ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

นายสิร ศรีวนาสณฑ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1066-2

REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM

Mr. Sira Srivanasont

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering in Computer Engineering

Department of Computer Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-53-1066-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน
โดย	นายสิร ศรีวนาสณฑ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. อาทิตย์ ทองทักษ์)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อานนท์ รุ่งสว่าง)

นายสิร ศรีวนาสณฑ์ : ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน. (REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM) อ. ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 68 หน้า. ISBN 974-53-1066-2.

รูปแบบการแทนค่าของจำนวนมีประวัติที่ยาวนาน และน่าหลงใหล บางส่วนของการพัฒนามุ่งไปที่การทำให้เกิดผลของระบบเลขคณิตสำหรับคอมพิวเตอร์ โดยปกติจำนวนหนึ่งจำนวนจะถูกแทนค่าด้วยสายอักขระของดิจิตในระบบดิจิทัล แต่เนื่องจากความแม่นยำของระบบการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลที่สูงจะเกิดขึ้นพร้อมกับค่าใช้จ่ายที่สูงอันเนื่องมาจากข้อจำกัดทางเวลา งานวิจัยส่วนหนึ่งจึงสนใจระบบแอนะล็อก แต่สิ่งหนึ่งที่เป็นปัญหาสำคัญคือสัญญาณรบกวนในวงจรที่สามารถเปลี่ยนไปเป็นค่าความผิดพลาดในระบบได้ ด้วยสาเหตุนี้ทำให้ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องถูกนำเสนอขึ้นในปี ค.ศ. 1997 โดยเทคนิคการใช้สัญญาณหลายสัญญาณได้ถูกเสนอขึ้นเพื่อใช้แทนจำนวนหนึ่งจำนวน สัญญาณเหล่านี้ได้ถูกนำมาใช้ในการปรับปรุงสัญญาณที่มีลำดับสูงกว่าจนกระทั่งทุกสัญญาณถูกปรับปรุง ค่าความซับซ้อนเชิงเวลาสำหรับกระบวนการกู้ค่าความผิดพลาดจะเป็นเชิงเส้นเทียบกับจำนวนสัญญาณที่ใช้ และค่าความผิดพลาดนี้ก็ยังไม่สามารถที่จะถูกกำจัดออกไปจากระบบได้ทั้งหมด

ในงานวิจัยนี้จึงได้ทำการเสนอระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่ ที่ผลลัพธ์ทางทฤษฎีแสดงให้เห็นว่า ค่าความผิดพลาดจากสัญญาณรบกวนนั้นสามารถถูกกำจัดได้อย่างสมบูรณ์ในระบบนี้ และงานวิจัยนี้ยังพิสูจน์ว่าเพียงสองสัญญาณก็เพียงพอที่จะใช้แทนค่าจำนวนหนึ่งจำนวน สัญญาณที่หนึ่งคือดิจิตแสดงค่า และอีกสัญญาณคือดิจิตซ้ำซ้อน ทำให้ความซับซ้อนเชิงเวลาสำหรับกระบวนการกำจัดข้อผิดพลาดเป็นค่าคงที่ การคำนวณทางเลขคณิตพื้นฐานคือ การบวก ลบ คูณ และหาร ด้วยเวลาคงที่ ก็ได้ถูกเสนอในงานนี้ด้วย หลักการของระบบจำนวนที่นำเสนอนี้สามารถถูกกำหนดคุณสมบัติได้ โดยค่าความคาดเคลื่อนที่ยินยอมของค่าความผิดพลาด ก็ได้ถูกรวมเข้าไปในการศึกษาครั้งนี้ด้วย

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต...

สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....................................

ปีการศึกษา 2547

4570711621 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING
KEY WORD: REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM / CONTINUOUS VALUED NUMBER SYSTEM / ANALOG NUMBER SYSTEM / ERROR RECOVERY / ANALOG ARITHMETIC

SIRA SRIVANASONT: REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM.
THESIS ADVISOR: ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 68 pp. ISBN 974-53-1066-2.

Number representation has a long and fascinating history: some of its developments are focused on an implementation of computer arithmetic system. Usually a number is represented by a string of digits in digital system. Since the high accuracy of digital signal processing comes with the high cost of speed limitation, certain researches are interested in an analog system. One must be an important problem is noise in the circuit that becomes an error in the system. For this reason, a continuous valued number system was proposed in 1997. Multiple signals technique is introduced to represent a number. These signals are used to refine the higher order signal until the entire signals are refined. Time complexity for an error recovery process is linear up to the number of signals. It is also not in the case that the error can be removed from the system.

This thesis proposes a novel redundant analog number system. Theoretical results show that such the error from noise can be completely removed from the system. It is demonstrated that only two signals are enough to represent a number, one is a valued digit and the other is a redundant digit. Time complexity for the error removable process becomes constant. Fundamental arithmetic operations such as addition, subtraction, multiplication and division with a constant time are also introduced in this work. The principle of the proposed number system is characterized by an error tolerance which is also included in this study.

Department Computer Engineering Student's signature..................................
Field of study Computer Engineering Advisor's signature..................................
Academic year 2004

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลืออย่างยิ่ง จาก อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้ข้อคิด แนวทาง และคำปรึกษา ตลอดจนเป็นผู้ตรวจทานแก้ไข จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ให้ความเมตตา ช่วยเหลือ รวมทั้งโอกาส และสิ่งที่ดีแก่ผู้วิจัยเสมอมา

ขอขอบพระคุณ รศ. ดร. ประภาส จงสถิตย์วัฒนา อาจารย์ ดร. อาทิตย์ ทองทักษ์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และผศ. ดร. อานนท์ รุ่งสว่าง คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไม่อาจจะสำเร็จได้หากไม่ได้รับความร่วมมือจากทุกท่าน และขอขอบคุณอาจารย์ในสาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่าน และเพื่อนๆ ทุกๆคน ผู้ที่ให้คำแนะนำเพิ่มเติมกับผู้วิจัยเสมอมา

ท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจสำคัญ และช่วยเหลือในทุกๆ ด้าน จนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากปัจจุบัน มีความต้องการในการนำคอมพิวเตอร์ไปใช้ในการคำนวณสิ่งที่มีความซับซ้อนมากขึ้น พร้อมทั้งต้องการความรวดเร็วในการคำนวณผลลัพธ์ให้เพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน นอกจากการพัฒนาให้ตัวประมวลผลทำงานด้วยสัญญาณนาฬิกาที่เร็วขึ้น และการเพิ่มความเร็วกับอุปกรณ์ต่างๆ ของคอมพิวเตอร์ให้ทำงานเร็วขึ้นแล้วนั้น วิธีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของตัวประมวลผลเองก็เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้คอมพิวเตอร์สามารถทำงานได้เร็วขึ้นเช่นกัน จึงได้มีการค้นคว้าวิจัยเกี่ยวกับวงจรการคำนวณทางคณิตศาสตร์ทั้งทางดิจิทัล (Digital) และแอนะล็อก (Analog) เพื่อช่วยให้การคำนวณของคอมพิวเตอร์รวดเร็วและมีประสิทธิภาพมากขึ้น

ในการคำนวณของวงจรดิจิทัลนั้น ข้อมูลที่อยู่ในวงจรนั้นจะมีค่าความแม่นยำของข้อมูลภายในวงจรสูง แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็จะสูงด้วยเช่นกัน [1] ในปี 1961 ได้มีการนำเสนอระบบจำนวนเครื่องหมาย (Signed digit number system) ขึ้นเพื่อทำการจำกัดการแพร่กระจายตัวทด (Carry propagation) ให้เป็นค่าคงที่ [2] ซึ่งคุณสมบัตินี้ทำให้เราสามารถทำการคำนวณบนวงจรดิจิทัลได้ทั้งแบบขนาน [3] และแบบเชื่อมตรง [4, 5, 6, 7, 8, 9] ซึ่งทั้งสองวิธีก็เป็นวิธีการคำนวณที่สามารถเพิ่มความเร็วในการคำนวณได้เช่นกัน แต่จะต้องเสียทรัพยากร และค่าใช้จ่ายในการเพิ่มความเร็วนี้เพิ่มขึ้น [1]

สำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของวงจรแอนะล็อก มีข้อดีตรงที่การคำนวณนั้นเป็นการคำนวณที่ปราศจากตัวทดด้วยความสามารถของวงจรแอนะล็อกเอง [10] ทำให้ความเร็วที่ได้จากการคำนวณของวงจรแอนะล็อกนั้นมีความเร็วในการคำนวณสูงเป็นแบบทันกาล (Real time) โดยวงจรการคำนวณทางแอนะล็อกที่เป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างมากก็คือ คอมพิวเตอร์แอนะล็อกสามมิติ (Three-dimensional analogue computer, TRIDAC) [11] ซึ่งเป็นคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการจำลองการบินของเครื่องบินเป็นแบบสามมิติ สำหรับวงจรคำนวณทางแอนะล็อกนั้นมักจะถูกสร้างขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาเฉพาะด้าน โดยที่พบส่วนใหญ่นั้นจะอยู่ในระบบควบคุมต่างๆ ที่จำเป็นต้องต้องแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ยกตัวอย่างเช่น การประมวลข้อมูลที่มาจากเครื่องรับรู้ (Sensor) จำนวนเป็นพันๆ ในกรณีเช่นนี้การจำลองปัญหาและแก้ปัญหาได้โดยตรงในหนึ่งขั้นตอนของการทำงาน ทำให้วงจรการคำนวณทางแอนะล็อกนั้นสามารถทำงานได้เร็วกว่า [12] แต่ว่าวงจรแอนะล็อกไม่สามารถทำให้เป็นอย่างที่คิดได้ เนื่องจากข้อจำกัดของค่าความผิดพลาด (Error) ของสัญญาณในวงจรที่เกิดขึ้นเนื่องจากสัญญาณรบกวน ทำให้ค่าของสัญญาณ

ที่เป็นลักษณะต่อเนื่องนั้นเปลี่ยนแปลงไป ในปี 1997 Saed Ahmadi Jullien และ Miller ได้นำเสนอระบบจำนวนค่าซ้อนทับ (Overlap resolution number system) โดยระบบจำนวนนี้อาศัยหลักการในการเพิ่มสัญญาณซ้ำซ้อนเพิ่มเข้าไปเพื่อทำการแทนค่าจำนวนเพียงจำนวนเดียว โดยที่สัญญาณที่ได้เพิ่มขึ้นไปเหล่านี้จะเรียกว่า ดิจิตซ้ำซ้อน (Redundancy digit) โดยที่ดิจิตแรกเท่านั้นที่มีหน้าที่ในการแทนค่าแอนะล็อกที่เราต้องการจะแสดงทั้งหมด ส่วนในดิจิตอื่นๆ จะบอกค่าในส่วนของรายละเอียดที่ลดลงไปเรื่อยๆ ซึ่งก็หมายความว่าถ้าดิจิตแรกนั้นสามารถแสดงค่าที่ถูกต้องได้แบบไม่มีความผิดพลาด ก็ไม่มีความจำเป็นที่จะต้องมีดิจิตอื่นๆ ที่เหลือ หน้าที่ของดิจิตซ้ำซ้อนที่เพิ่มเข้ามา คือการปรับปรุงค่าของดิจิตที่มีลำดับสูงกว่าที่อยู่ติดกันในกรณีที่มีความผิดพลาดเกิดขึ้นกับดิจิตเหล่านั้นให้ใกล้เคียงค่าที่ถูกต้องมากขึ้น โดยวิธีลดค่าความผิดพลาด (ในที่นี้จะเรียกแทนว่า วิธีการกู้ค่าความผิดพลาด)นั้นจะเริ่มจากดิจิตที่มีลำดับน้อยที่สุด ทำการปรับปรุงค่าของดิจิตที่อยู่ติดกันไปเรื่อยๆ จนถึงการปรับปรุงค่าของดิจิตที่มีลำดับสูงสุด ทำให้ค่าความซับซ้อน (Complexity) ของการลดค่าความผิดพลาดเป็นเชิงเส้นตรง $\Theta(n)$ ซึ่ง n คือจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน โดยที่ค่าความซับซ้อนนี้มีค่าเท่ากับการแพร่กระจายของตัวทดในวงจรดิจิทัล [13] ทำให้เราทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้เหมือนกับวงจรดิจิตทัลที่มีการแพร่กระจายของตัวทด ประโยชน์ที่ได้จากการคำนวณแบบปราศจากตัวทดของวงจรแอนะล็อกจึงไม่ได้ใช้อย่างมีประสิทธิภาพ

งานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอระบบจำนวนค่าต่อเนื่องใหม่ขึ้นมา ซึ่งมีค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นน้อยกว่าระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเดิม ที่เรียกว่าระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน พร้อมทั้งนำเสนออัลกอริทึมการคำนวณพื้นฐาน คือ การบวก ลบ คูณ และหารสำหรับระบบจำนวนใหม่ที่ได้ออกแบบมานี้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ออกแบบระบบจำนวนซ้ำซ้อนค่าต่อเนื่องรูปแบบใหม่ ที่ใช้เวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดลดลงเมื่อเทียบกับแบบดั่งเดิม พร้อมทั้งออกแบบอัลกอริทึมการคำนวณของตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน คือการบวก ลบ คูณ และหารของระบบจำนวนใหม่นี้

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. สนใจในระบบที่มีค่าความผิดพลาดอยู่ในรูปของเปอร์เซ็นต์ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งค่าความผิดพลาดนี้จะต้องคงที่สำหรับทุกดิจิตของตัวถูกดำเนินการตัวเดียวกันเท่านั้น

2. เสนออัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับระบบจำนวนแบบใหม่เฉพาะการบวก ลบ คูณ และหารเท่านั้น

3. ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะไม่เกิดระหว่างดำเนินการกู้ค่าความผิดพลาด และดำเนินการทางคณิตศาสตร์อีก

4. ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบจะอยู่ในขอบเขตที่ระบบจำนวนสามารถจะทนได้เท่านั้น จึงจะสามารถทำการกู้ค่าออกมาได้ถูกต้อง

5. ตัวถูกดำเนินการที่จะทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์จะต้องถูกกู้ค่าความผิดพลาดก่อน เพื่อให้เป็นค่าที่ถูกต้องก่อนที่จะทำเริ่มการคำนวณผลลัพธ์

6. ทำการออกแบบระบบจำนวน อัลกอริทึมกู้ค่าความผิดพลาด อัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน และเสนอวิธีการพิสูจน์อัลกอริทึมเหล่านี้เท่านั้น ไม่ได้มีการสร้างออกมาเป็นวงจร

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาของงานวิจัยระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง
2. วิเคราะห์ปัญหาของงานวิจัยที่มีความสอดคล้องกับงานวิจัยที่สนใจ
3. ออกแบบระบบจำนวนค่าต่อเนื่องแบบใหม่
4. ออกแบบอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดและการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน
5. พิสูจน์อัลกอริทึมที่ได้ออกแบบไว้
6. จัดทำวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ได้ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องแบบใหม่ที่สามารถทำการลดเวลาที่เกิดขึ้นในการกู้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบได้

2. อัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน (บวก, ลบ, คูณ และ หาร) สำหรับระบบจำนวนค่าต่อเนื่องแบบใหม่

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

1. “An On-line Addition for Compressed Signed Digit Representation” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2003)

2. “On-Line Addition in compressed Signed Digit Representation Using On-the-fly Technique” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการนานาชาติ Hawaii International Conference on Computer Science (HICCS2004)
3. “Modified Continuous Valued Number System” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการนานาชาติ 2004 International Conference on Algorithmic Mathematics and Computer Science (AMCS’04)
4. “Reducing Error Recovery Time in CVNS” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 8^{th} Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE8)
5. “Parallel Error Recovery in CVNS” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 8^{th} National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2004)
6. “On-Line multiplication in compressed Signed Digit Representation Using On-the-fly Technique” โดย นพคุณ ศรีมโนธรรม สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 8^{th} National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2004)
7. “Redundant Analog Number System” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการนานาชาติ IEEE TENCON 2004 (TENCON2004)
8. “Digit Conversion in Redundant Analog Number System” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 9^{th} Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE9)
9. “RANS and Analog Variable Conversion Algorithm” โดย สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการนานาชาติ 2^{nd} ECTI Annual Conference (ECTI-CON 2005)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง (Continuous valued number system)

เนื่องจากปัญหาของสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในวงจรแอนะล็อกทำให้ค่าที่มีอยู่ในวงจรนั้นเกิดความผิดพลาดขึ้นได้ จึงได้มีแนวคิดของระบบเลขคณิตแบบแอนะล็อกที่สามารถจะทำการลดข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับจำนวนเหล่านั้นภายในระบบได้ ในปี 1997 Saed Ahmadi Jullien และ Miller [1] ได้เสนอ ระบบจำนวนค่าซ้อนทับ (Overlap resolution number system) ขึ้นมาและหลังจากนั้นในปี 2002 ได้มีการเปลี่ยนชื่อเป็น ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง [14]

ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นถูกนำเสนอมาสำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่มีสัญญาณรบกวนน้อย (Low noise arithmetic) โดยใช้รูปแบบการแทนค่า (Representation) และการดำเนินการ (Operation) แบบแอนะล็อก ซึ่งการคำนวณสำหรับระบบจำนวนนี้จะสามารถคำนวณแบบไม่มีตัวทด (Carry free arithmetic) ได้โดยการใช้คุณสมบัติของการทำงานของวงจรแอนะล็อก ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องใช้จำนวนสัญญาณหลายสัญญาณในการแทนค่าจำนวนเพียงจำนวนเดียว โดยที่สัญญาณที่เพิ่มเข้าไปเหล่านี้จะเรียกว่า ดิจิตซ้ำซ้อน (Redundancy digit) เพื่อที่จะทำการลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในแต่ละดิจิตลง โดยที่ดิจิตที่มีลำดับสูงสุดเท่านั้นที่เป็นดิจิตที่แสดงถึงค่าทั้งหมดที่เราต้องการ ส่วนดิจิตอื่นๆ นั้นจะเป็นดิจิตที่ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อบอกรายละเอียดที่ลดลงไปเรื่อยๆ ของแต่ละดิจิต โดยวิธีการการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนนี้จะใช้คุณสมบัติของดิจิตซ้ำซ้อนเหล่านั้นทำการปรับปรุงค่าของดิจิตที่มีลำดับสูงกว่าที่อยู่ติดกันเพื่อเพิ่มค่าความถูกต้องให้สูงขึ้นเรื่อยๆ จนกว่าจะถึงดิจิตตัวแรกสุด โดยขบวนการที่ใช้ในการเพิ่มค่าความถูกต้องนั้นจะเริ่มจากดิจิตที่มีลำดับน้อยที่สุด (ตัวทางขวาสุด) ไปยังดิจิตที่มีลำดับมากที่สุด (ตัวซ้ายสุด) ทำให้เวลาที่ถูกใช้ในการเพิ่มค่าความถูกต้องนี้ขึ้นกับจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน หรือสามารถบอกได้ว่าค่าความซับซ้อนของเวลา (Time complexity)สำหรับการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเป็น $\Theta(n)$ โดยที่ n คือจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน โดยที่ในระบบที่คำนึงถึงความถูกต้องที่มากขึ้นก็จะต้องการจำนวนดิจิตที่ซ้ำซ้อนมากขึ้นด้วยเช่นกัน ดังที่ได้กล่าวไว้ใน [14] หลักการของดิจิตแบบแอนะล็อกนั้นได้ถูกนำเสนอเล็กน้อยมาก่อนหน้านี้แล้วโดย Pulliam ซึ่งเป็นแนวคิดในการคำนวณเชิงแสง (Optical computing) แต่ว่าสามารถทำการบวกในระบบเชิงแสงเท่านั้น

สำหรับฐาน β ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $\beta \geq 2$ กำหนดให้จำนวนจริง X โดยค่าสูงสุดของ X จะถูกจำกัดด้วยค่า M ซึ่ง $|X| < M$ และค่าจำนวนจริง X นั้นจะประกอบไปด้วยดิจิตค่าต่อเนื่อง

(Continuous valued digit) x_n หลายดิจิต ซึ่ง $K \le n \le L$ โดยที่ K และ L เป็นจำนวนเต็มที่ $K > 0$ และ $0 \le L$ ค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต (Maximum dynamic range) สามารถคำนวณได้จาก

$$M = \beta^{L+1} \tag{2.1}$$

รูปแบบการแสดงค่าของ X สามารถเขียนออกมาได้เป็น

$$(x_L, x_{L-1}, \ldots, x_0 \mid x_{-1}, \ldots, x_{K+1}, x_K)$$

เครื่องหมาย | ใช้ในการแยกส่วนที่เป็นจำนวนเต็มทางด้านขวาออกจากส่วนที่เป็นทศนิยมทางด้านซ้าย ในการสร้างดิจิตค่าต่อเนื่องนั้นจะถูกสร้างเริ่มต้นจากดิจิตที่มีค่าลำดับมากที่สุด หรือ x_L ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$x_L = \beta \times \frac{X}{M} \tag{2.2}$$

และดิจิตอื่นที่เหลือสามารถทำการคำนวณได้ด้วย

$$x_n = (x_{n+1} - \lfloor x_{n+1} \rfloor)\beta \tag{2.3}$$

ด้วยสมการที่ 2.2 และ 2.3 เราสามารถทำการสรุปได้ว่า $|x_n| < \beta$ และ $|\lfloor x_n \rfloor| \le \beta - 1$ และจากสมการที่ 2.1 นั้นเราก็สามารถทำการหาค่าของ L ในกรณีที่เราทราบ M ได้โดย $\beta^{L+1} \ge |M|$ นอกจากนั้นยังสามารถทำการคำนวณดิจิต $n > L$ ได้โดยเราจะเรียกดิจิตที่มีเลขลำดับมากกว่าค่า L นี้ว่า ดิจิตที่ถูกสร้างเกิน (Excessively evolved digits, EEDs) โดยยังคงใช้สมการเดิมคือ สมการที่ 2.3 ซึ่งสามารถทำให้ง่ายขึ้นได้ว่า $x_n = x_{n-1} / \beta$ โดยดิจิตที่ถูกสร้างเกินนี้จะใช้ในการคำนวณที่คำตอบของการดำเนินการนั้นเกินกว่าค่า M ทำให้ต้องมีการเพิ่มค่าของ L ซึ่งนั่นก็คือเพิ่มค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต

เนื่องจากในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นเป็นระบบจำนวนสำหรับวงจรแอนะล็อก นั่นก็หมายความว่าดิจิตแบบต่อเนื่องนั้นจะต้องถูกแสดงค่าที่อยู่ในรูปของตัวแปรทางไฟฟ้า ที่เรียกว่า แอนะล็อกดิจิต (Analog digit) ซึ่งเป็นตัวแปรทางไฟฟ้ามีลักษณะเป็นเชิงเส้น เช่น กระแส หรือ ความต่างศักย์ เป็นต้น ที่อยู่ในช่วงของ 0 ถึง $\pm Q$ หน่วย นั่นก็หมายความว่าเราสามารถแปลงค่าของ x_n ที่เป็นดิจิตแบบต่อเนื่องให้ตรงเข้ากับค่าตัวแปร q_n ที่เหมาะสมได้ โดยสมการดังต่อไปนี้

$$q_n = x_n (Q / \beta)$$

ตัวอย่างที่ 2.1 ถ้า $X = 58.742$ ซึ่งมีค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต $M = 100$ ต้องการทำการแสดงค่าให้อยู่ในรูปของดิจิตแบบต่อเนื่องในช่วง $0\mu A$ ถึง $50\mu A$ บนฐาน $\beta = 10$ และ $\beta = 2$ ทำการหาค่า L ที่เหมาะสมตามสมการที่ 2.1 ได้ $L = 1$ และ $L = 6$ สำหรับฐาน 10 และฐาน 2 ตามลำดับ ซึ่งผลการคำนวณออกมาดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าดิจิตค่าต่อเนื่อง และค่าตัวแปรทางไฟฟ้าของ $X = 58.742$

	ฐานสิบ		ฐานสอง	
n	x_n	$q_n\ (\mu A)$	x_n	$q_n\ (\mu A)$
6	-	-	1.17484	29.371
5	-	-	0.34968	8.742
4	-	-	0.69936	17.484
3	-	-	1.39672	34.918
2	-	-	0.79744	19.936
1	5.87420	29.3710	1.59488	39.872
0	8.7420	43.71	1.18795	29.699
-1	7.420	37.1	0.37952	9.488

□

โดยทางทฤษฎีแล้วนั้น ในกรณีที่ไม่เกิดข้อผิดพลาดเลยในระบบ รูปแบบการแทนค่าที่เราได้มาจากระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นสามารถดึงจำนวนที่ทำการแทนค่าได้โดยใช้ดิจิตที่มีลำดับมากที่สุดเพียงลำดับเดียวเท่านั้น

$$X = x_L\ (M / \beta)$$

แต่ในทางปฏิบัติไม่สามารถเป็นไปได้เนื่องจากมีสัญญาณรบกวนเกิดขึ้นภายในระบบทำให้ค่าที่มีอยู่ในระบบนั้นมีความผิดพลาดเกิดขึ้น อย่างที่ได้กล่าวไว้แล้วว่าระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นมีการใช้หลายดิจิตเข้ามาช่วยในการเพิ่มค่าความถูกต้องนี้โดยดิจิตนั้นจะถูกใช้ในการปรับค่าของดิจิตที่มีลำดับสูงกว่าที่อยู่ติดกันให้มีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริงได้มากขึ้น หลักการนี้เองเป็นหลักการที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาด (Error recovery) ของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

เราสนใจค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นเป็นแบบ

$$x'_n = x_n + \varepsilon_n$$

ซึ่ง x'_n หมายถึงค่าของ x_n ที่รวมกับค่าของความผิดพลาดเข้าไว้ด้วยกัน ส่วนวิธีการกู้ค่าความผิดพลาดของดิจิตลำดับที่ n $(x'_n = x_n + \varepsilon_n)$ ของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้น สามารถทำได้ โดย

การกำหนดให้ดิจิตที่มีลำดับต่ำกว่าที่ติดกันนั้นเป็นค่าที่ถูกต้อง หรือไม่มีค่าความผิดพลาด $x'_{n-1} = x_{n-1}$ และด้วยเงื่อนไขเพิ่มเติมอีกหนึ่งเงื่อนไขคือ

$$\lfloor x'_n \rfloor = \lfloor x_n \rfloor \tag{2.4}$$

ด้วยเงื่อนไขเหล่านี้เองทำให้เราสามารถทำการกู้คืนค่าของ x'_n ออกมาเป็น x''_n ที่มีค่าเท่ากับ x_n ดังสมการที่ 2.5

$$x''_n = \begin{cases} \lfloor x'_n \rfloor + (x'_{n-1} / \beta) & n > K \\ x'_K & n = K \end{cases} \tag{2.5}$$

ซึ่งจะเรียกวิธีการกู้คืนข้อมูลนี้ว่า ขบวนการวิวัฒนาการย้อนกลับ (Reverse evolution process) ซึ่งขบวนการนี้จะสามารถกู้คืนได้อย่างถูกต้องก็เมื่อทำการคำนวณฟังก์ชันพื้น (Floor function) ตามสมการที่ 2.4 ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งเทคนิคการกู้ค่าความผิดพลาดนี้จะไม่สามารถทำได้ก็ในกรณีที่ $\lfloor x_n + \varepsilon_n \rfloor > \lfloor x_n \rfloor$ หรือ $\lfloor x_n + \varepsilon_n \rfloor < \lfloor x_n \rfloor$ จึงได้มีการปรับปรุงโดยการเปลี่ยนฟังก์ชันพื้นให้เป็นฟังก์ชันการถูกปัดเศษ (Rounded function) แทน $\lfloor x'_n \rfloor$ ได้ดังนี้

$$\lfloor x'_n \rfloor_R = \left[x'_n - (x'_{n-1} / \beta) \right]_{Rounded}$$

ด้วยเงื่อนไขที่ว่า

$$\left| \varepsilon_n - (\varepsilon_{n-1} / \beta) \right| < 1/2 \tag{2.6}$$

และเมื่อเอาไปแทนในสมการที่ 2.5 แล้วเราจะได้สมการในการกู้ค่าความผิดพลาดออกมาดังนี้

$$\lfloor x'_n \rfloor_R = \left[x'_n - (x''_{n-1} / \beta) \right]_{Rounded}$$

$$[x''_n]_R = \begin{cases} \lfloor x'_n \rfloor_R + (x''_{n-1} / \beta) & n > K \\ \\ x'_K & n = K \end{cases} \tag{2.7}$$

ซึ่งเทคนิคที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นจะทำการปรับปรุงค่าความแม่นยำของดิจิตที่มีลำดับสูงกว่าที่อยู่ติดกันทีละดิจิตในหนึ่งรอบ นั่นก็หมายความว่า ค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นมีค่าเท่ากับ $\Theta(n)$ โดยที่ n เท่ากับจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน ซึ่งค่าความซับซ้อนนี้มีค่าเท่ากับการแพร่กระจายของตัวทดในระบบดิจิทัล

และจากสมการที่ 2.7 แสดงให้เห็นว่าการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นไม่สามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดสำหรับดิจิตที่มีบลำดับต่ำที่สุด (x_K) ซึ่งเป็นดิจิตตัวขวาสุดได้ ทำให้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิตนั้นจะเกิดการแพร่กระจายไปยังดิจิตอื่นๆ ของ

รูปแบบการแทนค่าซึ่งเหตุการณ์นี้จะเรียกว่า การแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุด (Least significant digit error propagation) โดยที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_K นั้นได้ส่งผลกระทบไปยังดิจิต x_L ด้วยค่าความผิดพลาดที่สามารถจะคำนวณได้ดังสมการที่ 2.8

$$\varepsilon_L = \varepsilon_K / \beta^{L-K} \tag{2.8}$$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้เกิดค่าความผิดพลาดขึ้นในระบบแอนะล็อกขณะนั้นเท่ากับ 4 % บนฐาน $\beta = 10$ ด้วย $M = 100$ การแทนค่าของ $X = 78.459$ ที่ถูกใส่ค่าความผิดพลาด x'_n ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง พร้อมทั้งวิธีการกู้ค่าความผิดพลาดได้ถูกแสดงไว้ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงการกู้ค่าความผิดพลาดของ $X = 78.459$ ในระบบที่มีค่าความผิดพลาด 4%

n	1	0	-1	-2	-3
x_n	7.8459	8.459	4.59	5.9	9
x'_n	8.159736	8.79736	4.7736	6.136	9.36
$[x_n'']_R$	7.845936	8.45936	4.5936	5.936	9.36

□

จากตัวอย่างที่ 2.2 จะสังเกตได้ว่าค่าของคำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นมีค่าเท่ากับ (7.845936, 8.45936, 4.5936 | 5.936, 9.36) เทียบกับค่าเริ่มต้น (7.8459, 8.459, 4.59 | 5.9, 9) จะเห็นว่า ยังเหลือค่าความผิดพลาด 0.36 ที่ดิจิตที่มีลำดับน้อยที่สุดอยู่ และค่าความผิดพลาดนี้ส่งผลกระทบกับทุกๆ ดิจิตที่ทำการกู้ค่าความผิดพลาด ทำให้ค่าคำตอบที่ได้ไม่ตรงกับค่าจริงเริ่มต้น โดยเหตุการณ์ที่เกิดค่าความผิดพลาดจากดิจิตที่มีลำดับน้อยที่สุดกระจายไปยังทุกๆ ดิจิตนั้นที่เรียกว่า การแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุด ซึ่งค่าความผิดพลาดนี้เกิดจากการที่เราไม่สามารถจะทำการปรับปรุงค่าของดิจิต x_k ได้ตามสมการการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีที่ $n = K$

อสมการที่ 2.6 จะกำหนดขอบเขตของค่าความผิดพลาดของดิจิตที่อยู่ติดกัน ที่จะทำให้ฟังก์ชันการปัดเศษ คำนวณค่าได้ถูกต้องตามสมมุติฐานที่เราได้ตั้งไว้ ในกรณีที่ค่าความผิดพลาดนี้อยู่นอกขอบเขตนี้จะทำให้การกู้ค่าความผิดพลาดนั้นไม่สามารถให้คำตอบที่ถูกต้องได้ จึงทำให้เกิดค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอม (Error tolerance) [15] ดังสมการที่ 2.9

$$\vartheta = \left| \frac{1}{2\beta} \right| \tag{2.9}$$

นั่นคือในแต่ละฐานนั้นมีค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมไม่เท่ากัน ยกตัวอย่างเช่นฐานสิบจะมีค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมเท่ากับ 0.05 หมายความว่าในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องของฐานสิบนั้นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับแต่ละดิจิตในระบบนั้นจะต้องน้อยกว่า 5 % ถ้าเกิดมีค่าความผิดพลาดเกินจากค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมจะทำให้คำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นจะเกิดความผิดพลาดมากกว่าค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุด

2.2. การคำนวณทางคณิตศาสตร์สำหรับระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

ทฤษฎีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นที่ได้ถูกนำเสนอไปแล้ว คือ การบวก การลบ และการคูณ โดยทฤษฎีการบวกของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนี้สามารถแสดงได้ดังทฤษฎีบทที่2.1 [13, 16]

ทฤษฎีบทที่ 2.1*กำหนดให้* $(x_L, x_{L\text{-}1}, \ldots, x_0 \mid x_{\text{-}1}, \ldots, x_{K+1}, x_K)$ *และ* $(y_L, y_{L\text{-}1}, \ldots, y_0 \mid y_{\text{-}1}, \ldots, y_{K+1}, y_K)$ *เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง* X *และ* Y *ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องบนฐาน* β *ตามลำดับ เมื่อ* β *เป็นจำนวนจริงที่* $\beta \geq 2$ *ดิจิตค่าต่อเนื่องของผลลัพธ์ของการบวก* $Z = X + Y$ *สามารถทำได้ดังต่อไปนี้*

$$z_n = (x_n + y_n) \bmod \beta \tag{2.10}$$

สำหรับทุกค่าของ n *ที่* $K \leq n \leq L$ *และ* $(z_L, z_{L\text{-}1}, \ldots, z_0 \mid z_{\text{-}1}, \ldots, z_{K+1}, z_K)$ *เป็นรูปแบบการแทนค่าของ* Z *ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องบนฐาน* β

ตัวอย่างที่ 2.3 การบวก $X = 58.34$ และ $Y = 72.89$ ด้วยค่า $M = 1000$ สำหรับฐาน $\beta = 10$ ด้วยค่าความผิดพลาดหลังการทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์เท่ากับ 4% เราทำการเลือกค่า $L = 2$ และ $K = -2$ ผลลัพธ์ของการคำนวณถูกแสดงได้ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 แสดงการบวก $X = 58.34$ และ $Y = 72.89$ ซึ่งมีค่าความผิดพลาด 4%

N	2	1	0	-1	-2
x_n	0.5834	5.834	8.34	3.4	4
y_n	0.7289	7.289	2.89	8.9	9
$z_n = (x_n + y_n)$	1.3123	3.123	1.23	2.3	3
z'_n	1.364792	3.24792	1.2792	2.392	3.12
z''_n	1.312312	3.12312	1.2312	2.312	3.12

□

ส่วนการลบของสองจำนวนในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้น เราสามารถทำได้ด้วยการบวกจำนวนที่ติดลบ [14] โดยเราจะใช้ทฤษฎีบทที่ 2.1 ในการทำการลบระหว่างดิจิตค่าต่อเนื่องซึ่งสามารถทำได้ดังต่อไปนี้

$$z_n = (x_n + (-y_n)) \bmod \beta = (x_n - y_n) \bmod \beta$$

แต่เนื่องจากเครื่องหมายของจำนวนหลังจากทำการลบนั้นจะมีแค่ดิจิตที่มีค่าลำดับสูงสุดเท่านั้นที่จะสามารถรับรองได้ว่ามีเครื่องหมายของคำตอบที่ถูกต้อง เนื่องจากดิจิตที่เหลือไม่จำเป็นที่จะต้องมีเครื่องหมายถูกต้องตามตัวแรกเสมอไป เราจึงจำเป็นต้องใช้เครื่องหมายของดิจิตที่มีลำดับสูงสุดเพื่อทำการแปลงเครื่องหมายของดิจิตที่เหลือของคำตอบให้ถูกต้อง เพื่อทำให้เครื่องหมายเหล่านั้นถูกต้อง จึงได้มีการทำการปรับปรุงวิธีการคำนวณการบวกในสมการที่ (2.10) ซึ่งเราสามารถทำให้ค่าเครื่องหมายนั้นถูกได้ด้วยตัวดำเนินการมอดุโล (mod)

$$z_n = \begin{cases} (x_n + y_n) \bmod^{+} \beta & (x_L + y_L) \geq 0 \\ (x_n + y_n) \bmod^{-} \beta & (x_L + y_L) < 0 \end{cases}$$

โดยที่ฟังก์ชัน $\bmod^{+}$ และ $\bmod^{-}$ ได้ถูกนิยามไว้ดังต่อไปนี้

$$(a) \bmod^{+} \beta = a + I\beta \quad 0 \leq (a) \bmod^{+} \beta < \beta$$

$$(a) \bmod^{-} \beta = a + I\beta \quad -\beta < (a) \bmod^{-} \beta \leq 0$$

และ I เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 2.4 การลบ X = 58.34 และ Y = 72.89 ด้วยค่า M = 1000 สำหรับฐาน β = 10 ด้วยค่าความผิดพลาดหลังการคำนวณทางคณิตศาสตร์เท่ากับ 4% เราทำการเลือกค่า L = 2 และ K = -2 ผลลัพธ์ของการคำนวณถูกแสดงได้ดังตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 แสดงการลบ X = 58.34 และ Y = 72.89 ซึ่งมีค่าความผิดพลาด 4%

N	2	1	0	-1	-2
x_n	0.5834	5.834	8.34	3.4	4
y_n	0.7289	7.289	2.89	8.9	9
$z_n = (x_n - y_n)$	-0.1455	-1.455	5.45	-5.5	-5
$z_n = (x_n - y_n) \mathrm{mod}^- \beta$	-0.1455	-1.455	-4.55	-5.5	-5
z'_n	-0.15132	-1.5132	-4.732	-5.72	-5.2
z''_n	-0.14552	-1.4552	-4.552	-5.52	-5.2

□

สำหรับการคูณในระบบจำนวนนี้ [17] ไม่สามารถทำได้เหมือนกับการบวกและการลบ เนื่องจากเราไม่สามารถทำการคำนวณแต่ละดิจิตที่แยกออกจากกันได้ งานวิจัยนี้จึงได้ทำการเสนออัลกอริทึมการคูณโดยการรวมของผลคูณย่อย (Partial product) ซึ่งสามารถเป็นไปได้เนื่องจากทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.2 *กำหนดให้ $(x_L, x_{L-1}, \ldots, x_0 \mid x_{-1}, \ldots, x_{K+1}, x_K)$ เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง X ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องบนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ ดิจิตค่าต่อเนื่องของผลลัพธ์ λx_n สำหรับทุกค่าของ n ที่ $K \leq n \leq L$ ซึ่ง λ เป็นจำนวนเต็มสามารถทำได้ดังต่อไปนี้*

$$(\lambda X)_n = (\lambda x_n) \bmod \beta$$

เราทำการกำหนดให้ $Y = \sum_{k=i}^{j} \lambda_k \beta^k$ แทนแต่ละดิจิตของรูปแบบการแทนค่า $y_i y_{i-1} \ldots y_0 . y_{-1} \ldots y_j$ โดยที่ค่า λ มีค่าเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นวิธีการคูณค่า X และ Y ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องสามารถทำได้ดังทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.3 *กำหนดให้* $(x_L, x_{L-1}, \ldots, x_0 \mid x_{-1}, \ldots, x_{K+1}, x_K)$ *และ* $(y_L, y_{L-1}, \ldots, y_0 \mid y_{-1}, \ldots, y_{K+1}, y_K)$ *เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง* X *และ* Y *ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องบนฐาน* β *เมื่อ* β *เป็นจำนวนจริงที่* $\beta \geq 2$ *และ* λ *เป็นจำนวนเต็ม โดยที่* $Y = \sum_{k=i}^{j} \lambda_k \beta^k$ *ดิจิตค่าต่อเนื่องของผลลัพธ์ของการคูณ* $Z = X.Y$ *สามารถทำได้ดังต่อไปนี้*

$$z_n = (Y \cdot X)_n = \left(\sum_{\forall k} \lambda_k \cdot x_{n-k} \right) \bmod \beta = \left(\sum_{i=n}^{m} \vec{\lambda}_i x_n \right) \bmod \beta$$

สำหรับทุกค่าของ n *ที่* $K \leq n \leq L$ *และ* $(z_L, z_{L-1}, \ldots, z_0 \mid z_{-1}, \ldots, z_{K+1}, z_K)$ *เป็นรูปแบบการแทนค่าของ* Z *ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องบนฐาน* β *และสัญลักษณ์* $\vec{\lambda}_i$ *หมายถึงทำการเลื่อนค่า* x_n *ไปทางซ้าย* i *ตำแหน่งในกรณีที่* i *เป็นบวก หรือทำการเลื่อนค่า* x_n *ไปทางขวา* i *ตำแหน่งในกรณีที่* i *เป็นลบ*

ตัวอย่างที่ 2.5 การคูณ $X = 31.89$ และ $Y = 19.5$ ด้วยค่า $M = 1000$ สำหรับฐาน $\beta = 10$ ด้วยค่าความผิดพลาดหลังการทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์เท่ากับ 4% เราทำการเลือกค่า $L = 2$ และ $K = -2$ ผลลัพธ์ของการคำนวณถูกแสดงได้ดังตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5 แสดงการคูณ $X = 31.89$ และ $Y = 19.5$ ซึ่งมีค่าความผิดพลาด 4%

N	2	1	0	-1	-2
x_n	0.3189	3.189	1.89	8.9	9
$(\vec{\lambda}_1.x_n)$	3.189	1.89	8.9	9	0
$(\vec{\lambda}_0.x_n)$	2.8701	8.701	7.01	0.1	1
$(\vec{\lambda}_{-1}.x_n)$	0.15945	1.5945	5.945	9.45	4.5
z_n	6.21855	2.1855	1.855	8.55	5.5
z'_n	6.467292	2.27292	1.94775	8.892	5.72
z''_n	6.218572	2.18572	1.8572	8.572	5.72

□

2.3 วงจรการคำนวณของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

สำหรับวงจรการบวกบนระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนี้ได้มีการนำเอามาสร้างเป็นวงจรวีแอลเอสไอ (VLSI) ดังในงานวิจัย [18] ซึ่งเป็นวงจรที่ทำงานบนฐานสอง โดยวงจรนี้จะทำการแปลงรูปแบบการแทนค่าแบบดิจิทัลจำนวนแปดบิตมาเป็นรูปแบบการแทนค่าของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องแล้วทำการแปลงกลับเป็นรูปแบบการแทนค่าแบบดิจิทัลอีกทีหนึ่ง สำหรับการที่จะนำเอาวิธีการแบบแอนะล็อกดิจิตนั้นไปใช้กับระบบดิจิทัลจึงได้มีการแบ่งส่วนของวงจรออกเป็นสามส่วน คือ ส่วนที่ใช้ในการแปลงค่าทางดิจิทัลเป็นแอนะล็อกจำนวนแปดบิต วงจรที่ใช้ในการคำนวณมอดุลาร์ (Modular) และวงจรในการแก้ไขค่าความผิดพลาด

ในงานวิจัย [13] ได้เสนอถึงหลักการทำคำนวณทางดิจิทัลด้วยส่วนประกอบ (Component) ที่ทำงานแบบแอนะล็อก พร้อมทั้งได้ทำการเสนอถึงหลักการของส่วนต่อประสานระหว่างดิจิตทางดิจิทัลหรือดิจิตตรรกะหลายค่า (Multiple-Valued Logic) กับดิจิตค่าต่อเนื่องด้วย

บทที่ 3

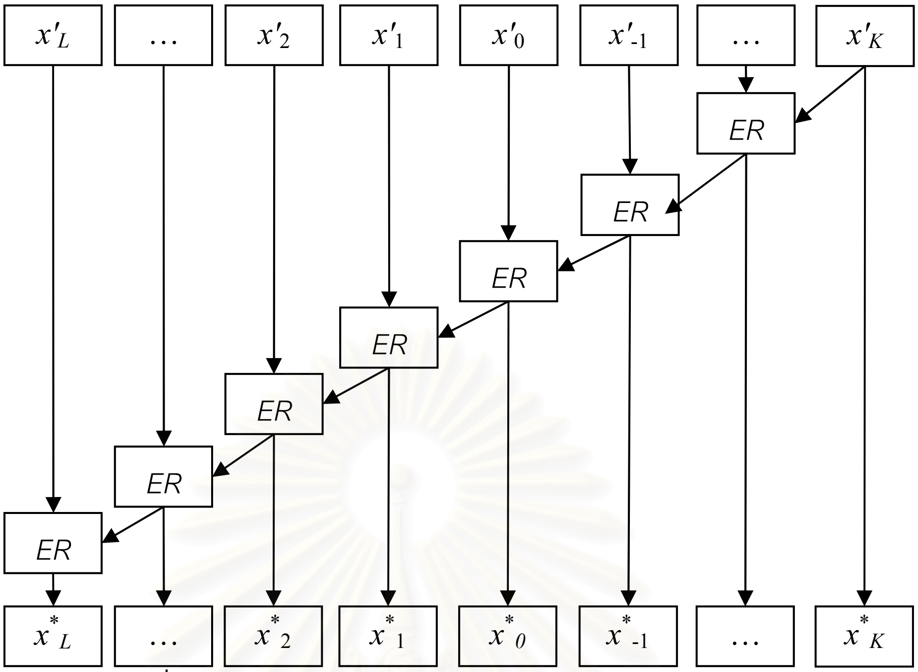
การกู้ค่าความผิดพลาดแบบขนานสำหรับระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการในการลดค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบสำหรับระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง โดยอาศัยหลักการของการเปลี่ยน ดิจิตเซตแบบออนเดอะฟลาย (On-the-fly digit set conversion) [19] เข้ามาประยุกต์ ซึ่งมีสถาปัตยกรรมการทำงานแบบขนาน ทำให้สามารถลดค่าความซับซ้อนของเวลาลงจากความซับซ้อนเชิงเส้นตรง $\Theta(n)$ เป็นความซับซ้อนเชิงลอการิทึม $\Theta(\log n)$ ซึ่ง n คือจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน โดยที่วิธีการที่ได้นำเสนอในบทนี้จะไม่ได้ทำการเปลี่ยนแปลงรูปแบบการแทนค่าของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเลย ทำให้ระบบยังคงต้องการจำนวนดิจิตซ้ำซ้อนที่มากขึ้นสำหรับระบบที่มีการคำนึงความแม่นยำที่มากขึ้นด้วย ซึ่งจะแตกต่างจากระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบการแทนค่าเป็นรูปแบบใหม่ ดังที่จะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไปในบทที่ 4

3.1 การกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องโดยหลักการของออนเดอะฟลาย

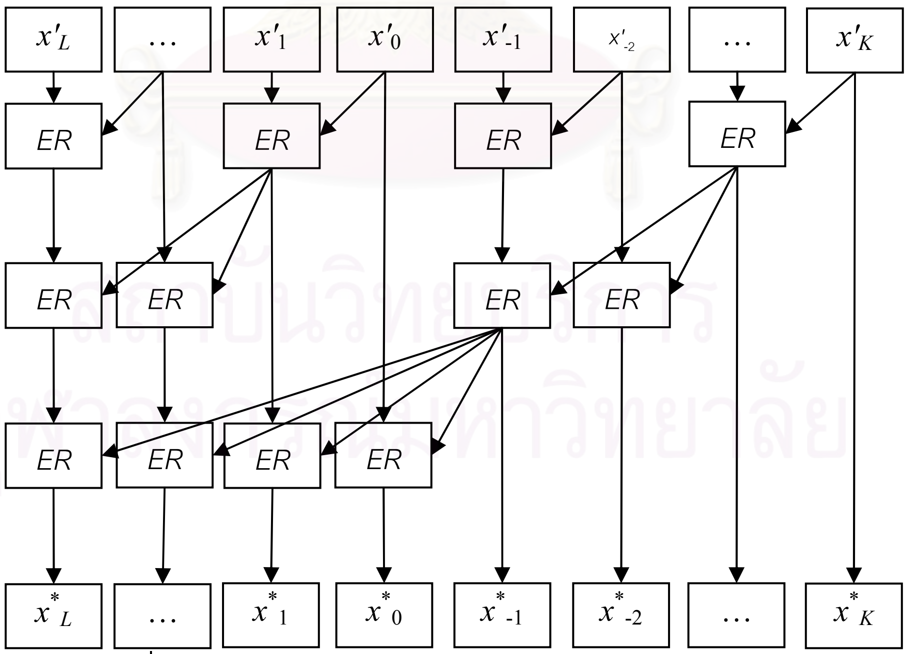
ในส่วนนี้จะกล่าวถึงหลักการในการกู้ค่าความผิดพลาดสำหรับระบบจำนวนค่าต่อเนื่องในรูปแบบใหม่ ซึ่งทำให้ค่าความซับซ้อนของเวลาสามารถลดลงจาก $\Theta(n)$ เป็น $\Theta(\log n)$ โดยที่ n คือจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน ซึ่งเราจะอาศัยรูปแบบการคำนวณของอัลกอริทึมของการเปลี่ยนดิจิตเซตแบบออนเดอะฟลาย ซึ่งมีรูปแบบการทำงานแบบขนานเข้ามาช่วย [20]

จากเนื้อหาในบทที่ 2 รูปแบบการกู้ค่าความผิดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องแบบเดิมนั้นสามารถนำมาแสดงได้ดังรูปที่ 3.1 โดยที่แต่ละหน่วยของการกู้ค่าความผิดพลาด (*ER*) นั้นคือวงจรที่ใช้ทำหน้าที่ในการกู้ค่าความผิดพลาด โดยเป็นวงจรในการกู้ค่าความผิดพลาดขนาดสองดิจิต ที่ประกอบด้วยดิจิตที่ใช้ในการปรับปรุงค่า และดิจิตที่ถูกปรับปรุงค่า ซึ่งวงจรจะทำหน้าที่เหมือนกับอัลกอริทึมที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง ดังสมการที่ 2.7



รูปที่ 3.1 สถาปัตยกรรมของการกู้ค่าความผิดพลาดแบบเดิม

เราจะทำการเปลี่ยนแปลงสถาปัตยกรรมของการกู้ค่าความผิดพลาดเป็นรูปแบบใหม่ ดังรูปที่ 3.2 ซึ่งสถาปัตยกรรมแบบนี้จะมีลักษณะการคำนวณคล้ายกับการคำนวณการเปลี่ยน ดิจิตเซตแบบออนเดอะฟลาย



รูปที่ 3.2 สถาปัตยกรรมของการกู้ค่าความผิดพลาดแบบขนาน

ซึ่งเราจะทำการเปลี่ยนฟังก์ชันการประกอบ (composition function) ของการคำนวณการเปลี่ยนดิจิตเซตแบบออนเดอะฟลายเป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดใหม่ดังสมการที่ 3.1

$$f_n\left(x'_i, x'_j\right) = \left(\frac{\left[x'_i \beta^{i-j-1} - x'_j / \beta\right]_{Rounded}}{\beta^{i-j-1}} \right) + x'_j / \beta^{i-j} \qquad (3.1)$$

จะสังเกตเห็นได้ว่าจากฟังก์ชันกู้ค่าความผิดพลาดเดิมนั้นจะเป็นการกู้ค่าความผิดพลาดของดิจิตที่อยู่ติดกันเท่านั้น แต่ในสมการที่ 3.1 ได้มีการปรับปรุงฟังก์ชันเดิมทำให้สามารถกู้ค่าความผิดพลาดของดิจิตสองดิจิตใดๆ ในระบบที่ไม่จำเป็นว่าจะต้องอยู่ติดกัน

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *กำหนดให้ ($x'_L\, x'_{L-1} \ldots x'_0 \mid x'_{-1}\, x'_{-2} \ldots x'_K$) เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง X' จำนวนจริงในระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง บนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ โดย X' เป็นจำนวนที่เกิดค่าความผิดพลาด $\varepsilon\%$ ขึ้นกับจำนวน X การกู้ค่าความผิดพลาดสำหรับ X' โดยใช้สมการ*

$$f_n\left(x'_i, x'_j\right) = \left(\frac{\left[x'_i \beta^{i-j-1} - x'_j / \beta\right]_{Rounded}}{\beta^{i-j-1}} \right) + x'_j / \beta^{i-j}$$

สามารถทำได้โดยใช้สถาปัตยกรรมแบบออนเดอะฟลาย สำหรับ i และ j ที่เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ $L \geq i > j \geq K$ และผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการนี้มีค่าเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการกู้ค่าความผิดพลาดโดยวิธีขบวนการวิวัฒนาการย้อนกลับ

พิสูจน์ เราจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.1 ว่าเป็นจริงโดยแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดดังสมการที่ 3.1 นั้นมีคุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่มได้ นั่นคือ

$$f_n\left(f_n\left(x'_a, x'\right)_b, x'_c\right) = f_n\left(x'_a, f_n\left(x'_b, x'_c\right)\right)$$

พิจารณาทางด้านซ้ายก่อน

$$f_n\left(f_n\left(x'_a, x'\right)_b, x'_c\right) = \frac{\left[\left(\frac{\left[x'_a \beta^{a-b-1} - x'_b / \beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-b-1}} + x'_b / \beta^{a-b}\right)\beta^{a-c-1} - x'_c / \beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-c-1}}$$

$$+ x'_c / \beta^{a-c}$$

$$f_n\left(f_n\left(x'_a,x'\right)_b,x'_c\right)=\frac{\left[\left[x'_a\beta^{a-b-1}-x'_b/\beta\right]_{Rounded}\beta^{b-c}+x'_b\beta^{b-c-1}-x'_c/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-c-1}}+x'_c/\beta^{a-c}$$

$$=\frac{\left[x'_a\beta^{a-b-1}-x'_b/\beta\right]_{Rounded}\beta^{b-c}+\left[x'_b\beta^{b-c-1}-x'_c/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-c-1}}+x'_c/\beta^{a-c}$$

$$=\frac{\left[x'_a\beta^{a-b-1}-x'_b/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-b-1}}+\frac{\left[x'_b\beta^{b-c-1}-x'_c/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-c-1}}+\left(\frac{x'_c}{\beta^{a-c}}\right)$$

พิจารณาทางด้านขวา

$$f_n\left(x'_a,f_n\left(x'_b,x'_c\right)\right)=\frac{\left[x'_a\beta^{a-b-1}-\left(\frac{\left[x'_b\beta^{b-c-1}-x_c/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{b-c-1}}+x'_c/\beta^{b-c}\right)/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-b-1}}$$

$$+\frac{\frac{\left[x'_b\beta^{b-c-1}-x_c/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{b-c-1}}+x'_c/\beta^{b-c}}{\beta^{a-b}}$$

$$=\frac{\left[x'_a\beta^{a-b-1}-\frac{f_n\left(x'_b,x'_c\right)}{\beta}\right]_{Rounded}}{\beta^{a-b-1}}+\frac{\left[x'_b\beta^{b-c-1}-x'_c/\beta\right]_{Rounded}}{\beta^{a-c-1}}$$

$$+\frac{x'_c}{\beta^{a-c}}$$

จากสมการทั้งสอง ทำให้สมการ $f_n\left(f_n\left(x'_a,x'\right)_b,x'_c\right)=f_n\left(x'_a,f_n\left(x'_b,x'_c\right)\right)$ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อสมการ

$$\left[x'_a\beta^{a-b-1}-x'_b/\beta\right]_{Rounded}=\left[x'_a\beta^{a-b-1}-f_n\left(x'_b,x'_c\right)/\beta\right]_{Rounded}$$

เป็นจริง

เราจะทำการแบ่งการพิจารณา ในกรณีแรก

จาก $x_a\beta^{a-b-1} = \left[x_a\beta^{a-b-1}\right]_{\text{int}} + \frac{x_b}{\beta}$

โดยที่ $[a]_{\text{int}}$ $= \lfloor a \rfloor$ เมื่อ $a \geq 0$

$= \lceil a \rceil$ เมื่อ $a < 0$

ทำให้

$$\left[x'_a\beta^{a-b-1} - x'_b/\beta\right]_{Rounded} = \left[\left(\frac{\left[x_a\beta^{a-b-1}\right]_{\text{int}} + \frac{x_b}{\beta} + \varepsilon_a}{\beta^{a-b-1}}\right)\beta^{a-b-1} - \frac{(x_b+\varepsilon_b)}{\beta}\right]$$

$$= \left[\left[x_a\beta^{a-b-1}\right]_{\text{int}} + \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_b}{\beta}\right]_{Rounded}$$

$$= \left[x_a\beta^{a-b-1}\right]_{\text{int}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \left|\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_b}{\beta}\right| < \frac{1}{2}$$

และกรณีที่สอง

$$\left[x'_a\beta^{a-b-1} - f_n(x'_b, x'_c)/\beta\right]_{Rounded} = \left[x'_a\beta^{a-b-1} - x''_b/\beta\right]_{Rounded}$$

$$= \left[\left(\frac{\left[x'_a\beta^{a-b-1}\right]_{\text{int}} + x_b/\beta + \varepsilon_a}{\beta^{a-b-1}}\right)\beta^{a-b-1} - \frac{(x_b+\varepsilon'_b)}{\beta}\right]_{Ronded}$$

$$= \left[\left[x'_a\beta^{a-b-1}\right]_{\text{int}} + \varepsilon_a - \frac{\varepsilon'_b}{\beta}\right]_{Rounded}$$

$$\left[x'_a\beta^{a-b-1} - f_n(x'_b, x'_c)/\beta\right]_{Rounded} = \left[x_a\beta^{a-b-1}\right]_{\text{int}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \left|\varepsilon_a - \frac{\varepsilon'_b}{\beta}\right| < \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

ดังนั้นทฤษฎีบทที่ 3.1 จะเป็นจริงได้ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า

$$\left|\varepsilon_a - \frac{\varepsilon'_b}{\beta}\right| < \frac{1}{2}$$

ซึ่งก็มีค่าเท่ากันกับสมการค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่าทฤษฎีบทที่ 3.1 นั้นเป็นจริงภายใต้เงื่อนไขค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

จากทฤษฎีบทที่ 3.1 แสดงให้เห็นว่าถ้าเราต้องการทำการกู้ค่าความผิดพลาดของดิจิตในลำดับที่ n ด้วยขบวนการวิวัฒนาการย้อนกลับนั้นเราจะทำการกู้ค่าความผิดพลาดจากดิจิตในตำแหน่งที่ n-1 ก่อนแล้ว ซึ่งดิจิต n-1 ก็จะต้องได้รับการกู้ค่าความผิดพลาดจากดิจิตที่ n-2 ก่อนเช่นเดียวกันเป็นเช่นนี้ไป จนกระทั่งถึงดิจิตที่ K+1 ซึ่งจะได้รับการกู้ค่าความผิดพลาดจากดิจิตที่ K ซึ่งเป็นดิจิตสุดท้าย ทำให้เราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$x^* = f_n\left(x'_n, f_n\left(x_{n-1}, f_n\left(x'_{n-2}, f_n\left(x'_{n-3}, ..., f_n\left(x'_{L+1}, x'_L\right)\right)\right)\right)\right)$$

กำหนดให้ x^*_n คือค่าของดิจิตในตำแหน่งที่ n ที่ได้รับการกู้ค่าความผิดพลาดจากดิจิต x^*_{n-1} แล้วจากทฤษฎีบทที่ 3.1 ทำให้เราสามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดทีละคู่และค่อยขยายวงของการกู้ค่าความผิดพลาดให้ใหญ่ขึ้นไปเรื่อยๆ จนถึงดิจิตที่ n ได้ดังสมการ

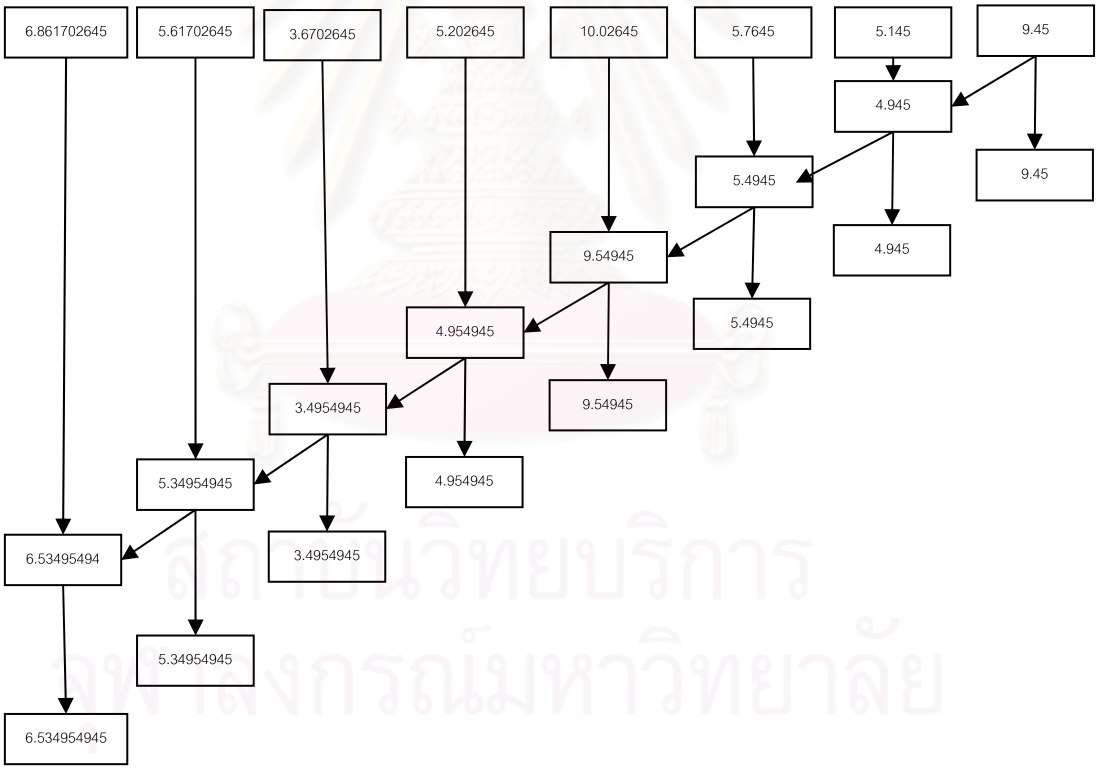
$$\begin{aligned}
x^*_n &= f_n\left(x'_n, x^*_{n-1}\right) = f_n\left(x'_n, f_n\left(x'_{n-1}, x^*_{n-2}\right)\right) \\
&= f_n\left(f_n\left(x'_n, x'_{n-1}\right), x^*_{n-2}\right) = f_n\left(f_n\left(x'_n, x'_{n-1}\right), f_n\left(x'_{n-2}, f_n\left(x'_{n-3}, x^*_{n-4}\right)\right)\right) \\
&= f_n\left(\left(f_n\left(x'_n, x'_{n-1}\right), f_n\left(x'_{n-2}, x'_{n-3}\right)\right), x^*_4\right) \\
&\ldots \\
&= f_n\left(\ldots\left(f_n\left(f_n\left(x'_n, x'_{n-1}\right), f_n\left(x'_{n-2}, x'_{n-3}\right)\right)\right), ..., f_n\left(x'_{K+1}, x^*_K\right)\right)
\end{aligned}$$

ทำให้เราสามารถทำการเปลี่ยนสถาปัตยกรรมของการกู้ค่าความผิดพลาดเป็นดังรูปที่ 3.2 ได้

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนด X = 653495.49 และมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นในระบบ 5% ในระบบจำนวนฐาน 10 ด้วยค่า X = 1000000 และ K = -2 รูปแบบการแทนค่าสามารถแสดงออกมาได้ดังตารางที่ 3.1 และวิธีการกู้ค่าความผิดพลาดแสดงได้ดังรูปที่ 3.3

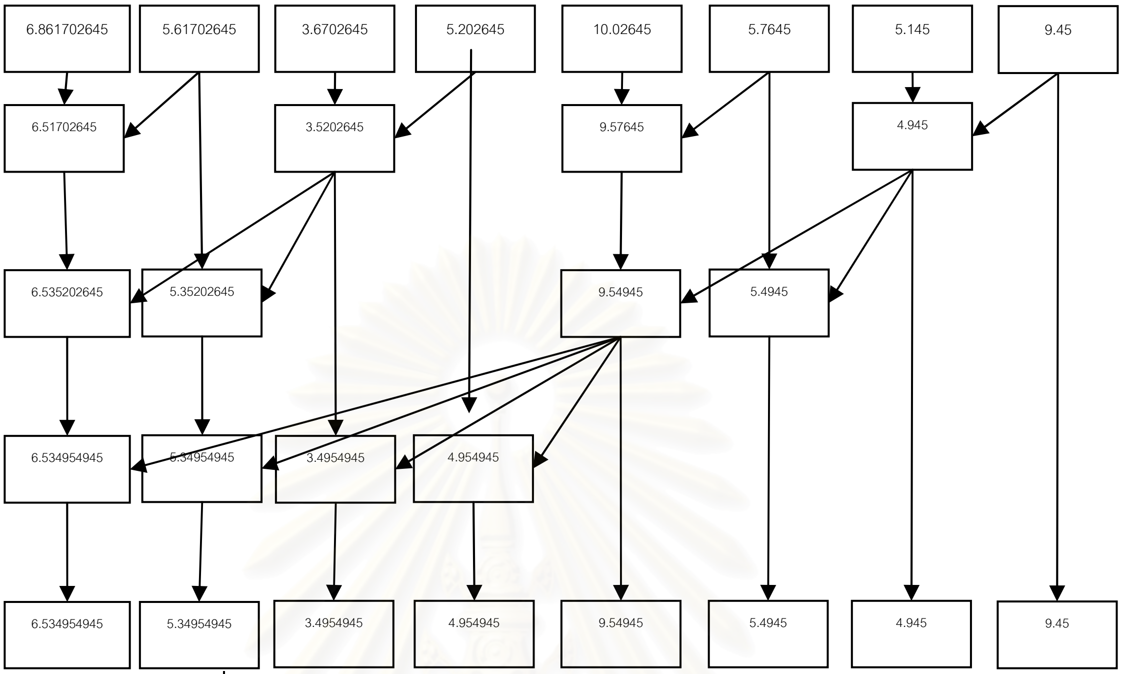
ตารางที่ 3.1 แสดงรูปแบบการแทนค่าของ x_n = 653495.49 และ x'_n ที่ได้มีการใส่ค่าความผิดพลาด 5%

n	x_n	x'_n
5	6.5349549	6.861702645
4	5.349549	5.61702645
3	3.49549	3.6702645
2	4.9549	5.202645
1	9.549	10.02645
0	5.49	5.7645
-1	4.9	5.145
-2	9	9.45



รูปที่ 3.3 วิธีการกู้ค่าความผิดพลาดในวิธีดั้งเดิมของ X = 653495.49

ในส่วนของวิธีการกู้ค่าความผิดพลาดแบบขนานสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 วิธีการกู้ค่าความผิดพลาดแบบขนานของ $X = 653495.49$

โดยที่ผลลัพธ์ของการกู้ค่าความผิดพลาดทั้งสองวิธีนั้นแสดงได้ดังตารางที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าคำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดของทั้งสองวิธีนั้นได้คำตอบที่เท่ากัน

ตารางที่ 3.2 แสดงคำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดทั้งแบบดังเดิมและแบบขนานของ $X = 653495.49$

n	x_n (แบบดังเดิม)	n	x_n (แบบขนาน)
5	6.534954945	7	6.534954945
4	5.34954945	6	5.34954945
3	3.4954945	5	3.4954945
2	4.954945	4	4.954945
1	9.54945	3	9.54945
0	5.4945	2	5.4945
-1	4.945	1	4.945
-2	9.45	0	9.45

3.2 สรุป

ในบทนี้เราได้กล่าวถึงวิธีในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องแบบขนาน โดยการนำเอาสถาปัตยกรรมของการทำออนเดอะฟลายเข้ามาใช้ เพื่อลดค่าความซับซ้อนของเวลาลงจากความซับซ้อนเชิงเส้นตรง $\Theta(n)$ โดยที่ n คือจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อนที่ใช้ เหลือความซับซ้อนเชิงลอการิทึม Θ $(\log n)$ โดยที่ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมยังมีค่าเท่าเดิม แต่วิธีการนี้จะต้องใช้จำนวนของวงจรที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดมากขึ้นกว่าแบบดั้งเดิม โดยจะเพิ่มขึ้นจาก 1 วงจรเป็น $n/2$ วงจรโดยที่ n คือจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน

บทที่ 4

ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

จุดประสงค์หลักของงานวิจัยชิ้นนี้คือ การเสนอรูปแบบการแทนค่าของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องใหม่ ที่เรียกว่าระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน (Redundant Analog Number System, RANS) [21] โดยที่ระบบจำนวนแบบใหม่นี้สามารถลดค่าความซับซ้อนของเวลาจาก O(n) โดยที่ n เป็นจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อนที่ใช้ในระบบให้เหลือค่าความซับซ้อนของเวลาเป็นค่าคงที่ได้ พร้อมทั้งสามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดโดยปราศจาก การแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดได้ ซึ่งระบบจำนวนค่าต่อเนื่องไม่สามารถกำจัดข้อผิดพลาดนี้ได้

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงแรงจูงใจในการต้องการที่จะลดค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องให้ลดลง และวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดในระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง พร้อมทั้งได้เสนอระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน การกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน และตัวดำเนินการพื้นฐาน (บวก ลบ คูณ และหาร) สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

4.1 บทกล่าวนำ

ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเป็นระบบจำนวนที่ถูกนำเสนอเพื่อลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในวงจรจากสัญญาณรบกวน โดยได้นำเสนอการใช้ดิจิตซ้ำซ้อนหลายๆ ดิจิตเพื่อทำการแทนค่าสัญญาณเพียงหนึ่งสัญญาณ การลดค่าความผิดพลาดนี้สามารถทำได้โดยการกู้ค่าความผิดพลาดด้วยอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดสำหรับระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง โดยอัลกอริทึมที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดนี้จะทำการกู้ค่าความผิดพลาดทีละดิจิต ดิจิตที่มีค่าความสำคัญต่ำกว่าจะทำหน้าที่ในการลดค่าความผิดพลาดสำหรับดิจิตที่มีค่าความสำคัญสูงกว่าที่อยู่ติดกัน การกู้ค่าความผิดพลาดนี้สามารถทำได้ทีละดิจิตเท่านั้น ทำให้ค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดเท่ากับ $\Theta(n)$ โดยที่ n คือจำนวนของดิจิตซับซ้อนที่ระบบนั้นใช้ ถึงแม้ว่าสถาปัตยกรรมแบบออนเดอะฟลายถูกนำมาประยุกต์ใช้ก็ตาม เวลายังคงขึ้นกับจำนวนดิจิต โดยอยู่ในรูปของ $\Theta(\log\ n)$ ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 โดยถ้าระบบให้ความสำคัญกับค่าความแม่นยำหลังจากการกู้ค่าความผิดพลาดมากเท่าไร ก็ยิ่งทำให้ต้องใช้จำนวนของดิจิตซ้ำซ้อนนี้เพิ่มขึ้นด้วย เนื่องจากผลกระทบของการแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุด

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น เราจึงได้สนใจในการลดค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องลง โดยการนำเสนอระบบจำนวนสำหรับการทำงานแบบแอนะล็อกขึ้นมาให้ ซึ่งเป็นแบบปรับปรุงของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง ที่เรียกว่า ระบบจำนวน

แอนะล็อกซ้ำซ้อน โดยที่ระบบจำนวนนี้จะใช้เพียงแค่สองดิจิตในการแทนค่าจำนวนหนึ่งจำนวน พร้อมทั้งระบบจำนวนนี้สามารถกำจัดการแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดได้ในระบบที่ค่าความผิดพลาดอยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน (Equal error factor) [22, 23] ทำให้ระบบจำนวนนี้จะใช้เพียงแค่สองดิจิตสำหรับทุกๆ ระบบที่ให้ความสำคัญกับดิจิตหลังจากที่กู้ค่าความผิดพลาดต่างๆ กัน ซึ่งก็หมายความว่าเราสามารถลดค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนใหม่นี้เป็นค่าคงที่ พร้อมทั้งได้เสนออัลกอริทึมตัวดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ คือ การบวก ลบ คูณ หาร สำหรับระบบจำนวนใหม่นี้ด้วย

4.2 **ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน** (Redundant analog number system)

กำหนดให้ X เป็นค่าเชิงตัวเลข (Numerical value) สำหรับจำนวนจริงใดๆ บนฐาน β ($\beta \geq 2$) ซึ่งเป็นจำนวนจริง โดยที่ $|X| < M$ ซึ่ง M เป็นค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต (Maximum dynamic range) รูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนจะใช้ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน (Redundant analog digit) จำนวนสองดิจิต ในการแทนค่า X ประกอบด้วย x_v (ดิจิตแอนะล็อกค่า , Valued analog digit) คือดิจิตที่ทำหน้าที่แทนค่าของ X และ x_r (ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน, Redundancy analog digit) คือดิจิตที่เป็นดิจิตซ้ำซ้อนของ x_v โดยที่รูปแบบการแทนค่าของ X ในระบบจำนวน แอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ประกอบไปด้วย x_v และ x_r สามารถคำนวณได้จากสมการที่ 4.1 และ 4.2

$$x_v = \beta \times (X / M) \tag{4.1}$$

$$x_r = \begin{cases} \left(\lceil x_v \rceil - x_v\right) \times \beta & x_v \geq 0 \\ \left(\lfloor x_v \rfloor - x_v\right) \times \beta & x_v < 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

สมการที่ 4.2 สามารถนำสมการทั้งสองมารวมกันได้ดังสมการที่ 4.3

$$x_r = \left(sign(x_v) \times \left(\lceil |x_v| \rceil - |x_v|\right)\right) \times \beta \tag{4.3}$$

สำหรับค่าตัวแปรทางแอนะล็อกของดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นจะเป็นตัวแปรทางไฟฟ้าเชิงเส้น (linear electronic variable) ยกตัวอย่างเช่น กระแสไฟฟ้า หรือค่าความต่างศักย์ เป็นต้น ซึ่งสามารถคำนวณได้เหมือนกับระบบจำนวนค่าต่อเนื่องดังสมการที่ 4.4 และ 4.5

$$q_v = x_v \times (Q / \beta) \tag{4.4}$$

$$q_r = x_r \times (Q / \beta) \tag{4.5}$$

โดยที่ q_v และ q_r คือค่าตัวแปรทางแอนะล็อกของดิจิต x_v และ x_r ตามลำดับ และค่า Q คือขอบเขตสูงสุดทางแอนะล็อกที่ระบบรองรับได้นั้นจะต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง $\pm Q$ เท่านั้น ซึ่งในความเป็นจริงแล้วในวงจรแอนะล็อกนั้นจะทำการดำเนินการต่างๆ ด้วยค่าตัวแปรทางแอนะล็อกนี้ แต่เพื่อให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้เข้าใจได้ง่ายขึ้น จึงขอให้ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนในการคำนวณ และดำเนินการต่างๆ แทนค่าตัวแปรทางแอนะล็อก

ทฤษฎีบทที่ *4.1* *กำหนดให้ X เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนคือ x_v และ x_r บนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ ด้วยค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต M ค่าสัมบูรณ์ของดิจิตแอนะล็อกค่า (x_v) และค่าสัมบูรณ์ของดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน (x_r) สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนจะมีค่าไม่เกินค่าของ β*

พิสูจน์

จากสมการที่ 4.1 และจากข้อกำหนดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่บอกว่า $|X| < M$ เสมอ ทำให้ $|X / M| < 1$ ดังนั้น

$$-\beta < \frac{X}{M}\beta < \beta$$

จากสมการที่ 4.3 เห็นได้ชัดเจนว่า $\left| sign(x_v) \times \left(\lceil |x_v| \rceil - |x_v| \right) \right| < 1$ และสมการที่ 4.1 ทำให้

$$-\beta < \left(sign(x_v) \times \left(\lceil |x_v| \rceil - |x_v| \right) \right) \times \beta < \beta$$

เราก็สามารถสรุปได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของดิจิตแอนะล็อกค่า และดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นจะมีค่าไม่เกิน β ■

ทฤษฎีบทที่ 4.2 *กำหนดให้ X เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนคือ x_v และ x_r โดยมีค่าตัวแปรทางแอนะล็อกคือ q_v และ q_r ตามลำดับ บนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ ด้วยค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต M ค่าตัวแปรทางแอนะล็อกของดิจิตแอนะล็อกค่า (q_v) และดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน (q_r) สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนจะไม่เกินค่า $\pm Q$*

พิสูจน์

จากทฤษฎีบทที่ 4.1 ได้กล่าวไว้ว่า $|x_v|$ และ $|x_r| < \beta$ สามารถสรุปได้ว่า

$$|x_n / \beta| < 1$$

และจากสมการที่ 4.4 และ 4.5 จะสรุปได้ว่า

$$-Q < x_n \times (Q / \beta) < Q$$

$$-Q < x_r \times (Q / \beta) < Q \qquad \blacksquare$$

สมมุติให้ดิจิตแอนะล็อกทั้งดิจิตแอนะล็อกแสดงค่า และดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นเกิดค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน ในช่วงเวลาเดียวกัน ดังนั้นดิจิต x_v และ x_r หลังจากที่ได้ทำการใส่ตัวประกอบของค่าความผิดพลาดแล้วสามารถแสดงออกมาได้ดังสมการที่ 4.6 และ 4.7

$$x'_v = x_v \times \varepsilon \tag{4.6}$$

$$x'_r = x_r \times \varepsilon \tag{4.7}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ค่า $\beta = 2$ และ 10 และค่าระยะสูงสุดแบบพลวัตเท่ากับ 1000 รูปแบบการแทนค่า และค่าตัวแปรทางแอนะล็อกของ $X = 204.86$ ในกรณีที่วงจรมีค่าตัวแปรทางแอนะล็อกเท่ากับ 0 μA to 50 μA เทียบกับระบบจำนวนค่าต่อเนื่องสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.1 และ 4.2 ตามลำดับ

ตารางที่ 4.1 แสดงรูปแบบการแทนค่าของ $X = 204.86$ สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

β	x_v	x_r	q_v	q_r
2	0.40972	1.0056	10.243	25.14
10	2.0486	9.514	10.243	47.57

ตารางที่ 4.2 แสดงรูปแบบการแทนค่าของ $X = 204.86$ สำหรับระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

	2	1	0	-1	-2
x_n ($\beta = 2$)	0.40972	0.81944	1.63888	1.27776	0.55552
x_n ($\beta = 10$)	2.0486	0.486	4.86	8.6	6

□

4.3 การกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ในส่วนนี้นำเสนออัลกอริทึมที่ใช้สำหรับการกู้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนซึ่งได้แสดงให้เห็นว่าการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนนี้ โดยที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นอยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน สามารถทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการกู้

ค่าความผิดพลาดนั้น ปราศจากการแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดได้ และเนื่องจากระบบจำนวนนี้จะใช้แค่สองดิจิตสำหรับการแทนค่าในทุกๆ ความแม่นยำที่สนใจของคำตอบที่ได้หลังจากการกู้ค่าความผิดพลาด ทำให้ค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในระบบจำนวนนี้สามารถลดลงเป็นเวลาคงที่ได้ เมื่อเทียบกับระบบจำนวนค่าต่อเนื่องที่มีค่าความซับซ้อนของเวลาเป็น O(n) โดยที่ n เป็นจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน

***ทฤษฎีบทที่** 4.3 กำหนดให้* (x_v, x_r) *และ* (x'_v, x'_r) *เป็นรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนของจำนวนจริง* X *และ* X' *ตามลำดับ โดยที่* X' *เป็นจำนวนที่เกิดข้อผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน* ε *ขึ้นกับจำนวนจริง* X *บนฐาน* β *เมื่อ* β *เป็นจำนวนจริงที่* $\beta \geq 2$ *ด้วยค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต* M *และ* (x^*_v, x^*_r) *คือรูปแบบการแทนค่าของคำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาด ซึ่งสามารถหาได้จากอัลกอริทึม4.1 โดย* $x^*_v = x_v$ *และ* $x^*_r = x_r$

อัลกอริทึมที่ 4.1 อัลกอริทึมในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

Input: (x'_v, x'_r)

Output: (x^*_v, x^*_r)

begin if $x'_v = 0$ and $x'_r = 0$ then

$x^*_v \leftarrow 0,\ x^*_r \leftarrow 0$

else $$\varepsilon = \frac{x'_r + x'_v\beta}{\left[x'_v + (x'_r / \beta)\right]_{Rounded} \times \beta}$$

$x^*_v = x'_v / \varepsilon,\ x^*_r = x'_r / \varepsilon$

end if

end

ภายใต้เงื่อนไขดังสมการที่ 4.8 และ 4.9

ถ้า $x_v > 0$ $$\lceil x_v \rceil = [\, x'_v + (x'_r / \beta) \,]_{Rounded} \quad (4.8)$$

นอกเหนือจากนั้น $$\lfloor x_v \rfloor = [\, x'_v + (x'_r / \beta) \,]_{Rounded} \quad (4.9)$$

พิสูจน์

การพิสูจน์นี้จะถูกแบ่งออกเป็นสองกรณี คือ

กรณีที่ 1 คือ $x'_v > 0$

จากสมการที่ 4.2 4.6 และ 4.7 สามารถสรุปได้ว่า

$$\frac{x'_r}{\varepsilon} = \left(\lceil x_v \rceil - \frac{x'_v}{\varepsilon}\right) \times \beta$$

ซึ่งก็คือ $$\varepsilon = \frac{x'_r + x'_v \beta}{\beta \lceil x_v \rceil}$$

และด้วยเงื่อนไขในสมการที่ 4.8 สามารถหาค่า ε จากดิจิตที่มีค่าความผิดพลาด x'_v และ x'_r ได้โดย

$$\varepsilon = \frac{x'_r + x'_v \beta}{\left[x'_v + (x'_r / \beta)\right]_{Rounded} \times \beta}$$

กรณีที่ 2 คือ $x'_v < 0$ จากสมการที่ 4.2 4.6 และ 4.7 สามารถสรุปได้ว่า

$$\frac{x'_r}{\varepsilon} = \left(\lfloor x_v \rfloor - \frac{x'_v}{\varepsilon}\right) \times \beta$$

ซึ่งก็คือ $$\varepsilon = \frac{x'_r + x'_v \beta}{\beta \lfloor x_v \rfloor}$$

และด้วยเงื่อนไขในสมการที่ 4.9 เราสามารถหาค่า ε จากดิจิตที่มีค่าความผิดพลาด x'_v และ x'_r ได้โดย

$$\varepsilon = \frac{x'_r + x'_v \beta}{\left[x'_v + (x'_r / \beta)\right]_{Rounded} \times \beta}$$

จาก $x^*_v = x'_v / \varepsilon$ และสมการที่ 4.6 สามารถสรุปได้ว่า $x^*_v = x_v$

และจาก $x^*_r = x'_r / \varepsilon$ และสมการที่ 4.6 สามารถสรุปได้ว่า $x^*_r = x_r$

หมายเหตุ ฟังก์ชันการ Rounded ที่ใช้ในอัลกอริทึมที่ 4.1 นั้นคือฟังก์ชันการปัดเศษใกล้เคียงลง (rounded floor function) กำหนดให้จำนวนจริง $X = Y + Z$ โดยที่ Y เป็นภาคจำนวนเต็ม (integer part) และ Z เป็นภาคเศษส่วน (fractional part) ของ X ซึ่ง $0 \le Z < 1$ ฟังก์ชันการปัดเศษใกล้เคียงลงสามารถนิยามได้ดังสมการที่ 4.10

$$[X]_{Rounded} = \begin{cases} Y+1 & 0.5 < Z < 1 \\ Y & 0 \le Z \le 0.5 \end{cases} \tag{4.10}$$

■

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้ $\beta = 2$ และให้ค่าระยะสูงสุดแบบพลวัตเท่ากับ 32 รูปแบบการแทนค่าของ x ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.3 โดยในระบบนี้ให้ค่าแอนะล็อกนั้นอยู่ในช่วงของ 0 μA ถึง 50 μA และมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นในระบบเท่ากับ 25% ค่าแอนะล็อกและผลลัพธ์ที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 แสดงถึงการกู้ค่าความผิดพลาดของ X = 24.727 โดยที่ระบบมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 25%

	x_v	x_r
x_n	1.5454375	0.909125
q_n	38.6359375	22.728125
X'_n	1.931796875	1.13640625
x^*_n	1.5454375	0.909125

□

จากตัวอย่างที่ 4.2 จะเห็นได้ว่าดิจิตซ้ำซ้อนเพียงดิจิตเดียวนั้นก็เพียงพอสำหรับการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบสำหรับระบบที่ค่าความผิดพลาดอยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน โดยที่คำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นจะมีค่าตรงกับค่าเริ่มต้น $x_n = x^*_n$ เนื่องจากในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นจะไม่มีการแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุด และค่าความซับซ้อนของเวลาเราก็สามารถลดลงได้จาก O(n) เหลือ O(1)

ทฤษฎีบทที่ 4.4 *กำหนดให้ (x_v, x_r) และ (x'_v, x'_r) เป็นรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนของจำนวนจริง X และ X' ตามลำดับ โดยที่ X' เป็นจำนวนที่เกิดข้อผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน ε ขึ้นกับจำนวน X บนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \ge 2$ ด้วยค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต M ค่าความผิดพลาดที่หาได้จากอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาด ε จะเป็นจำนวนบวกเสมอ ถ้า x_v ไม่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเราสามารถหา(x^*_v, x^*_r) ที่เป็นรูปแบบการแทนค่าของผลลัพธ์จากอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดได้เสมอ*

พิสูจน์ การพิสูจน์ถูกแบ่งออกเป็นสองกรณี

กรณีที่ 1 คือ $x_v > 0$

$$x'_r + x'_v\beta = (\lceil x_v \rceil - x_v)\beta\varepsilon + x_v\beta\varepsilon$$

$$= \lceil x_v \rceil \beta\varepsilon \quad > 0$$

$$[x'_v + (x'_r / \beta)]_{Rounded} = [(x_v\varepsilon) + (\lceil x_v \rceil - x_v)\varepsilon]_{Rounded}$$

$$= [\lceil x_v \rceil \varepsilon]_{Rounded} \quad > 0$$

ดังนั้นจากกรณีนี้เราสามารถสรุปได้ว่า $\varepsilon > 0$

กรณีที่ 2 คือ $x_v > 0$

$$x'_r + x'_v\beta = (\lfloor x_v \rfloor - x_v)\beta\varepsilon + x_v\beta\varepsilon$$

$$= \lfloor x_v \rfloor \beta\varepsilon \quad < 0$$

$$[x'_v + (x'_r / \beta)]_{Rounded} = [(x_v\varepsilon) + (\lfloor x_v \rfloor - x_v)\varepsilon]_{Rounded}$$

$$= [\lfloor x_v \rfloor \varepsilon]_{Rounded} \quad < 0$$

จากกรณีนี้เราก็สามารถสรุปได้ว่า $\varepsilon > 0$

จากทั้งสองกรณีเราสรุปได้ว่าถ้า x_v ไม่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์แล้วค่า ε จะมีค่าเป็นจำนวนบวกเสมอ ■

4.4 ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

จากสมการที่ 4.8 และ 4.9 เป็นสมการที่บ่งบอกถึงค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน โดยค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอม คือขอบเขตของค่าความผิดพลาดสูงสุดเกิดขึ้นได้ในวงจร ถ้าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนั้นเกินขอบเขตนี้จะทำให้อัลกอริทึมกู้ค่าความผิดพลาดนั้นไม่สามารถคำนวณผลลัพธ์ที่ออกมาได้

ทฤษฎีบทที่ 4.5 *กำหนดให้ X เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนบนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ คือ (x_v, x_r) และ (x'_v, x'_r) เป็นรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนของจำนวนจริง X' ซึ่งเป็นจำนวนที่เกิดข้อผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน ε ขึ้นกับจำนวนจริง X ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้*

$$1-\frac{1}{2\beta} \le \varepsilon \le \frac{1}{2\beta}+1 \tag{4.11}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 4.3 จะให้คำตอบที่ถูกต้องได้ก็ต่อเมื่อสมการที่ 4.8 และ 4.9 เป็นจริง ดังนั้นการพิสูจน์นี้จะทำการแสดงให้เห็นว่าสมการที่ 4.8 และ 4.9 จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อสมการที่ 4.11 เป็นจริงเช่นกัน การพิสูจน์นี้จะถูกแบ่งออกเป็นสองกรณี

กรณีที่ 1 คือกรณีที่ $x_v > 0$ และสมการที่ 4.8 เป็นจริง

$$\begin{aligned}
\lceil x_v \rceil &= \left[x'_v + (x'_r / \beta) \right]_{Rounded} \\
&= \left[x_v\varepsilon + \frac{(\lceil x_v \rceil - x_v)\beta\varepsilon}{\beta} \right]_{Rounded} \\
&= \left[\lceil x_v \rceil \varepsilon \right]_{Rounded}
\end{aligned}$$

ซึ่งก็คือ

$$-\frac{1}{2} \le \beta(\varepsilon-1) \le \frac{1}{2}$$

เราสามารถนำมาเขียนใหม่ได้ว่า

$$1-\frac{1}{2\beta} \le \varepsilon \le \frac{1}{2\beta}+1$$

กรณีที่ 2 คือกรณีที่ $x_v < 0$ และสมการที่ 4.9 เป็นจริง

$$\begin{aligned}
\lfloor x_v \rfloor &= \left[x'_v + (x'_r / \beta) \right]_{Rounded} \\
&= \left[x_v\varepsilon + \frac{(\lfloor x_v \rfloor - x_v)\beta\varepsilon}{\beta} \right]_{Rounded} \\
&= \left[\lfloor x_v \rfloor \varepsilon \right]_{Rounded}
\end{aligned}$$

ซึ่งก็คือ

$$-\frac{1}{2} \le (-\beta)(\varepsilon-1) \le \frac{1}{2}$$

เราสามารถนำมาเขียนใหม่ได้ว่า

$$1-\frac{1}{2\beta} \le \varepsilon \le \frac{1}{2\beta}+1$$

จากทั้งสองกรณีเราสามารถสรุปได้ว่าทฤษฎีบทที่ 4.3 จะให้คำตอบที่ถูกต้องก็ต่อเมื่อสมการที่ 4.11 เป็นจริง ■

ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนจะลดลงเมื่อค่าของฐานนั้นมีค่าเพิ่มขึ้น ยกตัวอย่างเช่น บนฐาน $\beta = 2$ ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมเท่ากับ 25 % และมีค่าเท่ากับ 5% สำหรับฐาน $\beta = 10$

4.5 ช่วงของค่าที่ถูกต้องที่เกิดขึ้นในกรณีที่ความผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบไม่เท่ากันของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ในงานวิจัยชิ้นนี้นั้นได้กำหนดให้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนั้นจะต้องอยู่ในรูปของตัวประกอบที่เท่ากัน ในส่วนนี้จึงได้ทำการพิจารณาถึงกรณีที่ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นอยู่ในรูปของตัวประกอบที่ไม่เท่ากัน ซึ่งก็คือ $x'_v = x_v \times \varepsilon_v$ และ $x'_r = x_r \times \varepsilon_r$ โดยที่ $\varepsilon_v \neq \varepsilon_r$ โดยทฤษฎีต่อไปนี้จะกล่าวถึงค่าความผิดพลาดสูงสุดของผลลัพธ์จากอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้ในกรณีที่ความผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบนั้นไม่เท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 4.6 *กำหนดให้ (x_v, x_r) เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง X และ (x'_v, x'_r) เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง X' ซึ่งเป็นจำนวนที่เกิดความผิดพลาดขึ้นกับ X สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนบนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ โดยที่ระบบนี้มีค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบที่ไม่เท่ากันคือ ε_v และ ε_r ซึ่งเกิดขึ้นกับดิจิต x_v และ x_r ตามลำดับ และค่าความผิดพลาดนั้นยังคงอยู่ในช่วงของค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอม ค่าที่ถูกต้องของดิจิต x_v นั้นจะต้องอยู่ในช่วงดังสมการต่อไปนี้*

$$\frac{x'_v}{1+\Gamma^+} \leq x_v \leq \frac{x'_v}{1+\Gamma^-} \tag{4.12}$$

โดยที่

$$\Gamma^+ = 1 - \frac{\frac{2\beta - 1}{2\beta}[Q]_{Rounded}}{Q}$$

$$\Gamma^- = 1 - \frac{\frac{2\beta + 1}{2\beta}[Q]_{Rounded}}{Q}$$

$$Q = x'_v + \frac{x'_r}{\beta}$$

พิสูจน์

กำหนดให้ $x'_v = x_v \times \varepsilon_v$ และ $x'_r = x_r \times \varepsilon_r$ จากอัลกอริทึมในการกู้ค่าความผิดพลาด

$$\varepsilon = \frac{x'_v + (x'_r / \beta)}{[x'_v + (x'_r / \beta)]_{Rounded}}$$

และกำหนดให้ $Q = x'_v + (x'_r / \beta)$

ดังนั้น

$$\varepsilon = \frac{Q}{[Q]_{Rounded}}$$

ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_v นั้นสามารถเขียนออกมาได้ว่า

ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต $x_v = x_v - (x'_v / \beta)$

$$= x_v - \frac{x_v \varepsilon_v}{\frac{Q}{[Q]_{Rounded}}}$$

$$= x_v \left(\frac{Q - \varepsilon_v [Q]_{Rounded}}{Q} \right)$$

$$= x_v \left(1 - \frac{\varepsilon_v [Q]_{Rounded}}{Q} \right).$$

จากสมการนี้สามารถสรุปได้ว่า $\left(1 - \frac{\varepsilon_v [Q]_{Rounded}}{Q} \right)$ คือค่าความผิดพลาดที่เป็นเปอร์เซ็นต์ของ x_v (Γ)

ถ้า $[Q]_{Rounded} \geq Q$ ดังนั้น ($[Q]_{Rounded} / Q$) ≥ 1 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$1 - \frac{\left(\frac{2\beta + 1}{2\beta} \right) [Q]_{Rounded}}{Q} \leq \Gamma \leq 1 - \frac{\left(\frac{2\beta - 1}{2\beta} \right) [Q]_{Rounded}}{Q} \qquad (4.13)$$

แต่ถ้า $[Q]_{Rounded} < Q$ ทำให้ $([Q]_{Rounded} / Q) < 1$เราก็สามารถสรุปได้ว่า

$$1-\frac{\left(\frac{2\beta+1}{2\beta}\right)[Q]_{Rounded}}{Q} \le \Gamma \le 1-\frac{\left(\frac{2\beta-1}{2\beta}\right)[Q]_{Rounded}}{Q} \qquad (4.14)$$

จากสมการที่ 4.13 และ 4.14 เราสามารถสรุปได้ว่า $\Gamma^- \le \Gamma \le \Gamma^+$

จาก Γ คือจำนวนเปอร์เซ็นต์ของค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_v เราก็สามารถสรุปได้ว่า

$$x_v + (x_v\Gamma^-) \le x'_v \le x_v + (x_v\Gamma^+)$$

ซึ่งก็คือ

$$x_v(1 + \Gamma^-) \le x'_v \le x_v(1 + \Gamma^+)$$

ทำให้สามารถสรุปถึงค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูปตัวประกอบที่ไม่เท่ากันได้ว่า

$$\frac{x'_v}{1+\Gamma^+} \le x_v \le \frac{x'_v}{1+\Gamma^-}$$

จึงสรุปได้ว่าค่าของ x_v ที่ถูกต้องนั้นจะต้องอยู่ในช่วงดังที่แสดงในสมการที่ 4.12 ■

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ค่า X = 20.486 และ M = 100 ใน β=10 โดยที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_v เท่ากับ 5% และค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_r เท่ากับ 0.5% การประมาณค่า x_v ที่ถูกต้องจาก x'_v และ x'_r สามารถทำได้ดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 แสดงผลลัพธ์ของการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีที่ค่าความผิดพลาดระหว่างตัวดำเนินการไม่เท่ากับในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

	v	r
x_n	2.0486	9.514
x'_n	2.15103	9.56157
x^*_v	≈ 2.07682704645713309	≈9.2317295354286691

จากอัลกอริทึมในการกู้ค่าความผิดพลาดคำนวณค่า ε ออกมาได้เท่ากับ 1.035729 จะเห็นได้ว่าการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นไม่ตรงกับค่าเริ่มต้น สำหรับการประมาณค่าเริ่มต้นเราสามารถคำนวณได้โดยการนำเอาทฤษฎีบทที่ 4.6 มาช่วยโดยช่วงของค่าเริ่มต้นนั้นจะต้องอยู่ในช่วงของ

$$1.986596155 \le x_v \le 2.181082483$$

ซึ่งก็จะเห็นว่าค่า x_v ที่ถูกต้องนั้นก็อยู่ในช่วงนี้จริง □

4.6 การวิเคราะห์ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องในด้านปัจจัยต่างๆ รวมถึงกรณีต่างๆ ที่จะทำให้เกิดข้อผิดพลาดเหล่านั้นขึ้นมาได้ เพื่อจะได้นำไปเปรียบเทียบกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

4.6.1 การวิเคราะห์ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องที่ใช้เพียงแค่สองดิจิตในการกู้ค่าความผิดพลาด

งานวิจัยชิ้นนี้เราได้เสนอระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ใช้ดิจิตเพียงแค่สองดิจิตเท่านั้น ในส่วนนี้เราจึงได้ทำการวิเคราะห์ถึงระบบจำนวนค่าต่อเนื่องที่มีการใช้ดิจิตเพียงแค่สองดิจิตเท่ากันว่าจะมีค่าความผิดพลาดอันเนื่องมากจากการแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดเป็นเท่าไรเมื่อเทียบกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ไม่มีการแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดว่าแตกต่างกันเท่าใด

ประพจน์ที่ 4.1 *กำหนดให้ X เป็นจำนวนจริงที่มีรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องด้วยดิจิตสองดิจิต คือ x_L และ x_K โดยที่ $K = L - 1$ บนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ โดยที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_L และ x_K คือ ε_L และ ε_K ตามลำดับ ค่าความผิดพลาดสูงสุดของรูปแบบการแทนค่าในลักษณะนี้ อันเนื่องมาจากการแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุด ε'_L สามารถแสดงได้ดังอสมการดังต่อไปนี้*

$$\varepsilon'_L < 1 / 2\beta \tag{4.15}$$

พิสูจน์

สมการที่ 2.8 แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของค่าความผิดพลาดระหว่างดิจิตที่ L และดิจิตที่ K ซึ่งในกรณีนี้ $K = L$-1 ค่าความผิดพลาดของดิจิตตำแหน่งที่ L สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\varepsilon_L = \varepsilon_K / \beta$$

ดังนั้นค่าความผิดพลาดของดิจิตตำแหน่งที่ K จะส่งผลกระทบไปยังดิจิตตำแหน่งที่ L สูงสุดเมื่อ ε_K มีค่าใกล้เคียงค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอม ทำให้สามารถจะสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} \varepsilon'_L &< (\beta(1 / 2\beta)) / \beta \\ &< 1 / 2\beta \end{aligned}$$

ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่าค่าความผิดพลาดสูงสุดที่จะเกิดขึ้นได้กับดิจิต x_L นั้นจะเป็นได้ดังอสมการที่ 4.15 ■

จากประพจน์นี้ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่าค่าความผิดพลาดสูงสุดที่อาจจะเกิดขึ้นกับดิจิต x_L ในกรณีที่ใช้เพียงแค่สองดิจิตคือ 1/2β เมื่อเทียบกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ไม่เกิดค่าความผิดพลาดขึ้นระหว่างผลลัพธ์ที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดกับจำนวนที่ต้องการแสดงจริง

4.6.2 การวิเคราะห์การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องในกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดกับแต่ละตัวถูกดำเนินการไม่เท่ากัน

ในส่วนนี้จะทำการวิเคราะห์ถึงระบบจำนวนค่าต่อเนื่องในกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับทั้งสองจำนวนนั้นมีค่าไม่เท่ากันจะทำให้เกิดความผิดพลาดในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้

กำหนดให้รูปแบบการแทนค่าของ X = 20.4894 และ Y = 20.4891 แสดงได้ดังตารางที่ 4.5 และมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นในระบบเท่ากับ 1% สำหรับ X และ 5% สำหรับ Y โดยที่ระบบนี้ทำงานอยู่บน β = 10 และ M =100

ตารางที่ 4.5 แสดงถึงการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีที่มีค่าความผิดพลาดที่ไม่เท่ากับระหว่างถูกตัวดำเนินการในระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

	1	0	-1	-2	-3
x_n	2.04894	0.4894	4.894	8.94	9.4
y_n	2.04891	0.4891	4.891	8.91	9.1
x'_n	2.0694294	0.494294	4.94294	9.0294	9.494
y'_n	2.1513555	0.513555	5.13555	9.3555	9.555
x^*_n	2.0489494	0.489494	4.89494	8.9494	9.494
y^*_n	2.0489555	0.489555	4.89555	8.9555	9.555

และถ้าเกิดการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังจากที่ได้ทำการกู้ค่าความผิดพลาดแล้ว ยกตัวอย่างเช่น $Z = X - Y$ ผลลัพธ์ที่ได้จะสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 แสดงถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการดำเนินการลบของตัวถูกดำเนินการที่ได้รับค่าความผิดพลาดที่ไม่เท่ากันในระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

	1	0	-1	-2	-3
z^*_n	-0.0000061	-0.000061	-0.00061	-0.0061	-0.061

จะเห็นได้ว่าจากตัวอย่างนี้ผลลัพธ์ที่ได้จากการลบเป็นค่าลบ โดยที่ผลลัพธ์ตั้งต้นนั้นจะต้องมีค่าเป็นบวก ซึ่งสามารถที่จะสรุปได้ว่าในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับตัวถูกดำเนินนั้นต้องอยู่ในรูปของเปอร์เซ็นต์ที่เท่ากันเช่นเดียวกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

4.7 การแปลงดิจิตเซตด้วยค่าฐานที่มีค่าไม่เท่ากันของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ในส่วนนี้เราจะกล่าวถึงวิธีการในการแปลงรูปแบบการแทนค่าบนฐานหนึ่งๆ ไปยังรูปแบบการแทนค่าอีกรูปแบบบนฐานที่มีค่าที่แตกต่างกัน เนื่องจากในวงจรนั้นไม่มีความจำเป็นต้องให้ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมในแต่ละส่วนของวงจรจะต้องมีค่าเท่ากัน และเนื่องจากการศึกษาถึงระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนได้แสดงให้เห็นถึงค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมกับค่าฐานที่ได้เลือกใช้ดังในสมการที่ 4.12 ในส่วนนี้จึงได้เสนอถึงอัลกอริทึมที่ใช้ในการแปลงรูปแบบการแทนค่าระหว่างค่าฐานต่างๆ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน [24]

ทฤษฎีบทที่ 4.7 กำหนดให้ *(x_{v1}, x_{r1}) เป็นรูปแบบการแทนค่าของ X สำหรับฐานจำนวนจริงบนฐาน β_1 ที่ $\beta_1 \geq 2$ และกำหนดให้ (x_{v2}, x_{r2}) เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวน X ตัวเดียวกันสำหรับฐานจำนวนจริงบนฐาน β_2 ที่ $\beta_2 \geq 2$ แล้วรูปแบบการแทนค่า (x_{v2}, x_{r2}) บนฐาน β_2 นี้สามารถคำนวณจาก (x_{v1}, x_{r1}) บนฐาน β_1 ได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$x_{v2} = (x_{v1}/\beta_1) \times \beta_2$$

$$x_{r2} = \begin{cases} \left(\left\lceil \dfrac{x_{v1} \times \beta_2}{\beta_1} \right\rceil \beta_2\right) - \left(\lceil x_{v1} \rceil \dfrac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\dfrac{x_{r1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & x_v \geq 0 \\ \left(\left\lfloor \dfrac{x_{v1} \times \beta_2}{\beta_1} \right\rfloor \beta_2\right) - \left(\lfloor x_{v1} \rfloor \dfrac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\dfrac{x_{r1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & x_v < 0 \end{cases}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์ในทฤษฎีนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือกรณีของ x_{v2} และ x_{r2}

กรณีของ x_{v2} จากสมการที่ 4.2 จะได้ว่า

$$x = (x_{v1} / \beta_1)X$$

และ

$$x = (x_{v2} / \beta_2)X$$

ดังนั้น

$$x_{v2} = (x_{v1} / \beta_1)\beta_2 \tag{4.16}$$

กรณีที่สอง x_{r2} สำหรับการพิสูจน์ในกรณีนี้จะถูกแบ่งได้เป็นสองกรณีย่อย

กรณีที่ $x_v \geq 0$

จากสมการที่ 4.3

$$x_v = \lceil x_v \rceil - (x_r / \beta)$$

และจากสมการที่ 4.1 ที่ว่า $x = (x_v \times X) / \beta$ สามารถสรุปได้ว่า

$$x = (\lceil x_v \rceil - (x_r / \beta)) \times (X / \beta)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า

$$x = (\lceil x_{v1} \rceil - (x_{r1} / \beta_1)) \times (X / \beta_1) \tag{4.17}$$

และ

$$x = (\lceil x_{v2} \rceil - (x_{r2} / \beta_2)) \times (X / \beta_2) \tag{4.18}$$

จากสมการที่ 4.17 และ 4.18 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$(\lceil x_{v1} \rceil - (x_{r1} / \beta_1)) \times (X / \beta_1) = (\lceil x_{v2} \rceil - (x_{r2} / \beta_2)) \times (X / \beta_2)$$

$$(\lceil x_{v1} \rceil - (x_{r1} / \beta_1)) \times (\beta_2 / \beta_1) = \lceil x_{v2} \rceil - (x_{r2} / \beta_2)$$

$$(\lceil x_{v1} \rceil - (x_{r1} / \beta_1)) \times (\beta^2_2 / \beta_1) = \lceil x_{v2} \rceil \beta_2 - x_{r2}$$

$$x_{r2} = (\lceil x_{v2} \rceil \beta_2) - (\lceil x_{v1} \rceil (\beta^2_2 / \beta_1)) + ((x_{r1} \beta^2_2) / \beta^2_1)$$

จากสมการที่ 4.16 จะได้ว่า

$$x_{r2} = \left(\left\lceil \frac{x_{v1} \times \beta_2}{\beta_1} \right\rceil \beta_2 \right) - \left(\lceil x_{v1} \rceil \frac{\beta_2^2}{\beta_1} \right) + \left(\frac{x_{r1}\beta_2^2}{\beta_1^2} \right) \qquad (4.19)$$

กรณีที่ $x_v < 0$

จากสมการที่ 4.3

$$x_v = \lfloor x_v \rfloor - (x_r / \beta)$$

และจากสมการที่ 4.1 ที่ว่า $x = (x_v \times X) / \beta$ สามารถสรุปได้ว่า

$$x = (\lfloor x_v \rfloor - (x_r / \beta)) \times (X / \beta)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า

$$x = (\lfloor x_{v1} \rfloor - (x_{r1} / \beta_1)) \times (X / \beta_1) \qquad (4.20)$$

และ

$$x = (\lfloor x_{v2} \rfloor - (x_{r2} / \beta_2)) \times (X / \beta_2) \qquad (4.21)$$

จากสมการที่ 4.20 และ 4.21 เราสามารถสรุปได้ว่า

$(\lfloor x_{v1} \rfloor - (x_{r1} / \beta_1)) \times (X / \beta_1) = (\lfloor x_{v2} \rfloor - (x_{r2} / \beta_2)) \times (X / \beta_2)$

$(\lfloor x_{v1} \rfloor - (x_{r1} / \beta_1)) \times (\beta_2 / \beta_1) = \lfloor x_{v2} \rfloor - (x_{r2} / \beta_2)$

$(\lfloor x_{v1} \rfloor - (x_{r1} / \beta_1)) \times (\beta^2{}_2 / \beta_1) = \lfloor x_{v2} \rfloor \beta_2 - x_{r2}$

$$x_{r2} = (\lfloor x_v \rfloor \beta_2) - (\lfloor x_v \rfloor (\beta^2{}_2 / \beta_1)) + ((x_{r1}\, \beta^2{}_2) / \beta^2{}_1)$$

จากสมการที่ 4.16 จะได้ว่า

$$x_{r2} = \left(\left\lfloor \frac{x_{v1} \times \beta_2}{\beta_1} \right\rfloor \beta_2 \right) - \left(\lfloor x_{v1} \rfloor \frac{\beta_2^2}{\beta_1} \right) + \left(\frac{x_{r1}\beta_2^2}{\beta_1^2} \right) \qquad (4.22)$$

■

ทฤษฎีบทที่ 4.8 *กำหนดให้ $(q_{v1},\ q_{r1})$ เป็นค่าตัวแปรทางแอนะล็อกของรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน $(x_{v1},\ x_{r1})$ บนฐาน β_1 ที่ $\beta_1 \geq 2$ และกำหนดให้ $(q_{v2},\ q_{r2})$ เป็นค่าตัวแปรทางแอนะล็อกของรูปแบบการแทนค่าของ $(x_{v2},\ x_{r2})$ บนฐาน β_2 ที่ $\beta_2 \geq 2$ ค่าตัวแปรทางแอนะล็อก (q_{v2}, q_{r2}) สามารถคำนวณจาก (q_{v1}, q_{r1}) ได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$q_{v1} = q_{v2}$$

และ $$q_{r2} = \begin{cases} \left(\left\lceil \dfrac{q_{v1} \times \beta_2}{Q} \right\rceil \times Q\right) - \left(\left\lceil \dfrac{q_{v1} \times \beta_1}{Q} \right\rceil \times \dfrac{\beta_2 Q}{\beta_1}\right) + \left(\dfrac{q_{r1} \times \beta_2}{\beta_1}\right) & x_v \geq 0 \\ \left(\left\lfloor \dfrac{q_{v1} \times \beta_2}{Q} \right\rfloor \times Q\right) - \left(\left\lfloor \dfrac{q_{v1} \times \beta_1}{Q} \right\rfloor \times \dfrac{\beta_2 Q}{\beta_1}\right) + \left(\dfrac{q_{r1} \times \beta_2}{\beta_1}\right) & x_v < 0 \end{cases}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์สำหรับทฤษฎีนี้เราสามารถทำได้โดยการแบ่งออกเป็นสองกรณีคือของ q_{v2} และ q_{r2}

สำหรับ q_{v2} จาก $x = (q\beta)/Q$ และสมการที่ 4.14 จะได้ว่า

$$\frac{q_{v2}\beta_2}{Q} = \left(\frac{q_{v1}\beta_1}{Q\beta_1}\right)\beta_2$$

ซึ่งก็คือ $q_{v2} = q_{v1}$

สำหรับ q_{r2} เราก็จะทำการแบ่งออกเป็นสองกรณีย่อยเช่นเดียวกัน

กรณีที่ $x_v \geq 0$ จาก $x = (q\beta)/Q$ และสมการที่ 4.19 จะได้ว่า

$$q_{r2}\beta / Q = \left\lceil \frac{q_{v1}\beta_2}{Q} \right\rceil \beta_2 - \left\lceil \frac{q_{v1}\beta_1}{Q} \right\rceil \frac{\beta_2^2}{\beta_1} + \frac{q_{r1}}{Q}\frac{\beta_2^2}{\beta_1}$$

$$q_{r2} = \left(\left\lceil \frac{q_{v1}\beta_2}{Q} \right\rceil Q\right) - \left(\left\lceil \frac{q_{v1}\beta_1}{Q} \right\rceil \frac{\beta_2 Q}{\beta_1}\right) + \left(q_{r1}\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$$

กรณีที่ $x_v < 0$ จาก $x = (q\beta)/Q$ และสมการที่ 4.22 จะได้ว่า

$$q_{r2}\beta / Q = \left\lfloor \frac{q_{v1}\beta_2}{Q} \right\rfloor \beta_2 - \left\lfloor \frac{q_{v1}\beta_1}{Q} \right\rfloor \frac{\beta_2^2}{\beta_1} + \frac{q_{r1}}{Q}\frac{\beta_2^2}{\beta_1}$$

$$q_{r2} = \left(\left\lfloor \frac{q_{v1}\beta_2}{Q} \right\rfloor Q\right) - \left(\left\lfloor \frac{q_{v1}\beta_1}{Q} \right\rfloor \frac{\beta_2 Q}{\beta_1}\right) + \left(q_{r1}\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$$

■

ตัวอย่างที่ 4.4 ทำการแปลงค่าของ X = 4.53 บนฐาน 10 ไปยังฐานอื่นๆ (2 ถึง 9) โดยที่ X =10 และ $Q = 75\mu A$ รูปแบบการแทนค่าและค่าตัวแปรทางแอนะล็อกของ X สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.7

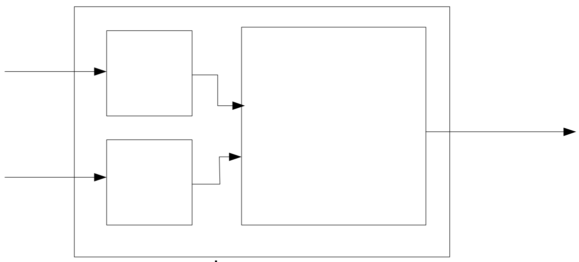
ตารางที่ 4.7 แสดงถึงการแปลงค่า $X = 4.53$ บนฐาน 10 ไปยังฐานอื่นๆ

Base	x_v	x_r	$q_v(\mu A)$	$q_r(\mu A)$
10	4.53	4.7	33.975	35.25
9	4.077	8.307	33.975	69.225
8	3.624	3.008	33.975	28.2
7	3.171	5.803	33.975	62.175
6	2.718	1.692	33.975	21.15
5	2.265	3.675	33.975	55.125
4	1.812	0.752	33.975	14.1
3	1.359	1.923	33.975	48.075
2	0.906	0.188	33.975	7.05

□

4.8 ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ในส่วนนี้เราได้เสนอถึงตัวดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน โดยที่ส่วนที่ใช้การคำนวณสามารถเขียนออกมาให้อยู่ในรูปของแผนภาพบล็อกได้ดังรูปที่ 4.1 ซึ่งตัวดำเนินการนั้นจะต้องมีการทำการกู้ค่าความผิดพลาดก่อนเข้าไปทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นเราจะพิจารณาค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากตัวดำเนินการเท่านั้น โดยเราจะทำการพิสูจน์ว่าหลังจากที่เราได้ดำเนินการทางคณิตศาสตร์แล้วนั้นผลลัพธ์ที่ออกมาได้จะต้องมีคุณสมบัติเดียวกันกับคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน ซึ่งจะเป็นการพิสูจน์ว่าผลลัพธ์นั้นถ้าเกิดมีข้อผิดพลาดเกิดขึ้นแล้วล่ะก็ยังสามารถกู้ค่าความผิดพลาดกลับมาได้ด้วยวิธีการกู้ค่าความผิดพลาดเดิมจากทฤษฎีบทที่ 4.3



รูปที่ 4.1 แผนภาพบล็อกแสดงถึงส่วนที่ดำเนินการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

4.8.1 ตัวดำเนินการบวกของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ทฤษฎีบทที่ 4.9 *กำหนดให้ $(x_v,\ x_r)$ และ $(y_v,\ y_r)$ เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริงสองจำนวน คือ X และ Y ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนบนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ และกำหนดให้ M เป็นระยะสูงสุดแบบพลวัตของระบบนี้ ผลลัพธ์ของการบวกของ $(x_v,\ x_r)$ และ $(y_v,\ y_r)$ สามารถแทนได้ด้วย $(z_v,\ z_r)$ ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง Z ที่เป็นคำตอบของสมการ $Z = X + Y$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_v = F\left(x_v + y_v, \beta\right) \tag{4.23}$$

$$z_r = \begin{cases} F(x_r + y_r + \beta, \beta) & z_v \geq 0 \\ F(x_r + y_r - \beta, \beta) & z_v < 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

โดยที่

$$F(a,b) = \begin{cases} a - b\lfloor a/b \rfloor & a \geq 0 \\ a - b\lceil a/b \rceil & a < 0 \end{cases}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ X Y และ Z เป็นค่าตัวเลขของ (x_v, x_r) (y_v, y_r) และ (z_v, z_r) ตามลำดับ โดยที่คุณสมบัติของ z_v และ z_r จะต้องคงคุณสมบัติระหว่างดิจิตเหมือนกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน เพื่อให้ดิจิตเหล่านี้สามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดได้โดยอัลกอริทึมในทฤษฎีบทที่ 4.3 หลังจากดำเนินการบวกแล้วมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น โดยที่คุณสมบัติของดิจิต z_v และ z_r สามารถนิยามได้ดังสมการที่ 4.25 และ 4.26

$$z_v = F\left(Z \times \frac{\beta}{M}, \beta\right) \tag{4.25}$$

$$z_r = \begin{cases} \left(\lceil z_v \rceil - z_v\right)\beta & z_v \geq 0 \\ \left(\lfloor z_v \rfloor - z_v\right)\beta & z_v < 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

จากสมการที่ 4.23

$$\begin{aligned} z_v &= F(x_v + y_v,\ \beta) \\ &= F(X\beta/M + Y\beta/M,\ \beta) \\ &= F((X + \mathrm{Y})\ \beta/M,\ \beta) \\ &= F(Z\beta/M,\ \beta) \end{aligned}$$

ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า z_v นั้นคงคุณสมบัติเดิมของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

จากทฤษฎีบทที่ 4.1 ที่ได้กล่าวว่า | x_v | | y_v | จะต้องมีค่าน้อยกว่า β เราจะทำการแบ่งการพิสูจน์ค่า z_r ออกเป็นทั้งหมดสี่กรณี

กรณีที่ 1 คือ $0 \le x_v < \beta$ และ $0 \le y_v < \beta$
การบวกของจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ทั้งสองตัวนั้น ส่งผลให้คำตอบเป็นไปได้เพียงกรณีเดียวคือมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เช่นกัน
จากสมการที่ (4.24)

$$z_r = F(x_r + y_r + \beta, \beta)$$

$$= F((\lceil x_v \rceil - x_v)\beta + (\lceil y_v \rceil - y_v)\beta + \beta, \beta)$$

$$= F((\lceil x_v \rceil + \lceil y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta) \tag{4.27}$$

จากสมการที่ 4.27 ถ้า $\lceil x_v \rceil + \lceil y_v \rceil = \lceil x_v + y_v \rceil + 1$ เราจะสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v + y_v \rceil + 1 - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta)$$

$$z_r = F((\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta + 2\beta, \beta)$$

จาก $0 \le \lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = (\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta$$

$$= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \tag{4.28}$$

แต่ถ้า $\lceil x_v \rceil + \lceil y_v \rceil = \lceil x_v + y_v \rceil$ และสมการที่ 4.27 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta)$$

จาก $0 \le \lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = (\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta$$

$$= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \tag{4.29}$$

จากสมการที่ 4.28 และ 4.29 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $0 \le x_v < \beta$ และ $0 \le y_v < \beta$ แล้ว $z_r = (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v \ge 0$

กรณีที่ 2 คือ $0 \le x_v < \beta$ และ $-\beta < y_v < 0$

ในกรณีนี้คำตอบ $(z_v,\ z_r)$ สามารถเป็นได้ทั้งบวกและลบ เนื่องจากตัวดำเนินการนั้นมีเครื่องหมายต่างกัน ทำให้คำตอบในกรณีที่ 2 นี้ก็จะสามารถแบ่งออกได้เป็นอีกสองกรณีย่อยดังนี้

กรณีที่ 2.1 คือ $z_v \ge 0$

จากสมการที่ 4.24 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_r &= F(x_r + y_r + \beta, \beta) \\ &= F((\lceil x_v \rceil - x_v)\beta + (\lfloor y_v \rfloor - y_v)\beta + \beta, \beta) \\ &= F((\lceil x_v \rceil + \lfloor y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta) \end{aligned} \tag{4.30}$$

ถ้า $\lceil x_v \rceil + \lfloor y_v \rfloor = \lceil x_v + y_v \rceil - 1$ และสมการที่ 4.30 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v + y_v \rceil - 1 - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta)$$

$$z_r = F((\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta, \beta)$$

จาก $0 \le \lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v) < 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_r &= (\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta \\ &= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \end{aligned} \tag{4.31}$$

แต่ถ้า $\lceil x_v \rceil + \lfloor y_v \rfloor = \lceil x_v + y_v \rceil$ จากสมการที่ 4.30 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta)$$

จาก $0 \le \lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v) < 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_r &= (\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta \\ &= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \end{aligned} \tag{4.32}$$

จากสมการที่ 4.31 และ 4.32 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า 0 $\le x_v < \beta$ และ -$\beta < y_v <$ 0 แล้ว $z_r = (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v \ge 0$

กรณีที่ 2.2 คือ $z_v < 0$

จากสมการที่ 4.24 จะได้ว่า

$$z_r = F(x_r + y_r - \beta, \beta)$$

$$= F((\lceil x_v \rceil - x_v)\beta + (\lfloor y_v \rfloor - y_v)\beta - \beta, \beta)$$

$$= F((\lceil x_v \rceil + \lfloor y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta) \tag{4.33}$$

ถ้า $\lceil x_v \rceil + \lfloor y_v \rfloor = \lfloor x_v + y_v \rfloor + 1$ และสมการที่ 4.33 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lfloor x_v + y_v \rfloor + 1 - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta)$$

$$= F((\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta, \beta)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = (\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta$$

$$= (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta \tag{4.34}$$

แต่ถ้า $\lceil x_v \rceil + \lfloor y_v \rfloor = \lfloor x_v + y_v \rfloor$ และสมการที่ 4.33 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = (\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta$$

$$= (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta \tag{4.35}$$

จากสมการที่ 4.34 และ 4.35 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $0 \le x_v < \beta$ และ -$\beta < y_v < 0$ แล้ว $z_r = (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v < 0$

กรณีที่ 3 คือ $-\beta < x_v < 0$ และ $0 \le y_v < \beta$

ในกรณีนี้คำตอบ $(z_v,\ z_r)$ สามารถเป็นได้ทั้งบวกและลบ เนื่องจากตัวดำเนินการนั้นมีเครื่องหมายต่างกัน ทำให้ในกรณีที่ 3 นี้ก็จะสามารถแบ่งออกได้เป็นอีกสองกรณีย่อยโดยการพิสูจน์นั้นจะเหมือนกับการพิสูจน์ในกรณีที่สอง

กรณีที่ 3.1 คือ $z_v \ge 0$

จากสมการที่ 4.24 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_r &= F(x_r + y_r + \beta, \beta) \\ &= F((\lfloor x_v \rfloor - x_v)\beta + (\lceil y_v \rceil - y_v)\beta + \beta, \beta) \\ &= F((\lfloor x_v \rfloor + \lceil y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta) \end{aligned} \tag{4.36}$$

ถ้า $\lfloor x_v \rfloor + \lceil y_v \rceil = \lceil x_v + y_v \rceil - 1$ และสมการที่ 4.36 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_r &= F((\lceil x_v + y_v \rceil - 1 - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta) \\ &= F((\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta, \beta) \end{aligned}$$

จาก $0 \le \lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v) < 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_r &= (\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta \\ &= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \end{aligned} \tag{4.37}$$

แต่ถ้า $\lfloor x_v \rfloor + \lceil y_v \rceil = \lceil x_v + y_v \rceil$ จากสมการที่ 4.36 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta)$$

จาก $0 \le \lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v) < 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_r &= (\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta \\ &= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \end{aligned} \tag{4.38}$$

จากสมการที่ 4.37 และ 4.38 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $-\beta < x_v < 0$ และ $0 \leq y_v < \beta$ แล้ว $z_r = (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v \geq 0$

กรณีที่ 3.2 คือ $z_v < 0$

จากสมการที่ 4.24 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
z_r &= F(x_r + y_r - \beta, \beta) \\
&= F((\lfloor x_v \rfloor - x_v)\beta + (\lceil y_v \rceil - y_v)\beta - \beta, \beta) \\
&= F((\lfloor x_v \rfloor + \lceil y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta) \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

ถ้า $\lfloor x_v \rfloor + \lceil y_v \rceil = \lfloor x_v + y_v \rfloor + 1$ และสมการที่ 4.39 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$
\begin{aligned}
z_r &= F((\lfloor x_v + y_v \rfloor + 1 - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta) \\
&= F((\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta, \beta)
\end{aligned}
$$

จาก $-1 < \lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v) < 0$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
z_r &= (\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta \\
z_r &= (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

แต่ถ้า $\lfloor x_v \rfloor + \lceil y_v \rceil = \lfloor x_v + y_v \rfloor$ และสมการที่ 4.39 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$
z_r = F((\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta)
$$

จาก $-1 < \lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v) < 0$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
z_r &= (\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta \\
&= (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ 4.40 และ 4.41 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $-\beta < x_v < 0$ และ $0 \leq y_v < \beta$ แล้ว $z_r = (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v < 0$

กรณีที่ 4 คือ $-\beta < x_v < 0$ และ $-\beta < y_v < 0$

การพิสูจน์ในกรณีนี้ก็จะเหมือนกับการพิสูจน์ในกรณีที่หนึ่ง จากสมการที่ 4.24

$$\begin{aligned} z_r &= F(x_r + y_r - \beta, \beta) \\ &= F((\lfloor x_v \rfloor - x_v)\beta + (\lfloor y_v \rfloor - y_v)\beta - \beta, \beta) \\ &= F((\lfloor x_v \rfloor + \lfloor y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta) \end{aligned} \quad (4.42)$$

จากสมการที่ 4.42 ถ้า $\lfloor x_v \rfloor + \lfloor y_v \rfloor = \lfloor x_v + y_v \rfloor - 1$ เราจะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_r &= F((\lfloor x_v + y_v \rfloor - 1 - (x_v + y_v))\beta - \beta, \beta) \\ &= F((\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta - 2\beta, \beta) \end{aligned}$$

จาก $-1 < \lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v) < 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_r &= (\lceil x_v + y_v \rceil - (x_v + y_v))\beta \\ &= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \end{aligned} \quad (4.43)$$

แต่ถ้า $\lfloor x_v \rfloor + \lfloor y_v \rfloor = \lfloor x_v + y_v \rfloor$ และสมการที่ 4.42 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta + \beta, \beta)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v) < 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_r &= (\lfloor x_v + y_v \rfloor - (x_v + y_v))\beta \\ &= (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta \end{aligned} \quad (4.44)$$

จากสมการที่ 4.43 และ 4.44 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $-\beta < x_v < 0$ และ $-\beta < y_v < 0$ แล้ว $z_r = (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v < 0$

จากทั้งสี่กรณีเราสามารถสรุปได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมการบวกของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนดังในทฤษฎีบทที่ 4.9 นั้นยังคงคุณสมบัติเดิมของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

■

ตัวอย่างที่ 4.5 การบวกในเลขฐาน 2 ของ X = 2.4727 และ Y = -6.430 โดยที่ M = 32 ด้วยค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบเป็น 25% การดำเนินการบวกในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.8

ตารางที่ 4.8 แสดงการดำเนินการบวกของ X = 2.4727 และ Y = -6.430

n	v	r
x_n	0.15454375	1.6909125
y_n	-0.401875	-1.19625
z_n	-0.24733125	-1.5053375
z'_n	-0.3091640625	-1.881671875
z^*_n	-0.24733125	-1.5053375

คำตอบที่ได้คือ (-0.24733125, -1.5053375) = -3.9573 □

4.8.2 ตัวดำเนินการลบของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ทฤษฎีบทที่ 4.10 *กำหนดให้ $(x_v,\ x_r)$ และ $(y_v,\ y_r)$ เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริงสองจำนวน คือ X และ Y ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนบนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ และกำหนดให้ M เป็นระยะสูงสุดแบบพลวัตของระบบนี้ ผลลัพธ์ของการลบของ $(x_v,\ x_r)$ ด้วย $(y_v,\ y_r)$ สามารถแทนได้ด้วย $(z_v,\ z_r)$ ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง Z ที่เป็นคำตอบของสมการ $Z = X - Y$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_v = F\left(x_v - y_v, \beta\right) \tag{4.45}$$

และ

$$z_r = \begin{cases} F(x_r - y_r + \beta, \beta) & z_v \geq 0 \\ F(x_r - y_r - \beta, \beta) & z_v < 0 \end{cases} \tag{4.46}$$

โดยที่

$$F(a,b) = \begin{cases} a - b\lfloor a/b \rfloor & a \geq 0 \\ a - b\lceil a/b \rceil & a < 0 \end{cases}$$

พิสูจน์

กำหนดให้ X Y และ Z เป็นค่าตัวเลขของ (x_v, x_r) (y_v, y_r) และ (z_v, z_r) ตามลำดับ โดยที่คุณสมบัติของ z_v และ z_r จะต้องคงคุณสมบัติระหว่างดิจิตเหมือนกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน เพื่อให้ดิจิตเหล่านี้สามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดได้โดยอัลกอริทึมในทฤษฎีบทที่ 4.3 หลังจาก

ดำเนินการลบแล้วมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น โดยที่คุณสมบัติของดิจิต z_v และ z_r สามารถนิยามได้ดังสมการที่ 4.47 และ 4.48

$$z_v = F\left(Z \times \frac{\beta}{M}, \beta\right) \tag{4.47}$$

$$z_r = \begin{cases} (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta & z_v \geq 0 \\ (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta & z_v < 0 \end{cases} \tag{4.48}$$

จากสมการที่ 4.45

$$\begin{aligned} z_v &= F(x_v - y_v, \beta) \\ &= F(X\beta/M - Y\beta/M, \beta) \\ &= F((X - Y)\,\beta/X, \beta) \\ &= F(Z\beta/X, \beta) \end{aligned}$$

ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า z_v นั้นคงคุณสมบัติเดิมของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

จากทฤษฎีบทที่ 4.1 ที่ได้กล่าวว่า | x_v | | y_v | ต้องมีค่าน้อยกว่า β เราจะทำการแบ่งการพิสูจน์ค่า z_r ออกเป็นทั้งหมดสี่กรณีเช่นเดียวกันโดยรูปแบบของการพิสูจน์นั้นคล้ายกับการพิสูจน์ทฤษฎีของการบวกในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

กรณีที่ 1 คือ $0 \leq x_v < \beta$ และ $0 \leq y_v < \beta$

เนื่องจากการดำเนินการลบของตัวดำเนินการที่มีเครื่องหมายเดียวกัน อาจจะทำให้คำตอบสามารถเป็นบวกหรือลบก็ได้ ดังนั้นเราจึงทำการแบ่งการพิสูจน์นี้ออกเป็นสองกรณีย่อยคือ

กรณีที่ 1.1 คือ $z_v \geq 0$

จากสมการที่ 4.46 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_r &= F(x_r - y_r + \beta, \beta) \\ &= F((\lceil x_v \rceil - x_v)\beta - (\lceil y_v \rceil - y_v)\beta + \beta, \beta) \\ &= F((\lceil x_v \rceil - \lceil y_v \rceil - (x_v - y_v))\beta + \beta, \beta) \end{aligned} \tag{4.49}$$

ถ้า $\lceil x_v \rceil - \lceil y_v \rceil = \lceil x_v - y_v \rceil - 1$ และสมการที่ 4.49 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v - y_v \rceil - 1 - (x_v - y_v))\beta + \beta, \beta)$$

$$z_r = F\left(\left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta, \beta\right)$$

จาก $0 \le \lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = \left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta$$

$$= \left(\lceil z_v \rceil - z_v\right)\beta \qquad (4.50)$$

แต่ถ้า $\lceil x_v \rceil - \lceil y_v \rceil = \lceil x_v - y_v \rceil$ จากสมการที่ 4.49 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F\left(\left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta + \beta, \beta\right)$$

จาก $0 \le \lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = \left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta$$

$$= \left(\lceil z_v \rceil - z_v\right)\beta \qquad (4.51)$$

จากสมการที่ 4.50 และ 4.51 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $0 \le x_v < \beta$ และ $0 \le y_v < \beta$ แล้ว $z_r = \left(\lceil z_v \rceil - z_v\right)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v \ge 0$

กรณีที่1.2 คือ $z_v < 0$
จากสมการที่ 4.46 จะได้ว่า

$$z_r = F(x_r - y_r - \beta, \beta)$$

$$= F\left(\left(\lceil x_v \rceil - x_v\right)\beta - \left(\lceil y_v \rceil - y_v\right)\beta - \beta, \beta\right)$$

$$= F\left(\left(\lceil x_v \rceil - \lceil y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta - \beta, \beta\right) \qquad (4.52)$$

ถ้า $\lceil x_v \rceil - \lceil y_v \rceil = \lfloor x_v - y_v \rfloor + 1$ และสมการที่ 4.52 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F\left(\left(\lfloor x_v - y_v \rfloor + 1 - (x_v - y_v)\right)\beta - \beta, \beta\right)$$

$$= F\left(\left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta, \beta\right)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = \left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta$$

$$= \left(\lfloor z_v \rfloor - z_v\right)\beta \qquad (4.53)$$

แต่ถ้า $\lceil x_v \rceil - \lceil y_v \rceil = \lfloor x_v - y_v \rfloor$ และสมการที่ 4.52 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F\left(\left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta - \beta, \beta\right)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = \left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta$$

$$= \left(\lfloor z_v \rfloor - z_v\right)\beta \qquad (4.54)$$

จากสมการที่ 4.53 และ 4.54 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $0 \le x_v < \beta$ และ $0 \le y_v < \beta$ แล้ว $z_r = \left(\lfloor z_v \rfloor - z_v\right)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v < 0$

กรณีที่ 2 คือ $0 \le x_v < \beta$ และ $-\beta < y_v < 0$

จากสมการที่ 4.46

$$z_r = F(x_r - y_r + \beta, \beta)$$

$$= F\left(\left(\lceil x_v \rceil - x_v\right)\beta - \left(\lfloor y_v \rfloor - y_v\right)\beta + \beta, \beta\right)$$

$$= F\left(\left(\lceil x_v \rceil - \lfloor y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta + \beta, \beta\right) \qquad (4.55)$$

จากสมการที่ 4.55 ถ้า $\lceil x_v \rceil - \lfloor y_v \rfloor = \lceil x_v - y_v \rceil + 1$ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F\left(\left(\lceil x_v - y_v \rceil + 1 - (x_v - y_v)\right)\beta + \beta, \beta\right)$$

$$= F\left(\left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta + 2\beta, \beta\right)$$

จาก $0 \le \lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = \left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta$$

$$= \left(\lceil z_v \rceil - z_v\right)\beta \qquad (4.56)$$

แต่ถ้า $\lceil x_v \rceil - \lfloor y_v \rfloor = \lceil x_v - y_v \rceil$ และสมการที่ 4.55 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F\left(\left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta + \beta, \beta\right)$$

จาก $0 \le \lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = \left(\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta$$

$$= \left(\lceil z_v \rceil - z_v\right)\beta \tag{4.57}$$

จากสมการที่ 4.56 และ 4.57 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $0 \le x_v < \beta$ และ $-\beta < y_v < 0$ แล้ว $z_r = \left(\lceil z_v \rceil - z_v\right)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v \ge 0$

กรณีที่ 3 คือ $-\beta < x_v < 0$ และ $0 \le y_v < \beta$
จากสมการที่ 4.46

$$z_r = F(x_r - y_r - \beta, \beta)$$

$$= F\left(\left(\lfloor x_v \rfloor - x_v\right)\beta - \left(\lceil y_v \rceil - y_v\right)\beta - \beta, \beta\right)$$

$$= F\left(\left(\lfloor x_v \rfloor - \lceil y_v \rceil - (x_v - y_v)\right)\beta - \beta, \beta\right) \tag{4.58}$$

จากสมการที่ 4.58 ถ้า $\lfloor x_v \rfloor - \lceil y_v \rceil = \lfloor x_v - y_v \rfloor - 1$ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F\left(\left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - 1 - (x_v - y_v)\right)\beta - \beta, \beta\right)$$

$$= F\left(\left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta - 2\beta, \beta\right)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = \left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta$$

$$= \left(\lfloor z_v \rfloor - z_v\right)\beta \tag{4.59}$$

แต่ถ้า $\lfloor x_v \rfloor - \lceil y_v \rceil = \lfloor x_v - y_v \rfloor$ และสมการที่ 4.58 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F\left(\left(\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v)\right)\beta + \beta, \beta\right)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = (\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v))\beta$$

$$= (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta \quad (4.60)$$

จากสมการที่ 4.59 และ 4.60 เราสามารถสรุปไ ด้ว่า ถ้า $-\beta < x_v < 0$ และ $0 \le y_v < \beta$ แล้ว $z_r = (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v < 0$

กรณีที่ 4 คือ $-\beta < x_v < 0$ และ $-\beta < y_v < 0$
เนื่องจากการดำเนินการลบของตัวดำเนินการที่มีเครื่องหมายเดียวกัน อาจจะทำให้คำตอบสามารถเป็นบวกหรือลบก็ได้ ดังนั้นเราจึงทำการแบ่งการพิสูจน์นี้ออกเป็นสองกรณีย่อยคือ

กรณีที่ 4.1 คือ $z_v \ge 0$
จากสมการที่ 4.46 จะได้ว่า

$$z_r = F(x_r - y_r + \beta, \beta)$$

$$= F((\lfloor x_v \rfloor - x_v)\beta - (\lfloor y_v \rfloor - y_v)\beta + \beta, \beta)$$

$$= F((\lfloor x_v \rfloor - \lfloor y_v \rfloor - (x_v - y_v))\beta + \beta, \beta) \quad (4.61)$$

ถ้า $\lfloor x_v \rfloor - \lfloor y_v \rfloor = \lceil x_v - y_v \rceil - 1$ และสมการที่ 4.61 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v - y_v \rceil - 1 - (x_v - y_v))\beta + \beta, \beta)$$

$$= F((\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v))\beta, \beta)$$

จาก $0 \le \lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = (\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v))\beta$$

$$z_r = (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \quad (4.62)$$

แต่ถ้า $\lfloor x_v \rfloor - \lfloor y_v \rfloor = \lceil x_v - y_v \rceil$ จากสมการที่ 4.61 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v))\beta + \beta, \beta)$$

จาก $0 \le \lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v) < 1$ ดังนั้น

$$z_r = (\lceil x_v - y_v \rceil - (x_v - y_v))\beta$$

$$= (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta \tag{4.63}$$

จากสมการที่ 4.62 และ 4.63 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $-\beta < x_v < 0$ และ $-\beta < y_v < 0$ แล้ว $z_r = (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v \ge 0$

กรณีที่ 4.2 คือ $z_v < 0$

จากสมการที่ 4.46 จะได้ว่า

$$z_r = F(x_r + y_r - \beta, \beta)$$

$$z_r = F((\lfloor x_v \rfloor - x_v)\beta + (\lfloor y_v \rfloor - y_v)\beta - \beta, \beta)$$

$$= F((\lfloor x_v \rfloor - \lfloor y_v \rfloor - (x_v - y_v))\beta - \beta, \beta) \tag{4.64}$$

ถ้า $\lfloor x_v \rfloor - \lfloor y_v \rfloor = \lfloor x_v - y_v \rfloor + 1$ และสมการที่ 4.64 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lfloor x_v - y_v \rfloor + 1 - (x_v - y_v))\beta - \beta, \beta)$$

$$= F((\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v))\beta, \beta)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = (\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v))\beta$$

$$= (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta \tag{4.65}$$

แต่ถ้า $\lfloor x_v \rfloor - \lfloor y_v \rfloor = \lfloor x_v - y_v \rfloor$ และสมการที่ 4.64 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_r = F((\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v))\beta - \beta, \beta)$$

จาก $-1 < \lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v) < 0$ ดังนั้น

$$z_r = (\lfloor x_v - y_v \rfloor - (x_v - y_v))\beta$$

$$z_r = \left(\lfloor z_v \rfloor - z_v\right)\beta \qquad (4.66)$$

จากสมการที่ 4.65 และ 4.66 เราสามารถสรุปได้ว่า $-\beta < x_v < 0$ และ $-\beta < y_v < 0$ แล้ว $z_r = \left(\lfloor z_v \rfloor - z_v\right)\beta$ ซึ่งก็ยังคงคุณสมบัติของ z_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในกรณีที่ $z_v < 0$

จากทั้งสี่กรณีที่ได้ทำการพิสูจน์ไปนั้น ทำให้สามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณการลบด้วยอัลกอริทึมในทฤษฎีบทที่ 4.10 นั้นสามารถคำนวณได้ถูกต้องพร้อมยังคงคุณสมบัติเดิมของระบบจำนวนไว้ด้วย ■

ตัวอย่างที่ 4.6 การลบในเลขฐาน 2 ของ Y = -6.430 จาก X = -2.4727 โดยที่ M = 32 ด้วยค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบเป็น 25% การดำเนินการลบในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.9 แสดงการดำเนินการลบของ Y = -6.430 จาก X = -2.4727

n	v	r
x_n	-0.15454375	-1.6909125
y_n	-0.401875	-1.19625
z_n	0.24733125	1.5053375
z'_n	0.3091640625	1.881671875
z^*_n	0.24733125	1.5053375

ผลลัพธ์ที่ได้คือ (0.24733125, 1.5053375) = 3.9573 □

4.8.3 ตัวดำเนินการคูณของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ทฤษฎีบทที่ 4.11 *กำหนดให้ $(x_v,\ x_r)$ และ $(y_v,\ y_r)$ เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริงสองจำนวน คือ X และ Y ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนบนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ และกำหนดให้ M เป็นระยะสูงสุดแบบพลวัตของระบบนี้ ผลลัพธ์ของการคูณของ $(x_v,\ x_r)$ และ $(y_v,\ y_r)$ สามารถแทนได้ด้วย $(z_v,\ z_r)$ ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง Z ที่เป็นคำตอบของสมการ $Z = X \times Y$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_v = F\left(\left(x_v \times y_v\right) \times \frac{M}{\beta}, \beta\right) \qquad (4.67)$$

$$z_r = \begin{cases} (\lceil w \rceil - w) \times \beta & w_v \geq 0 \\ (\lfloor w \rfloor - w) \times \beta & w_v < 0 \end{cases} \tag{4.68}$$

โดยที่
$$w = F\left(\frac{\left(\beta \times f(x_v,1) \times f(y_v,1)\right) - f(x_v, y_r) - f(y_v, x_r) + \frac{x_r y_r}{\beta}}{\beta} \times \frac{M}{\beta}, \beta \right) \tag{4.69}$$

และ $f(a,b) = sign(a) \times \lceil |a| \rceil \times b$

พิสูจน์

กำหนดให้ X Y และ Z เป็นค่าตัวเลขของ (x_v, x_r) (y_v, y_r) และ (z_v, z_r) ตามลำดับ โดยที่คุณสมบัติของ z_v และ z_r จะต้องคงคุณสมบัติระหว่างดิจิตเหมือนกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน เพื่อให้ดิจิตเหล่านี้สามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดได้โดยอัลกอริทึมในทฤษฎีบทที่ 4.3 หลังจากดำเนินการคูณแล้วมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นโดยที่คุณสมบัติของดิจิต z_v และ z_r สามารถนิยามได้ดังสมการที่ 4.70 และ 4.71

$$z_v = F\left(Z \times \frac{\beta}{M}, \beta \right) \tag{4.70}$$

$$z_r = \begin{cases} (\lceil z_v \rceil - z_v)\beta & z_v \geq 0 \\ (\lfloor z_v \rfloor - z_v)\beta & z_v < 0 \end{cases} \tag{4.71}$$

จากสมการที่ 4.67 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_v = F\left(X \times \frac{\beta}{M} \times Y \times \frac{\beta}{M} \times \frac{M}{\beta}, \beta \right)$$

$$= F\left(X \times Y \times \frac{\beta}{M}, \beta \right)$$

$$= F\left(Z \times \frac{\beta}{M}, \beta \right)$$

ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า z_v นั้นคงคุณสมบัติเดิมของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

จากสมการที่ 4.68 และ 4.69 เมื่อนำมาเทียบกับสมการที่ 4.71 จะเห็นได้ว่า z_r จะคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนก็ต่อเมื่อ w มีค่าเท่ากับ z_v ดังนั้นจากสมการที่ 4.69 เราจะได้ว่า

$$w = F\left(\left(\frac{\left(\beta \times sign(x_v)\times\lceil |x_v| \rceil \times sign(y_v)\times\lceil |y_v| \rceil\right) - \left(sign(x_v)\times\lceil |x_v| \rceil \times y_r\right)}{\beta}\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{-\left(sign(y_v)\times\lceil |y_v| \rceil \times x_r\right) + \dfrac{x_r y_r}{\beta}}{\beta}\right) \times \frac{M}{\beta}, \beta\right)$$

$$w = F\left(\left(\left(sign(x_v)\times\lceil |x_v| \rceil \times sign(y_v)\times\lceil y_v \rceil\right) - \left(sign(x_v)\times\lceil |x_v| \rceil \times \frac{y_r}{\beta}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(sign(y_v)\times\lceil |y_v| \rceil \times \frac{x_r}{\beta}\right) + \frac{x_r y_r}{\beta^2}\right) \times \frac{M}{\beta}, \beta\right)$$

$$w = F\left(\left(\left(sign(x_v)\times\lceil |x_v| \rceil\right) - \frac{x_r}{\beta}\right) \times \left(\left(sign(y_v)\times\lceil |y_v| \rceil\right) - \frac{y_r}{\beta}\right) \times \frac{M}{\beta}, \beta\right)$$

เราสามารถสรุปได้ว่า

$$w = F\left(\left(x_v \times y_v \times \frac{M}{\beta}\right), \beta\right) = z_v$$

จาก $w = z_v$ เราก็สามารถสรุปได้ว่าการหา z_r จากอัลกอริทึมในทฤษฎีบทที่ 4.11 ยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนอยู่เช่นเดิม ■

ตัวอย่างที่ 4.7 การคูณในเลขฐาน 2 ของ X = 2.4727 กับ Y = 6.430 ด้วยค่า M = 32 และค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเท่ากับ 25% การดำเนินการคูณของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.10

ตารางที่ 4.10 แสดงการดำเนินการคูณของ $X = 2.4727$ กับ $Y = 6.430$

n	v	r
x_n	0.15454375	1.6909125
y_n	0.401875	1.19625
z_n	0.9937163125	0.012567375
z'_n	1.242145390625	0.01570921875
z^*_n	0.9937163125	0.012567375

โดยที่คำตอบคือ (0.9937163125, 0.012567375) = 15.899461 □

4.8.4 ตัวดำเนินการหารของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

ทฤษฎีบทที่ 4.12 *กำหนดให้ $(x_v,\ x_r)$ และ $(y_v,\ y_r)$ เป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริงสองจำนวน คือ X และ Y ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนบนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ และกำหนดให้ M เป็นระยะสูงสุดแบบพลวัตของระบบนี้ ผลลัพธ์ของการหารของ $(x_v,\ x_r)$ ด้วย $(y_v,\ y_r)$ สามารถแทนได้ด้วย $(z_v,\ z_r)$ ซึ่งเป็นรูปแบบการแทนค่าของจำนวนจริง Z ที่เป็นคำตอบของสมการ $Z = X / Y$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_v = \left((x_v / y_v) \times \frac{\beta}{M} \right) \bmod \beta \tag{4.72}$$

$$z_r = \begin{cases} (\lceil w \rceil - w) \times \beta & w_v \geq 0 \\ (\lfloor w \rfloor - w) \times \beta & w_v < 0 \end{cases} \tag{4.73}$$

โดยที่

$$w = F\left(\left(\frac{(sign(x_v) \times \lceil |x_v| \rceil)\beta - x_r}{(sign(y_v) \times \lceil |y_v| \rceil)\beta - y_r} \right) \times \frac{\beta}{M}, \beta \right). \tag{4.74}$$

พิสูจน์

จากสมการที่ 4.72

$$z_v = F\left((x_v / y_v) \times \frac{\beta}{M}, \beta \right)$$

$$z_v = F\left(\left(\frac{x\beta}{M} / \frac{y\beta}{M}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right)$$

$$= F\left(\frac{x}{y} \times \frac{\beta}{M}, \beta\right)$$

$$= F\left(z \times \frac{\beta}{M}, \beta\right)$$

ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า z_v นั้นคงคุณสมบัติเดิมของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

จากสมการที่ 4.73 และ 4.74 จะเห็นได้ว่า z_r จะคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนก็ต่อเมื่อ w มีค่าเท่ากับ z_v ดังนั้นจากสมการที่ 4.74 เราจะได้ว่า

$$w = F\left(\left(\frac{\left(sign(x_v) \times \left\lceil |x_v| \right\rceil\right) - \frac{x_r}{\beta}}{\left(sign(y_v) \times \left\lceil |y_v| \right\rceil\right) - \frac{y_r}{\beta}}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right)$$

เราสามารถสรุปได้ว่า

$$w = F\left(\left(x_v \times y_v \times \frac{M}{\beta}\right), \beta\right) = z_v$$

จาก $w = z_v$ เราสามารถสรุปได้ว่าการหา z_r จากอัลกอริทึมในทฤษฎีบทที่ 4.11 ยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนอยู่เช่นเดิม ■

ตัวอย่างที่ 4.8 การหารในเลขฐาน 2 ของ $X = 2.4$ ด้วย $Y = 6.4$ ด้วยค่า $M = 32$ และค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเท่ากับ 25% การดำเนินการหารของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.11

ตารางที่ 4.11 แสดงการหารของ X = 2.4 ด้วย Y = 6.4

n	v	r
x_n	0.15	1.7
y_n	0.4	1.2
z_n	0.0234375	1.953125
z'_n	0.029296875	2.44140625
z^*_n	0.0234375	1.953125

ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้คือ (0.0234375, 1.953125) = 0.375 □

4.9 สรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนอถึงระบบจำนวนสำหรับการทำงานแบบแอนะล็อกรูปแบบใหม่ ที่เรียกว่าระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน ซึ่งถูกนำเสนอมาเพื่อจะทำการลดค่าความซับซ้อนของเวลาของการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง ซึ่งสามารถลดเวลาจากแบบเชิงเส้นที่ขึ้นกับจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อนที่ใช้ ให้เป็นเวลาแบบคงที่ ในระบบที่มีค่าความผิดพลาดอยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน โดยผลลัพธ์ที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนปราศจากการแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดทำให้คำตอบที่ได้นั้นตรงกับค่าเริ่มต้น พร้อมทั้งได้นำเสนออัลกอริทึมการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน และอัลกอริทึมการแปลงรูปแบบการแทนค่าระหว่างฐานต่างๆ ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนด้วย

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอวิธีการลดค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง ซึ่งค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดเดิมของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเท่ากับ O(n) โดยที่ n คือจำนวนดิจิตซ้ำซ้อน โดยจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อนนั้นจะต้องใช้มากขึ้นเมื่อมีการคำนึงถึงค่าความแม่นยำผลลัพธ์ที่ได้หลังจากการกู้ค่าความผิดพลาดสูงขึ้น เนื่องมาจากการที่ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องไม่สามารถทำการกำจัดการแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดได้ ทำให้เมื่อมีการใช้ดิจิตซ้ำซ้อนที่มีจำนวนมากขึ้นจะทำให้ผลกระทบของการแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดนั้นลดลง

ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้จึงได้เสนอวิธีในการลดค่าความซับซ้อนของเวลานี้สองวิธีด้วยกัน วิธีแรกคือการนำเอาสถาปัตยกรรมการทำงานแบบขนานของการเปลี่ยนดิจิตเซตแบบออนเดอะฟลายเข้ามาใช้เพื่อลดค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดลงเหลือ O(log n) ส่วนวิธีที่สองนั้นคือการนำเสนอถึงระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน ที่ได้ทำการพิสูจน์ว่าการใช้ดิจิตซ้ำซ้อนเพียงหนึ่งดิจิตก็เพียงพอในการกู้ค่าความผิดพลาดด้วยอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนในระบบที่ค่าความผิดพลาดอยู่ในรูปของตัวประกอบที่มีค่าเท่ากัน โดยที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนั้นจะต้องอยู่ในช่วงของค่าความคาดเคลื่อนที่ยินยอมเท่านั้นจึงจะสามารถหาผลลัพธ์ที่ถูกต้องได้ พร้อมทั้งคำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นจะไม่มีผลกระทบของการแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุดทำให้ผลลัพธ์ที่ได้นั้นมีค่าตรงกับค่าเริ่มต้น พร้อมทั้งงานวิจัยชิ้นนี้ได้ทำการนำเสนอถึงทฤษฎี และการวิเคราะห์ในแง่มุมต่างๆ ที่เกี่ยวกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน เช่น อัลกอริทึมในการกู้ค่าความผิดพลาด อัลกอริทึมในการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน เป็นต้น

หลักการของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนนั้นสามารถที่จะนำไปใช้ในระบบดิจิทัลได้ แต่เนื่องจากค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบดิจิทัลนั้นไม่ได้อยู่ในรูปแบบเดียวกับวงจรแอนะล็อก ซึ่งไม่ตรงกันกับข้อจำกัดของระบบจำนวน ทำให้ไม่สามารถจะทำการกู้ค่าความผิดพลาดได้ จึงสรุปได้ว่า ในระบบดิจิทัลนั้นระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนจะไม่สามารถทำงานได้อย่างเต็มประสิทธิภาพ

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ยังไม่ได้คำนึงถึงค่าความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้นได้ระหว่างการกู้ค่าความผิดพลาด ซึ่งในความเป็นจริงแล้วนั้นเราไม่สามารถที่จะควบคุมความผิดพลาดในส่วนนั้นให้มีค่าเท่ากับศูนย์ได้ทั้งหมด เนื่องจากยังมีการใช้ค่าของดิจิตซ้ำซ้อนเข้ามาช่วยในการลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ทำให้ค่าคำตอบที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดนั้น อาจจะไม่ได้มีค่าเท่ากับค่าเริ่มต้นที่เราต้องการแสดง ในกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในขั้นตอนการกู้ค่าความผิดพลาดนั้น ยังคงอยู่ในช่วงของค่าความผิดพลาดคาดเคลื่อนที่ยินยอม สิ่งที่เป็นประเด็นในการวิจัยต่อไป คือ คำตอบที่ได้นั้นมีความน่าเชื่อถือมากน้อยเพียงใด และสามารถคำนวณขอบเขตที่เล็กที่สุดของค่าที่ถูกตอ้งได้ว่าเป็นเท่าใด

รายการอ้างอิง

[1] A. Saed, M. Ahmadi, G.A. Jullien and W.C. Miller. “Overlap Resolution: Continuous Valued Digits for Hybrid Architectures.” *Proc. 40th Midwest Symp. Circuits and Systems* 1 (1997): 377-380.

[2] A. Avizienis. “Signed-digit number representation for fast parallel arithmetic.” *IRE Transaction on electronic computer* (1961): 389-400.

[3] A.M. Nielsen and J.M. Muller. “Borrow-Save Adders for Real and Complex Number System.” *2nd Real Number and Computers*, (1996): 121-137.

[4] M.D. Ercegovac. “An on-line arithmetic: An overview.” *Real time Signal Processing VII SPIE* (1984): 86-93.

[5] C. Frougny and A. Surarerks. “On-line multiplication in real and complex base.” *Proceedings of the 16th IEEE Symposium on Computer Arithmetic* (2004): 212-219.

[6] N. Srimanotham, S. Srivansont and A. Surarerks. “On-Line multiplication in compressed Signed Digit Representation Using On-the-fly Technique.” *Proceedings of the 8th National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2004)* (2004).

[7] S. Srivanasont and A. Surarerks. “An On-line Addition for Compressed Signed Digit Representation.” *National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2003)* (2003): 428-432.

[8] S. Srivanasont and A. Surarerks. “On-Line Addition in compressed Signed Digit Representation Using On-the-fly Technique.” *Proceedings of the Hawaii International Conference on Computer Science (HICCS2004)* (2004).

[9] K.S. Trivedi and M.D. Ercegovac. “On-line algorithms for division and multiplication.” *IEEE Transactions on Computers* (1977): 681-687.

[10] A. Saed, M. Ahmadi and G.A. Jullien. “Arithmetic with Signed Analog Digits.” *Proc. 14th IEEE Symp. Computer Arithmetic (ARITH14)* (1999): 134-141.

[11] T. E. Ivall. “Electronic Computers.” Iliffe & Sons (London) (1956).

[12] L. Hedger. “Analog Computation: Everything Old Is New Again.” *Research & Creative Activity Indiana University* 21 (1998).

[13] A. Saed, M. Ahmadi and G.A. Jullien. “Arithmetic Circuits for Analog Digits.” *Proc. 29th Int’l Symp. Multiple Valued Logic (ISMVL)* (1999): 186-191.

[14] A. Saed, M. Ahmadi and G. A. Jullien. “A Number System with Continuous Valued Digits and Modulo Arithmetic.” *IEEE Transactions on Computers* 51 (2002): 1294-1305.

[15] A. Saed, M. Ahmadi, G.A. Jullien and W.C. Miller. “Circuit Tolerances and Word Lengths in Overlap Resolution.” *Proc. 1998 IEEE Int’l Symp. Circuits and Systems (ISCAS’98)* 1 (1998): 197-200.

[16] A. Saed, M. Ahmadi, G.A. Jullien and W.C. Miller. “Overlap Resolution: Arithmetic with Continuous Valued Digits for Hybrid Architectures.” *Proc. 31st Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers* 2 (1997): 1188-1191.

[17] A. Saed, M. Ahmadi, G.A. Jullien and W.C. Miller. “Analog Digits: Bit Level Redundancy in Binary Multiplier.” *Proc. 32nd Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers* 1 (1998): 236-240.

[18] R. A. Aroca, M. Ahmadi, R. Hashemian, G. A. Jullien and W. C. Miller. “A B-s Complement Continuous Valued Digit Adder.” 9th International Conference on Electronics, Circuits and Systems 2 (2002): 433-436.

[19] P. Kornerup. “Digit-Set Conversions: Generalizations and Applications.” *IEEE Transactions on Computers* (1994): 622-629.

[20] S. Srivansont and A. Surarerks. “Parallel Error Recovery in CVNS.” *Proceedings of the 8th National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2004)* (2004).

[21] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Redundant Analog Number System.” *Proceedings of IEEE TENCON 2004* (TENCON2004) (2004).

[22] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Modified Continuous Valued Number System.” *Proceedings of The 2004 International Conference on Algorithmic Mathematics and Computer Science (AMCS’04)* (2004).

[23] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Reducing Error Recovery Time in CVNS.” *Proceedings of The 8th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE8)* (2004).

[24] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Digit Conversion in Redundant Analog Number System.” *Proceedings of The 9^{th} Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE9)* (2005).

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสิร ศรีวนาสณฑ์ เกิดเมื่อวันที่ 9 พฤษภาคม พ.ศ. 2523 เรียนจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนเซนต์คาเบรียล อ.ดุสิต จ.กรุงเทพฯ เข้ารับการศึกษาต่อที่มหาวิทยาลัยมหิดล ในคณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ และสำเร็จการศึกษาในระดับปริญญาบัณฑิตในปี พ.ศ. 2544