณฑ์ในลักษณะนี้มีประสิทธิภาพดีกว่าแบบแรก เนื่องจากค่าเกณฑ์จะลดลงเรื่อยๆ ในรอบการคำนวณทุกๆ รอบ

ในปัจจุบันนี้ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีได้มีการพัฒนาและแก้ไขในหลายลักษณะ เพื่อให้ขั้นตอนวิธีมีการลู่เข้าที่เร็วขึ้น วิธีหนึ่งที่จะใช้ในโครงงานนี้เป็นวิธีที่ตัดแบ่งทรงรีเดิมให้ลึกเข้าไปเกินกว่าครึ่งหนึ่ง ซึ่งจะลดจำนวนรอบของการคำนวณลงได้ ผู้แต่งหลายท่านเรียกเทคนิควิธีนี้ว่าการตัดลึก (Deep cut) Shor และ

Gershovich เป็นกลุ่มแรกที่เสนอให้ใช้เทคนิคการตัดลึกนี้ใน [59] เพื่อเพิ่มอัตราการลู่เข้า (Rate of convergence) เทคนิควิธีการตัดลึกอาจทำได้โดยการแก้ไขการคำนวณในขั้นที่ 3 เฉพาะรอบการคำนวณเชิงเงื่อนไขบังคับเท่านั้น (เฉพาะรอบการคำนวณที่ค่า x_k ละเมิดเงื่อนไขบังคับ) โดยคำนวณค่า α ดังนี้

$$\alpha = \frac{\phi_{\text{con}}(x_k)}{\sqrt{g_k^T M_k g_k}}$$

จากนั้นจึงคำนวณ x_{k+1} และ M_{k+1} โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{(n\alpha+1)M_k\tilde{g}_k}{n+1}\right),$$

$$M_{k+1} = \frac{n^2(1-\alpha^2)}{n^2-1}\left(M_k - \frac{2(n\alpha+1)M_k\tilde{g}_k\tilde{g}_k^T M_k}{(n+1)(\alpha+1)}\right)$$

นอกจากนั้นในการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีคอนเวกซ์นั้นมักมีเงื่อนไขการออกแบบหลายเงื่อนไข ดังนั้นในกรณีที่เงื่อนไขบังคับมีจำนวนมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข หรือเซตที่เป็นไปได้ S_{con} คือ

$$S_{\text{con}} = \{x \in \mathrm{R}^N : \phi_{\text{con,i}}(x) \le 0, \;\; i = 1, \ldots, n_{\text{con}}\}$$

เมื่อ n_{con} เป็นจำนวนเงื่อนไขบังคับทั้งหมดของปัญหา ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับจริง $\phi_{\text{con}}(x)$ ที่ต้องใช้ในขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีจะอยู่ในรูปของค่าสูงสุดของเงื่อนไขบังคับทั้งหมดหรือ

$$\phi_{\text{con}}(x) = \max_i\{\phi_{\text{con,i}}(x)\}, \qquad i = 1, \ldots, n_{\text{con}}$$

จากที่กล่าวไปแล้วว่าข้อจำกัดในการประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีคือ เราจำเป็นต้องเลือกทรงรีเริ่มต้นให้ครอบคลุมจุดเหมาะที่สุด $\bar{x}$ ถึงแม้ว่ายังไม่ทราบค่าจุดเหมาะที่สุดก็ตาม ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดหลายๆ ปัญหานั้นอาจมีข้อจำกัดคร่าวๆ ในตัวแปรการออกแบบ x ซึ่งส่งผลให้สามารถอนุมานทรงรีเริ่มต้นที่ครอบคลุมจุดเหมาะที่สุดได้ อย่างไรก็ตามในปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์นี้ ยังไม่มีวิธีใดที่ช่วยในการเลือกทรงรีเริ่มต้นที่ถูกต้องได้ ดังนั้นจึงต้องใช้การคาดเดาทรงรีเริ่มต้นอย่างมีเหตุผล

เพื่อแก้ปัญหาในการเลือกทรงรีเริ่มต้นดังกล่าว Boyd และ Barratt [4] เลือกใช้ทรงรีเริ่มต้นเป็นทรงกลม (ซึ่งเป็นทรงรีแบบหนึ่ง) ที่มีรัศมีกว้างมากๆ จนแน่ใจว่า*คำตอบต่ำสุดหรือ $\bar{x}$ น่าจะวางตัวอยู่ภายในวงกลมนี้* อย่างไรก็ตามการเลือกทรงรีเริ่มต้นที่มีขนาดใหญ่อาจทำให้ค่าของตัวแปร x_k (ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของทรงรี $\mathcal{E}_k$) ในรอบการคำนวณแรกๆ นั้นมีขนาดใหญ่ ส่งผลให้พารามิเตอร์ของเมทริกซ์ถ่ายโอน Q และระบบวงปิด H_{zw} มีค่าสูงตามไปด้วย ซึ่งอาจทำให้ระบบมีผลตอบที่ไม่เอื้ออำนวยต่อการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะตัวอย่างเช่น มีส่วนพุ่งเกิน (Overshoot) สูงมาก ใช้เวลาในการเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวนานมาก มีอัตราการแกว่งสูงและคาบการแกว่งสั้นมากเทียบกับช่วงเวลาเข้าที่ (Settling-time) ลักษณะเหล่านี้ทำให้การคำนวณดรรชนีสมรรถนะในทางปฏิบัติทำได้ยากเช่นอาจต้องใช้ความละเอียดในการจำลองผลตอบสูง ดังนั้นเราจึงเลี่ยงที่จะใช้ทรงรีเริ่มต้นที่มีขนาดใหญ่ แต่หันมาใช้ทรงรีขนาดไม่ใหญ่มากร่วมกับการหาค่าเหมาะที่สุดหลายๆ ครั้ง

เทคนิคการแก้ปัญหาในการเลือกทรงรีเริ่มต้นที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นดังนี้

1. เลือกทรงรีเริ่มต้น $\mathcal{E}_0^1$ ที่มีขนาดพอสมควรในการหาค่าเหมาะที่สุดครั้งแรก ให้จุดเริ่มต้นของการหาค่าเหมาะที่สุดครั้งแรกเป็น x_0^1

2. สมมติว่าตอนนี้เป็นการหาค่าเหมาะที่สุดครั้งที่ k ค้นหาจุดเหมาะที่สุด $\tilde{x}_k$ จากทรงรีเริ่มต้น $\mathcal{E}_0^k$ และจุดเริ่มต้นการหาค่าเหมาะที่สุด x_0^k

3. เนื่องจากการใช้วิธีเชิงทรงรีจำกัดการค้นหาจุดเหมาะที่สุดอยู่ภายในทรงรีเริ่มต้น $\mathcal{E}_0^k$ เท่านั้น ดังนั้นถ้าหากจุดเหมาะที่สุด $\tilde{x}_k$ วางตัวอยู่ใกล้กับขอบของทรงรีดังกล่าว ก็มีความเป็นไปได้ว่าค่าเหมาะที่สุดที่แท้จริงอาจอยู่ภายนอกทรงรีเริ่มต้นนี้ เพราะฉะนั้นในขั้นตอนนี้เราจึงแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

   - $\tilde{x}_k$ *วางตัวอยู่ใกล้กับขอบของทรงรีเริ่มต้น* $\mathcal{E}_0^k$: หมายความว่าค่าเหมาะที่สุดของปัญหาอาจอยู่นอกทรงรีเริ่มต้นนี้ ดังนั้นเราจะหาค่าเหมาะที่สุดต่อไป โดยเลื่อนจุดเริ่มต้น x_0^{k+1} มาอยู่ที่จุดเหมาะที่สุดที่คำนวณได้ในการหาค่าเหมาะที่สุดที่ผ่านมา นั่นคือให้

   $$x_0^{k+1} = \tilde{x}_k$$

   - $\tilde{x}_k$ *วางตัวอยู่ลึกเข้ามาภายในทรงรีเริ่มต้น* $\mathcal{E}_0^k$: แสดงให้เห็นว่าทรงรีเริ่มต้น $\mathcal{E}_0^k$ ครอบคลุมจุดเหมาะที่สุด $\tilde{x}_k$ ไว้ได้ ดังนั้นจึงหยุดการคำนวณแต่เพียงเท่านี้ และจุดเหมาะที่สุดแท้จริงของปัญหาก็คือ $\tilde{x}_k$ หรือ

   $$\tilde{x} = \tilde{x}_k$$

4. ให้ $k = k+1$ แล้วกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

เทคนิคการแก้ปัญหาทรงรีเริ่มต้นที่ได้นำเสนอนี้จะสร้างลำดับของจุดเหมาะที่สุด $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots$ ในการหาค่าเหมาะที่สุดย่อยๆแต่ละครั้ง และทุกครั้งเราจะพบว่าจุดเหมาะที่สุดเหล่านี้จะเข้าใกล้จุดเหมาะที่สุดแท้จริง $\tilde{x}$ มากขึ้นเรื่อยๆ (เนื่องจากขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีจะใช้เกรเดียนท์ย่อยบ่งชี้ทิศทางที่เข้าใกล้จุดต่ำสุดมากขึ้น) ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\|\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}\| < \|\tilde{x}_k - \tilde{x}\|$$

เมื่อ $\|\cdot\|$ คือนอร์มซึ่งนิยามใน R^n เพราะฉะนั้นการใช้เทคนิคแบ่งปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดออกเป็นครั้งย่อยๆ ที่นำเสนอไปนั้นจะลู่เข้าสู่ค่าเหมาะที่สุดเสมอ

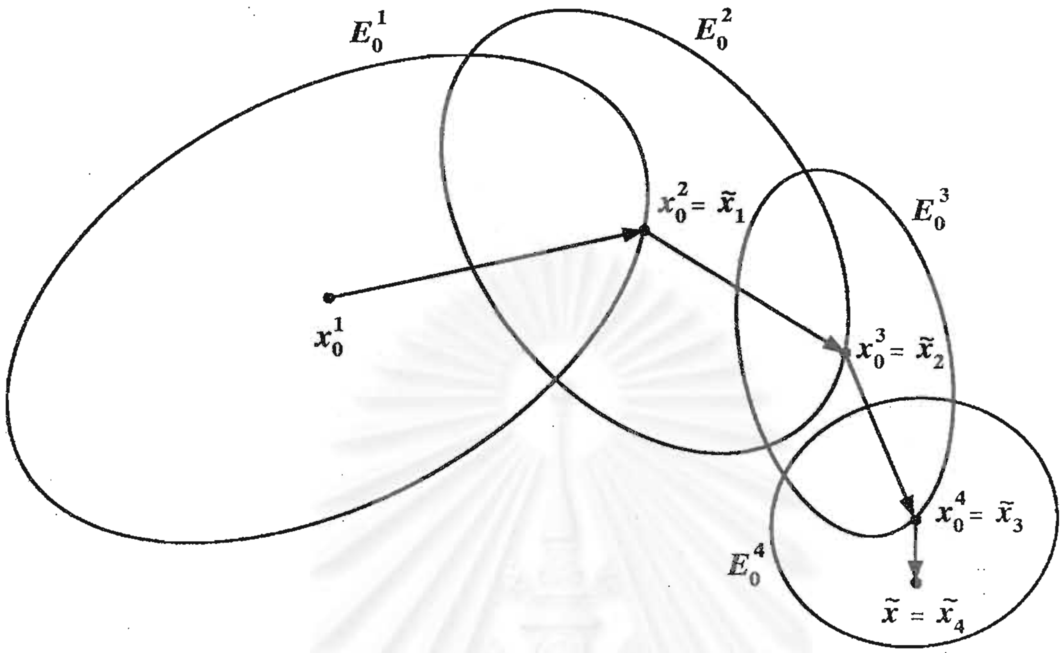
ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราใช้ทรงรีเริ่มต้นของการหาค่าเหมาะที่สุดแต่ละครั้งเป็นทรงกลมที่มีรัศมีพอเหมาะ นั่นคือรัศมีดังกล่าวต้องไม่กว้างจนทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ (ในที่นี้คือฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะ) ในรอบการคำนวณแรกๆมีค่าสูงเกินไปซึ่งจะทำให้การคำนวณใช้เวลานาน และในบางครั้งอาจเกิดปัญหากับการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะด้วยตามที่ได้อธิบายไปแล้ว ส่วนค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่*ไม่มากเกินไป*นั้นจะมีค่าเท่าใดก็ขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ใช้งาน โดยอาจเทียบกับค่าจุดประสงค์ที่จุดเริ่มต้น x_0^k สำหรับเกณฑ์ที่เราใช้คือค่าจุดประสงค์ในรอบการคำนวณแรกๆ ไม่ควรสูงกว่า 10 เท่าของค่าจุดประสงค์ที่จุดเริ่มต้น x_0^k

อันที่จริงแล้วกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการค้นหาจุดเหมาะที่สุดของขั้นตอนวิธีเชิงทรงรีนั้น อาจให้ผลเป็นจุดเหมาะที่สุดซึ่งอยู่ภายนอกทรงรีเริ่มต้นได้ในบางกรณี (ถึงแม้การหาค่าเหมาะที่สุดลู่เข้าสู่จุดเหมาะที่สุด แต่ก็*ไม่จำเป็น*ว่าจุดเหมาะที่สุดดังกล่าวจะต้องอยู่ภายในทรงรีเริ่มต้น) โดยขึ้นอยู่กับทิศทางของเกรเดียนท์ย่อยและรูปร่างทรงรี (M_k) ในแต่ละรอบการคำนวณ อย่างไรก็ตามถ้าหากจุดเหมาะที่สุดอยู่ภายนอกทรงรี เราไม่อาจรับประกันได้ว่าการหาค่าเหมาะที่สุดจะดำเนินไปจนกระทั่งถึงจุดเหมาะที่สุดดังกล่าวได้ทุกกรณีหรือไม่ ในทางตรงกันข้ามเราสามารถรับประกันได้ว่าถ้าจุดเหมาะที่สุดอยู่ภายในทรงรี การหาค่าเหมาะที่สุดจะลู่เข้าสู่จุดเหมาะที่สุดเสมอ (การที่จุดเหมาะที่สุดอยู่ภายในทรงรีเริ่มต้น*เพียงพอ*ที่จะบอกได้ว่าการหาค่าเหมาะที่สุดจะลู่เข้าสู่จุดเหมาะที่สุด)

ดังนั้นเพื่อให้ครอบคลุมทุกๆกรณี เราจึงกล่าวว่า*ควรเลือกทรงรีเริ่มต้นให้ครอบคลุมจุดเหมาะที่สุด* ถึงแม้ว่าในบางกรณีการค้นหาจุดเหมาะที่สุดอาจล้ำออกไปนอกทรงรีเริ่มต้นได้ เพราะฉะนั้นถ้าทรงรีเริ่มต้นในการหาค่าเหมาะที่สุดครั้งใดมิได้ครอบคลุมจุดเหมาะที่สุดแล้ว จุดเหมาะที่สุดที่คำนวณได้ในการหาค่าเหมาะที่สุดครั้งนั้นอาจวางตัวอยู่*นอก*ทรงรีเริ่มต้นได้ ดังนั้นถึงแม้กรณีแรกในขั้นตอนที่ 3 จะกล่าวไว้ว่า $\bar{x}_k$ *วางตัวอยู่ใกล้กับขอบของทรงรีเริ่มต้น* $\mathcal{E}_0^k$ แต่ที่จริงแล้วเราหมายรวมถึงกรณีที่ $\bar{x}_k$ *วางตัวอยู่ไกลออกไปจากขอบของทรงรีเริ่มต้น* $\mathcal{E}_0^k$ ด้วยเช่นกัน

รูปที่ 5.5 แสดงขั้นตอนการหาจุดเหมาะที่สุด 4 ครั้ง แต่ละครั้งเริ่มต้นด้วยทรงรี $\mathcal{E}_0^1$, $\mathcal{E}_0^2$, $\mathcal{E}_0^3$ และ $\mathcal{E}_0^4$ ตามลำดับ จุดเหมาะที่สุดในครั้งหนึ่งๆ จะเป็นจุดเริ่มต้นของการหาค่าเหมาะที่สุดครั้งถัดไป จนกระทั่งถึงจุดเหมาะที่สุดครั้งที่ 4 หรือ $\bar{x}_4$ ซึ่งจุดนี้อยู่ภายในทรงรีเริ่มต้น $\mathcal{E}_0^4$ จึงหยุดการหาค่าเหมาะที่สุด และได้ว่าจุดเหมาะที่สุดของปัญหา $\bar{x}$ จะเท่ากับ $\bar{x}_4$ จากรูปอาจเห็นได้ว่าทรงรีเริ่มต้นของการหาค่าเหมาะที่สุดแต่ละครั้งนั้นมีขนาดเล็กลงเรื่อยๆ ทั้งนี้ตามที่ได้กล่าวไปแล้วว่าทรงรีเริ่มต้นนี้จะมีขนาดเท่าใดนั้นขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ใช้ ดังนั้นทรงรีเริ่มต้นจึงไม่จำเป็นต้องมีขนาดลดลงเรื่อยๆ อย่างไรก็ตามถ้าหากใช้เกณฑ์การเลือกทรงรีเริ่มต้นตามที่อธิบายไปแล้วนั้น พบว่าขนาดของทรงรีมีแนวโน้มที่จะลดลงในการหาค่าเหมาะที่สุดแต่ละครั้ง

ขั้นตอนทั้งหมดของการสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์รวมตั้งแต่การกำหนดรูปแบบปัญหาถึงการแก้ปัญหา อาจสรุปได้ดังแผนภาพในรูปที่ 5.6 สำหรับการโปรแกรมที่ใช้ในการออกแบบด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์นี้ดัดแปลงมาจากงานวิจัยของ Khaisongkram และ Banjerdpongchai [25, 26] ในงานวิจัยดังกล่าวโปรแกรมช่วยออกแบบเชิงคอนเวกซ์ถูกพัฒนาขึ้นพร้อมกับส่วนเชื่อมต่อกับผู้ใช้เชิงกราฟฟิก (Graphical user interface) ฟังก์ชันคอนเวกซ์หลายชนิดได้รวมเอาไว้ในโปรแกรมเช่นกัน ตัวอย่างเช่นส่วนพุ่งเกินสูงสุด (Maximum overshoot) ส่วนพุ่งขาดสูงสุด (Maximum undershoot) ช่วงเวลาเข้าที่ (Setting time) ช่วงเวลาขึ้น (Rise time) และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมเป็นต้น อย่างไรก็ตามเรานำเพียงส่วนของโปรแกรมหลักมาใช้กับฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะเท่านั้น โปรแกรมหลักดังกล่าวได้แก่การกำหนดรูปแบบปัญหาทั้งหมดตั้งแต่การจัดรูประบบควบคุมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน การทำให้เป็นตัวแปรเสริมของระบบวงปิด การประมาณริตซ์ และในส่วนของการแก้ปัญหาอันได้แก่ขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี สำหรับโปรแกรมคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะในบทที่ 4 อาจนำมารวมเข้าไปในโปรแกรมหลักดังกล่าวได้โดยตรงในส่วนของการคำนวณฟังก์ชันและเกรเดียนท์ย่อยของฟังก์ชัน

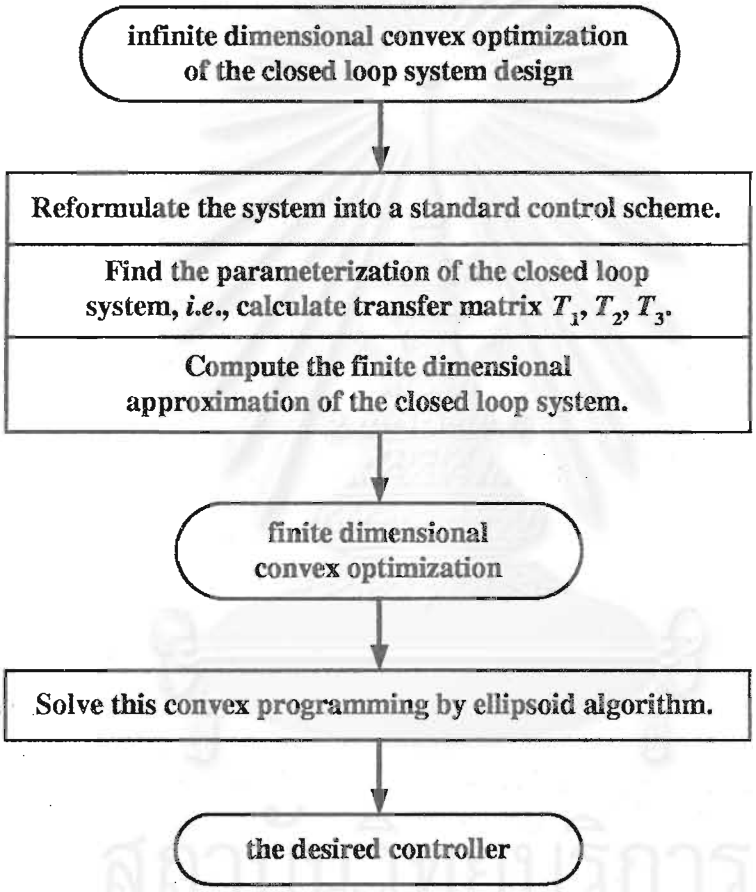


รูปที่ 5.5: ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งแบ่งย่อยเป็นการหาค่าเหมาะที่สุด 4 ครั้งต่อเนื่องกัน ทรงรีเริ่มต้นในแต่ละครั้งคือ $\mathcal{E}_0^1$, $\mathcal{E}_0^2$, $\mathcal{E}_0^3$ และ $\mathcal{E}_0^4$ ส่วนจุดเหมาะที่สุดแต่ละครั้งคือ $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ ซึ่งถูกใช้เป็นจุดเริ่มต้นของการหาค่าเหมาะที่สุดครั้งถัดไป ส่วนจุดเหมาะที่สุดในครั้งสุดท้าย $\tilde{x}_4$ เป็นจุดเหมาะที่สุดที่แท้จริงของปัญหา

5.3 สรุป

ด้วยเหตุว่าดรรชนีสมรรถนะที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความเป็นคอนเวกซ์ ดังนั้นเราจึงเลือกใช้การออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นโดยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ในการสังเคราะห์ตัวควบคุม เนื้อหาในบทนี้ทั้งหมดเกี่ยวกับการออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นด้วยวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ เราได้อธิบายทฤษฎีและหลักการพื้นฐานของการออกแบบตัวควบคุมด้วยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ ตั้งแต่การกำหนดรูปแบบปัญหาเชิงคอนเวกซ์จนถึงการแก้ปัญหาด้วยขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี นอกจากนี้เรายังกล่าวถึงค่าเกรเดียนท์ย่อยของดรรชนีสมรรถนะซึ่งจำเป็นสำหรับการหาคำตอบด้วยวิธีเชิงทรงรีดังกล่าว

อนึ่งวิธีการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์นี้ สามารถใช้คำนวณขีดจำกัดสมรรถนะของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมได้ ขีดจำกัดสมรรถนะนี้นับเป็นข้อมูลที่มีประโยชน์ โดยสามารถใช้เป็นเกณฑ์สำหรับเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวควบคุมที่สังเคราะห์ด้วยวิธีอื่นได้



รูปที่ 5.6: แผนภาพของขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์

บทที่ 6

การสังเคราะห์ระบบควบคุมสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิด

ในบทนี้เรานำเสนอกรณีศึกษาของระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด (Binary distillation column) และแสดงให้เห็นถึงความเหมาะสมของการจำลองการรบกวนแบบสัญญาณที่มีข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ ซึ่งนำไปสู่การใช้ดรรชนีสมรรถนะเป็นเกณฑ์ในการออกแบบ

การออกแบบตัวควบคุมที่ใช้ในบทนี้คือการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์ตามที่ได้นำเสนอในบทที่ผ่านมา ส่วนแบบจำลองของหอกลั่นแยกสารสองชนิดที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นแบบจำลองของ Luyben [34] ซึ่งได้ให้รายละเอียดของแบบจำลองไว้ทั้งหมด นอกจากนั้น Luyben ยังได้ออกแบบตัวควบคุมพีไอแบบแยกศูนย์ (Decentralized PI controller) สำหรับระบบหอกลั่นเอาไว้ด้วย การควบคุมหอกลั่นในปัจจุบันนั้นมีหลายอยู่รูปแบบ ผู้ที่สนใจสามารถค้นคว้าได้ใน [35]

อย่างไรก็ตามวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มิได้เน้นให้ผลที่ได้เป็นตัวควบคุมเฉพาะเจาะจงตัวใดตัวหนึ่ง หากแต่เป็นการคำนวณขีดจำกัดสมรรถนะ (Limits of performance) ของค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอและค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ฐานหอภายใต้ข้อจำกัดของขนาดของสัญญาณควบคุม เราสามารถคำนวณขีดจำกัดสมรรถนะนี้ได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ เนื้อหาของบทนี้เริ่มต้นจากแบบจำลองของหอกลั่นแยกสารสองชนิด ระบบควบคุมหอกลั่น ปัญหาการออกแบบระบบหอกลั่น และผลการออกแบบ

6.1 การกลั่น

การกลั่นคือการแยกของเหลวหรือไอผสมของสารตั้งแต่สองชนิดขึ้นไปออกจากกัน โดยอาศัยความแตกต่างของความสามารถในการกลายเป็นไอของสารแต่ละชนิด สารที่ต้องการจะแยกต้องมีจุดเดือดแตกต่างกันพอสมควร กระบวนการกลั่นนับเป็นกระบวนการแยกสารที่สำคัญในอุตสาหกรรมเคมีและปิโตรเคมีอย่างหนึ่ง เนื่องจากหอกลั่นเป็นองค์ประกอบหลักในโรงงานเคมีและโรงกลั่นน้ำมัน อีกทั้งค่าใช้จ่ายในการลงทุนและการดำเนินการในการกลั่นก็มีมูลค่าสูง ดังนั้นระบบควบคุมการกลั่นหรือการทำงานของหอกลั่นจึงจำเป็นต้องมีประสิทธิภาพและมีความเชื่อถือได้เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และยังเป็นการเพิ่มความปลอดภัยและประหยัดค่าใช้จ่ายอีกด้วย

ความบริสุทธิ์ของสารที่กลั่นได้จะต้องเป็นไปตามที่กำหนดไว้ เพราะถ้าหากสารผลิตภัณฑ์ที่ได้จากการแยกมีความบริสุทธิ์ไม่ตรงตามที่กำหนด ก็จะเป็นสารผลิตภัณฑ์ที่ไม่ได้คุณภาพ โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าหากสารผสมนั้นมีมูลค่าสูงด้วยแล้วยิ่งจำเป็นต้องแยกสารผสมออกจากกันให้ได้ความบริสุทธิ์ตามที่ต้องการ ถ้าหากสารผลิตภัณฑ์ที่แยกได้มีความบริสุทธิ์มากหรือน้อยเกินไปก็จะไม่เป็นผลดี เช่นถ้าสารที่แยกออกมามีความบริสุทธิ์น้อยกว่าที่กำหนดก็จะทำให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่ด้อยคุณภาพ ในทางตรงกันข้ามถ้าความบริสุทธิ์

มากกว่าที่กำหนดก็เป็นการสิ้นเปลืองพลังงานและวัตถุดิบในการกลั่น ดังนั้นจุดประสงค์หลักของการควบคุมการทำงานของหอกลั่นโดยทั่วไปคือ การควบคุมคุณภาพของสารผลิตภัณฑ์ที่ได้จากการกลั่นให้มีความบริสุทธิ์ตามข้อกำหนด

ด้วยลักษณะของหอกลั่นที่เป็นระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง มีผลกระทบระหว่างวงรอบการควบคุม (Interaction) ค่อนข้างสูง มีการรบกวนอันได้แก่การเปลี่ยนแปลง*อัตราการป้อนเข้า* F (Feed rate) ที่กลางหอ และการเปลี่ยนแปลง*ความเข้มข้นของสารที่ป้อนเข้า* x_F (Feed composition) ซึ่งล้วนแล้วแต่มีผลต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์ ทำให้การควบคุมการทำงานของหอกลั่นมีความสลับซับซ้อน การควบคุมการทำงานของหอกลั่นจึงนับเป็นปัญหาที่น่าสนใจและท้าทายมากอย่างหนึ่ง

6.1.1 หลักการพื้นฐานของการกลั่น

*กระบวนการกลั่น*คือกระบวนการแยกสารผสมโดยอาศัยคุณสมบัติทางกายภาพได้แก่ จุดเดือดที่แตกต่างกันของสารต่างชนิดกัน เพื่อให้ได้ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ตามต้องการ เนื่องจากจุดเดือดของสารเอื้ออำนวยต่อการแยกสารผสมให้มีความบริสุทธิ์มากขึ้น จึงมีการประยุกต์ใช้คุณสมบัตินี้และพัฒนาจนมาเป็นหอกลั่นในปัจจุบัน ในที่นี้เราพิจารณาการกลั่นแยกสารสองชนิดนั่นคือสารผสมมีองค์ประกอบอยู่สองส่วน เราเรียกสารองค์ประกอบที่มีความหนาแน่นจำเพาะต่ำกว่าว่าองค์ประกอบ*สารเบา* (Light component) และเรียกสารองค์ประกอบที่มีความหนาแน่นจำเพาะสูงกว่าว่าองค์ประกอบ*สารหนัก* (Heavy component) อนึ่งเมื่อเรากล่าวถึงความเข้มข้นนั่นหมายถึง*ความเข้มข้นของสารเบาในสารผสม* และสารผสมนี้อาจอยู่ในสถานะของเหลวหรือก๊าซก็ได้

หลักการพื้นฐานของการกลั่นเริ่มจากการให้ความร้อนแก่สารผสมที่ฐานหอ สารเบาซึ่งเป็นสารที่มีความหนาแน่นจำเพาะต่ำกว่าย่อมมีจุดเดือดต่ำกว่าสารอื่นในสารผสม ทำให้เดือดเป็นไอร้อนได้ดีกว่าสารหนัก เมื่อสารเบานี้เดือดกลายเป็นไอร้อน ไอร้อนนี้จะลอยขึ้นสู่ชั้นที่อยู่สูงขึ้นไปและถ่ายเทความร้อนให้แก่สารในชั้นบนต่อไป ความร้อนที่มากับไอร้อนนี้จะทำให้สารผสมในชั้นที่สองเดือดและระเหยกลายเป็นไอร้อนแล้วจึงถ่ายเทความร้อนให้ชั้นถัดขึ้นไปอีก เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ นอกจากนั้นถ้าของเหลวที่เป็นสารผสมในชั้นใดมีอุณหภูมิไม่สูงพอที่จะระเหยได้ ของเหลวผสมนั้นก็จะไหลสวนทางกับไอร้อนเป็นสารป้อนกลับภายใน (Internal reflux) ลงสู่ชั้นที่ต่ำกว่าอีกด้วย ทำให้สารผสมในชั้นที่อยู่สูงขึ้นไปมีความบริสุทธิ์ของสารเบามากขึ้น และในทางตรงกันข้ามสารผสมที่ฐานหอก็จะมีความบริสุทธิ์ของสารหนักมากขึ้นเช่นกัน ขนาดของหอ จำนวนชั้นของหอ อุณหภูมิของหอและตัวแปรอื่นๆที่ต้องการควบคุม จะถูกออกแบบให้เหมาะสมกับข้อกำหนดของผลิตภัณฑ์ที่ต้องการกลั่น

พิจารณาที่ฐานหอพบว่าสารที่มีจุดเดือดสูงกว่าจะมีความเข้มข้นเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ถ้าหากต้องการให้เกิดการกลั่นแบบต่อเนื่องนั้นจำเป็นต้องมีการป้อนสารผสมเข้ามาในหอกลั่น ซึ่งมักจะป้อนเข้ามาที่ตำแหน่งตอนกลางของหอ โดยปกติอัตราการป้อนเข้าสารและความเข้มข้นของสารที่ป้อนเข้าจะมีค่าคงที่ แต่ถ้าหากอัตราการป้อนสารและความเข้มข้นของสารที่ป้อนเข้าที่กลางหอนี้เกิดการเปลี่ยนแปลง ก็จะส่งผลกระ

ทบต่อความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ได้ โดยทั่วไปหากเกิดการเปลี่ยนแปลงไม่เกิน 10% อาจถือว่าเป็นการรบกวนหนึ่งของระบบ (ไม่ใช่ความผิดพลาด) ตัวควบคุมที่มีประสิทธิภาพต้องมีความสามารถในการควบคุมความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ให้อยู่รอบ ๆ ค่าที่กำหนดได้ถึงแม้ว่าจะเกิดการรบกวนระบบขึ้น

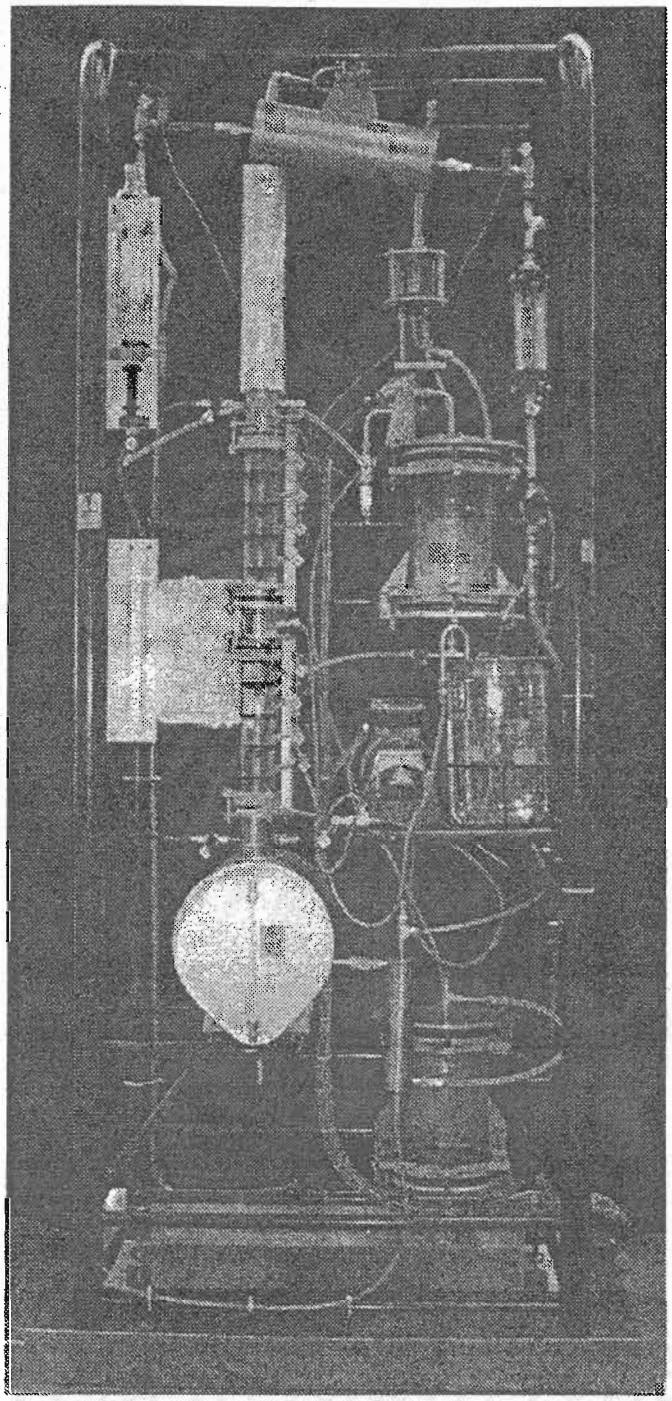
กระบวนการกลั่นมีการพัฒนาขึ้นเพื่อใช้ในอุตสาหกรรมปิโตรเคมี โรงกลั่นน้ำมัน และโรงกลั่นประเภทต่าง ๆ นอกจากหอกลั่นแล้วกระบวนการกลั่นยังต้องอาศัยกระบวนการอื่น ๆ ซึ่งเป็นส่วนประกอบสำคัญในการควบคุมหอกลั่นอีกได้แก่ หม้อต้มซ้ำ เครื่องควบแน่น วาล์วป้อนกลับ เครื่องสูบ และอุปกรณ์การวัดคุมต่าง ๆ ซึ่งจะกล่าวในตอนต่อไป

6.1.2 ส่วนประกอบของหอกลั่นแยกสารสองชนิด

หอกลั่นแยกสารสองชนิดในห้องทดลองทั่วไป มีลักษณะภายนอกคล้ายกับหอกลั่นในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุมดังรูปที่ 6.1 ซึ่งเป็นแบบจำลองของหอกลั่นขนาดใหญ่ (Large scale distillation column) ที่ใช้ในอุตสาหกรรมการกลั่นจริง

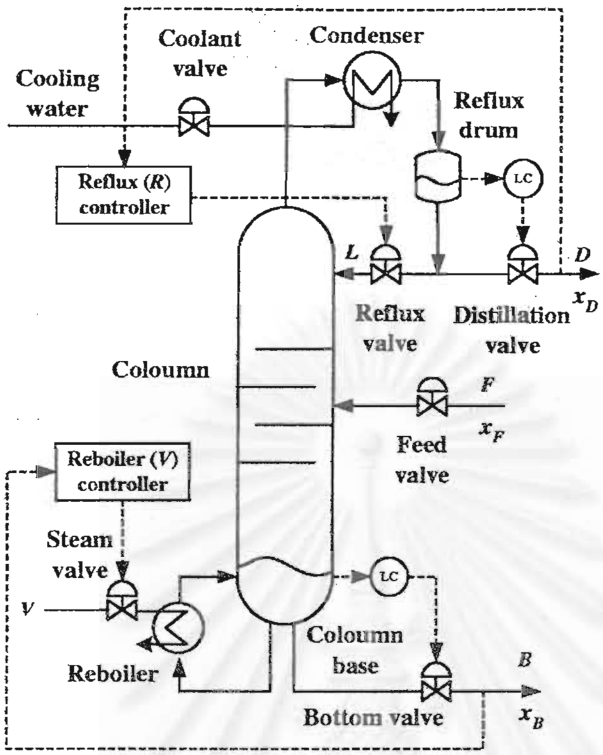
สำหรับแผนภาพหอกลั่นแยกสารสองชนิดแสดงในรูปที่ 6.2 อุปกรณ์เบื้องต้นที่ใช้ในการควบคุมการกลั่นได้แก่

1. ลำตัวของหอ (Column) ประกอบด้วยชั้น (Tray) จำนวนหลายชั้นซึ่งมีการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างไอร้อนและการป้อนกลับภายในหอ
2. เครื่องควบแน่น (Condenser) เป็นอุปกรณ์ซึ่งควบแน่นไอร้อนที่ออกจากหอ (ทางยอดหอ) ให้เป็นของเหลว
3. ดรัมป้อนกลับ (Reflux drum) คือภาชนะรองรับสารที่กลั่นได้เมื่อผ่านการควบแน่นจากเครื่องควบแน่นแล้ว สารนี้ส่วนหนึ่งอาจไหลออกเป็น*ผลิตภัณฑ์ยอดหอ* (Top composition) อีกส่วนจะถูกป้อนกลับเข้าสู่หอทางวาล์วป้อนกลับ (Reflux valve) เพื่อควบคุมความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ อัตราส่วนของสารที่กลั่นได้และสารที่ป้อนกลับเข้าสู่หอนั้นเรียกว่า*สัดส่วนการป้อนกลับ* (Reflux ratio)
4. ฐานหอ (Column base) เป็นบริเวณที่เกิดการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่หอกลั่น และยังเป็นส่วนรองรับสารชั้นสุดท้าย สารที่ฐานหอนี้ส่วนหนึ่งอาจไหลออกเป็น*ผลิตภัณฑ์ฐานหอ* (Bottom composition) อีกส่วนหนึ่งอาจป้อนกลับเข้าสู่หอโดยผ่านทางหม้อต้มซ้ำเพื่อควบคุมความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ดังกล่าว
5. หม้อต้มซ้ำ (Reboiler) คือเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนกับสารที่ฐานหอ มีหน้าที่ให้ความร้อนแก่สารที่ฐานหอ
6. ท่อป้อนสารเข้าสู่หอและระบบป้อนสาร



รูปที่ 6.1: ลักษณะทางกายภาพหอกลั่นแยกสารสองชนิดภายในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7. วาล์วต่างๆ: ทำหน้าที่ควบคุมการไหลของสารในกระบวนการ



รูปที่ 6.2: แผนภาพหอกลั่นแยกสารสองชนิด

6.1.3 โครงสร้างการควบคุมของระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด

จำนวนตัวแปรอิสระของระบบ (Degree of freedom) หรือ DOF คือจำนวนตัวแปรของระบบที่เราต้องควบคุมซึ่งอาจคำนวณได้จาก

DOF = จำนวนตัวแปรกระบวนการทั้งหมด − จำนวนสมการที่เป็นอิสระต่อกัน

หอกลั่นดังตัวอย่างในรูปที่ 6.2 มีจำนวนตัวแปรกระบวนการหรือจำนวนวาล์วที่ต้องควบคุมอยู่ 5 ชนิด วาล์วควบคุมแต่ละชนิดคือ วาล์วผลิตภัณฑ์ยอดหอ (Distillation valve) วาล์วป้อนกลับ (Reflux valve) วาล์วน้ำหล่อเย็นที่เครื่องควบแน่น (Coolant valve) วาล์วผลิตภัณฑ์ฐานหอ (Bottom valve) วาล์วไอน้ำร้อนที่หม้อต้มซ้ำ (Steam valve) คิดเป็นตัวแปรอิสระ 5 ตัวแปร สำหรับวาล์วป้อนสาร (Feed valve) นั้น เราจะไม่ควบคุม เนื่องจากอัตราไหลของวัตถุดิบที่ป้อนเข้ามาจะถูกกำหนดโดยอัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ของหอกลั่น (Production rate) ซึ่งอาจเปลี่ยนแปลงได้ (นั่นหมายถึงการเปลี่ยนแปลงอัตราไหลของสารป้อนเข้านับเป็นการรบกวนหนึ่งของระบบนั่นเอง) นอกจากนี้ยังมีตำแหน่งที่ต้องควบคุมระดับอีก 2 ตำแหน่ง (เหตุผลในการควบคุมระดับจะกล่าวในตอนที่ 6.1.4) ได้แก่ระดับของสารในดรัมป้อนกลับ (ผลิตภัณฑ์ยอดหอ) และระดับสารผลิตภัณฑ์ฐานหอ นอกจากนี้เรามักควบคุมความดันคร่อมหอกลั่นให้ค่อนข้างคงที่ (โดยใช้การควบคุมวาล์วน้ำหล่อเย็นที่เข้าสู่เครื่องควบแน่น) ระบบจึงเหลือตัวแปรอิสระ 2 ตัวแปร (5 − 3 = 2) ดังนั้นตัวแปรที่เราต้องเลือกมาปรับเปลี่ยน (Manipulate) จึงมีทั้งหมด 2

ตัว อย่างไรก็ตามตัวแปรทั้งสองที่เหลือนี้ไม่สามารถควบคุมแยกกันได้เหมือนดังการควบคุมความดันแยกต่างหากหรือการควบคุมระดับแยกต่างหาก ทั้งนี้เนื่องจากตัวแปรที่เหลือสองตัวนี้มีผลกระทบระหว่างวงรอบสูงมาก ด้วยเหตุนี้ระบบควบคุมหอกลั่นพื้นฐานจึงมักพิจารณาเป็นระบบที่มีสัญญาณเข้าสองสัญญาณและสัญญาณออกสองสัญญาณ ตัวแปร 2 ตัวที่ถูกเลือกมานี้จะถูกปรับเปลี่ยนเพื่อนำไปสู่การคุมค่าใดๆอีก 2 ค่า ปัญหาในการเลือกตัวแปรควบคุม (Manipulated variable) เพื่อควบคุมตัวแปรที่ต้องการคุมค่า (Regulated variable) นี้เรียกว่าปัญหาการเลือกโครงสร้างการควบคุม (Control structure selection)

ไม่ว่าเราจะเลือกโครงสร้างการควบคุมอย่างไรหรือจะเลือกปรับเปลี่ยนที่วาล์วใดๆ โดยพื้นฐานแล้วการปรับเปลี่ยนจะมีผลกระทบต่อปริมาณ 2 ปริมาณได้แก่ *การแยกสารป้อนเข้า* (Feed split) และ*การแบ่งส่วนย่อย* (Fractionation) สมดุลปริมาณของสารป้อนเข้าและผลิตภัณฑ์ที่กลั่นได้แสดงให้เห็นว่า ปริมาณของผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอที่กลั่นได้ย่อมต้องเท่ากับปริมาณของวัตถุดิบที่ป้อนเข้าสู่หอ ดังนั้นเมื่อพิจารณาจากสมดุลปริมาณดังกล่าว เราอาจนิยามการแยกสารป้อนเข้าได้จากปริมาณของผลิตภัณฑ์ยอดหอเทียบกับปริมาณของผลิตภัณฑ์ฐานหอ สำหรับการแบ่งส่วนย่อยนั้นหมายถึงปริมาณการแยกสารออกจากกันในแต่ละชั้นของหอกลั่น การแบ่งส่วนย่อยที่พิจารณาโดยรวมตลอดทั้งหอนั้นขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นของหอกลั่น ปริมาณความร้อนที่ป้อนเข้าสู่หอ และความยากในการแยกสารออกจากกัน (เช่น สารผสมสองชนิดที่มีจุดเดือดใกล้เคียงกันย่อมแยกจากกันได้ยาก) การปรับเปลี่ยนการแยกสารป้อนเข้าทำได้โดยการปรับค่าอัตราไหลออกของผลิตภัณฑ์ยอดหอ อัตราไหลออกของผลิตภัณฑ์ฐานหอ หรืออัตราไหลของไอน้ำร้อนที่หม้อต้มซ้ำ (Steam rate) ซึ่งจะให้ผลดังนี้

- เมื่อเพิ่มอัตราไหลออกของผลิตภัณฑ์ยอดหอ ความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่กลั่นได้จะลดลง แต่ความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ฐานหอจะสูงขึ้น
- เมื่อเพิ่มอัตราไหลออกของสารที่ฐานหอ ความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่กลั่นได้จะสูงขึ้น แต่ความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ฐานหอจะลดลง

ส่วนการปรับเปลี่ยนการแบ่งส่วนย่อยทำได้โดยการปรับค่าสัดส่วนการป้อนกลับ โดยถ้าหากเพิ่มค่าสัดส่วนการป้อนกลับให้สูงขึ้น จะทำให้ความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอสูงขึ้นเล็กน้อย

เนื่องจากการแยกสารป้อนเข้าส่งผลกระทบต่อความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ที่กลั่นได้มากกว่าการแบ่งส่วนย่อย [34] ดังนั้นแนวคิดสำคัญในการควบคุมหอกลั่นคือ*เราจำเป็นต้องควบคุมการแยกสารป้อนเข้า*เป็นหลัก ซึ่งจะทำให้ความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์มีค่าสูงทั้งที่ยอดหอและฐานหอ สำหรับการแบ่งส่วนย่อยนั้นอาจใช้ในการปรับละเอียด (Fine tune) ตอนควบคุมหอกลั่นเท่านั้น ดังนั้นเมื่อเราจะเลือกตัวแปรที่ใช้ปรับเปลี่ยนเพื่อควบคุมความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ จึงต้องคำนึงเสมอว่าการปรับเปลี่ยนตัวแปรที่เลือกมานั้นต้องส่งผลต่อการปรับเปลี่ยนของการแยกสารป้อนเข้าเสมอ

6.1.3.1 ตัวแปรควบคุมและตัวแปรที่ต้องการคุมค่า

โครงสร้างของระบบควบคุมหอกลั่นที่นิยมใช้ในภาคอุตสาหกรรมมีหลายแบบด้วยกัน แต่ละแบบมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไป การเลือกโครงสร้างระบบควบคุมหอกลั่นจึงขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายอย่างอาทิเช่น สาร

ผสมที่ต้องการนำมากลั่น ชนิดและลักษณะโครงสร้างของหอกลั่น หรือการรบกวนที่พิจารณา เป็นต้น ตัวแปรควบคุมของระบบหอกลั่นอาจเลือกได้ดังนี้

1. ปรับเปลี่ยนอัตราการป้อนกลับสารที่ยอดหอ L (Reflux rate) และอัตราการต้มซ้ำที่ฐานหอ V (Reboiler rate)

2. ปรับเปลี่ยนอัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ยอดหอ D (Distillation rate) และอัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ฐานหอ B (Bottom rate)

นอกจากนี้ยังสามารถใช้ตัวแปรควบคุมในลักษณะของสัดส่วนของอัตราดังกล่าว เช่นปรับเปลี่ยนค่า $\frac{D}{L+D}$ และอัตราการต้มซ้ำที่ฐานหอ เป็นต้น สำหรับตัวแปรที่ต้องการคุมค่าอาจเลือกได้ดังนี้

1. การคุมค่าความเข้มข้นของสารหนักที่ยอดหอ (Top composition) ซึ่งแทนโดย x_D และความเข้มข้นของสารเบาที่ฐานของหอ (Bottom composition) ซึ่งแทนโดย x_B

2. การคุมค่าอัตราการป้อนกลับที่ยอดหอ (Reflux rate) และควบคุมอุณหภูมิที่ชั้นใดชั้นหนึ่งของหอ

3. การคุมค่าพลังงานความร้อนที่ให้กับหม้อต้มและอุณหภูมิในชั้นที่อยู่ใกล้ยอดหอ

4. การคุมค่าอุณหภูมิที่ส่วนบน (Stripping section) และส่วนล่าง (Rectifying section) ของหอ

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราเลือกคุมค่าความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ยอดหอ และความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ฐานหอ โดยใช้ตัวแปรควบคุมเป็นอัตราการป้อนกลับสารที่ยอดหอและอัตราการต้มซ้ำ[1] โครงสร้างการควบคุมแบบนี้เป็นโครงสร้างควบคุมมาตรฐานในการควบคุมความเข้มข้นยอดหอและฐานหอ ซึ่งเรียกว่าโครงสร้างแบบสมดุลพลังงาน (Energy balance structure) หรืออาจเรียกว่าโครงสร้างการควบคุมแบบแอลวี ($L-V$) โครงสร้างการควบคุมแบบนี้แสดงในรูปที่ 6.2 เหตุที่เลือกใช้โครงสร้างการควบคุมแบบ $L-V$ เพราะโครงสร้างนี้เป็นโครงสร้างที่เข้าใจได้ง่ายไม่ซับซ้อน ระบบมีความไวต่อการรบกวนอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นสารไม่มากเมื่อเทียบกับโครงสร้างแบบอื่นๆ อย่างไรก็ตามโครงสร้างการควบคุมแบบ $L-V$ ยังมีข้อจำกัดอยู่ได้แก่ มีผลกระทบระหว่างวงรอบการควบคุมค่อนข้างสูง และระบบมีความไวต่อการรบกวนอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงอัตราการป้อนเข้าสารค่อนข้างมาก อย่างไรก็ตามในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เรากำหนดให้ค่าความเข้มข้นสารที่ถูกป้อนเข้ามาคงที่ และให้อัตราการป้อนสารเป็นการรบกวนเพียงตัวเดียว นอกจากนี้ยังสมมติว่าสามารถตรวจวัดอัตราการป้อนสารเข้าหอได้ ลักษณะของการรบกวนนี้เราจำลองให้เป็นสัญญาณที่มีข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ ดังที่ได้อธิบายไว้ในตอนที่ 1.1.1 เราจะกล่าวถึงการรบกวนนี้อย่างละเอียดในภายหลัง

โดยสรุปแล้วสัญญาณเข้าของระบบหอกลั่นคือตัวแปรควบคุม 2 ตัว อันได้แก่อัตราการป้อนกลับ L ซึ่งปรับเปลี่ยนที่วาล์วป้อนกลับ และอัตราการต้มซ้ำ V ซึ่งปรับเปลี่ยนที่วาล์วไอน้ำร้อนที่หม้อต้มซ้ำ นอกจากนี้สัญญาณเข้าอีกตัวหนึ่งซึ่งเป็นการรบกวนของระบบคืออัตราการป้อนเข้า F สำหรับสัญญาณออกของระบบ 2 ตัว คือความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ยอดหอ x_D และความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์

[1]อาจใช้ตัวแปรบางตัวที่มีผลกระทบโดยตรงต่ออัตราการเดือด (Boil-up rate) แทนได้

ฐานหอ x_B

6.1.3.2 การควบคุมความดันและการควบคุมระดับ

โดยปกติแล้วในหอกลั่นทั่วไป ระบบควบคุมความดันมักมีผลตอบสนองทันท่วงทีและแม่นยำ จึงอาจพิจารณาให้ความดันของหอกลั่นมีค่าค่อนข้างคงที่ตลอดทั้งหอ แต่กรณีที่ต้องการกลั่นแยกสารที่แยกออกจากกันได้ยากหรือความสามารถในการระเหยต่างกันไม่มาก การลดความดันจะสามารถทำให้แยกสารได้ง่ายขึ้น ถึงกระนั้นก็ควรกระทำอย่างระมัดระวังเนื่องจากการเพิ่มหรือลดความดันอย่างรวดเร็วอาจทำให้ของเหลวท่วมชั้นหรือสารท่วมท่อได้ อนึ่งเนื้อหาในรายงานนี้มิได้ครอบคลุมในส่วนของการควบคุมความดัน แต่สมมติให้ความดันของตลอดทั้งหอกลั่นมีค่าคงที่เท่านั้น

ส่วนตำแหน่งที่ควรมีการควบคุมระดับในกระบวนการกลั่นโดยทั่วไปได้แก่ ระดับของสารในดรัมป้อนกลับและระดับของสารที่ฐานหอ สำหรับโครงสร้างการควบคุมแบบ $L-V$ นั้น การควบคุมระดับจะเป็นดังนี้

1. ระดับของสารในดรัมป้อนกลับจะถูกควบคุมจากอัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ยอดหอ แต่สำหรับกรณีที่ค่าสัดส่วนการป้อนกลับมีค่ามาก กล่าวคือ

   $$\text{สัดส่วนการป้อนกลับ} = \frac{\text{อัตราการป้อนกลับสาร}}{\text{อัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ยอดหอ}} > 5$$

   เราจะควบคุมระดับของสารด้วยการควบคุมสารป้อนกลับที่ยอดหอ (Reflux) โดยอาจใช้เพียงตัวควบคุมสัดส่วนทั่วไป

2. การควบคุมระดับของสารที่ฐานหอกระทำที่อัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ฐานหอ หรืออาจควบคุมโดยพลังงานความร้อนของไอน้ำร้อนที่ให้กับหม้อต้ม นั่นคือถ้าให้ความร้อนค่าสูงขึ้นระดับของสารก็จะลดต่ำลง แต่วิธีการนี้ต้องระมัดระวังมากเพราะการเพิ่มความร้อนให้แก่สารอาจทำให้เกิดผลตอบสนองย้อนกลับ นั่นคือทำให้ความเข้มข้นของสารหนักในผลิตภัณฑ์ยอดหอมีค่าสูงในช่วงแรกที่หอกลั่นเริ่มการทำงาน

อย่างไรก็ตามเนื้อหาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มิได้ครอบคลุมในส่วนของการควบคุมระดับ แต่มีสมมติให้ระดับของเหลวในดรัมป้อนกลับและระดับของเหลวที่ฐานหอมีค่าคงที่ กล่าวคือสมมติให้ระบบควบคุมระดับมีพลวัตที่รวดเร็วมากเทียบกับพลวัตของหอกลั่น

6.1.4 สมการพลวัตของระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้แบบจำลองหอกลั่นของ Luyben [34] ในรูปที่ 6.3 ซึ่งพิจารณาเป็นระบบแยกสารสองชนิด ในการวิเคราะห์เพื่อหาแบบจำลองของหอกลั่นที่จะได้กล่าวต่อไปนี้มีการอ้างถึงสมมติฐานหลายลักษณะ เช่นสมมติฐานเกี่ยวกับคุณสมบัติแบบอุดมคติของหอกลั่น สมมติฐานเหล่านี้มักเป็นประโยชน์ต่อ

การคำนวณหาแบบจำลอง กล่าวคือทำให้การคำนวณไม่ซับซ้อนจนเกินไป แต่บ่อยครั้งที่ข้อสมมติฐานที่ใช้อาจทำให้แบบจำลองที่ได้ไม่สมบูรณ์มากนัก ก่อนอื่นเราสมมติว่าองค์ประกอบของของเหลวในระบบมี 2 ส่วน (Binary mixture) ถึงแม้ในความเป็นจริงอาจมีองค์ประกอบย่อยอื่นๆ รวมอยู่ด้วยก็ตาม กำหนดให้ค่าความสามารถในการกลายเป็นไอสัมพัทธ์ (Relative volatility) ของหอกลั่นมีค่าคงที่ และชั้นแต่ละชั้นมีประสิทธิภาพ 100 % กล่าวคือไอน้ำที่ออกจากชั้นแต่ละชั้นสมดุลกับของเหลวที่อยู่ในชั้นนั้น โดยความสัมพันธ์ของ*สมดุลไอ-ของเหลว* (Vapor-liquid equilibrium) ของสารผสมในรูปอย่างง่ายคือ

$$\bar{y}_n = \frac{\alpha \bar{x}_n}{1 + (\alpha - 1)\bar{x}_n} \tag{6.1}$$

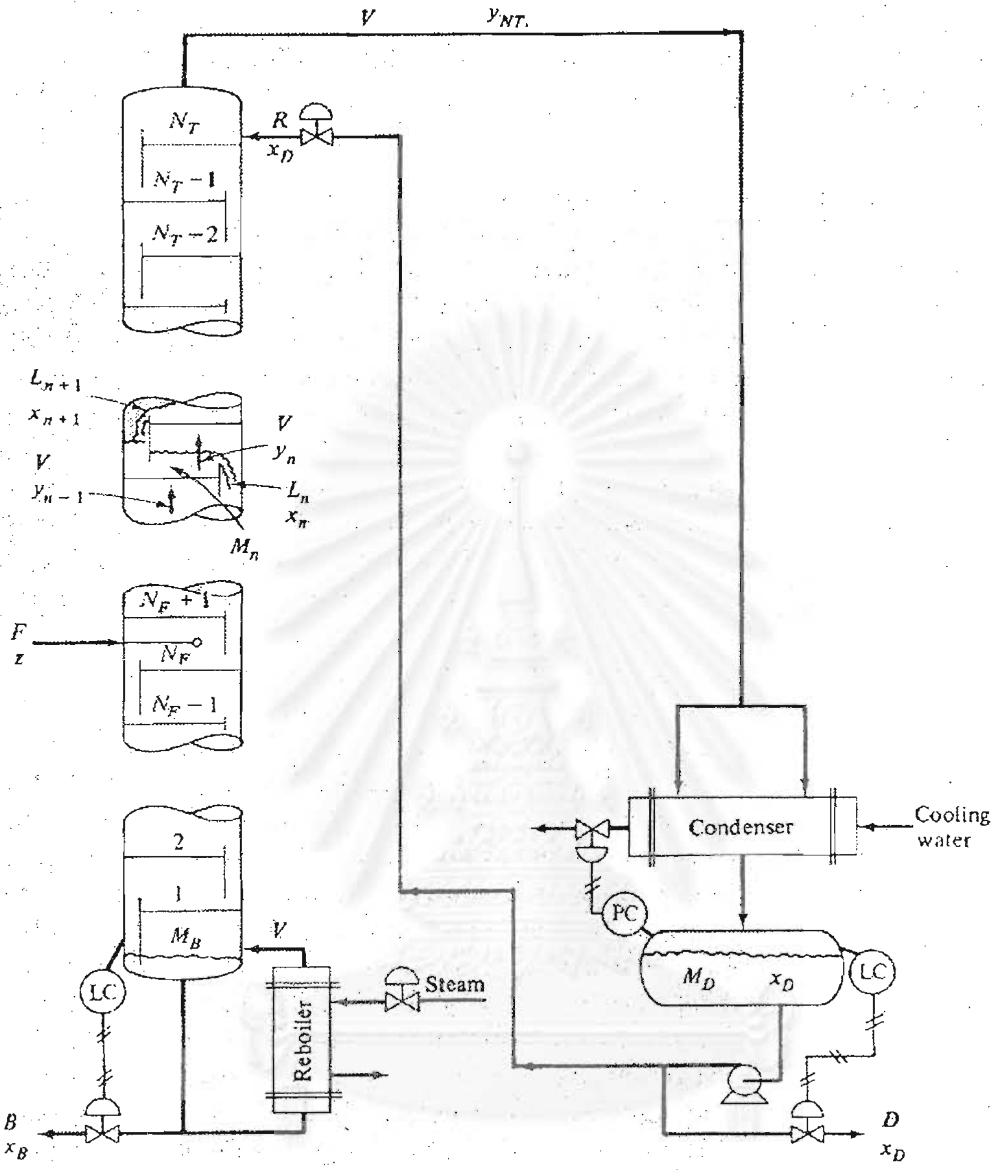
โดยที่

- $\bar{x}_n$ คือความเข้มข้นของสารเบาในสารผสมสถานะของเหลวมีหน่วยเป็นเศษส่วนโมล (Mole fraction) ขององค์ประกอบสารเบา ในที่นี้เราใช้ตัวย่อเป็น mf
- $\bar{y}_n$ คือความเข้มข้นสารเบาในสารผสมสถานะก๊าซมีหน่วยเป็น mf
- α คือค่าความสามารถในการกลายเป็นไอสัมพัทธ์

โดยที่เครื่องหมาย $\overline{(\cdot)}$ หมายถึง*ค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัว* (Initial steady-state value) หรือค่าที่จุดทำงานของตัวแปรนั้นๆ *สภาวะอยู่ตัว*ในที่นี้หมายถึงสภาวะที่เดินโรงกลั่นจนเข้าสู่สมดุลหรือถึงจุดทำงานของระบบแล้ว ไม่ควรสับสนกับสภาวะอยู่ตัวของผลตอบเชิงเวลา

สมมติฐานและข้อกำหนดในการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบหอกลั่นเป็นดังนี้

1. กำหนดให้สารผสมถูกป้อนเข้าในชั้นที่ N_F ด้วยอัตรา F $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ และมีความเข้มข้น x_F mf
2. สมมติให้ไอน้ำจากยอดหอถูกควบแน่นทั้งหมดในเครื่องควบแน่นและไหลผ่านไปยังดรัมป้อนกลับ ซึ่งบรรจุของเหลวจำนวน M_D lb-mol และสมมติว่าของเหลวในดรัมป้อนกลับผสมกันอย่างสมบูรณ์โดยมีความเข้มข้นเท่ากับ x_D mf สำหรับของเหลวในดรัมป้อนกลับนี้ ส่วนหนึ่งจะถูกป้อนกลับไปยังยอดหอด้วยอัตราไหล L $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ และอีกส่วนหนึ่งจะถูกส่งออกไปเป็นผลิตภัณฑ์ยอดหอด้วยอัตราไหล D $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$
3. สมมติว่าเวลาประวิง (Delay time) ในการเคลื่อนที่ของไอจากยอดหอไปจนถึงดรัมป้อนกลับ และเวลาประวิงในการเคลื่อนที่ของของเหลวจากวาล์วป้อนกลับไปยังยอดหอ มีค่าน้อยมากจนอาจละเลยได้ (สมมติฐานนี้ใช้ได้ดีในกรณีที่เป็นหอกลั่นขนาดใหญ่ที่ใช้ในอุตสาหกรรม)
4. กำหนดให้ผลิตภัณฑ์ที่ฐานหอจะถูกส่งออกด้วยอัตราไหล B $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ และมีความเข้มข้น x_B mf
5. กำหนดให้ไอร้อนที่ได้จากการต้มสารในหม้อต้มซ้ำจะลอยขึ้นจากฐานหอไปสู่ชั้นที่สองด้วยอัตราไหล V $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$



รูปที่ 6.3: แผนภาพหอกลั่นแยกสารสองชนิดที่ใช้ในการคำนวณแบบจำลอง

6. สมมติให้ของเหลวในหม้อต้มซ้ำและในฐานหอถูกผสมกันอย่างสมบูรณ์ และมีความเข้มข้น x_B mf จำนวน M_B lb-mol โดยที่ไอร้อนที่กำลังออกจากฐานหอขึ้นสู่ชั้นที่หนึ่งมีความเข้มข้น y_B mf ซึ่งอยู่ในสภาวะสมดุลกับความเข้มข้นของของเหลว x_B mf

7. กำหนดให้หอกลั่นมีทั้งหมด N_T ชั้น และของเหลวในชั้นที่ n มีจำนวน M_n lb-mol สมมติว่าผสมกันอย่างสมบูรณ์และมีความเข้มข้นเท่ากับ x_n mf

8. ยังสมมติว่าไอร้อนเคลื่อนที่ผ่านแต่ละชั้นอยู่ตลอดเวลาโดยไม่ตกค้างอยู่ในชั้นใดๆ ถึงแม้ว่าในความเป็นจริงจะมีปริมาณไอตกค้างอยู่บ้างแต่จำนวนโมลมีน้อยเทียบกับจำนวนโมลของของเหลว เพราะ

ความหนาแน่นของไอน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนาแน่นของของเหลว (สมมติฐานนี้ใช้ไม่ได้กับหอกลั่นความดันสูง) สมมติฐานนี้ตีความได้ว่าอัตราการเคลื่อนที่ของไอน้ำและของเหลวผ่านชั้นแต่ละชั้นมีค่าคงที่ภายในสภาวะอยู่ตัว ซึ่งทำให้อัตราไหลของไอมีค่าเท่ากันตลอดกันตลอดทั้งหอ กล่าวคือ

$$V_1 = V_2 = V_3 = \cdots = V_{N_F} = \cdots = V_{N_T} = V$$

9. กำหนดให้อัตราไหลของของเหลวในชั้นที่ n (อัตราไหลของสารป้อนกลับภายใน) มีค่าเท่ากับ L_n $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ ในทางตรงกันข้ามกับอัตราไหลของไอร้อน อัตราไหลของของเหลวแต่ละชั้นจะมีค่าไม่เท่ากันและขึ้นอยู่กับจำนวนโมลของเหลวในชั้นนั้นๆ ดังนี้

$$M_n = f_{\text{tray}}(L_n)$$

ฟังก์ชัน f_{tray} นี้ อาจคำนวณให้ละเอียดได้โดยใช้ประโยชน์จากสมการไฮดรอลิกในแต่ละชั้น อย่างไรก็ตามเพื่อให้แบบจำลองไม่ซับซ้อนมาก เราจะใช้เพียงความสัมพันธ์อย่างง่ายของสารป้อนกลับภายในและโมลในแต่ละชั้นของหอกลั่นดังต่อไปนี้

$$L_n = \overline{L}_n + \left(\frac{M_n - \overline{M}_n}{\beta}\right) \tag{6.2}$$

เมื่อ $\overline{L}_n$ และ $\overline{M}_n$ คือค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัวของอัตราไหล L_n และโมล M_n ในแต่ละชั้น ส่วน β เป็นค่าคงตัวที่แตกต่างกันไปตามหอกลั่นแต่ละหอกลั่น

10. สมมติให้พลวัตของเครื่องควบแน่นและหม้อต้มซ้ำสามารถละเลยได้ เนื่องจากผลตอบทางพลวัตของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนทั้งสองจะเร็วกว่าผลตอบของหอกลั่นมากนั่นเอง

จากข้อสมมติฐานที่กล่าวมาทั้งหมดเราสามารถเขียนสมการอธิบายระบบไม่เชิงเส้นซึ่งมีรูปแบบเป็นสมการอนุพันธ์แสดงความสัมพันธ์ของปริมาณต่างๆในระบบ ประกอบด้วยสมการความต่อเนื่องโดยรวม (Total continuity) และสมการความต่อเนื่องขององค์ประกอบ (Component continuity) ในที่นี้หมายถึงองค์ประกอบสารเบา สำหรับสมการความต่อเนื่องขององค์ประกอบสารหนักนั้นขึ้นอยู่กับสมการความต่อเนื่องโดยรวมและสมการความต่อเนื่องขององค์ประกอบสารเบา จึงไม่จำเป็นต้องพิจารณา สมการทั้งหมดที่อธิบายพลวัตของหอกลั่นอาจแยกตามส่วนประกอบของหอกลั่นได้ดังนี้

สมการสมดุลมวลที่เครื่องควบแน่น

$$\frac{dM_D}{dt} = V - L - D \tag{6.3}$$

$$\frac{d(M_D x_D)}{dt} = V y_{N_T} - V x_D \tag{6.4}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นบนสุด

$$\frac{dM_{N_T}}{dt} = L - L_{N_T} \tag{6.5}$$

$$\frac{d(M_{N_T} x_{N_T})}{dt} = L x_D - L_{N_T} x_{N_T} + V y_{N_T - 1} - V y_{N_T} \tag{6.6}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นที่ n โดยที่ $n = 2, \ldots, N_F - 1, N_F + 1, \ldots, N_T - 1$

$$\begin{aligned} \frac{dM_n}{dt} &= L_{n+1} - L_n && (6.7) \\ \frac{d(M_n x_n)}{dt} &= L_{n+1}x_{n+1} - L_n x_n + Vy_{n-1} - Vy_n && (6.8) \end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นซึ่งมีการป้อนวัตถุดิบ

$$\begin{aligned} \frac{dM_{N_F}}{dt} &= L_{N_F+1} - L_{N_F} + F && (6.9) \\ \frac{d(M_{N_F} x_{N_F})}{dt} &= L_{N_F+1}x_{N_F+1} - L_{N_F} x_{N_F} + Vy_{N_F-1} - Vy_{N_F} + Fx_F && (6.10) \end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นแรก (ฐานหอ)

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= L_2 - L_1 && (6.11) \\ \frac{d(M_1 x_1)}{dt} &= L_2 x_2 - L_1 x_1 + Vy_B - Vy_1 && (6.12) \end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่หม้อต้มซ้ำ

$$\begin{aligned} \frac{dM_B}{dt} &= L_1 - V - B && (6.13) \\ \frac{d(M_B x_B)}{dt} &= L_1 x_1 - Vy_B - Bx_B && (6.14) \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ยอดหอกับโมลของสารในดรัมป้อนกลับ และความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการกลั่นผลิตภัณฑ์ฐานหอกับโมลของสารที่ฐานหอ

$$\begin{aligned} D &= f_D(M_D) && (6.15) \\ B &= f_B(M_B) && (6.16) \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตามเพื่อให้ง่ายต่อการควบคุมระบบหอกลั่นโดยรวมเราจึงควบคุมให้ M_D และ M_B มีค่าคงที่โดยใช้การควบคุมระดับที่ดรัมป้อนกลับและที่ฐานหอ ดังนั้นสมการข้างต้นอาจแทนด้วย

$$\begin{aligned} M_D &= \text{ค่าคงที่} && (6.17) \\ M_B &= \text{ค่าคงที่} && (6.18) \end{aligned}$$

นั่นคือฟังก์ชัน f_D (ฟังก์ชัน f_B) ทำให้ปริมาณ M_D (ปริมาณ M_B) มีค่าคงที่ ไม่ว่าอัตราไหล D (อัตราไหล B) จะเปลี่ยนไปอย่างไร ฟังก์ชัน f_D (ฟังก์ชัน f_B) นี้ ที่จริงแล้วก็คือความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของระบบควบคุมระดับที่ดรัมป้อนกลับ (ระบบควบคุมระดับที่ฐานหอ) นั่นเอง

ความสัมพันธ์ของสมดุลไอ-ของเหลวของสารผสม และความสัมพันธ์ระหว่างสารป้อนกลับภายในและโมลในแต่ละชั้นของหอกลั่นเป็นดังสมการ (6.1) และสมการ (6.2) ตามลำดับ

6.1.5 สมการพลวัตของระบบหอกลั่นที่ประมาณเป็นเชิงเส้น

เนื่องจากหอกลั่นเป็นระบบไม่เชิงเส้น เราจึงต้องประมาณให้เป็นเชิงเส้นที่จุดทำงานหนึ่งๆก่อน จึงจะใช้กับการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์ได้ โดยใช้ชุดสมการไม่เชิงเส้นซึ่งให้ไว้ในตอนที่ผ่านมา ทั้งนี้เมื่อเราพิจารณาตัวแปร a ใดๆในระบบ ถ้าให้ $\bar{a}$ เป็นค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัวของ a จะได้ว่า

$$a = \bar{a} + \delta a \tag{6.19}$$

เมื่อ δa คือตัวแปรส่วนเพิ่ม (Incremental variable) ของ a ตัวแปรส่วนเพิ่ม δa นี้ เป็นตัวแปรที่จะปรากฏในชุดสมการที่ทำให้เป็นเชิงเส้น เนื่องจากการทำให้เป็นเชิงเส้นจะพิจารณาค่าเบี่ยงเบนของตัวแปรหนึ่งๆ จากค่าที่จุดสมดุลหรือค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัว ชุดสมการพลวัตที่ประมาณเป็นเชิงเส้นแล้วเป็นดังนี้

สมการสมดุลมวลที่เครื่องควบแน่น

$$\begin{aligned}
\delta V &= \delta L + \delta D \\
\overline{M}_D\left(\frac{d\delta x_D}{dt}\right) &= \overline{V}K_{N_T}\delta x_{N_T} - \overline{V}\delta x_D + (\overline{y}_{N_T} - \overline{x}_D)\delta V
\end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่หม้อต้มซ้ำ

$$\begin{aligned}
\delta V &= \delta L_1 + \delta B \\
\overline{M}_B\left(\frac{d\delta x_B}{dt}\right) &= \overline{L}_1\delta x_1 - (\overline{V}K_B + \overline{B})\delta x_B + \overline{x}_1\delta L_1 - \overline{y}_B\delta V
\end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นบนสุด

$$\begin{aligned}
\beta\left(\frac{d\delta L_{N_T}}{dt}\right) &= \delta L - \delta L_{N_T} \\
\overline{M}_{N_T}\left(\frac{d\delta x_{N_T}}{dt}\right) &= \overline{L}\delta x_D - (\overline{V}K_{N_T} + \overline{L}_{N_T})\delta x_{N_T} + \overline{V}K_{N_T-1}\delta x_{N_T-1} + (\overline{x}_D - \overline{x}_{N_T})\delta L \\
&\quad + (\overline{y}_{N_T-1} - \overline{y}_{N_T})\delta V
\end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นที่ n โดยที่ $n = 2, \ldots, N_F - 1, N_F + 1, \ldots, N_T - 1$

$$\begin{aligned}
\beta\left(\frac{d\delta L_n}{dt}\right) &= \delta L_{n+1} - \delta L_n \\
\overline{M}_n\left(\frac{d\delta x_n}{dt}\right) &= \overline{L}_{n+1}\delta x_{n+1} - (\overline{V}K_n + \overline{L}_n)\delta x_n + \overline{V}K_{n-1}\delta x_{n-1} + (\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n)\delta L_{n+1} \\
&\quad + (\overline{y}_{n-1} - \overline{y}_n)\delta V
\end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นซึ่งมีการป้อนวัตถุดิบ

$$\begin{aligned}
\beta\left(\frac{d\delta L_{N_F}}{dt}\right) &= \delta L_{N_F+1} - \delta L_{N_F} + \delta F \\
\overline{M}_n\left(\frac{d\delta x_{N_F}}{dt}\right) &= \overline{L}_{N_F+1}\delta x_{N_F+1} - (\overline{V}K_{N_F} + \overline{L}_{N_F})\delta x_{N_F} + \overline{V}K_{N_F-1}\delta x_{N_F-1} \\
&\quad + (\overline{x}_{N_F+1} - \overline{x}_{N_F})\delta L_{N_F+1} + (\overline{y}_{N_F-1} - \overline{y}_{N_F})\delta V + (\overline{x}_F - 1)\delta F + \overline{F}\delta x_F
\end{aligned}$$

สมการสมดุลมวลที่ชั้นแรก (ฐานหอ)

$$
\begin{aligned}
\beta\left(\frac{d\delta L_1}{dt}\right) &= \delta L_2 + \delta L_1 \\
\overline{M}_1\left(\frac{d\delta x_1}{dt}\right) &= \overline{L}_2\delta x_2 - (\overline{V}K_1 + \overline{L}_1)\delta x_1 + \overline{V}K_B\delta x_B + (\overline{x}_2 - \overline{x}_1)\delta L_2 + (\overline{y}_B - \overline{y}_1)\delta V
\end{aligned}
$$

โดยค่า K_n ของชั้นที่ n และค่า K_B ที่ฐานหอเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
K_n &= \frac{\alpha}{(1+(\alpha-1)\overline{x}_n)^2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots,N_T \\
K_B &= \frac{\alpha}{(1+(\alpha-1)\overline{x}_B)^2}
\end{aligned}
$$

เราสรุปตัวแปรทั้งหมดได้ดังนี้

M_D = ปริมาณของเหลวในเครื่องป้อนเวียนรอบ

M_B = ปริมาณของเหลวในฐานหอกลั่น

M_n = ปริมาณของเหลวในชั้นที่ n

x_n = ความเข้มข้นของสารผสมในสถานะของเหลวในชั้นที่ n

y_n = ความเข้มข้นของสารผสมในสถานะก๊าซในชั้นที่ n

L_n = อัตราไหลของของเหลวในชั้นที่ n

D = อัตราไหลของสารผลิตภัณฑ์ยอดหอ

B = อัตราไหลของสารผลิตภัณฑ์ฐานหอ

V = อัตราการต้มซ้ำ

L = อัตราการป้อนกลับสารที่ยอดหอ

F = อัตราการป้อนสารที่กลางหอ

x_F = ความเข้มข้นของสารที่ป้อนเข้ากลางหอ

x_D = ความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ยอดหอ

x_B = ความเข้มข้นของสารผลิตภัณฑ์ฐานหอ

α = ค่าความสามารถในการกลายเป็นไอสัมพัทธ์

β = ค่าพารามิเตอร์ในความสัมพันธ์ระหว่างสารป้อนกลับและโมลในแต่ละชั้นของหอกลั่น

ค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัวและค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เป็นดังตารางที่ 6.1 ซึ่งอ้างอิงมาจาก Perry's chemical engineers' handbook [60]

ตารางที่ 6.1: ค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัวและพารามิเตอร์ต่างๆ ของหอกลั่นแยกสารสองชนิด

ค่าคงที่		ความเข้มข้นของของเหลวในแต่ละชั้น
$\overline{M}_D = 100$	lb-mol	$\overline{x}_D = 0.98000$
$\overline{M}_B = 100$	lb-mol	$\overline{x}_{20} = 0.96079$
$\alpha = 2$		$\overline{x}_{19} = 0.93458$
$\beta = 0.1$	min	$\overline{x}_{18} = 0.89995$
$N_T = 20$	ชั้นที่	$\overline{x}_{17} = 0.85603$
$N_F = 10$	ชั้นที่	$\overline{x}_{16} = 0.80319$
ค่าที่แต่ละชั้น		$\overline{x}_{15} = 0.74345$
$\overline{L}_n = 128.01; \quad n = 11, \ldots, 20$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_{14} = 0.68052$
$= 228.01, \quad n = 1, \ldots, 10$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_{13} = 0.61896$
$\overline{M}_n = 10$	lb-mol	$\overline{x}_{12} = 0.56295$
ค่าปรับตั้ง		$\overline{x}_{11} = 0.51526$
$x_D^{\text{set}} = 0.98$		$\overline{x}_{10} = 0.47688$
$x_B^{\text{set}} = 0.02$		$\overline{x}_9 = 0.43391$
ค่าจากภายนอก		$\overline{x}_8 = 0.37948$
$\overline{F} = 100$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_7 = 0.31618$
$\overline{x}_F = 0.5$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_6 = 0.24951$
ค่าอื่นๆ		$\overline{x}_5 = 0.18622$
$\overline{D} = 50$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_4 = 0.13180$
$\overline{B} = 50$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_3 = 0.08885$
$\overline{V} = 178.01$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_2 = 0.05719$
$\overline{L} = 128.01$	$\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$	$\overline{x}_1 = 0.03500$
		$\overline{x}_B = 0.02000$

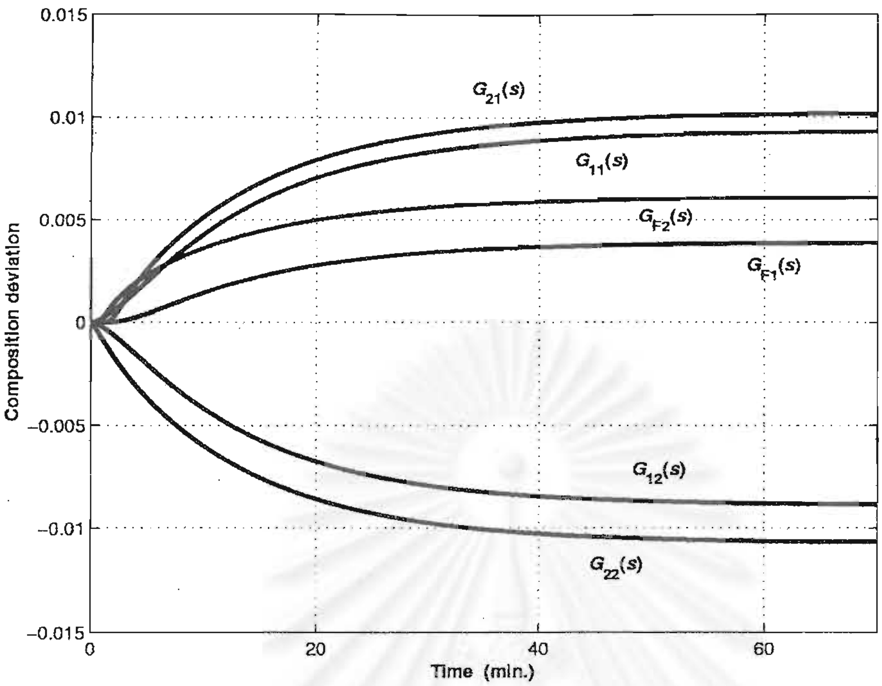
6.2 การวิเคราะห์ระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด

ในตอนที่ 6.1.3 เราได้อธิบายถึงโครงสร้างการควบคุม $L - V$ แล้ว โครงสร้างการควบคุมดังกล่าวอาจเขียนเป็นแบบจำลองเชิงเส้นในสภาวะอยู่ตัว (Steady state model) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \delta x_D \\ \delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{F1}(s) \\ G_{F2}(s) \end{bmatrix} \delta F \tag{6.20}$$

พึงระลึกว่าสภาวะอยู่ตัวในที่นี้หมายถึงสภาวะของระบบหอกลั่น ณ จุดทำงาน เรากำหนดให้ $G(s)$ แทนเมทริกซ์ถ่ายโอนจากตัวแปรควบคุมหรือสัญญาณควบคุม δL และ δV ไปยังค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้น δx_D และ δx_B หรือสัญญาณออก และกำหนดให้ $G_F(s)$ แทนเมทริกซ์ถ่ายโอนจากการรบกวน δF ไปยังสัญญาณออก กล่าวคือ

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}, \qquad G_F(s) = \begin{bmatrix} G_{F1}(s) \\ G_{F2}(s) \end{bmatrix} \tag{6.21}$$



รูปที่ 6.4: ผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด

กำหนดให้เวกเตอร์สัญญาณควบคุมแทนด้วย u นั่นคือ

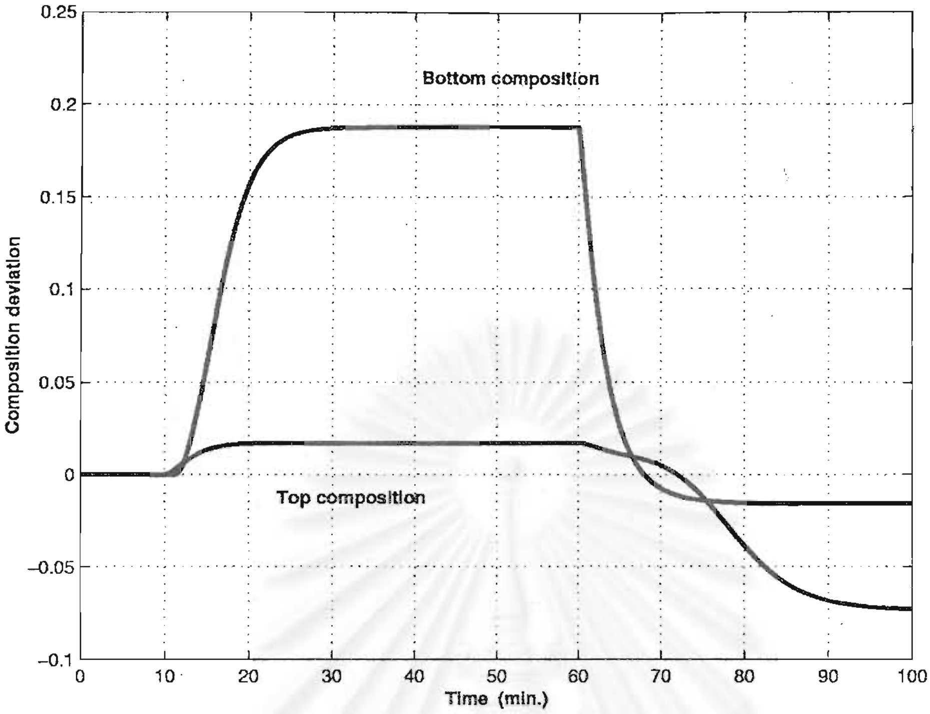
$$u = \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta V \end{bmatrix}$$

และกำหนดให้การรบกวนแทนด้วย w ซึ่งในที่นี้ได้ว่า $w = \delta F$ สุดท้ายกำหนดให้เวกเตอร์สัญญาณออกแทนด้วย v กล่าวคือ

$$v = \begin{bmatrix} \delta x_D \\ \delta x_B \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเมทริกซ์ถ่ายโอน $G(s)$ และ $G_F(s)$ นั้น คำนวณได้จากชุดสมการพลวัตของหอกลั่นที่ทำให้เป็นเชิงเส้นในตอนที่ 6.1.5 โดยใช้ค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัวตามตารางที่ 6.1 เราพบว่าขั้วของระบบทั้งสองมีส่วนจริงน้อยกว่าศูนย์ดังนั้นระบบจึงมีเสถียรภาพ ผลตอบสนองสัญญาณขั้นของฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณเข้าแต่ละตัวไปยังสัญญาณออกแต่ละตัวเป็นดังรูปที่ 6.4

ต่อไปพิจารณาผลกระทบระหว่างวงรอบ โดยให้ขนาดของสัญญาณควบคุมมีค่าเท่ากับ 10 % ของค่าที่สภาวะอยู่ตัว นั่นคือค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนกลับที่ยอดหอมีค่าเท่ากับ 12.7 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ ที่เวลา 10 นาที และค่าเบี่ยงเบนของอัตราการต้มซ้ำที่ฐานหอมีค่าเท่ากับ 18.2 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ ที่เวลา 60 นาที แล้วดูผลที่เกิดขึ้นกับค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอและผลิตภัณฑ์ฐานหอ เมื่อจำลองระบบแล้วเราได้ผลดังรูปที่ 6.5 สังเกตว่าผลกระทบของสัญญาณเข้าที่หนึ่ง (ค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนกลับยอดหอ) ที่มีต่อสัญญาณออกที่สอง (ค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอ) มีค่าสูงซึ่งอาจเป็นอุปสรรคในการออกแบบตัวควบคุมให้กับระบบหอกลั่นต่อไป



รูปที่ 6.5: ผลกระทบระหว่างวงรอบสองวงรอบของระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด

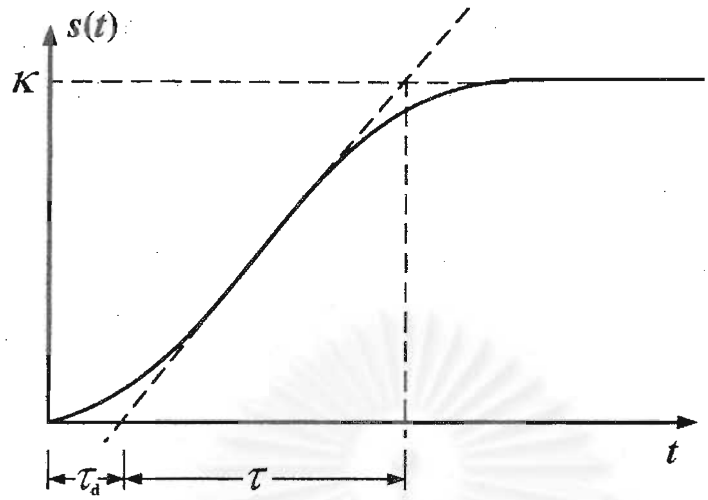
6.2.1 การประมาณระบบหอกลั่นให้มีอันดับต่ำ

การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์นั้นจำเป็นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบหอกลั่น นอกจากนี้ตัวควบคุมที่ได้ยังมีอันดับอย่างน้อยเท่ากับระบบที่ต้องการควบคุมอีกด้วย ดังนั้นอันดับของระบบที่ต้องการควบคุมหรือในที่นี้คือระบบหอกลั่น จึงมีผลอย่างมากต่อความซับซ้อนของปัญหาการออกแบบตัวควบคุม ซึ่งนำไปสู่ปัญหาและความยุ่งยากในการคำนวณด้วยเครื่องคำนวณเช่น ต้องใช้ความละเอียดสูง ใช้เวลาในการคำนวณมาก หรือบางครั้งอาจไม่สามารถคำนวณได้เลย

เมื่อพิจารณาระบบหอกลั่นที่ทำให้เป็นเชิงเส้นแล้วซึ่งแสดงไว้ในตอนที่ 6.1.5 พบว่าระบบหอกลั่นนั้นเป็นระบบที่มีอันดับเท่ากับ 42 ซึ่งเป็นอันดับที่ค่อนข้างสูง จึงจำเป็นต้องลดอันดับให้ต่ำลงก่อนการออกแบบตัวควบคุม นอกจากนี้เรายังพบว่าหอกลั่นมีขั้วเด่น (Dominant pole) หรือขั้วที่อยู่ใกล้แกนจินตภาพมากที่สุดอยู่หนึ่งขั้ว มีค่าเท่ากับ -0.0786 ซึ่งมีขนาดต่ำกว่าขั้วอื่นๆ หลายเท่า (ตั้งแต่ $6 \sim 1000$ เท่า) ทำให้ผลตอบจากขั้วเด่นนี้ใกล้เคียงกับผลตอบของระบบมาก ดังนั้นจึงเป็นการสมควรที่จะประมาณระบบหอกลั่นให้เป็นอันดับต่ำก่อน โดยเราจะประมาณฟังก์ชันถ่ายโอน $G_{11}(s)$, $G_{21}(s)$, $G_{12}(s)$, $G_{22}(s)$, $G_{F1}(s)$, $G_{F2}(s)$ ทั้ง 6 ฟังก์ชัน ให้เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับหนึ่งในรูปแบบมาตรฐานที่ใช้กันทั่วไปดังต่อไปนี้

$$\frac{\kappa e^{-\tau_d s}}{\tau s + 1} \tag{6.22}$$

โดยที่



รูปที่ 6.6: ลักษณะของผลตอบฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับหนึ่งแบบมีเวลาประวิง

- τ_d คือค่าประมาณเวลาประวิงระบบ
- τ คือค่าประมาณของค่าคงตัวเวลาของระบบ
- κ คืออัตราขยายกระแสของระบบ

ค่าพารามิเตอร์เหล่านี้คำนวณได้จากผลตอบสนองสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วยของระบบ ($s(t)$) ดังแสดงในรูปที่ 6.6 สังเกตว่า τ และ τ_d นั้นเป็นเพียงค่าประมาณ เพราะระบบจริงกับระบบที่ประมาณได้อาจมีค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวไม่เท่ากัน แต่ค่าอัตราขยายไฟตรงหรือ κ นั้นเป็นค่าที่แท้จริงซึ่งอาจคำนวณได้จากผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบโดยไม่ต้องประมาณ

จากขั้นตอนการคำนวณแบบจำลองของหอกลั่นนั้น ได้มีการละเลยเวลาประวิงในการเคลื่อนที่ของไอจากยอดหอไปจนถึงดรัมป้อนกลับ และเวลาประวิงในการเคลื่อนที่ของของเหลวจากวาล์วป้อนกลับไปยังยอดหอ ทั้งนี้เนื่องจากเวลาประวิงดังกล่าวมีค่าน้อยมากเทียบกับค่าคงตัวเวลาของระบบหอกลั่น แต่ในการลดอันดับแบบจำลองนี้ เราจำเป็นต้องใส่ค่าประมาณเวลาประวิงเข้าไปในระบบที่ลดอันดับ เพื่อให้การประมาณเป็นอันดับต่ำมีความแม่นยำขึ้น

ในที่นี้ค่า τ ที่ใช้เป็นค่าเดียวกันทั้งหมดสำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งหก อย่างไรก็ตามเราไม่ได้คำนวณค่า τ จากรูปกราฟผลตอบสนองสัญญาณขั้น แต่จะคำนวณจาก $\tau = \frac{-1}{p_{\mathrm{dom}}}$ เมื่อ p_{dom} คือขั้วเด่นของระบบ เราพบว่าการใช้ค่า τ จากขั้วเด่นนี้ทำให้ระบบที่ประมาณได้มีผลตอบสนองสัญญาณขั้นใกล้เคียงกว่าการประมาณโดยคำนวณค่า τ จากรูปกราฟผลตอบ เนื่องจากขั้วเด่นของระบบหอกลั่นมีค่าเท่ากับ -0.0786 เพราะฉะนั้นจึงได้ว่า $\tau = 12.728$ ส่วนค่าประมาณเวลาประวิงและอัตราขยายกระแสตรงของระบบทั้งหก อาจหาได้จากผลตอบสนองสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วยของฟังก์ชันถ่ายโอนแต่ละระบบตามรูปที่ 6.4 ค่าประมาณที่ได้เป็นดังตารางที่ 6.2 สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนโดยประมาณเป็นดังต่อไปนี้

ตารางที่ 6.2: ค่าประมาณเวลาประวิงและอัตราขยายกระแสตรงของฟังก์ชันถ่ายโอน $G_{11}(s)$, $G_{21}(s)$, $G_{12}(s)$, $G_{22}(s)$, $G_{F1}(s)$, $G_{F2}(s)$ ซึ่งเป็นส่วนประกอบของเมทริกซ์ถ่ายโอน $G(s)$ และ $G_F(s)$

ฟังก์ชันถ่ายโอน	ค่าประมาณเวลาประวิง	อัตราขยายกระแสตรง
$G_{11}(s)$	2.2 min	9.4×10^{-3}
$G_{21}(s)$	1.0 min	1.02×10^{-2}
$G_{12}(s)$	2.2 min	-8.9×10^{-3}
$G_{22}(s)$	0.0 min	-1.07×10^{-2}
$G_{F1}(s)$	4.2 min	3.9×10^{-3}
$G_{F2}(s)$	0.0 min	6.1×10^{-3}

$$
\begin{aligned}
G_{11}(s) &= \frac{9.4 \times 10^{-3}e^{-2.2s}}{12.72s+1} & G_{21}(s) &= \frac{1.02 \times 10^{-2}e^{-1s}}{12.72s+1} \\
G_{12}(s) &= \frac{-8.9 \times 10^{-3}e^{-2.2s}}{12.72s+1} & G_{22}(s) &= \frac{-1.07 \times 10^{-2}}{12.72s+1} \\
G_{F1}(s) &= \frac{3.9 \times 10^{-3}e^{-4.2s}}{12.72s+1} & G_{F2}(s) &= \frac{6.1 \times 10^{-3}}{12.72s+1}
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

โปรดสังเกตว่าเรายังคงใช้สัญกรณ์ชุดเดิมกับระบบที่ประมาณเป็นอันดับต่ำแล้ว เพื่อไม่ให้เป็นการใช้สัญกรณ์ฟุ่มเฟือย เนื่องจากยังต้องมีการปรับเปลี่ยนระบบในภายหน้าอีก ขอให้ผู้อ่านสังเกตเองว่าระบบ $G(s)$ และ $G_F(s)$ ที่อ้างถึงในปัจจุบันมีลักษณะอย่างไร

ฟังก์ชันถ่ายโอนบางตัวในสมการ (6.23) นี้มีพจน์ของเวลาประวิงอยู่ทำให้เป็นระบบไม่ตรรกยะ (Non-rational system) ซึ่งไม่สามารถจัดการด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ได้ ดังนั้นเราจึงต้องประมาณเวลาประวิงของระบบด้วยการประมาณพาเดอันดับที่สอง (2nd order Padé approximation) ซึ่งเพียงพอที่จะประมาณให้รูปร่างของผลตอบใกล้เคียงกับผลตอบของระบบจริง ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ประมาณด้วยพาเดอันดับสองแล้ว

เป็นต่อไปนี้

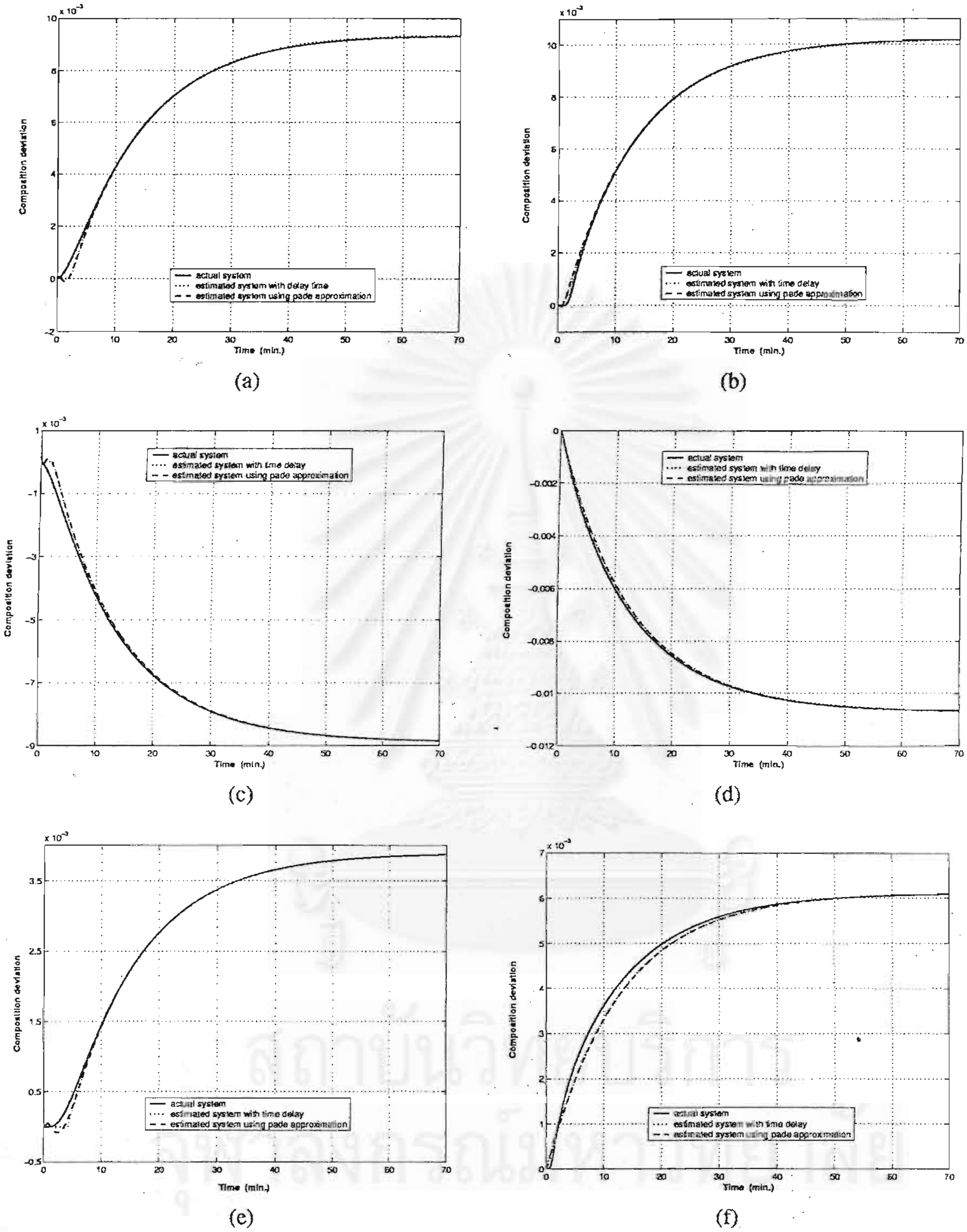
$$
\begin{aligned}
G_{11}(s) &= \left(\frac{9.4 \times 10^{-3}}{12.72s+1}\right)\left(\frac{s^2-2.73s+2.48}{s^2+2.73s+2.48}\right) \\
G_{21}(s) &= \left(\frac{1.02 \times 10^{-2}}{12.72s+1}\right)\left(\frac{s^2-6s+12}{s^2+6s+12}\right) \\
G_{12}(s) &= \left(\frac{-8.9 \times 10^{-3}}{12.72s+1}\right)\left(\frac{s^2-2.73s+2.48}{s^2+2.73s+2.48}\right) \\
G_{22}(s) &= \frac{-1.07 \times 10^{-2}}{12.72s+1} \\
G_{F1}(s) &= \left(\frac{3.9 \times 10^{-3}}{12.72s+1}\right)\left(\frac{s^2-1.43s+0.68}{s^2+1.43s+0.68}\right) \\
G_{F2}(s) &= \frac{6.1 \times 10^{-3}}{12.72s+1}
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

รูปที่ 6.7 เปรียบเทียบผลตอบของระบบจริง ผลตอบของระบบที่ประมาณให้เป็นอันดับหนึ่ง และผลตอบของระบบที่ประมาณให้เป็นอันดับหนึ่งแล้วใช้การประมาณพาเดกับพจน์ของเวลาประวิง จากรูปผลตอบ 6.7(a)-6.7(e) จะเห็นได้ว่าระบบที่ประมาณได้เทียบเท่ากับระบบจริงเมื่อเวลาผ่านไปแล้ว 10 นาที อย่างไรก็ตามช่วงเวลาก่อนนาทีที่ 10 นั้นยังมีความแตกต่างของระบบจริงกับระบบที่ประมาณอยู่บ้าง แต่ก็เป็นความแตกต่างเล็กน้อยเมื่อเทียบกับขนาดอัตราขยายกระแสตรงของระบบ สำหรับรูปผลตอบ 6.7(f) นั้นเป็นรูปที่เห็นความแตกต่างของการประมาณมากที่สุด ทั้งนี้เนื่องจากระบบย่อย G_{F2} ที่ยังมิได้ประมาณได้รับผลจากขั้วอื่น (ที่มิใช่ขั้วเด่น) อย่างมีนัยสำคัญ ถึงแม้ความแตกต่างของการประมาณระบบย่อย $G_{F2}(s)$ จะคงอยู่ประมาณ 30 นาทีจากเวลาเริ่มต้น แต่ขนาดของความแตกต่างก็มิได้มากหรือน้อยไปกว่าความแตกต่างของการประมาณของระบบย่อยอื่นๆในช่วงก่อนเวลา 10 นาที ดังนั้นระบบที่ประมาณได้ทั้งหมดนี้จึงอาจใช้แทนระบบหอกลั่นในขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุมได้

6.3 ระบบควบคุมหอกลั่นแยกสารสองชนิด

ในวิทยานิพนธ์นี้เราเลือกใช้ตัวควบคุมพลวัตเชิงเส้นในการควบคุมหอกลั่น แทนการใช้การป้อนกลับสถานะหรือการป้อนกลับสัญญาณออกซึ่งจะเป็นเพียงอัตราขยายคงที่ ทั้งนี้เนื่องจากเราจะใช้แนวทางการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ ซึ่งใช้การคำนวณในปริภูมิของเมทริกซ์ถ่ายโอนมิใช่แต่เพียงอัตราขยายคงที่ อีกทั้งจุดประสงค์หลักของเราคือต้องการหาขีดจำกัดสมรรถนะของระบบมิใช่เพียงแต่ออกแบบตัวควบคุมเท่านั้น ในการป้อนกลับเราจะเลือกใช้เพียงสัญญาณออกแต่ไม่ใช้สถานะในการป้อนกลับ เนื่องจากสถานะของหอกลั่นมีจำนวนมากและส่วนใหญ่ตรวจวัดได้ยากหรือถ้าหากใช้ตัวสังเกตก็จะส่งผลให้พลวัตของระบบควบคุมมีมากขึ้น และจะทำให้ตัวควบคุมยิ่งซับซ้อนมากขึ้นด้วย

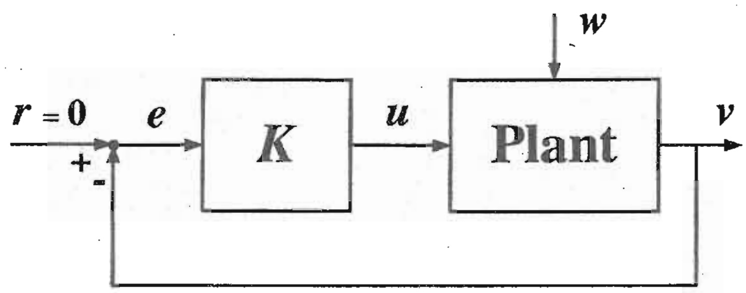
รูปแบบระบบควบคุมที่เลือกใช้เป็นแบบแผนเดิม (Classical control scheme) ซึ่งมีแผนภาพกล่อง (Block diagram) แสดงดังรูปที่ 6.8



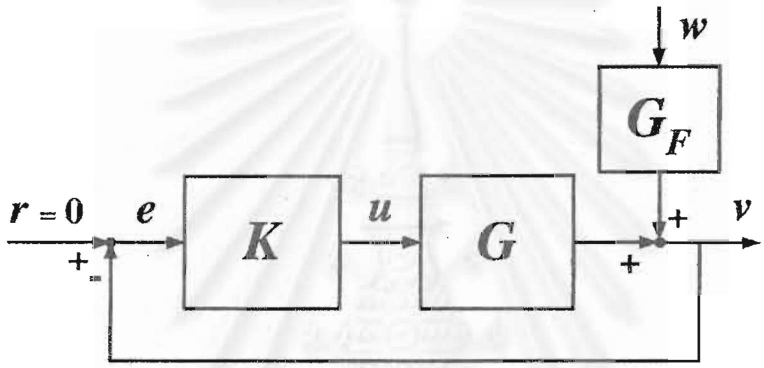
รูปที่ 6.7: เปรียบเทียบผลตอบของระบบจริง ระบบที่ประมาณเป็นอันดับหนึ่ง และระบบที่ประมาณเป็นอันดับหนึ่งซึ่งประมาณเวลาประวิงโดยใช้การประมาณพาเดสำหรับฟังก์ชัน (a) $G_{11}(s)$ (b) $G_{21}(s)$ (c) $G_{12}(s)$ (d) $G_{22}(s)$ (e) $G_{F1}(s)$ (f) $G_{F2}(s)$

เมื่อ Plant คือระบบที่ต้องการควบคุมซึ่งในที่นี้คือระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด

K คือตัวตัวควบคุมเชิงเส้นที่ต้องการออกแบบ



รูปที่ 6.8: แผนภาพระบบควบคุมหอกลั่นแยกสารสองชนิดเมื่อใช้ตัวควบคุมเชิงเส้น



รูปที่ 6.9: แผนภาพระบบควบคุมหอกลั่นแยกสารสองชนิดที่ประมาณให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดทำงานแล้ว

v คือสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม ในที่นี้คือเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ δx_D และฐานหอ δx_B

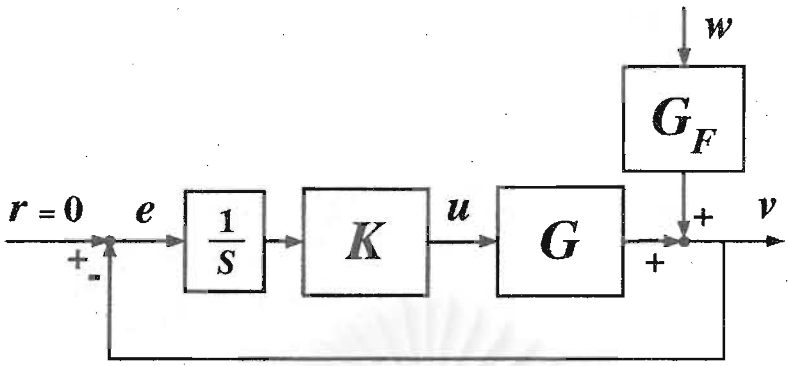
u คือสัญญาณควบคุม ในที่นี้เป็นเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนกลับ δL และค่าเบี่ยงเบนของอัตราการต้มซ้ำ δV

w คือการรบกวนของระบบซึ่งในที่นี้คือค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนเข้า δF

r คือสัญญาณอ้างอิงสำหรับสัญญาณออกของระบบ แต่ในที่นี้เรามิได้พิจารณาการติดตามสัญญาณอ้างอิงจึงกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์

อย่างไรก็ตามแบบจำลองแบบไม่เชิงเส้นของระบบดังกล่าว ยังไม่สามารถนำมาประยุกต์กับการออกแบบด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ได้ ดังนั้นเราจึงพิจารณาระบบหอกลั่นที่ประมาณเป็นเชิงเส้นรอบจุดทำงาน ดังที่กล่าวไว้ในตอนที่ 6.1.5 ซึ่งจะได้ว่าระบบควบคุมเชิงเส้นที่จะนำมาใช้ในการออกแบบเชิงคอนเวกซ์เป็นดังแผนภาพกล่องในรูปที่ 6.9 เมื่อ $G(s)$ และ $G_F(s)$ เป็นระบบที่ประมาณเป็นอันดับต่ำแล้ว

ก่อนการออกแบบเรายังต้องการรวมผลของการควบคุมเชิงปริพันธ์ (Integral control) เข้ากับตัวควบคุม K โดยเพิ่มเครื่องหาปริพันธ์ (Integrator) ให้กับระบบควบคุมดังรูปที่ 6.10 เพื่อหาค่าปริพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างสัญญาณอ้างอิง r กับสัญญาณออก v ก่อนที่จะนำไปป้อนให้ตัวควบคุม เครื่อง



รูปที่ 6.10: การควบคุมเชิงปริพันธ์ที่เพิ่มเข้าไปในระบบควบคุมหอกลั่น

หาปริพันธ์นี้ไม่เพียงแต่ขจัดการรบกวนแบบขั้นได้[2] แต่ยังช่วยแก้ปัญหาอันเนื่องมาจากความคลาดเคลื่อนในการหาแบบจำลองของระบบหอกลั่น เพราะว่าแบบจำลองที่คำนวณได้อาจมีพลวัตแตกต่างไปจากพลวัตของระบบจริงบ้าง ความคลาดเคลื่อนนี้อาจมาจากการตั้งสมมติฐานบางอย่าง เช่นการละเลยพลวัตของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนซึ่งต่อกับหอกลั่น (ดูตอนที่ 6.1.4)

6.3.1 การรบกวนของระบบควบคุมหอกลั่น

พิจารณาระบบควบคุมแบบวงปิดของหอกลั่นแยกสารสองชนิดดังรูปที่ 6.10 สัญญาณเข้าหรือการรบกวนในระบบควบคุมหอกลั่นที่เราสนใจคือค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนสารเข้าหอ δF งานวิจัยเกี่ยวกับหอกลั่นที่ผ่านมามักจำลองการรบกวนเป็นสัญญาณขั้น (Step signal) หรือสัญญาณรบกวนขาว (White noise) [34, 35, 38, 27, 28, 29, 30, 31, 36, 32] แต่เราพบว่าการจำลองสัญญาณเข้าแบบสัญญาณขั้นยังไม่สมบูรณ์นัก เนื่องจากสารที่ป้อนเข้ามามักมีการเปลี่ยนแปลงอัตราไหลอยู่ตลอดเวลามิใช่คงที่ที่ค่าหนึ่งๆ ส่วนกรณีที่จำลองเป็นสัญญาณรบกวนขาวนั้นพบว่าสัญญาณที่จำลองในลักษณะนี้อาจมีค่าสูงหรือต่ำเท่าใดก็ได้อย่างไม่มีขอบเขต รวมทั้งสัญญาณรบกวนดังกล่าวอาจเปลี่ยนแปลงได้รวดเร็วอย่างไม่มีขอบเขตเช่นกัน ซึ่งไม่สมจริงเนื่องจากสัญญาณเข้าเป็นอัตราไหลของของเหลวซึ่งมีมวลจึงจึงไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ทันที

ในความเป็นจริง ขนาดของท่อนำสาร ระบบป้อนสารหรือเครื่องสูบ รวมถึงกระบวนการปฏิกรณ์เคมีที่อยู่ก่อนหน้าจุดป้อนสารเข้าหอ มักมีข้อจำกัดทางกายภาพซึ่งทำให้ค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนสารหรือการรบกวนไม่อาจมีค่าสูงกว่าค่าๆ หนึ่งได้ กล่าวคืออัตราไหลของสารที่ป้อนเข้าหอสามารถเปลี่ยน

[2]ถึงแม้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะมิได้จำลองการรบกวนเป็นสัญญาณขั้นโดยตรง แต่ปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ ที่เราพิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ก็รวมเอาการรบกวนแบบสัญญาณขั้นไว้ด้วยนั่นคือการรบกวน $w_{\text{step}}(t)$ ในลักษณะ

$$\begin{aligned} w_{\text{step}}(t) &= \hat{M}, \qquad \forall t \geq 0 \\ \hat{M} &\leq M \end{aligned}$$

ถ้าหากมีการรบกวนในลักษณะนี้เข้ามาในระบบหอกลั่น ตัวควบคุมก็ควรมีความสามารถในการกำจัดการรบกวนดังกล่าวออกไปได้

แปลงจากค่าที่จุดทำงาน (หรือค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัว) ภายในขอบเขตหนึ่งๆ เท่านั้น นอกจากนี้อัตราการเปลี่ยนแปลงของการรบกวนดังกล่าวก็มีค่าจำกัดด้วย เนื่องจากของเหลวมีมวลจึงต้องใช้เวลาในการเปลี่ยนจากค่าหนึ่งไปสู่อีกค่าหนึ่ง ดังนั้นเราจึงจำลองลักษณะของสัญญาณเข้าของระบบหอกลั่นด้วยสัญญาณที่มีข้อจำกัดของขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลง การจำลองในลักษณะที่นำเสนอนี้มีเหตุผล ตรงไปตรงมาและชัดเจนมากกว่าการจำลองในงานวิจัยที่ผ่านมา โดยปกติขนาดของการรบกวนที่เข้าสู่หอกลั่นมักมีค่าประมาณ $10 \sim 20\%$ ของค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัว [38, 27, 28, 29, 30, 31] (ถ้ามีค่าสูงกว่านี้อาจนับเป็นการผิดพลาดของระบบ (Fault) ซึ่งเรามิได้พิจารณาในกรณีนี้) ในที่นี้เราเลือกใช้ค่าขนาดการรบกวน 10% ของค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัว

เนื่องจากอัตราการป้อนเข้าที่สภาวะอยู่ตัวมีค่าเท่ากับ $100\ \frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ ดังนั้นขนาดของการรบกวนจึงไม่ควรมีค่าเกิน $100 \times \frac{1}{10} = 10\ \frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ ส่วนค่าจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของอัตราการป้อนสารเข้าหอสำหรับหอกลั่นขนาดเล็กที่ใช้ในห้องทดลองนั้น มีค่าได้สูงถึง $50 \sim 100\ \frac{\text{lb-mol}}{\text{min}^2}$ กล่าวคือเราสามารถเปลี่ยนค่าการรบกวนขึ้นไป 10% ได้ในเวลาไม่กี่วินาที อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาหอกลั่นที่มีขนาดใหญ่ขึ้น และพิจารณาตามความเป็นจริงว่าการรบกวนนั้นเกิดจากอัตราการป้อนเข้าซึ่งเปลี่ยนแปลงไปเองอย่างต่อเนื่องโดยมิได้จงใจกระทำ เราก็อาจสมมติให้ค่าจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของการรบกวนนี้มีค่าเท่ากับ $10\ \frac{\text{lb-mol}}{\text{min}^2}$ นั่นคือในหนึ่งนาทีอัตราการป้อนสารเข้าหออาจเปลี่ยนแปลงได้อย่างมาก $10\ \frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ โดยสรุปแล้วเราได้ว่าปริภูมิสัญญาณเข้า (ดูนิยามในตอนที่ 2.1) $\mathcal{W}$ ที่ใช้ในการคำนวณดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบควบคุมหอกลั่นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นดังนี้

$$\mathcal{W} = \{\delta F(t) : |\delta F(t)| \leq 10,\ |\dot{\delta F}(t)| \leq 10,\ \forall t \geq 0\} \tag{6.25}$$

ต่อจากนี้ไปเมื่อกล่าวถึงการรบกวนที่เข้าสู่ระบบควบคุมหอกลั่น นั่นหมายถึงการรบกวนที่อยู่ภายในปริภูมิ $\mathcal{W}$ เท่านั้น

6.3.2 จุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับในการออกแบบระบบควบคุมหอกลั่น

จุดประสงค์หลักของการออกแบบระบบควบคุมหอกลั่นคือ ระบบควบคุมที่ออกแบบได้ต้องมีความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหออยู่ภายในช่วงที่ยอมรับได้ นั่นคือความบริสุทธิ์ของสารที่กลั่นได้จะต้องไม่เบี่ยงเบนไปจากค่าที่กำหนดมากนัก ดังนั้นค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ δx_D และฐานหอ δx_B นี้ จึงเป็นดรรชนีชี้บ่งที่สำคัญและมีความหมายในทางปฏิบัติ[3] ในที่นี้เราไม่เพียงต้องการแต่จะลดค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอหรือฐานหอตัวใดตัวหนึ่ง แต่ต้องการลดค่าของทั้งสองตัวพร้อมกัน อย่างไรก็ตามการลดค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นหนึ่งมักทำให้ค่าเบี่ยงเบนของอีกความเข้มข้นหนึ่งสูงขึ้น ดังนั้นจึงต้องมีการประนีประนอมระหว่างค่าทั้งสอง

ด้วยเหตุนี้การสังเคราะห์ตัวควบคุมให้กับระบบหอกลั่นที่เรากำลังพิจารณาอยู่ จึงไม่เพียงแต่จะสังเคราะห์ตัวควบคุมเพื่อลดค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นตัวใดตัวหนึ่ง หรือลดผลรวมเชิงเส้นของค่าเบี่ยง

[3] อย่างไรก็ตามในการกลั่นเรามักให้ความสำคัญกับความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ยอดหอ มากกว่าความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ฐานหอ เนื่องจากผลิตภัณฑ์ที่ต้องการนำมาใช้ในทางปฏิบัติมักเป็นผลิตภัณฑ์ยอดหอ

เบนความเข้มข้นทั้งสอง สิ่งที่เราต้องการก็คือขีดจำกัดสมรรถนะเมื่อพิจารณาค่าเบี่ยงเบนทั้งสองร่วมกัน กล่าวคือเราสนใจจะลดค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นตัวหนึ่ง เมื่อกำหนดค่าเบี่ยงเบนความเข้มข้นอีกตัวหนึ่งให้คงที่ที่ค่าใดๆ ผลที่คาดว่าจะได้คือเส้นโค้งแลกเปลี่ยน (Trade-off curve) ระหว่างค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นทั้งสอง ขีดจำกัดของสมรรถนะที่คำนวณได้นี้อาจใช้เป็นเกณฑ์เปรียบเทียบสำหรับการออกแบบตัวควบคุมลักษณะอื่นต่อไปได้

ในส่วนของสัญญาณควบคุมของระบบหอกลั่นนั้น เราจำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขบังคับของขนาดสูงสุดที่เป็นไปได้ด้วย เพราะอัตราการป้อนกลับที่ยอดหอ L และอัตราการต้มซ้ำที่ฐานหอ V ซึ่งเป็นตัวแปรควบคุมจะถูกจำกัดโดยลักษณะทางกายภาพของหอกลั่น ส่งผลให้ขนาดของสัญญาณควบคุมมีค่าจำกัด โดยปกติแล้วสัญญาณควบคุมของระบบหอกลั่นจะถูกจำกัดทั้งทางด้านสูงและต่ำ กล่าวคือการให้สัญญาณควบคุมที่สูงเกินไปมักทำให้เกิดการท่วม (Flooding) ของของเหลวภายในหอ และถ้าหากให้สัญญาณควบคุมน้อยเกินไป ไอกับของเหลวก็จะสัมผัสกันไม่เต็มที่และเกิดช่องกลวง (Channelling) หรือเกิดการแห้งขึ้น ทำให้ประสิทธิภาพในการกลั่นด้อยลงและอาจทำให้หอกลั่นเสียหายได้ สัญญาณควบคุมที่เหมาะสมควรอยู่ในขอบเขตประมาณ 30 ~ 40% ของค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัว [38, 31] ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะเลือกใช้ค่า 30% ซึ่งเป็นกรณีเลวร้ายสุด (Worst case) จากตารางที่ 6.1 ค่าเริ่มต้นที่สภาวะอยู่ตัวของอัตราการป้อนกลับยอดหอคือ 128.01 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ และสำหรับอัตราการต้มซ้ำคือ 178.01 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ ดังนั้นจึงได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณควบคุมทั้งสองที่เป็นไปได้จะอยู่ในช่วง ±38.4 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ และ ±53.4 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ ตามลำดับ ดังนั้นข้อจำกัดขนาดของสัญญาณควบคุมทั้งสองจึงเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} |\delta L(t)| &\leq 38.4 \quad \frac{\text{lb-mol}}{\text{min}} \\ |\delta V(t)| &\leq 53.4 \quad \frac{\text{lb-mol}}{\text{min}} \end{aligned} \tag{6.26}$$

ทุกๆเวลา $t \geq 0$

6.4 การประยุกต์ใช้การออกแบบตัวควบคุมด้วยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

ดังที่กล่าวไว้ในตอนที่ผ่านมา เราต้องการคำนวณขีดจำกัดสมรรถนะของค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอ การออกแบบเชิงคอนเวกซ์เป็นวิธีหนึ่งซึ่งเอื้อต่อการคำนวณขีดจำกัดสมรรถนะของระบบ โดยฟังก์ชันสมรรถนะที่พิจารณาจะต้องเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ของระบบควบคุมเท่านั้น ซึ่งในกรณีของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะที่ใช้ได้พิสูจน์ไว้ในตอนที่ 2.4 แล้ว ว่ามีความเป็นคอนเวกซ์บนปริภูมิของระบบเชิงเส้น

การประยุกต์ใช้การออกแบบเชิงคอนเวกซ์กับระบบควบคุมหอกลั่นในรูปที่ 6.10 นั้น จำเป็นต้องแปลงระบบควบคุมดังกล่าวให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานเสียก่อน (รูปที่ 5.1 ในบทที่ 5) ซึ่งทำได้ดังนี้ จากรูปที่ 5.1 สัญญาณออกที่ต้องการควบคุม z และสัญญาณที่ถูกป้อนเข้าสู่ตัวควบคุมหรือสัญญาณ y มีค่าดัง

ต่อไปนี้

$$z \triangleq \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_D \\ \delta x_B \\ \delta L \\ \delta V \end{bmatrix}, \qquad y \triangleq e = \begin{bmatrix} -\int \delta x_D dt \\ -\int \delta x_B dt \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

ส่วนสัญญาณเข้าจากภายนอก w และสัญญาณควบคุม u ในรูปที่ 5.1 เป็นตัวเดียวกันกับการรบกวน w และสัญญาณควบคุม u ในรูปที่ 6.10 กำหนดให้แบบจำลองในปริภูมิสถานะของ $G(s)$ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_G(t) &= A_G x_G(t) + B_G u(t) \\ v_G(t) &= C_G x_G(t) \end{aligned} \tag{6.28}$$

โดยที่ $(A_G,\ B_G,\ C_G)$ เป็นผลสัมฤทธิ์ต่ำสุดของระบบ $G(s)$ ส่วนแบบจำลองในปริภูมิสถานะของ $G_F(s)$ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_{G_F}(t) &= A_{G_F} x_{G_F}(t) + B_{G_F} d(t) \\ v_{G_F}(t) &= C_{G_F} x_{G_F}(t) \end{aligned} \tag{6.29}$$

โดยที่ $(A_{G_F},\ B_{G_F},\ C_{G_F})$ เป็นผลสัมฤทธิ์ต่ำสุดของระบบ $G_F(s)$ รูปที่ 6.11 แสดงแผนภาพกล่องของระบบควบคุมในรูปที่ 6.10 ซึ่งถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบระบบควบคุมมาตรฐาน จะได้ว่าแบบจำลองปริภูมิสถานะของระบบ P เป็นดังนี้

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} A_P & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ \hline C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} A_{G_F} & 0 & 0 & 0 & B_{G_F} & 0 \\ 0 & A_G & 0 & 0 & 0 & B_G \\ -C_{G_F} & -C_G & 0 & I & 0 & 0 \\ \hline C_{G_F} & C_G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{6.30}$$

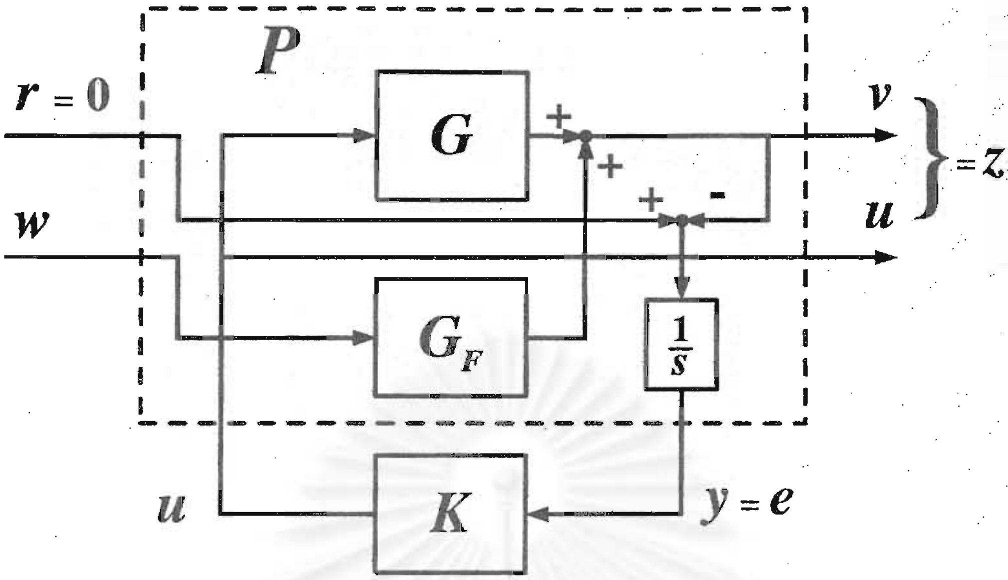
กำหนดให้ H_{zw} แทนระบบวงปิดจากสัญญาณเข้า w ไปยังสัญญาณออก z ซึ่งแสดงในรูปที่ 6.11 กล่าวคือ

$$z = H_{zw} w$$

สัญญาณ w และ z นี้มีนิยามดังสมการ (6.27) เพื่อให้การอ้างอิงถึงส่วนประกอบของเมทริกซ์ถ่ายโอน H_{zw} ทำได้สะดวกขึ้น เราจึงใช้สัญกรณ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน H_1, H_2, H_3 และ H_4 ในลักษณะต่อไปนี้

$$z = \begin{bmatrix} \delta x_D \\ \delta x_B \\ \delta L \\ \delta V \end{bmatrix} = H_{zw} w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} \delta F \tag{6.31}$$

กล่าวคือ H_1, H_2, H_3 และ H_4 เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนจาก δF ไปยัง δx_D, δx_B, δL และ δV ตามลำดับ นอกจากนี้เรากำหนดให้ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ H_1, H_2, H_3 และ H_4 คือ $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$ และ $h_4(t)$ เมื่อเรามีระบบควบคุมในรูปแบบมาตรฐานแล้วก็สามารถประยุกต์ใช้การสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์กับระบบนี้ได้



รูปที่ 6.11: แผนภาพระบบควบคุมหอกลั่นที่จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

6.4.1 การกำหนดรูปแบบปัญหาการออกแบบตัวควบคุม

ตัวควบคุม K_{nom} ที่ทำให้ระบบวงปิด H_{zw} มีเสถียรภาพนั้น อาจคำนวณโดยใช้สมการ (5.6) ในบทที่ผ่านมา โดยจะต้องเลือกใช้อัตราขยาย F_{sfb} และ L_{obs} ที่ทำให้ $A_P - B_u F_{\text{sfb}}$ และ $A_P - L_{\text{obs}} C_y$ มีเสถียรภาพแบบเฮอร์วิตซ์ตามลำดับ ในที่นี้อัตราขยาย F_{sfb} และ L_{obs} คำนวณได้โดยอาศัยการคำนวณตัวควบคุมแอลคิวจี ในการคำนวณตัวควบคุม K_{nom} นี้ เราเลือกใช้ค่าเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก Q_{LQG}, R_{LQG}, S_w และ S_n ดังนี้

$$Q_{\text{LQG}} = C_y^T \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix} C_y, \qquad S_w = B_u \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B_u^T,$$

$$R_{\text{LQG}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$$

พิจารณาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ที่ใช้วิธีการประมาณริทซ์จำนวนพจน์สูงๆ เราพบว่าตัวควบคุมเริ่มต้นมีผลต่อคำตอบเหมาะที่สุดบ้าง [4] อย่างไรก็ตามการเลือกเมทริกซ์ Q_{LQG}, R_{LQG}, S_w และ S_v ซึ่งทำให้ระบบวงปิด H_{zw} มีดรรชนีสมรรถนะที่มีค่าไม่สูงมากนั้น มักจะทำให้การหาค่าเหมาะที่สุดใช้เวลาน้อยหรือถึงจุดเหมาะที่สุดเร็วกว่าการใช้ค่า Q_{LQG}, R_{LQG}, S_w และ S_v ซึ่งทำให้ระบบวงปิด H_{zw} มีดรรชนีสมรรถนะสูงๆ (พึงระลึกว่าเมทริกซ์ Q_{LQG}, R_{LQG}, S_w และ S_v ล้วนมีผลต่อการออกแบบอัตราขยาย F_{sfb} และ L_{obs} ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของตัวควบคุม K_{nom} ของระบบวงปิด H_{zw})

เมื่อคำนวณตัวควบคุม K_{nom} ได้แล้ว ต่อไปเราจะคำนวณตัวแปรเสริม Q ซึ่งใช้ในการทำระบบวงปิด H_{zw} ให้เป็นตัวแปรเสริม โดยเริ่มจากการเลือกจำนวนพจน์ที่จะใช้ในการประมาณริตซ์ ในทางทฤษฎีนั้นการใช้จำนวนพจน์การประมาณเป็นจำนวนมากย่อมทำให้การประมาณแม่นยำขึ้น นั่นคือทำให้การหาค่าเหมาะที่สุดในปริภูมิมิติจำกัดใกล้เคียงกับการหาค่าเหมาะที่สุดในมิติอนันต์มากขึ้น อย่างไรก็ตามหากใช้

จำนวนพจน์ในการประมาณสูงเกินไป ก็อาจสร้างปัญหาในการคำนวณทางปฏิบัติ กล่าวคือใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น หรืออาจคำนวณไม่ได้เลยเนื่องจากข้อจำกัดของความสามารถของโปรแกรมที่ใช้คำนวณ ในการประมาณริตซ์นั้นเราจึงเลือกใช้จำนวนพจน์การประมาณเท่ากับ 6 ซึ่งไม่น้อยจนเกินไปและไม่มากจนทำให้เกิดปัญหาในการคำนวณ ต่อจากนั้นเป็นการเลือกเมทริกซ์ถ่ายโอน Q_i ในสมการ (5.13) เนื่องจากสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของตัวควบคุม K เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีมิติเท่ากับ 2 ดังนั้นเมทริกซ์ถ่ายโอน Q_i แต่ละตัวจึงมีมิติเท่ากับ 2×2 (รวมทั้งเมทริกซ์ถ่ายโอน Q ด้วย) ในที่นี้เราเลือกเมทริกซ์ Q_i เป็นดังนี้

$$Q_i = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{s+10}\right)^i & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{s+10}\right)^i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, 6 \tag{6.32}$$

เนื่องจากเราใช้อันดับในการประมาณริตซ์ที่ค่อนข้างสูง ดังนั้นรูปแบบของเมทริกซ์ Q จึงมักไม่มีผลกับการสังเคราะห์ตัวควบคุมมากนัก

เมื่อกำหนดค่าตัวควบคุม K_{nom} ที่ทำให้ระบบมีสเถียรภาพและเมทริกซ์ถ่ายโอน Q แล้ว เมทริกซ์ถ่ายโอน H_{zw} ก็อาจคำนวณได้โดยใช้สมการ (5.7) และสมการ (5.8) ในบทที่ผ่านมา (หากต้องการทราบค่าตัวควบคุม K ก็อาจใช้สมการ (5.10) มาคำนวณได้) ขั้นต่อไปเราจะกำหนดจุดประสงค์และวางเงื่อนไขของเมทริกซ์ถ่ายโอน H_{zw} นี้ โดยใช้ข้อมูลของจุดประสงค์และเงื่อนไขในการออกแบบตัวควบคุมของระบบหอกลั่นที่กล่าวไว้ในตอนที่ 6.3.2 ก่อนอื่นเราจะใช้สัญกรณ์ของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะที่นิยามไว้ดังสมการ (5.17) ในตอนที่ 5.2.1 เพื่อกำหนดฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะของระบบวงปิดจากเวกเตอร์สัญญาณเข้า w หรือการรบกวนของหอกลั่น ไปยังเวกเตอร์สัญญาณออก z อย่างไรก็ตามเราในวิทยานิพนธ์นี้เรามิได้พิจารณาค่าดรรชนีสมรรถนะระหว่างสัญญาณเข้า w ถึงสัญญาณออก z โดยตรง (ในลักษณะของระบบแบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ) แต่จะพิจารณาจากองค์ประกอบของสัญญาณ w และ z กล่าวคือเราจะพิจารณาฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะจากสัญญาณ δF ไปยังสัญญาณ δx_D, δx_B, δL และ δV นั่นเอง ฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะของระบบย่อยจากการรบกวน δF ไปยังสมาชิกของสัญญาณออกแต่ละตัวจะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\varphi(H_1) &= \sup_{F \in \mathcal{W}} \{\delta F(T_1) * h_1(T_1)\} \\
\varphi(H_2) &= \sup_{F \in \mathcal{W}} \{\delta F(T_2) * h_2(T_2)\} \\
\varphi(H_3) &= \sup_{F \in \mathcal{W}} \{\delta F(T_3) * h_3(T_3)\} \\
\varphi(H_4) &= \sup_{F \in \mathcal{W}} \{\delta F(T_4) * h_4(T_4)\}
\end{aligned}$$

เมื่อ $\mathcal{W}$ เป็นปริภูมิสัญญาณเข้าของระบบหอกลั่นดังสมการ (6.25) ค่าเวลา T_1, T_2, T_3 และ T_4 คือเวลาสุดท้ายที่ใช้ในการประมาณดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$, $\varphi(H_2)$, $\varphi(H_3)$ และ $\varphi(H_4)$ ตามลำดับ

เมื่อกำหนดฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะแต่ละตัวแล้ว ต่อไปเราจะพิจารณาจุดประสงค์การออกแบบโดยใช้ฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะทั้งสี่นี้ ในตอนที่ 6.3.2 เรากล่าวไว้ว่า วัตถุประสงค์หลักของการสังเคราะห์ตัวควบคุมให้กับระบบหอกลั่น ก็คือการลดค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอ โดยที่การรบกวนที่เข้าสู่ระบบหอกลั่น δF เป็นสมาชิกของปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ เพราะฉะนั้นเป้าหมายใน

การออกแบบระบบควบคุมหอกลั่นจึงเป็นการลดค่า $\varphi(H_1)$ และ $\varphi(H_2)$ อย่างไรก็ตามดังที่ได้อธิบายไปแล้วว่าการออกแบบเชิงคอนเวกซ์ที่กล่าวถึงในบทที่ผ่านมา ไม่อาจใช้กับค่าจุดประสงค์พร้อมกันสองจุดประสงค์ได้ ดังนั้นเราจึงไม่ต้องการที่จะลดค่า $\varphi(H_1)$ หรือ $\varphi(H_2)$ ตัวใดตัวหนึ่ง แต่กลับต้องการแสดงให้เห็นถึงขีดจำกัดสมรรถนะเมื่อพิจารณาค่าดรรชนีสมรรถนะทั้งสองร่วมกัน นั่นคือถ้าหากพิจารณาค่าดรรชนีสมรรถนะตัวหนึ่งที่ค่าใดๆ เราจะสามารถลดค่าดรรชนีสมรรถนะอีกตัวหนึ่งได้เท่าไร

ปัญหาในลักษณะนี้ ที่จริงก็คือการกำหนดค่าดรรชนีสมรรถนะตัวหนึ่งเป็นเงื่อนไขบังคับ นั่นคือกำหนดขอบเขตบนให้กับค่าดรรชนีสมรรถนะตัวหนึ่ง จากนั้นจึงลดค่าดรรชนีสมรรถนะอีกตัวหนึ่งให้ต่ำที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ แล้วแปรค่าดรรชนีสมรรถนะตัวที่เป็นเงื่อนไขบังคับไปหลายๆค่า และสร้างเป็นกราฟความสัมพันธ์ของขีดจำกัดสมรรถนะของดรรชนีสมรรถนะทั้งสอง ในที่นี้ค่าดรรชนีสมรรถนะที่เรากำหนดให้เป็นเงื่อนไขบังคับคือ $\varphi(H_2)$ ส่วนค่าดรรชนีสมรรถนะที่เราจะลดค่าคือ $\varphi(H_1)$ อนึ่งลักษณะของผลที่คาดว่าจะได้คือ เมื่อเราผ่อนปรนให้ดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_2)$ มีค่าสูงได้ ก็จะพบว่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ มีค่าลดต่ำได้มากกว่ากรณีที่เราจำกัดค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_2)$ ไว้ที่ค่าต่ำๆ

ในส่วนของสัญญาณควบคุมของระบบหอกลั่นหรือค่าเบี่ยงเบนของอัตราไหล δL และ δV นั้น ก็ถูกจำกัดขนาดสูงสุดเช่นกันดังสมการ (6.26) เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของเงื่อนไขบังคับของขนาดสัญญาณควบคุมสูงสุด ซึ่งแสดงในเทอมของฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_3)$ และ $\varphi(H_4)$ คือ

$$\begin{aligned} \varphi(H_3) &\leq 38.4 \\ \varphi(H_4) &\leq 53.4 \end{aligned} \tag{6.33}$$

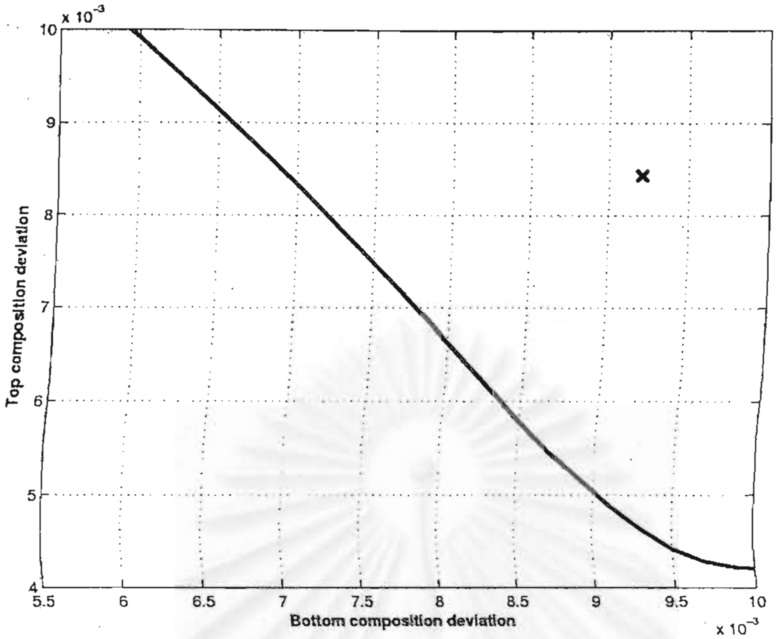
ดังนั้นสรุปแล้วปัญหาการออกแบบตัวควบคุมที่ได้เป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{H_{zw}\in\mathcal{H}_{\text{stab}}} & \varphi(H_1) & \\ \text{subject to} & \varphi(H_2) & \leq \gamma \\ & \varphi(H_3) & \leq 38.4 \\ & \varphi(H_4) & \leq 53.4 \end{array} \tag{6.34}$$

โดยที่ค่าเกณฑ์ γ เป็นค่าคงที่ ซึ่งเราจะแปรค่าไปเรื่อยๆ แล้วหาค่าเหมาะที่สุดแต่ละครั้ง อย่างไรก็ตามเนื่องจากเราทำให้ระบบวงปิด H_{zw} เป็นตัวแปรเสริมในเมทริกซ์ถ่ายโอน Q และประมาณด้วยวิธีริตซ์ในเทอมของตัวแปรมิติจำกัด $x \in \mathrm{R}^6$ (ใช้พจน์การประมาณเท่ากับ 6) ดังนั้นปัญหาในสมการ (6.34) อาจเปลี่ยนไปแสดงในเทอมของพารามิเตอร์ของการออกแบบหรือ x ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{x\in\mathrm{R}^6} & \varphi(H_1) & \\ \text{subject to} & \varphi(H_2) & \leq \gamma \\ & \varphi(H_3) & \leq 38.4 \\ & \varphi(H_4) & \leq 53.4 \end{array} \tag{6.35}$$

เราอาจแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดในปริภูมิจำกัดนี้โดยใช้วิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุมด้วยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ ซึ่งอธิบายไว้ในบทที่ผ่านมา



รูปที่ 6.12: เส้นโค้งแลกเปลี่ยนระหว่างฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ กับฟังก์ชันดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_2)$ ที่ได้จากการออกแบบตัวควบคุมเหมาะที่สุด จุดกากบาทที่แสดงในรูปคือค่าดรรชนีสมรรถนะที่คำนวณได้เมื่อใช้ตัวควบคุมพีไอแบบแยกศูนย์ของ Luyben

6.4.2 ผลการคำนวณขีดจำกัดสมรรถนะ

เราใช้โปรแกรมช่วยออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีเชิงคอนเวกซ์ซึ่งกล่าวไว้ในบทที่ 5 ร่วมกับโปรแกรมสำหรับคำนวณดรรชนีสมรรถนะในบทที่ 4 มาแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ในสมการ (6.35) สังเกตว่าค่า $\frac{2M}{D}$ ของปริภูมิสัญญาณเข้าในสมการ (6.25) มีค่าเท่ากับ

$$\frac{2 \times 10}{10} = 2$$

แต่ค่าคงตัวเวลาของระบบหอกลั่นเท่ากับ $\frac{1}{0.0786} = 12.72$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 2 พอสมควร ดังนั้นสำหรับระบบหอกลั่น การใช้ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาเข้าใกล้อนันต์แทนค่าดรรชนีสมรรถนะจริงจึงค่อนข้างมีความแม่นยำ นั่นคือค่าผิดพลาด ϵ_∞ ในสมการ (3.16) มีค่าประมาณเท่ากับศูนย์ (ดูตอนที่ 3.1)

สำหรับการแปรค่า γ แต่ละครั้ง จะบันทึกค่า $\varphi(H_1)$ ต่ำสุดที่ลดได้ไว้เสมอ ในที่นี้เราจะแปรค่า γ ไปหลายๆค่า แล้วเลือกเอาช่วงค่าซึ่งแสดงให้เห็นถึงการแลกเปลี่ยนระหว่างค่า $\varphi(H_1)$ และค่า $\varphi(H_2)$ ได้อย่างชัดเจน ช่วงค่า γ ดังกล่าวคือ $0.006 \leq \gamma \leq 0.010$ เราเลือกใช้ค่า γ ทั้งหมด 29 ค่าในช่วงดังกล่าว ผลที่ได้เป็นดังรูปที่ 6.12 แกนนอนแทนค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_2)$ ส่วนแกนตั้งคือค่าจุดประสงค์ที่ลดได้ ในที่นี้คือดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ ในส่วนของค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_3)$ และ $\varphi(H_4)$ นั้น เรามิได้แสดงไว้ แต่ค่าทั้งสองก็สอดคล้องตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ในปัญหา (6.35)

จากรูปที่ 6.12 จะเห็นถึงการแลกเปลี่ยนระหว่างดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ และ $\varphi(H_2)$ นั่นคือเมื่อดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_2)$ ถูกจำกัดให้มีค่าน้อย ดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ ก็จะไม่สามารถลดค่าได้มากนัก

ในทางตรงกันข้ามถ้าหากดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_2)$ สามารถมีค่าได้มากแล้ว ดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ ที่ลดได้ก็จะมีค่าต่ำลง พื้นที่ทางด้านขวาของเส้นโค้งแลกเปลี่ยนคือบริเวณที่เป็นไปได้ (Feasible region) สำหรับระบบควบคุมเชิงเส้น กล่าวคือเราอาจออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นเพื่อให้ได้ค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ และ $\varphi(H_2)$ ในบริเวณนี้ได้ ในทางกลับกันพื้นที่ทางด้านซ้ายของเส้นโค้งแลกเปลี่ยนคือบริเวณที่เป็นไปไม่ได้ (Infeasible region) สำหรับระบบควบคุมเชิงเส้น นั่นคือเราไม่สามารถสังเคราะห์ระบบควบคุมเชิงเส้นให้ได้ค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ และ $\varphi(H_2)$ ในบริเวณนี้ได้

ต่อไปเราลองใช้ตัวควบคุมพีไอแบบแยกศูนย์ซึ่งออกแบบไว้โดย Luyben ใน [35] มาควบคุมระบบหอกลั่น แล้วคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ และ $\varphi(H_2)$ ได้เท่ากับ

$$\begin{aligned} \varphi(H_1) &= 0.0084 \\ \varphi(H_2) &= 0.0092 \end{aligned}$$

ผลที่ได้นี้แสดงเป็นจุดกากบาทในรูปที่ 6.12 จะเห็นว่าจุดดังกล่าวอยู่ลึกเข้าไปจากขอบของเส้นโค้งแลกเปลี่ยน (ด้านขวาของเส้นโค้งแลกเปลี่ยน) ซึ่งสอดคล้องตามความเป็นจริง เนื่องจากเส้นโค้งแลกเปลี่ยนนี้เป็น*ขีดจำกัดสมรรถนะ*ของระบบควบคุมเชิงเส้นของหอกลั่นแยกสารสองชนิด

6.4.3 การจำลองระบบกับแบบจำลองไม่เชิงเส้นของระบบหอกลั่น

ในตอนนี้เราจะจำลองระบบควบคุมหอกลั่นแยกสารสองชนิดแบบไม่เชิงเส้น แบบจำลองของระบบดังกล่าวนำเสนอไว้ในตอนที่ 6.1.4 สำหรับตัวควบคุมที่นำมาใช้คือตัวควบคุมตัวหนึ่ง ซึ่งเลือกมาจากตัวควบคุมที่คำนวณได้จากขั้นตอนการหาเส้นโค้งแลกเปลี่ยน พิจารณารูปที่ 6.12 ตัวควบคุมที่เลือกใช้คือตัวควบคุมที่ทำให้ค่า $\varphi(H_1)$ มีค่าต่ำๆ เนื่องจากจุดประสงค์หลักคือการทำให้ผลิตภัณฑ์ยอดหอมีความบริสุทธิ์สูง อย่างไรก็ตาม $\varphi(H_2)$ ก็ไม่ควรมีค่าสูงจนเกินไปนัก ดังนั้นค่า $\varphi(H_1)$ และ $\varphi(H_2)$ ที่พิจารณาคือ

$$\begin{aligned} \varphi(H_1) &= 0.0049 \\ \varphi(H_2) &= 0.0091 \end{aligned} \tag{6.36}$$

เห็นได้ว่าถึงแม้จะมีตัวควบคุมที่ทำให้ค่า $\varphi(H_1)$ ต่ำลงกว่าค่าที่เลือกนี้อีก แต่ส่วนที่ต่ำลงของ $\varphi(H_1)$ ก็ไม่คุ้มค่าเมื่อเทียบกับส่วนที่ต้องเพิ่มขึ้นของ $\varphi(H_2)$ อนึ่งอันดับของตัวควบคุมนี้มีค่าเท่ากับ 16

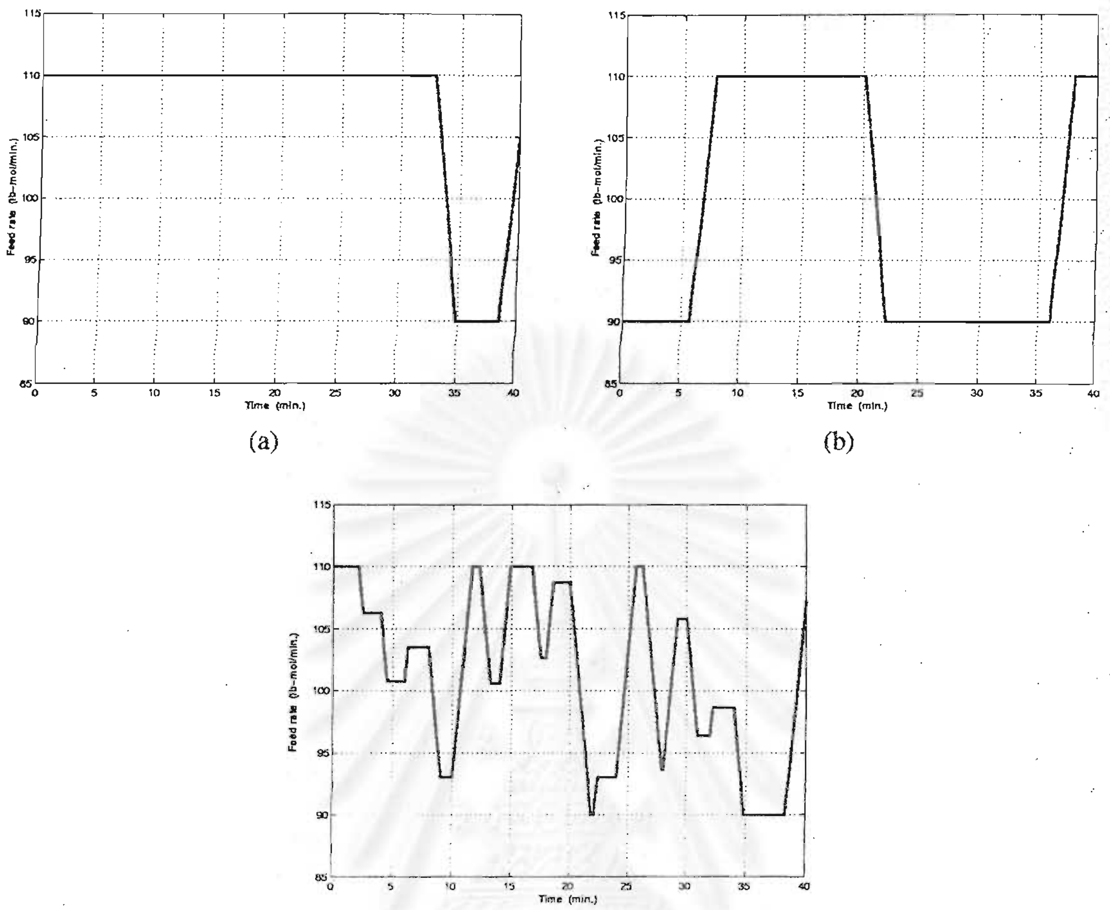
ในการจำลองระบบเราเลือกใช้การรบกวน w (อัตราป้อนเข้า F) 3 ลักษณะดังนี้

1. สัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งสัมพันธ์กับค่า $\varphi(H_1)$

2. สัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งสัมพันธ์กับค่า $\varphi(H_2)$

3. สัญญาณเข้าสูงสุดใดๆ ซึ่งอยู่ในปริภูมิ $\mathcal{W}$

สัญญาณเข้าสูงสุดสองชนิดแรกสามารถคำนวณได้โดยตรงจากโปรแกรมช่วยคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ (ดูบทที่ 4) ส่วนสัญญาณเข้าชนิดที่สามนั้น เราใช้การสุ่มเลือกมาหนึ่งสัญญาณ รูปที่ 6.13 แสดงการรบกวนดังกล่าวซึ่งเป็นอัตราการป้อนสารเข้าหอกลั่น โดยมีการเบี่ยงเบนไม่เกิน 10 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}}$ และมีอัตราการ



(a) (b)

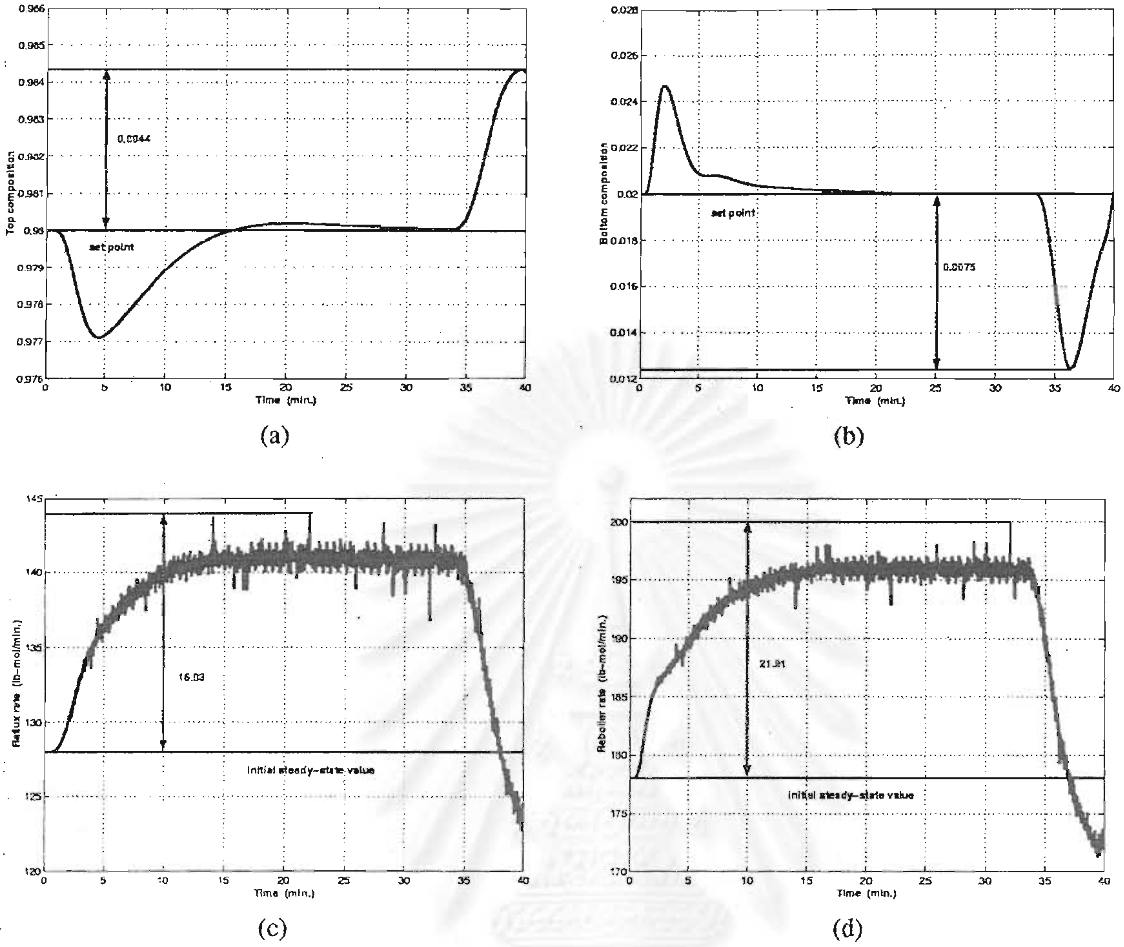
(c)

รูปที่ 6.13: สัญญาณเข้าที่ใช้ในการจำลองระบบไม่เชิงเส้นของหอกลั่นแยกสารสองชนิด: (a) สัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งสัมพันธ์กับค่า $\varphi(H_1)$ (b) สัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งสัมพันธ์กับค่า $\varphi(H_2)$ (c) สัญญาณเข้าสูงสุดใดๆ ในปริภูมิ $\mathcal{W}$

เปลี่ยนแปลงไม่เกิน 10 $\frac{\text{lb-mol}}{\text{min}^2}$ อนึ่งสัญญาณต่างๆที่อ้างถึงในตอนนี้ จะไม่ใช่ค่าเบี่ยงเบนจากจุดทำงานดังที่พิจารณาในขั้นตอนการออกแบบระบบที่ประมาณเป็นเชิงเส้น แต่เป็นค่าที่แท้จริงซึ่งก็คือค่าเบี่ยงเบนจากจุดทำงานบวกกับค่าที่จุดทำงานดังแสดงในสมการ (6.19)

เราใช้เวลาในการจำลองระบบเท่ากับ 40 นาที และระหว่างจำลองระบบจะบันทึกค่าความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอ (x_D) และฐานหอ (x_B) นอกจากนี้ยังบันทึกค่าอัตราการป้อนกลับ (L) และอัตราการต้มซ้ำ (V) ซึ่งเป็นสัญญาณควบคุมของระบบด้วย ผลการจำลองระบบสำหรับกรณีที่การรบกวนเป็นสัญญาณเข้าในรูปที่ 6.13(a) เป็นดังรูปที่ 6.14 ส่วนผลการจำลองระบบสำหรับกรณีที่การรบกวนเป็นสัญญาณเข้าในรูปที่ 6.13(b) เป็นดังรูปที่ 6.15 และสำหรับผลการจำลองระบบสำหรับกรณีที่การรบกวนเป็นสัญญาณเข้าในรูปที่ 6.13(c) เป็นดังรูปที่ 6.16

จากรูปที่ 6.14, 6.15 และ 6.16 เห็นได้ว่าอัตราการป้อนกลับและอัตราการต้มซ้ำวางตัวอยู่ภายในขอบเขตบนและขอบเขตล่างที่กำหนดไว้ กล่าวคือขนาดของค่าเบี่ยงเบนของอัตราไหลทั้งสองสอดคล้องกับสมการ (6.26) สำหรับค่าเบี่ยงเบนจากจุดทำงานของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอนั้น เรา

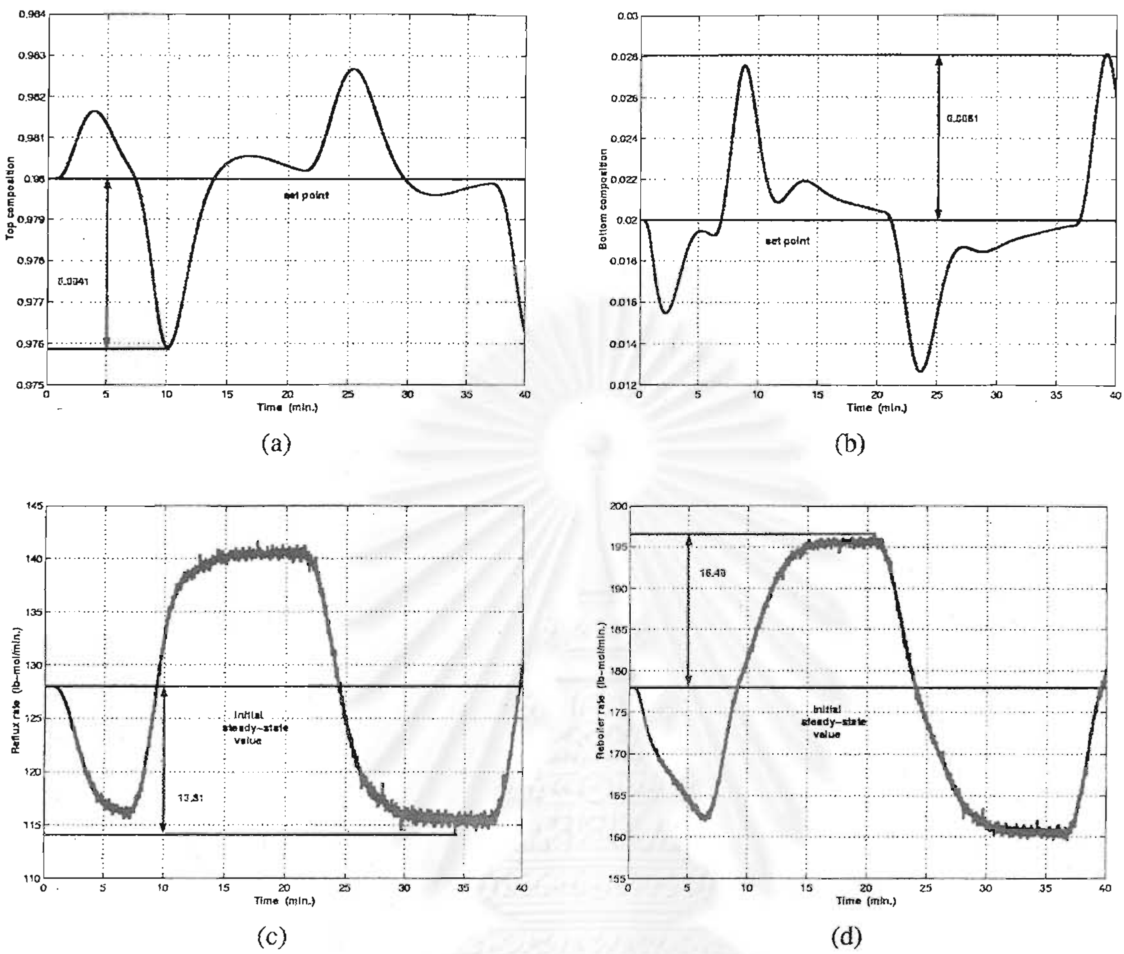


รูปที่ 6.14: ผลการจำลองระบบไม่เชิงเส้นของหอกลั่นแยกสารสองชนิดภายใต้การรบกวนซึ่งเป็นสัญญาณเข้าสูงสุดที่สัมพันธ์กับค่า $\varphi(H_1)$: (a) ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ (b) ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอ (c) อัตราการป้อนกลับ (d) อัตราการต้มซ้ำ

แสดงไว้ในตารางที่ 6.3

จากตารางที่ 6.3 เห็นได้ว่าค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอสำหรับสัญญาณเข้าในทุกกรณี จะมีค่าต่ำกว่า $\varphi(H_1)$ ในสมการ (6.36) ซึ่งเป็นค่าดรรชนีสมรรถนะที่ลดได้ ส่วนค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอสำหรับสัญญาณเข้าในทุกกรณี ก็จะมีค่าต่ำกว่า $\varphi(H_2)$ ในสมการ (6.36) ซึ่งเป็นค่าดรรชนีสมรรถนะที่ลดได้

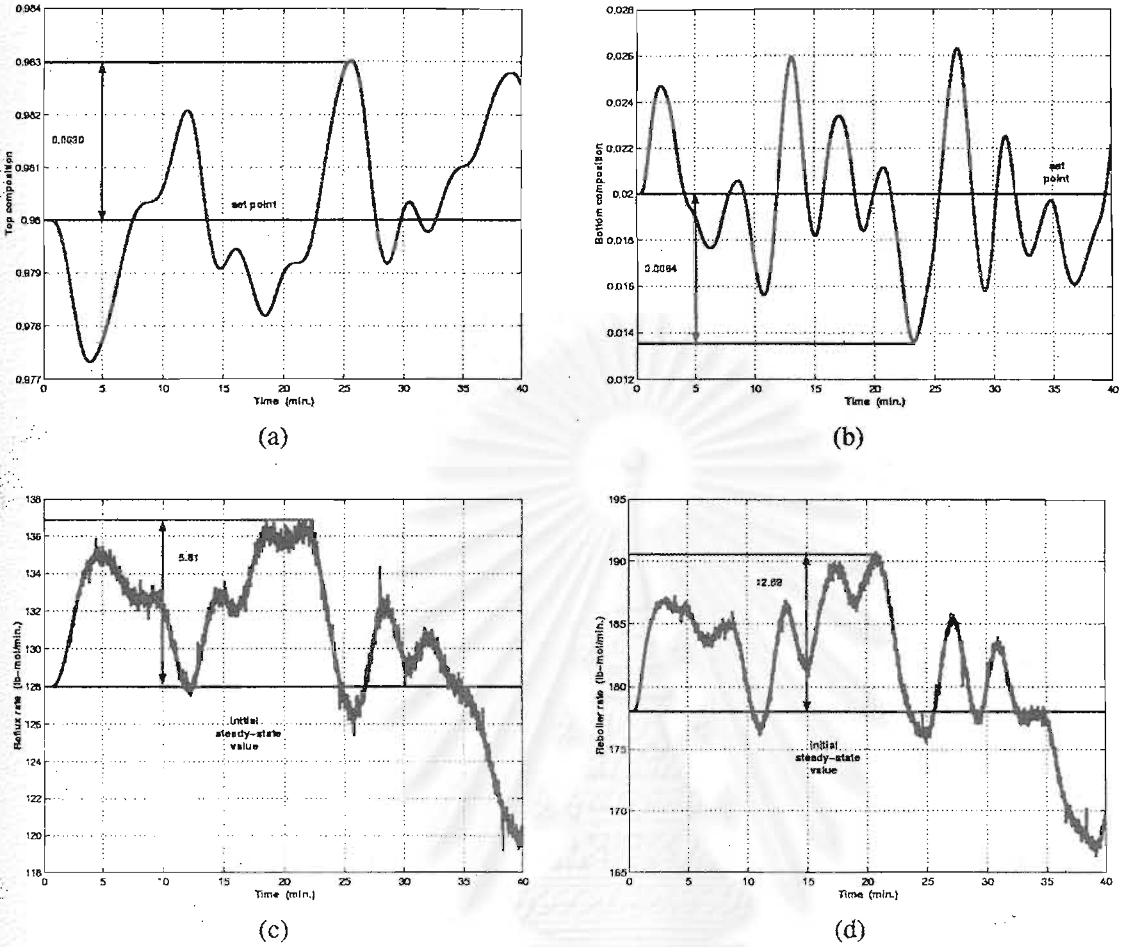
นอกจากนี้ สังเกตว่าค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอสำหรับสัญญาณเข้าในกรณีที่ 2 และ 3 นั้น มีค่าต่ำกว่าค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอสำหรับสัญญาณเข้าในกรณีที่ 1 ทั้งนี้เนื่องมาจากสัญญาณเข้าในกรณีที่ 1 เป็นสัญญาณเข้าสูงสุดที่ทำให้เกิดค่า $\varphi(H_1)$ จึงทำให้ค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ (ซึ่งเป็นสัญญาณออกของระบบ H_1) มีค่าสูงที่สุด อย่างไรก็ตามค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของผลิตภัณฑ์ยอดหอในกรณีสัญญาณเข้าแบบที่ 1 นี้ (0.0044) ควรมีค่าเท่ากับค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_1)$ (0.0049) แต่การที่มีค่าแตกต่างกันนั้นก็เนื่องมาจากค่า $\varphi(H_1)$ คำนวณมาจากระบบหอกลั่นที่ประมาณเป็นเชิงเส้นและลดอันดับแล้ว ในขณะที่ค่าเบี่ยงเบนสูง



รูปที่ 6.15: ผลการจำลองระบบไม่เชิงเส้นของหอกลั่นแยกสารสองชนิดภายใต้การรบกวนซึ่งเป็นสัญญาณเข้าสูงสุดที่สัมพันธ์กับค่า $\varphi(H_2)$: (a) ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ (b) ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอ (c) อัตราการป้อนกลับ (d) อัตราการต้มซ้ำ

สุดของผลิตภัณฑ์ยอดหอในกรณีสัญญาณเข้าที่ 1 นั้น เกิดขึ้นจากการจำลองระบบโดยใช้แบบจำลองไม่เชิงเส้นของระบบหอกลั่น ซึ่งมีความแตกต่างจากระบบที่ประมาณเป็นเชิงเส้นอยู่บ้าง

ในทำนองเดียวกัน ค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอสำหรับสัญญาณเข้าในกรณีที่ 1 และ 3 นั้น ก็มีค่าต่ำกว่าค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอสำหรับสัญญาณเข้าในกรณีที่ 2 ทั้งนี้เนื่องมาจากสัญญาณเข้าในกรณีที่ 2 เป็นสัญญาณเข้าสูงสุดที่ทำให้เกิดค่า $\varphi(H_2)$ จึงทำให้ค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอ (ซึ่งเป็นสัญญาณออกของระบบ H_2) มีค่าสูงที่สุด และด้วยเหตุผลเดียวกับกรณีของสัญญาณเข้าแบบที่ 1 เราพบว่าค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของผลิตภัณฑ์ยอดหอในกรณีสัญญาณเข้าแบบที่ 2 นี้ (0.0081) มีค่าไม่เท่ากับค่าดรรชนีสมรรถนะ $\varphi(H_2)$ (0.0091) ทั้งนี้ก็เนื่องมาจากความแตกต่างระหว่างระบบไม่เชิงเส้น กับระบบที่เป็นเชิงเส้นและประมาณเป็นอันดับต่ำนั่นเอง



รูปที่ 6.16: ผลการจำลองระบบไม่เชิงเส้นของหอกลั่นแยกสารสองชนิดภายใต้การรบกวนซึ่งเป็นสัญญาณเข้าใดๆ ในปริภูมิ W: (a) ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ (b) ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ฐานหอ (c) อัตราการป้อนกลับ (d) อัตราการต้มซ้ำ

6.5 สรุป

ในบทนี้เราอธิบายหลักการพื้นฐานในการกลั่นและสมการพลวัตของระบบหอกลั่นแยกสารสองชนิด รวมถึงการประมาณระบบหอกลั่นให้มีอันดับต่ำเพื่อใช้ในการออกแบบตัวควบคุม จากนั้นเราใช้ค่าดรรชนีสมรรถนะมาเป็นเครื่องมือในการกำหนดจุดประสงค์ และเงื่อนไขการออกแบบระบบควบคุมหอกลั่น ในที่นี้จุดประสงค์การออกแบบคือค่าที่เบี่ยงเบนไปของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอ ส่วนเงื่อนไขบังคับคือขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุม (ค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนกลับที่ยอดหอและค่าเบี่ยงเบนของอัตราการต้มซ้ำ) ที่จะต้องจำกัดอยู่ภายใต้ขอบเขตค่าหนึ่ง พารามิเตอร์ของขอบเขตของการรบกวนที่เข้าสู่หอกลั่น (ค่า M, D) และค่าเกณฑ์ที่ใช้เป็นข้อจำกัดของขนาดของสัญญาณควบคุมหอกลั่นนั้น ได้มาจากการพิจารณาลักษณะทางกายภาพของระบบหอกลั่นแยกสารสองสองชนิด

เส้นโค้งแลกเปลี่ยนที่แสดงไว้นั้นบ่งชี้ถึงการประนีประนอมกันระหว่างจุดประสงค์สองอย่าง อันได้แก่ค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอ และค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ฐานหอ ผล

ตารางที่ 6.3: ค่าเบี่ยงเบนสูงสุดของความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ยอดหอ และฐานหอ ในกรณีที่ระบบอยู่ภายใต้สัญญาณเข้าสูงสุดที่สัมพันธ์กับ $\varphi(H_1)$ สัญญาณเข้าสูงสุดที่สัมพันธ์กับ $\varphi(H_2)$ และสัญญาณเข้าใดๆ ในปริภูมิ $\mathcal{W}$

รูปแบบสัญญาณเข้า	ค่าเบี่ยงเบนสูงสุด ของความเข้มข้น ของผลิตภัณฑ์ยอดหอ	ค่าเบี่ยงเบนสูงสุด ของความเข้มข้น ของผลิตภัณฑ์ฐานหอ
สัญญาณเข้าสูงสุดที่สัมพันธ์กับ $\varphi(H_1)$	0.0044	0.0075
สัญญาณเข้าสูงสุดที่สัมพันธ์กับ $\varphi(H_2)$	0.0041	0.0081
สัญญาณเข้าใดๆ ในปริภูมิ $\mathcal{W}$	0.0030	0.0064

การจำลองกับระบบไม่เชิงเส้นโดยใช้การรบกวนหลายรูปแบบ แสดงให้เห็นว่าค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ทั้งสองวางตัวอยู่ต่ำกว่าค่าจุดประสงค์ที่ลดได้ ในขณะที่ขนาดสัญญาณควบคุมก็ถูกจำกัดอยู่ภายใต้ขอบเขตที่กำหนดไว้

บทที่ 7

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

7.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการสังเคราะห์ตัวควบคุม ซึ่งมีจุดประสงค์และเงื่อนไขการออกแบบกำหนดในเทอมของค่าดรรชนีสมรรถนะที่มีนิยามดังนี้

$$\hat{z} \triangleq \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \geq 0} |z(t,w)|$$

ดรรชนีสมรรถนะนี้คือค่าสูงสุดของสัญญาณออก z ที่เป็นไปได้ เมื่อพิจารณาจากทุกๆเวลา $t \geq 0$ โดยสัญญาณเข้า w ที่พิจารณาคือสัญญาณเข้าที่มีขนาดมีขอบเขตและอนุพันธ์มีขอบเขต เราได้ให้เหตุผลถึงความเหมาะสมในการจำลองการรบกวนของระบบบางชนิดในลักษณะของสัญญาณเข้าดังกล่าวไว้ด้วย บทสรุปของวิทยานิพนธ์อาจแยกเป็นข้อๆ ได้ดังต่อไปนี้

1. เนื้อหาส่วนใหญ่รวมถึงผลสำคัญที่ได้ในวิทยานิพนธ์นี้คือวิธีการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะดังกล่าวของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา รวมทั้งการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ ในบทที่ 3 เราได้แสดงให้เห็นว่าค่าดรรชนีสมรรถนะนี้อาจละเลยเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้ อีกทั้งอาจประมาณโดยใช้ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาสุดท้ายเข้าใกล้อนันต์ ซึ่งทำให้ปัญหาการคำนวณดรรชนีสมรรถนะกลายเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงเส้นในมิติอนันต์ ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังกล่าวถูกกำหนดให้เป็นปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุด ซึ่งมีข้อจำกัดของสัญญาณควบคุม และข้อจำกัดของตัวแปรสถานะ จากนั้นเราได้แสดงเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการควบคุมแบบเหมาะที่สุดดังกล่าว รวมทั้งเงื่อนไขมุม และช่วงผลเฉลยเอกฐานของการควบคุม ในเทอมของตัวแปรสถานะ สัญญาณควบคุม และดรรชนีการสวิตช์ ข้อมูลทั้งหมดถูกนำมาวิเคราะห์เพื่อหาลักษณะของสัญญาณควบคุมสูงสุด หรืออีกนัยหนึ่งคือสัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งทำให้เกิดค่าดรรชนีสมรรถนะขึ้นนั่นเอง เราได้แบ่งพิจารณาสัญญาณเข้าเป็นเขตเปลี่ยนค่าและเขตอิ่มตัวตามลักษณะของตัวมันเอง จากนั้นจึงแสดงลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดในเทอมของเวลาสวิตช์และค่าอ้างอิงการสวิตช์ของสัญญาณเข้าแต่ละเขต

2. เมื่อได้ลักษณะสัญญาณเข้าสูงสุดดังกล่าวแล้ว ในบทที่ 4 เราจึงได้พัฒนาโปรแกรมทั้งในส่วนของกรรมวิธีการสร้างสัญญาณเข้าให้ได้ตามลักษณะที่กำหนด และในส่วนของการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ขั้นตอนวิธีในการสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดเกิดจากการพิจารณาลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดโดยตรง แล้วคำนวณเวลาสวิตช์ในเขตเปลี่ยนค่าแต่ละเขต รวมทั้งสร้างสัญญาณเข้าสูงสุดที่จุดเวลาเริ่มต้น $t = 0$ และจุดเวลาสุดท้าย $t = T$ ด้วย ขั้นตอนวิธีดังกล่าวมีพื้นฐานสำคัญอยู่บนการมีอยู่จริงของสัญญาณเข้าสูงสุดซึ่งเปรียบเสมือนคำตอบของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงเส้นในมิติอนันต์ เราแสดงให้เห็นถึงการนำเวลาสวิตช์แต่ละจุดมาสร้างสัญญาณเข้าสูงสุด และคำนวณสัญญาณออกสูงสุดซึ่งเป็นค่าดรรชนีสมรรถนะที่ต้องการ

3. เนื่องจากดรรชนีสมรรถนะมีความเป็นคอนเวกซ์ เราจึงขยายผลทฤษฎีการวิเคราะห์สมรรถนะกับการออกแบบตัวควบคุม โดยในบทที่ 5 เราได้กล่าวถึงวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ วิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุมนี้สามารถบอกขีดจำกัดสมรรถนะของระบบควบคุมได้ ซึ่งนับเป็นข้อมูลที่มีประโยชน์และอาจใช้เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวควบคุมที่ใช้การสังเคราะห์ด้วยวิธีอื่นๆ ในบทนี้เราได้ให้ทฤษฎีพื้นฐานของการออกแบบตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์ ตั้งแต่การกำหนดรูปแบบปัญหาเชิงคอนเวกซ์จนถึงการแก้ปัญหาด้วยขั้นตอนวิธีเชิงทรงรี

4. จากนั้นในบทที่ 6 ได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานในการกลั่นและการคำนวณแบบจำลองหอกลั่นแยกสารสองชนิด รวมถึงการประมาณระบบหอกลั่นให้มีอันดับต่ำด้วย จากนั้นได้ประยุกต์ใช้ค่าดรรชนีสมรรถนะในการกำหนดจุดประสงค์หรือเงื่อนไขการออกแบบระบบควบคุมหอกลั่นแยกสารสองชนิด จุดประสงค์การออกแบบคือค่าที่เบี่ยงเบนไปของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอและฐานหอ ส่วนเงื่อนไขบังคับคือขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุม (ค่าเบี่ยงเบนของอัตราการป้อนกลับที่ยอดหอและค่าเบี่ยงเบนของอัตราการต้มซ้ำ) ที่จะต้องจำกัดอยู่ภายใต้ขอบเขตค่าหนึ่ง พารามิเตอร์ของข้อจำกัดของการรบกวนที่เข้าสู่หอกลั่น (ค่า M, D) และค่าเกณฑ์ที่ใช้เป็นข้อจำกัดขนาดของสัญญาณควบคุมหอกลั่นนั้น ได้มาจากการพิจารณาข้อจำกัดจริงของระบบทางกายภาพของหอกลั่นแยกสารสองสองชนิด ซึ่งได้แสดงให้เห็นถึงความเหมาะสมในการจำลองการรบกวนของระบบหอกลั่นด้วยปริภูมิสัญญาณเข้าที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ และความเหมาะสมของการใช้ดรรชนีสมรรถนะในการชี้บ่งขีดความสามารถของตัวควบคุมในเทอมของสัญญาณออกและสัญญาณควบคุมด้วย

เส้นโค้งแลกเปลี่ยนที่คำนวณได้นั้นชี้ให้เห็นถึงการประนีประนอมกันระหว่างจุดประสงค์สองอย่าง ได้แก่ค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ยอดหอ และค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ฐานหอ ผลการจำลองกับระบบไม่เชิงเส้นโดยใช้การรบกวนหลายรูปแบบ แสดงให้เห็นว่าค่าเบี่ยงเบนของความเข้มข้นผลิตภัณฑ์ทั้งสองวางตัวอยู่ต่ำกว่าค่าจุดประสงค์ที่ลดได้ ในขณะที่ขนาดสัญญาณควบคุมก็ถูกจำกัดอยู่ภายใต้ข้อกำหนดที่ตั้งไว้

ข้อเด่นของงานวิจัยในวิทยานิพนธ์

- ลักษณะการรบกวนที่มีขอบเขตของขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลงนั้น มีลักษณะใกล้เคียงกับการรบกวนจริงในกระบวนการทางอุตสาหกรรม ซึ่งนับเป็นการจำลองรูปแบบการรบกวนที่สมจริงกว่าการจำลองในลักษณะของสัญญาณขั้น หรือการจำลองเป็นสัญญาณรบกวนแบบสุ่ม ดังนั้นดรรชนีสมรรถนะที่นำเสนอนี้จึงอาจประยุกต์ใช้จริงกับการออกแบบระบบควบคุมทางอุตสาหกรรมได้

- ดรรชนีสมรรถนะที่นิยามขึ้นนี้มีความเป็นคอนเวกซ์ ทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับวิธีการออกแบบตัวควบคุมด้วยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ได้ ซึ่งมีข้อดีที่เห็นได้ชัดคือ วิธีนี้จะบ่งชี้ได้ว่าปัญหาการออกแบบตัวควบคุมมีคำตอบหรือไม่ ทำให้สามารถคำนวณขีดจำกัดสมรรถนะของระบบควบคุมได้

- ในส่วนของโปรแกรมสำหรับคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะนั้น เราได้พัฒนาบนพื้นฐานของโปรแกรม

MATLAB ซึ่งเป็นโปรแกรมที่มักใช้ในการศึกษาทางด้านระบบควบคุม ดังนั้นผู้ที่สนใจจะคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบใดๆ ก็อาจนำโปรแกรมช่วยคำนวณค่านี้ไปใช้งานได้โดยสะดวก

ข้อจำกัดของงานวิจัยในวิทยานิพนธ์

- การคำนวณดรรชนีสมรรถนะที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จำกัดอยู่เฉพาะระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีมิติจำกัด ซึ่งแสดงได้ด้วยแบบจำลองในปริภูมิสถานะ และยังต้องเป็นระบบแบบเหมาะสมแท้จริงอีกด้วย ดังนั้นการประยุกต์ใช้กับระบบที่มีลักษณะนอกเหนือจากนี้จึงต้องอาศัยการศึกษาเพิ่มเติม เพื่อขยายผลต่อไป
- เราใช้ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์แทนค่าดรรชนีสมรรถนะจริง ซึ่งทำให้ค่าที่คำนวณได้ผิดพลาดไปจากค่าจริงเล็กน้อย
- ตัวควบคุมที่คำนวณได้นั้นมีอันดับสูง ซึ่งเป็นผลมาจากการออกแบบด้วยวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ ด้วยเหตุนี้จึงอาจทำให้มีอุปสรรคในการนำตัวควบคุมที่ได้ไปใช้กับระบบหอกลั่นจริง

7.2 ข้อเสนอแนะในงานวิจัยนี้

เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้มีเนื้อหาส่วนใหญ่เกี่ยวข้องกับการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ และการพัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยในการคำนวณดังกล่าว ดังนั้นข้อเสนอแนะหลายข้อจึงเกี่ยวข้องกับความสมบูรณ์ทางทฤษฎีและโปรแกรมช่วยคำนวณ ซึ่งวิเคราะห์เป็นข้อๆ ได้ดังต่อไปนี้

1. ในบทที่ 3 เราได้แสดงให้เห็นว่าถ้าสัญญาณเข้ามีข้อจำกัดที่เวลาเริ่มต้น $w(0) = 0$ ก็จะได้ว่าดรรชนีสมรรถนะหรือสัญญาณออกสูงสุดจะเกิดขึ้นที่เวลาเท่ากับอนันต์นั่นคือ

$$\hat{z} = \hat{z}(\infty) = \sup_{w \in \mathcal{W}} \lim_{t \to \infty} \{w(t) * h(t)\}$$

อย่างไรก็ตามปริภูมิสัญญาณเข้าที่เราพิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มิได้รวมเอาเงื่อนไขที่เวลาเริ่มต้นไว้ด้วย ดังนั้นค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาเข้าใกล้อนันต์ $\hat{z}(\infty)$ กับค่าดรรชนีสมรรถนะจริง $\hat{z}$ จึงอาจมิใช่ค่าเดียวกัน และอาจเกิดความผิดพลาดซึ่งมีค่าเท่ากับ ϵ_∞ ถ้าเราใช้ค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาเข้าใกล้อนันต์แทนค่าดรรชนีสมรรถนะจริง (ดูตอนที่ 3.1) ทั้งนี้สำหรับระบบหอกลั่นนั้นเราแสดงให้เห็นว่าค่า D ที่ใช้มีค่าสูงพอสมควร ทำให้ $\frac{2M}{D}$ มีค่าน้อยกว่าค่าคงตัวเวลาของระบบ และทำให้ค่าผิดพลาด ϵ_∞ มีค่าใกล้ศูนย์ อย่างไรก็ตามการอ้างเหตุผลดังกล่าวนี้ควรแสดงให้เห็นจริงในขณะที่โปรแกรมช่วยออกแบบกำลังคำนวณตัวควบคุมด้วย กล่าวคือทุกๆครั้งที่โปรแกรมช่วยออกแบบ (สำหรับการสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์) เรียกใช้โปรแกรมคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะ เราควรแสดงให้เห็นว่าค่า $\frac{2M}{D}$ มีค่าน้อยกว่าค่าคงตัวเวลาของระบบวงปิดที่พิจารณาอยู่จริง ซึ่งอาจทำได้โดยการเพิ่มคำสั่งให้โปรแกรมคำนวณค่าคงตัวเวลาของระบบวงปิดและแสดงผลเปรียบเทียบกับค่า $\frac{2M}{D}$ ของปริภูมิสัญญาณเข้าของระบบ

2. ควรพิสูจน์การมีอยู่เพียงหนึ่งเดียว (Uniqueness) ของสัญญาณเข้าสูงสุดไว้ด้วย เพื่อแสดงให้เห็นว่ามีสัญญาณเข้าเพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้เกิดสัญญาณออกสูงสุด (ถ้าไม่นับสัญญาณเข้าที่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับสัญญาณเข้าสูงสุดที่ทุก ๆเวลา)

3. วิธีการกำหนดค่า D ซึ่งเป็นข้อจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของการรบกวนที่เข้าสู่หอกลั่นนั้น ยังหละหลวมอยู่ กล่าวคือข้อมูลที่ใช้ในการกำหนดค่า D เป็นเพียงการรวบรวมข้อมูลแบบปากเปล่าจากผู้มีความรู้ทางด้านระบบหอกลั่นเท่านั้น แต่ยังมิได้มีการอ้างอิงจากหนังสือ บทความหรือเอกสารอ้างอิงใดๆ แนวทางหนึ่งที่อาจทำให้การกำหนดค่า D รัดกุมขึ้น คือการรวบรวมข้อมูลของการรบกวนหรืออัตราป้อนเข้าของระบบหอกลั่นจริงในอุตสาหกรรม เพื่อนำมาพิจารณาการกำหนดค่า D ดังกล่าว

4. ภายในโปรแกรมช่วยคำนวณดรรชนีสมรรถนะนั้น ประกอบด้วยค่าความแม่นยำหรือเกณฑ์ความแม่นยำ (Accuracy criterion) อยู่ 2 ค่า ได้แก่เกณฑ์ความแม่นยำในขั้นตอนวิธีแบ่งสองส่วน และเกณฑ์ตรวจสอบค่าผลบวกสะสมสัมพัทธ์ (ดูตอนที่ 4.2.2) นอกจากนี้ยังมีค่าความละเอียด (Resolution) 1 ค่า ได้แก่ค่าความละเอียดการสุ่มค่าในขั้นตอนการจำลองผลตอบสนองสัญญาณขั้น จากบทที่ 4 จะเห็นว่าค่าเกณฑ์ทั้งสองนั้นขึ้นอยู่กับความละเอียดในการสุ่มค่า จากการที่ได้ทดลองใช้โปรแกรมกับระบบหลายลักษณะ เราพบว่าถ้าหากความละเอียดในการสุ่มค่าต่ำเกินไป การคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะก็อาจผิดพลาดได้ ซึ่งโปรแกรมช่วยคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะจะแจ้งว่าความละเอียดในการสุ่มค่าต่ำเกินไป สิ่งที่ผู้ใช้ต้องทำคือเพิ่มค่าความละเอียดขึ้นตามที่เห็นว่าเหมาะสมและคำนวณใหม่ ขั้นตอนนี้เราอาจพัฒนาให้โปรแกรมคำนวณแทนได้ว่าควรเพิ่มความละเอียดขึ้นเท่าใด โดยใช้ข้อมูลจากการผิดพลาดที่เกิดขึ้น

5. ในส่วนของโปรแกรมช่วยออกแบบสำหรับการสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์นั้น ยังมีข้อจำกัดในการประยุกต์ใช้กับระบบที่มีอันดับสูงๆ (ในวิทยานิพนธ์นี้เราพัฒนาโปรแกรมช่วยออกแบบดังกล่าวโดยใช้โปรแกรม MATLAB) จึงทำให้ต้องลดอันดับของระบบหอกลั่นแยกก่อนถึงจะออกแบบตัวควบคุมได้ (ดูบทที่ 6) แนวทางที่อาจแก้ปัญหาข้อจำกัดนี้ได้คือเปลี่ยนไปใช้โปรแกรมภาษาพื้นฐานเช่นภาษาซี (C) หรือภาษาฟอร์ทราน (Fortran) ซึ่งเราสามารถเข้าไปแก้ไขหรือพัฒนาได้มากกว่าและลึกกว่าการพัฒนาฟังก์ชันบน MATLAB อีกทางเลือกหนึ่งที่เป็นไปได้ก็คือประยุกต์ใช้โปรแกรม MATLAB ติดต่อกับภาษาซีหรือฟอร์ทราน โดยการเขียนเม็กไฟล์ (Mex file) เพื่อใช้ความสามารถของภาษาซีหรือฟอร์ทรานผ่านทาง MATLAB ซึ่งจะทำให้การทำงานในส่วนของการวนรอบ (Loop) มีความเร็วมากขึ้นด้วย

7.3 สิ่งที่ควรทำในงานวิจัยต่อไป

การกำจัดค่าความแตกต่าง ϵ_∞

สิ่งแรกที่ควรขยายผลต่อไปคือการกำจัดค่า ϵ_∞ ในการประมาณค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัด (ดูตอนที่ 3.1) สิ่งที่ทำให้เกิดค่าความแตกต่าง ϵ_∞ นี้ คือการที่เราพิจารณาค่าดรรชนีสมรรถนะที่เวลาอนันต์

$$\hat{z}(\infty) \quad = \quad \sup_{w \in \mathcal{W}} \lim_{t \to \infty} \{w(t) * h(t)\}$$

แทนที่จะพิจารณาค่าดรรชนีสมรรถนะแท้จริงนั่นคือ

$$\hat{z} = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{t \neq 0} \{w(t) * h(t)\}$$

ดังนั้นถ้าหากต้องการกำจัดค่า ϵ_∞ นี้ เราจำเป็นต้องพิจารณาค่าสูงสุดของสัญญาณออกที่แต่ละเวลามิใช่ที่เวลาเข้าใกล้อนันต์เท่านั้น วิธีแก้ปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะนี้อาจทำได้โดย คำนวณค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่แต่ละเวลา t โดยใช้เซตของจุดเวลาที่หนาแน่นพอสมควร แล้วเปรียบเทียบค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะดังกล่าวเพื่อหาจุดเวลาที่ทำให้ค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะมีค่าสูงสุด ซึ่งก็จะได้ว่าค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลานั้นคือดรรชนีสมรรถนะที่แท้จริงของระบบนั่นเอง อย่างไรก็ตาม เราอาจประยุกต์ใช้วิธีกำหนดรูปแบบปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุดดังที่แสดงไว้ในตอนที่ 3.2 โดยกำหนดเป็นปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุดซึ่งมิได้ระบุเวลาสุดท้าย กล่าวโดยละเอียดคือปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุดในสมการ (3.23) ต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูป

$$\begin{array}{lll}
\sup_u & \mathcal{J} = Cx(T) & \\
\text{subject to} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx_{n+1}(t) & x(0) = 0 \\
& \dot{x}_{n+1}(t) = u(t) & x_{n+1}(0) \text{ ไม่กำหนด} \\
& -M \leq x_{n+1}(t) \leq M & 0 \leq t \leq T \\
& -D \leq u(t) \leq D & 0 \leq t \leq T \\
& T \text{ ไม่กำหนด} &
\end{array}$$

เงื่อนไขจำเป็นของปัญหาในลักษณะนี้อธิบายอยู่ในหนังสือของ Sage และ White [16], Kirk [17], Pontryagin *et al.* [19], หรือใน Bryson และ Ho [61] นอกจากนี้อาจศึกษาเพิ่มเติมได้จากบทความสำรวจของ Polak [62] ส่วนวิธีที่จะนำมาแก้ปัญหานั้นอาจต้องใช้การคำนวณเชิงตัวเลขเข้ามาช่วย

สัญญาณเข้ามีเงื่อนไขที่เวลาสุดท้าย

ปริภูมิสัญญาณเข้าที่นิยามไว้ในบทที่ 2 นั้น กล่าวถึงข้อจำกัดของขนาดและอนุพันธ์ของสัญญาณเข้าเท่านั้น แต่มิได้กำหนดเงื่อนไขขอบเขตแต่อย่างใด โดยปกติแล้วเรามักไม่สนใจและไม่วางเงื่อนไขค่าสัญญาณเข้า (ในที่นี้คือการรบกวน) ที่เวลาสุดท้าย อย่างไรก็ตามเมื่อสัญญาณเข้า w มีเงื่อนไขที่เวลาสุดท้ายหรือเวลา T นั้น เงื่อนไขขวางหรือเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (3.38) จะหายไป ทำให้การวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณเข้าสูงสุดในตอนที่ 3.5 ต้องเริ่มต้นจากปลายด้านเวลาสุดท้าย $t = T$ และอาจต้องใช้หลักการวิเคราะห์ที่ต่างออกไป

ดรรชนีสมรรถนะของระบบเหมาะสมเชิงคู่

ดรรชีสมรรถนะที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นดรรชนีสมรรถนะของระบบเชิงเส้นซึ่งมีสมบัติเหมาะสมโดยแท้ ซึ่งเป็นลักษณะของระบบกายภาพทั่วไป เนื่องจากระบบเหล่านี้มักมีขนาดผลตอบสนองต่อสัญญาณเข้าที่จำกัดอยู่ในช่วงแถบกว้างความถี่ (Bandwidth) ช่วงหนึ่งๆ นั่นคือระบบทางกายภาพมักมีผลตอบสนองต่ำที่ความถี่สูงๆ อย่างไรก็ตามยังมีระบบบางประเภทที่มีคุณสมบัติเหมาะสม (Proper) แต่มิได้เหมาะ

สมโดยแท้ (Strictly proper) เราเรียกระบบจำพวกนี้ว่า*ระบบเหมาะสมเชิงคู่* (Biproper) เมทริกซ์ป้อนผ่านตลอดในสมการสถานะของระบบเหล่านี้จะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือสมการสถานะที่อธิบายพลวัตของระบบในลักษณะนี้เป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ z(t,w) &= Cx(t) + Ew(t)\end{aligned}$$

ในกรณีนี้เมทริกซ์ผ่านตลอดเป็นค่าสเกลาร์ เนื่องจากเราพิจารณาเฉพาะระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณ การที่พารามิเตอร์ E เพิ่มเข้ามาในสมการสถานะนี้ ทำให้ฟังก์ชันนัลต้นทุน $\mathcal{J}$ (หรือค่าสัญญาณออก $z(t,w)$) ของปัญหาการควบคุมแบบเหมาะที่สุดในสมการ (3.23) เปลี่ยนไปเป็น

$$\mathcal{J} \triangleq Cx(T) + Ex_{n+1}(T) \tag{7.1}$$

โดยที่ T คือเวลาสุดท้ายของปัญหา (ซึ่งอาจกำหนดตายตัวตามที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ หรืออาจไม่ระบุค่าก็ได้ถ้าต้องการคำนวณดรรชนีสมรรถนะแท้จริง) การเปลี่ยนแปลงค่าฟังก์ชันนัลต้นทุน $\mathcal{J}$ ส่งผลให้เงื่อนไขขวางของดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ ในการควบคุมแบบเหมาะที่สุดเปลี่ยนไป กล่าวคือสมการ (3.38) จะเปลี่ยนเป็น

$$p_{n+1}(T) = E$$

เมื่อเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาสุดท้าย T เปลี่ยนไป รูปแบบของสัญญาณเข้าสูงสุดจึงเปลี่ยนไปด้วย และไม่สามารถหาคำตอบได้โดยใช้วิธีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้โดยตรง

ในกรณีที่เราพิจารณาระบบเหมาะสมเชิงคู่โดยที่สัญญาณเข้า w มีเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาสุดท้าย เห็นได้ว่าค่า $x_{n+1}(T)$ จะถูกกำหนดตายตัว ดังนั้นฟังก์ชันนัลต้นทุน $\mathcal{J}$ มีค่าเท่ากับ $Cx(T)$ บวกด้วยค่าคงตัว $Ex_{n+1}(T)$ เพราะฉะนั้นเราอาจพิจารณาเพียงการหาค่าเหมาะที่สุดของค่าฟังก์ชันนัลต้นทุน $\mathcal{J} = Cx(T)$ เท่านั้นก็พอ ส่วนเงื่อนไขขวางของดรรชนีสวิตช์ $p_{n+1}(t)$ จะหายไปเนื่องจากมีเงื่อนไขสัญญาณเข้าที่เวลาสุดท้ายมาแทน

ดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีเวลาประวิง

ในตอนที่ 2.7 เราได้กล่าวถึงแนวทางการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบที่มีเวลาประวิง โดยอาศัยการคำนวณดรรชนีสมรรถนะที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ด้วยแนวทางดังกล่าวทำให้เราสามารถกำหนดเกณฑ์สมรรถนะหรือเกณฑ์การออกแบบของระบบที่มีเวลาประวิง ในเทอมของค่าดรรชนีสมรรถนะได้ ดังนั้นการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยอาศัยค่าดรรชนีสมรรถนะนี้ จึงอาจครอบคลุมไปถึงระบบเชิงเส้นที่มีเวลาประวิงด้วยเช่นกัน

ดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ

ในตอนที่ 2.6 เราได้แสดงให้เห็นถึงการแปลงปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณ ให้อยู่ในรูปของปัญหาการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณ-สัญญาณออกหนึ่งสัญญาณ วิธีการพิสูจน์ที่แสดงไว้นั้นยังไม่ค่อยรัดกุมนัก เนื่องจากจะต้องพิจารณาเงื่อนไขที่เวลาเริ่มต้น $(t = 0)$ ของสัญญาณเข้าด้วย หรือมิฉะนั้นก็จะต้อง

พิจารณาค่าสูงสุดของสัญญาณออกที่แต่ละเวลา (มิใช่ค่าสูงสุดที่เวลาเข้าใกล้อนันต์) ถ้าหากสามารถอธิบายวิธีการคำนวณค่าดรรชนีสมรรถนะของระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ-สัญญาณออกหลายสัญญาณได้อย่างชัดเจนแล้ว การประยุกต์ใช้ดรรชนีสมรรถนะกับระบบหลายตัวแปร (Multivariable systems) โดยตรง ก็นับเป็นงานวิจัยที่น่าสนใจ

ดรรชนีสมรรถนะในระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

เราสามารถพิจารณาดรรชนีสมรรถนะในระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง ได้ในทำนองเดียวกับการพิจารณาดรรชนีสมรรถนะในระบบเวลาต่อเนื่องซึ่งนำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ กำหนดแบบจำลองในปริภูมิสถานะของระบบเชิงเส้นในเวลาไม่ต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} x[i+1] &= \Phi x[i] + \Gamma w[i] \\ z[i] &= Cx[i] \end{aligned}$$

รูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้า-สัญญาณออกของระบบดังกล่าวอาจแสดงได้ในรูปของสังวัตนาการในเวลาไม่ต่อเนื่องดังนี้

$$z[i] = w[i] * h[i] = \sum_{j=0}^{i} h[j]w[i-j]$$

ซึ่งทำให้เรานิยามดรรชนีสมรรถนะสำหรับระบบเวลาไม่ต่อเนื่องได้คือ

$$\hat{z} \triangleq \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{i \geq 0} |w[i] * h[i]| \tag{7.2}$$

โดยที่ $\mathcal{W}$ เป็นปริภูมิสัญญาณเข้าที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งมีข้อจำกัดขนาดและข้อจำกัดของอัตราการเปลี่ยนแปลง สำหรับระบบในเวลาไม่ต่อเนื่องนั้นค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงก็คือค่าผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference) ถ้ากำหนดให้ τ เป็นคาบการสุ่มสำหรับระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง ปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathcal{W}$ อาจนิยามได้ดังนี้

$$\mathcal{W} \triangleq \{w[i] : |w[i]| \leq M,\ |w[i+1] - w[i]| \leq \tau D,\ \forall i \geq 0\}^1 \tag{7.3}$$

ในทำนองเดียวกับระบบเวลาต่อเนื่อง เราพบว่าค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณออกที่ปรากฏอยู่ในดรรชนีสมรรถนะอาจละเลยได้ นั่นคือ

$$\hat{z} \triangleq \sup_{w \in \mathcal{W}} \sup_{i \geq 0} \{w[i] * h[i]\} \tag{7.4}$$

จากสมการ (7.4) เราอาจนิยามค่าประมาณดรรชนีสมรรถนะที่เวลาจำกัดได้ดังนี้

$$\hat{z}[N] \triangleq \sup_{w \in \mathcal{W}} \{w[N] * h[N]\}$$

---

[1]เงื่อนไขข้อจำกัดของอนุพันธ์ของสัญญาณเข้าหรือ $|w[i+1] - w[i]| \leq \tau D$ อาจแสดงได้อีกแบบหนึ่งซึ่งสมมูลกันคือ

$$\left|\frac{w[i] - w[j]}{i - j}\right| \leq \tau D \qquad \forall i, j \geq 0$$

ซึ่งทำให้ได้ปัญหาการหาค่าสูงสุดในปริภูมิมิติจำกัด R^N ในลักษณะคล้ายกับปัญหาในสมการ (3.20)

$$\begin{array}{lll} \sup\limits_{w\in\mathcal{W}} & z[N] & \\ \text{subject to} & z[i] = \sum_{j=0}^{i} h[j]w[i-j] & \forall i \geq 0 \\ & |w[N]| \leq M & 0 \leq i \leq N \\ & |w[i+1]-w[i]| \leq \tau D & 0 \leq i \leq N \end{array} \tag{7.5}$$

ถ้ากำหนดให้ $c \in \mathrm{R}^N$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งแทนอนุกรมเวลา (Time series) ของระบบ $h[i]$ ตั้งแต่ $i = N$ ย้อนไปจนถึง $i = 0$ กล่าวคือ

$$c = \Big[h[N],\ h[N-1],\ \ldots,\ h[1],\ h[0]\Big]^T$$

และให้ตัวแปร $x \in \mathrm{R}^N$ แทนเวกเตอร์อนุกรมเวลาของสัญญาณเข้า w ตั้งแต่ $i = 0$ ถึง $i = N$ เราพบว่าปัญหาการหาค่าสูงสุดในสมการ (7.5) อาจแสดงได้ในลักษณะของโปรแกรมเชิงเส้น (Linear programming) ซึ่งมีมิติเท่ากับ N ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \sup\limits_{x\in\mathrm{R}^N} & c^T x \\ \text{subject to} & \Lambda_1 x \leq M \\ & \Lambda_1 x \geq -M \\ & \Lambda_2 x \leq \tau D \\ & \Lambda_2 x \geq -\tau D \end{array}$$

เมื่อเมทริกซ์ $\Lambda_1 \in \mathrm{R}^{N\times N}$ และ $\Lambda_2 \in \mathrm{R}^{(N-1)\times N}$ คือ

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่ได้เป็นปัญหาที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย และอาจคำนวณคำตอบได้ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์เช่นกรรมวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method) แต่ถ้าหากมิติของปัญหามีค่าสูงอาจต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขเช่นกรรมวิธีจุดภายใน (Interior point) เนื้อหาเกี่ยวกับโปรแกรมเชิงเส้นและวิธีการคำนวณคำตอบอาจศึกษาเพิ่มเติมได้ในหนังสือของ Nash และ Sofer [63] หรือใน Fletcher [64]

ประยุกต์ใช้ค่าดรรชนีสมรรถนะกับระบบกายภาพอื่นๆ

ในบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงระบบกายภาพหลายลักษณะที่อาจจำลองการรบกวนในแบบเดียวกับหอกลั่นแยกสารสองชนิด การรบกวนที่เข้าสู่ระบบเหล่านั้นมักเป็นลักษณะของของเหลวหรือก๊าซซึ่งมีมวล จึงมักทำให้การรบกวนมีข้อจำกัดของขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลง จุดประสงค์ในการควบคุมของระบบดังกล่าวมักเป็นการรักษาสัญญาณออกของระบบให้อยู่ในช่วงค่าหนึ่งๆ เมื่อมีการรรบกวนเข้าสู่ระบบ ระบบกายภาพในลักษณะนี้จึงอาจนิยามเกณฑ์สมรรถนะในเทอมของดรรชนีสมรรถนะที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ได้ และอาจนำไปใช้เป็นเกณฑ์การออกแบบระบบควบคุม เพื่อให้ตัวควบคุมมีประสิทธิภาพในการขจัดการ

รบกวนมากขึ้น

ประยุกต์ใช้ร่วมกับดรรชนีสมรรถนะคอนเวกซ์อื่นๆ

เนื่องจากดรรชนีสมรรถนะที่ได้ให้ไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ (ดูตอนที่ 2.4) จึงสามารถใช้ในการออกแบบตัวควบคุมหลายจุดประสงค์ (Multi-objective control design) โดยใช้วิธีสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงคอนเวกซ์ที่กล่าวไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ซึ่งเรียบเรียงมาจาก [4, 5] ตัวอย่างของดรรชนีสมรรถนะอื่นๆที่มีความเป็นคอนเวกซ์คือ

- ส่วนพุ่งเกินสูงสุด (Maximum overshoot) และส่วนพุ่งขาดสูงสุด (Maximum undershoot)
- ช่วงเวลาเข้าที่ (Settling-time)
- ค่าสูงสุดของสัญญาณควบคุม (Maximum control signal)
- ช่วงเวลาขึ้น (Rise time)
- ค่ายอดอัตราขยาย (Peak gain) หรือนอร์มหนึ่ง ($\mathcal{L}_1$−norm)
- ค่าผลตอบประสิทธิผล (RMS response) หรือนอร์มสอง ($\mathcal{H}_2$−norm)
- ค่าสูงสุดของขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอน (Peak magnitude of transfer function) หรือนอร์มอนันต์ ($\mathcal{H}_\infty$−norm)

Boyd และ Barratt ได้พิสูจน์ความเป็นคอนเวกซ์ของดรรชนีสมรรถนะเหล่านี้ไว้ใน [4]

รายการอ้างอิง

1. J. B. Burl, *Linear Optimal Control: $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Methods.* California: Addison–Wesley, 1999.

2. G. E. Dullerud and F. Paganini, *A Course in Robust Control Theory: a Convex Approach.* New York: Springer, 2000.

3. K. Zhou and J. C. Doyle, *Essential of Robust Control.* New Jersey: Prentice-Hall, 1998.

4. S. Boyd and C. Barratt, *Linear Controller Design: Limits of Performance.* New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

5. S. Boyd, V. Balakrishnan, C. Barratt, N. Khraishi, X. Li, D. Meyer, and S. Norman, "A New CAD Method and Associated Architectures for Linear Controller," *IEEE Trans. Aut. Control*, 33, 3, (1988): 268–275.

6. B. Birch and R. Jackson, "The Behaviour of Linear Systems with Inputs Satisfying Certain Bounding Conditions," *Journal of Electronics and Control*, 6, 4, (1959): 366–375.

7. J. J. Bongiorno Jr., "On the Response of Linear Systems to Inputs with Limited Amplitudes and Slopes," *SIAM Review*, 9, 3, (1967): 554–563.

8. P. G. Lane, *Design of Control Systems with Inputs and Outputs Satisfying Certain Bounding Conditions.* PhD thesis, UMIST, Manchester, UK, October 1992.

9. G. Saridis and Z. V. Rekasius, "Investigation of Worst-Case Errors when Inputs and Their Rate of Change are Bounded," *IEEE Trans. Aut. Control*, 11, 2, (1966): 296–300.

10. I. M. Horowitz, *Synthesis of Feedback Systems.* London: Academic Press, 1963.

11. P. E. Pfeiffer, "The Maximum Response Ratio of Linear Systems," *Trans. of the American Institute of Electrical Engineers, Part 2*, 73, (1954): 480–483.

12. D. R. Howard and Z. V. Rekasius, "Error Analysis with the Maximum Principle," *IEEE Trans. Aut. Control*, 9, 3, (1964): 223–229.

13. V. Zakian, "A Performance Criterion," *Int. J. Control*, 43, 3, (1986): 921–931.

14. R. Jackson, "The Design of Control Systems with Disturbances Satisfying Certain Bounding Conditions with Application to Simple Level Control Systems," in *Proc. the 1st international congress of the International Federation of Automatic Control*, (1960): 498–509.

15. S. S. L. Chang, "Minimal Time Control with Multiple Saturation Limits," *IRE International Convention Record*, 10, 2, (1962): 143–151.

16. A. P. Sage and C. C. White III, *Optimum System Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1977.

17. D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: an Introduction*. New Jersey: Prentice-Hall, 1970.

18. R. Bellman, *Dynamic Programming*. New Jersey: Princeton University Press, 1957.

19. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley and Sons, 1962.

20. G. Schneider, "Reglersynthese für Systeme mit Begrenzungen," *Regelungstechnik*, (1977): 4–12.

21. V. Zakian, "New Formulation for the Method of Inequalities," *IEE Proc.*, 126, 6, (1979): 579–584.

22. S. Boyd and C. Barratt, "Closed-Loop Convex Formulation of Classical and Singular Value Loop Shaping," *Control and Dynamic Systems*, 55, (1993): 1–24.

23. S. Boyd, C. Barratt, and S. Norman, "Linear Controller Design: Limits of Performance via Convex Optimization," in *Proc. IEEE*, (1990): 529–574.

24. H. Hindi, B. Hassibi, and S. Boyd, "Multi-Objective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$-Optimal Control via Finite Dimensional Q-Parameterization and Linear Matrix Inequalities," in *Proc. American Control Conf.*, (1998): 3244–3249.

25. W. Khaisongkram and D. Banjerdpongchai, "MATLAB Based GUIs for Linear Controller Design via Convex Optimization," in *Proc. American Control Conf.*, (2002): 1660–1665.

26. W. Khaisongkram and D. Banjerdpongchai, "MATLAB Based GUIs for MIMO Linear Controller Design," in *Proc. Asian Control Conf.*, (2002): 1981–1986.

27. H. Musch and M. Steiner, "μ-Optimal Advanced PID Control of and Industrial High Purity Distillation Column," in *Proc. the 3rd IEEE Conf. Control Applications*, (1994): 281–288.

28. J. Raisch, L. Lang, and E.-D. Gilles, "Reversed Frame Normalizing Design of a Decentralized Control System for a Binary Distillation Column," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, (1990): 1153–1155.

29. J. Raisch, L. Lang, and M. Groebel, "Loop Shaping Controller Design for a Binary Distillation Column," in *International Conf. Control*, (1991): 1271–1276.

30. M. T. Tham, F. Vagi, A. J. Morris, and R. K.Wood, "Multivariable and Multirate Self-Tuning Control: A Distillation Column Case Study," *IEE Proc. Control Theory and Applications*, 138, 1, (1991): 9–24.

31. J. H. Lee and M. Morari, "Robust Control Structure Selection and Control System Design Methods Applied to Distillation Column Control," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, (1990): 2041–2046.

32. C. Zhou, J. R. Whiteley, E. A. Misawa, and K. A. M. Gasem, "Application of Enhanced LQG/LTR for Distillation Control," *IEEE Control Systems*, (1995): 56–63.

33. R. K. Wood and M. W. Berry, "Terminal Composition Control of a Binary Distillation Column," *Chem. Engng Sci.*, 28, (1973): 1707–1717.

34. W. L. Luyben, *Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. (n.p.): Singapore: McGraw-Hill, 1990.

35. W. L. Luyben, *Practical Distillation Control*. (n.p.): Van Nostrand, 1992.

36. M. Morari and E. Zafiriou, *Robust Process Control*. (n.p.): Prentice-Hall, 1989.

37. S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control*. UK: John Wiley and Sons, 1996.

38. S. Skogestad, "Dynamics and Control of Distillation Column: A Tutorial Introduction," *Trans. IChemE*, 75, A, (1997): 539–562.

39. R. W. Rousseau, *Handbook of Separation Process Technology*. (n.p.): John Wiley and Sons, 1987.

40. R. J. Hengstebeck, *Distillation: Principles and Design Procedures*. Florida: R. E. Krieger, 1976.

41. D. M. Himmelblau and K. B. Bischoff, *Process Analysis and Simulation: Deterministic Systems*. New York: John Wiley and Sons, 1968.

42. G. Stephanopoulos, *Chemical Process Control: An Introduction to Theory and Practice*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

43. C. D. Holland, *Fundamentals of Multicomponent Distillation*. (n.p.): McGraw-Hill, 1981.

44. V. Zakian, "Well Matched Systems," *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, 8, (1991): 29–38.

45. E. J. Anderson and P. Nash, *Linear Programming in Infinite Dimensional Spaces*. New York: John Wiley and Sons, 1987.

46. N. Elia and M. A. Dahleh, "Controller Design with Multiple Objectives," *IEEE Trans. Aut. Control*, 42, 5, (1997): 596–613.

47. G. Deodhare, *Design of Multivariable Linear Systems using Infinite Linear Programming*. PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1990.

48. P. Voulgaris, "Optimal $\mathcal{H}_2/l_1$ Control: The SISO Case," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, (1994): 3181–3186.

49. M. Sznaier, "Mixed $l_1/\mathcal{H}_\infty$ Controller for MIMO Discrete-Time Systems," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, (1994): 3187–3191.

50. M. Rotea and P. P. Khargonekar, "Generalized $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control via Convex Optimization," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, (1991): 2719–2720.

51. H. Rotstein and A. Sideris, "$\mathcal{H}_\infty$ Optimization with Time Domain Constraints," *IEEE Trans. Aut. Control*, 39, (1994): 762–779.

52. M. Sznaier, H. Rostein, J. Bu, and A. Sideris, "An Exact Solution to Continuous-Time Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control Problems," *IEEE Trans. Aut. Control*, 45, 11, (2000): 2095–2101.

53. H. Rostein and M. Sznaier, "An Exact Solution to General Four-Block Discrete-Time Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Problems via Convex Optimization," *IEEE Trans. Aut. Control*, 43, 10, (1998): 1475–1480.

54. M. Sznaier, "An Exact Solution to General SISO Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Problems via Convex Optimization," *IEEE Trans. Aut. Control*, 39, 12, (1994): 2511–2517.

55. M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. Massachusetts: M.I.T. Press, 1985.

56. B. Francis, *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1991.

57. E. Levitin and B. Polyak, "Constrained Minimization Methods," *USSR Computational Math. and Math. Physics*, 6, 5, (1966): 1–50.

58. R. R. Saldanha, J. L. Coulomb, and J.-C. Sabonnadiere, "An Ellipsoid Algorithm for the Optimum Design of Magnetostatic Problems," *IEEE Trans. on Magnetics*, 28, 2, (1992): .

59. N. Z. Shor and V. I. Gershovich, "Family of Algorithm for Solving Convex Programming Problem," *Cybernetics*, 15, 4, (1992): 502–507.

60. R. H. Perry, D. W. Green, and J. O. Maloney, *Perry's Chemical Engineers' Handbook*. (n.p.): McGraw-Hill, 1984.

61. A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*. (n.p.): Hemisphere Publishing, 1975.

62. E. Polak, "An Historical Survey of Computational Methods in Optimal Control," *SIAM Rev.*, 15, 2, (1973): 553–584.

63. S. G. Nash and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Programming.* (n.p.): McGraw-Hill, 1992.

64. R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization.* (n.p.): Wiley-Interscience, 1992.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ปัญหาการควบคุมเอลคิวจี

การควบคุมเอลคิวจี (LQG control)[1] คือการควบคุมแบบเหมาะที่สุดวิธีหนึ่ง ซึ่งประยุกต์ใช้กับระบบเชิงเส้นมีฟังก์ชันต้นทุนเป็นฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic cost function) สัญญาณรบกวนที่เข้าสู่ระบบเป็นกระบวนการสุ่ม (Random process) และค่าเริ่มต้นมีเป็นตัวแปรสุ่ม (Random variable) ระบบเชิงเส้นที่พิจารณามีแบบจำลองในปริภูมิสถานะดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + n(t) \end{aligned}$$

เมื่อ $w(t)$ และ $n(t)$ คือสัญญาณรบกวนในระบบ (Plant noise) และสัญญาณรบกวนจากการตรวจวัด (Measurement noise) ตามลำดับ ซึ่งมักสมมติให้เป็นการรบกวนแบบขาว (White noise) ที่มีเมทริกซ์ความหนาแน่นสเปกตรัมพลังงาน (Power spectral density matrix) เท่ากับ S_w และ S_n นั่นคือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Convariance matrix) ของสัญญาณรบกวน w และ n เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} E\{w(t_1)w(t_2)^T\} &= S_w\delta(t_1 - t_2) \\ E\{n(t_1)n(t_2)^T\} &= S_n\delta(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

เมื่อ $E\{\cdot\}$ เป็นตัวดำเนินการของค่าคาดหมาย (Expectation operater) และ $\delta(t)$ คือฟังก์ชันอิมพัลส์ นอกจากนี้ยังมักสมมติให้สัญญาณรบกวน w และ n เป็นอิสระต่อกัน (Independent) นั่นคือ

$$\begin{aligned} E\{w(t_1)n(t_2)^T\} &= 0 \\ E\{n(t_1)w(t_2)^T\} &= 0 \end{aligned}$$

ปัญหาเอลคิวจีคือการหาสัญญาณควบคุมเหมาะที่สุดซึ่งทำให้ฟังก์ชันต้นทุน (Cost function) ต่อไปนี้มีค่าต่ำสุด

$$\mathcal{J}_{\text{LQG}} = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt\right\}$$

เมื่อ Q และ R คือเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักที่ต้องเลือกให้เหมาะสม นั่นคือเมทริกซ์ทั้งสองเป็นพารามิเตอร์ในการออกแบบของปัญหาเอลคิวจี โดยที่ Q เป็นเมทริกซ์สมมาตรบวกกึ่งแน่นอน (Symmetric semi-positive definite) และ R เป็นเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน (Symmetric positive definite)

ผลเฉลยของปัญหาเอลคิวจีนั้นเป็นที่รู้จักกันในนามของทฤษฎีบทการแยกกันได้ (Separation theorem) ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนย่อย 2 ขั้นตอนคือ

---

[1]LQG เป็นคำย่อของ Linear Quadratic Gaussian

คำนวณการควบคุมเหมาะที่สุดจากปัญหาเอลคิวอาร์

ปัญหาเอลคิวอาร์ (LQR problem) ซึ่งก็คือปัญหาเอลคิวจีที่มิได้พิจารณาสัญญาณรบกวน w และ n ปัญหาเอลคิวอาร์นี้จะพิจารณากฎการควบคุมแบบการป้อนกลับสถานะ (State feedback) กล่าวคือสัญญาณควบคุม $u(t)$ จะมีค่าดังนี้

$$u(t) \;=\; -F_{\mathrm{sfb}}x(t)$$

เมื่อ F_{sfb} คืออัตราขยายป้อนกลับสถานะ (State feedback gain) เป้าหมายของปัญหาคือการคำนวณอัตราขยายป้อนกลับสถานะเหมาะที่สุด นั่นคืออัตราขยายดังกล่าวจะทำให้ค่าต้นทุน $\mathcal{J}_{\mathrm{LQR}}$ ต่อไปนี้มีค่าต่ำสุด

$$\mathcal{J}_{\mathrm{LQR}} \;=\; \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt$$

ขั้นตอนการคำนวณค่า F_{sfb} เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย และไม่ขึ้นอยู่กับค่าเมทริกซ์ S_w และเมทริกซ์ S_n แต่จะขึ้นอยู่กับค่าเมทริกซ์ Q และ R

คำนวณตัวกรองคาลมาน

พิจารณาตัวประมาณสถานะ (State estimator) ซึ่งมีสมการพลวัตดังนี้

$$\dot{\hat{x}}(t) \;=\; A\hat{x} + Bu + L_{\mathrm{obs}}(z(t) - C\hat{x}(t))$$

เมื่อ $\hat{x}(t)$ คือสถานะประมาณของ $x(t)$ และ L_{obs} คืออัตราขยายของตัวประมาณสถานะ ขั้นตอนต่อจากการแก้ปัญหาเอลคิวอาร์คือการคำนวณตัวประมาณสถานะเหมาะที่สุด (คำนวณอัตราขยายของตัวประมาณสถานะที่เหมาะที่สุด) ซึ่งทำให้ค่าคาดหมายต่อไปนี้มีค่าต่ำที่สุด

$$E\left\{(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))\right\}$$

ตัวประมาณสถานะเหมาะที่สุดดังกล่าวเรียกว่าตัวกรองคาลมาน (Kalman filter) ในทำนองเดียวกับปัญหาเอลคิวอาร์ การคำนวณตัวกรองคาลมานไม่ขึ้นกับค่าเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก Q และ R แต่จะขึ้นอยู่กับเมทริกซ์ S_w และ S_n

ในท้ายที่สุดผลเฉลยของปัญหาเอลคิวจีก็อาจคำนวณได้โดยแทนที่สถานะป้อนกลับ $x(t)$ ด้วยสถานะประมาณ $\hat{x}(t)$ ทำให้ได้การควบคุมดังต่อไปนี้

$$u(t) \;=\; -F_{\mathrm{sfb}}\hat{x}(t)$$

จะเห็นได้ว่าปัญหาเอลคิวจีและผลเฉลยของปัญหาอาจแยกพิจารณาได้เป็นสองส่วนที่ไม่ขึ้นต่อกัน โครงสร้างของตัวควบคุมเอลคิวจีนั้นเป็นดังรูปที่ ก.1 โดยที่เมทริกซ์ถ่ายโอนจาก $y(t)$ ไป $u(t)$ เป็นดังนี้

$$K(s) \;=\; \left[\begin{array}{c|c} A - BF_{\mathrm{sfb}} - L_{\mathrm{obs}}C & -L_{\mathrm{obs}} \\ \hline F_{\mathrm{sfb}} & 0 \end{array}\right]$$

เมื่ออัตราขยาย F_{sfb} และ L_{obs} ได้มาจากการแก้ปัญหาเอลคิวอาร์และการคำนวณตัวกรองคาลมานตามลำดับดังนี้ อัตราขยาย F_{sfb} เหมาะที่สุดมีค่าเท่ากับ

$$F_{\mathrm{sfb}} \;=\; R^{-1}B^TX$$

เมื่อ X เป็นเมทริกซ์สมมาตรกึ่งบวกแน่นอน ซึ่งเป็นผลเฉลยหนึ่งเดียวของสมการริคคาติ (Riccati equation) ต่อไปนี้

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0$$

ส่วนอัตราขยาย L_{obs} เหมาะที่สุดมีค่าเท่ากับ

$$L_{\text{obs}} = YC^T S_n^{-1}$$

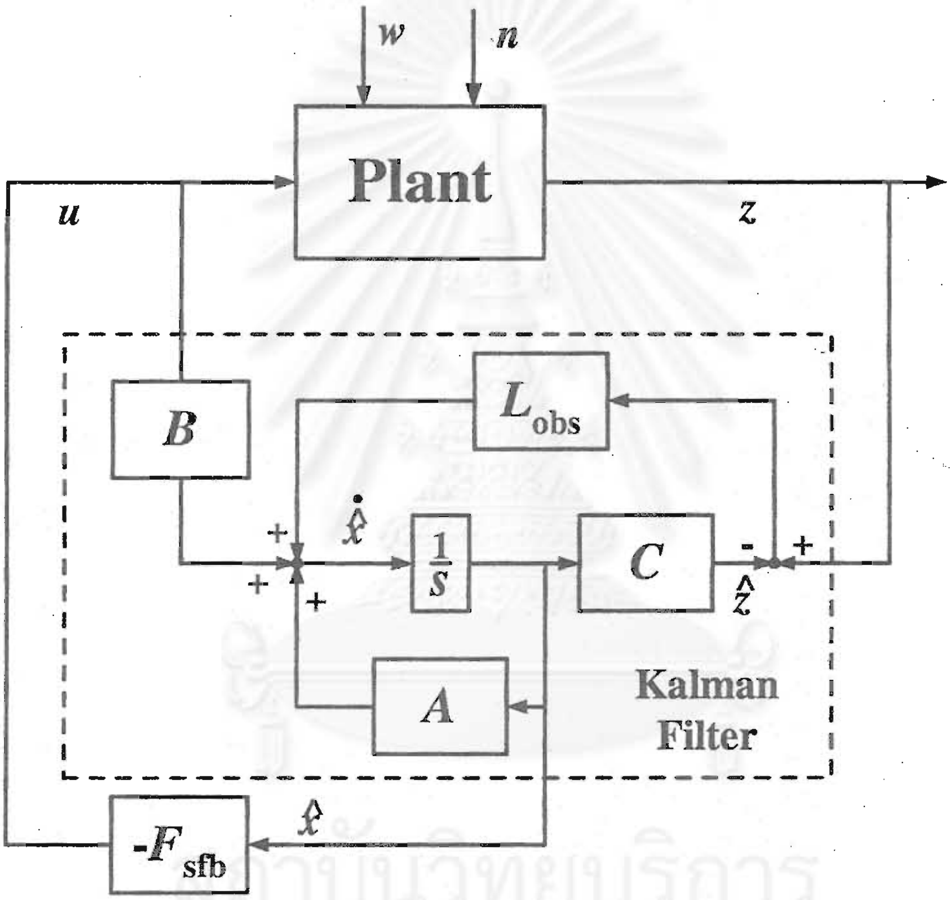
เมื่อ Y เป็นเมทริกซ์สมมาตรกึ่งบวกแน่นอน ซึ่งเป็นผลเฉลยหนึ่งเดียวของสมการริคคาติ (Riccati equation) ต่อไปนี้

$$YA^T + AY - YC^T S_n^{-1} CY + S_w = 0$$

ดังนั้นตัวควบคุมเอลคิวจีอาจแสดงได้ในเทอมของเมทริกซ์ X และ Y ดังนี้

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BR^{-1}B^T X - YC^T S_n^{-1} C & -YC^T S_n^{-1} \\ \hline R^{-1}B^T X & 0 \end{array}\right]$$

อนึ่งอัตราขยาย F_{sfb} และ L_{obs} จะมีอยู่จริงและการควบคุมเอลคิวจีจะทำให้ระบบมีเสถียรภาพภายใน ก็ต่อเมื่อระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีผลสัมฤทธิ์เป็น $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline Q^{\frac{1}{2}} & 0 \end{array}\right]$ และ $\left[\begin{array}{c|c} A & S_w^{\frac{1}{2}} \\ \hline C & 0 \end{array}\right]$ สามารถทำให้มีเสถียรภาพได้ (Stabilizable) และตรวจวัดได้ (Detectable) รายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับการควบคุมเอลคิวจีอาจศึกษาได้ในหนังสือการควบคุมแผนใหม่ (Modern control) ทั่วๆไป เช่นใน Burl [1] Skogestad และ Postlethwaite [37] หรือใน Zhou และ Doyle [3] ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราใช้ตัวควบคุมเอลคิวจีเป็นตัวควบคุมที่ระบุ (Nominal controller) สำหรับการออกแบบตัวควบคุมโดยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์



รูปที่ ก.1: โครงสร้างการควบคุมเอลคิวจีแบบมาตรฐาน

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายวทัญญู คล้ายสงคราม เกิดเมื่อวันที่ 15 พฤศจิกายน พ.ศ. 2523 จังหวัดกรุงเทพมหานคร เป็นบุตรของนายกำธร และนางนิตยา คล้ายสงคราม สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี หลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต ในปีการศึกษาถัดมา ณ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม โดยได้รับทุนอุดหนุนการศึกษาจากโครงการศิษย์ก้นกุฏิ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

ผลงานทางวิชาการที่ได้เข้าร่วมในสัมมนาวิชาการทั้งในประเทศและต่างประเทศเป็นดังนี้

1. *การออกแบบตัวควบคุมเชิงเอนกประสงค์สำหรับแขนกลแบบอ่อนตัวข้อต่อเดียว*
   ผู้แต่งร่วมคือ ผศ.ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ณ การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 24 ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าลาดกระบัง เดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2544

2. *MATLAB Based GUIs for Linear Controller Design via Convex Optimization*
   ผู้แต่งร่วมคือ ผศ.ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ณ การประชุมวิชาการ American Control Conference เมืองแองเคอเรจ มลรัฐอลาสกา ประเทศสหรัฐอเมริกา เดือนพฤษภาคม พ.ศ. 2545

3. *MATLAB Based GUIs for MIMO Linear Controller Design*
   ผู้แต่งร่วมคือ ผศ.ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ณ การประชุมวิชาการ Asian Control Conference ประเทศสิงค์โปร์ เดือนกันยายน พ.ศ. 2545

4. *โปรแกรมช่วยออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นโดยการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงคอนเวกซ์*
   ผู้แต่งร่วมคือ ผศ.ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ณ การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 25 ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา เดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2545

5. *การออกแบบตัวควบคุมพลวัตสำหรับหอกลั่นแยกสารสองชนิดด้วยวิธีอสมการ*
   ผู้แต่งร่วมคือ ผศ.ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย และ อ.ดร.สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์ ณ การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 25 ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา เดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2545

บทความฉบับที่ 5 นั้น เป็นงานวิจัยที่ได้รับรางวัลบทความดีเด่นสาขาระบบควบคุมและวัดคุม ณ การประชุมวิชาการดังกล่าว

สำหรับผลงานทางวิชาการของนายวทัญญูที่ได้ตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการในต่างประเทศ ได้แก่

1. *MATLAB Based GUIs for Linear Controller Design via Convex Optimization*
   ผู้แต่งร่วมคือ ผศ.ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ในวารสาร Journal of Computer Applications in Engineering Education ปีที่ 11 ฉบับที่ 1 เดือนพฤษภาคม พ.ศ. 2546

นอกจากนี้วทัญญูยังได้เข้าร่วมกิจกรรมทางวิชาการนอกหลักสูตรระหว่างการศึกษาในระดับปริญญามหาบัณ-ฑิต ดังต่อไปนี้

1. *โครงการรางวัลนวัตกรรมแห่งประเทศไทย* ครั้งที่ 1 ณ ศูนย์แสดงสินค้าอิมแพค เมืองทองธานี กรุงเทพมหานคร เดือนตุลาคม พ.ศ. 2544
2. *งานนิทรรศการทางวิศวกรรม* ครั้งที่ 13 ณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เดือนธันวาคม พ.ศ. 2545