

การออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราส่วนโดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น



นายเอกลักษณ์ เปี่ยมปรีบูรณ์

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545

ISBN 974 - 17 - 1874 - 8

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

\mathcal{H}_2 -OPTIMAL CONTROLLER DESIGN FOR MULTIRATE SYSTEMS VIA LINEAR MATRIX
INEQUALITY APPROACH

Mr. Ekkaluk Piamboriboon

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2002

ISBN 974 - 17 - 1874 - 8

เอกลักษณ์ เปี่ยมบริบูรณ์: การออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม
โดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (H_2 -OPTIMAL CONTROLLER DESIGN FOR MULTIRATE
SYSTEMS VIA LINEAR MATRIX INEQUALITY APPROACH) อ. ที่ปรึกษา: ผู้ช่วย
ศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ 88 หน้า ISBN 974 - 17 - 1874 - 8

วิทยานิพนธ์นี้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม
โดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น จุดประสงค์เพื่อออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงปิด ที่มีอัตราสุ่มของ
สัญญาณของตัวควบคุมที่ไม่เท่ากัน ให้มีค่านอร์ม H_2 น้อยที่สุด การออกแบบตัวควบคุมใช้เทคนิค
การลิตเวลาเต็มหน่วย เพื่อให้ได้ระบบเวลาเต็มหน่วยไม่แปรผันตามเวลา ที่สอดคล้องกับพลาเน็ตหลาย
อัตราสุ่ม จากนั้นเราแปลงปัญหาการควบคุมเหมาะสมที่สุดให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อแก้
ปัญหาด้วยวิธีการหาโปรแกรมเชิงคอนเวกซ์ ด้วยวิธีนี้เราสามารถกำหนดโครงสร้างของส่วนป้อนผ่านของ
ตัวควบคุม เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลได้ นอกจากนี้วิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอระบบ
เซอร์โวลับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์เป็นกรณีศึกษา เพื่อออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม และเปรียบเทียบผล
การควบคุมกับผลการควบคุมของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา
สาขาวิชา
ปีการศึกษา

ลายมือชื่อนิสิต
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา

##4370637721: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: \mathcal{H}_2 -OPTIMAL CONTROLLER / MULTIRATE SYSTEM / LINEAR MATRIX INEQUALITY / DISCRETE-TIME LIFTING TECHNIQUE / CAUSALITY CONSTRAINT

EKKALUK PIAMBORIBOON: \mathcal{H}_2 -OPTIMAL CONTROLLER DESIGN FOR MULTIRATE SYSTEMS VIA LINEAR MATRIX INEQUALITY APPROACH, THESIS ADVISOR: ASST. PROF. MANOP WONGSAISUWAN, Ph.D., 88 pp., ISBN 974 - 17 - 1874 - 8

This thesis proposes an \mathcal{H}_2 -optimal controller design for multirate systems via linear matrix inequality approach. The objective is to design a controller which minimizes \mathcal{H}_2 -norm of the closed-loop system with unequal rates of controller signals. The controller design uses discrete-time lifting technique to obtain a time-invariant discrete-time system equivalent to the multirate plant. Then, we transform the \mathcal{H}_2 -optimal control problem to linear matrix inequalities which can be solved by convex programming. By this approach, we can impose the controller's feedthrough term to be consistent with the causality constraint. In addition, we use a hard disk drive servo system as a case study in order to design a multirate controller and compare its response to that of a single-rate controller.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department
Field of study
Academic year

Student's signature
Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความช่วยเหลือจาก ผศ.ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้ให้คำปรึกษา และข้อคิดเห็นต่างๆ ในการทำวิจัย อีกทั้ง รศ.ดร.สุวลัย ประดิษฐานนท์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ผศ.ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำ เพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ตลอดจนคณาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุม ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ อันเป็นพื้นฐานในการทำวิจัยของข้าพเจ้า ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้

ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่เป็นห่วง และคอยให้กำลังใจเสมอมา ทำให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสศึกษาต่อในระดับปริญญาโท และสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จได้ ขอขอบคุณ พี่น้อง และน้อง ทุกๆ คน ที่เป็นเพื่อนเล่น เป็นกำลังใจ และให้ความสุข ตลอดการทำวิจัยของข้าพเจ้า



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง	ฅ
สารบัญภาพ	ญ
1 บทนำ	1
1.1 กล่าวนำปัญหา	1
1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา	2
1.3 ขอบเขตวิทยานิพนธ์	3
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์	4
2 ลักษณะของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2	6
2.1 รูปแบบของปัญหา	6
2.2 เงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล	8
2.3 คุณสมบัติทั่วไปของระบบหลายอัตราสุ่ม	10
2.4 นอร์มในระบบหลายอัตราสุ่ม	12
2.4.1 นอร์มสองของสัญญาณในระบบหลายอัตราสุ่ม	12
2.4.2 นอร์ม H_2 ของระบบหลายอัตราสุ่ม	13
3 การออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม	15
3.1 สมมุติฐานในการออกแบบตัวควบคุม	15
3.2 วิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น	15
4 ระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์: กรณีศึกษา	22
4.1 ส่วนประกอบต่างๆ ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	22
4.1.1 ดิสก์	22
4.1.2 หัวอ่าน/เขียน	24
4.1.3 สไลเดอร์	24

4.1.4	ตัวขับเร็ว	25
4.1.5	แกนหมุน	27
4.2	การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	27
4.3	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	29
4.4	การวิเคราะห์แบบจำลองของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	32
5	การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	34
5.1	การตรวจสอบสมมติฐานในการออกแบบ	35
5.2	การออกแบบตัวควบคุมตามรอย	35
5.2.1	ตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 7 - 7 - 7	36
5.2.2	ตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 14 - 14 - 14	38
5.2.3	ตัวควบคุมหลายอัตราส่วน 14 - 7 - 28	40
5.2.4	การวิเคราะห์เปรียบเทียบผลการควบคุม	44
5.3	การออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน	44
5.3.1	ตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 7 - 7 - 7	46
5.3.2	ตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 14 - 14 - 14	48
5.3.3	ตัวควบคุมหลายอัตราส่วน 14 - 7 - 28	49
5.3.4	การวิเคราะห์เปรียบเทียบผลการควบคุม	51
5.4	การออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วนสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	52
5.5	การออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วนสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่มีเครื่อง วัดความเร่งการหมุน	60
6	สรุปและข้อเสนอแนะ	68
6.1	สรุป	68
6.2	ข้อเสนอแนะ	69
	รายการอ้างอิง	70
	ภาคผนวก	73
ก	การลืฟต์เวลาเต็มหน่วย	74
ก.1	การลืฟต์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย	74
ก.2	การลืฟต์ระบบเวลาเต็มหน่วย	75
ก.2.1	การแปลงระบบหลายอัตราส่วนเป็นระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ	76
ก.2.2	การแปลงระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบเป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา	78
ข	อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น	82
ข.1	รูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น	82
ข.2	ลักษณะของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น	83

ค ปัญหาเฉพาะของการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 และความเป็นเอกฐานของปัญหาการ
ออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 84

ค.1 ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมปรับแก้สถานะเริ่มต้น 84

ค.2 ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน 85

ค.3 ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมปรับแก้สถานะเริ่มต้นที่ลดผลของสัญญาณรบกวน 86

ค.4 ความเป็นเอกฐานของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 87

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์..... 88



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

4.1	ความหมายของสัญลักษณ์ต่างๆ ในแบบจำลอง	30
4.2	ค่าพารามิเตอร์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	31
5.1	ค่าพิกัดในการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบ ขั้นหนึ่งหน่วย	37
5.2	ค่าสมรรถนะทางเวลาของการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย	44
5.3	พลังงานและความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่ง เนื่องมาจากสัญญาณพัลส์ และสัญญาณ รบกวนขาว	52
5.4	ค่าพิกัดในการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบ ขั้นหนึ่งหน่วย และลดผลของสัญญาณรบกวน d^c และ n^c	53
ก.1	เมทริกซ์ A_k, B_k, C_k, D_k แต่ละครั้งของระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ	78

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญญภาพ

1.1	ระบบที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์	1
2.1	รูปแบบการควบคุมนี้ทั่วไป	6
2.2	ระบบหลายอัตราส่วนที่ลิฟต์แล้ว	7
2.3	ระบบวงปิดที่สมมูลกัน	8
3.1	ปัญหาการอ้างอิงแบบจำลอง	19
3.2	ผลตอบของปัญหาการอ้างอิงแบบจำลอง	21
4.1	ส่วนประกอบต่างๆ ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	23
4.2	เส้นกราฟวงปิดฮิสเทอรีซิสของสื่อกลางการบันทึก	23
4.3	การพัฒนาของตัวขับเร้าที่ใช้ควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	25
4.4	ส่วนประกอบของมอเตอร์ขดลวดเสียง	26
4.5	ลักษณะการทำงานของพีซีไอเล็กทริกในระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	26
4.6	วงจรรขยายแรงดันสูงสำหรับวัสดุพีซีไอเล็กทริก	27
4.7	การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	28
4.8	วิธีการระบุข้อมูลตำแหน่งบนดิสก์ (ก) วิธี dedicated servo (ข) วิธี sectored servo	28
4.9	ส่วนประกอบของมอเตอร์ขดลวดเสียง	29
4.10	แบบจำลองของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	30
4.11	แผนภาพโบทเดของมอเตอร์ขดลวดเสียง	33
4.12	แผนภาพโบทเดของตัวขับเร้าย่อย	33
5.1	โครงสร้างการควบคุมตามรอย	36
5.2	ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 7 - 7 - 7 ในการออกแบบครั้งที่ 1	38
5.3	ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 7 - 7 - 7 ในการออกแบบครั้งที่ 2	39
5.4	ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 14 - 14 - 14 ในการออกแบบครั้งที่ 1	40
5.5	ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 14 - 14 - 14 ในการออกแบบครั้งที่ 2	41
5.6	ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน 14 - 7 - 28 ในการออกแบบครั้งที่ 1	42

5.7	ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 ในการออกแบบครั้งที่ 2	43
5.8	โครงสร้างการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน	45
5.9	สัญญาณพัลส์ d^c ที่รบกวนความเร่งการหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียด	46
5.10	สัญญาณรบกวนขาว n^c ที่รบกวนสัญญาณการวัดตำแหน่ง	46
5.11	ผลตอบของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 7 - 7 - 7 ในปัญหาการตามรอย เมื่อมีสัญญาณรบกวน d^c	47
5.12	ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 7 - 7 - 7	48
5.13	ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 7 - 7 - 7	48
5.14	ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 14 - 14 - 14	49
5.15	ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 14 - 14 - 14	50
5.16	ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28	51
5.17	ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28	51
5.18	โครงสร้างการควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์	53
5.19	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 1	54
5.20	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1	55
5.21	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณรบกวนขาว n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1	55
5.22	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 2	56
5.23	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2	57
5.24	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณรบกวนขาว n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2	58
5.25	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 3	59

5.26	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 3	59
5.27	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 3	60
5.28	โครงสร้างการควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน	61
5.29	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 1	64
5.30	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1	64
5.31	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1	65
5.32	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 2	66
5.33	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2	67
5.34	ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2	67
ก.1	บล็อกไดอะแกรมของตัวดำเนินการการลัพท์และตัวดำเนินการการลัพท์ผกผัน	74
ก.2	ลักษณะของสัญญาณเข้าและสัญญาณออกในระบบหลายอัตราส่วน	75
ก.3	บล็อกไดอะแกรมของการลัพท์ระบบหลายอัตราส่วน	76
ก.4	การพิจารณาระบบหลายอัตราส่วน	77
ค.1	รูปแบบการควบคุมหนีทั่วไป	84

บทที่ 1

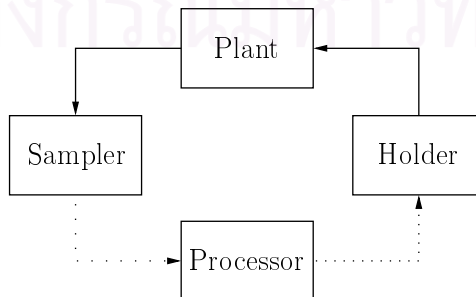
บทนำ

1.1 กล่าวนำปัญหา

ปัจจุบันคอมพิวเตอร์เริ่มมีบทบาทในการควบคุมระบบต่างๆ แทนที่ตัวควบคุมแบบอนาลอกมากขึ้น ระบบที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์จะมีส่วนประกอบหลักคือ พลานต์ (plant) ตัวชักตัวอย่าง (sampler) ส่วนประมวลผล (processor) และตัวคงค่า (holder) โดยที่สัญญาณออกจากพลานต์ที่เป็นสัญญาณเวลาต่อเนื่อง (continuous-time) จากพลานต์จะถูกชักตัวอย่างทุกๆ คาบการชักตัวอย่างให้เป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (discrete-time) แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปประมวลผลออกมาเป็นสัญญาณควบคุม จากนั้นคงค่าสัญญาณควบคุมนั้นทุกๆ คาบการคงค่า เพื่อให้เป็นสัญญาณเวลาต่อเนื่องกลับไปควบคุมพลานต์ ลักษณะดังรูปที่ 1.1 โดยทั่วไปการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ คาบการชักตัวอย่างสัญญาณออกและคาบการคงค่าสัญญาณเข้าจะมีค่าเท่ากัน เพื่อให้สามารถออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาเต็มหน่วยได้ แต่ในความเป็นจริงแล้วคอมพิวเตอร์สามารถทำการควบคุมด้วยคาบการชักตัวอย่างและคาบการคงค่าที่ไม่เท่ากันได้ การควบคุมที่มีคาบการชักตัวอย่างและคาบการคงค่าที่ไม่เท่ากันนี้ เรียกว่า *การควบคุมหลายอัตราสุ่ม (multirate control)*

การออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มอาจยุ่งยากกว่าการออกแบบตัวควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์แบบอัตราสุ่มเดียว แต่ก็มีกัการนำเอาตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มมาใช้ด้วยเหตุผลดังต่อไปนี้

1. ระบบสัญญาณเข้าหลายสัญญาณ สัญญาณออกหลายสัญญาณ (multiple input multiple output system) ด้วยข้อจำกัดของส่วนประกอบภายในระบบ เช่น ตัวขับเร็ว เครื่องวัดสัญญาณ บางครั้งอาจจะเป็นไปไม่ได้ที่จะทำการชักตัวอย่างหรือคงค่าสัญญาณเหล่านั้นด้วยคาบที่เท่ากัน
2. ถ้าสามารถควบคุมระบบ โดยให้คาบการชักตัวอย่างและคาบการคงค่าเร็วขึ้น จะทำให้ระบบมีสมรรถนะที่ดีขึ้น แต่ค่าใช้จ่ายก็จะสูงขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นอาจจะต้องเลือกใช้คาบที่เหมาะสมกับพลวัตของ



รูปที่ 1.1: ระบบที่ควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์

สัญญาณนั้นๆ

3. การควบคุมหลายอัตราส่วน เป็นการควบคุมแบบแปรผันตามเวลา ซึ่งมีความสามารถในการควบคุมมากกว่าการควบคุมแบบไม่แปรผันตามเวลาทั่วไป เช่น การควบคุมด้วยตัวควบคุมที่มีเสถียรภาพ (stable controller) [1] การทำให้ระบบหลายระบบมีเสถียรภาพพร้อมกัน (simultaneous stabilization) [2] หรือการควบคุมแบบแยกศูนย์ (decentralized control) [3]

ตัวอย่างการควบคุมหลายอัตราส่วนเช่น ในระบบควบคุมกล่องโทรทัศน์เพื่อจับภาพเคลื่อนไหว อัตราการส่งข้อมูลจากกล่องโทรทัศน์ช้ากว่าอัตราการควบคุมตำแหน่งของกล่องโทรทัศน์ [4] ในกระบวนการเคมี การวัดความเข้มข้นของสารทำได้ช้ากว่าการวัดอุณหภูมิหรืออัตราการไหลของสาร [5] หรือในระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่มีข้อจำกัดในการชักตัวอย่างของสัญญาณตำแหน่ง และมีพลวัตของสัญญาณควบคุมที่แตกต่างกัน [6]

ระบบหลายอัตราส่วนจัดว่าเป็นระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ แต่เราสามารถจัดให้อยู่ในรูปของระบบไม่แปรผันตามเวลาได้ โดยอาศัยเทคนิคการลิฟต์ (lifting technique) ทำให้ได้สมการสถานะของระบบไม่แปรผันตามเวลา ที่สอดคล้องกับระบบหลายอัตราส่วน โดยมีสัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นเวกเตอร์ของสัญญาณนั้นๆ ในหนึ่งคาบเวลารอบ (frame period) และทำให้สามารถวิเคราะห์คุณสมบัติของระบบหลายอัตราส่วน ได้อย่างระบบไม่แปรผันตามเวลาทั่วไป

เนื่องจากเทคนิคการลิฟต์ เป็นการนำเอาสัญญาณเข้าและสัญญาณออกภายในหนึ่งคาบเวลารอบมาเรียงเป็นเวกเตอร์ ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหลายอัตราส่วน ก็จะนำเอาเวกเตอร์ของสัญญาณออกของพลาเน็ต มาสร้างเป็นเวกเตอร์ของสัญญาณควบคุมเพื่อเข้าสู่พลาเน็ต ความยุ่งยากในการออกแบบตัวควบคุมเกิดขึ้น เนื่องจากตัวควบคุมหลายอัตราส่วนจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเวลา นั่นคือเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล (causality constraint) ทำให้ส่วนป้อนผ่าน (feedthrough term) ของตัวควบคุมต้องมีลักษณะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแบบบล็อก (block lower-triangular matrix) ตัวควบคุมสำหรับระบบหลายอัตราส่วน จึงไม่สามารถออกแบบตามวิธีของระบบไม่แปรผันตามเวลาตามปกติได้

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequality) เป็นรูปแบบหนึ่งของปัญหาเชิงคอนเวกซ์ที่สามารถกำหนดโครงสร้างของเมทริกซ์ตัวแปรได้ ในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราส่วนด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น แล้วกำหนดโครงสร้างของตัวควบคุมให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล แล้วแก้ปัญหาด้วยวิธีการหาโปรแกรมเชิงคอนเวกซ์ ซึ่งสามารถลดความยุ่งยากในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วนลงได้ พร้อมทั้งได้นำเสนอระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อเป็นกรณีศึกษาในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วน

1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

ทฤษฎีที่เกี่ยวกับการควบคุมหลายอัตราส่วนเริ่มคิดค้นกันมาตั้งแต่ปี ค.ศ. 1957 โดย G.M. Kranc [7] เสนอว่าเมื่อนำสัญญาณเข้าและสัญญาณออกภายในหนึ่งคาบเวลารอบมาเรียงเป็นเวกเตอร์

ของสัญญาณนั้นๆ แล้ว จะได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์สัญญาณเข้ากับเวกเตอร์สัญญาณออกนี้จะ เป็นแบบไม่แปรผันตามเวลา ต่อมาได้มีการเสนอวิธีการแปลงระบบหลายอัตราสุ่มให้อยู่ในของรูประบบไม่ แปรผันตามเวลา ด้วยเทคนิคการลิฟต์ โดย B.A. Bamieh *et al.* [8] ซึ่งทำให้สามารถวิเคราะห์คุณสมบัติ ต่างๆ ของระบบหลายอัตราสุ่มนี้ ได้อย่างระบบไม่แปรผันตามเวลาทั่วไป เช่น M. Araki และ K. Ya- mamoto [9] S. Longhi [10]

ความยุ่งยากในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มคือเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล ซึ่งอธิบายไว้ โดย D.G. Meyer [11] แต่ก็มีผู้เสนอการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหลายอัตราสุ่มด้วยวิธีต่างๆ เช่น T. Hagiwara และ M. Araki [1] ได้ออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสัญญาณออก (multirate output controller) ที่สามารถสังเคราะห์สถานะจากสัญญาณออกที่วัดได้ ทำให้การควบคุมเหมือนการป้อน กลับสถานะ และยังสามารถทำให้ตัวควบคุมมีเสถียรภาพด้วย D.G. Meyer [11] หาตัวควบคุมทั้งหมดที่ทำให้ ระบบมีเสถียรภาพ ด้วยหลักการของการหาพารามิเตอร์ของยูลา (Youla parametrization) นอกจากนี้ ยังมีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด และตัวควบคุมคงทนสำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม เช่น T. Chen และ L. Qiu [12] D.G. Meyer [13] M.F. Sägfors และ H.T. Toivonen [14]

ในส่วนของการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 C. Scherer, P. Gahinet และ M. Chilali [15] M.C. de Oliveira, J.C. Geromel และ J. Bernussou [16] ได้ออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดสำหรับ ระบบเวลาเต็มหน่วยทั่วไป ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สำหรับตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบ หลายอัตราสุ่ม ได้มีการออกแบบด้วยวิธีต่างๆ โดย P.G. Voulgaris, M.A. Dahleh และ L.S. Vala- vani [17], L. Qiu และ T. Chen [18] ออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดด้วยวิธีการจับคู่แบบจำลอง (model matching) H. Shu และ T. Chen [19] ทำการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดด้วยวิธีทางสมการ สถานะ

1.3 ขอบเขตวิทยานิพนธ์

1. เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม ด้วยวิธีอสมการ เมทริกซ์เชิงเส้น
2. วิเคราะห์เปรียบเทียบผลการควบคุมของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มกับตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว
3. จำลองผลการควบคุมระบบหลายอัตราสุ่มกับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาวิธีการแปลงระบบหลายอัตราสุ่มให้เป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา
2. วิเคราะห์คุณสมบัติของระบบหลายอัตราสุ่ม
3. ศึกษาเงื่อนไขในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม
4. ศึกษาการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

5. ดัดแปลงวิธีการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ให้ใช้ได้กับระบบหลายอัตราสุ่ม
6. ศึกษาแบบจำลองระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์
7. จำลองผลการควบคุมของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มและตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว กับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์
8. วิเคราะห์เปรียบเทียบผลการควบคุมของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มกับตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ความเข้าใจถึงลักษณะและคุณสมบัติของระบบหลายอัตราสุ่ม โดยพิจารณาจากระบบไม่แปรผันตามเวลาที่สอดคล้อง
2. วิธีการควบคุมสำหรับระบบที่ไม่สามารถให้คาบการชักตัวอย่างและการคงค่าเท่ากันได้
3. แนวทางในการออกแบบตัวควบคุมระบบหลายอัตราสุ่ม ที่สะดวกและง่ายขึ้น

1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมด 6 บท และภาคผนวกอีก 3 บท โดยแต่ละบทกล่าวถึงเนื้อหาต่างๆ ดังนี้

บทที่ 1 บทนำ จะกล่าวถึงปัญหาการควบคุม งานวิจัยที่ผ่านมา ขอบเขตวิทยานิพนธ์ ขั้นตอนการดำเนินงาน และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

บทที่ 2 ลักษณะของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 กล่าวถึงรูปแบบของปัญหาที่ใช้ออกแบบตัวควบคุม เงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลที่บังคับโครงสร้างของตัวควบคุม คุณสมบัติทั่วไปของระบบหลายอัตราสุ่ม เช่น เสถียรภาพ ความสามารถในการสังเกตได้ ความสามารถในการเข้าถึงได้ และสุดท้ายจะกล่าวถึงนอร์มในระบบหลายอัตราสุ่ม

บทที่ 3 การออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม กล่าวถึงสมมุติฐานในการออกแบบตัวควบคุม และวิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

บทที่ 4 ระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กล่าวถึงส่วนประกอบต่างๆ ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ และการวิเคราะห์แบบจำลองของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

บทที่ 5 การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กล่าวถึงการออกแบบตัวควบคุมตามรอย การออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน การออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ และการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่มีเครื่องวัดสัญญาณความเร่งการหมุน

บทที่ 6 สรุปลงและข้อเสนอแนะ กล่าวถึงบทสรุปในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และข้อเสนอแนะในการศึกษา
ขั้นต่อไป

ภาคผนวก ก การลิต์เวลาเติมหน่วย กล่าวถึงการลิต์สัญญาณเวลาเติมหน่วย และการลิต์ระบบ
เวลาเติมหน่วย

ภาคผนวก ข อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น กล่าวถึงรูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และลักษณะ
ของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ภาคผนวก ค ปัญหาเฉพาะของการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 และความเป็นเอก
ฐานของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 กล่าวถึงปัญหาการออกแบบตัวควบคุมปรับ
แก้สถานะเริ่มต้น ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน ปัญหาการออกแบบตัว
ควบคุมปรับแก้สถานะเริ่มต้นที่ลดผลของสัญญาณรบกวน และความเป็นเอกฐานของปัญหาการออกแบบ
ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ลักษณะของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงรูปแบบของปัญหาที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 เงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลที่บังคับโครงสร้างของตัวควบคุม คุณสมบัติทั่วไปของระบบหลายอัตราส่วน เช่น เสถียรภาพ ความสามารถในการสังเกตได้ ความสามารถในการเข้าถึงได้ และสุดท้ายจะกล่าวถึงนอร์มในระบบหลายอัตราส่วน

2.1 รูปแบบของปัญหา

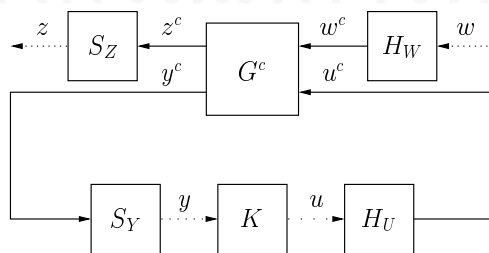
ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ที่ใช้ในการพิจารณา จะอยู่ในรูปแบบการควบคุม ทั่วๆ ไป (general control configuration) ดังรูปที่ 2.1 โดยที่ G^c คือพลานต์ทั่วๆ ไป (generalized plant) ที่เป็นระบบเวลาต่อเนื่อง โดยมี z^c เป็นสัญญาณขาออกที่ใช้วัดสมรรถนะของการควบคุม เช่น สัญญาณความคลาดเคลื่อน w^c คือสัญญาณเข้าจากภายนอก เช่น สัญญาณอ้างอิง หรือสัญญาณรบกวน y^c คือสัญญาณวัดเข้าสู่ตัวควบคุม และ u^c คือสัญญาณควบคุมที่เข้าสู่พลานต์ สมการสถานะของพลานต์ทั่วๆ ไป G^c คือ

$$\begin{aligned}\dot{x}^c(t) &= A^c x^c(t) + B_1^c w^c(t) + B_2^c u^c(t) \\ z^c(t) &= C_1^c x^c(t) + D_{11}^c w^c(t) + D_{12}^c u^c(t) \\ y^c(t) &= C_2^c x^c(t) + D_{21}^c w^c(t) + D_{22}^c u^c(t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

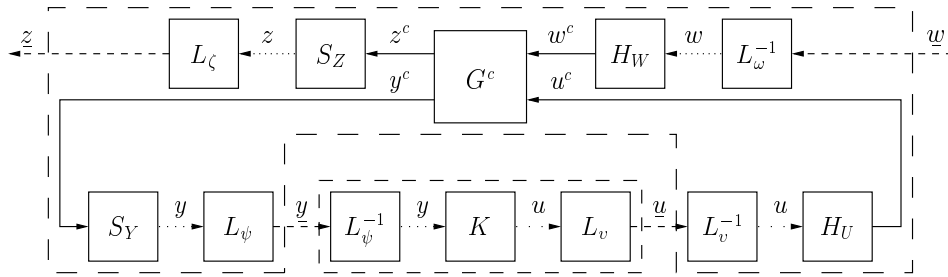
หรืออาจจะเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} z^c \\ y^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^c & G_{12}^c \\ G_{21}^c & G_{22}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^c \\ u^c \end{bmatrix}\quad (2.2)$$

และ K คือตัวควบคุมหลายอัตราส่วน ที่รับสัญญาณวัดเวลาเต็มหน่วย y เพื่อคำนวณหาสัญญาณควบคุมเวลาเต็มหน่วย u โดยที่สัญญาณ y ถูกชักตัวอย่างจากสัญญาณ y^c ที่ทุกๆ คาบการชักตัวอย่าง YT_0 และสัญญาณ u ถูกคงค่าเป็นสัญญาณ u^c ที่ทุกๆ คาบการคงค่า UT_0 เมื่อ T_0 คือคาบเวลาฐาน (base period) เราพิจารณาสัญญาณขาออกที่ใช้วัดสมรรถนะ z และสัญญาณเข้าจากภายนอก w เป็นสัญญาณเวลาเต็ม



รูปที่ 2.1: รูปแบบการควบคุมทั่วๆ ไป



รูปที่ 2.2: ระบบหลายอัตราสุ่มที่ลิฟต์แล้ว

หน่วยที่ถูกชักตัวอย่างและคงค่ามาจากสัญญาณ z^c และ w^c ด้วยคาบเวลา ZT_0 และ WT_0 ตามลำดับ

จากระบบที่กล่าวมา นิยามให้ μ เป็นตัวคูณร่วมน้อยของ $\{Z, Y, W, U\}$ จะได้ว่าคาบเวลารอบ (frame period) $T_f = \mu T_0$ และ $\mu = \zeta Z = \psi Y = \omega W = v U$ โดยที่จำนวนเต็ม ζ, ψ, ω และ v คืออัตราของแต่ละสัญญาณ ต่อมาเราลิฟต์ระบบหลายอัตราสุ่มดังกล่าวภายในคาบเวลารอบ T_f ดังรูปที่ 2.2 นั่นคือ

$$\begin{aligned} \underline{G} &\triangleq \begin{bmatrix} L_\zeta S_Z & 0 \\ 0 & L_\psi S_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^c & G_{12}^c \\ G_{21}^c & G_{22}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_W L_\omega^{-1} & 0 \\ 0 & H_U L_v^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_\zeta S_Z G_{11}^c H_W L_\omega^{-1} & L_\zeta S_Z G_{12}^c H_U L_v^{-1} \\ L_\psi S_Y G_{21}^c H_W L_\omega^{-1} & L_\psi S_Y G_{22}^c H_U L_v^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

รายละเอียดวิธีการลิฟต์ระบบเวลาเต็มหน่วยอยู่ในภาคผนวก ก.2 จากการลิฟต์ทำให้ได้พลาเน็ตที่ลิฟต์แล้ว \underline{G} ซึ่งมีสมการสถานะเป็น

$$\begin{aligned} x[h+1] &= A x[h] + B_1 w[h] + B_2 u[h] \\ z[h] &= C_1 x[h] + D_{11} w[h] + D_{12} u[h] \\ y[h] &= C_2 x[h] + D_{21} w[h] + D_{22} u[h] \end{aligned} \quad (2.3)$$

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ถ่ายโอนเป็น

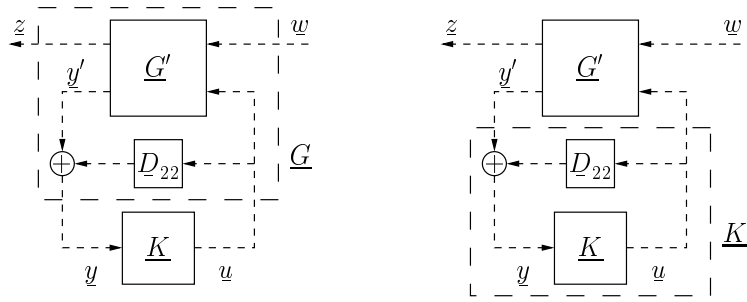
$$\underline{\hat{G}} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (2.4)$$

และตัวควบคุมที่ลิฟต์แล้ว $\underline{K} \triangleq L_v K L_\psi^{-1}$ จะสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการสถานะได้เป็น

$$\begin{aligned} x_K[h+1] &= A_K x_K[h] + B_K y[h] \\ u[h] &= C_K x_K[h] + D_K y[h] \end{aligned} \quad (2.5)$$

หรือในรูปของฟังก์ถ่ายโอนคือ

$$\underline{\hat{K}} = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \quad (2.6)$$



รูปที่ 2.3: ระบบวงปิดที่สมมูลกัน

ในกรณีที่ $D_{22} = 0$ ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดจาก w ไป z จะเท่ากับ

$$\begin{aligned} \hat{T}_{zw} &= \mathcal{F}(\underline{G}, \underline{K}) \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K & B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ B_K C_2 & A_K & B_K D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_K C_2 & D_{12} C_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

โดยที่ $\mathcal{F}(\underline{G}, \underline{K})$ คือการแปลงเศษส่วนย่อยเชิงเส้น (linear fractional transformation) ของ \underline{G} กับ \underline{K} [20] สมมติให้อันดับของพลาตันต์นัยทั่วไป G^c เท่ากับ n และอันดับของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน \underline{K} ได้เป็น n_K จะได้ว่าอันดับของระบบวงปิด \underline{T}_{zw} จะเท่ากับ $n + n_K$ ส่วนในกรณีที่ $D_{22} \neq 0$ เราจะกำหนดให้

$$\hat{G}' \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (2.8)$$

หรือคือพลาตันต์ \underline{G} ที่แยกส่วนป้อนผ่าน (feedthrough term) D_{22} ออก ดังรูปที่ 2.3 แล้วรวม D_{22} เข้ากับ \underline{K} เป็น \underline{K}' โดยที่ $\underline{K}' = (I - \underline{K}D_{22})^{-1}\underline{K}$ ทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดจาก w ไป z เท่ากับ

$$\underline{T}_{zw} = \mathcal{F}(\underline{G}, \underline{K}) = \mathcal{F}(\hat{G}', \underline{K}') \quad (2.9)$$

ซึ่งสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดได้จากสมการที่ (2.7)

ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมที่น่าเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราส่วน ปัญหาดังกล่าวคือการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วน \underline{K} สำหรับพลาตันต์หลายอัตราส่วน \underline{G} ที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพ และทำให้ออร์ม H_2 ของระบบวงปิดมีค่าน้อยที่สุด โดยตัวควบคุมดังกล่าวจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล เงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลนี้เป็นเงื่อนไขสำคัญของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน ดังจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

2.2 เงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล

เงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล (causality constraint) เป็นเงื่อนไขทางเวลาของระบบเวลาจริง (real-time system) ตัวควบคุมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลนี้จะสามารถนำไปใช้งานได้จริง

บทตั้ง 2.1 ระบบหนึ่งๆ ($y(t) = Pu(t)$) จะสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล ก็ต่อเมื่อ สัญญาณเข้าของระบบที่ขณะเวลาหนึ่ง ($u(t_0)$) ส่งผลต่อสัญญาณออก ณ เวลานั้น และหลังจากเวลานั้น ($y(t)$ เมื่อ $t \geq t_0$) โดยไม่มีผลต่อสัญญาณออกที่เกิดก่อนหน้านั้น [21]

ระบบหลายอัตราสุ่มที่ลิฟต์แล้วจะมีสัญญาณเข้าและสัญญาณออก เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณเวลาเต็มหน่วยนั้นๆ ในหนึ่งคาบเวลารอบ สมมติให้พลาเน็ตหลายอัตราสุ่ม $y = Pu$ มีส่วนป้อนผ่านของพลาเน็ตเป็น D พลาเน็ตนี้จะสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล ก็ต่อเมื่อ บล็อกของเมทริกซ์ D จาก $u(\tau_1)$ ไปยัง $y(\tau_2)$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $\tau_1 > \tau_2$ และจะสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลแบบเข้มงวด (strict causality constraint) ก็ต่อเมื่อ บล็อกของเมทริกซ์ D_K จาก $u(\tau_1)$ ไปยัง $y(\tau_2)$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $\tau_1 \geq \tau_2$

กำหนดให้ α เป็นจำนวนการสุ่มของสัญญาณออกในหนึ่งคาบเวลารอบ และ β เป็นจำนวนการสุ่มของสัญญาณเข้าในหนึ่งคาบเวลารอบ เราจะนิยามเซตของเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลให้เป็น $C(\alpha, \beta)$ และเซตของเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลแบบเข้มงวดเป็น $C_s(\alpha, \beta)$ เซตเหล่านี้จะประกอบไปด้วยเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแบบบล็อก (block lower-triangular matrix) บทตั้งต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติของเมทริกซ์เหล่านี้

บทตั้ง 2.2 [11]

1. ถ้า $D_1 \in C(\alpha, \beta)$ และ $D_2 \in C(\beta, \gamma)$ แล้ว $D_1 D_2 \in C(\alpha, \gamma)$ นอกจากนี้ ถ้า $D_1 \in C_s(\alpha, \beta)$ หรือ $D_2 \in C_s(\beta, \gamma)$ แล้ว $D_1 D_2 \in C_s(\alpha, \gamma)$
2. ถ้า $D \in C(\alpha, \alpha)$ และ D เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) แล้ว $D^{-1} \in C(\alpha, \alpha)$
3. ถ้า $D \in C_s(\alpha, \alpha)$ แล้ว $I + D$ จะเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

การแปลงระบบหลายอัตราสุ่มให้เป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา ด้วยวิธีการลิฟต์ระบบเวลาเต็มหน่วย จะทำให้ได้ระบบหลายอัตราสุ่มที่ลิฟต์แล้ว ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลเสมอ ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มก็จะมีเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลของตัวควบคุม ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม เราจะต้องกำหนดโครงสร้างของตัวควบคุมให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลของตัวควบคุมด้วย

ตัวอย่าง 2.1 ให้พลาเน็ตหลายอัตราสุ่ม $y = Pu$ มีคาบการซีกตัวอย่างสัญญาณออก 1.5 วินาที คาบการคงค่าสัญญาณเข้า 1 วินาที ทำให้ $T_f = 3$ วินาที $\mu = 6$ และอัตราของสัญญาณออกและเข้าเป็น $\psi = 2$ และ $v = 3$ ตามลำดับ จากพลาเน็ตเราจะได้ y และ u ที่เวลารอบแรกเป็น

$$y = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1.5) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix}$$

ดังนั้นพลาเน็ต P จะสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล เมื่อส่วนป้อนผ่านของพลาเน็ตอยู่ในเซต

$$C(2, 3) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

และจะสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลแบบเข้มงวด เมื่อส่วนป้อนผ่านของพลาเน็ตอยู่ในเซต

$$C_s(2, 3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

พิจารณาพลาเน็ตเวลาต่อเนื่องในตัวอย่างที่ ก.2 ซึ่งเป็นพลาเน็ตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลแบบเข้มงวด เมื่อลิต์พลาเน็ตนี้แล้ว จะได้ส่วนป้อนผ่าน D ที่อยู่ในเซต $C_s(2, 3)$ ดังตัวอย่างที่ ก.4 ทำให้พลาเน็ตที่ลิต์แล้ว สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลแบบเข้มงวดของพลาเน็ตหลายอัตราส่วน และสำหรับการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วนที่มีกฎการควบคุมเป็น $u = Ky$ เราจะต้องออกแบบตัวควบคุมให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลของตัวควบคุม นั่นคือส่วนป้อนผ่านของตัวควบคุม D_K จะต้องอยู่ในเซต

$$C(3, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

◇

2.3 คุณสมบัติทั่วไปของระบบหลายอัตราส่วน

พลาเน็ตหลายอัตราส่วน P ที่มีผลสัมฤทธิ์ (realization) เป็น $\{A, B, C, D\}$ และมีอันดับเท่ากับ n จะสามารถวิเคราะห์คุณสมบัติทั่วไป เช่น เสถียรภาพ (stability) ความสามารถในการสังเกตได้ (observability) ความสามารถในการตรวจจับได้ (detectability) ความสามารถในการเข้าถึงได้ (reachability) ความสามารถในการทำให้เสถียรได้ (stabilizability) ได้ดังนี้ [20]

บทตั้ง 2.3 พลาเน็ตหลายอัตราส่วน P จะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) ก็ต่อเมื่อ ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A อยู่ภายในวงกลมเปิดหนึ่งหน่วย (open unit disk) บนระนาบเชิงซ้อน หรือ

$$|\lambda_i(A)| < 1; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

บทตั้ง 2.4 พลาเน็ตหลายอัตราส่วน P จะสามารถสังเกตได้ (observable) ก็ต่อเมื่อ ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I \\ C \end{bmatrix} = n; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

บทตั้ง 2.5 พลาเน็ตหลายอัตราส่วน P จะสามารถตรวจจับได้ (detectable) ก็ต่อเมื่อ z ซึ่งเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่ $|\lambda_i(A)| \geq 1$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - zI \\ C \end{bmatrix} = n \quad (2.12)$$

บทตั้ง 2.6 พลาเน็ตหลายอัตราส่วน P จะสามารถเข้าถึงได้ (reachable) ก็ต่อเมื่อ ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} = n; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

บทตั้ง 2.7 พลาเน็ตหลายอัตราส่วน P จะสามารถทำให้เสถียรได้ (stabilizable) ก็ต่อเมื่อ z ซึ่งเป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A ที่ $|\lambda_i(A)| \geq 1$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - zI & B \end{bmatrix} = n \quad (2.14)$$

เนื่องจากการแปลงจากระบบเวลาต่อเนื่องให้เป็นระบบเวลาเต็มหน่วย อาจทำให้ความสามารถในการสังเกตได้ ความสามารถในการตรวจจับได้ ความสามารถในการเข้าถึงได้ หรือความสามารถในการทำให้เสถียรได้เสียไป ดังนั้นการเลือกใช้คาบการซักตัวอย่างสัญญาณออก และคาบการคงค่าสัญญาณเข้า จึงมีความสำคัญต่อระบบหลายอัตราส่วน

บทตั้ง 2.8 สมมุติให้คู่ (A^c, C^c) เป็นคู่สังเกตได้ (คู่ตรวจจับได้) ของพลาเน็ตเวลาต่อเนื่อง ที่มีคาบการซักตัวอย่างแต่ละสัญญาณออก $(y_i, i = 1, \dots, q)$ เป็น $Y_i T_0$ ถ้าทุกๆ คู่ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A^c $\{\lambda_m, \lambda_n\}$ ที่ $\text{Re}(\lambda_m) = \text{Re}(\lambda_n)$ มีบาง i ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\text{Im}(\lambda_m - \lambda_n) \neq \frac{2l\pi}{Y_i T_0} \quad (2.15)$$

เมื่อ $l \in \mathbb{Z}$ แล้ว คู่ (A, C) ของพลาเน็ตหลายอัตราส่วนจะสามารถสังเกตได้ (สามารถตรวจจับได้) [10]

บทตั้ง 2.9 สมมุติให้คู่ (A^c, B^c) เป็นคู่เข้าถึงได้ (คู่ที่ทำให้เสถียรได้) ของพลาเน็ตเวลาต่อเนื่อง ที่มีคาบการคงค่าแต่ละสัญญาณเข้า $(u_j, j = 1, \dots, p)$ เป็น $U_j T_0$ ถ้าทุกๆ คู่ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A^c $\{\lambda_m, \lambda_n\}$ ที่ $\text{Re}(\lambda_m) = \text{Re}(\lambda_n)$ มีบาง j ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\text{Im}(\lambda_m - \lambda_n) \neq \frac{2l\pi}{U_j T_0} \quad (2.16)$$

เมื่อ $l \in \mathbb{Z}$ แล้ว คู่ (A, B) ของพลาเน็ตหลายอัตราส่วนจะสามารถเข้าถึงได้ (สามารถทำให้เสถียรได้) [10]

ตัวอย่าง 2.2 ให้พลาเน็ตเวลาต่อเนื่องที่สามารถเข้าถึงได้และสังเกตได้เป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}^c(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix} x^c(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u^c(t) \\ y^c(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x^c(t) \end{aligned}$$

ทำการควบคุมหลายอัตราส่วนโดยให้ คาบการซักตัวอย่างสัญญาณออกเป็น 1 วินาที คาบการคงค่าสัญญาณเข้าตัวแรกเป็น 1 วินาที และคาบการคงค่าสัญญาณเข้าตัวที่สองเป็น 1.5 วินาที หรือ $T_0 = 0.5$ วินาที $U_1 = Y = 2, U_2 = 3$ จะได้พลาเน็ตหลายอัตราส่วนที่อยู่ในรูประบบไม่แปรผันตามเวลาเป็น

$$\begin{aligned} x[h+1] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x[h] + \begin{bmatrix} 0 & -0.32 & 0 & -0.32 & 0 \\ 0.64 & 0.32 & -0.64 & -0.32 & 0.64 \end{bmatrix} u[h] \\ y[h] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x[h] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.64 & -0.64 & 0 & 0 & 0 \\ -0.64 & 0 & 0.64 & 0 & 0 \end{bmatrix} u[h] \end{aligned}$$

โดยที่ $x[h] = x^c(3h)$,

$$y = \begin{bmatrix} y(3h) \\ y(3h+1) \\ y(3h+2) \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1(3h) \\ u_2(3h) \\ u_1(3h+1) \\ u_2(3h+1.5) \\ u_1(3h+2) \end{bmatrix}$$

จากพลาเน็ตเวลาต่อเนื่องซึ่งมีค่าเจาะจงเป็น $j\pi, -j\pi$ กลายเป็นพลาเน็ตหลายอัตราส่วนที่ค่าเจาะจงเป็น $-1, -1$ ซึ่งเป็นระบบเวลาเต็มหน่วยที่ไม่เสถียร จะเห็นได้ว่า มีคู่ของค่าเจาะจงของพลาเน็ตเวลาต่อเนื่องที่มีค่าของส่วนจริงเท่ากัน และมีผลต่างของค่าส่วนจินตภาพเป็น 2π ดังนั้นพลาเน็ตหลายอัตราส่วนนี้จึงไม่สามารถสังเกตได้ เนื่องจาก $\frac{2l\pi}{T_0} = 2\pi$ เมื่อ $l = 1$ แต่จะสามารถเข้าถึงได้เนื่องจากมีสัญญาณเข้าตัวที่สองที่ $\frac{2l\pi}{T_0} \neq 2\pi$ เมื่อ $l \in \mathbb{Z}$ เห็นได้จาก

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - zI \\ C \end{bmatrix} = 1; \quad z = -1 \quad (2.17)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - zI & B \end{bmatrix} = 2; \quad z = \lambda_i(A) \quad (2.18)$$

และเมื่อค่าเจาะจงที่ทำให้ค่าอันดับ (rank) ของสมการที่ (2.17) ลดลงคือ -1 ซึ่งไม่เสถียร ทำให้พลาเน็ตนี้ไม่สามารถตรวจจับได้ แต่สามารถทำให้เสถียรได้ \diamond

2.4 นอร์มในระบบหลายอัตราส่วน

เมื่อสมรรถนะของระบบควบคุมวัดได้จากขนาดของสัญญาณต่างๆ เช่น สัญญาณความเคลื่อน สัญญาณควบคุม ฯลฯ ดังนั้นจึงต้องมีการนิยามนอร์มของสัญญาณ และนอร์มของระบบขึ้น เพื่อใช้เปรียบเทียบสมรรถนะของระบบควบคุม

2.4.1 นอร์มสองของสัญญาณในระบบหลายอัตราส่วน

นอร์มสองของสัญญาณในระบบหลายอัตราส่วน สามารถวัดได้จากนอร์มสองของสัญญาณที่ถูกลิฟต์ นอร์มสองของสัญญาณที่ถูกลิฟต์จะมีนิยามดังนี้

นิยาม 2.1 นอร์มสอง (2-norm) ของสัญญาณที่ถูกลิฟต์ u เป็น

$$\|u\|_2 \triangleq \left(\sum_{h=0}^{\infty} \|u[h]\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

เมื่อ $\|u[h]\|_2$ มีนิยามเป็นนอร์มสองของเวกเตอร์ $u[h]$ [22]

จากนิยามของนอร์มสองจะเห็นว่า ค่านอร์มสองของสัญญาณที่ถูกลิฟต์ u และสัญญาณเวลาเต็มหน่วย u จะมีค่าเท่ากันเนื่องจาก

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &= \left(\sum_{h=0}^{\infty} \|u[h]\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\begin{bmatrix} u(0) \\ u(UT_0) \\ \vdots \\ u(\overline{(v-1)UT_0}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(0) \\ u(UT_0) \\ \vdots \\ u(\overline{(v-1)UT_0}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(vUT_0) \\ u(\overline{(v+1)UT_0}) \\ \vdots \\ u(\overline{(2v-1)UT_0}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(vUT_0) \\ u(\overline{(v+1)UT_0}) \\ \vdots \\ u(\overline{(2v-1)UT_0}) \end{bmatrix} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (u^T(0)u(0) + u^T(UT_0)u(UT_0) + \dots)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_2 \end{aligned}$$

2.4.2 นอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบหลายอัตราสุ่ม

นอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบหลายอัตราสุ่มนิยามจาก นอร์มสองของสัญญาณออกทั้งหมด เมื่อทุก ๆ สัญญาณเข้าในหนึ่งคาบเวลารอบเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ (impulse function)

นิยาม 2.2 กำหนดให้ระบบหลายอัตราสุ่มที่มีเสถียรภาพ G มีจำนวนครั้งการคงค่าสัญญาณเข้าในหนึ่งคาบเวลารอบเป็น ω ให้ δ_d คือฟังก์ชันอิมพัลส์ในสัญญาณเวลาเต็มหน่วย ให้ e_γ เป็นเวกเตอร์มูลฐานมาตรฐาน (standard basis vector) ใน \mathcal{R}^ω (เวกเตอร์ที่มีค่าเป็น 1 ที่ตำแหน่งที่ γ นอกนั้นมีค่าเป็น 0) และ g คือผลตอบอิมพัลส์ของระบบ G จะได้นอร์ม \mathcal{H}_2 (\mathcal{H}_2 -norm) ของระบบหลายอัตราสุ่มนี้เป็น [22]

$$\|G\|_2 \triangleq \|g\|_2 = \left\{ \sum_{\gamma=1}^{\omega} \|G \delta_d e_\gamma\|_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

จากทฤษฎีของพาร์เซวาล (Parseval's theorem) ที่ว่านอร์มสองทางเวลาและนอร์มสองทางความถี่ของสัญญาณเวลาเต็มหน่วยในปริภูมิ ℓ_2 มีค่าเท่ากัน ทำให้นอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบหลายอัตราสุ่มหาได้จาก

$$\begin{aligned} \|\underline{g}\|_2 &= \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} \text{trace}(\underline{g}^T[h] \underline{g}[h]) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace}(\underline{G}^*[e^{j\theta}] \underline{G}[e^{j\theta}]) d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{\text{trace}(\underline{D}\underline{D}^T + \underline{C}\underline{Q}\underline{C}^T)\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

เมื่อ \underline{G}^* คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate transpose) ของ \underline{G} และ $Q > 0$ คือคำตอบของสมการเลียปูนอฟ (Lyapunov equation) $Q = AQA^T + BB^T$ จะเห็นว่านิยามนอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบหลายอัตราสุ่มนี้เหมือนกับนิยามนอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบเวลาเต็มหน่วยไม่แปรผันตามเวลา ในกรณีหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก

ตัวอย่าง 2.3 ให้ระบบเวลาต่อเนื่องที่มีเสถียรภาพมีสมการสถานะเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}^c(t) &= -x^c(t) + w^c(t) \\ z^c(t) &= x^c(t) \end{aligned}$$

แปลงเป็นระบบหลายอัตราสุ่ม G ที่ $T_f = 1.5, \zeta = 3, \omega = 2$ ได้

$$\begin{aligned} x[h+1] &= 0.223 x[h] + \begin{bmatrix} 0.249 & 0.528 \end{bmatrix} u[h] \\ y[h] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.607 \\ 0.368 \end{bmatrix} x[h] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.393 & 0 \\ 0.411 & 0.221 \end{bmatrix} u[h] \end{aligned}$$

และคำตอบของสมการ $Q = AQA^T + BB^T$ คือ $Q = 0.358$

หาค่าของ \mathcal{H}_2 ของระบบ \underline{G} จากการหาผลตอบอิมพัลส์ได้

$$\begin{aligned}
 \|\underline{G}\|_2 &= (\|\underline{G}\delta_{de_1}\|_2^2 + \|\underline{G}\delta_{de_2}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\left\| \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.393 \\ 0.411 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.249 \\ 0.151 \\ 0.092 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.056 \\ 0.034 \\ 0.020 \end{bmatrix}, \dots \right\} \right\|_2^2 + \left\| \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.221 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.528 \\ 0.320 \\ 0.194 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.118 \\ 0.071 \\ 0.043 \end{bmatrix}, \dots \right\} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\| \{0.569, 0.306, 0.068, \dots\} \|_2^2 + \| \{0.221, 0.647, 0.144, \dots\} \|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 0.954
 \end{aligned}$$

หรือหาค่าของ \mathcal{H}_2 ทางความถี่ได้

$$\begin{aligned}
 \|\hat{\underline{G}}\|_2 &= \{\text{trace}(D D^T + C Q C^T)\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left\{ \text{trace} \begin{bmatrix} 0.358 & 0.217 & 0.132 \\ 0.217 & 0.287 & 0.242 \\ 0.132 & 0.242 & 0.266 \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= 0.954
 \end{aligned}$$

◇

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

การออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหลายอัตราสุ่มที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ คือการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการแปลงปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ให้เป็นปัญหาของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาเชิงคอนเวกซ์เพื่อหาตัวควบคุมด้วยวิธีทางคอนเวกซ์โปรแกรมมิ่ง

3.1 สมมุติฐานในการออกแบบตัวควบคุม

ในการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด สำหรับระบบควบคุมนัยทั่วไปดังรูปที่ 2.2 ระบบควบคุมมีสมมุติฐานดังต่อไปนี้

1. พลาตันนัยทั่วไป G^c มีคู่ (A^c, C_2^c) ที่สามารถตรวจจับได้ และคู่ (A^c, B_2^c) ที่สามารถทำให้เสถียรได้
2. คาบการชักตัวอย่างสัญญาณ y^c และคาบการคงค่าสัญญาณ u^c สอดคล้องกับบทตั้งที่ 2.8 และ 2.9 ตามลำดับ
3. พลาตันนัยทั่วไป G^c มีส่วนป้อนผ่าน D_{22}^c เป็นศูนย์
4. ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม K มีส่วนป้อนผ่าน D_K อยู่ในเซตของ $C(v, \psi)$
5. อันดับของพลาตันนัยทั่วไป n เท่ากับอันดับของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม n_K

สมมุติฐานที่ 1 และ 2 จะทำให้พลาตันนัยทั่วไปที่ลิฟต์แล้ว G สามารถตรวจจับได้ และสามารถทำให้เสถียรได้ สมมุติฐานที่ 3 ทำให้พลาตันนัยทั่วไป G^c สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลแบบเข้มงวดของพลาตันเวลาต่อเนื่อง สมมุติฐานที่ 4 ทำให้ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลของตัวควบคุม และสมมุติฐานสุดท้ายเป็นสมมุติฐานที่จำเป็นในการหาตัวควบคุมด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

3.2 วิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ปัญหาในระบบควบคุมหลายๆ ปัญหา สามารถจัดให้อยู่ในรูปของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ด้วยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1 กำหนดให้เมทริกซ์สมมาตร $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21}^T \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ จะได้ว่าเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน [20]

1. $M > 0$
2. $M_{11} > 0$ และ $M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{21}^T > 0$

3. $M_{22} > 0$ และ $M_{11} - M_{21}^T M_{22}^{-1} M_{21} > 0$

บทตั้ง 3.2 กำหนดให้เมทริกซ์แน่นอนค่าบวก X และ $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ แล้ว จะมีเมทริกซ์ M และ $N \in \mathbb{R}^{n_K \times n}$ และเมทริกซ์สมมาตร U และ $V \in \mathbb{R}^{n_K \times n_K}$ ที่สอดคล้องกับ

$$Q = \begin{bmatrix} X & M^T \\ M & U \end{bmatrix} > 0 \quad \text{และ} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} Y & N^T \\ N & V \end{bmatrix}$$

ก็ต่อเมื่อ [21]

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad \text{และ} \quad \text{rank}(I - XY) \leq n_K \quad (3.1)$$

ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่มดังรูปที่ 2.2 ก็สามารรถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 คือ ปัญหาการหาค่าต่ำสุดของกำลังสองของนอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบวงปิดที่เสถียร สมมุติว่าพลาตันัยทั่วไปที่ลิฟต์แล้ว \underline{G} มี $\underline{D}_{22} = 0$ จากนิยามนอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบหลายอัตราสุ่มตามสมการที่ (2.21) เราจะได้ปัญหาการหาค่าต่ำสุดเป็น

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \text{trace}(D_{cl} D_{cl}^T + C_{cl} Q C_{cl}^T) \\ \text{subject to} \quad A_{cl} Q A_{cl}^T + B_{cl} B_{cl}^T - Q < 0 \\ \quad \quad \quad Q > 0 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

กำหนดให้ W เป็นเมทริกซ์แน่นอนค่าบวกที่ $W > \underline{D}_{cl} D_{cl}^T + C_{cl} Q C_{cl}^T$ ทำให้สามารถแปลงปัญหา (3.2) ได้เป็น

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \text{trace}(W) \\ \text{subject to} \quad A_{cl} Q A_{cl}^T + B_{cl} B_{cl}^T - Q < 0 \\ \quad \quad \quad Q > 0 \\ \quad \quad \quad C_{cl} Q C_{cl}^T + \underline{D}_{cl} \underline{D}_{cl}^T - W < 0 \\ \quad \quad \quad W > 0 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

และจากบทตั้งที่ 3.1 สามารถแปลงอสมการในปัญหา (3.3) ได้เป็น

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \text{trace}(W) \\ \text{subject to} \quad \begin{bmatrix} I & 0 & B_{cl}^T \\ 0 & Q^{-1} & A_{cl}^T \\ B_{cl} & A_{cl} & Q \end{bmatrix} > 0 \\ \quad \quad \quad \begin{bmatrix} I & 0 & \underline{D}_{cl}^T \\ 0 & Q^{-1} & C_{cl}^T \\ \underline{D}_{cl} & C_{cl} & W \end{bmatrix} > 0 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

ต่อมากำหนดให้เมทริกซ์ Q และ Q^{-1} มีส่วนประกอบของเมทริกซ์เป็น

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} X & M^T \\ M & U \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} Y & N^T \\ N & V \end{bmatrix}$$

โดยที่ $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ และ $U, V \in \mathbb{R}^{n_K \times n_K}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร และ $M, N \in \mathbb{R}^{n_K \times n}$ เมื่อ n คืออันดับของพลาตันัยทั่วไป และ n_K คืออันดับของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม จากนั้นคุณเมทริกซ์ของเงื่อนไข

ไขอสมการในปัญหา (3.4) ด้วยเมทริกซ์การแปลง (transformation matrix) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1^T & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & B_{cl}^T \\ 0 & Q^{-1} & A_{cl}^T \\ B_{cl} & A_{cl} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & B_{cl}^T \Theta_2 \\ 0 & \Theta_2^T \Theta_1 & \Theta_1^T A_{cl}^T \Theta_2 \\ \Theta_2^T B_{cl} & \Theta_2^T A_{cl} \Theta_1 & \Theta_2^T \Theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & D_{cl}^T \\ 0 & Q^{-1} & C_{cl}^T \\ D_{cl} & C_{cl} & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & D_{cl}^T \\ 0 & \Theta_2^T \Theta_1 & \Theta_1^T C_{cl}^T \\ D_{cl} & C_{cl} \Theta_1 & W \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\Theta_1 \triangleq \begin{bmatrix} X & I \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 \triangleq \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

ผลคูณของบล็อกย่อยของเมทริกซ์เงื่อนไขเท่ากัน

$$\begin{aligned} \Theta_2^T \Theta_1 &= \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \\ \Theta_2^T A_{cl} \Theta_1 &= \begin{bmatrix} AX + B_2(D_K C_2 X + C_K M) & A + B_2 D_K C_2 \\ Y(A + B_2 D_K C_2)X + N^T B_K C_2 X & Y A + (Y B_2 D_K + N^T B_K) C_2 \\ + Y B_2 C_K M + N^T A_K M & \end{bmatrix} \\ \Theta_2^T B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ Y B_1 + (Y B_2 D_K + N^T B_K) D_{21} \end{bmatrix} \\ C_{cl} \Theta_1 &= \begin{bmatrix} C_1 X + D_{12}(D_K C_2 X + C_K M) & C_1 + D_{12} D_K C_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตามเงื่อนไขอสมการของปัญหานี้ยังไม่อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เนื่องจากยังมีการคูณกันของตัวแปรไม่ทราบค่า ดังนั้นเราจึงต้องนิยามตัวแปรของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นขึ้นมาใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{A} &\triangleq Y(A + B_2 D_K C_2)X + N^T B_K C_2 X + Y B_2 C_K M + N^T A_K M \\ \tilde{B} &\triangleq Y B_2 D_K + N^T B_K \\ \tilde{C} &\triangleq D_K C_2 X + C_K M \\ \tilde{D} &\triangleq D_K \end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 เป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุดที่มีเงื่อนไขเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} &\min \quad \text{trace}(W) \\ &\text{subject to} \quad \left. \begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & (\star)^T & (\star)^T & (\star)^T & (\star)^T \\ 0 & \mathbf{X} & (\star)^T & (\star)^T & (\star)^T \\ 0 & I & \mathbf{Y} & (\star)^T & (\star)^T \\ B_1 + B_2 \tilde{D} D_{21} & AX + B_2 \tilde{C} & A + B_2 \tilde{D} C_2 & \mathbf{X} & (\star)^T \\ Y B_1 + \tilde{B} D_{21} & \tilde{A} & Y A + \tilde{B} C_2 & I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} I & (\star)^T & (\star)^T & (\star)^T \\ 0 & \mathbf{X} & (\star)^T & (\star)^T \\ 0 & I & \mathbf{Y} & (\star)^T \\ D_{11} + D_{12} \tilde{D} D_{21} & C_1 \mathbf{X} + D_{12} \tilde{C} & C_1 + D_{12} \tilde{D} C_2 & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

สังเกตว่าตัวอักษรหนาในเงื่อนไขข้อสมการแทนตัวแปรของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และ $(*)^T$ แทนส่วนประกอบของเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตรงข้ามแนวทแยง

เนื่องจากตัวควบคุมหลายอัตราส่วนมีเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล ที่บังคับโครงสร้างของส่วนป้อนผ่านของตัวควบคุม ดังนั้นในการกำหนดปัญหาของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น จะต้องกำหนดโครงสร้างของตัวแปร \tilde{D} ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล $C(v, \psi)$ การกำหนดโครงสร้างของตัวแปรนี้ไม่ทำให้คุณสมบัติความเป็นคอนเวกซ์ของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเสียไป

เมื่อแก้ปัญหาค่าต่ำสุดของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นแล้ว เราจะได้ตัวแปรของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นทั้ง 7 ตัว จากนิยามของตัวแปรของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่กำหนด จะเห็นว่าตัวแปรเหล่านี้ยังไม่เพียงพอที่จะสามารถหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม A_K, B_K, C_K, D_K ได้ เนื่องจากยังไม่มีเมทริกซ์ M และ N ในการแปลงกลับ อย่างไรก็ตาม จากเงื่อนไขข้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในปัญหา (3.5) เราจะได้ว่า

$$X > 0, \quad Y > 0, \quad \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$$

ซึ่งทำให้ $\text{rank}(I - XY) = n$ และจากสมมุติฐานที่ 5 ที่ $n = n_K$ ทำให้เงื่อนไขในอสมการที่ (3.1) เป็นจริง และเราสามารถหาเมทริกซ์ M และ N ได้ตามบทตั้งที่ 3.2 จาก $QQ^{-1} = I$ เราจะได้ว่า $M^T N = I - XY$ ตามนิยามของ Q และ Q^{-1} ที่กำหนดไว้ เราจึงสามารถหาเมทริกซ์จัตุรัส M และ N ได้จากการแยกย่อยค่าเอกฐาน (singular value decomposition) เมื่อได้เมทริกซ์ M และ N แล้ว เราจะสามารถหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุมได้ตามลำดับดังนี้

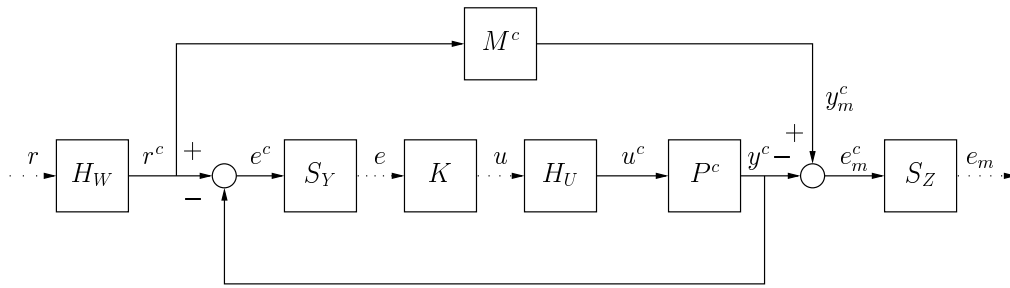
$$\begin{aligned} \underline{D}_K &= \tilde{D} \\ \underline{C}_K &= (\tilde{C} - \underline{D}_K C_2 X) M^{-1} \\ \underline{B}_K &= N^T (\tilde{B} - Y B_2 \underline{D}_K) \\ \underline{A}_K &= N^T [\tilde{A} - Y (A + B_2 \underline{D}_K C_2) X - N^T B_K C_2 X - Y B_2 C_K M] M^{-1} \end{aligned}$$

ดังนั้นตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 สำหรับระบบหลายอัตราส่วนคือ

$$\underline{\hat{K}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_K & \underline{B}_K \\ \underline{C}_K & \underline{D}_K \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ที่กล่าวมาเป็นการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วนสำหรับพลาตันด์นัยทั่วไปที่มี $D_{22} = 0$ แต่สำหรับพลาตันด์นัยทั่วไปที่ $D_{22} = 0$ เมื่อแปลงเป็นพลาตันด์นัยทั่วไปที่ลิฟต์แล้ว ส่วนป้อนผ่าน \underline{D}_{22} จะอยู่ในเซต $C_s(v, \psi)$ ซึ่งอาจจะไม่เท่ากับเมทริกซ์ศูนย์ ดังนั้นในกรณีที่ $D_{22} \neq 0$ เราจะสามารถออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 สำหรับระบบหลายอัตราส่วนนี้ได้ โดยสมมุติให้ \underline{G}' คือพลาตันด์นัยทั่วไปที่ลิฟต์แล้ว \underline{G} ที่แยกส่วนป้อนผ่าน \underline{D}_{22} ออก ดังสมการที่ (2.8) จากนั้นออกแบบตัวควบคุม

$$\underline{\hat{K}}' = \begin{bmatrix} \underline{A}'_K & \underline{B}'_K \\ \underline{C}'_K & \underline{D}'_K \end{bmatrix}$$



รูปที่ 3.1: ปัญหาการอ้างอิงแบบจำลอง

สำหรับพลาตันด์นัยทั่วไป G' ด้วยวิธีข้างต้น โดยเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลของ K' เหมือนกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลของ K จากนั้นแปลงกลับเป็นตัวควบคุม K สำหรับพลาตันด์นัยทั่วไป G ตามสมการ

$$\hat{K} = \hat{K}' (I + D_{22} \hat{K}')^{-1} \quad (3.7)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} A_K &= A'_K - B'_K (I + D_{22} D'_K)^{-1} D_{22} C'_K \\ B_K &= B'_K (I + D_{22} D'_K)^{-1} \\ C_K &= C'_K - D'_K (I + D_{22} D'_K)^{-1} D_{22} C'_K \\ D_K &= D'_K (I + D_{22} D'_K)^{-1} \end{aligned}$$

และตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่มจะเท่ากับสมการที่ (3.6) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าตัวควบคุม K มีเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลเหมือนกับตัวควบคุม K' ตามบทตั้งที่ 3.3

บทตั้ง 3.3 กำหนดให้ $D_K = D'_K (I + D_{22} D'_K)^{-1}$ และ $D_{22} \in C_s(\psi, v)$ แล้ว $D_K \in C(v, \psi)$ ก็ต่อเมื่อ $D'_K \in C(v, \psi)$

พิสูจน์ ก่อนอื่นเราจะพิสูจน์เงื่อนไขเพียงพอ จากบทตั้งที่ 2.2 ถ้า $D_{22} \in C_s(\psi, v)$ และ $D'_K \in C(v, \psi)$ จะได้ว่า $D_{22} D'_K \in C_s(\psi, \psi)$ และ $I + D_{22} D'_K$ จะเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และเมทริกซ์ผกผันของมันจะอยู่ในเซต $C(\psi, \psi)$ ดังนั้น $D_K = D'_K (I + D_{22} D'_K)^{-1}$ จะอยู่ในเซต $C(v, \psi)$ ส่วนการพิสูจน์เงื่อนไขจำเป็น เราจะเปลี่ยนสมการของ D_K เป็น $D'_K = (I - D_K D_{22})^{-1} D_K$ แล้วสามารถพิสูจน์เงื่อนไขจำเป็นได้ในลักษณะเดิม \square

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาปัญหาการอ้างอิงแบบจำลอง (model reference) ดังรูปที่ 3.1 โดยที่ฟังก์ชันถ่ายโอนของพลาตันด์เวลาต่อเนื่องเป็น

$$\hat{P}^c \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_P & B_P \\ \hline C_P & D_P \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -0.4 & -1.4 & 1 \\ \hline 0.4 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

และฟังก์ชันถ่ายโอนของแบบจำลองวงปิดเป็น

$$\hat{M}^c \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_M & B_M \\ \hline C_M & D_M \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & \end{array} \right]$$

ตัวควบคุมหลายอัตราส่วน K มีคาบการชักตัวอย่างสัญญาณความคลาดเคลื่อน e^c เป็น 1 วินาที คาบการคงค่าสัญญาณควบคุม u^c เป็น 1.5 วินาที วัตถุประสงค์ของปัญหาการควบคุมนี้คือ ต้องการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วน K ที่ทำให้ระบบวงปิดมีลักษณะเหมือนแบบจำลองวงปิด นั่นคือทำให้สัญญาณออกของพลาเน็ต y^c ตามรอยสัญญาณออกของแบบจำลอง y_m^c โดยทำให้แอมพลิจูดของสัญญาณความคลาดเคลื่อนแบบจำลอง e_m ซึ่งถูกสุ่มจากสัญญาณ e_m^c ทุกๆ คาบ 1.5 วินาที มีค่าน้อยที่สุด สัญญาณอ้างอิง r^c ที่ใช้เป็นสัญญาณขั้น ดังนั้นปัญหาดังกล่าวสามารถจัดให้เป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ได้ โดยมีพลาเน็ตนัยทั่วไป G^c เป็น

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_m^c \\ \hat{e}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_M & 0 & B_M & 0 \\ 0 & A_P & 0 & B_P \\ C_M & -C_P & D_M & -D_P \\ 0 & -C_P & I & -D_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}^c \\ \hat{u}^c \end{bmatrix}$$

ลิฟต์พลาเน็ตหลายอัตราส่วนด้วยคาบเวลารอบ $T_f = 3$ วินาที $\zeta = 2, \psi = 3, v = 2$ และสำหรับสัญญาณเข้า r^c ที่คงที่ เราเลือกให้ $\omega = 1$ ดังนั้นเราจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของพลาเน็ตนัยทั่วไปที่ลิฟต์แล้วเป็น

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0.050 & 0 & 0 & 0.950 & 0 & 0 \\ 0 & 0.467 & 0.419 & 0 & 0.743 & 0.585 \\ 0 & -0.168 & -0.118 & 0 & -0.124 & 0.543 \\ \hline 1 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.223 & -0.306 & -0.217 & 0.777 & -0.234 & 0 \\ \hline 0 & -0.4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.349 & -0.202 & 1 & -0.128 & 0 \\ 0 & -0.263 & -0.209 & 1 & -0.301 & -0.040 \end{bmatrix}$$

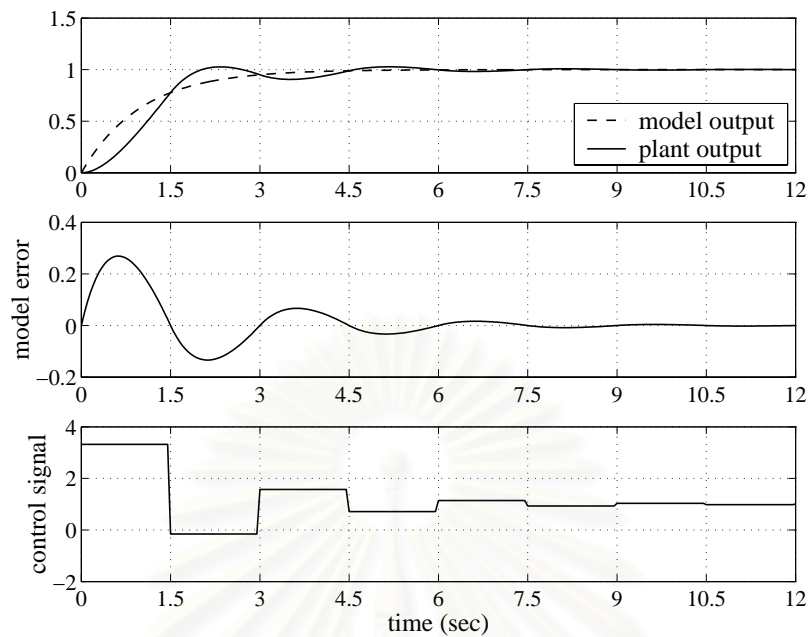
จากพลาเน็ตนัยทั่วไปที่ลิฟต์แล้ว จะเห็นว่า $D_{22} \neq 0$ ดังนั้นเราจะกำหนดให้พลาเน็ตนัยทั่วไป G' คือพลาเน็ตนัยทั่วไป G ที่ $D_{22} = 0$ แล้วนำพลาเน็ตนัยทั่วไปนี้ไปแทนค่าในปัญหาของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (3.5) โดยเราจะกำหนดโครงสร้างของส่วนป้อนผ่านของตัวควบคุม K' ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล นั่นคือ $D'_{K'} \in C(2, 3)$ หรือเซตของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแบบบล็อก

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $a, b, c \in \mathbb{R}$

หลังจากหาตัวแปรของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และแปลงเป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุม แล้วจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของ K' เป็น

$$\hat{K}' = \begin{bmatrix} 6.492 & -4.879 & -10.831 & 9.308 & -7.618 & -0.116 \\ 7.744 & -5.932 & -12.544 & 6.945 & -0.999 & -3.859 \\ -0.486 & 0.468 & 0.641 & 2.060 & -4.078 & 1.813 \\ \hline 5.399 & -4.306 & -9.254 & 3.319 & 0 & 0 \\ 1.645 & -1.724 & -2.623 & -5.546 & 5.393 & 0 \end{bmatrix}$$



รูปที่ 3.2: ผลตอบของปัญหาการอ้างอิงแบบจำลอง

จะเห็นว่าส่วนบ่อนผ่านของตัวควบคุม \underline{K}' อยู่ในเซตของ $C(2, 3)$ จากนั้นเปลี่ยนเป็นตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \underline{K} สำหรับพลาตันั้นๆ ไป \underline{G} ได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดเป็น

$$\underline{\hat{K}} = \begin{bmatrix} 1.013 & -0.506 & -1.440 & 5.969 & -7.643 & -0.116 \\ -0.053 & 0.350 & 0.791 & 3.158 & -1.828 & -3.859 \\ 0.034 & 0.023 & -0.236 & 1.907 & -3.689 & 1.812 \\ \hline 5.399 & -4.306 & -9.254 & 3.319 & 0 & 0 \\ 5.373 & -4.698 & -9.013 & -3.254 & 5.393 & 0 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่าส่วนบ่อนผ่านของตัวควบคุม \underline{K} ก็อยู่ในเซตของ $C(2, 3)$ นั่นคือตัวควบคุมหลายอัตราส่วนนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล ผลการจำลองระบบควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ได้ผลดังรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าสัญญาณออกของพลาตันั้นๆ y^c สามารถตามรอยสัญญาณออกของแบบจำลอง y_m^c ได้อย่างเหมาะสมที่สุดในแง่ของสัญญาณเวลาเต็มหน่วย เนื่องจากสัญญาณความคลาดเคลื่อนแบบจำลอง e_m^c มีค่าเกือบเป็นศูนย์ทุกๆ คาบเวลา 1.5 วินาที จากการคำนวณ เราจะได้ค่าอาร์มสองของสัญญาณเวลาเต็มหน่วยของสัญญาณความคลาดเคลื่อนแบบจำลอง e_m เท่ากับ 1.110×10^{-4} \diamond

บทที่ 4

ระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์: กรณีศึกษา

ฮาร์ดดิสก์เป็นอุปกรณ์ที่สำคัญในเครื่องคอมพิวเตอร์ ที่มีหน้าที่เก็บบันทึกข้อมูล เพื่อใช้ในการประมวลผล ฮาร์ดดิสก์ที่ดีควรมีความเชื่อถือได้ในการบันทึกข้อมูล เพื่อไม่ทำให้ข้อมูลที่สำคัญสูญหาย และควรมีประสิทธิภาพในการเข้าถึงข้อมูลที่ดี เพื่อให้ส่วนประมวลผลสามารถทำงานได้เร็ว ที่ผ่านมามีการพัฒนาประสิทธิภาพของฮาร์ดดิสก์ให้ดีขึ้น เริ่มจากในปี ค.ศ. 1956 บริษัท IBM ได้ผลิตฮาร์ดดิสก์รุ่น RAMAC เป็นรุ่นแรก ซึ่งประกอบด้วยดิสก์จำนวน 50 แผ่น ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 24 นิ้ว มีความจุทั้งสิ้นเพียง 5 เมกะไบต์ ต่อมาฮาร์ดดิสก์ก็มีความจุมากขึ้น และสามารถเข้าถึงข้อมูลได้เร็วขึ้น ฮาร์ดดิสก์ที่มีความจุมากที่สุดในตอนนี้ (มีนาคม ค.ศ. 2001) คือ Barracuda 180 ของบริษัท Seagate มีความจุทั้งสิ้น 181.6 กิกะไบต์ [6] ทั้งนี้เนื่องมาจากการพัฒนาในการใช้วัสดุในการผลิต และการพัฒนาการควบคุมของระบบขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

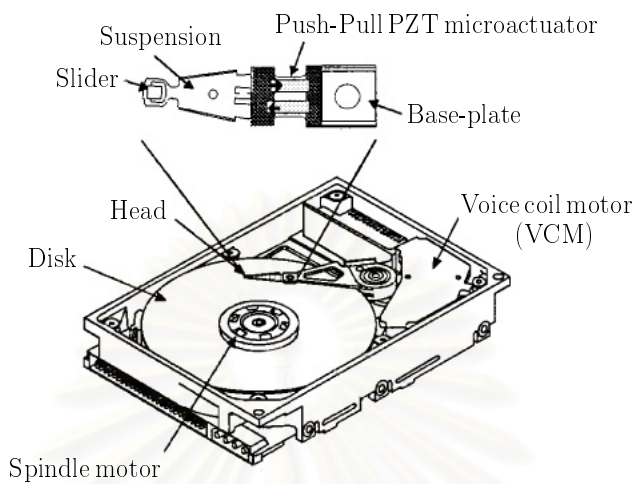
ในบทนี้จะกล่าวถึงส่วนประกอบของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ (hard disk drive servo system) การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ และ การวิเคราะห์แบบจำลองของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

4.1 ส่วนประกอบต่างๆ ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

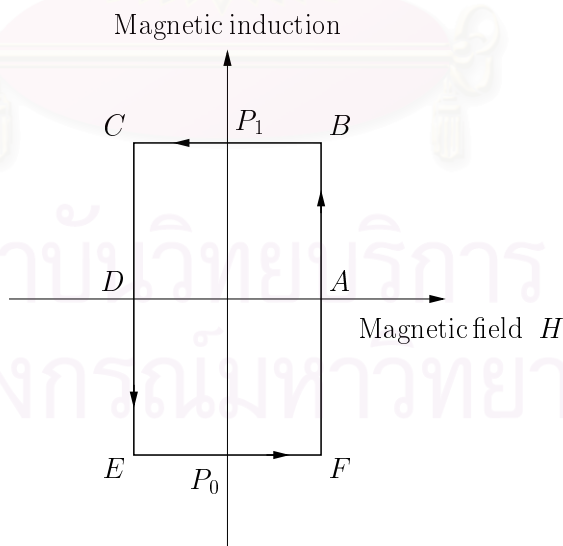
ระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เป็นระบบควบคุมตำแหน่งหัวอ่าน/เขียนของฮาร์ดดิสก์ มีลักษณะดังรูปที่ 4.1 ระบบดังกล่าวมีส่วนประกอบต่างๆ ที่สำคัญดังนี้ [6]

4.1.1 ดิสก์

ดิสก์ (disk) คือส่วนประกอบสำคัญที่มีหน้าที่เก็บข้อมูล ปกติแล้วดิสก์จะประกอบด้วยสารชั้นฐาน (substrate) ซึ่งเป็นวัสดุที่ไม่ใช่สารแม่เหล็ก เช่น อะลูมิเนียม แมกนีเซียม หรือ ส่วนประกอบของแก้ว และสารชั้นฐานนี้จะถูกเคลือบด้วยสื่อกลางการบันทึก (recording media) ชั้นของสื่อกลางการบันทึกนี้จะใช้ การฉีดฟิล์มบาง (thin film sputtering) ซึ่งเป็นชั้นของสารแม่เหล็ก เช่น สารประกอบของเฟอร์ไรท์ $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ จากนั้นจะเคลือบด้วยชั้นของคาร์บอน และชั้นหล่อลื่น (lubricating layer) บางๆ เพื่อป้องกันการขีดข่วนจากการสัมผัสของหัวอ่าน/เขียนกับดิสก์ [23] หลักการทำงานของระบบบันทึกข้อมูล พิจารณาตามเส้นกราฟวงปิดฮิสเทอรีซิส (Hysteresis loop) ของสารแม่เหล็กดังรูปที่ 4.2 เมื่อมีสนามแม่เหล็กไหลผ่านในตำแหน่งที่ต้องการบันทึกข้อมูล โดยมีความเข้มสนามแม่เหล็กมากกว่า H_A จะมีผลให้สื่อกลางการบันทึกตรงตำแหน่งนั้นมีโดเมนแม่เหล็ก (magnetic domain) ในทิศทางที่สถานะเป็น 1 แต่เมื่อมีความเข้มสนามแม่เหล็กในทิศทางตรงข้ามมากกว่า H_D จะมีผลให้สื่อกลางการบันทึกตรงตำแหน่งนั้นมีโดเมนแม่เหล็กในทิศทางที่สถานะเป็น 0 และเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กไหลผ่านในตำแหน่งนั้นๆ แล้ว ค่าสถานะนั้นจะ



รูปที่ 4.1: ส่วนประกอบต่างๆ ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์



รูปที่ 4.2: เส้นกราฟวงปิดฮิสเทอรีซิสของสื่อกลางการบันทึก

ยังคงอยู่ จนกว่าจะมีสนามแม่เหล็กที่ความเข้มพอเหมาะไหลผ่านอีกครั้ง สื่อกลางการบันทึกนี้จะถูกเรียงเป็นแทร็คในแนวรัศมี จำนวนแทร็คในแต่ละดิสก์สัมพันธ์กับความหนาแน่นแทร็ค (track density) ซึ่งคิดจากจำนวนแทร็คในหนึ่งหน่วยความยาวในแนวรัศมี ปกติแล้วมีหน่วยเป็น แแทร็ค/นิ้ว หรือ TPI (tracks per inch) ส่วนความสามารถในการบันทึกข้อมูลสัมพันธ์กับความหนาแน่นบิต (bit density) โดยวัดจากจำนวนบิตต่อหนึ่งหน่วยความยาวในหนึ่งแทร็ค ซึ่งมีหน่วยเป็น บิต/นิ้ว หรือ BPI (bits per inch) ดังนั้นความหนาแน่นความจุ หรือความจุของข้อมูลบนดิสก์ต่อพื้นที่ คือผลคูณของความหนาแน่นแทร็คกับความหนาแน่นบิต มีหน่วยเป็น บิต/นิ้ว² หรือ BPSI (bits per square inch) โดยปกติแล้วฮาร์ดดิสก์หนึ่งตัวจะประกอบไปด้วยดิสก์จำนวนหลายแผ่น และแต่ละแผ่นอาจจะมีสื่อกลางการบันทึกทั้งสองด้าน เพราะฉะนั้นความจุของฮาร์ดดิสก์หนึ่งตัวจะเท่ากับ ผลคูณของความหนาแน่นแทร็ค ความหนาแน่นบิต และพื้นที่ของดิสก์ทั้งหมดที่สามารถบันทึกข้อมูลได้

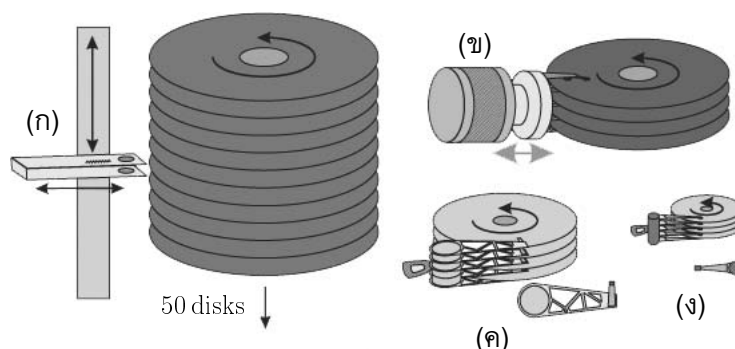
4.1.2 หัวอ่าน/เขียน

หัวอ่าน/เขียน (read/write head) ประกอบด้วยวัสดุแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic material) สองส่วน คือ ส่วนเขียนข้อมูลที่เป็นหัวเหนี่ยวนำแบบฟิล์มบาง (thin-film inductive head: TFI head) ลักษณะเดียวกับสื่อกลางการบันทึกบนดิสก์ และส่วนอ่านข้อมูลที่เป็นหัวความต้านทานแม่เหล็ก (magnetoresistive head: MR head) โดยในการเขียนข้อมูล หัวเขียนที่เป็นหัวเหนี่ยวนำแบบฟิล์มบางจะรับข้อมูลที่เป็นสัญญาณไฟฟ้า แล้วแปลงสัญญาณเป็นสนามแม่เหล็ก ส่งผ่านช่องอากาศ (air gap) เพื่อทำการโพลาไรซ์ (polarization) กับสื่อกลางการบันทึกบนดิสก์ ในส่วนการอ่านข้อมูล หัวอ่านที่เป็นหัวความต้านทานแม่เหล็ก จะอ่านรูปแบบของโดเมนแม่เหล็กจากสื่อกลางการบันทึก แล้วทำให้ความต้านทานที่หัวอ่านเปลี่ยนแปลงไปตามทิศทางของโดเมนแม่เหล็ก ทำให้เกิดเป็นสัญญาณไฟฟ้าตามข้อมูลที่ถูกบันทึก แล้วสัญญาณไฟฟ้านี้จะผ่านวงจรขยาย (preamplifier) ก่อนนำข้อมูลไปประมวลผล

ก่อนหน้านี้นี้เคยมีการนำเอาหัวเหนี่ยวนำแบบฟิล์มบาง มาใช้เป็นทั้งหัวเขียนและอ่านในหัวเดียวกัน แต่ด้วยข้อจำกัดของหัวเหนี่ยวนำที่ตอบสนองเฉพาะกับการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์แม่เหล็ก ทำให้การอ่านข้อมูลของมีประสิทธิภาพน้อยลงเมื่อมีสัญญาณรบกวนฟลักซ์แม่เหล็ก ต่อมาจึงมีการเปลี่ยนไปใช้หัวความต้านทานแม่เหล็กสำหรับการอ่านข้อมูลแทน เนื่องจากหัวความต้านทานแม่เหล็กนี้สามารถตอบสนองกับรูปแบบของฟลักซ์แม่เหล็กได้โดยตรง แต่อย่างไรก็ตาม หัวเหนี่ยวนำแบบฟิล์มบางก็ยังคงถูกใช้เป็นหัวเขียน เนื่องจากหัวความต้านทานแม่เหล็กไม่สามารถสร้างฟลักซ์แม่เหล็กเพื่อเขียนข้อมูลได้

4.1.3 สไลเดอร์

สไลเดอร์เป็นอุปกรณ์ที่ยึดหัวอ่าน/เขียนไว้กับแขนของตัวขับเคลื่อน เพื่อให้สามารถควบคุมตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียนได้ถูกต้อง และรักษาระดับความสูงจากหัวอ่าน/เขียนกับดิสก์ให้คงที่ ฮาร์ดดิสก์รุ่นแรก RAMAC มีดิสก์จำนวน 50 แผ่น แต่มีสไลเดอร์ที่ยึดหัวอ่าน/เขียนไว้เพียงอันเดียว สไลเดอร์นี้จะถูกเลื่อนเข้าออกเพื่อเปลี่ยนตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียน และถูกเลื่อนขึ้นลงเพื่อเปลี่ยนดิสก์ในการเข้าถึง ฮาร์ดดิสก์นี้จะมีการบีบลมใส่ระหว่างหัวอ่าน/เขียนกับดิสก์ เพื่อรักษาระดับของหัวอ่าน/เขียนไม่ให้ชน



รูปที่ 4.3: การพัฒนาของตัวขับเคลื่อนที่ใช้ควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

กับดิสก์ ปัจจุบันโครงสร้างของตัวขับเคลื่อนเปลี่ยนไป ดิสก์แต่ละแผ่นจะมีสไลเดอร์และหัวอ่าน/เขียนเพื่อเข้าถึงข้อมูลในแต่ละแผ่น ทำให้การบันทึกและอ่านข้อมูลเป็นไปได้เร็วขึ้น

ความสูงการบิน (flying height) คือความสูงระหว่างหัวอ่าน/เขียนกับสื่อกลางการบันทึก ความสูงการบินนี้สัมพันธ์กับความจุของฮาร์ดดิสก์ เนื่องจากสนามแม่เหล็กที่ถูกปล่อยออกมาจากหัวเขียน จะมีลักษณะเป็นลูกบาศก์ที่มีความกว้างเท่ากับความสูงการบิน ดังนั้นถ้าสามารถลดความสูงการบินลงได้ พื้นที่ในการบันทึกข้อมูลหนึ่งบิตก็จะลดลง ทำให้ฮาร์ดดิสก์มีความหนาแน่นความจุมากขึ้น

4.1.4 ตัวขับเคลื่อน

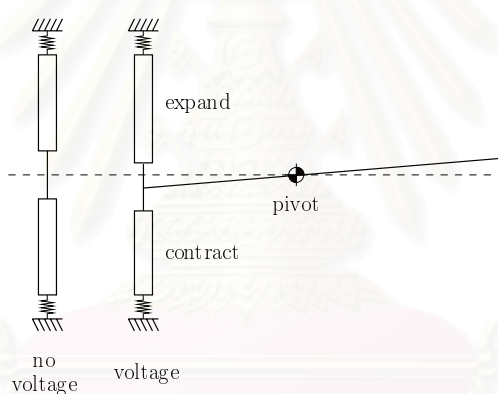
ตัวขับเคลื่อน (actuator) มีหน้าที่ปรับมุมของแขน เพื่อให้หัวอ่าน/เขียนเคลื่อนไปอยู่ในตำแหน่งที่ต้องการ ฮาร์ดดิสก์รุ่นแรก RAMAC จะมีตัวขับเคลื่อนที่เป็นมอเตอร์กระแสตรง (DC motor) ควบคุมสไลเดอร์ให้เคลื่อนที่ในแนวตั้งและแนวรัศมีเพื่อให้เข้าถึงข้อมูล ดังรูปที่ 4.3 (ก) ต่อมาก็ได้มีการใช้ตัวขับเคลื่อนแบบไฮดรอลิกแทน ในปี ค.ศ. 1965 ได้เริ่มมีการใช้มอเตอร์ขดลวดเสียงแบบแนวตรง (linear voice coil motor) เพื่อควบคุมตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียน ดังรูปที่ 4.3 (ข) ต่อมาในปี ค.ศ. 1979 ก็ได้มีการพัฒนาเป็นมอเตอร์ขดลวดเสียงแบบหมุน (rotary voice coil motor) เพื่อลดการใช้พลังงานลง ดังรูปที่ 4.3 (ค) จนปัจจุบันได้มีการพัฒนาให้ฮาร์ดดิสก์มีขนาดเล็กลง ความหนาแน่นบิตสูงขึ้น ทำให้การควบคุมต้องมีประสิทธิภาพมากขึ้น จึงได้มีการใช้ตัวขับเคลื่อนสองชั้น (dual-stage actuator) คือตัวขับเคลื่อนหลักที่สามารถเคลื่อนที่ได้มาก แต่มีพลวัตช้า ความละเอียดต่ำ และตัวขับเคลื่อนย่อยที่สามารถเคลื่อนที่ได้น้อย แต่มีพลวัตเร็ว และมีความละเอียดสูง ลักษณะดังรูปที่ 4.3 (ง) การใช้ตัวขับเคลื่อนย่อยเข้ามาช่วยในการควบคุมนี้ จะทำให้การเข้าถึงข้อมูลมีประสิทธิภาพดีขึ้น

4.1.4.1 มอเตอร์ขดลวดเสียง

มอเตอร์ขดลวดเสียงถูกใช้ในการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เนื่องจากเป็นมอเตอร์ขนาดเล็กที่ต้องการพลังงานในการควบคุมต่ำ และให้ผลการควบคุมที่แม่นยำ มอเตอร์ขดลวดเสียงใช้หลักการของการดูดและผลักของแม่เหล็กไฟฟ้าเพื่อหมุนมอเตอร์ โดยมอเตอร์ขดลวดเสียงจะประกอบด้วย ขดลวดเสียง (voice coil) ที่พันรอบโลหะส่วนปลายของแขนที่ยื่นออกมา และมีชิ้นส่วนแม่เหล็ก (magnet assembly) ที่เป็นแม่เหล็กถาวร ปล่อยสนามแม่เหล็กตัดขดลวดเสียง การควบคุมกระแสที่ไหลในขดลวด



รูปที่ 4.4: ส่วนประกอบของมอดูร์ขดลวดเสียง

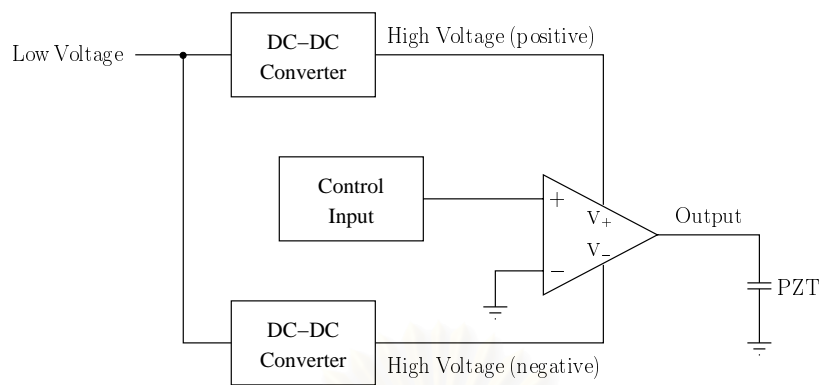


รูปที่ 4.5: ลักษณะการทำงานของพิโซอิเล็กทริกในระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

เสียง จะทำให้ส่วนปลายของแขนเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ต้องการ ชื่อของขดลวดเสียงนั้นมาจากลักษณะของขดลวดที่เหมือนกับขดลวดในลำโพง [23]

4.1.4.2 ตัวขับเคลื่อนชนิดพิโซอิเล็กทริก

วัสดุพิโซอิเล็กทริก (piezoelectric element) เป็นวัสดุที่สามารถยืดหรือหดตัวได้ไ้ เมื่อมีแรงดันไฟฟ้าขนาดสูงตกคร่อม ด้วยคุณสมบัตินี้วัสดุพิโซอิเล็กทริกจึงถูกนำมาใช้เป็นตัวขับเคลื่อนในระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ดังรูปที่ 4.5 แรงดันไฟฟ้าที่ใช้ควบคุมวัสดุพิโซอิเล็กทริกนี้ อยู่ระหว่าง ± 30 V แต่แรงดันไฟฟ้าปกติที่ใช้กับฮาร์ดดิสก์คือ 5 - 12 V ดังนั้นจึงต้องมีวงจรขยายแรงดันสูง ดังรูปที่ 4.6 เพื่อขยายแรงดันไฟฟ้าให้สามารถควบคุมวัสดุพิโซอิเล็กทริกได้ [24]



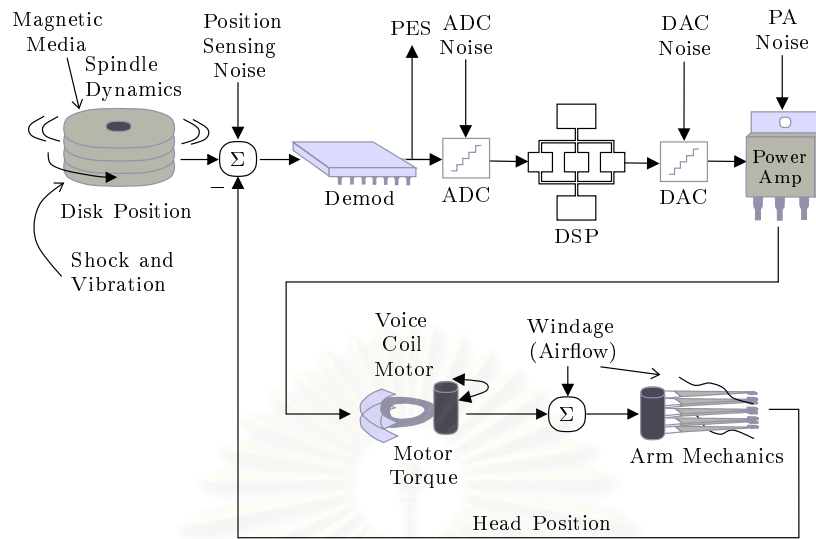
รูปที่ 4.6: วงจรขยายแรงดันสูงสำหรับวัสดุไพโซอิเล็กทริก

4.1.5 แกนหมุน

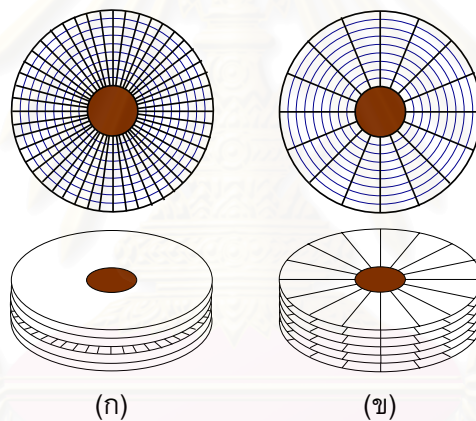
แกนหมุน (spindle) เป็นแกนที่ต่อกับมอเตอร์ เพื่อทำหน้าที่หมุนดิสก์ให้หัวอ่าน/เขียนสามารถเข้าถึงข้อมูลได้ตลอดทั้งแผ่น โดยมอเตอร์ที่ใช้จะเป็นมอเตอร์กระแสตรง ที่มีการควบคุมป้อนกลับเพื่อควบคุมความเร็วรอบให้คงที่ ความเร็วรอบนี้สัมพันธ์กับอัตราการชักตัวอย่างของสัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่ง นอกจากนี้ยังสัมพันธ์กับความสูงการบินของหัวอ่าน/เขียน เนื่องจากดิสก์ที่มีความเร็วรอบสูงจะมีแรงยกตัว ทำให้หัวอ่าน/เขียนถูกยกได้สูงมากกว่าดิสก์ที่มีความเร็วรอบต่ำ อีกทั้งการหมุนของแกนยังเป็นแหล่งสร้างสัญญาณรบกวนให้กับระบบ เช่น การไหลที่ไม่แน่นอนของอากาศระหว่างหัวอ่าน/เขียนกับดิสก์ ฮาร์ดดิสก์ที่มีความเร็วรอบสูง ดิสก์จะต้องมีขนาดเล็ก เพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนนี้ เช่น ฮาร์ดดิสก์รุ่นแรก RAMAC มีเส้นผ่าศูนย์กลางของดิสก์ 24 นิ้ว มีความเร็วรอบ 1,200 rpm ฮาร์ดดิสก์ในเครื่องคอมพิวเตอร์แบบบุคคล มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 5.25 นิ้ว มีความเร็วรอบ 7,200 rpm หรือฮาร์ดดิสก์ในเครื่องคอมพิวเตอร์แบบพกพา มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 2.5 นิ้ว มีความเร็วรอบ 15,000 rpm

4.2 การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

ฮาร์ดดิสก์เป็นอุปกรณ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งในคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีหน้าที่สำหรับเก็บข้อมูลต่างๆ เพื่อไปประมวลผล ความถูกต้องและรวดเร็วในการเข้าถึงข้อมูลจึงเป็นวัตถุประสงค์หลักในการออกแบบตัวควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์มีลักษณะดังรูปที่ 4.7 โดยหัวอ่าน/เขียนจะอ่านตำแหน่งของดิสก์เพื่อหาค่าความคลาดเคลื่อนของตำแหน่ง ส่งไปให้ดีมอดูเลเตอร์เพื่อแปลงเป็นสัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่ง หรือ PES (position error signal) สัญญาณนี้จะถูกแปลงเป็นสัญญาณดิจิทัลเข้าสู่ส่วนประมวลผล เพื่อคำนวณสัญญาณควบคุมตามกฎการควบคุมที่กำหนดไว้ จากนั้นสัญญาณควบคุมจะถูกแปลงกลับเป็นสัญญาณอนาล็อก ผ่านวงจรรขยายกำลัง (power amplifier) เพื่อไปขับมอเตอร์ และทำให้ตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียนเปลี่ยนไปตามต้องการ โดยปกติแล้วการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์นี้ จะต้องทำให้หัวอ่าน/เขียนคงตำแหน่งเดิม ในขณะที่กำลังอ่านข้อมูลบนแทร็คนั้นๆ และทำให้หัวอ่าน/เขียนเปลี่ยนตำแหน่งจากแทร็คหนึ่งไปยัง



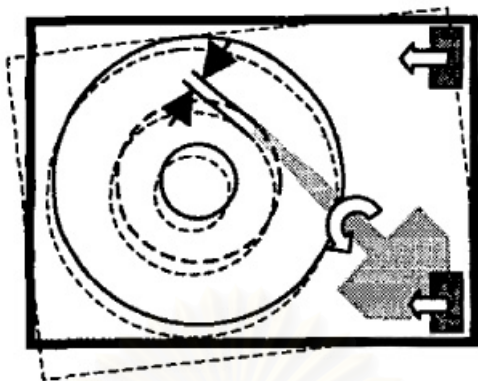
รูปที่ 4.7: การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์



รูปที่ 4.8: วิธีการระบุข้อมูลตำแหน่งบนดิสก์ (ก) วิธี dedicated servo (ข) วิธี sectored servo

อีกแตร็คหนึ่งได้อย่างถูกต้อง ในขณะที่ตำแหน่งอ้างอิงเปลี่ยนไป อีกทั้งยังต้องลดผลของสัญญาณรบกวนจากภายในและภายนอกระบบ ตัวอย่างของสัญญาณรบกวนภายใน เช่น การไหลของอากาศเนื่องจากการหมุนของดิสก์ หรือ สัญญาณรบกวนที่เกิดจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ต่างๆ ส่วนสัญญาณรบกวนภายนอกที่เห็นได้ชัด คือ การสั่นสะเทือนของฮาร์ดดิสก์ ซึ่งอาจเกิดจากการเดินชนโต๊ะที่วางเครื่องคอมพิวเตอร์ เป็นต้น

ในการระบุตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียน จะใช้การอ่านข้อมูลตำแหน่ง (position information) จากดิสก์โดยตรง การบรรจุข้อมูลตำแหน่งลงในดิสก์มีด้วยกัน 2 วิธีคือ วิธี dedicated servo และวิธี sectored servo วิธี dedicated servo จะใช้พื้นที่ทั้งหมดของดิสก์หนึ่งแผ่นสำหรับข้อมูลตำแหน่ง แต่วิธี sectored servo จะผสมผสานข้อมูลตำแหน่งกับข้อมูลของผู้ใช้ลงไปบนดิสก์ทุกๆ แผ่น ดังรูปที่ 4.8 (ก) และ (ข) ตามลำดับ ข้อดีของวิธี dedicated servo คือ เป็นการประหยัดพื้นที่สำหรับข้อมูลของผู้ใช้ ในกรณี



รูปที่ 4.9: ส่วนประกอบของมอเตอร์ขดลวดเสียง

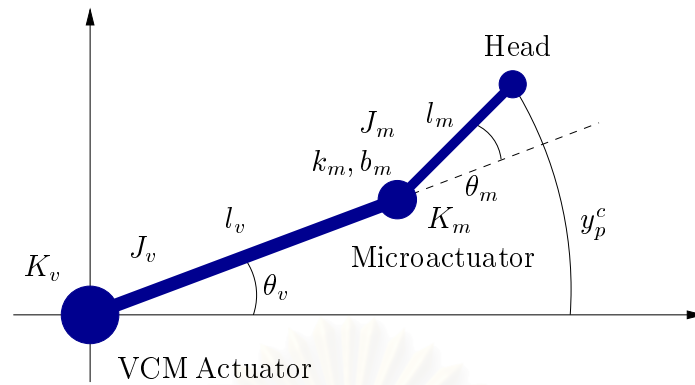
ที่ฮาร์ดดิสก์มีดิสก์หลายแผ่น และสามารถใช้อัตราในการชักตัวอย่างสัญญาณตำแหน่งได้สูง แต่ข้อเสียคือมีออฟเซตทางอุณหภูมิ (thermal offset) มากกว่าวิธี sectored servo วิธีลดผลของออฟเซตทางอุณหภูมิสำหรับวิธี dedicated servo คือ การวางแผ่นที่มีข้อมูลตำแหน่งไว้ตรงกลางระหว่างดิสก์ทั้งหมด ดังรูปที่ 4.8 (ก) อย่างไรก็ตาม เมื่อฮาร์ดดิสก์มีความหนาแน่นแทร็คมากขึ้น ออฟเซตทางอุณหภูมิก็ยังมีผลต่อข้อมูลตำแหน่งมากขึ้น ทำให้จำเป็นต้องใช้วิธี sectored servo สำหรับการอ่านข้อมูลตำแหน่ง เพราะข้อมูลตำแหน่งกระจายอยู่บนดิสก์ทุกๆ แผ่น แต่วิธี sectored servo นี้จะมีข้อจำกัดของอัตราการชักตัวอย่างสัญญาณตำแหน่ง [6]

จากที่ได้กล่าวไปแล้วว่า สัญญาณรบกวนจากภายนอกที่สำคัญ คือ การสั่นสะเทือนของดิสก์ ซึ่งมีผลต่อความเร่งของตัวขับเร็ว สัญญาณรบกวนนี้มีผลมากต่อการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เนื่องจากเป็นสัญญาณรบกวนที่มีผลกับสถานะภายในของพลานต์ แนวทางการแก้ปัญหาของสัญญาณรบกวนนี้ คือ การใช้เครื่องวัดความเร่งการหมุน (rotational accelerometer) เพื่อวัดความเร่งที่มารบกวนจากภายนอก แล้วนำสัญญาณที่วัดได้ป้อนไปข้างหน้า (feedforward) ให้แก่ตัวควบคุม เพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพในการควบคุม เครื่องวัดความเร่งการหมุนจะติดตั้งที่ริมฮาร์ดดิสก์ทั้งสองด้าน แล้วนำค่าที่วัดได้มาหักลบกันเป็นความเร่งการหมุน ดังรูปที่ 4.9

เนื่องจากระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ มีสัญญาณเข้าและสัญญาณออกหลายสัญญาณ แต่ละสัญญาณมีข้อจำกัด และพลวัตที่แตกต่างกัน การควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ จึงอาจใช้วิธีการควบคุมหลายอัตราสุ่ม เพื่อให้ประสิทธิภาพในการควบคุมดีขึ้น

4.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

ระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่นำเสนอเป็นระบบที่มีตัวขับเร็วสองชั้น คือตัวขับเร็วของมอเตอร์ขดลวดเสียง (VCM actuator) ซึ่งเป็นตัวขับเร็วหลัก และตัวขับเร็วย่อย (microactuator) ซึ่งเป็นวัสดุพิโซอิเล็กทริก ลักษณะดังรูปที่ 4.10 [25] โดยที่สัญลักษณ์ต่างๆ ในรูปมีความหมายดังตารางที่ 4.1



รูปที่ 4.10: แบบจำลองของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

ตารางที่ 4.1: ความหมายของสัญลักษณ์ต่างๆ ในแบบจำลอง

สัญลักษณ์	ความหมาย
y_p^c	ตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียน
θ_v, θ_m	มุมของแขนของตัวขับเคลื่อนมอเตอร์ขดลวดเสียง, ตัวขับเร้าย่อย
l_v, l_m	ความยาวแขนของตัวขับเคลื่อนมอเตอร์ขดลวดเสียง, ตัวขับเร้าย่อย
K_v, K_m	ค่าคงที่ทอร์ค (torque constant) ของตัวขับเคลื่อนมอเตอร์ขดลวดเสียง, ตัวขับเร้าย่อย
J_v, J_m	โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) ของตัวขับเคลื่อนมอเตอร์ขดลวดเสียง, ตัวขับเร้าย่อย
k_m	สัมประสิทธิ์ความแข็งตึง (stiffness coefficient) ของตัวขับเร้าย่อย
b_m	สัมประสิทธิ์ความหน่วง (damping coefficient) ของตัวขับเร้าย่อย

ในการพิจารณาหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เราสมมุติว่าการเคลื่อนที่ของตัวขับเร้าทั้งสองมีค่าน้อยๆ พอที่ประมาณตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียนได้เท่ากับ

$$y_p^c = (l_v + l_m)\theta_v + l_m\theta_m \quad (4.1)$$

กำหนดให้ $x_v^c = (l_v + l_m)\theta_v$ และ $x_m^c = l_m\theta_m$ และนิยาม u_v^c และ u_m^c คือสัญญาณควบคุมของตัวขับเร้ามอเตอร์ขดลวดเสียง และตัวขับเร้าย่อย ตามลำดับ สมการสถานะของมอเตอร์ขดลวดเสียงคือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_v^c \\ \ddot{x}_v^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v^c \\ \dot{x}_v^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (l_v + l_m)K_v/J_v \end{bmatrix} u_v^c \quad (4.2)$$

และสมการสถานะของตัวขับเร้าย่อยคือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m^c \\ \ddot{x}_m^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_m/J_e & -b_m/J_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m^c \\ \dot{x}_m^c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ l_m K_v/J_v \end{bmatrix} u_v^c + \begin{bmatrix} 0 \\ l_m K_m/J_e \end{bmatrix} u_m^c \quad (4.3)$$

โดยที่ $J_e = J_a J_m / (J_a + J_m)$ และ J_a คือโมเมนต์ความเฉื่อยรวมของระบบ ดังนั้นสมการสถานะของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ P^c ที่มีสองสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกคือ

$$\begin{aligned}\dot{x}^c &= A^c x^c + B^c u^c \\ y_p^c &= C^c x^c + D^c u^c\end{aligned}\quad (4.4)$$

โดยที่เวกเตอร์ $x^c = [x_v^c \quad \dot{x}_v^c \quad x_m^c \quad \dot{x}_m^c]^T$, $u^c = [u_v^c \quad u_m^c]^T$ และเมทริกซ์

$$A^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_m/J_e & -b_m/J_e \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (l_v + l_m)K_v/J_v & 0 \\ 0 & 0 \\ -l_m K_v/K_v & l_m K_m/J_e \end{bmatrix},$$

$$C^c = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad D^c = [0 \quad 0]$$

ระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่นำเสนอนี้ได้รับการพัฒนาจาก Hutchinson Technology Institute (HTI) ซึ่งดิสก์ที่ใช้มีความหนาแน่นแทร็ค 25,000 TPI หรือมีความกว้างแทร็คเท่ากับ $1 \mu\text{m}$ อัตราการชักตัวอย่างสัญญาณความเคลื่อนตำแหน่งอยู่ระหว่าง 6 - 14 kHz และพารามิเตอร์ต่างๆ ของระบบมีค่าดังตารางที่ 4.2 [26]

ตารางที่ 4.2: ค่าพารามิเตอร์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

พารามิเตอร์	ค่า	หน่วย
l_v	3.556	cm
l_m	1.440	cm
K_v	0.796	N-m/A
K_m	7.727×10^{-5}	N-m/V
J_v	32.9	gm-cm ²
J_m	0.329	gm-cm ²
k_m	49.927	N-m
b_m	6.4×10^{-5}	N-m-s

ทำการแปลงหน่วยของพารามิเตอร์ต่างๆ เพื่อความเหมาะสม ทำให้ได้สมการสถานะของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์เป็น

$$\begin{aligned}\dot{x}^c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1532.6 & -1.965 \end{bmatrix} x^c + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12.087 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3.484 & 34.152 \end{bmatrix} u^c \\ y_p^c &= [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] x^c\end{aligned}\quad (4.5)$$

โดยที่หน่วยของสัญญาณตำแหน่ง y_p^c เป็น μm หน่วยของสัญญาณควบคุม u_v^c และ u_m^c เป็น mA และ V ตามลำดับ และหน่วยของเวลาเป็น ms

4.4 การวิเคราะห์แบบจำลองของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

จากสมการสถานะของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ในสมการที่ (4.5) เราจะได้ว่าค่าเจาะจงของพลาเน็ต ($\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 4$) เท่ากับ 0, 0 และ $-0.982 \pm 39.136i$ เมื่อตรวจสอบความสามารถในการสังเกตได้ และความสามารถในการเข้าถึงได้ โดยการทำการทดสอบ PBH (PBH test) พบว่า

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A^c - \lambda_i I \\ C^c \end{bmatrix} = 4$$

สำหรับค่าเจาะจงของพลาเน็ตทุกๆ ตัว และ

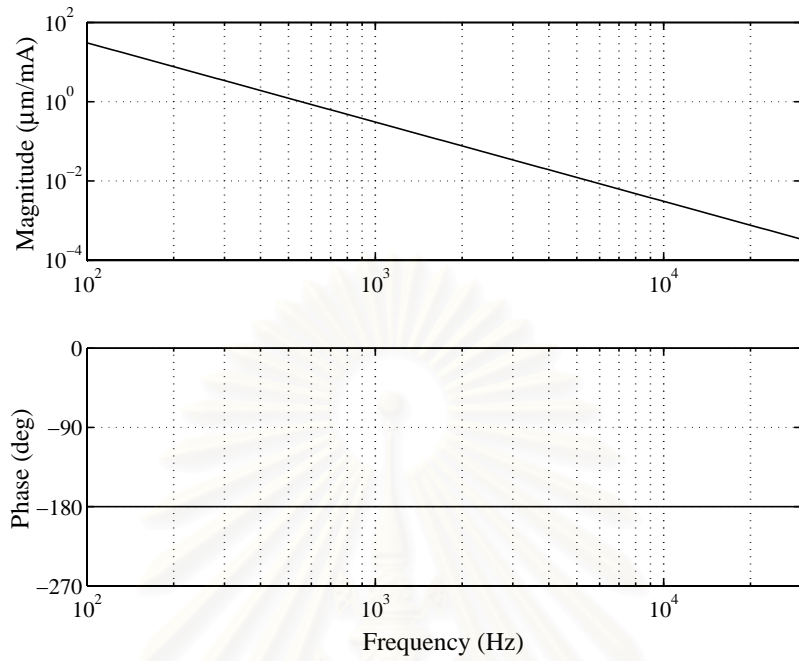
$$\text{rank} \begin{bmatrix} A^c - \lambda_i I & B_1^c \end{bmatrix} = 4$$

สำหรับค่าเจาะจงของพลาเน็ตทุกๆ ตัว เมื่อ B_1^c คือหลักแรกของเมทริกซ์ B^c แต่

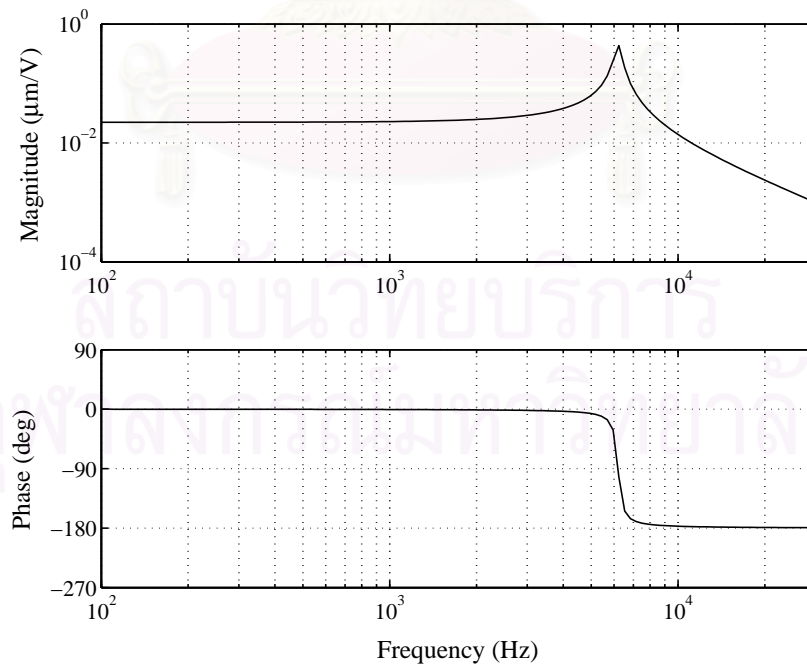
$$\text{rank} \begin{bmatrix} A^c - \lambda_i I & B_2^c \end{bmatrix} = 2$$

เมื่อ $\lambda_i = 0$ และ B_2^c คือหลักที่สองของเมทริกซ์ B^c นั้นแสดงว่า ระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์นี้สามารถสังเกตได้ทุกสถานะจากการวัดสัญญาณตำแหน่ง y_p^c และสามารถเข้าถึงได้ทุกสถานะจากสัญญาณควบคุมของมอเตอร์ขดลวดเสียง u_1^c แต่สัญญาณควบคุมของตัวขับเร้าย่อยไม่สามารถเข้าถึงสถานะของมอเตอร์ขดลวดเสียง x_v และ \dot{x}_v ได้ ดังนั้นตัวขับเร้าย่อยจึงมีหน้าที่ควบคุมสถานะของตัวขับเร้าย่อย x_m และ \dot{x}_m เพื่อช่วยให้สัญญาณตำแหน่งมีผลตอบที่ดีขึ้น

พิจารณาลักษณะสมบัติของมอเตอร์ขดลวดเสียงจากแผนภาพโบเด (Bode diagram) ของพลาเน็ตจาก u_v^c ไปยัง x_v^c ดังรูปที่ 4.11 พบว่ามอเตอร์ขดลวดเสียงมีลักษณะเป็นอินทิเกรเตอร์คู่ (double integrator) คือมีอัตราขยายสูงที่ความถี่ต่ำ และอัตราขยายมีขนาดลดลงอย่างต่อเนื่องเมื่อความถี่สูงขึ้น ทำให้การควบคุมมอเตอร์ขดลวดเสียงนี้มีผลตอบสถานะอยู่ตัว (steady-state response) ที่ดี คือสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นได้ แต่ผลตอบชั่วคราว (transient response) อาจจะไม่ดี เนื่องจากพลาเน็ตมีพลวัตที่ช้า แต่เมื่อพิจารณาลักษณะสมบัติของตัวขับเร้าย่อยที่เป็นวัสดุพิโซอิเล็กทริก จากแผนภาพโบเดของพลาเน็ตจาก u_m^c ไปยัง x_m^c ดังรูปที่ 4.12 พบว่าตัวขับเร้าย่อยมีอัตราขยายต่ำ แต่มีแถบความถี่ (bandwidth) กว้าง โดยมีความถี่เรโซแนนซ์ (resonance frequency) ที่ 6.2 kHz ทำให้ตัวขับเร้าย่อยสามารถเคลื่อนที่ได้ไม่มาก แต่เคลื่อนที่ได้เร็ว ดังนั้นในการออกแบบตัวควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์นี้จะต้องให้มอเตอร์ขดลวดเสียงเป็นตัวขับเร้าหลักที่กำหนดที่ตามรอยสัญญาณอ้างอิง และตัวขับเร้าย่อยเป็นตัวขับเร้าเสริมที่ทำให้ผลตอบชั่วคราวดีขึ้น



รูปที่ 4.11: แผนภาพโบเดของมอเตอร์ขดลวดเสียง



รูปที่ 4.12: แผนภาพโบเดของตัวขับเร้าย่อย

บทที่ 5

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

ในบทที่แล้วได้กล่าวถึงระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ซึ่งระบบดังกล่าวมีสัญญาณเข้า 2 สัญญาณที่มีพลวัตที่แตกต่างกัน และมีสัญญาณออก 1 สัญญาณที่มีข้อจำกัดในการชักตัวอย่าง ในบทนี้จะกล่าวถึงปัญหาการควบคุมตามรอย และปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ โดยออกแบบตัวควบคุมเวลาเต็มหน่วยอัตราสุ่มเดียว และหลายอัตราสุ่ม เพื่อเปรียบเทียบผลกัน จากนั้นจะใช้ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม ควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อใช้ในการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น และลดผลของสัญญาณรบกวนไปพร้อมกัน สุดท้ายจะใช้เครื่องวัดความเร่งการหมุน เพื่อช่วยปรับปรุงคุณภาพในการกำจัดสัญญาณรบกวนความเร่งจากภายนอก

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่ใช้เปรียบเทียบสมรรถนะในการควบคุม จะประกอบด้วย

1. ตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว 7 - 7 - 7 คือตัวควบคุมที่มีอัตราการชักตัวอย่างสัญญาณวัด 7 kHz อัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวแรก 7 kHz และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวที่สอง 7 kHz กฎการควบคุมของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว 7 - 7 - 7 คือ

$$\begin{bmatrix} u_v(\frac{h}{7}) \\ u_m(\frac{h}{7}) \end{bmatrix} = K y_p(\frac{h}{7})$$

2. ตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว 14 - 14 - 14 คือตัวควบคุมที่มีอัตราการชักตัวอย่างสัญญาณวัด 14 kHz อัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวแรก 14 kHz และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวที่สอง 14 kHz กฎการควบคุมของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว 14 - 14 - 14 คือ

$$\begin{bmatrix} u_v(\frac{h}{14}) \\ u_m(\frac{h}{14}) \end{bmatrix} = K y_p(\frac{h}{14})$$

3. ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 คือตัวควบคุมที่มีอัตราการชักตัวอย่างสัญญาณวัด 14 kHz อัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวแรก 7 kHz และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวที่สอง 28 kHz กฎการควบคุมของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 คือ

$$\begin{bmatrix} u_v(\frac{h}{7}) \\ u_m(\frac{h}{7}) \\ u_m(\frac{h}{7} + \frac{1}{28}) \\ u_m(\frac{h}{7} + \frac{2}{28}) \\ u_m(\frac{h}{7} + \frac{3}{28}) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} y_p(\frac{h}{7}) \\ y_p(\frac{h}{7} + \frac{1}{14}) \end{bmatrix}$$

โดยมีเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลบังคับโครงสร้างของส่วนป้อนผ่านของตัวควบคุมให้เป็น

$$D_K = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & 0 \\ * & 0 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

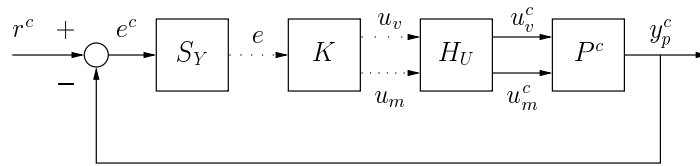
ในที่นี้จะใช้การออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 เพื่อให้ได้ผลการควบคุมตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ โดยพิจารณาออร์ม H_2 ของระบบวงปิดจากสัญญาณเข้าจากภายนอก w^c ไปยังสัญญาณขาออกที่ใช้วัดสมรรถนะ z^c ด้วยอัตราสุ่มเดียวกันคือ 28 kHz ทั้งสามกรณี ทั้งนี้เพื่อให้สามารถเปรียบเทียบผลของการควบคุมได้ อีกทั้งยังเป็นอัตราสุ่มที่เร็วซึ่งทำให้การวัดสมรรถนะของระบบมีลักษณะใกล้เคียงกับระบบเวลาต่อเนื่องมากขึ้น จากนั้นใช้วิธีการลิฟต์ระบบเวลาเต็มหน่วยเพื่อจัดรูประบบให้เป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา แล้วจึงแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อคำนวณหาตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด

5.1 การตรวจสอบสมมุติฐานในการออกแบบ

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ดังสมการที่ (4.4) จะพบว่าส่วนป้อนผ่านของพลาเน็ตจากสัญญาณควบคุม u^c ไปยังสัญญาณตำแหน่ง y_p^c มีค่าเป็นศูนย์ และจากการวิเคราะห์แบบจำลอง จะพบว่าพลาเน็ตสามารถตรวจจับได้ และสามารถทำให้เสถียรได้ ทำให้พลาเน็ตนี้สอดคล้องกับสมมุติฐานที่ 1 และ 3 ในส่วนการควบคุม เราเลือกใช้อัตราการซิกด้วยอย่างสัญญาณวัดเป็น 7 และ 14 kHz ซึ่งเป็นอัตราที่สอดคล้องกับบตตั้งที่ 2.8 และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมทั้งสองเป็น 7, 14 และ 28 kHz ซึ่งเป็นอัตราที่สอดคล้องกับบตตั้งที่ 2.9 และในการควบคุมหลายอัตราสุ่ม เรากำหนดให้ตัวควบคุมมีส่วนป้อนผ่านที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล ทำให้การควบคุมระบบนี้สอดคล้องกับสมมุติฐานที่ 2 และ 4 ดังนั้นการออกแบบตัวควบคุม เราจะสมมุติให้อันดับของตัวควบคุม เท่ากับอันดับของพลาเน็ต เพื่อให้สอดคล้องกับสมมุติฐานที่ 5

5.2 การออกแบบตัวควบคุมตามรอย

วัตถุประสงค์หลักของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ คือต้องการให้หัวอ่าน/เขียนเคลื่อนไปอยู่ในตำแหน่งหรือแทร็คที่ต้องการได้ถูกต้องและรวดเร็วภายในเวลาที่กำหนด ดังนั้นจึงจำเป็นต้องออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ผลตอบซึ่งคือตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียน สามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น ซึ่งคือแทร็คที่ต้องการได้ โครงสร้างการควบคุมของระบบจะมีลักษณะดังรูปที่ 5.1 โดยที่ y_p^c คือตำแหน่งของหัวอ่าน/เขียน เมื่อนำไปหักลบกับตำแหน่งของแทร็คที่ต้องการ r^c จะได้สัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่ง e^c สัญญาณนี้จะถูกซิกด้วยอย่างทุกๆ คาบการซิกด้วยอย่างเพื่อเข้าสู่ตัวควบคุม ตัวควบคุมจะคำนวณสัญญาณควบคุม 2 สัญญาณ แล้วคงค่าสัญญาณในคาบการคงค่าของแต่ละสัญญาณ เพื่อส่งไปให้ตัวขับเร้าทั้งสองของพลาเน็ต



รูปที่ 5.1: โครงสร้างการควบคุมตามรอย

การตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ดังรูปที่ 4.10 เราต้องการให้ตัวขับเร้าของมอเตอร์ชดเชยเสียงรบกวน θ_v เพื่อให้หัวอ่าน/เขียนไปอยู่ในตำแหน่งที่ต้องการ โดยมีตัวขับเร้าช่วยปรับมุม θ_m เพื่อให้หัวอ่าน/เขียนเข้าสู่ตำแหน่งที่ต้องการเร็วขึ้น และในเวลาสุดท้ายมุม θ_m จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือสถานะสุดท้ายของพลาเน็ตในการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นคือ $x_r = [r \ 0 \ 0 \ 0]^T$ โดยที่ r คือขนาดของสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น เนื่องจากมอเตอร์ชดเชยเสียงมีลักษณะเป็นอินทิเกรเตอร์คู่ ดังนั้นปัญหาการควบคุมตามรอยของสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นจึงเหมือนกับปัญหาการปรับแก้สถานะเริ่มต้น ที่มีสถานะเริ่มต้นเท่ากับ $-x_r$ และมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น

$$J = \int_0^{\infty} (x^c - x_r)^T Q (x^c - x_r) + u^{cT} R u^c dt \quad (5.1)$$

โดยที่ $Q \geq 0$ และ $R > 0$ เป็นเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก (weighting matrix)

จากพลาเน็ตของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ดังสมการที่ (4.4) เราสามารถจัดปัญหานี้ให้อยู่ในรูปแบบการควบคุมน้อยทั่วไปได้ โดยมีพลาเน็ตน้อยทั่วไปคือ

$$\hat{G}^c = \left[\begin{array}{c|cc} A^c & -x_r & B^c \\ \hline \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ -C^c & 0 & -D^c \end{array} \right] \quad (5.2)$$

ในที่นี้เราต้องการควบคุมให้ตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ดังนั้น $x_r = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ รายละเอียดวิธีการจัดปัญหาการควบคุมเพื่อปรับแก้สถานะเริ่มต้น ให้เป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 อยู่ในภาคผนวก ค.1

ในการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย เราได้กำหนดค่าพิกัดของการควบคุมไว้ดังตารางที่ 5.1 [26, 24] โดยที่อัตราการชกตัวอย่างสัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่งอยู่ระหว่าง 6 - 14 kHz ส่วนอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุม จะขึ้นอยู่กับส่วนประมวลผลที่ใช้ควบคุมระบบ ในที่นี้เรากำหนดให้ส่วนประมวลผลสามารถทำงานที่อัตราสุ่ม 28 kHz ได้

5.2.1 ตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียว 7 - 7 - 7

ตัวควบคุมแรกที่จะออกแบบคือตัวควบคุมอัตราสุ่มเดียวที่อัตราสุ่ม 7 kHz ทุกๆ สัญญาณ และเลือกใช้อัตราสุ่มของสัญญาณเข้าและออกจากภายนอกเป็น 28 kHz โดยลิฟต์สัญญาณทั้งหมดให้อยู่ในคาบเวลา

ตารางที่ 5.1: ค่าพิกัดในการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย

ค่าพิกัด	ค่า	หน่วย
ส่วนพุ่งเกินสูงสุดของสัญญาณตำแหน่ง	5	%
เวลาเข้าที่ของสัญญาณตำแหน่ง	1	ms
ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมมอเตอร์ขดลวดเสียง	8	mA
ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวขับเร้าย่อย	30	V

กรอบ $T_f = \frac{1}{7}$ ms โดยที่ $\mu = 4$ และ $\zeta = 4$, $\psi = 1$, $\omega = 4$, $v_v = 1$, $v_m = 1$ เพื่อให้ได้พลาตันต์นัยทั่วไป \underline{G}

การออกแบบครั้งที่ 1 ในการออกแบบครั้งแรก เราจะเลือกเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเพื่อทำให้แอมพลิจูดของสัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่ง e^c มีค่าน้อยๆ โดยยังไม่คำนึงถึงขนาดสัญญาณควบคุมทั้งสอง เนื่องจาก $e^c = C^c(x^c - x_r)$ ดังนั้นจะเลือกเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $Q^{\frac{1}{2}}$ เท่ากับ C^c และ $R^{\frac{1}{2}}$ มีค่าน้อยๆ

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

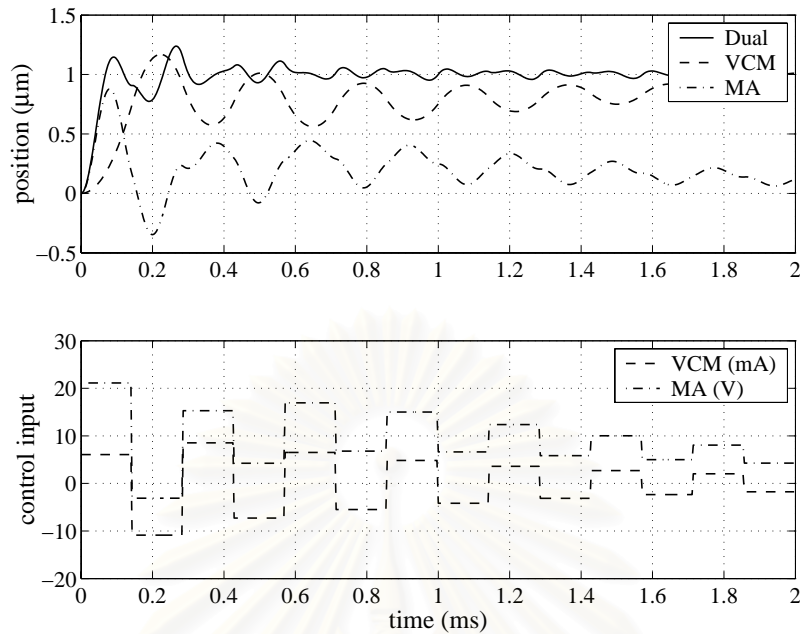
ต่อมาลิสต์สัญญาณทั้งหมดให้อยู่ในคาบเวลารอบ เพื่อให้ได้พลาตันต์นัยทั่วไปที่ลิสต์แล้ว \underline{G} ที่เป็นระบบเวลาเต็มหน่วยไม่แปรผันตามเวลา จากนั้นเปลี่ยนปัญหานี้ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เพื่อทำการออกแบบตัวควบคุม ตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบครั้งนี้คือ

$$\underline{\hat{K}} = \begin{bmatrix} 0.9543 & -0.0331 & -0.2360 & -0.1799 & 47.6172 \\ 0.0639 & -0.8941 & 0.2707 & 0.1325 & -37.1778 \\ 0.0239 & 0.0742 & 0.6578 & -0.7478 & -10.9033 \\ 0.004 \times 10^{-4} & 0.010 \times 10^{-4} & -0.145 \times 10^{-4} & -0.111 \times 10^{-4} & -1.992 \times 10^{-4} \\ \hline -0.0099 & 0.3130 & -0.0601 & -0.0772 & 6.0458 \\ 0.2907 & 0.3098 & 0.6593 & 0.6204 & 21.2046 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้หัวอ่าน/เขียนตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 5.2 จะเห็นว่าผลตอบของสัญญาณตำแหน่งมีเวลาเข้าที่ประมาณ 1.90 ms และมีการแกว่งมากเกินไป คือมีส่วนพุ่งเกินเท่ากับ 22 % ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 6.04 mA และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 21.18 V

การออกแบบครั้งที่ 2 เปลี่ยนเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักใหม่ โดยเพิ่มการถ่วงน้ำหนักของ e^c เพื่อทำให้ผลตอบของสัญญาณตำแหน่งเรียบขึ้น และเพิ่มการถ่วงน้ำหนักของสัญญาณควบคุมตัวที่สอง เพื่อลดการแกว่งของสถานะของตัวขับเร้าย่อย x_m สุดท้ายจึงได้เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเป็น

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.062 & 0 & 0.062 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$



รูปที่ 5.2: ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราสູ່มเดียว 7 - 7 - 7 ในการออกแบบครั้งที่ 1

ตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบครั้งนี้คือ

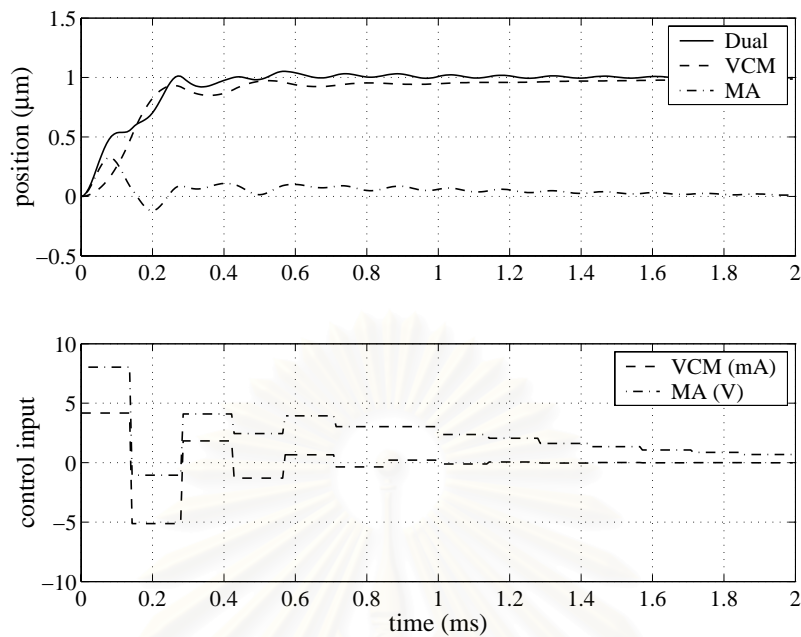
$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -0.6357 & -0.1127 & 0.4576 & -0.3619 & 13.1736 \\ -0.3404 & 0.8707 & -0.3155 & 0.1010 & -3.3982 \\ 0.0701 & 0.0676 & 0.4833 & 0.8285 & 1.0402 \\ -3.990 \times 10^{-6} & -3.182 \times 10^{-6} & 9.486 \times 10^{-5} & -8.099 \times 10^{-5} & -7.707 \times 10^{-5} \\ \hline -0.5532 & -0.0472 & 0.2080 & 0.1807 & 4.1719 \\ -0.4112 & -0.4715 & -0.6436 & 0.3738 & 8.0280 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ห้ห้วอ่าน/เขียนตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 5.3 จะเห็นว่าผลตอบของสัญญาณตำแหน่งเรียบขึ้นคือมีส่วนพุงเกินเท่ากับ 5.0 % เวลาเข้าที่ประมาณ 0.92 ms ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 4.24 mA และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 8.03 V

5.2.2 ตัวควบคุมอัตราสູ່มเดียว 14 - 14 - 14

ตัวควบคุมที่สองคือตัวควบคุมอัตราสູ່มเดียวที่อัตราสູ່ม 14 kHz ทุกๆ สัญญาณ และใช้อัตราสູ່มของสัญญาณเข้าและออกจากภายนอกเป็น 28 kHz โดยลิฟต์สัญญาณทั้งหมดให้อยู่ในคาบเวลารอบ $T_f = \frac{1}{14}$ ms โดยที่ $\mu = 2$ และ $\zeta = 2$, $\psi = 1$, $\omega = 2$, $v_v = 1$, $v_m = 1$

การออกแบบครั้งที่ 1 เราจะเลือกเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเพื่อให้ห้อร์มสองของสัญญาณความคลาดเคลื่อน



รูปที่ 5.3: ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 7 - 7 - 7 ในการออกแบบครั้งที่ 2

ตำแหน่ง e^c มีค่าน้อยๆ โดยยังไม่คำนึงถึงขนาดสัญญาณควบคุมทั้งสอง

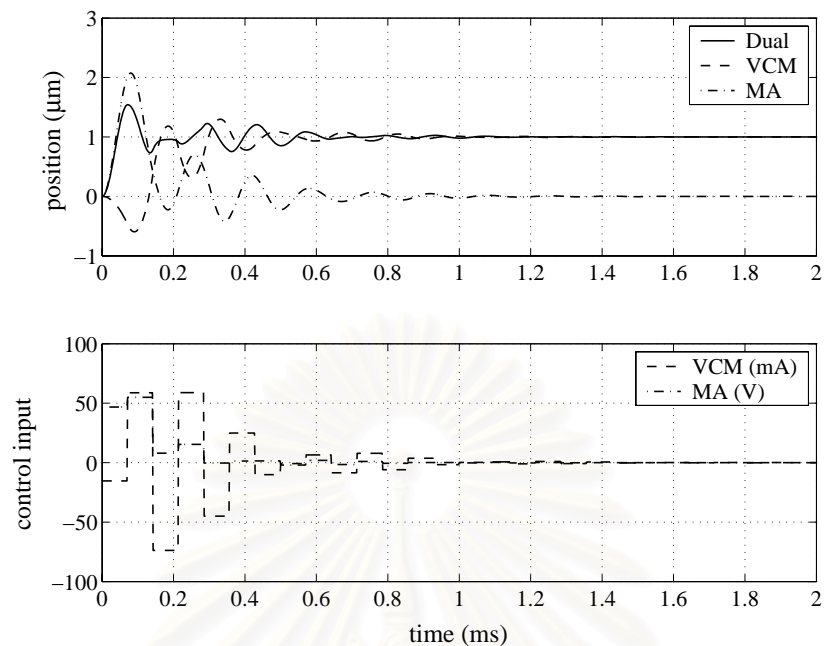
$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

ตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบครั้งนี้คือ

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -0.6677 & 0.4023 & 0.5973 & 0.1868 & -113.1284 \\ 0.4261 & 0.2916 & 0.4522 & -0.4821 & -55.4011 \\ 0.0047 & -0.1208 & 0.2570 & -0.6351 & -4.1502 \\ 0.287 \times 10^{-4} & -3.406 \times 10^{-4} & -0.0116 & 0.0488 & -0.0239 \\ \hline -0.5274 & 0.2107 & -0.5467 & -0.5574 & -14.9545 \\ -0.3073 & -0.8331 & 0.2712 & -0.1274 & 46.7721 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้หัวอ่าน/เขียนตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 5.4 จะเห็นว่าผลตอบของสัญญาณตำแหน่งมีการแกว่งมากประมาณ 55 % เวลาเข้าที่เท่ากับ 0.67 ms ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 58.47 mA และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 46.78 V

การออกแบบครั้งที่ 2 เนื่องจากผลตอบที่ได้จากการออกแบบครั้งแรกยังแกว่งอยู่มาก อีกทั้งขนาดของสัญญาณควบคุมก็สูงมากด้วย ดังนั้นจึงต้องเพิ่มการถ่วงน้ำหนักของ e^c เพื่อให้ได้สัญญาณตำแหน่งที่เรียบขึ้น และเพิ่มการถ่วงน้ำหนักของสัญญาณควบคุมทั้งสอง เพื่อลดขนาดของสัญญาณควบคุมลง โดยเมทริกซ์



รูปที่ 5.4: ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 14 - 14 - 14 ในการออกแบบครั้งที่ 1

ถ่วงน้ำหนักที่ใช้เป็น

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.031 & 0 & 0.031 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.011 & 0 \\ 0 & 0.004 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

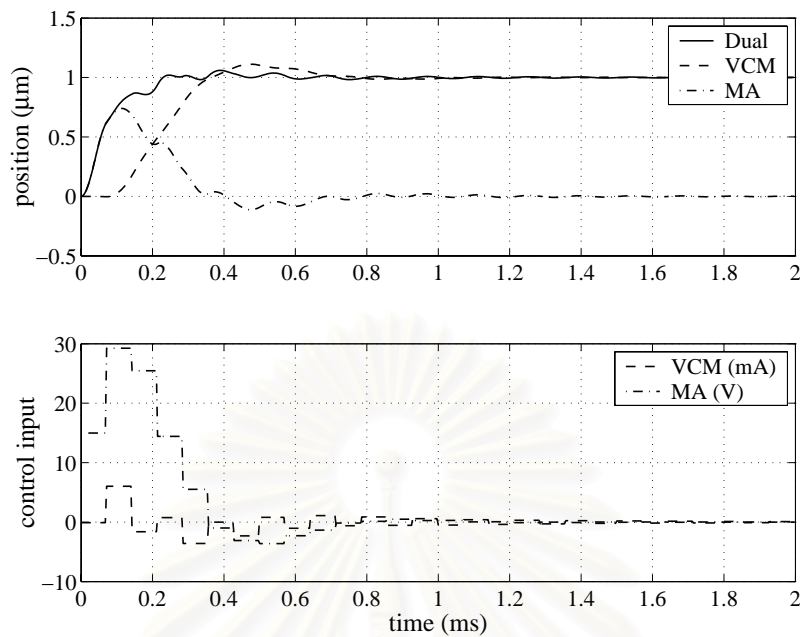
ตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบครั้งนี้คือ

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.4140 & 0.1675 & -0.7386 & -0.0834 & 29.7069 \\ 0.3078 & -0.8087 & 0.2153 & -0.3594 & -2.9660 \\ 0.1295 & 0.2021 & 0.5158 & 0.4781 & -1.7641 \\ -0.0001 & -0.0002 & 0.0016 & -0.0002 & 0.0045 \\ \hline 0.1419 & -0.4570 & -0.2784 & 0.7963 & -0.0872 \\ 0.8348 & 0.2614 & 0.2542 & -0.0357 & 14.9734 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้หัวอ่าน/เขียนตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 5.5 จะเห็นว่าผลตอบของสัญญาณตำแหน่งอยู่ในเกณฑ์ที่กำหนด คือมีส่วนพุงเกินของสัญญาณตำแหน่ง 5 % เวลาเข้าที่ประมาณ 0.57 ms ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 6.02 mA ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สอง 29.31 V

5.2.3 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28

จากตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยวทั้งสองที่ได้ออกแบบไปแล้ว พบว่าค่าพิคกิ้งของขนาดของสัญญาณควบคุมตัวแรกมีค่าต่ำ จึงทำให้มอเตอร์ขดลวดเสียงมีพลวัตช้า อัตราการคงค่าของสัญญาณควบคุมตัวแรกจึง



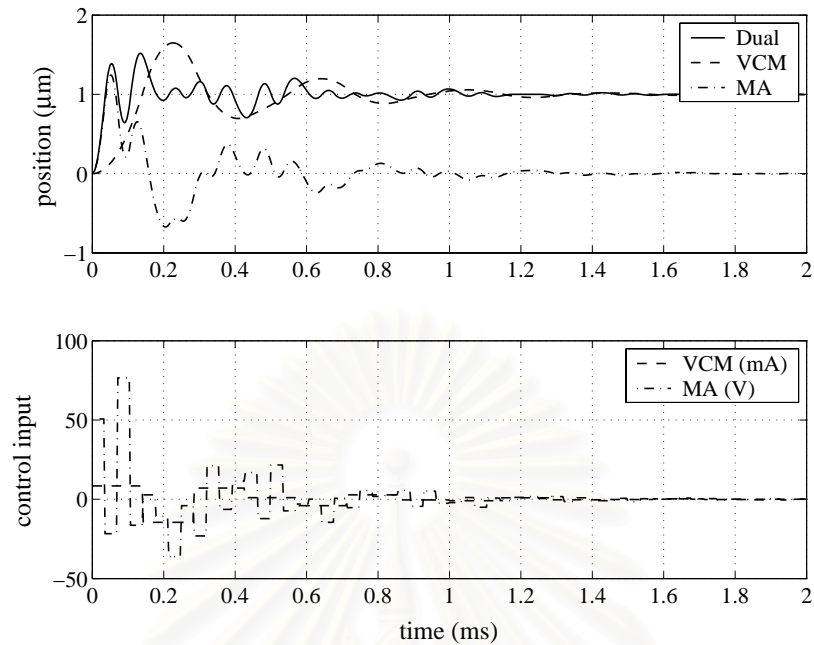
รูปที่ 5.5: ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมอัตราสູ່มเดียว 14 - 14 - 14 ในการออกแบบครั้งที่ 2

ไม่จำเป็นต้องเร็วมาก แต่เนื่องจากตัวขับเคลื่อนมีความถี่เรโซแนนซ์ที่ 6.2 kHz ดังแผนภาพโพลเดในรูปที่ 4.12 อัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวที่สองนี้ จึงควรมีค่ามากกว่า 2 เท่าของความถี่เรโซแนนซ์ขึ้นไป [27] เห็นได้จากสัญญาณควบคุมจากตัวขับเคลื่อนที่สองยังมีการแกว่งอยู่เล็กน้อยเมื่อใช้อัตราการคงค่า 7 และ 14 kHz ดังนั้นจึงควรเพิ่มอัตราการควบคุมของสัญญาณควบคุมตัวที่สองนี้อีก ส่วนอัตราการชັกดตัวอย่างของสัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่งจะใช้อัตราที่เร็วที่สุดที่เป็นไปได้ ดังนั้นตัวควบคุมหลายอัตราสູ່มที่ใช้ จะมีอัตราการชັกดตัวอย่าง 14 kHz อัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวแรก 7 kHz และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวที่สอง 28 kHz โดยใช้อัตราสູ່มของสัญญาณเข้าและออกจากภายนอกเป็น 28 kHz ทำให้คาบเวลารอบ $T_f = \frac{1}{7}$ ms โดยที่ $\mu = 4$ และ $\zeta = 4$, $\psi = 2$, $\omega = 4$, $v_v = 1$, $v_m = 4$

การออกแบบครั้งที่ 1 เราจะเลือกเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเพื่อทำให้ออร์มสองของสัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่ง e^c มีค่าน้อยๆ โดยยังไม่คำนึงถึงขนาดสัญญาณควบคุมทั้งสอง

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

ในการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสູ່มนี้ ตัวควบคุมจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลที่



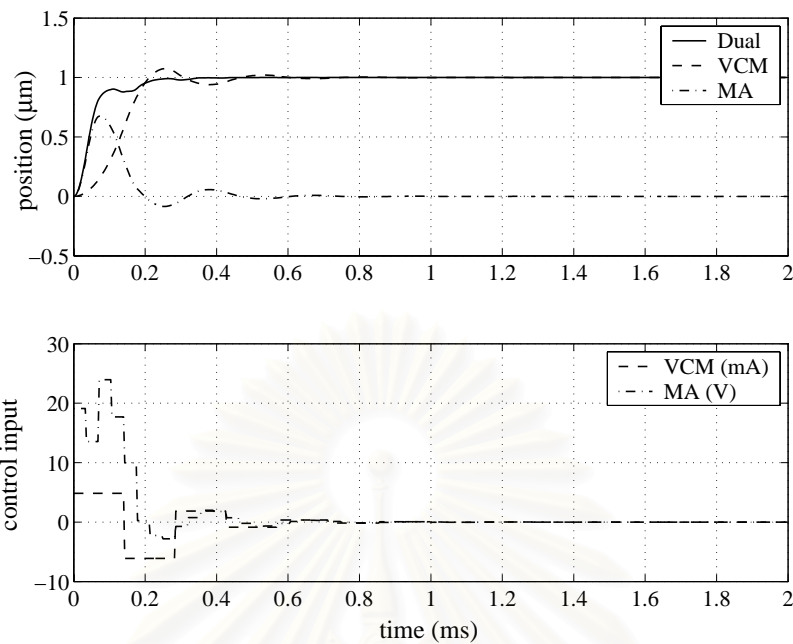
รูปที่ 5.6: ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน 14 - 7 - 28 ในการออกแบบครั้งที่ 1

ได้กล่าวไว้ข้างต้นด้วย ตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบครั้งนี้คือ

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.1301 & 0.2004 & -0.3402 & -0.2822 & 25.4877 & 125.4360 \\ -0.2356 & -0.4922 & 0.1474 & 0.3628 & -33.2379 & 13.1572 \\ 0.0108 & -0.0709 & -0.0060 & 0.6399 & 1.6976 & -0.2027 \\ 0.0001 & -0.0000 & 0.0002 & -0.0217 & -0.0061 & 0.0003 \\ \hline 0.0345 & 0.3181 & -0.3038 & 0.2173 & 8.4416 & 0 \\ 0.7870 & -0.2686 & 0.4405 & -0.0216 & 50.6554 & 0 \\ -0.1154 & 0.5998 & 0.6798 & -0.0538 & -21.6233 & 0 \\ 0.5285 & 0.3084 & -0.3056 & 0.3300 & 78.0822 & 53.5114 \\ -0.1192 & 0.2904 & 0.1437 & 0.4683 & -16.8299 & -10.1257 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ห้วอ่าน/เขียนตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 5.6 จะเห็นว่าผลตอบของสัญญาณตำแหน่งมีส่วนพุ่งเกินประมาณ 51 % เวลาเข้าที่เท่ากับ 1.1 ms ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 8.38 mA และขนาดสูงสุดของสัญญาณตัวที่สองเท่ากับ 76.52 V

การออกแบบครั้งที่ 2 จากการออกแบบครั้งที่แล้วที่สัญญาณตำแหน่งมีการแกว่งมาก และขนาดของสัญญาณควบคุมเกินค่าพิกัดที่ตั้งไว้ เราจึงเพิ่มการถ่วงน้ำหนักของ e^c เพื่อให้ผลตอบตำแหน่งเรียบขึ้น และเพิ่มการถ่วงน้ำหนักของสัญญาณควบคุมทั้งสอง เพื่อให้ได้ขนาดของสัญญาณควบคุมที่เหมาะสม ทำให้



รูปที่ 5.7: ผลตอบของปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 ในการออกแบบครั้งที่ 2

ได้เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเป็น

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

ตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบครั้งนี้คือ

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0.5033 & 0.0338 & 0.6806 & 0.3343 & -8.5757 & 27.1629 \\ -0.2456 & -0.2864 & -0.1835 & -0.0866 & -11.4464 & -8.4528 \\ -0.0278 & 0.0056 & 0.0804 & 0.3712 & 0.8285 & -0.3033 \\ -0.003 \times 10^{-3} & 0.080 \times 10^{-3} & 0.081 \times 10^{-3} & -0.496 \times 10^{-3} & -0.363 \times 10^{-3} & -0.210 \times 10^{-3} \\ \hline 0.2598 & 0.4492 & 0.1535 & -0.0678 & 4.8504 & 0 \\ 0.5139 & -0.7196 & 0.4399 & -0.0429 & 19.1190 & 0 \\ 0.3641 & -0.0232 & -0.3806 & 0.5751 & 13.5548 & 0 \\ 0.3543 & 0.3195 & 0.2598 & 0.3990 & 21.3770 & 14.7196 \\ 0.3098 & 0.3075 & 0.2593 & -0.4966 & 17.3218 & 2.1247 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ห้วอ่าน/เขียนตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 5.7 จะเห็นว่าสัญญาณตำแหน่งมีผลตอบที่ดี คือมีเวลาเข้าที่เท่ากับ 0.23 ms โดยไม่มีส่วนพุ่งเกิน ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 6.10 mA ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 23.96 V

5.2.4 การวิเคราะห์เปรียบเทียบผลการควบคุม

จากผลการจำลองการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วยด้วยคอมพิวเตอร์ กับตัวควบคุมทั้งสาม ได้ค่าส่วนพุ่งเกินสูงสุด (maximum overshoot) เวลาขาขึ้น (rise time) และเวลาเข้าที่ (settling time) ของสัญญาณตำแหน่ง และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุม ดังตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2: ค่าสมรรถนะทางเวลาของการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย

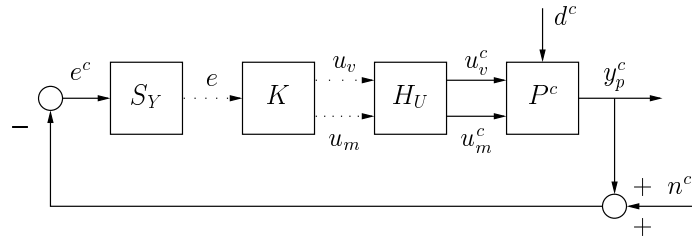
ตัวควบคุม	ส่วนพุ่งเกิน	เวลาขาขึ้น (ms)	เวลาเข้าที่ (ms)	$\max u_c^c $ (mA)	$\max u_m^c $ (V)
7 - 7 - 7	5.0 %	0.25	0.92	4.24	8.03
14 - 14 - 14	5.0 %	0.23	0.57	6.02	29.31
14 - 7 - 28	0 %	0.23	0.23	6.10	23.96

จากค่าในตารางจะเห็นได้ว่า ตัวควบคุมทั้งสามมีขนาดของสัญญาณควบคุมไม่เกินค่าพิกัดที่กำหนดไว้ ผลตอบของสัญญาณตำแหน่งของตัวควบคุมทั้งสามมีค่าเวลาขาขึ้นใกล้เคียงกัน แต่ตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 7 - 7 - 7 และตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 14 - 14 - 14 มีส่วนพุ่งเกิน และเวลาเข้าที่มากกว่าของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 เนื่องจากตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยวทั้งสอง มีอัตราสุ่มของตัวขับร่ายย่อยเท่ากับ 7 และ 14 kHz ซึ่งใกล้กับความถี่เรโซแนนซ์มากเกินไป ทำให้สัญญาณ x_m มีการแกว่งมาก มีผลทำให้ผลตอบของสัญญาณตำแหน่งมีส่วนพุ่งเกิน และเวลาเข้าที่มาก ส่วนตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 มีการเลือกใช้อัตราสุ่มให้เหมาะกับพลวัตของสัญญาณ ทำให้การเคลื่อนที่ของแต่ละส่วน คือ มอเตอร์ขดลวดเสียง และตัวขับร่ายย่อย มีลักษณะที่ดี คือราบเรียบ ไม่มีการกระเพื่อม จนทำให้ได้ผลตอบที่มีเวลาเข้าที่เร็ว ไม่มีส่วนพุ่งเกิน และไม่ทำให้ขนาดของสัญญาณควบคุมมากจนเกินไป

5.3 การออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน

วัตถุประสงค์อีกอย่างหนึ่งของการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ คือ การลดผลของสัญญาณรบกวน ทั้งจากภายในและภายนอกระบบ เช่น สัญญาณรบกวนที่เกิดจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ต่างๆ หรือ การสั่นสะเทือนของฮาร์ดดิสก์ ในหัวข้อนี้จะออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้สัญญาณรบกวนมีผลต่อสัญญาณตำแหน่งน้อยที่สุด โดยสัญญาณรบกวนที่คำนึงถึง คือสัญญาณรบกวนการวัด ที่เป็นสัญญาณรบกวนขาว (white noise) รบกวนสัญญาณตำแหน่งที่วัดได้ และสัญญาณรบกวนที่เกิดจากการสั่นสะเทือนของฮาร์ดดิสก์ ที่เป็นสัญญาณพัลส์รบกวนความถี่การหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง โครงสร้างการควบคุมของระบบจะมีลักษณะดังรูปที่ 5.8 โดยที่ d^c คือสัญญาณพัลส์รบกวนความถี่การหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง และ n^c คือสัญญาณรบกวนการวัด

จากพลานต์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ดังสมการที่ (4.4) กำหนดให้พลังงานของสัญญาณพัลส์ d^c และสัญญาณรบกวนขาว n^c เท่ากับ S_d และ S_n ตามลำดับ ในที่นี้เราจะพิจารณาปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c กับ สัญญาณรบกวนขาว n^c แยกกัน ปัญหาการควบคุม



รูปที่ 5.8: โครงสร้างการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน

เพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ที่มีต่อสัญญาณตำแหน่ง y_p^c จะมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น

$$J = \int_0^{\infty} (y_p^c(t))^2 dt \quad (5.15)$$

และมีพลาตันต์นัยทั่วไปคือ

$$\hat{G}^c = \left[\begin{array}{c|cc} A^c & B_d S_d^{\frac{1}{2}} & B^c \\ \hline C^c & 0 & D^c \\ -C^c & 0 & -D^c \end{array} \right] \quad (5.16)$$

โดยที่ $B_d = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ เนื่องจากสัญญาณพัลส์เข้าไปรบกวนความเร่งการหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง \ddot{x}_v และปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ที่มีต่อสัญญาณตำแหน่ง y_p^c จะมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ E \left[(y_p^c(t))^2 \right] \right\} \quad (5.17)$$

และมีพลาตันต์นัยทั่วไปคือ

$$\hat{G}^c = \left[\begin{array}{c|cc} A^c & 0 & B^c \\ \hline C^c & 0 & D^c \\ -C^c & -S_n^{\frac{1}{2}} & -D^c \end{array} \right] \quad (5.18)$$

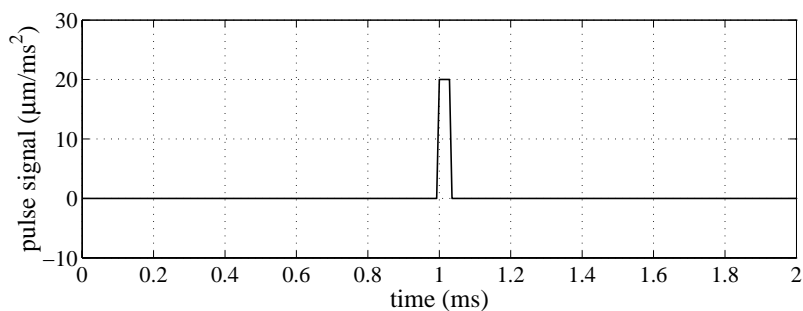
รายละเอียดวิธีการจัดปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน ให้เป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 อยู่ในภาคผนวก ค.2

กำหนดให้ความเร่งการหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง ที่เกิดจากการสั่นสะเทือนของฮาร์ดดิสก์ที่เข้ามารบกวนพลาตันต์ มีลักษณะเป็นสัญญาณพัลส์ ขนาด $20 \mu\text{m}/\text{ms}^2$ และมีความกว้างพัลส์ $\frac{1}{28} \text{ ms}$ ที่เวลา 1 ms ลักษณะดังรูปที่ 5.9 สัญญาณพัลส์นี้มีพลังงานเท่ากับ

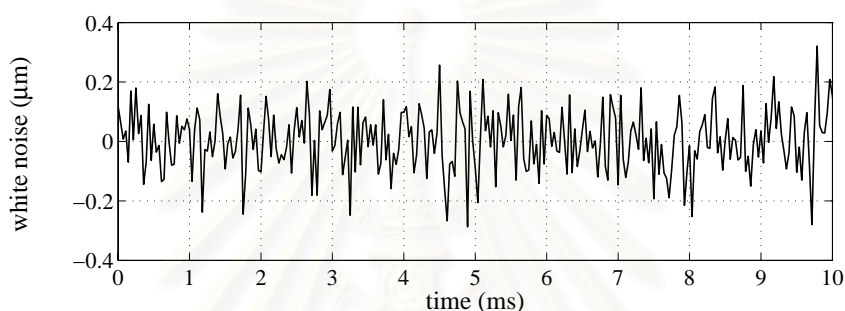
$$S_d = \int_0^{\infty} (d^c(t))^2 dt = 14.286 \frac{\mu\text{m}^2}{\text{ms}^3}$$

สัญญาณพัลส์ d^c จะมีลักษณะเป็นสัญญาณอิมพัลส์เวลาเต็มหน่วย (discrete-time impulse) เมื่ออัตราสุ่มเท่ากับ 28 kHz และกำหนดให้สัญญาณรบกวนการวัดตำแหน่งหัวอ่าน/เขียน มีลักษณะเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่อัตราสุ่ม 28 kHz ค่าความแปรปรวน (variance) $0.01 \mu\text{m}^2$ ลักษณะดังรูปที่ 5.10 โดยที่ความหนาแน่นสเปกตรัม (spectral density) ของสัญญาณรบกวนขาวนี้เท่ากับ

$$S_n = \frac{0.01}{28} = 3.571 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$$



รูปที่ 5.9: สัญญาณพัลส์ d^c ที่รับกวนความเร่งการหมุนของมอเตอร์ชดลวดเสียง



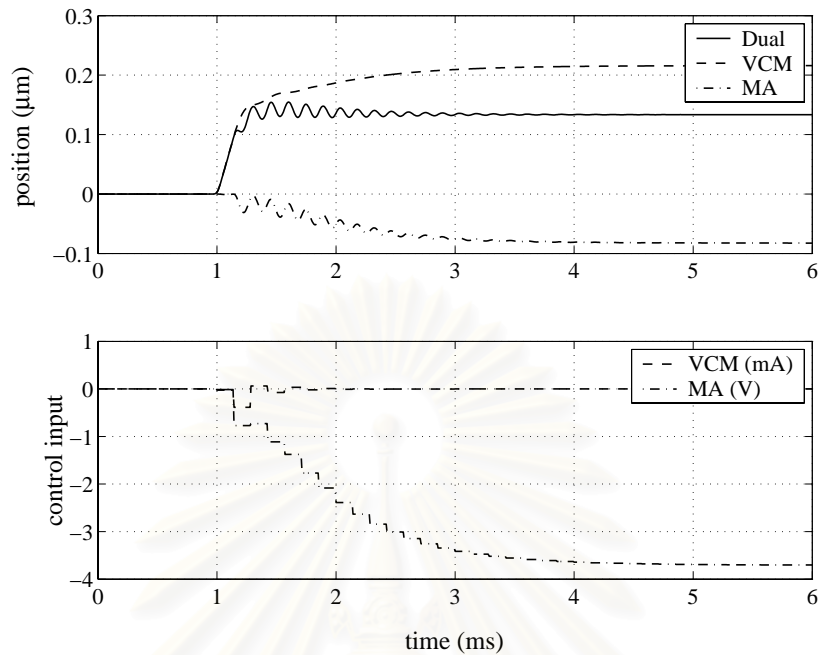
รูปที่ 5.10: สัญญาณรบกวนขาว n^c ที่รับกวนสัญญาณการวัดตำแหน่ง

เมื่อพิจารณาถึงสัญญาณพัลส์ที่รับกวนความเร่งการหมุนของมอเตอร์ชดลวดเสียง จะพบว่าระบบดังกล่าว ไม่สามารถกำจัดผลของสัญญาณรบกวนนี้ได้เอง ถึงแม้ว่ามอเตอร์ชดลวดเสียงจะมีลักษณะเป็นอินทิเกรเตอร์คู่ เนื่องจากความเร่งการหมุน \ddot{x}_v ไม่ใช่สถานะของมอเตอร์ชดลวดเสียง แต่เป็นอนุพันธ์ของสถานะ \dot{x}_v ดังนั้นตัวควบคุมจึงจะต้องมีผลของอินทิกรัลอยู่ด้วย ดังตัวอย่างเช่นตัวควบคุมอัตราสามเดี่ยว 7 - 7 - 7 ที่ได้จากสมการที่ (5.6) ซึ่งไม่มีผลของอินทิกรัล เมื่อมีสัญญาณรบกวน d^c เข้าสู่ระบบจะได้ผลตอบดังรูปที่ 5.11 จะเห็นว่าระบบดังกล่าวไม่สามารถกำจัดผลของสัญญาณพัลส์นี้ได้

5.3.1 ตัวควบคุมอัตราสามเดี่ยว 7 - 7 - 7

เราจะออกแบบตัวควบคุมอัตราสามเดี่ยว 7 - 7 - 7 โดยพิจารณาปัญหาการลดผลของสัญญาณรบกวนทั้งสองแยกกัน และไม่คำนึงถึงขนาดของสัญญาณควบคุมที่ได้ สัญญาณเข้าและออกจากภายนอกจะพิจารณาที่อัตราสาม 28 kHz ทำให้ได้คาบเวลากรอบ $T_f = \frac{1}{7}$ ms และ $\mu = 4, \zeta = 4, \psi = 1, \omega = 4, v_v = 1, v = 1$ เพื่อให้ได้พลาตันน้อยทั่วไปที่ลิฟต์แล้ว G ในการคำนวณตัวควบคุม

การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c เมื่อเราลิฟต์พลาตันน้อยทั่วไปแล้วนำไปหาตัวควบคุมเหมาะสม



รูปที่ 5.11: ผลตอบของตัวควบคุมอัตราส่วนเดี่ยว 7 - 7 - 7 ในปัญหาการตามรอย เมื่อมีสัญญาณรบกวน d^c

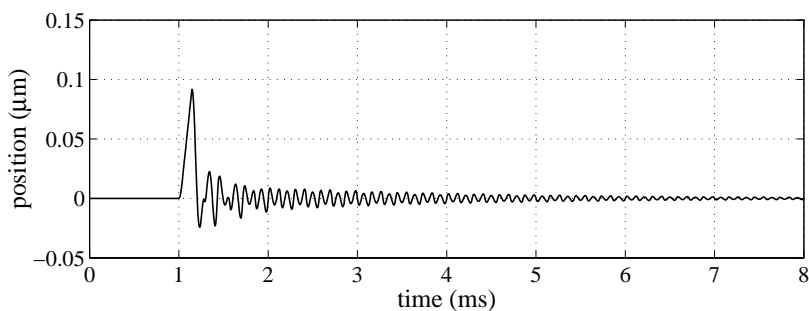
ที่สุที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น จะได้ตัวควบคุมคือ

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0005 & -40735 \\ 1.274 \times 10^{-9} & -0.9497 & 0.1630 & -0.2100 & 100.65 \\ 0.3374 \times 10^{-9} & 0.0292 & 0.7140 & 0.6444 & 26.653 \\ -0.0018 \times 10^{-12} & -0.1341 \times 10^{-6} & 3.5715 \times 10^{-6} & 0.0003 & -0.0001 \\ \hline 0.1144 \times 10^{-9} & -0.2299 & 0.0406 & 0.3553 & 15.679 \\ -0.0007 & -0.2108 & -0.6797 & 0.6477 & 31.2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

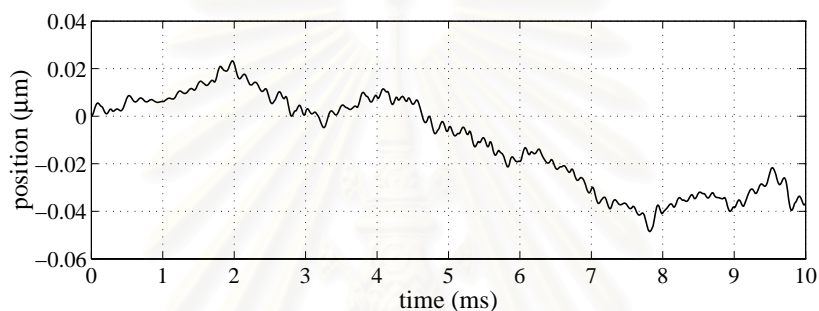
จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ จะได้ผลของสัญญาณตำแหน่ง y_p^c เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c ดังรูปที่ 5.12 จะเห็นว่าตัวควบคุมนี้สามารถกำจัดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ได้ในที่สุด เนื่องจากตัวควบคุมมีผลของอินทิกรัล โดยพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเป็น $8.353 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$

การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาขา n^c จากการหาตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ทำให้ได้ตัวควบคุมคือ

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0003 & -0.0004 & -0.0003 & -1354.2 \\ 0.3213 \times 10^{-9} & -0.7931 & 0.4744 & -0.1364 & 1.1893 \\ 0.1312 \times 10^{-9} & 0.22599 & 0.5429 & -0.6501 & 0.4858 \\ -0.0072 \times 10^{-9} & -0.0049 & 0.0518 & 0.1769 & -0.0266 \\ \hline 0.0620 \times 10^{-9} & -0.3759 & 0.0930 & 0.4977 & 0.2298 \\ -0.0006 & -0.4245 & -0.6847 & -0.5289 & 0.8973 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$



รูปที่ 5.12: ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 7 - 7 - 7



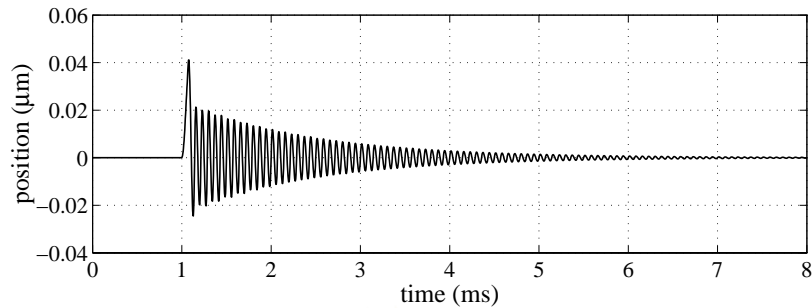
รูปที่ 5.13: ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 7 - 7 - 7

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ จะได้สัญญาณตำแหน่ง y_p^c ดังรูปที่ 5.13 จะเห็นได้ว่าตัวควบคุมนี้สามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ได้ คือทำให้ค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งลดลงเท่ากับ $3.334 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2$

5.3.2 ตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 14 - 14 - 14

ตัวควบคุมที่สอง คือตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยวที่อัตราสุ่ม 14 kHz โดยพิจารณาสัญญาณเข้าและออก จากภายนอกที่อัตราสุ่ม 28 kHz ทำให้ได้คาบเวลารอบ $T_f = \frac{1}{14}$ ms และ $\mu = 2, \zeta = 2, \psi = 1, \omega = 2, v_v = 1, v = 1$ จากนั้นลิฟต์พลานต์น้อยทั่วไปให้เป็น G เพื่อใช้ในการคำนวณตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด

การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c เมื่อลิฟต์พลานต์น้อยทั่วไป และหาตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2



รูปที่ 5.14: ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 14 - 14 - 14

ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น จะได้ตัวควบคุมเป็น

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0016 & 0.0001 & 0.0003 & -1.286 \times 10^6 \\ -0.004 \times 10^{-4} & 0.9512 & -0.0032 & 0.0001 & -20500 \\ 1.924 \times 10^{-9} & 0.0004 & -0.9139 & -0.0002 & 89.607 \\ 0.052 \times 10^{-12} & 1.188 \times 10^{-8} & 0.049 \times 10^{-4} & -0.0010 & 0.0024 \\ \hline -3.081 \times 10^{-9} & -0.0004 & 0.4057 & 0.0005 & -115.99 \\ -0.0053 & 0.3087 & 0.0116 & -0.0002 & 129.92 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ จะได้สัญญาณตำแหน่ง y_p^c ดังรูปที่ 5.14 จะเห็นได้ว่าตัวควบคุมนี้สามารถกำจัดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ได้ในที่สุด โดยมีพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $2.590 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$

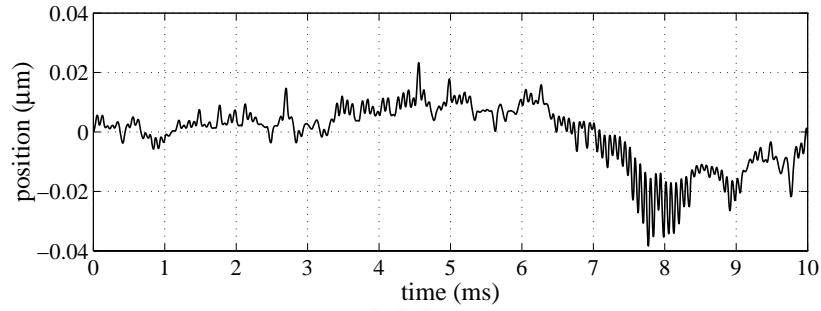
การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c จากการหาตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ทำให้ได้ตัวควบคุมคือ

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.0046 & -0.0002 & -0.0045 & 11083 \\ -0.1008 \times 10^{-4} & 0.9512 & 0.0032 & 0.0976 & 502.01 \\ -3.5544 \times 10^{-8} & -0.0004 & -0.9135 & -0.3825 & 1.7744 \\ 0.01919 \times 10^{-8} & 0.0191 \times 10^{-8} & -0.0010 & 0.0023 & -0.0096 \\ \hline 6.6265 \times 10^{-8} & 0.0004 & 0.4066 & -0.8685 & -3.3044 \\ 0.0149 & -0.3087 & 0.0113 & 0.3001 & 2.9107 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ จะได้สัญญาณตำแหน่ง y_p^c ดังรูปที่ 5.15 จะเห็นได้ว่าตัวควบคุมนี้สามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ได้ คือทำให้ค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $0.905 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2$

5.3.3 ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28

ตัวควบคุมสุดท้ายคือ ตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม ที่มีอัตราการซีกตัวอย่าง 14 kHz อัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวแรก 7 kHz และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวที่สอง 28 kHz โดยพิจารณา



รูปที่ 5.15: ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ของตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 14 - 14 - 14

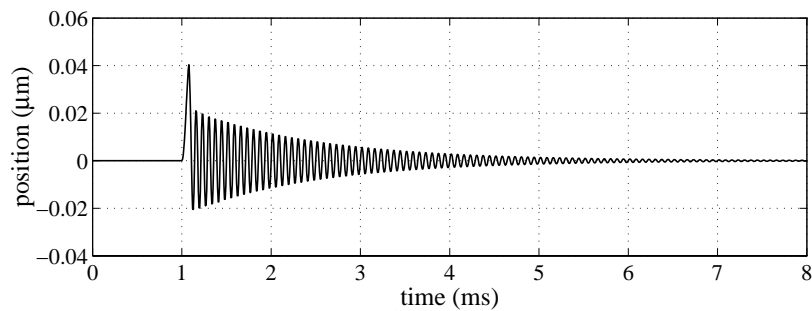
สัญญาณเข้าและออกจากภายนอกที่อัตราสุ่ม 28 kHz ทำให้ได้คาบเวลารอบ $T_f = \frac{1}{7}$ ms และ $\mu = 4$, $\zeta = 4$, $\psi = 2$, $\omega = 4$, $v_v = 1$, $v = 4$ จากนั้นลิปต์พลาตันยั่วทั่วไปให้ได้ G เพื่อใช้ในการคำนวณตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด

การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c เมื่อลิปต์พลาตันยั่วทั่วไป แล้วหาตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยมีการกำหนดโครงสร้างของส่วนป้อนผ่านของตัวควบคุม ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล จะได้ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดเป็น

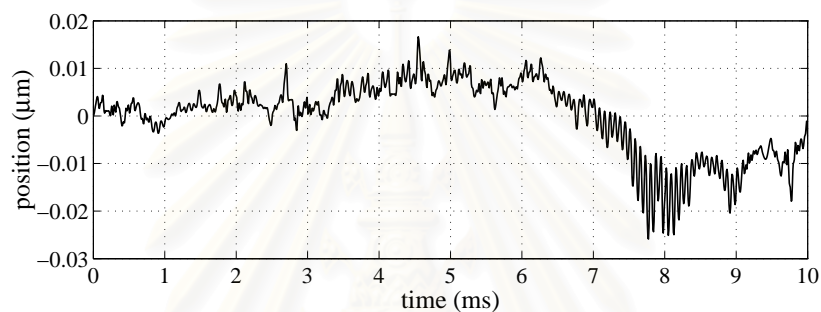
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.9184 & -0.2276 & 0.0406 & -0.1955 & 400.37 & 630.74 \\ 0.0201 & 0.4559 & -0.4670 & -0.6861 & -269.88 & 83.308 \\ -0.0027 & -0.2166 & -0.3907 & -0.0459 & -26.824 & 23.407 \\ -0.0007 & 0.0013 & 0.0097 & -0.0008 & 0.8831 & 3.1355 \\ \hline -0.0001 & 0.0979 & 0.4935 & -0.0870 & 32.211 & 0 \\ 0.2830 & 0.3068 & -0.4658 & 0.6182 & 81.850 & 0 \\ 0.0142 & 0.5298 & 0.0451 & 0.2492 & -25.272 & 0 \\ 0.2748 & 0.3515 & 0.3589 & 0.0661 & 122.01 & 92.315 \\ 0.0192 & 0.4307 & 0.1904 & -0.1811 & -74.774 & 9.7323 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ จะได้สัญญาณตำแหน่ง y_p^c ดังรูปที่ 5.16 จะเห็นว่าตัวควบคุมนี้สามารถกำจัดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ได้ในที่สุด โดยมีพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $2.434 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$

การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c จากการหาตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ด้วยวิธี



รูปที่ 5.16: ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์ d^c ของตัวควบคุมหลายอัตรา
 สุ่ม 14 - 7 - 28



รูปที่ 5.17: ผลตอบของปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ของตัวควบคุม
 หลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ทำให้ได้ตัวควบคุมเป็น

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0.6090 & -0.3583 & -0.0526 & -0.6498 & 127.64 & 6.8008 \\ -0.0981 & 0.4362 & 0.6398 & -0.4312 & 13.818 & -8.3020 \\ 0.0630 & 0.5384 & 0.0474 & -0.0947 & -6.3235 & -4.7359 \\ -2.2436 \times 10^{-4} & 0.0003 & -0.0002 & -1.8707 \times 10^{-4} & 0.0025 & 0.0203 \\ \hline 0.0452 & 0.2824 & -0.4191 & -0.1004 & -6.8287 & 0 \\ 0.4161 & -0.2503 & 0.5371 & 0.3568 & 3.4844 & 0 \\ 0.3960 & 0.2836 & 0.1330 & 0.4331 & 6.7695 & 0 \\ 0.4149 & 0.2161 & -0.2959 & 0.2059 & 19.126 & 1.2300 \\ 0.3338 & 0.3491 & -0.1274 & -0.1243 & 30.790 & -0.3918 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ จะได้สัญญาณตำแหน่ง y_p^c ดังรูปที่ 5.17 จะเห็นได้ว่าตัวควบคุมนี้สามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาว n^c ได้ คือทำให้ค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $0.546 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2$

5.3.4 การวิเคราะห์เปรียบเทียบผลการควบคุม

จากการจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ สำหรับปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน ได้ผลของสัญญาณรบกวนต่อสัญญาณตำแหน่งดังตารางที่ 5.3

ตารางที่ 5.3: พลังงานและความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่ง เนื่องมาจากสัญญาณพัลส์ และสัญญาณรบกวนขาว

ตัวควบคุม	พลังงานของ y_p^c เนื่องมาจากสัญญาณพัลส์ d^c ($\mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$)	ความแปรปรวนของ y_p^c เนื่องมาจากสัญญาณรบกวนขาว n^c (μm^2)
7 - 7 - 7	8.353×10^{-4}	3.334×10^{-4}
14 - 14 - 14	2.590×10^{-4}	0.905×10^{-4}
14 - 7 - 28	2.434×10^{-4}	0.526×10^{-4}

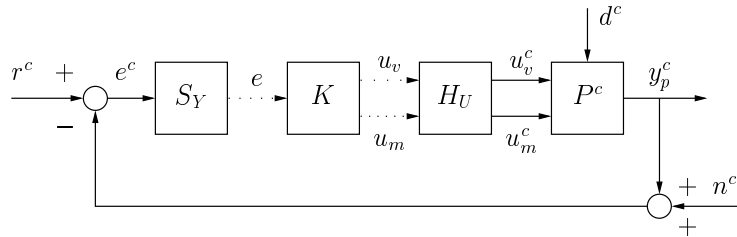
จากค่าในตารางจะเห็นได้ว่า ในกรณีของสัญญาณพัลส์ d^c เมื่อเข้ามารบกวนความเร่งการหมุนของมอเตอร์ชดลวดเสียงแล้ว ตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 7 - 7 - 7 จะสามารถลดผลของสัญญาณพัลส์นี้ได้ น้อยที่สุด เนื่องจากมีอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมของมอเตอร์ชดลวดเสียง ช้ากว่าตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 14 - 14 - 14 ทำให้การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณพัลส์นี้ทำได้ช้า ส่วนตัวควบคุมหลายอัตราส่วน 14 - 7 - 28 ถึงแม้จะมีอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมของมอเตอร์ชดลวดเสียงช้า แต่ก็มีอัตราการคงค่าของตัวขับเคลื่อนที่เร็ว ทำให้ตัวขับเคลื่อนช่วยลดผลของสัญญาณพัลส์นี้ได้

ในกรณีของสัญญาณรบกวนขาว n^c เมื่อเข้ามารบกวนสัญญาณตำแหน่งที่วัดได้ ตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว 7 - 7 - 7 สามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาวได้น้อยที่สุด เนื่องจากอัตราการซึกตัวอย่างสัญญาณตำแหน่ง และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมช้า ทำให้การควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวนขาวนี้ ทำได้ช้ากว่าตัวควบคุมอื่นๆ ส่วนตัวควบคุมหลายอัตราส่วน 14 - 7 - 28 มีอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมของตัวขับเคลื่อนเร็ว ทำให้ตัวขับเคลื่อนช่วยลดผลของสัญญาณรบกวนขาวได้ดีขึ้น แต่จะทำให้ผลของสัญญาณตำแหน่ง มีความถี่สูงกว่าตัวควบคุมอื่นๆ เนื่องจากตัวควบคุมหลายอัตราส่วน มีอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมตัวที่สองเร็วกว่า

5.4 การออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราส่วนสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

จากการเปรียบเทียบผลการควบคุม ของตัวควบคุมอัตราส่วนเดียว และตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับปัญหาการควบคุมตามรอย และปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน จะเห็นได้ว่าตัวควบคุมหลายอัตราส่วน 14 - 7 - 28 เป็นตัวควบคุมที่ให้ผลการควบคุมดีที่สุด ในทั้งสองปัญหา ดังนั้นเราจะเลือกใช้ตัวควบคุมหลายอัตราส่วนนี้ ควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อทำให้สัญญาณตำแหน่งสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น และสามารถลดผลของสัญญาณรบกวน ทั้งสัญญาณพัลส์ ซึ่งรบกวนความเร่งการหมุนของมอเตอร์ชดลวดเสียง และสัญญาณรบกวนขาวซึ่งรบกวนสัญญาณการวัดให้อยู่ในระดับที่น่าพอใจ โครงสร้างการควบคุมของระบบจะมีลักษณะดังรูปที่ 5.18

จากพลานต์ของระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ดังสมการที่ (4.4) กำหนดให้พลังงานของสัญญาณรบกวน d^c และ n^c เท่ากับ S_d และ S_n ตามลำดับ $B_d = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ กำหนดให้สถานะสุดท้ายของพลานต์เมื่อมีสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วยเป็น $x_r = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ และฟังก์ชัน



รูปที่ 5.18: โครงสร้างการควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์

จุดประสงค์คือ

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[(x^c(t) - x_r)^T Q (x^c(t) - x_r) + u^{cT}(t) R u^c(t) \right] \quad (5.25)$$

โดยที่ $Q \geq 0$ และ $R > 0$ เป็นเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก จะได้ว่าพลาตันี้ทั่วไปคือ

$$\hat{G}^c = \left[\begin{array}{c|cc} A^c & [-x_r \quad B_d S_d^{\frac{1}{2}} \quad 0] & B^c \\ \hline \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ \hline -C^c & [0 \quad 0 \quad -S_n^{\frac{1}{2}}] & -D^c \end{array} \right] \quad (5.26)$$

ในการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์นี้ เราจะกำหนดค่าพิกัดในการควบคุมดังตารางที่ 5.4 [26, 24]

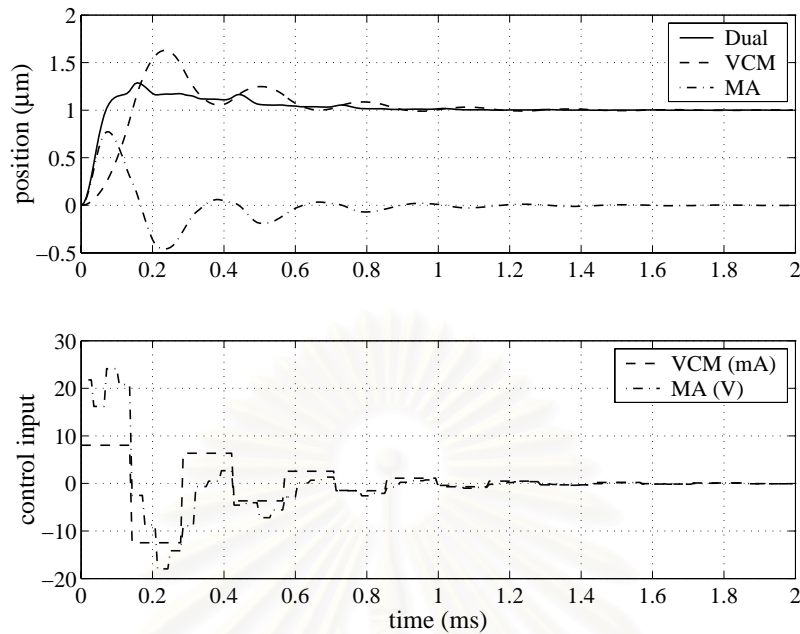
ตารางที่ 5.4: ค่าพิกัดในการควบคุมระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เพื่อตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย และลดผลของสัญญาณรบกวน d^c และ n^c

ค่าพิกัด	ค่า	หน่วย
ส่วนพุ่งเกินสูงสุดของสัญญาณตำแหน่ง	5	%
เวลาเข้าที่ของสัญญาณตำแหน่ง	1	ms
ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมมอเตอร์ขับเคลื่อน	8	mA
ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวขับเร้าย่อย	30	V
พลังงานของสัญญาณตำแหน่งเนื่องมาจาก d^c	0.005	$\mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$
ความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเนื่องมาจาก n^c	9×10^{-4}	μm^2

การออกแบบครั้งที่ 1 เราเลือกใช้เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก จากการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 ในปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นเป็น

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix}$$

และกำหนดให้ $S_d = 14.286 \mu\text{m}^2/\text{ms}^3$ และ $S_n = 3.571 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ ซึ่งเป็นค่าพลังงานจริงของสัญญาณ

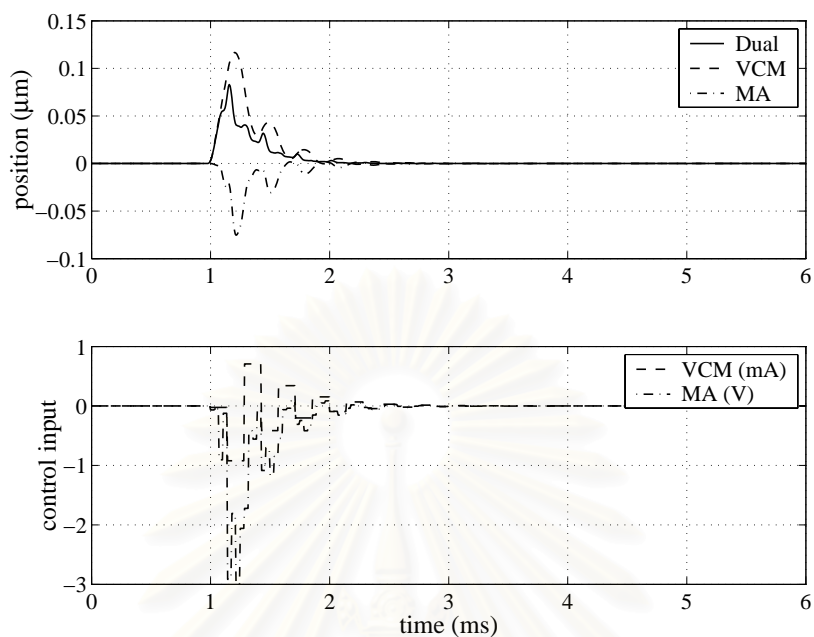


รูปที่ 5.19: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 1

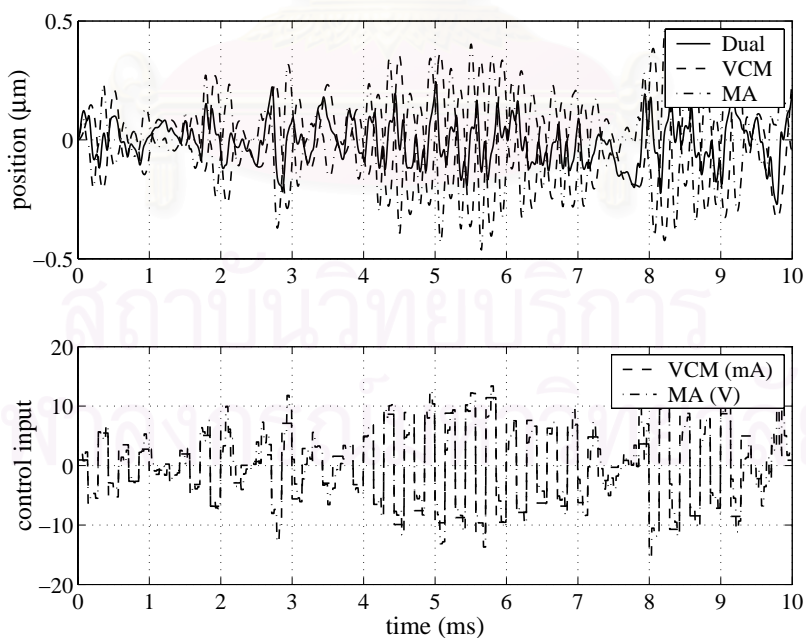
รบกวน จะได้ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดคือ

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -0.6925 & 0.1981 & -0.6368 & 0.0268 & -17.936 & 48.784 \\ -0.1746 & -0.3149 & 0.2413 & 0.0725 & -11.907 & -16.536 \\ 0.0204 & -0.0283 & 0.1043 & -0.1856 & -2.1843 & 0.8001 \\ -3.2891 \times 10^{-5} & -0.0034 & 0.0011 & 0.0097 & 0.0335 & 0.0187 \\ \hline 0.3047 & 0.4259 & -0.0804 & -0.6993 & 8.0301 & 0 \\ 0.3512 & -0.6908 & -0.6023 & -0.1908 & 21.779 & 0 \\ 0.2662 & -0.0230 & 0.0376 & 0.4859 & 16.189 & 0 \\ 0.3176 & 0.3357 & -0.3174 & 0.4090 & 24.494 & 18.301 \\ 0.3188 & 0.2982 & -0.2324 & 0.1751 & 20.801 & 1.2873 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

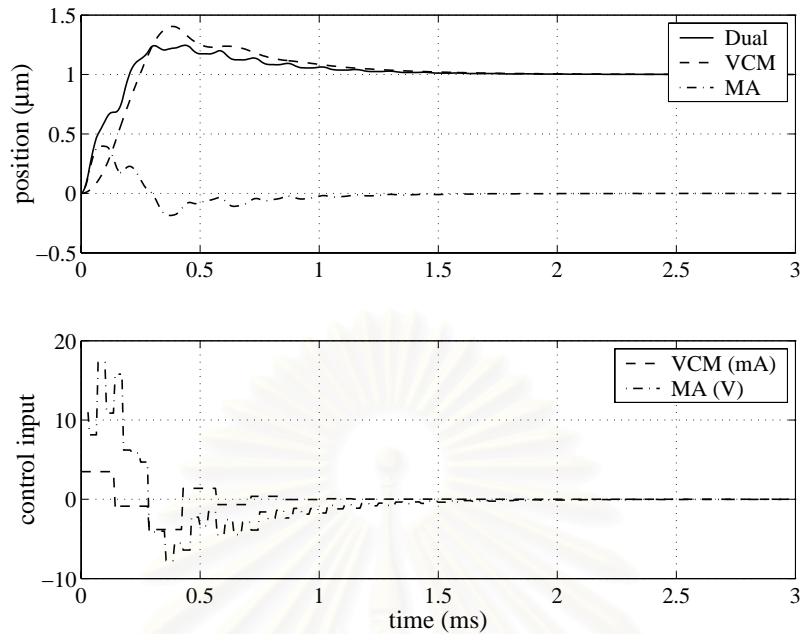
จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้สัญญาณตำแหน่งตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลดังรูปที่ 5.19 จะเห็นได้ว่าสัญญาณตำแหน่งมีเวลาเข้าที่ประมาณ 0.75 ms แต่มีส่วนพุ่งเกินมากเกินไปคือเท่ากับ 29 % และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 12.4 mA ซึ่งเกินค่าพิกัด ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 25.0 V ต่อมาจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.20 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถกำจัดสัญญาณพัลส์ d^c ได้รวดเร็ว โดยมีพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $9.03 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ และจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณรบกวนขาว n^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.21 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาวได้ไม่ตีพอ โดยมีค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $0.0084 \mu\text{m}^2$



รูปที่ 5.20: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1



รูปที่ 5.21: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณรบกวนขาว n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1



รูปที่ 5.22: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 2

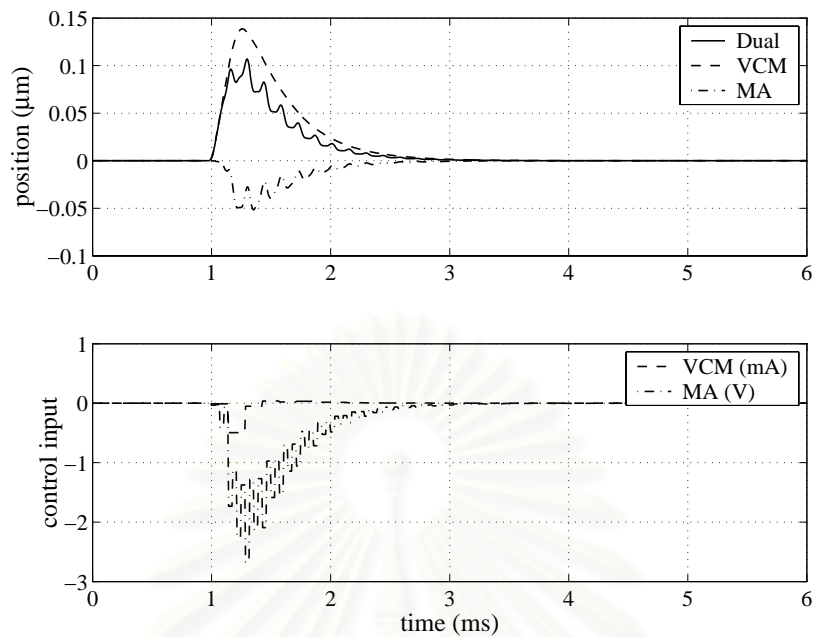
การออกแบบครั้งที่ 2 เนื่องจากค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่ง ต่อสัญญาณรบกวนขาว n^c ยังมีค่ามากเกินไปค่าพิกัด ดังนั้นจึงจะเพิ่มค่า $S_n = 0.25 \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ โดยคงค่าเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักตัวอื่น ๆ ไว้ คือ $S_d = 14.286 \mu\text{m}^2/\text{ms}^3$ และ

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดเป็น

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -0.5242 & -0.1171 & -0.7598 & -0.0567 & 3.1789 & -26.9679 \\ 0.2441 & -0.2769 & -0.1541 & 0.0118 & -6.9618 & -5.4725 \\ 0.0408 & 0.0039 & 0.3633 & -0.1914 & 1.9080 & -0.6590 \\ -0.0013 & -0.0206 & 0.0060 & -0.0036 & 0.0421 & 0.0433 \\ -0.2565 & 0.4803 & 0.0535 & -0.7709 & 3.4894 & 0 \\ -0.4489 & -0.7298 & 0.3822 & -0.2645 & 11.0358 & 0 \\ -0.3188 & -0.0266 & 0.0474 & 0.2568 & 8.1325 & 0 \\ -0.4039 & 0.2757 & 0.3123 & 0.3832 & 13.4312 & 7.6945 \\ -0.3632 & 0.2630 & 0.1347 & 0.2881 & 10.4595 & 0.8176 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้สัญญาณตำแหน่งตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลดังรูปที่ 5.22 จะเห็นได้ว่าสัญญาณตำแหน่งมีเวลาเข้าที่ช้ากว่าเดิมคือ 1.34 ms และส่วนพุ่งเกินยังมีค่ามากอยู่คือประมาณ 25 % และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 3.8 mA ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 17.6 V ต่อมาจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ

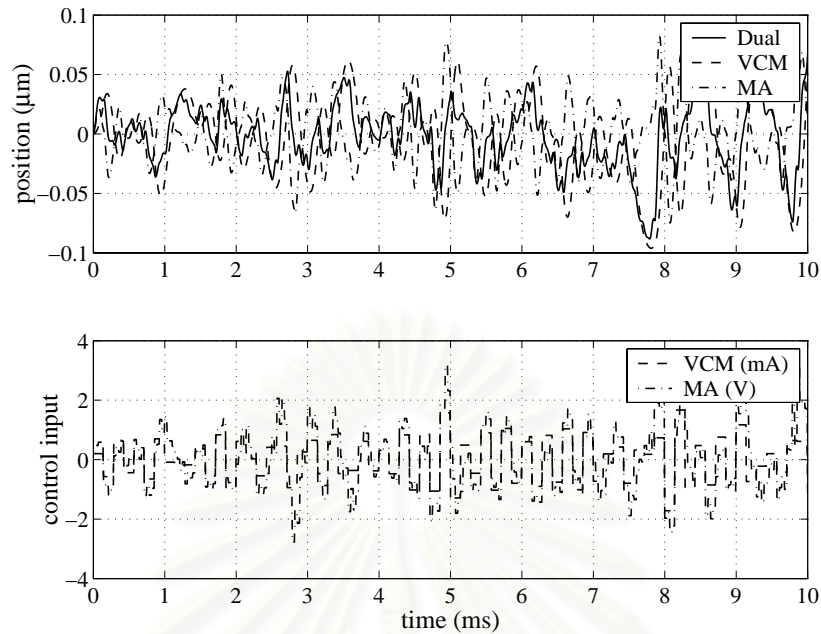


รูปที่ 5.23: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2

ได้ผลดังรูปที่ 5.23 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถกำจัดสัญญาณพัลส์ d^c ได้ช้าลง โดยพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $0.0036 \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ และจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณรบกวนขาว n^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.24 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาวได้ดี คือมีค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $7.9039 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2$

การออกแบบครั้งที่ 3 จากการออกแบบครั้งที่สอง จะเห็นว่าเวลาเข้าที่ของสัญญาณตำแหน่ง สำหรับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น ยังมีค่ามากขึ้น ดังนั้นจึงจะลดค่า $S_d = 9 \times 10^{-4}$ โดยคงค่าเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักตัวอื่นๆ ไว้ คือ $S_n = 0.25 \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ และ

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix}$$

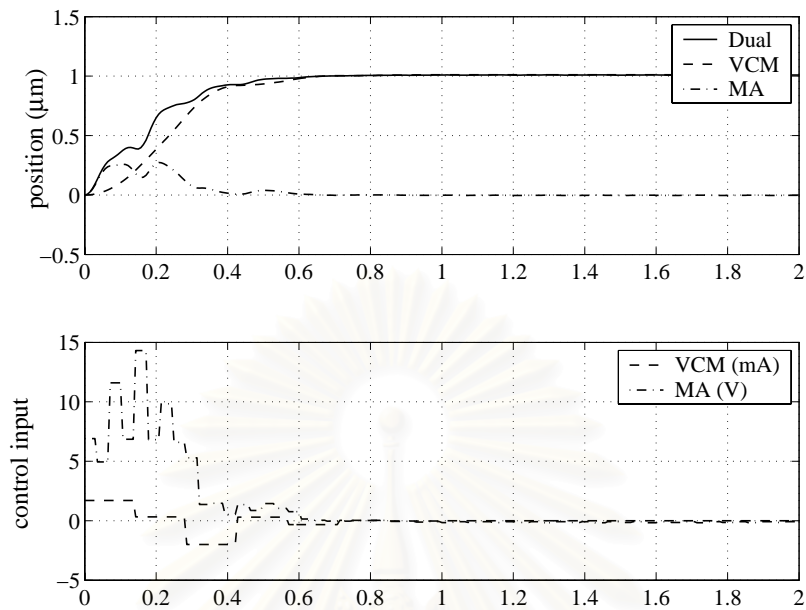


รูปที่ 5.24: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณรบกวนขาว n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2

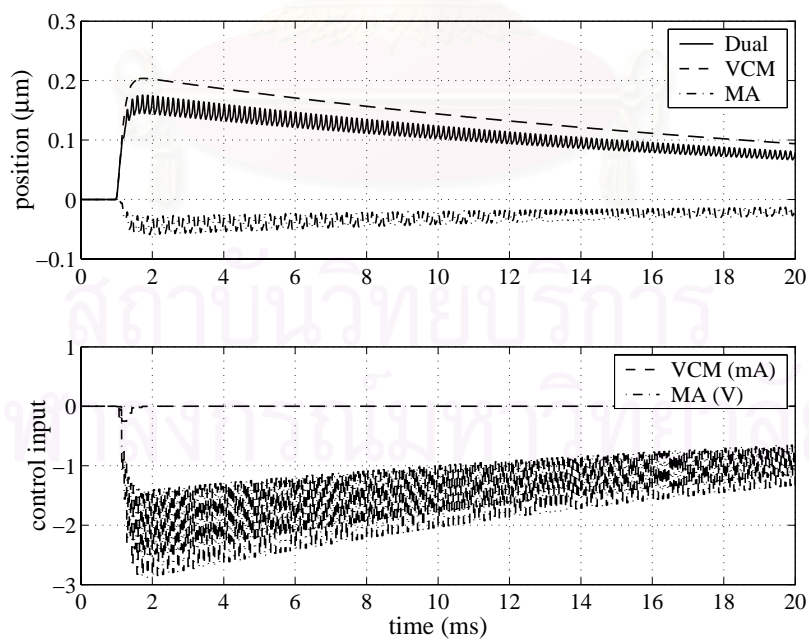
จะได้ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดคือ

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -0.4491 & -0.1784 & 0.8120 & 0.1698 & -0.2529 & 15.4949 \\ -0.2671 & -0.2171 & -0.1908 & -0.1008 & -4.5039 & -2.5441 \\ 0.0095 & -0.0745 & -0.0346 & -0.1409 & -0.0113 & 0.0407 \\ -0.0086 & -0.0082 & 0.0483 & -0.0065 & 0.2179 & -0.0776 \\ \hline 0.2134 & 0.5009 & -0.0667 & 0.6031 & 1.7070 & 0 \\ 0.4996 & -0.7637 & 0.0055 & 0.4044 & 6.9273 & 0 \\ 0.3334 & -0.0539 & 0.0688 & -0.6134 & 4.9657 & 0 \\ 0.4326 & 0.1719 & 0.4547 & -0.1927 & 8.5243 & 4.4607 \\ 0.3652 & 0.2211 & 0.2912 & 0.0211 & 6.4672 & 0.3933 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

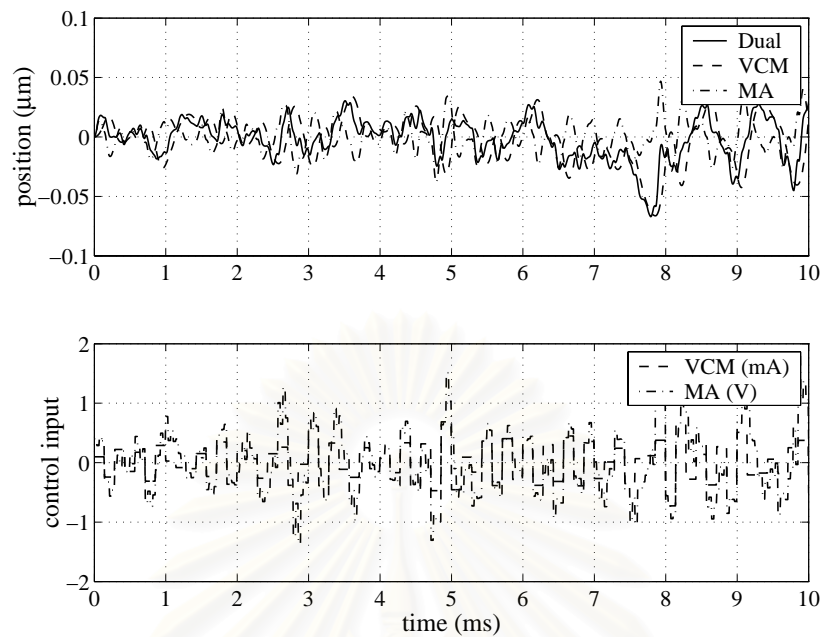
จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้สัญญาณตำแหน่งตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลดังรูปที่ 5.25 จะเห็นได้ว่าสัญญาณตำแหน่งมีเวลาเข้าที่ดีขึ้นคือ 0.53 ms มีส่วนพุ่งเกินประมาณ 1 % และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 2.3 mA ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 14.2 V ต่อมาจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.26 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถกำจัดสัญญาณพัลส์ d^c ได้ช้าลงมาก โดยมีพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $0.3048 \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ และจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.27 จะเห็นว่าระบบสามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาวได้ดีขึ้นด้วย โดยมีค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $3.066 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2$



รูปที่ 5.25: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 3



รูปที่ 5.26: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 3



รูปที่ 5.27: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 3

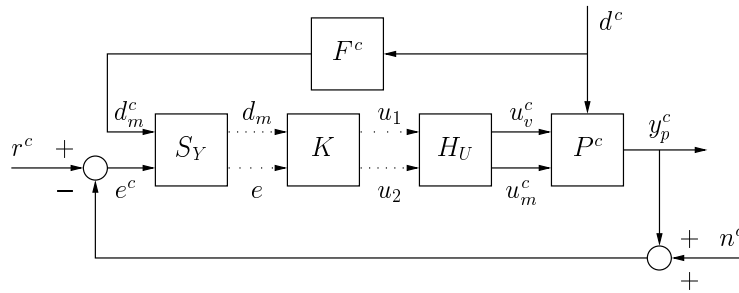
5.5 การออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มสำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน

จากหัวข้อที่แล้ว จะเห็นว่าระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c ครอบคลุมความเร่งการหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง ซึ่งเป็นการรบกวนที่อนุพันธ์ของสถานะของระบบ จะทำให้การควบคุมระบบทำได้ยากขึ้น กล่าวคือระบบควบคุมที่ออกแบบจะสามารถกำจัดผลของสัญญาณพัลส์นี้ได้เร็ว แต่ผลตอบของสัญญาณตำแหน่งต่อการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นจะช้าลง หรือถ้าออกแบบให้ผลตอบของสัญญาณตำแหน่งเมื่อมีสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นเร็วขึ้น ก็จะทำให้ระบบควบคุมกำจัดผลของสัญญาณพัลส์ได้ช้าลง ในหัวข้อนี้จึงจะนำเสนอวิธีกำจัดผลของสัญญาณพัลส์ d^c นี้ โดยการวัดความเร่งการหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง ด้วยเครื่องวัดความเร่งการหมุน เพื่อนำไปเป็นสัญญาณวัดอีกตัวหนึ่ง เนื่องจากเครื่องวัดความเร่งการหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียงที่ใช้จริง ไม่ได้มีลักษณะเป็นอุดมคติ คือ เครื่องวัดความเร่งการหมุนจะสามารถวัดความเร่งได้ดีในช่วงแถบความถี่ต่ำ เปรียบเสมือนเป็นตัวกรองแบบผ่านต่ำ (low-pass filter) ในที่นี้เราจะประมาณตัวกรองแบบผ่านต่ำด้วยตัวกรองบัตเตอร์เวิร์ธ (Butterworth filter) อันดับ 2 ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรอง F^c เป็น

$$\hat{F}^c = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_B}\right)^2 + \frac{1.42}{\omega_B}s + 1} \triangleq \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

โดยที่ ω_B คือแถบความถี่ของตัวกรอง

โครงสร้างการควบคุมของปัญหาดังกล่าว เป็นดังรูปที่ 5.28 โดยที่สัญญาณพัลส์ d^c จะถูกวัดด้วย



รูปที่ 5.28: โครงสร้างการควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน

เครื่องวัดความเร่งการหมุน ที่มีลักษณะเป็นตัวกรองแบบผ่านต่ำ F^c ทำให้สามารถวัดความเร่งได้เป็นสัญญาณความเร่งที่วัดได้ d_m^c แล้วถูกซัดตัวอย่างเพื่อเข้าสู่ตัวควบคุมต่อไป ดังนั้นสัญญาณวัดของระบบนี้จะมีสองสัญญาณ คือ สัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่ง e^c และสัญญาณความเร่งที่วัดได้ d_m^c และสัญญาณควบคุมจะมีสองสัญญาณ คือ สัญญาณควบคุมของมอเตอร์ขดลวดเสียง u_v^c และสัญญาณควบคุมของตัวขับเรย์ย่อย u_m^c จากสมการของพลาเน็ตระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ และตัวกรองแบบผ่านต่ำดังสมการที่ (4.4) และ (5.30) เราจะได้สมการสถานะของระบบเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^c \\ \dot{x}_F^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^c & 0 \\ 0 & A_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^c \\ x_F^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_d & 0 \\ 0 & B_F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^c \\ d^c \\ n^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^c \\ 0 \end{bmatrix} u^c \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} e^c \\ d_m^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C^c & 0 \\ 0 & C_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^c \\ x_F^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & D_F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^c \\ d^c \\ n^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D^c \\ 0 \end{bmatrix} u^c$$

กำหนดให้พลังงานของสัญญาณรบกวน d^c และ n^c เท่ากับ S_d และ S_n ตามลำดับ สถานะสุดท้ายของพลาเน็ตในการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วยคือ $x_r = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ และฟังก์ชันจุดประสงค์เท่ากับ

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[(x^c(t) - x_r)^T Q (x^c(t) - x_r) + u^{cT}(t) R u^c(t) \right] \quad (5.32)$$

โดยที่ $Q \geq 0$ และ $R > 0$ เป็นเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก จะได้ว่าพลาเน็ตนี้ยั่วทั่วไปคือ

$$\hat{G}^c = \begin{bmatrix} A^c & 0 & -x_r & B_d S_d^{\frac{1}{2}} & 0 & B^c \\ 0 & A_F & 0 & B_F S_d^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ \hline Q^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R^{\frac{1}{2}} \\ \hline -C^c & 0 & 0 & 0 & -S_n^{\frac{1}{2}} & -D^c \\ 0 & C_F & 0 & D_F S_d^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

กำหนดให้ แถบความถี่ของเครื่องวัดความเร่งการหมุนเท่ากับ 50 kHz และอัตราการซัดตัวอย่างสัญญาณความเร่งที่วัดได้ d_m^c เป็น 28 kHz ส่วนอัตราสุ่มของสัญญาณอื่นๆ ยังเหมือนเดิม คือ อัตราการซัดตัว

อย่างสัญญาณความคลาดเคลื่อนตำแหน่ง e^c เป็น 14 kHz อัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมของมอเตอร์ขดลวดเสียง u_v^c เป็น 7 kHz และอัตราการคงค่าสัญญาณควบคุมของตัวขับเร้าย่อย u_m^c เป็น 28 kHz จากนั้นลิฟต์พลานต์นัยทั่วไป โดยที่คาบเวลารอบเท่ากับ $\frac{1}{7}$ ms $\mu = 4$ และ $\zeta = 4, \psi_e = 2, \psi_d = 4, \omega = 4, v_v = 1, v_m = 4$ เพื่อให้ได้พลานต์นัยทั่วไปที่ลิฟต์แล้ว G แล้วจึงนำไปออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ให้ได้ตัวควบคุมหลายอัตรา K กฎการควบคุมของตัวควบคุมหลายอัตรา K เป็น

$$\begin{bmatrix} u_v(\frac{h}{7}) \\ u_m(\frac{h}{7}) \\ u_m(\frac{h}{7} + \frac{1}{28}) \\ u_m(\frac{h}{7} + \frac{2}{28}) \\ u_m(\frac{h}{7} + \frac{3}{28}) \end{bmatrix} = \underline{K} \begin{bmatrix} y_p(\frac{h}{7}) \\ d_m(\frac{h}{7}) \\ d_m(\frac{h}{7} + \frac{1}{28}) \\ y_p(\frac{h}{7} + \frac{1}{14}) \\ d_m(\frac{h}{7} + \frac{2}{28}) \\ d_m(\frac{h}{7} + \frac{3}{28}) \end{bmatrix}$$

โดยมีเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผลบังคับโครงสร้างส่วนป้อนผ่านของตัวควบคุมให้เป็น

$$D_K = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

การออกแบบครั้งที่ 1 จากการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตรา $14 - 7 - 28$ ในปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น เราเลือกใช้เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเป็น

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix}$$

และกำหนดให้ $S_d = 14.286 \mu\text{m}^2/\text{ms}^3$ และ $S_n = 3.571 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ จะได้ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดคือ

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \quad (5.34)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 A_K &= \begin{bmatrix} -0.3633 & 0.0196 & -0.7014 & 0.5401 & 0.2520 & -0.0897 \\ -0.2649 & -0.2912 & 0.1572 & 0.1090 & 0.0300 & -0.0460 \\ 0.0251 & -0.0032 & 0.1799 & 0.0460 & -0.0481 & -0.8864 \\ 0.0003 & -0.0023 & -0.0003 & 0.0156 & 0.0225 & 0.0543 \\ -0.0001 & 0.0022 & 0.0015 & 0.0118 & 0.0040 & -0.0614 \\ -4.413 \times 10^{-8} & -0.155 \times 10^{-8} & 0.0015 \times 10^{-8} & -0.0001 & 0.0001 & 0.0003 \end{bmatrix} \\
 B_K &= \begin{bmatrix} -6.6671 & 0.1906 & -0.2573 & 26.6064 & -0.2443 & -0.0743 \\ -11.2267 & 0.0420 & 0.0186 & -5.8952 & 0.0129 & -0.0406 \\ -0.5760 & -0.0172 & 0.0349 & 0.1589 & -0.0131 & 0.0729 \\ 0.0054 & 0.0043 & -0.0116 & 0.0056 & 0.0336 & -0.0787 \\ -0.0097 & 0.0018 & -0.0036 & -0.0040 & 0.0045 & -0.0146 \\ 0.0212 \times 10^{-8} & -0.0021 \times 10^{-8} & 0.0050 \times 10^{-8} & -4.850 \times 10^{-8} & -0.0001 & -0.0047 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \\
 C_K &= \begin{bmatrix} 0.2144 & 0.4650 & -0.1822 & -0.4157 & 0.6698 & -0.0982 \\ 0.5617 & -0.7073 & -0.3818 & -0.1478 & 0.0991 & -0.0797 \\ 0.4118 & -0.0030 & 0.4390 & 0.6558 & 0.4316 & 0.1312 \\ 0.4033 & 0.3233 & -0.2316 & 0.1300 & -0.4398 & 0.2361 \\ 0.3217 & 0.3063 & -0.1600 & 0.2286 & -0.3076 & -0.3292 \end{bmatrix} \\
 D_K &= \begin{bmatrix} 4.5200 & -0.0552 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17.8578 & -0.0597 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12.6851 & -0.0003 & -0.0937 & 0 & 0 & 0 \\ 20.3140 & -0.0384 & -0.0656 & 12.9671 & -0.0744 & 0 \\ 16.0751 & -0.0106 & -0.0903 & 2.6283 & -0.0108 & -0.0007 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

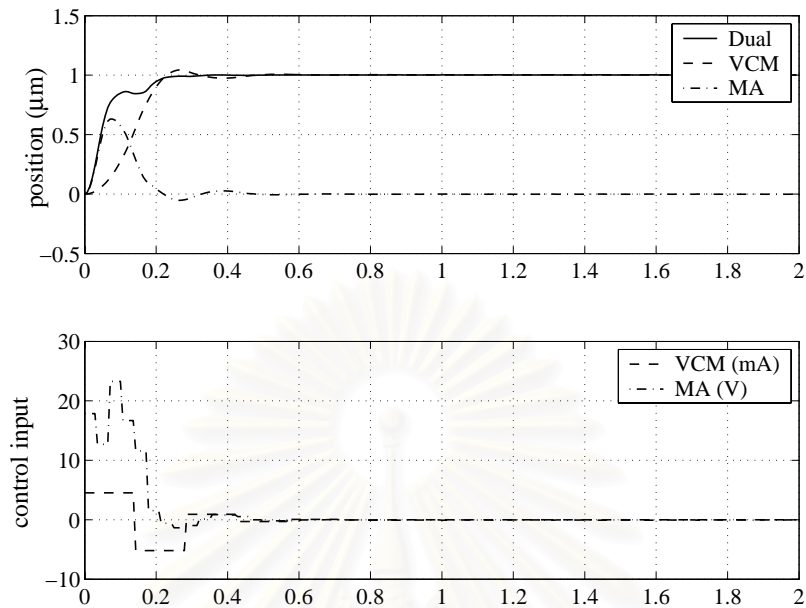
จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้สัญญาณตำแหน่งตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลดังรูปที่ 5.29 จะเห็นได้ว่าสัญญาณตำแหน่งมีผลตอบที่ดี คือมีเวลาเข้าที่เท่ากับ 0.23 ms ไม่มีส่วนฟุ้งเกิน และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 5.0 mA ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 23.4 V ต่อมาจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.30 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถกำจัดสัญญาณพัลส์ d^c ได้รวดเร็ว โดยมีพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $8.881 \times 10^{-5} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ และจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.31 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาวได้พอสมควร โดยมีค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $3.329 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$

การออกแบบครั้งที่ 2 เนื่องจากค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่ง ต่อสัญญาณรบกวนขาว n^c ยังมีค่ามากเกินไปค่าพิกัด ดังนั้นจึงจะเพิ่มค่า $S_n = 0.01 \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ โดยคงค่า $S_d = 14.286 \mu\text{m}^2/\text{ms}^3$ และเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักเป็น

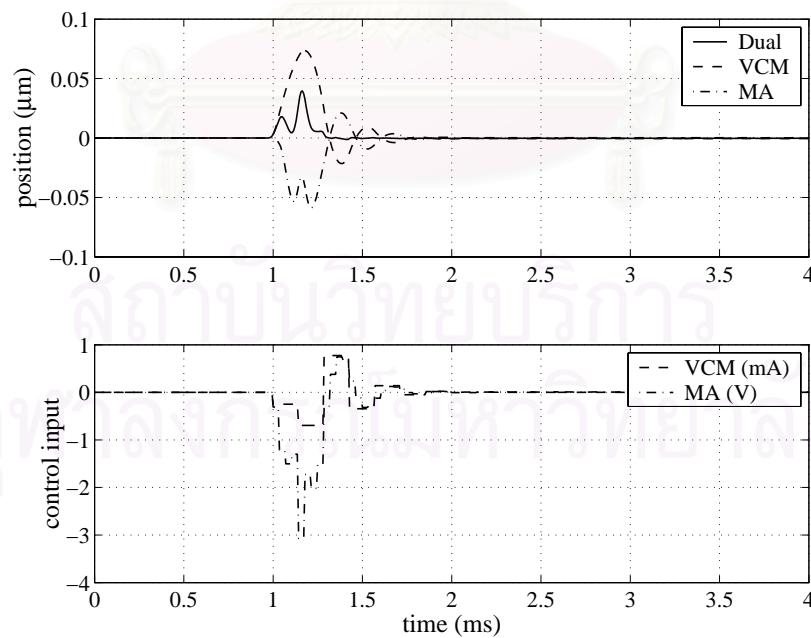
$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0.035 \end{bmatrix}, \quad R^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดเป็น

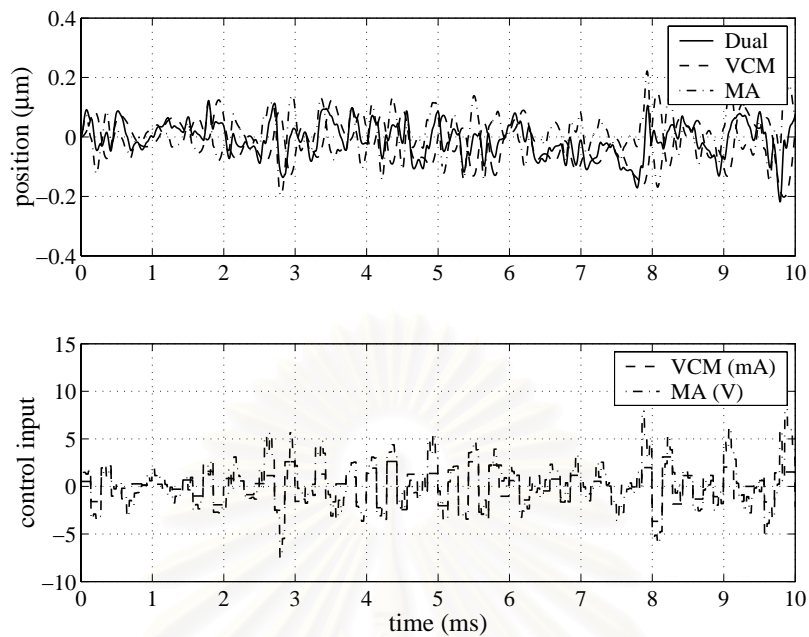
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (5.35)$$



รูปที่ 5.29: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 1



รูปที่ 5.30: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1

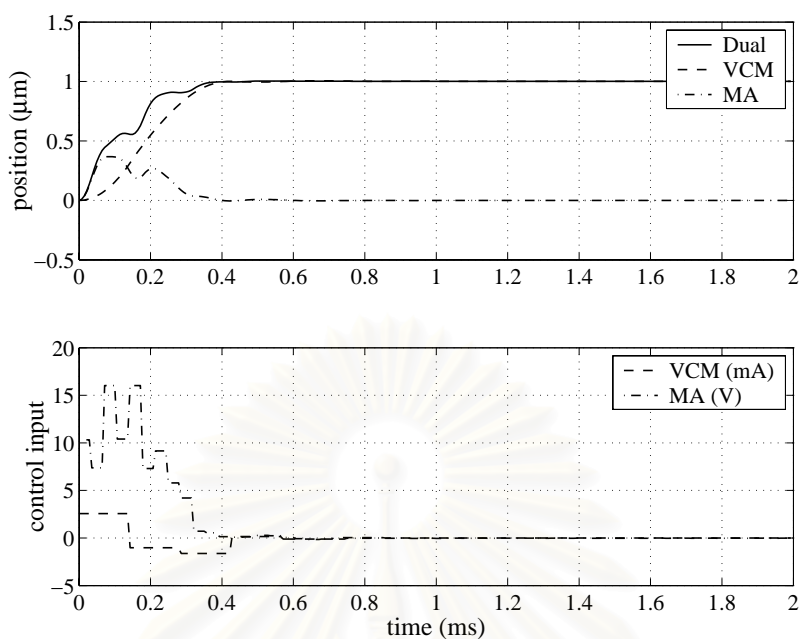


รูปที่ 5.31: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร็วการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 1

โดยที่

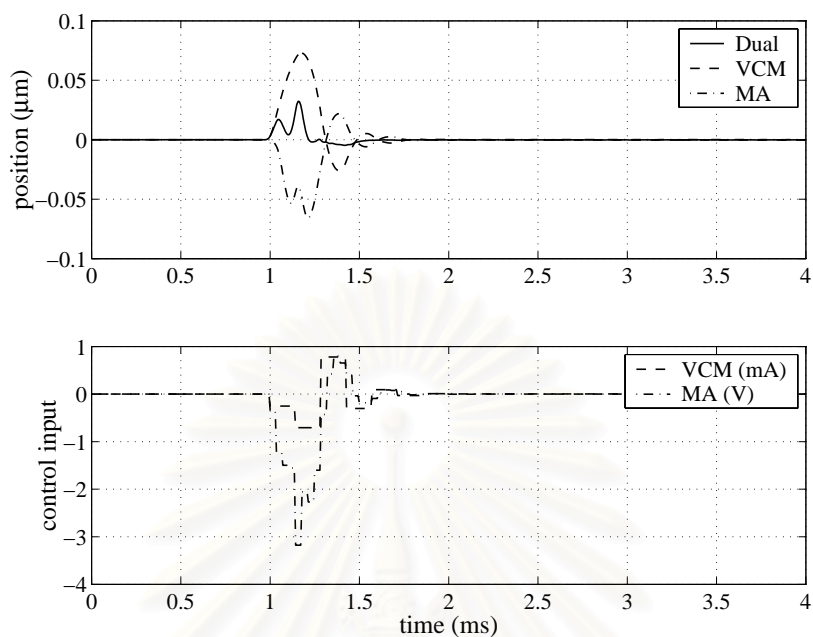
$$\begin{aligned}
 \underline{A}_K &= \begin{bmatrix} -0.1755 & -0.0295 & -0.7858 & 0.0695 & -0.5617 & -0.0953 \\ -0.2726 & -0.2859 & 0.0386 & 0.1440 & -0.1237 & 0.4784 \\ -0.0032 & 0.0241 & -0.0011 & -0.0414 & -0.0149 & 0.5105 \\ 0.0041 & 0.0038 & 0.0383 & -0.0059 & 0.0033 & 0.5618 \\ 0.0014 & -0.0034 & 0.0128 & 0.0004 & 0.0305 & 0.0920 \\ -1.589 \times 10^{-8} & 2.140 \times 10^{-8} & -0.012 \times 10^{-8} & 0.011 \times 10^{-8} & -0.065 \times 10^{-8} & -0.003 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \\
 \underline{B}_K &= \begin{bmatrix} -0.7398 & 0.2145 & -0.3328 & 20.1687 & -0.2797 & -0.1593 \\ -6.6889 & 0.0624 & -0.0015 & -1.2798 & -0.0039 & -0.0492 \\ -0.0307 & -0.0038 & 0.0106 & -0.0097 & -0.0552 & 0.1094 \\ -0.0864 & -0.0069 & 0.0092 & 0.0127 & 0.0248 & -0.0321 \\ -0.0127 & -0.0068 & 0.0151 & 0.0047 & -0.0222 & 0.0651 \\ 0.168 \times 10^{-8} & 0.015 \times 10^{-8} & -0.036 \times 10^{-8} & 2.810 \times 10^{-8} & 0.088 \times 10^{-8} & 0.043 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \\
 \underline{C}_K &= \begin{bmatrix} 0.1389 & 0.4941 & 0.2263 & -0.6206 & -0.4829 & 0.0458 \\ 0.5928 & -0.7034 & -0.0695 & -0.3738 & -0.0960 & 0.0026 \\ 0.4307 & 0.0572 & 0.3330 & 0.6466 & -0.5264 & 0.0035 \\ 0.4767 & 0.3034 & -0.3081 & 0.1720 & 0.3581 & -0.0640 \\ 0.3338 & 0.2875 & -0.3427 & -0.0041 & 0.1427 & 0.4137 \end{bmatrix} \\
 \underline{D}_K &= \begin{bmatrix} 2.5590 & -0.0573 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10.3210 & -0.0719 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.3785 & -0.0105 & -0.0924 & 0 & 0 & 0 \\ 12.4882 & -0.0559 & -0.0674 & 6.3674 & -0.0779 & 0 \\ 9.3586 & -0.0121 & -0.1084 & 1.8740 & -0.0252 & -0.0130 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

จำลองผลการควบคุมด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อให้สัญญาณตำแหน่งตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้นหนึ่งหน่วย ได้ผลดังรูปที่ 5.32 จะเห็นได้ว่าสัญญาณตำแหน่งมีผลตอบที่ดี คือมีเวลาเข้าที่เท่ากับ 0.35 ms

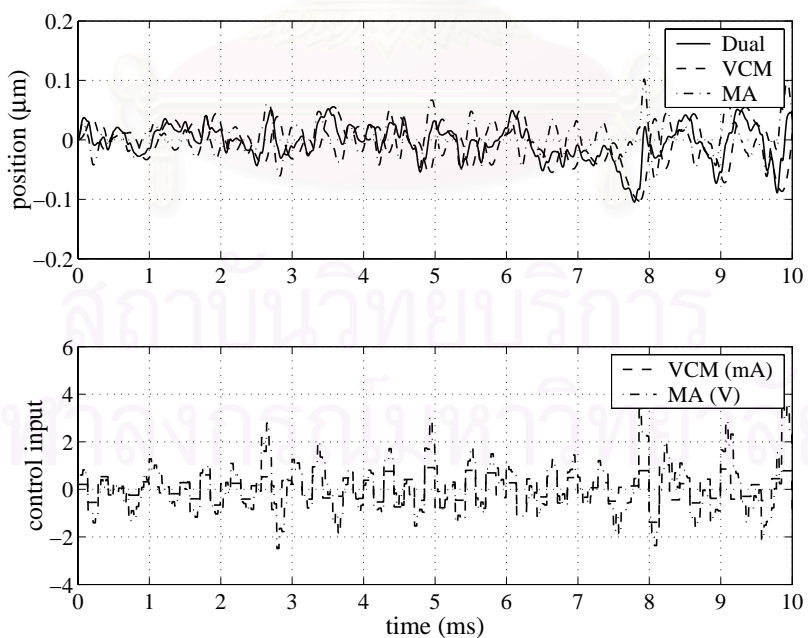


รูปที่ 5.32: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน กับปัญหาการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบครั้งที่ 2

ไม่มีส่วนพุ่งเกิน และขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวแรกเท่ากับ 2.7 mA ขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุมตัวที่สองเท่ากับ 16.2 V ต่อมาจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.33 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถกำจัดสัญญาณพัลส์ d^c ได้รวดเร็ว โดยมีพลังงานของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $6.072 \times 10^{-5} \mu\text{m}^2 \cdot \text{ms}$ และจำลองผลการควบคุม เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ได้ผลดังรูปที่ 5.34 จะเห็นได้ว่าระบบสามารถลดผลของสัญญาณรบกวนขาวได้ดี โดยมีค่าความแปรปรวนของสัญญาณตำแหน่งเท่ากับ $8.85 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2$ ซึ่งอยู่ภายในค่าพิคัดที่กำหนด



รูปที่ 5.33: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ d^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2



รูปที่ 5.34: ผลตอบของตัวควบคุมหลายอัตราส่วน สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ที่มีเครื่องวัดความเร่งการหมุน เมื่อมีสัญญาณพัลส์ n^c เข้าสู่ระบบ ในการออกแบบครั้งที่ 2

บทที่ 6

สรุปและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 สำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม โดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งเป็นการหาตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มที่ทำให้ระบบวงปิดมีค่า norms H_2 น้อยที่สุด และตัวควบคุมสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล การออกแบบตัวควบคุมใช้เทคนิคการลืพล่วงเวลาเต็มหน่วย เพื่อให้ได้ระบบเวลาเต็มหน่วยไม่แปรผันตามเวลา ที่สอดคล้องกับพลาเน็ตหลายอัตราสุ่ม จากนั้นจึงแปลงปัญหาการควบคุมเหมาะสมที่สุดให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น จากคุณสมบัติความเป็นคอนเวกซ์ของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น แม้จะกำหนดโครงสร้างของตัวแปรในอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ความเป็นคอนเวกซ์ก็ไม่เสียไป เราจึงสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวได้ ด้วยวิธีการหาโปรแกรมเชิงคอนเวกซ์ และได้ส่วนป้อนผ่านของตัวควบคุมที่มีลักษณะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแบบบล็อก ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขความเป็นเหตุเป็นผล จากวิธีดังกล่าว เราได้นำมาออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่มกับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่มีข้อจำกัดในการชักตัวอย่างสัญญาณตำแหน่ง และมีพลวัตของสัญญาณควบคุมทั้งสองที่ไม่เท่ากัน เมื่อเปรียบเทียบผลการควบคุมของตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 และตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยว 7 - 7 - 7 และ 14 - 14 - 14 สำหรับปัญหาการควบคุมตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น ได้ผลว่าตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 ให้ผลการควบคุมที่ดีกว่าตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยวทั้งสอง คือทำให้สัญญาณตำแหน่งมีเวลาเข้าที่เร็ว และไม่มีส่วนพุงเกิน ส่วนขนาดของสัญญาณควบคุมทั้งสองก็ไม่เกินค่าพิคกิ้งที่กำหนดไว้ สำหรับปัญหาการควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน ที่เป็นสัญญาณพัลส์รบกวนความถี่การหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง และสัญญาณรบกวนขาารรบกวนการวัดสัญญาณตำแหน่ง ได้ผลว่าตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม 14 - 7 - 28 สามารถลดผลของสัญญาณรบกวนทั้งสองแบบ ได้ดีกว่าตัวควบคุมอัตราสุ่มเดี่ยวทั้งสอง คือทำให้พลังงานของสัญญาณตำแหน่ง เนื่องจากสัญญาณพัลส์ และความแปรปรวนเนื่องจากสัญญาณรบกวนขา มีค่าน้อยที่สุด และในตอนท้ายได้เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมหลายอัตราสุ่ม สำหรับระบบเซอร์โวขับเคลื่อนฮาร์ดดิสก์ ที่สามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงแบบขั้น และลดผลของสัญญาณรบกวน จะเห็นได้ว่า สัญญาณพัลส์ที่รบกวนความถี่การหมุนของมอเตอร์ขดลวดเสียง เป็นสัญญาณรบกวนที่มีผลต่อการควบคุมระบบมาก คือไม่สามารถออกแบบให้สัญญาณตำแหน่งมีเวลาเข้าที่เร็ว และลดผลของสัญญาณพัลส์ให้มีพลังงานตามที่กำหนดได้พร้อมกัน แต่เมื่อนำสัญญาณความถี่ที่วัดได้จากเครื่องวัดความถี่การหมุน มาเป็นสัญญาณวัดอีกตัวหนึ่ง จะให้ผลการควบคุมที่ดีกว่าเมื่อไม่มีการวัดสัญญาณความถี่การหมุน เนื่องจากผลของสัญญาณพัลส์จะลดลงอย่างรวดเร็ว และสามารถควบคุมสัญญาณตำแหน่งให้มีสมรรถนะตามต้องการได้

6.2 ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้ยังมีประเด็นที่น่าสนใจ เพื่อเป็นแนวทางในการวิจัยขั้นต่อไป ดังนี้

1. การพิจารณานอร์มของสัญญาณสมรรถนะในวิทยานิพนธ์นี้ พิจารณาจากสัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่อัตราสุ่มเร็ว เพื่อให้ใกล้เคียงกับสัญญาณเวลาต่อเนื่อง แต่ถ้าใช้การพิจารณาจากสัญญาณเวลาต่อเนื่องโดยตรง หรือที่เรียกว่าการพิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูล (sampled-data system) น่าจะทำให้การพิจารณานอร์มของสัญญาณสมรรถนะดีขึ้น
2. นอร์มของสัญญาณสมรรถนะที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้คือ นอร์ม H_2 ขั้นต่อไปอาจเพิ่มเติมการพิจารณาสมรรถนะของระบบด้วยนอร์มชนิดอื่น เช่น นอร์ม H_∞
3. ประยุกต์การควบคุมหลายอัตราสุ่มกับพลานต์จริง



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

1. T. Hagiwara and M. Araki, "Design of a stable state feedback controller based on the multirate sampling of the plant output," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, pp. 812–819, Sept. 1988.
2. M. Araki, T. Hagiwara, and H. Soma, "Application of multilevel multirate sampled-data controllers to simultaneous pole assignment problem," in *Proc. Conf. Decis. and Contr.*, vol. 2, pp. 1762–1767, Dec. 1992.
3. M. E. Sezer and D. D. Siljak, "Decentralized multirate control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 60–65, Jan. 1990.
4. H. M. Al-Rahmani and G. F. Franklin, "Multirate control: A new approach," *Automatica*, vol. 28, pp. 35–44, Jan. 1992.
5. A. K. Tangirala, D. Li, R. Patwardhan, S. L. Shah, and T. Chen, "Issues in multirate process control," in *Proc. Amer. Contr. Conf.*, vol. 4, pp. 2771–2775, June 1999.
6. D. Abramovitch and G. F. Franklin, "A brief history of disk drive control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, pp. 28–42, June 2002.
7. G. M. Kranc, "Input-output analysis of multirate feedback systems," *IRE Trans. Automat. Contr.*, vol. 3, pp. 21–28, 1957.
8. B. A. Bamieh, J. B. Pearson, B. A. Francis, and A. Tannenbaum, "A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control," *System Control Letter*, vol. 17, pp. 79–88, 1991.
9. M. Araki and K. Yamamoto, "Multivariable multirate sampled-data systems: State-space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31, pp. 145–154, Feb. 1986.
10. S. Longhi, "Structural properties of multirate sampled-data systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 692–696, Mar. 1994.
11. D. G. Meyer, "A parametrization of stabilizing controllers for multirate sampled-data systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 233–236, Feb. 1990.

12. T. Chen and L. Qiu, " \mathcal{H}_∞ design of general multirate sampled-data control systems," *Automatica*, vol. 30, pp. 1139–1152, July 1992.
13. D. G. Meyer, "Cost translation and a lifting approach to the multirate LQG problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 1411–1415, Sept. 1992.
14. M. F. Sægfors and H. T. Toivonen, " \mathcal{H}_∞ and LQG control of asynchronous sampled-data systems," *Automatica*, vol. 33, pp. 1663–1668, Sept. 1997.
15. C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, pp. 896–911, July 1997.
16. M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou, "An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems," in *Proc. Conf. Decis. and Contr.*, vol. 4, pp. 3611–3616, Dec. 1999.
17. P. G. Voulgaris, M. A. Dahleh, and L. S. Valavani, " \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 optimal controllers for periodic and multirate systems," *Automatica*, vol. 30, pp. 251–263, Feb. 1994.
18. L. Qiu and T. Chen, " \mathcal{H}_2 -optimal design of multirate sampled-data systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 2506–2511, Dec. 1994.
19. H. Shu and T. Chen, "State-space approach to discrete-time \mathcal{H}_2 -optimal control with a causality constraint," in *Proc. Conf. Decis. and Contr.*, vol. 2, pp. 1927–1932, Dec. 1995.
20. K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, 1998.
21. G. E. Dullerud and F. Paganini, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Springer-Verlag, 2000.
22. T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*. Springer-Verlag, 1995.
23. C. M. Kozierok, *PCGuide - Reference Guide - Hard Disk Drives* [Online], 1997. Available from: <http://www.pcguides.com/ref/hdd/index.htm>[2002, December 24].
24. R. B. Evans and J. S. Griesbach, "Piezoelectric microactuator for dual stage control," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 35, pp. 977–982, Mar. 1999.
25. S. H. Lee, Y. H. Kim, and S. E. Baek, "Modeling and control of a dual-stage actuator for hard disk drive servo systems," in *Proc. Amer. Contr. Conf.*, vol. 6, pp. 4254–4258, June 2000.

26. S. H. Lee, Y. H. Kim, and C. C. Chung, "Dual-stage actuator disk drives for improved servo performance: track follow, track seek, and settle," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 37, pp. 1887–1890, July 2001.
27. G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, 1998.
28. D. G. Meyer, "A new class of shift-varying operators, their shift-invariant equivalents, and multirate digital systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 429–433, Apr. 1990.
29. P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB*. The Mathworks, 1995.
30. A. Saberi, P. Sannuti, and B. M. Chen, *H_2 Optimal Control*. Prentice-Hall, 1995.



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

การลิฟต์เวลาเต็มหน่วย

เทคนิคการลิฟต์เป็นเทคนิคหนึ่งที่สามารถแปลงระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ (periodically time-varying system) ให้เป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา (time-variant system) ระบบหลายอัตราสุ่ม ซึ่งเป็นระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบนี้ จึงสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในระบบไม่แปรผันตามเวลาได้ ทำให้การวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมทำได้ง่ายขึ้น

ก.1 การลิฟต์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย

แนวคิดในการลิฟต์สัญญาณเวลาเต็มหน่วยคือ การรวมสัญญาณเวลาเต็มหน่วยให้เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณ โดยที่เวกเตอร์นี้จะประกอบด้วยสัญญาณเวลาเต็มหน่วยภายในหนึ่งคาบเวลาใหญ่ที่เป็นจำนวนเท่าของคาบเวลาเดิม พิจารณาสัญญาณเวลาเต็มหน่วย y ที่มีคาบเวลาเป็น τ

$$y = \{\dots, y(-\tau), y(0), y(\tau), \dots\} \quad (ก.1)$$

ลิฟต์สัญญาณ y นี้ด้วยคาบเวลา $\gamma\tau$ จะได้สัญญาณที่ลิฟต์แล้ว \underline{y} เป็น

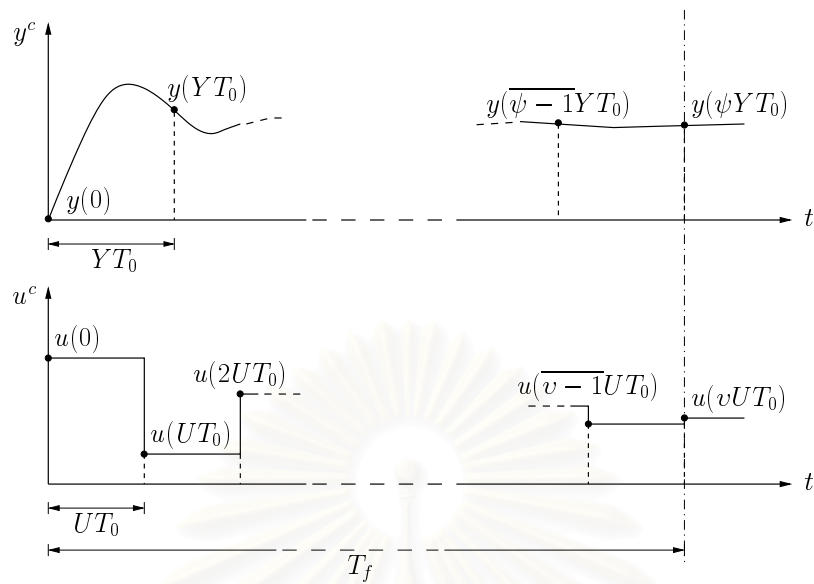
$$\underline{y} = \left\{ \dots, \begin{bmatrix} y(-\gamma\tau) \\ y(-\gamma + 1\tau) \\ \vdots \\ y(-\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(0) \\ y(\tau) \\ \vdots \\ y(\gamma - 1\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(\gamma\tau) \\ y(\gamma + 1\tau) \\ \vdots \\ y(2\gamma - 1\tau) \end{bmatrix}, \dots \right\} \quad (ก.2)$$

จะเห็นว่าสัญญาณ \underline{y} ที่ลิฟต์แล้วนี้จะมีคาบเวลาใหม่เป็น $\gamma\tau$ ในที่นี้จะนิยามให้ L_γ เป็นตัวดำเนินการการลิฟต์ (lifting operator) ของสัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่มีคาบเป็น γ เท่าของคาบเวลาเดิม และตัวดำเนินการการลิฟต์ผกผัน (inverse lifting operator) ของ L_γ คือ L_γ^{-1} ดังแสดงในรูปที่ ก.1 [22]

ในกรณีที่สัญญาณเวลาเต็มหน่วยประกอบด้วยหลายสัญญาณย่อย แต่ละสัญญาณย่อยมีคาบเวลาที่ไม่เท่ากัน ก็สามารถทำการลิฟต์ได้ โดยเวกเตอร์ของสัญญาณที่ได้จะเรียงตามลำดับสัญญาณที่เกิดก่อนหลัง ดังตัวอย่าง



รูปที่ ก.1: บล็อกไดอะแกรมของตัวดำเนินการการลิฟต์และตัวดำเนินการการลิฟต์ผกผัน



รูปที่ ก.2: ลักษณะของสัญญาณเข้าและสัญญาณออกในระบบหลายอัตราสุ่ม

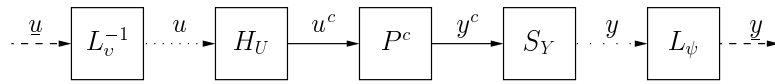
ตัวอย่าง ก.1 สัญญาณ y ประกอบด้วย 2 สัญญาณย่อยคือ y_1 และ y_2 โดยที่คาบของสัญญาณแรกเป็น 2 วินาที และคาบของสัญญาณที่สองเป็น 3 วินาที ทำการลิฟต์สัญญาณ y ด้วยคาบเวลา 6 วินาทีที่จะได้ว่า

$$y = \left\{ \begin{bmatrix} y_1(6h) \\ y_2(6h) \\ y_1(6h+2) \\ y_2(6h+3) \\ y_1(6h+4) \end{bmatrix} ; h \in \mathbb{Z} \right\}$$

◇

ก.2 การลิฟต์ระบบเวลาเต็มหน่วย

พิจารณาส่วนของระบบควบคุมหลายอัตราสุ่มที่ประกอบด้วย ตัวคงค่า (H_U) พลาเน็ตเวลาต่อเนื่อง (P^c) และตัวชักตัวอย่าง (S_Y) โดยคาบการชักตัวอย่างและการคงค่าไม่เท่ากัน สัญญาณของพลาเน็ตจะมีลักษณะดังรูปที่ ก.2 จากรูปสัญญาณเวลาต่อเนื่อง y^c และ u^c เป็นสัญญาณออกและสัญญาณเข้าของพลาเน็ตตามลำดับ สัญญาณเวลาเต็มหน่วย y ถูกชักตัวอย่างมาจากสัญญาณ y^c ด้วยคาบการชักตัวอย่าง YT_0 และสัญญาณเวลาเต็มหน่วย u คือสัญญาณที่ถูกคงค่าเป็นสัญญาณ u^c ด้วยคาบการคงค่า UT_0 เมื่อ $Y, U \in \mathbb{Z}^+$ และ T_0 เรียกว่าคาบเวลาฐาน (base period) กำหนดให้ T_f คือคาบเวลารอบ (frame period) ซึ่งเป็นคาบเวลาที่ทำให้จังหวะการชักตัวอย่างและการคงค่าวนกลับมาเริ่มพร้อมกันอีกครั้งหนึ่ง จะมีค่าเท่ากับ μT_0 เมื่อ μ คือตัวคูณร่วมน้อยของ Y และ U ทั้งหมด ดังนั้นจำนวนการชักตัวอย่างของสัญญาณออกภายในหนึ่งคาบเวลารอบจึงเท่ากับ $\psi = \frac{\mu}{Y}$ และจำนวนการคงค่าของสัญญาณเข้าภายในหนึ่งคาบเวลารอบเท่ากับ $v = \frac{\mu}{U}$



รูปที่ ก.3: บล็อกไดอะแกรมของการลิฟต์ระบบหลายอัตราสุ่ม

จากระบบหลายอัตราสุ่มที่กล่าวมา ทำการลิฟต์สัญญาณทั้งหมดภายในคาบเวลากรอบ นั่นคือลิฟต์สัญญาณออกด้วยตัวดำเนินการ L_ψ และลิฟต์สัญญาณเข้าด้วยตัวดำเนินการ L_v ได้เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณ \underline{y} และ \underline{u} ดังสมการ

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \left\{ \dots, \begin{bmatrix} y(-\psi Y T_0) \\ y(-\psi + 1 Y T_0) \\ \vdots \\ y(-Y T_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(0) \\ y(Y T_0) \\ \vdots \\ y(\psi - 1 Y T_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(\psi Y T_0) \\ y(\psi + 1 Y T_0) \\ \vdots \\ y(2\psi - 1 Y T_0) \end{bmatrix}, \dots \right\} \\ &= \{ \dots, \underline{y}(-T_f), \underline{y}(0), \underline{y}(T_f), \dots \} \\ &= \{ \dots, \underline{y}[-1], \underline{y}[0], \underline{y}[1], \dots \} \end{aligned} \quad (\text{ก.3})$$

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \left\{ \dots, \begin{bmatrix} u(-v U T_0) \\ u(-v + 1 U T_0) \\ \vdots \\ u(-U T_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(0) \\ u(U T_0) \\ \vdots \\ u(v - 1 U T_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(v U T_0) \\ u(v + 1 U T_0) \\ \vdots \\ u(2v - 1 U T_0) \end{bmatrix}, \dots \right\} \\ &= \{ \dots, \underline{u}(-T_f), \underline{u}(0), \underline{u}(T_f), \dots \} \\ &= \{ \dots, \underline{u}[-1], \underline{u}[0], \underline{u}[1], \dots \} \end{aligned} \quad (\text{ก.4})$$

จะเห็นว่า \underline{y} และ \underline{u} เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณที่มีคาบเวลาเท่ากันคือ T_f ดังนั้นระบบที่มีเวกเตอร์ของสัญญาณดังกล่าวจะเป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา ลักษณะการลิฟต์ระบบหลายอัตราสุ่มแสดงได้ดังรูปที่ ก.3

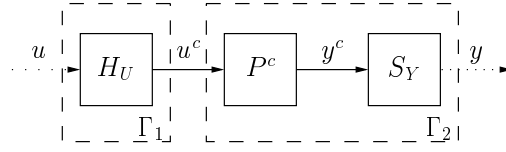
ระบบหลายอัตราสุ่มสามารถหาสมการสถานะในรูปของระบบไม่แปรผันตามเวลาได้ โดยแปลงระบบหลายอัตราสุ่มให้อยู่ในรูประบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบก่อน [28] จากนั้นจึงแปลงระบบที่แปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบให้เป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา [10]

ก.2.1 การแปลงระบบหลายอัตราสุ่มเป็นระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ

พิจารณาพลาเน็ตที่เป็นระบบเวลาต่อเนื่องเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา P^c ซึ่งอธิบายด้วยสมการ

$$\begin{aligned} \dot{x}^c(t) &= A^c x^c(t) + B^c u^c(t) \\ y^c(t) &= C^c x^c(t) + D^c u^c(t) \end{aligned} \quad (\text{ก.5})$$

เมื่อ $x^c \in \mathbb{R}^n$, $u^c \in \mathbb{R}^p$ และ $y^c \in \mathbb{R}^q$ ทำการควบคุมหลายอัตราสุ่ม โดยกำหนดให้คาบการซีกตัวอย่างสัญญาณออกแต่ละตัว y_i^c เป็น $Y_i T_0$ ($i = 1, 2, \dots, q$) และคาบการคงค่าสัญญาณเข้าแต่ละตัว u_j^c เป็น



รูปที่ ก.4: การพิจารณาระบบหลายอัตราสุ่ม

$U_j T_0$ ($j = 1, 2, \dots, p$) โดยที่ $Y_i, U_j \in \mathbb{Z}^+$ และ T_0 คือคาบเวลาฐาน จะได้คาบเวลารอบ $T_f = \mu T_0$ โดยที่ μ เป็นตัวคูณร่วมน้อยของ Y_i และ U_j ทั้งหมด จำนวนการซีกตัวอย่างสัญญาณออกแต่ละตัวภายในหนึ่งคาบเวลารอบเป็น $\psi_i = \frac{\mu}{Y_i}$ และจำนวนการคงค่าสัญญาณเข้าแต่ละตัวภายในหนึ่งคาบเวลารอบเป็น $\nu_j = \frac{\mu}{U_j}$

เพื่อการหาแบบจำลอง อาจมองได้ว่าระบบหลายอัตราสุ่มประกอบด้วยระบบเวลาแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ 2 ระบบคือ Γ_1 และ Γ_2 เรียงต่อกันดังรูปที่ ก.4

ระบบ Γ_1 เป็นระบบของตัวคงค่าอันดับศูนย์ (zeroth-order holder) ที่คงค่าสัญญาณเข้าภายในคาบการคงค่า มีสมการสถานะที่ทุกๆ เวลา T_0 เป็น

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1T_0) &= (I - H_k)\bar{x}(kT_0) + H_k u(kT_0) \\ u^c(kT_0) &= (I - H_k)\bar{x}(kT_0) + H_k u(kT_0) \end{aligned} \quad (\text{ก.6})$$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$ เวกเตอร์ $\bar{x}, u \in \mathbb{R}^p$ และ H_k เป็นเมทริกซ์ที่มีนิยามว่า

$$H_k \triangleq \text{diag}\{\eta_j(k)\}$$

โดย

$$\eta_j(k) \triangleq \begin{cases} 1, & k = lU_j \\ 0, & k \neq lU_j \end{cases}; \quad l \in \mathbb{Z}; \quad j = 1, \dots, p$$

ส่วนระบบ Γ_2 ซึ่งเป็นพลาเน็ตที่ถูกซีกตัวอย่างสัญญาณออกทุกๆ คาบการซีกตัวอย่าง มีสมการสถานะที่ทุกๆ เวลา T_0 เป็น

$$\begin{aligned} x^c(k+1T_0) &= A^d x^c(kT_0) + B^d u^c(kT_0) \\ y(kT_0) &= S_k C^c x^c(kT_0) + S_k D^c u^c(kT_0) \end{aligned} \quad (\text{ก.7})$$

เมื่อ

$$A^d \triangleq e^{A^c T_0}, \quad B^d \triangleq \int_0^{T_0} e^{A^c(T_0-\tau)} d\tau B^c$$

และ

$$S_k \triangleq \text{diag}\{\sigma_i(k)\}$$

โดย

$$\sigma_i(k) \triangleq \begin{cases} 1, & k = lY_i \\ 0, & k \neq lY_i \end{cases}; \quad l \in \mathbb{Z}; \quad i = 1, \dots, q$$

ดังนั้นจะได้ \dot{P} ซึ่งคือระบบ Γ_1 และ Γ_2 เรียงต่อกัน มีสมการสถานะเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}(k+1T_0) &= \dot{A}_k \dot{x}(kT_0) + \dot{B}_k u(kT_0) \\ y(kT_0) &= \dot{C}_k \dot{x}(kT_0) + \dot{D}_k u(kT_0) \end{aligned} \quad (\text{ก.8})$$

เมื่อ $\hat{x}(kT_0) \triangleq [\bar{x}^T(kT_0) \quad x^{cT}(kT_0)]^T \in \mathbb{R}^{p+n}$ และ เมทริกซ์ $\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k$ และ \hat{D}_k เป็น

$$\begin{aligned} \hat{A}_k &= \begin{bmatrix} I - H_k & 0 \\ B^d(I - H_k) & A^d \end{bmatrix}, & \hat{B}_k &= \begin{bmatrix} H_k \\ B^d H_k \end{bmatrix} \\ \hat{C}_k &= \begin{bmatrix} S_k D^c(I - H_k) & S_k C^c \end{bmatrix}, & \hat{D}_k &= S_k D^c H_k \end{aligned} \quad (ก.9)$$

จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ $\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k$ และ \hat{D}_k จะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปทุกๆ ครั้ง แต่มีลักษณะซ้ำเดิมเมื่อครบ μ ครั้ง คือทุกๆ คาบเวลา T_f ระบบ \hat{P} นี้ จะเป็นระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ ซึ่งมีคาบเท่ากับ μ

ตัวอย่าง ก.2 ระบบเวลาต่อเนื่องที่มีสมการสถานะเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}^c(t) &= u^c(t) \\ y^c(t) &= x^c(t) \end{aligned}$$

ทำการควบคุมหลายอัตราสุ่ม โดยให้คาบการซิกตัวอย่างสัญญาณออกเป็น 1.5 วินาที และคาบการคงค่าสัญญาณเข้าเป็น 1 วินาที ทำให้ $T_0 = 0.5$ วินาที, $Y = 3$, $U = 2$ และ $\mu = 6, \psi = 2, v = 3$ หาก H_k และ S_k ที่สอดคล้อง จะได้ว่า $H_0 = H_2 = H_4 = 1, H_1 = H_3 = H_5 = 0$ และ $S_0 = S_3 = 1, S_1 = S_2 = S_4 = S_5 = 0$ เมื่อหาระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบตามสมการที่ (ก.8) จะได้สมการสถานะของระบบหลายอัตราสุ่มที่ทุกๆ 0.5 วินาที และจะมีค่าซ้ำเดิมเมื่อครบ 3 วินาที หรือทุกๆ 6 ครั้ง ดังตารางที่ ก.1 \diamond

ตารางที่ ก.1: เมทริกซ์ $\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k, \hat{D}_k$ แต่ละครั้งของระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ

k	0	1	2	3	4	5
\hat{A}_k	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$
\hat{B}_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
\hat{C}_k	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$
\hat{D}_k	0	0	0	0	0	0

ก.2.2 การแปลงระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบเป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา

ระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบสามารถแปลงให้อยู่ในรูประบบไม่แปรผันตามเวลาได้ โดยรวมเอาสัญญาณเข้า และสัญญาณออกภายในหนึ่งคาบเวลากรอบ เรียงให้เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณนั้นๆ ส่วนขนาดของเมทริกซ์ B, C และ D ก็จะมีขนาดใหญ่ขึ้น จากระบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ ในสมการที่ (ก.8) สามารถแปลงเป็นระบบไม่แปรผันตามเวลาได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} x^{\text{TI}}[h+1] &= A^{\text{TI}}x^{\text{TI}}[h] + B^{\text{TI}}\underline{u}[h] \\ \underline{y}[h] &= C^{\text{TI}}x^{\text{TI}}[h] + D^{\text{TI}}\underline{u}[h] \end{aligned} \quad (ก.10)$$

เมื่อ $h \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $x^{\text{TI}}[h] \triangleq \dot{x}(\mu h T_0)$,

$$\underline{y}[h] \triangleq \begin{bmatrix} y(\mu h T_0) \\ y(\overline{\mu h + 1 T_0}) \\ \vdots \\ y(\overline{\mu h + \mu - 1 T_0}) \end{bmatrix}, \quad \underline{u}[h] \triangleq \begin{bmatrix} u(\mu h T_0) \\ u(\overline{\mu h + 1 T_0}) \\ \vdots \\ u(\overline{\mu h + \mu - 1 T_0}) \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{aligned} A^{\text{TI}} &= \prod_{k=0}^{\mu-1} (\dot{A}_k), & B^{\text{TI}} &= \begin{bmatrix} \prod_{k=1}^{\mu-1} (\dot{A}_k) \dot{B}_0 & \cdots & \dot{A}_{\mu-1} \dot{B}_{\mu-2} & \dot{B}_{\mu-1} \end{bmatrix}, \\ C^{\text{TI}} &= \begin{bmatrix} \dot{C}_0 \\ \dot{C}_1 \dot{A}_0 \\ \vdots \\ \dot{C}_{\mu-1} \prod_{k=0}^{\mu-2} (\dot{A}_k) \end{bmatrix}, & D^{\text{TI}} &= \begin{bmatrix} \dot{D}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dot{C}_1 \dot{B}_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \dot{C}_{\mu-1} \prod_{k=1}^{\mu-2} (\dot{A}_k) \dot{B}_0 & \cdots & \dot{C}_{\mu-1} \dot{B}_{\mu-2} & \dot{D}_{\mu-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{ก.11})$$

ดังนั้นระบบหลายอัตราสุ่มที่อยู่ในรูประบบแปรผันตามเวลาแบบเป็นคาบ สามารถแปลงให้อยู่ในรูประบบไม่แปรผันตามเวลา (P^{TI}) ได้

ตัวอย่าง ก.3 จากระบบหลายอัตราสุ่มในตัวอย่างที่ ก.2 สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของระบบไม่แปรผันตามเวลาเป็น

$$\begin{aligned} x^{\text{TI}}[h+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^{\text{TI}}[h] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{u}[h] \\ \underline{y}[h] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^{\text{TI}}[h] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{u}[h] \end{aligned}$$

โดยที่ $x^{\text{TI}}[h] = \dot{x}(3h)$,

$$\underline{y}[h] = \begin{bmatrix} y(3h) \\ y(3h + 0.5) \\ \vdots \\ y(3h + 2.5) \end{bmatrix}, \quad \underline{u}[h] = \begin{bmatrix} u(3h) \\ u(3h + 0.5) \\ \vdots \\ u(3h + 2.5) \end{bmatrix}$$

◇

ข้อสังเกต

1. ถ้าพิจารณาระบบไม่แปรผันตามเวลาที่สอดคล้องกับระบบแปรผันตามเวลา Γ_1 และ Γ_2 (Γ_1^{TI} และ Γ_2^{TI} ตามลำดับ) ตามวิธีข้างต้น โดยมีผลสัมฤทธิ์ (realization) ของระบบเป็น $\{A_1^{\text{TI}}, B_1^{\text{TI}}, C_1^{\text{TI}}, D_1^{\text{TI}}\}$ และ $\{A_2^{\text{TI}}, B_2^{\text{TI}}, C_2^{\text{TI}}, D_2^{\text{TI}}\}$ ตามลำดับ จะได้ $A_1^{\text{TI}} = 0$, $C_1^{\text{TI}} = 0$ และ $A_2^{\text{TI}} = e^{A^c T_f}$ ระบบ P^{TI} ซึ่งคือระบบ Γ_1^{TI} และ Γ_2^{TI} เรียงต่อกัน จะได้

$$A^{\text{TI}} = \begin{bmatrix} A_1^{\text{TI}} & 0 \\ B_2^{\text{TI}} C_1^{\text{TI}} & A_2^{\text{TI}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{A^c T_f} \end{bmatrix}$$

นั่นคือระบบ P^{TI} จะมีค่าเจาะจง (eigenvalue) เป็น 0 จำนวน p ตัว และอีก n ตัว เป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $e^{A^c T_f}$

- เมทริกซ์ C^{TI} มี p หลักแรกที่เป็นศูนย์เสมอ และเมื่อค่านอกแนวทแยง (off-diagonal) ของเมทริกซ์ A^{TI} มีค่าเป็น 0 ทำให้สถานะของระบบ P^{TI} ที่ p สถานะแรก ไม่สามารถสังเกตได้
- จะเห็นว่าในช่วงที่สัญญาณออกไม่ได้ถูกช้กตัวอย่าง แลวของเมทริกซ์ C^{TI} และ D^{TI} ในช่วงนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อสัญญาณเข้าอยู่ในระหว่างช่วงคงค่า หลักของเมทริกซ์ B^{TI} และ D^{TI} ในช่วงนั้นก็จะมีค่าเป็นศูนย์

จากข้อสังเกตทั้งสามทำให้เราสามารถลดอันดับ (order) ของระบบ P^{TI} ให้เหลือเป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา \underline{P} ที่มีอันดับเท่ากับ n คือ

$$\begin{aligned} x[h+1] &= A x[h] + B u[h] \\ y[h] &= C x[h] + D u[h] \end{aligned} \quad (\text{ก.12})$$

เมื่อ $A = e^{A^c T_f}$

B คือ B^{TI} ที่ตัด p แถวแรก และหลักที่ r เมื่อ $r-1 \neq lU_j, l \in \mathbb{Z}; j=1, \dots, p$

C คือ C^{TI} ที่ตัด p หลักแรก และแถวที่ s เมื่อ $s-1 \neq lY_i, l \in \mathbb{Z}; i=1, \dots, q$

D คือ D^{TI} ที่ตัดหลักที่ r และแถวที่ s ตามหลักของ B^{TI} และแถวของ C^{TI} ที่ถูกตัดไป

โดยที่ $x[h] = x^c(\mu h T_0) \in \mathbb{R}^n$

\underline{u} คือ \underline{u} ที่ตัด u_j ในระหว่างช่วงการคงค่า ($\underline{u} = L_v u$)

\underline{y} คือ \underline{y} ที่ตัด y_i ในช่วงที่ไม่ได้ถูกช้กตัวอย่าง ($\underline{y} = L_\psi y$)

ซึ่งระบบ \underline{P} ที่ได้ จะเป็นระบบไม่แปรผันตามเวลาที่มีสัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นเวกเตอร์ของสัญญาณนั้นๆ ที่ผ่านการลิฟต์แล้ว นั่นคือ

$$\underline{P} = L_\psi S_Y P^c H_U L_v^{-1} \quad (\text{ก.13})$$

และเนื่องจากระบบหลายอัตราสุ่มที่ลิฟต์แล้ว เป็นระบบไม่แปรผันตามเวลา จึงสามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ถ่ายโอน (transfer matrix) ได้คือ

$$\hat{P}[z] = D + C(zI - A)^{-1} B \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (\text{ก.14})$$

ตัวอย่าง ก.4 จากตัวอย่างที่ ก.2 จะเห็นว่าเราสามารถลดรูปให้เหลือระบบไม่แปรผันตามเวลาอันดับต่ำสุดได้ว่า

$$\begin{aligned} x[h+1] &= x[h] + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u[h] \\ y[h] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x[h] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} u[h] \end{aligned}$$

โดยที่ $x[h] = x^c(3h)$,

$$y[h] = L_2 y = \begin{bmatrix} y(3h) \\ y(3h+1.5) \end{bmatrix}, \quad u[h] = L_3 u = \begin{bmatrix} u(3h) \\ u(3h+1) \\ u(3h+2) \end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์ถ่ายโอนของระบบหลายอัตราสุ่มที่ลิฟต์แล้วคือ

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{z-1} & \frac{1}{z-1} \\ z & 0.5(z+1) & 1 \\ z-1 & z-1 & z-1 \end{bmatrix}$$

◇



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ปัญหาในทฤษฎีควบคุมหลายๆ ปัญหา สามารถแปลงให้เป็นปัญหาเชิงคอนเวกซ์ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequality) ได้ เช่นการหาคำตอบของอสมการเลียปูนอฟ การออกแบบตัวควบคุมที่มีโครงสร้าง หรือการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด ปัญหาที่อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นนี้จะสามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีคอนเวกซ์โปรแกรมมิ่ง (convex programming) ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้การคำนวณจากคอมพิวเตอร์ ดังนั้นวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงเหมาะสำหรับการออกแบบตัวควบคุมที่มีเงื่อนไขมาก เช่นการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบหลายอัตราส่วน

ข.1 รูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMI) เป็นอสมการของตัวแปรสเกลาร์ (scalar variable) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) มีรูปแบบมาตรฐานคือ [29]

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0 \quad (\text{ข.1})$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^m$ เป็นตัวแปรของอสมการ และ F_0, \dots, F_m เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่กำหนดให้ สัญลักษณ์ " < 0 " แทนความหมายของเมทริกซ์แน่นอนค่าลบ (negative definite matrix)

โดยปกติ ปัญหาที่เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจะไม่ได้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานดังอสมการที่ (ข.1) กล่าวคือตัวแปรของอสมการจะไม่ได้เป็นตัวแปรสเกลาร์ แต่จะอยู่ในรูปของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น อสมการเลียปูนอฟเวลาต่อเนื่อง (continuous-time Lyapunov inequality)

$$AX + XA^T < 0 \quad (\text{ข.2})$$

สมมุติว่า $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ต้องการหาเมทริกซ์สมมาตร $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ ที่สอดคล้องกับอสมการ เมื่อแยกเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งสามจะได้ว่า

$$x_1 \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{ข.3})$$

จะเห็นว่าปัญหาดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ หรืออีกตัวอย่างหนึ่งคือ อสมการเลียปูนอฟเวลาเต็มหน่วย (discrete-time Lyapunov inequality)

$$AXA^T + X < 0 \quad (\text{ข.4})$$

ก็สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้เช่นกัน

สังเกตว่าถ้าเราต้องการกำหนดโครงสร้างบางอย่างของเมทริกซ์ตัวแปร เช่นในตัวอย่างแรก ถ้าต้องการคำตอบของอสมการที่เป็นเมทริกซ์แนวทแยง (diagonal matrix) พจน์ของตัวแปร x_2 ก็จะหายไป ปัญหานี้ก็ยังคงเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นอยู่

พิจารณาความเป็นคอนเวกซ์ (convexity) ของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น กำหนดให้ x และ $y \in \mathbb{R}^m$ เป็นตัวแปรที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น $F(x) < 0$ และ $F(y) < 0$ และให้ $\lambda \in (0, 1)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1-\lambda)y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)F_i \\ &= \lambda F_0 + (1-\lambda)F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i \\ &= \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) < 0 \end{aligned}$$

นั่นคืออสมการเมทริกซ์เชิงเส้นนี้เป็นคอนเวกซ์ ซึ่งคุณสมบัตินี้เป็นคุณสมบัติสำคัญในการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ข.2 ลักษณะของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่พบโดยทั่วไปสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ลักษณะดังนี้ [29]

1. ปัญหาการหาคำตอบของที่สอดคล้อง (feasibility problem) กับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$F(x) < 0 \tag{ข.5}$$

2. ปัญหาการหาค่าต่ำสุด (minimization problem) สำหรับฟังก์ชันเชิงเส้นที่กำหนดให้ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & F(x) < 0 \end{aligned} \tag{ข.6}$$

3. ปัญหาการหาค่าต่ำสุดของค่าเจาะจงทั่วไป (generalized eigenvalue minimization problem) สำหรับเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{subject to} \quad & A(x) < \lambda B(x), \\ & B(x) > 0 \\ & C(x) < 0 \end{aligned} \tag{ข.7}$$

เนื่องจากความเป็นคอนเวกซ์ของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ทำให้ปัญหาดังกล่าวสามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีคอนเวกซ์โปรแกรมมิ่ง (convex programming) และในปัญหาการหาค่าต่ำสุดดังปัญหาที่ (ข.6) และ (ข.7) คำตอบที่ได้จะสามารถยืนยันได้ว่าเป็นค่าต่ำสุดทั่วไป (global minimizer)

ภาคผนวก ค

ปัญหาเฉพาะของการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 และความเป็น เอกลักษณ์ของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2

ในการวัดสมรรถนะของระบบ หลายๆ ครั้งเราต้องการให้สัญญาณออกที่ใช้ในการวัดสมรรถนะมีค่าน้อยๆ เมื่อมีสัญญาณเข้าจากภายนอก นอร์ม H_2 จึงเป็นตัววัดสมรรถนะของระบบที่เหมาะสมตัวหนึ่ง เนื่องจากความหมายของนอร์ม H_2 สัมพันธ์กับสมรรถนะของระบบ ความหมายแรกคือเป็นการวัดพลังงานของสัญญาณออกเมื่อมีสัญญาณเข้าเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย (unit impulse function) ความหมายที่สองคือเป็นการวัดค่าความแปรปรวนของสัญญาณออกเมื่อมีสัญญาณเข้าเป็นสัญญาณรบกวนขาวหนึ่งหน่วย (unit white noise) ในที่นี้จะกล่าวถึงการแปลงปัญหาการควบคุมที่ต้องการ ให้เป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2 ซึ่งอยู่ในรูปแบบการควบคุมย่นทั่วไป (general control configuration) ดังรูปที่ ค.1 ปัญหาดังกล่าวประกอบไปด้วยปัญหาการปรับแก้สถานะเริ่มต้น ปัญหาการลดผลของสัญญาณรบกวน และปัญหาการปรับแก้สถานะเริ่มต้นที่ลดผลของสัญญาณรบกวน และในตอนท้ายจะกล่าวถึงความเป็นเอกลักษณ์ของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด H_2

ค.1 ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมปรับแก้สถานะเริ่มต้น

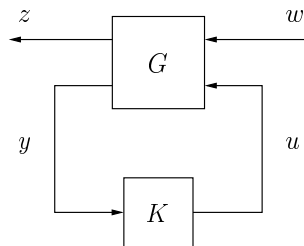
พิจารณาพลาเน็ตที่มีสมการสถานะเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \quad (\text{ค.1})$$

และ $x(0) = x_0$ ต้องการออกแบบตัวควบคุม $u = Ky$ ที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์

$$J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) dt \quad (\text{ค.2})$$

มีค่าต่ำสุด โดยที่ Q เป็นเมทริกซ์กึ่งแน่นอนค่าบวก (positive semidefinite matrix) และ R เป็นเมทริกซ์แน่นอนค่าบวก (positive definite matrix)



รูปที่ ค.1: รูปแบบการควบคุมย่นทั่วไป

ก่อนการแปลงปัญหาเป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 จะต้องรวมเงื่อนไขสถานะเริ่มต้นเข้ากับสมการสถานะก่อน กำหนดให้ $\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย สมการที่ (ค.1) จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + x_0\delta(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \quad (\text{ค.3})$$

โดยที่ $x(t) = 0$ เมื่อ $t < 0$ และกำหนดให้

$$C_1 \triangleq \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

โดยนิยามให้ $M = (M^{\frac{1}{2}})^T M^{\frac{1}{2}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^T Q x + u^T R u &= \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= z^T z \end{aligned}$$

โดยที่ $z(t) \triangleq C_1 x(t) + D_{12} u(t)$ ดังนั้นฟังก์ชันจุดประสงค์ในสมการที่ (ค.2) จะเป็น

$$J = \int_0^{\infty} z^T(t) z(t) dt = \|z\|_2^2 \quad (\text{ค.4})$$

นั่นคือเป็นการออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ نرمสองของผลตอบอิมพัลส์ของระบบวงปิดมีค่าต่ำสุด โดยที่ฟังก์ชันถ่ายโอนของพลานต์นัยทั่วไป (generalized plant) G คือ

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|cc} A & x_0 & B_2 \\ \hline \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ \hline C_2 & 0 & D_{22} \end{array} \right] \quad (\text{ค.5})$$

ค.2 ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเพื่อลดผลของสัญญาณรบกวน

พิจารณาพลานต์ที่มีสมการสถานะเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_d d(t) + B_2 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + n(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad (\text{ค.6})$$

โดยที่ d และ n เป็นสัญญาณรบกวนที่มีค่าความแปรปรวนเป็น

$$E \left\{ \begin{bmatrix} d(t+\tau) \\ n(t+\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^T(t) & n^T(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} S_d \delta(\tau) & 0 \\ 0 & S_n \delta(\tau) \end{bmatrix} \triangleq S_w \delta(\tau)$$

เมื่อ S_d , S_n และ S_w เป็นเมทริกซ์แนวทแยง และ $w^T = [d^T \quad n^T]$ ต้องการออกแบบตัวควบคุม $u = Ky$ ที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{trace} \{ E [z(t) z^T(t)] \} \quad (\text{ค.7})$$

มีค่าต่ำสุด โดยนิยามให้ $z(t) \triangleq C_1 x(t)$

เราสามารถแปลงเป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 ได้โดยกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} d(t) \\ n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_d^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & S_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ n_1(t) \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่าเวกเตอร์ของสัญญาณ $w_1^T = [d_1^T \quad n_1^T]$ เป็นสัญญาณรบกวนขาวหนึ่งหน่วย กำหนดให้ T_{zw} คือระบบควบคุมวงปิดจาก w ไป z และ T_{zw_1} คือระบบควบคุมวงปิดจาก w_1 ไป z ดังนั้นฟังก์ชันจุดประสงค์ในสมการที่ (ค.7) จะเป็น

$$\begin{aligned} J &= \text{trace} \{ E [z(t)z^T(t)] \} \\ &= \text{trace} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}_{zw}(j\omega) S_w \hat{T}_{zw}^*(j\omega) d\omega \right\} \\ &= \text{trace} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}_{zw_1}(j\omega) \hat{T}_{zw_1}^*(j\omega) d\omega \right\} \\ &= \|\hat{T}_{zw_1}\|_2^2 \end{aligned}$$

โดยที่ฟังก์ชันถ่ายโอนของพลาตันนี้ทั่วไป G คือ

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} A & \begin{bmatrix} B_d S_d^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & B_2 \\ C_1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C_2 & \begin{bmatrix} 0 & S_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{ค.8})$$

ค.3 ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมปรับแก้สถานะเริ่มต้นที่ลดผลของสัญญาณรบกวน

พิจารณาพลาตันที่มีสมการสถานะเป็น

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_d d(t) + B_2 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + n(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad (\text{ค.9})$$

โดย $x(0) = x_0$, d และ n เป็นสัญญาณรบกวนที่มีค่าความแปรปรวนเป็น

$$E \left\{ \begin{bmatrix} d(t+\tau) \\ n(t+\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^T(t) & n^T(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} S_d \delta(\tau) & 0 \\ 0 & S_n \delta(\tau) \end{bmatrix}$$

เมื่อ S_d และ S_n เป็นเมทริกซ์แนวทแยง ต้องการออกแบบตัวควบคุม $u = Ky$ ที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] \quad (\text{ค.10})$$

มีค่าต่ำสุด โดยที่ Q เป็นเมทริกซ์กึ่งแน่นอนค่าบวก และ R เป็นเมทริกซ์แน่นอนค่าบวก

จากปัญหาดังกล่าวเราสามารถแปลงเป็นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 ได้ โดยการพิจารณาปัญหาการปรับแก้สถานะและปัญหาการลดผลของสัญญาณรบกวนรวมกัน นั่นคือเป็นการออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ค่าความแปรปรวนของสัญญาณ z ต่ำสุด โดยที่

$$z(t) \triangleq \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} u(t)$$

ซึ่งฟังก์ชันถ่ายโอนของพลาเน็ตนี้ทั่วไป G คือ

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|cc} A & \begin{bmatrix} x_0 & B_d S_d^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & B_2 \\ \hline \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ C_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} & D_{22} \end{array} \right] \quad (\text{ค.11})$$

ค.4 ความเป็นเอกฐานของปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2

ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 โดยปกติจะสามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการแก้สมการรีคคาติ (riccati equation) วิธีการแก้สมการรีคคาตินี้เป็นวิธีการคำนวณที่สามารถหาคำตอบของปัญหาที่ไม่เป็นเอกฐานได้ แต่สำหรับปัญหาเอกฐาน (singular problem) ซึ่งมีคำตอบที่สอดคล้องหลายคำตอบ วิธีการแก้สมการรีคคาติไม่สามารถหาคำตอบเหล่านั้นได้ วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นซึ่งเป็นวิธีหาคำตอบโดยใช้อัลกอริธึมในการค้นหาคำตอบ จึงเป็นวิธีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการหาคำตอบของปัญหาเอกฐานนี้

พิจารณาปัญหาการควบคุมป้อนกลับสัญญาณวัดที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนของพลาเน็ตโดยนัยทั่วไปเป็น

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (\text{ค.12})$$

กำหนดให้ $D_{11} = 0$ สำหรับกรณีที่พลาเน็ตเป็นระบบเวลาต่อเนื่อง เพื่อให้ให้นอร์ม \mathcal{H}_2 ของระบบวงปิด $\|T_{zw}\|_2 < \infty$ ปัญหาการควบคุมป้อนกลับสัญญาณวัดนี้จะสามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีการแก้สมการรีคคาติที่ต่อเนื่อง

1. คู่ (A, B_2) สามารถทำให้เสถียรได้ และ คู่ (A, C_2) สามารถตรวจสอบได้
2. $D_{12}^T D_{12}$ และ $D_{21} D_{21}^T$ เป็นเมทริกซ์แน่นอนค่าบวก
3. $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ มีค่าอันดับหลักเต็ม (full column rank) สำหรับทุกๆ λ บนแกนจินตภาพสำหรับระบบเวลาต่อเนื่อง หรือบนวงกลมหนึ่งหน่วยสำหรับระบบเวลาเต็มหน่วย
4. $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ มีค่าอันดับแถวเต็ม (full row rank) สำหรับทุกๆ λ บนแกนจินตภาพสำหรับระบบเวลาต่อเนื่อง หรือบนวงกลมหนึ่งหน่วยสำหรับระบบเวลาเต็มหน่วย

นิยาม ค.1 ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด \mathcal{H}_2 สำหรับระบบควบคุมป้อนกลับสัญญาณวัดที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนของพลาเน็ตโดยนัยทั่วไป ดังสมการที่ ค.12 จะเป็นปัญหาเอกฐานก็ต่อเมื่อ พลาเน็ตที่กำหนดให้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ 2 หรือ 3 หรือ 4 [30]

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายเอกลักษณ์ เปี่ยมบริบูรณ์ เกิดเมื่อวันที่ 24 มิถุนายน พ.ศ. 2522 กรุงเทพมหานคร เป็นบุตรของ นายสมบัติ เปี่ยมบริบูรณ์ และนางจงรัก เปี่ยมบริบูรณ์ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2542 และศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2543 สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ผลงานทางวิชาการคือการเสนอบทความ “การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบหลายอัตราสุ่ม” ในงานประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า (EECON) ครั้งที่ 24 ที่สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และบทความ “ H_2 -Optimal Controller Design for Multirate Systems via LMI Approach” ในงาน Asian Control Conference (ASCC) ครั้งที่ 4 ที่ประเทศสิงคโปร์



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย