การศึกษาเบื้องต้นถึงการประยุกต์ใช้วิธีทำซ้ำกับวิธีประจุพื้นผิว

นายนิติพงศ์ ปานกลาง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-17-5944-4

PRELIMINARY STUDY ON THE APPLICATION OF ITERATION METHOD FOR THE SURFACE CHARGE METHOD

Mr.Nitipong Pan-klang

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2004

ISBN 974-17-5944-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษาเบื้องต้นถึงการประยุกต์ใช้วิธีทำซ้ำกับวิธีประจุพื้นผิว
โดย	นายนิติพงศ์ ปานกลาง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เตชะอำนาจ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(อาจารย์ ดร. คมสัน เพ็ชรรักษ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เตชะอำนาจ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. วีระพันธ์ รังสีวิจิตรประภา)

นิติพงศ์ ปานกลาง: การศึกษาเบื้องต้นถึงการประยุกต์ใช้วิธีทำซ้ำกับวิธีประจุพื้นผิว. (PRELIMINARY STUDY ON THE APPLICATION OF ITERATION METHOD FOR THE SURFACE CHARGE METHOD) อ. ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เตชะอำนาจ, จำนวนหน้า 65 หน้า. ISBN 974-17-5944-4.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีทำซ้ำเพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นจากการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว. การใช้วิธีทำซ้ำมีวัตถุประสงค์เพื่อแก้ข้อจำกัดในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นมีขนาดใหญ่ ซึ่งวิธีการทั่วๆ ไป เช่น วิธีกำจัดแบบเกาส์ ไม่สามารถทำได้ เนื่องจากข้อจำกัดทางหน่วยความจำ. วิธีทำซ้ำที่ใช้เป็นวิธีทำซ้ำแบบไม่คงตัว ได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุค วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร. การลดเวลาการคำนวณหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำอาศัยตัวปรับสภาพล่วงหน้า. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่ใช้ประกอบด้วย ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบี แบบเกาส์-ไซเดล แบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง และแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร.

การศึกษาทำบนแบบจำลองทรงกลมฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. ผลการศึกษาพบว่า ที่สภาพยอมสัมพัทธ์ของทรงกลมเท่ากับ 4 วิธีทำซ้ำที่ใช้สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นจากวิธีประจุพื้นผิวซึ่งเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์หนาแน่นไม่สมมาตรได้. เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรเป็นวิธีที่มีอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยดีที่สุด. รอบการคำนวณที่ใช้เท่ากับ 6 รอบและเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณเท่ากับ 5,940.98 วินาที. เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า พบว่า ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรช่วยลดรอบการคำนวณลงเหลือ 2 รอบและเวลาคำนวณลดลงเหลือ 4,294.85 วินาที. การเพิ่มค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมฉนวนทำให้รอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำเพิ่มขึ้น. กรณีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 80 การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรร่วมกับวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรใช้รอบการคำนวณน้อยที่สุด. รอบการคำนวณลดลงจาก 17 รอบเหลือ 9 รอบและเวลาคำนวณลดลงประมาณ 20 เปอร์เซ็นต์.

ภาควิชา......วิศวกรรมไฟฟ้า...... ลายมือชื่อนิสิต..............................

สาขาวิชา......วิศวกรรมไฟฟ้า...... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..............................

ปีการศึกษา......2547

4470375321 : ELECTRICAL ENGINEERING
KEY WORD: SURFACE CHARGE METHOD / ITERATIVE METHOD / PRECONDITIONED

NITIPONG PAN-KLANG : PRELIMINARY STUDY ON THE APPLICATION OF ITERATION METHOD FOR THE SURFACE CHARGE METHOD. THESIS ADVISOR: ASST. PROF. BOONCHAI TECHAUMNAT, Dr.Eng., 65 pp. ISBN 974-17-5944-4.

This thesis presents the application of iterative methods to solve a linear equation system obtained from the surface charge method. The objective is to solve a large linear equation system which can not be solved by ordinary methods such as the Gauss-elimination method because of insufficient memory. The iterative methods utilized here, which are non-stationary, are the conjugate gradient, biconjugate gradient, generalize minimal residual and biconjugate gradient stabilized methods. The calculation time of the iterative methods is reduced by using the preconditioners. The preconditioners used in this thesis are the Jacobi, Gauss-Seidel, successive overrelaxation and symmetric successive overrelaxation preconditioners.

The study has been carried out for dielectric spheres under a uniform field. The results show that, for the sphere with relative-permittivity of 4, the iterative methods can solve the linear equation system, which has an unsymmetrical, dense coefficient-matrix, obtained from the surface charge method. Without the preconditioners, the biconjugate gradient stabilized method gave the best convergence rate, which is 6 iterations, and calculation time of 5,940.98 s. With the preconditioners, it was found that the symmetric successive overrelaxation preconditioner reduced the number of iterations to 2 and calculation time to 4,294.85 s. The increase of relative permittivity resulted in more iterations. For the relative permittivity of 80, the use of symmetric successive overrelaxation preconditioner with the biconjugate gradient stabilized method gave the least number of iterations. The iterations decreased from 17 to 9 and the time was reduced by about 20%.

Department Electrical Engineering Student's signature ....

Field of study Electrical Engineering Advisor's signature ....

Academic year 2004

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องจากได้รับความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เตชะอำนาจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งกรุณาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิทยานิพนธ์ รวมทั้งได้กรุณาตรวจสอบและแก้ไขเนื้อหาวิทยานิพนธ์จนสำเร็จเรียบร้อย.

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ซึ่งประกอบด้วย อาจารย์ ดร.คมสัน เพ็ชรรักษ์ และอาจารย์ ดร. วีระพันธ์ รังสีวิจิตรประภา ที่กรุณาตรวจสอบ แก้ไขและให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์.

ท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดาและมารดา ที่ให้การสนับสนุน และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา.

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

การคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าเป็นสิ่งที่สำคัญอย่างยิ่งในการออกแบบอุปกรณ์และวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูง. ในปัจจุบันการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลข ทำให้เราทราบถึงลักษณะการกระจายของศักย์และสนามไฟฟ้าของวัสดุอุปกรณ์ต่างๆ ที่มีรูปแบบซับซ้อน. วิธีเชิงตัวเลขที่นิยมและรู้จักโดยทั่วไปมีอยู่หลายวิธี เช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์(Finite Element Method: FEM) วิธีชิ้นประกอบขอบเขต(Boundary Element Method: BEM) วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method: FDM) วิธีจำลองประจุ (Charge Simulation Method: CSM) และวิธีประจุพื้นผิว(Surface Charge Method: SCM) เป็นต้น.

วิทยานิพนธ์นี้ได้ปรับปรุงวิธีการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว ซึ่งมีข้อดีในการใช้งาน ดังนี้

1) วิธีประจุพื้นผิวคำนวณสนามไฟฟ้าโดยตรงจากความหนาแน่นประจุจึงมีความแม่นยำของค่าสนามไฟฟ้าสูง
2) สามารถใช้กับบริเวณเปิดได้โดยง่าย
3) ต้องการหน่วยความจำในการคำนวณน้อยกว่าเมื่อเทียบกับวิธีแบ่งขอบเขตอื่นๆ.

ในการคำนวณสนามไฟฟ้าโดยวิธีประจุพื้นผิว พื้นที่ผิวของแบบจำลองจะถูกแบ่งออกเป็นเอ-ลิเมนต์ย่อยๆ. การคำนวณจะแก้ระบบสมการเชิงเส้นหาค่าความหนาแน่นประจุที่แต่ละเอลิเมนต์ออกมา หลังจากนั้นจะคำนวณสนามไฟฟ้าจากความหนาแน่นประจุที่หาออกมาได้. กรณีที่แบบจำลองมีขนาดใหญ่หรือมีรูปร่างที่ซับซ้อน การคำนวณจำเป็นต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์มากๆ เพื่อความถูกต้องของผลเฉลย. จำนวนเอลิเมนต์ที่เพิ่มขึ้นมีผลทำให้ระบบสมการเชิงเส้นมีขนาดใหญ่ขึ้น. ในกรณีนี้ เราไม่สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีโดยตรง เช่น วิธีการกำจัดแบบเกาส์(Gauss Elimination Method) เนื่องจากข้อจำกัดทางหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์. วิธีการกำจัดแบบเกาส์คำนวณโดยใช้ค่าเมตริกซ์สัมประสิทธ์ ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงเมื่อทำการคำนวณแต่ละแถว ทำให้ต้องมีการเก็บค่าของเมตริกซ์สัมประสิทธ์ทั้งหมด. ดังนั้นทางหนึ่งที่ทำได้คือ การใช้วิธีทำซ้ำ(Iterative Method)แก้ระบบสมการ เนื่องจากวิธีทำซ้ำนั้นใช้ค่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เดิมตลอดการคำนวณ ทำให้สามารถเก็บค่าเฉพาะแถวในระหว่างการคำนวณได้. ตัวอย่างของวิธีทำซ้ำได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุค(Conjugate Gradient Method) เป็นต้น.

ความเร็วในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำกำหนดโดยจำนวนรอบที่ใช้ในการทำซ้ำ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของระบบสมการเชิงเส้นและวิธีทำซ้ำที่ใช้. การเลือกใช้ตัว

ปรับสภาพล่วงหน้า(Preconditioner)ที่เหมาะสมกับระบบสมการเชิงเส้นเป็นสิ่งที่สำคัญอย่างหนึ่งที่จะช่วยลดจำนวนรอบการทำซ้ำของวิธีทำซ้ำได้. ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงได้ศึกษาการใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับวิธีทำซ้ำเพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากการคำนวณสนามไฟฟ้าโดยวิธีประจุพื้นผิว.

1.1 งานวิจัยในอดีตที่ผ่านมา

การศึกษาเกี่ยวกับการใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าชนิดต่างๆ กับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีทำซ้ำ.

งานวิจัยของ A. Heldiring et al.[1] นำเสนอวิธีปรับปรุงขั้นตอนวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยอาศัยตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบแยกตัวประกอบแบบแอลยูไม่สมบูรณ์(Incomplete LU Decomposition)ใหม่เพื่อลดปริมาณการใช้หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ.

W. Jinming et al.[2] ได้คำนวณสนามไฟฟ้าที่เกิดจากกระแสไหลวนในแกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบแยกตัวประกอบแบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์ (Incomplete Cholesky Decomposition)และแบบแยกตัวประกอบแบบโชเลสกีสมบูรณ์ (Complete Cholesky Decomposition)กับวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นวิธีเกรเดียนต์สังยุค.

R.S. Chen et al.[3] นำเสนอวิธีลดเวลาการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่ใช้ลดเวลาการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเป็นตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร(Symmetric Successive Overrelaxation).

J. Shen et al.[4] นำเสนอวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากการใช้วิธีผสมระหว่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีชิ้นประกอบขอบเขต. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าใช้หลักการการแยกตัวประกอบแบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์. วิธีทำซ้ำที่ใช้แก้ระบบสมการคือ วิธีกำลังสองเกรเดียนต์สังยุค (Conjugate Gradient Squared Method) วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่(Biconjugate Gradient Method)และวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป(Generalized Minimal Residual Method).

N. Boukari et al.[5] ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรกับวิธีเกรเดียนต์สังยุค เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากการคำนวณเกี่ยวกับมอเตอร์ไฟฟ้าสถิตโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. งานวิจัยทั้งหมดดังกล่าว เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นมีลักษณะเป็นเมตริกซ์มากเลขศูนย์สมมาตร.

A.R. Clark et al.[6] ใช้วิธีทำซ้ำแบบคงตัว(Stationary iterative method)สร้างเมตริกซ์มากเลขศูนย์เพื่อเป็นตัวปรับสภาพล่วงหน้าในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

(Biconjugate Gradient Stabilized) เพื่อหากระแสบนแบบจำลองตัวนำรูปทรงต่างๆ โดยวิธีการของโมเมนต์(The Method of Moment). งานวิจัยนี้ เมตริกซ์สัมประสิทธ์ของระบบสมการเชิงเส้นมีลักษณะเป็นเมตริกซ์หนาแน่นและไม่สมมาตร.

K.F. Tsang et al.[7] นำเสนอวิธีการแก้สมการเชิงเส้นโดยใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรและเมตริกซ์แถบทแยงมุม ในการคำนวณการกระจายตัวของกระแสบนโครงสร้างเสาอากาศแบบไมโครสตริป. ลักษณะเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นที่หาผลเฉลยมีอยู่สองลักษณะคือ เมตริกซ์โทปลิทซ์(Toeplitz Matrix) และเมตริกซ์สมมาตร.

Y.Y. Botros et al.[8] นำเสนอวิธีการเพิ่มอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. โดยการประยุกต์ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเมตริกซ์ผกผันโดยประมาณ(Approximate Inverse Matrix)กับวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป.

J.N. Hoffmann et al.[9] ได้ทำการคำนวณหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนตัวนำทรงกระบอกโดยวิธีจำลองประจุและวิธีผลต่างสืบเนื่องร่วมกัน ใช้วิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีกำลังสองเกรเดียนต์สังยุคและใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่เป็นเมตริกซ์ทแยงมุมและเมตริกซ์สามแนวเฉียง.

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อลดเวลาการคำนวณหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากวิธีประจุพื้นผิว ในกรณีระบบสมการมีจำนวนตัวแปรมากๆ โดย

1) ศึกษาวิธีทำซ้ำที่เหมาะสมกับระบบสมการเชิงเส้นที่จะประยุกต์ใช้
2) ทดลองใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ เพื่อลดจำนวนรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำ.

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองประยุกต์ใช้วิธีทำซ้ำแบบต่างๆ ดังต่อไปนี้ ในการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว.

1) วิธีเกรเดียนต์สังยุค(Conjugate Gradient Method)
2) วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่(Biconjugate Gradient Method)
3) วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป(Generalized Minimal Residual Method)
4) วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร(Biconjugate Gradient Stabilized)

และได้ทดลองตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่เหมาะสมกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการที่ได้จากวิธีประจุพื้นผิว.

1.4 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์

เนื้อหาของวิทยานิพนธ์ในแต่ละบทมีรายละเอียดดังนี้

บทที่ 2 กล่าวถึงหลักการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว เงื่อนไขขอบเขตในการคำนวณหาผลเฉลย และการสร้างระบบสมการเชิงเส้นจากแบบจำลอง.

บทที่ 3 อธิบายหลักการพื้นฐานของการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้.

บทที่ 4 กล่าวถึงชนิดของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ ที่ได้นำมาใช้กับวิธีทำซ้ำ.

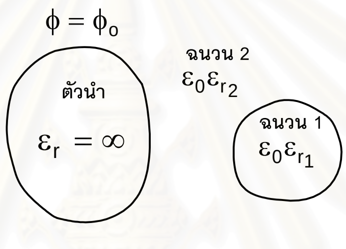
บทที่ 5 แสดงผลของการแก้ระบบสมการเชิงเส้นของปัญหาตัวอย่าง เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าและวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณ จำนวนรอบการคำนวณ และความผิดพลาดของผลเฉลยในแต่ละกรณี.

บทที่ 6 แสดงข้อสรุปของวิทยานิพนธ์นี้.

บทที่ 2

การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว

วิธีประจุพื้นผิวเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณสนามไฟฟ้าซึ่งถูกพัฒนามาจากวิธีจำลองประจุ. วิธีประจุพื้นผิวเป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้คำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าในระบบ 3 มิติ เนื่องจากง่ายต่อการเขียนโปรแกรมคำนวณ. หลักการคำนวณของวิธีประจุพื้นผิว สามารถอธิบายโดยการพิจารณาจากรูปแบบของปัญหาในบริเวณเปิดใดๆ ที่ประกอบด้วยตัวนำและฉนวน(ฉนวนโดยสมบูรณ์ไม่มีสภาพนำ). ในการคำนวณ เราสมมติให้ตัวกลางทั้งหมดเป็นแบบไอโซทรอปิก(Isotropic)และปราศจากประจุค้าง (Space Charge) ดังรูปที่ 2.1.



รูปที่ 2.1 รูปแบบของปัญหาที่ประกอบด้วยตัวนำและฉนวนสองชนิด

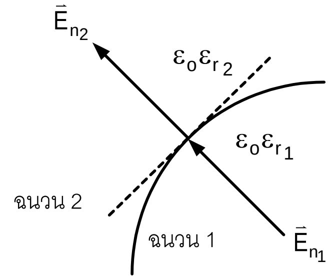
จากรูปที่ 2.1 บริเวณที่เป็นฉนวนกำหนดให้มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ ε_{r_1} และ ε_{r_2} ตามลำดับ. ในกรณีตัวนำ สนามไฟฟ้าภายในตัวนำจะมีค่าเท่ากับศูนย์. ดังนั้น จึงกำหนดค่าสภาพยอม ε_r ให้มีค่าเป็นอนันต์เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตเป็นจริง. การคำนวณจะสมมติให้มีประจุกระจายอยู่ที่ผิวของแบบจำลองและคำนวณหาค่าประจุที่ผิวนี้ออกมา. ดังนั้น หากเราทราบค่าประจุดังกล่าวได้เราก็จะสามารถคำนวณสนามไฟฟ้าในบริเวณต่างๆ ของแบบจำลองออกมาได้.

2.1 เงื่อนไขขอบเขตการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า

การสร้างระบบสมการเชิงเส้นเพื่อคำนวณหาความหนาแน่นประจุเชิงผิว อาศัยเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

1) ศักย์ไฟฟ้า ϕ ที่ผิวตัวนำมีค่าคงที่เท่ากับ ϕ_o

$$\phi = \phi_o \tag{2.1}$$



รูปที่ 2.2 สนามไฟฟ้าบริเวณรอยต่อของไดอิเล็กตริกสองชนิด

2) ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนรอยต่อระหว่างฉนวนสองชนิดมีค่าต่อเนื่อง ดังแสดงในรูปที่ 2.2

$$\varepsilon_o\varepsilon_{r_2}E_{n_2} - \varepsilon_o\varepsilon_{r_1}E_{n_1} = 0 \qquad (2.2)$$

โดย E_n คือสนามไฟฟ้าแนวตั้งฉาก (V/m)

ε_o คือค่าสภาพยอมของสุญญากาศ (F/m)

ε_r คือค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ของฉนวน

และมีดรรชนีล่าง 1 และ 2 เป็นตัวระบุด้านของฉนวน.

3) ตัวนำที่ไม่ได้รับการป้อนพลังงานมีผลรวมของประจุเท่ากับศูนย์.

2.2 การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว

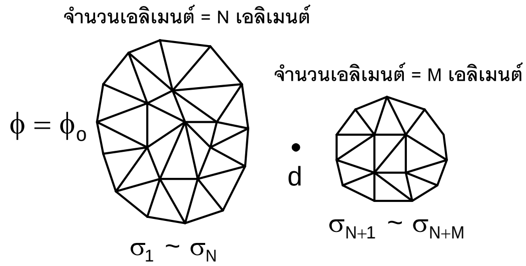
การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว จะแบ่งพื้นผิวของแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังรูปที่ 2.3. รูปร่างของเอลิเมนต์สามารถเป็นได้หลายลักษณะ ตัวอย่างเช่นรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น. ตัวแปรไม่ทราบค่าในการคำนวณคือค่าความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าที่เอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์. จำนวนตัวแปรดังกล่าวขึ้นอยู่กับจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดในแบบจำลอง. การหาผลเฉลยเราจะแก้สมการหาความหนาแน่นประจุที่ทำให้เงื่อนไขขอบเขตเป็นจริง. สมการดังกล่าวจะอยู่ในลักษณะของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\mathbf{A\sigma} = \mathbf{b} \qquad (2.3)$$

โดย A_{ij} คือตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าหรือสนามไฟฟ้า $(Vm^2/C$ หรือ $Vm/C)$

σ_i คือความหนาแน่นประจุเชิงผิว (C/m^2)

b_i คือค่าซึ่งขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขต $(V$ หรือ $V/m)$.



รูปที่ 2.3 ลักษณะของแบบจำลองเมื่อพื้นผิวถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

2.2.1 การสร้างระบบสมการของวิธีประจุพื้นผิว

การหาค่าตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า เพื่อสร้างระบบสมการที่ใช้หาค่าความหนาแน่นประจุเชิงผิว อาศัยสมการการหาค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า ณ จุด (x, y, z) ใดๆ คือ

$$\phi(x, y, z) = \int \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r} ds \qquad (2.4)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla\phi \qquad (2.5)$$

โดย ϕ คือศักย์ไฟฟ้าที่จุด (x, y, z) มีหน่วยเป็น V

$\vec{E}$ คือสนามไฟฟ้าที่จุด (x, y, z) มีหน่วยเป็น V / m

r คือเวกเตอร์จากพื้นผิว s ไปยังจุด (x, y, z).

การหาค่าของสมาชิกในเมตริกซ์ **A** และเวกเตอร์ **b** อาศัยเงื่อนไขขอบเขตที่ได้กล่าวมาแล้ว. การพิจารณาแบ่งออกเป็นสองกรณีด้วยกันคือ บนพื้นผิวแบบจำลองที่เป็นตัวนำและบนพื้นผิวแบบจำลองที่เป็นฉนวน.

พิจารณาผิวของตัวนำ ซึ่งมีค่าศักย์ไฟฟ้าคงที่ตามเงื่อนไขขอบเขต $\phi = \phi_o$ และถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ จำนวน N เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 2.3. ศักย์ไฟฟ้า ϕ_i ที่ผิวของเอลิเมนต์ i เนื่องจากประจุ σ_j บนเอลิเมนต์ j คำนวณจากสมการ

$$\phi_i = \int_e \frac{\sigma_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}} ds \qquad (2.6)$$

โดย e คือการอินทิเกรตบนหนึ่งเอลิเมนต์

จากสมการที่ (2.6) จัดรูปสมการใหม่ ได้

$$P_{ij}\sigma_j = \phi_i \tag{2.7}$$

เมื่อ

$$P_{ij} = \int_e \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}} ds \tag{2.8}$$

โดย P_{ij} คือตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าระหว่างเอลิเมนต์ i และ j (Vm^2/C)

r_{ij} คือเวกเตอร์จากเอลิเมนต์ j มายังเอลิเมนต์ i.

การหาค่า P_{ij} ในสมการที่ (2.8) สามารถใช้การอินทิเกรตเชิงเลขโดยวิธีทั่วๆ ไปเช่น วิธีการอินทิเกรตแบบเกาส์. เมื่อรวมผลของประจุบนทุกๆ เอลิเมนต์ จะได้สมการผลรวมของศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากประจุบนเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ดังนี้

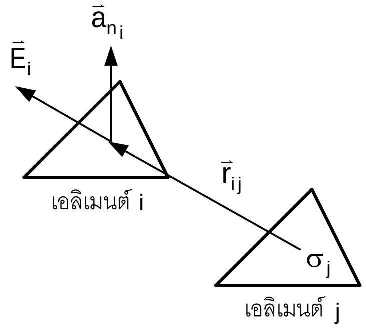
$$\begin{aligned}
\phi_o &= P_{1,1}\sigma_1 + P_{1,2}\sigma_2 + \ldots + P_{1,N}\sigma_N + P_{1,N+1}\sigma_{N+1} + \ldots + P_{1,N+M}\sigma_{N+M} \\
\phi_o &= P_{2,1}\sigma_1 + P_{2,2}\sigma_2 + \ldots + P_{2,N}\sigma_N + P_{2,N+1}\sigma_{N+1} + \ldots + P_{2,N+M}\sigma_{N+M} \\
&\vdots \\
\phi_o &= P_{N,1}\sigma_1 + P_{N,2}\sigma_2 + \ldots + P_{N,N}\sigma_N + P_{N,N+1}\sigma_{N+1} + \ldots + P_{N,N+M}\sigma_{N+M}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ต่อมา พิจารณาผิวของฉนวน. ให้พื้นผิวนี้ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ จำนวน M เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 2.3. จากสมการคำนวณสนามไฟฟ้าที่จุด (x, y, z) ใดๆ

$$\vec{E} = \vec{a}_r \int \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o r^2} ds \tag{2.10}$$

พิจารณาสนามไฟฟ้า ณ จุดกึ่งกลางเอลิเมนต์ i เนื่องจากประจุบนเอลิเมนต์ j ดังรูปที่ 2.4 จะได้

$$\vec{E}_i = \vec{a}_{r_{ij}} \int_e \frac{\sigma_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}^2} ds \tag{2.11}$$



รูปที่ 2.4 สนามไฟฟ้า $\bar{E}_i$ เนื่องจากประจุ σ_j

จากสมการที่ (2.11) จัดรูปสมการใหม่

$$\bar{E}_i = \bar{F}_{ij}\,\sigma_j \tag{2.12}$$

เมื่อ

$$\bar{F}_{ij} = \bar{a}_{r_{ij}} \int_e \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}^2}\, ds \tag{2.13}$$

โดย $\bar{F}_{ij}$ คือตัวประกอบสนามไฟฟ้าระหว่างเอลิเมนต์ i และ j $(\mathrm{V\,m/C})$.

จากเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.2) ได้ความสัมพันธ์ของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก ณ จุดกึ่งกลางเอลิเมนต์ i เป็น

$$\varepsilon_o \varepsilon_{r_1} E_{n_1} = \varepsilon_o \varepsilon_{r_2} E_{n_2} \tag{2.14}$$

แทนค่า E_{n_1} และ E_{n_2} จะได้

$$\sum_{j=1}^{M} \varepsilon_o \varepsilon_{r_1} \left(F_{n_{ij}}\right)_1 \sigma_j = \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_o \varepsilon_{r_2} \left(F_{n_{ij}}\right)_2 \sigma_j \tag{2.15}$$

เมื่อ

$$\left(F_{n_{ij}}\right)_1 = \left(F_{n_{ij}}\right)_2 = F_{n_{ij}} = \bar{F}_{ij} \cdot \bar{a}_{n_i} \qquad \text{สำหรับ } i \neq j \tag{2.16}$$

โดย $\bar{a}_{n_i}$ คือเวกเตอร์ตั้งฉาก ณ จุดกึ่งกลางเอลิเมนต์ i

$F_{n_{ij}}$ คือตัวประกอบสนามไฟฟ้าในทิศทางเวกเตอร์ตั้งฉาก ณ จุดกึ่งกลางเอลิเมนต์ i $(\mathrm{V\,m/C})$.

สนามไฟฟ้าแนวตั้งฉาก ณ เอลิเมนต์ i เนื่องจากประจุบนเอลิเมนต์ i เอง มีค่าดังนี้

$$\left(E_{n_1}\right)_i = -\frac{\sigma_i}{2\varepsilon_o} \tag{2.17}$$

และ

$$\left(E_{n_2}\right)_i = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_o} \tag{2.18}$$

เมื่ออ้างอิงทิศทางของ $\vec{E}_n$ ตามรูปที่ 2.2 แทนค่า $\left(E_{n_1}\right)_i$ และ $\left(E_{n_2}\right)_i$ ลงในสมการที่ (15)

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \varepsilon_o \varepsilon_{r_1} F_{n_{ij}} \sigma_j - \frac{\sigma_i}{2}\varepsilon_{r_1} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \varepsilon_o \varepsilon_{r_2} F_{n_{ij}} \sigma_j + \frac{\sigma_i}{2}\varepsilon_{r_2} \tag{2.19}$$

จากสมการที่ (2.19) จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$F'_{ij}\,\sigma_j = 0 \tag{2.20}$$

$$F'_{ij} = \left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\varepsilon_o F_{n_{ij}} \qquad \text{เมื่อ } i \neq j \tag{2.21}$$

และ

$$F'_{ii} = \left(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}\right) \tag{2.22}$$

เมื่อรวมผลของประจุบนทุกๆ เอลิเมนต์ และคิดผลของสนามไฟฟ้าภายนอก $\vec{E}_o$ จะได้สมการความสัมพันธ์ของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ดังนี้

$$\begin{aligned}
F'_{N+1,1}\,\sigma_1 + F'_{N+1,2}\,\sigma_2 + \ldots + F'_{N+1,N+M}\,\sigma_{N+M} &= \varepsilon_o\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\vec{E}_o \cdot \vec{a}_{n_{N+1}} \\
F'_{N+2,1}\,\sigma_1 + F'_{N+2,2}\,\sigma_2 + \ldots + F'_{N+2,N+M}\,\sigma_{N+M} &= \varepsilon_o\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\vec{E}_o \cdot \vec{a}_{n_{N+2}} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
F'_{N+M,1}\,\sigma_1 + F'_{N+M,2}\,\sigma_2 + \ldots + F'_{N+M,N+M}\,\sigma_{N+M} &= \varepsilon_o\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\vec{E}_o \cdot \vec{a}_{n_{N+M}}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

รวมสมการที่ (2.9) และ (2.23) เข้าด้วยกันจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้หาค่าความหนาแน่นประจุบนทุกๆ เอลิเมนต์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,N} & P_{1,N+1} & P_{1,N+2} & \cdots & P_{1,N+M} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,N} & P_{2,N+1} & P_{2,N+2} & \cdots & P_{2,N+M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N,1} & P_{N,2} & \cdots & P_{N,N} & P_{N,N+1} & P_{N,N+2} & \cdots & P_{N,N+M} \\ F'_{N+1,1} & F'_{N+1,2} & \cdots & F'_{N+1,N} & F'_{N+1,N+1} & F'_{N+1,N+2} & \cdots & F'_{N+1,N+M} \\ F'_{N+2,1} & F'_{N+2,2} & \cdots & F'_{N+2,N} & F'_{N+2,N+1} & F'_{N+2,N+2} & \cdots & F'_{N+2,N+M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F'_{N+M,1} & F'_{N+M,2} & \cdots & F'_{N+M,N} & F'_{N+M,N+1} & F'_{N+M,N+2} & \cdots & F'_{N+M,N+M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \\ \sigma_{N+1} \\ \sigma_{N+2} \\ \vdots \\ \sigma_{N+M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_o \\ \phi_o \\ \vdots \\ \phi_o \\ \varepsilon_o\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\vec{E}_o \cdot \vec{a}_{n_{N+1}} \\ \varepsilon_o\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\vec{E}_o \cdot \vec{a}_{n_{N+2}} \\ \vdots \\ \varepsilon_o\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\vec{E}_o \cdot \vec{a}_{n_{N+M}} \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

การหาค่า P_{ij} และ $\vec{F}_{ij}$ ในสมการที่ (2.8) และ (2.13) สำหรับเอลิเมนต์รูปทรงสามเหลี่ยมใดๆ สามารถดูตัวอย่างได้จากภาคผนวก ก.

การแก้ระบบสมการในสมการที่ (2.24) ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปของความหนาแน่นประจุเชิงผิว σ_1 จนถึง σ_{N+M}. การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า ณ จุดใดๆ บนแบบจำลองทำโดยการคำนวณค่าตัวประกอบศักย์และสนามไฟฟ้า ณ จุดดังกล่าว แล้วนำไปคูณกับความหนาแน่นประจุของแต่ละเอลิเมนต์. การคำนวณตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าใช้สมการที่ (2.8) และ (2.13) แต่เปลี่ยนจุดคำนวณจากบนเอลิเมนต์ i เป็นจุดใดๆ ที่เราต้องการทราบค่าศักย์และสนาม-ไฟฟ้า. ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้า ณ จุด d ในรูปที่ 3 สมการคำนวณตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าที่ได้เป็น

$$P_{dj} = \int_e \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r_{dj}} ds \qquad \text{เมื่อ } j = 1, 2, \ldots, M \qquad (2.25)$$

โดย r_{dj} คือเวกเตอร์จากจุดกึ่งกลางเอลิเมนต์ j ไปยังจุด d.

การคำนวณตัวประกอบสนามไฟฟ้า ณ จุด d ใช้สมการ

$$\vec{F}_{dj} = \vec{a}_{r_{dj}} \int_e \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r_{dj}^2} ds \qquad \text{เมื่อ } j = 1, 2, \ldots, M \qquad (2.26)$$

$$\vec{F}_{dj} = \left(F_{d,j}\right)_x \vec{a}_x + \left(F_{d,j}\right)_y \vec{a}_y + \left(F_{d,j}\right)_z \vec{a}_z \qquad (2.27)$$

โดย Fx_{dj}, Fy_{dj} และ Fz_{dj} เป็นตัวประกอบสนามไฟฟ้า ณ จุด d ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ. ศักย์ไฟฟ้า ณ จุด d มีค่าเท่ากับ

$$\phi_d = P_{d,1}\sigma_1 + \ldots + P_{d,N}\sigma_N + P_{d,N+1}\sigma_{N+1} + \ldots + P_{d,M}\sigma_M \tag{2.28}$$

สนามไฟฟ้า ณ จุด d แบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือสนามไฟฟ้าในทิศทางแกน x, y และ z

$$\vec{E}_d = E_x\vec{a}_x + E_y\vec{a}_y + E_z\vec{a}_z$$

โดยที่

$$\begin{aligned} E_x &= \left(F_{d,1}\right)_x\sigma_1 + \ldots + \left(F_{d,N}\right)_x\sigma_N + \left(F_{d,N+1}\right)_x\sigma_{N+1} + \ldots + \left(F_{d,M}\right)_x\sigma_M \\ E_y &= \left(F_{d,1}\right)_y\sigma_1 + \ldots + \left(F_{d,N}\right)_y\sigma_N + \left(F_{d,N+1}\right)_y\sigma_{N+1} + \ldots + \left(F_{d,M}\right)_y\sigma_M \\ E_z &= \left(F_{d,1}\right)_z\sigma_1 + \ldots + \left(F_{d,N}\right)_z\sigma_N + \left(F_{d,N+1}\right)_z\sigma_{N+1} + \ldots + \left(F_{d,M}\right)_z\sigma_M \end{aligned} \tag{2.29}$$

บทที่ 3

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำ

วิธีทำซ้ำเป็นวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยอาศัยการสุ่มกำหนดค่าเริ่มต้นของผลเฉลยขึ้น จากนั้นทำการคำนวณซ้ำกระบวนการจนผลเฉลยลู่เข้าสู่คำตอบจริง. วิธีทำซ้ำเหมาะสมกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรมากๆ. โดยทั่วไปเราสามารถแบ่งวิธีทำซ้ำออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ ได้แก่ วิธีทำซ้ำแบบคงตัว(Stationary Iterative Method) และวิธีทำซ้ำแบบไม่คงตัว(Non-Stationary Iterative Method). ตัวอย่างของวิธีทำซ้ำแบบคงตัวที่นิยมใช้ ได้แก่ วิธีเกาส์-ไซเดล(Gauss-Seidel Method).

วิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีทำซ้ำแบบไม่คงตัวในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น เนื่องจากมีอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยดีกว่าวิธีทำซ้ำแบบคงตัว. ความแตกต่างระหว่างวิธีทำซ้ำแบบไม่คงตัวกับวิธีทำซ้ำแบบคงตัวที่เห็นได้ชัดคือ วิธีทำซ้ำแบบไม่คงตัวค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำมีการเปลี่ยนแปลงค่าอยู่ตลอดเวลา.

3.1 หลักการเบื้องต้นของวิธีทำซ้ำ

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำ เป็นการหาคำตอบโดยประมาณของระบบสมการ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ โดยคำตอบที่ได้เป็นสมาชิกของปริภูมิ Krylov.

$$\mathbf{x}_k \in \mathrm{K}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \tag{3.1}$$

เมื่อ

$$\mathrm{K}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathrm{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}\}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.2}$$

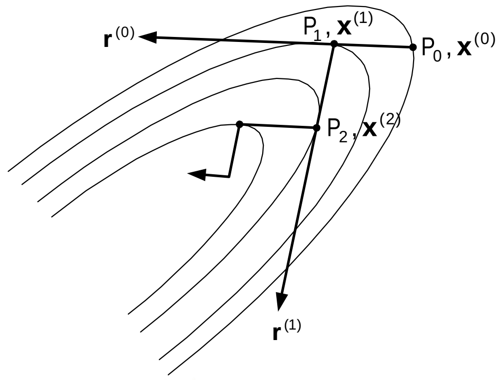
โดย $\mathrm{K}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ คือปริภูมิ Krylov

$\mathbf{A}$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$\mathbf{x}$ คือเวกเตอร์ตัวแปรไม่ทราบค่า

$\mathbf{b}$ คือเวกเตอร์ด้านขวามือของระบบสมการ

k คือรอบการคำนวณซ้ำ



รูปที่ 3.1 ทิศทางการลู่เข้าของค่า $\mathbf{x}$ บนเส้นความชันเท่าของ $f(\mathbf{x})$ ที่เริ่มจากจุด P_0

สมาชิกภายในปริภูมิ Krylov ประกอบด้วยเวกเตอร์ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกเชิงเส้นได้. ขนาดของปริภูมิ Krylov จะมีขนาดเพิ่มขึ้นตามจำนวนรอบการคำนวณซ้ำ.

จากระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ เราสามารถเขียนฟังก์ชันกำลังสองขนาด N ตัวแปร

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} \tag{3.3}$$

สมการที่ (3.3) ถ้า $\mathbf{A}$ เป็นเมตริกซ์บวกแน่นอน(Positive Definite Matrix) เมื่อแทนค่า $\mathbf{x}$ ที่ทำให้ $f(\mathbf{x})$ มีค่าต่ำสุด ค่า $\mathbf{x}$ ดังกล่าวจะเป็นคำตอบโดยประมาณของระบบสมการเชิงเส้น. จุดที่ $\mathbf{x}$ เป็นคำตอบของระบบสมการค่า $\nabla f(\mathbf{x})$ มีค่าเท่ากับศูนย์. นั่นคือ

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0 \tag{3.4}$$

การคำนวณด้วยวิธีทำซ้ำ เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ สามารถอธิบายโดยใช้หลักการของวิธีการลดอย่างชัน(Steepest Descent Method) ซึ่งเป็นการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(\mathbf{x})$ ในสมการที่ (3.3). การคำนวณเริ่มจากการสุ่มกำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}^{(0)}$ ที่จุด P_0 ดังรูปที่ 3.1 จากนั้นจะคำนวณซ้ำเพื่อหา $\mathbf{x}^{(1)}$ และตัวถัดๆ ไปจากสมการ

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{r}^{(k)} \tag{3.5}$$

โดย $\mathbf{r}$ คือเวกเตอร์ตกค้าง(Residual Vector).

เวกเตอร์ตกค้าง $\mathbf{r}^{(k)}$ ในแต่ละรอบการคำนวณจะตั้งฉากกัน นั่นคือ

$$\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(k-1)} = 0 \tag{3.6}$$

การตรวจสอบความคลาดเคลื่อนของคำตอบ $\mathbf{x}^{(k)}$ ที่คำนวณได้ ดูจากค่า $\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \right\rangle$ โดยที่ $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}$. การหาค่า α ในสมการที่ (3.5) ทำโดยอาศัยสมการที่ (3.6).
จากสมการที่ (3.6) เมื่อ $k = 1$ แทนค่า $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}$ จะได้

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}\right)^{T}\mathbf{r}^{(0)} = 0 \tag{3.7}$$

แทนค่า $\mathbf{x}^{(1)}$ ด้วยสมการที่ (3.5) ได้เป็น

$$\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{r}^{(0)}\right) - \mathbf{b}\right)^{T}\mathbf{r}^{(0)} = 0 \tag{3.8}$$

จัดรูปสมการใหม่ และย้ายข้างสมการ จะได้สมการเพื่อหาค่า α เป็น

$$\alpha = \frac{\left(\mathbf{r}^{(0)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(0)}}{\left(\mathbf{r}^{(0)}\right)^{T}\mathbf{A}\,\mathbf{r}^{(0)}} \tag{3.9}$$

จากหลักการคำนวณพื้นฐานดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น สามารถนำมาปรับปรุงกระบวนการคำนวณ โดยเฉพาะการคำนวณหาค่า $\mathbf{r}^{(k)}$ เพื่อให้อัตราการลู่เข้าของผลเฉลยดียิ่งขึ้น.

3.2 วิธีเกรเดียนต์สังยุค(Conjugate Gradient Method, CG)

วิธีเกรเดียน์สังยุคเป็นวิธีทำซ้ำที่รู้จักกันโดยทั่วไป เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์สมมาตร และมีค่าบวกแน่นอน. การแก้ระบบสมการด้วยวิธีนี้มีขั้นตอนการคำนวณที่ไม่ยุ่งยาก.

คำตอบ $\mathbf{x}$ ที่คำนวณได้เป็นสมาชิกของปริภูมิย่อย $\mathbf{x}^{(0)} + \mathcal{K}\left(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)}\right)$. โดย $\mathcal{K}\left(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)}\right)$ เป็นปริภูมิ Krylov ดังสมการ

$$\mathcal{K}\left(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)}\right) = \text{span}\left\{\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}^{(0)}\right\} \tag{3.10}$$

การคำนวณหาค่า $\mathbf{x}^{(k)}$ ในแต่ละรอบการคำนวณ คำนวณจากสมการ

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{p}^{(k)} \tag{3.11}$$

โดย $\mathbf{p}^{(k)}$ เป็นเวกเตอร์ทิศทาง ซึ่งสัมพันธ์กับเวกเตอร์ตกค้าง $\mathbf{r}^{(k)}$. เวกเตอร์ตกค้างและเวกเตอร์ทิศทาง ณ รอบการคำนวณ k ใดๆ คำนวณจากสมการ

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)} \tag{3.12}$$

และ

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)}\mathbf{p}^{(k)} \tag{3.13}$$

สัมประสิทธิ์ $\alpha^{(k)}$ และ $\beta^{(k)}$ คำนวณได้จาก

$$\alpha^{(k)} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(k)}}{\left(\mathbf{p}^{(k)}\right)^{T}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k)}} \tag{3.14}$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(k+1)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(k+1)}}{\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(k)}} \tag{3.15}$$

เมื่อ $\alpha^{(k)}$ และ $\beta^{(k)}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่ทำให้ $\mathbf{p}^{(k+1)}$ ตั้งฉากกับ $\mathbf{Ap}^{(k)}$ ดังรูปที่ 3.2. การคำนวณโดยใช้วิธีเกรเดียนต์สังยุคสามารถแสดงลำดับขั้นการคำนวณได้ดังนี้

1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}^{(0)}$ และคำนวณ $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$ โดยกำหนด $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$

2) คำนวณซ้ำ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots$

2.1) คำนวณ $\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$

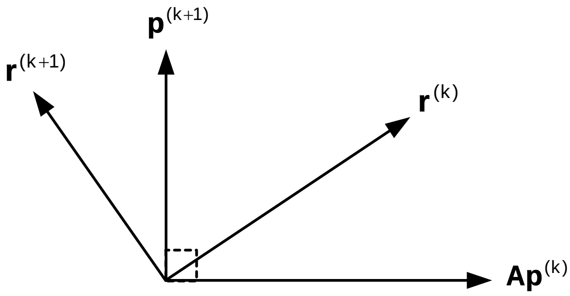
2.2) คำนวณ $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$

เมื่อ $\alpha^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{p}^{(k-1)}, \mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)} \right\rangle}$

2.3) คำนวณ $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - \alpha^{(k-1)}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$

2.4) คำนวณ $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} + \beta^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$

เมื่อ $\beta^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \right\rangle}$.



รูปที่ 3.2 ลักษณะของเวกเตอร์ตกค้างและเวกเตอร์ทิศทางที่คำนวณ
ได้ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำ

3.3 **วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่**(BiConjugate Gradient Method, BiCG)

วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่เป็นวิธีที่พัฒนาจากวิธีเกรเดียนต์สังยุค เพื่อให้เหมาะกับระบบสมการที่เมตริกซ์สัมประสิทธ์เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร. การคำนวณอาศัยกระบวนการ Two-side Lanczos เพื่อสร้างเวกเตอร์เชิงตั้งฉากสองชุด $(\mathbf{v}$ กับ $\mathbf{w})$ ที่สัมพันธ์กับเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}^T$. เวกเตอร์เชิงตั้ง-ฉากดังกล่าวเป็นสมาชิกของปริภูมิ Krylov $\mathrm{K}\left(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)}\right)$ และ $\mathrm{K}\left(\mathbf{A}^T, \mathbf{r}^{(0)}\right)$ นั่นคือ

$$\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)} \in \mathrm{K}\left(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)}\right) \tag{3.16}$$

$$\mathbf{w}^{(1)}, \ldots \mathbf{w}^{(k)} \in \mathrm{K}\left(\mathbf{A}^T, \mathbf{r}^{(0)}\right) \tag{3.17}$$

โดย $\mathbf{v}$ และ $\mathbf{w}$ คือเวกเตอร์ที่เป็นสมาชิกของปริภูมิ Krylov $\mathrm{K}\left(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)}\right)$ และ $\mathrm{K}\left(\mathbf{A}^T, \mathbf{r}^{(0)}\right)$ ตามลำดับ ซึ่งคำนวณโดยกระบวนการ Two-side Lanczos.

กระบวนการ Two-side Lanczos มีลำดับขั้นการคำนวณดังนี้

1) จาก $\mathbf{r}^{(0)}$ และ $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)}$ ซึ่ง $\left\langle \mathbf{r}^{(0)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle \neq 0$

   คำนวณ $\mathbf{v}^{(1)} = \dfrac{\mathbf{r}^{(0)}}{\left\| \mathbf{r}^{(0)} \right\|}$ และ $\mathbf{w}^{(1)} = \dfrac{\tilde{\mathbf{r}}^{(0)}}{\left\langle \tilde{\mathbf{r}}^{(0)}, \mathbf{v}^{(1)} \right\rangle}$

2) กำหนด $\beta^{(0)} = \gamma^{(0)} = 0$ และ $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{w}^{(0)} = 0$

3) คำนวณซ้ำ $j = 1, 2, 3, \ldots$

   3.1) คำนวณ $\mathbf{A}\,\mathbf{v}^{(j)}$ และ $\mathbf{A}^T\mathbf{w}^{(j)}$

   3.2) คำนวณ $\alpha^{(j)} = \left\langle \mathbf{A}\,\mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{w}^{(j)} \right\rangle$

   3.3) คำนวณ $\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)} = \mathbf{A}\,\mathbf{v}^{(j)} - \alpha^{(j)}\,\mathbf{v}^{(j)} - \beta^{(j-1)}\,\mathbf{v}^{(j-1)}$

และ $\widetilde{\mathbf{w}}^{(j+1)} = \mathbf{A}^{T}\mathbf{w}^{(j)} - \alpha^{(j)}\,\mathbf{w}^{(j)} - \gamma^{(j-1)}\,\widetilde{\mathbf{w}}^{(j-1)}$

3.4) คำนวณ $\gamma^{(j)} = \left\|\widetilde{\mathbf{v}}^{(j+1)}\right\|$ และ $\mathbf{v}^{(j+1)} = \dfrac{\widetilde{\mathbf{v}}^{(j+1)}}{\gamma^{(j)}}$

3.5) คำนวณ $\beta^{(j)} = \left\langle \mathbf{v}^{(j+1)}, \widetilde{\mathbf{w}}^{(j+1)} \right\rangle$ และ $\mathbf{w}^{(j+1)} = \dfrac{\widetilde{\mathbf{w}}^{(j+1)}}{\beta^{(j)}}$

เวกเตอร์เริ่มต้น $\mathbf{r}^{(0)}$ และ $\widetilde{\mathbf{r}}^{(0)}$ ในการคำนวณต้องไม่ตั้งฉากกันนั่นคือ $\left\langle \mathbf{r}^{(0)}, \widetilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle \neq 0$. โดยวิธีข้างต้น เราได้ $\left\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{w}^{(j)} \right\rangle = 0$ เมื่อ $i \neq j$. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ ใช้เวกเตอร์ทั้งสองในการหาคำตอบ $\mathbf{x}^{(k)}$ โดย

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}^{(k)}\mathbf{y}^{(k)} \tag{3.18}$$

เมื่อ
$$\mathbf{V}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

โดย $\mathbf{y}^{(k)}$ คือเวกเตอร์ที่ทำให้ $\mathbf{r}^{(k)}$ ตั้งฉากกับ $\mathbf{w}^{(1)},\dots\mathbf{w}^{(k)}$.

ค่า $\mathbf{y}^{(k)}$ ที่ทำให้เงื่อนไขข้างต้นเป็นจริง สามารถคำนวณจากสมการ

$$\mathbf{T}^{(k)}\mathbf{y}^{(k)} = \left\|\mathbf{r}^{(0)}\right\|\xi_1 \tag{3.20}$$

เมื่อ $\mathbf{T}^{(k)}$ เป็นเมตริกซ์สามแนวเฉียง(Tridiagonal Matrix)ขนาด $(k \times k)$ โดยสมาชิกประกอบด้วยตัวประกอบ α, β และ γ ที่คำนวณได้จากกระบวนการ Two-side Lanczos. โครงสร้างของ $\mathbf{T}^{(k)}$ แสดงในสมการที่ (3.21) ξ_1 เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยขนาดเท่ากับ k โดยสมาชิก ณ ตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ 1 ดังสมการที่ (3.22).

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} & & \\ \gamma^{(1)} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta^{(k-1)} \\ & & \gamma^{(k-1)} & \alpha^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^{T} \tag{3.22}$$

การคำนวณเวกเตอร์ตกค้างและเวกเตอร์ทิศทางที่สัมพันธ์กับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}^{T}$ คำนวณโดยสมการ

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - a^{(k)}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k)} \tag{3.23}$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} - a^{(k)}\mathbf{A}^{T}\tilde{\mathbf{p}}^{(k)} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + b^{(k)}\mathbf{p}^{(k)} \tag{3.25}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(k+1)} + b^{(k)}\tilde{\mathbf{p}}^{(k)} \tag{3.26}$$

สัมประสิทธิ์ $a^{(k)}$ และ $b^{(k)}$ คำนวณได้จาก

$$a^{(k)} = \frac{\left(\tilde{\mathbf{r}}^{(k)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(k)}}{\left(\tilde{\mathbf{p}}^{(k)}\right)^{T}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k)}} \tag{3.27}$$

$$b^{(k)} = \frac{\left(\tilde{\mathbf{r}}^{(k+1)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(k+1)}}{\left(\tilde{\mathbf{r}}^{(k)}\right)^{T}\mathbf{r}^{(k)}} \tag{3.28}$$

วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่มีลำดับขั้นการคำนวณดังนี้

1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}^{(0)}$ และคำนวณ $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$ โดยกำหนด $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$

2) กำหนดค่า $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)}$ ที่ทำให้ $\left\langle \mathbf{r}^{(0)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle \neq 0$ และให้ $\tilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(0)}$

3) คำนวณซ้ำ $k = 1, 2, 3, \ldots$

3.1) คำนวณ $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + a^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$

เมื่อ $a^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(k-1)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)} \right\rangle}$

3.2) คำนวณ $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$

และ $\tilde{\mathbf{r}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\mathbf{A}^{T}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$

3.3) คำนวณ $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} - b^{(k-1)}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$

และ $\tilde{\mathbf{p}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} - b^{(k-1)}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$

เมื่อ $b^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(k-1)} \right\rangle}$.

3.4 วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป(Generalized Minimal Residual Method, GMRES)

วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปพัฒนามาจากวิธีตกค้างต่ำสุด(MINRES[10]) เพื่อใช้กับระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีลักษณะเป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร. วิธีนี้อาศัยวิธีของ Arnoldi ในการสร้างเวกเตอร์มูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติซึ่งเป็นสมาชิกของปริภูมิ krylov $\mathcal{K}\left(\mathbf{A},\mathbf{r}^{(0)}\right)$. คำตอบ $\mathbf{x}^{(k)}$ จากวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปอยู่ในลักษณะ

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_k \mathbf{y}^{(k)} \tag{3.29}$$

เมื่อ $\mathbf{V}_k$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $(n \times k)$ ซึ่งสมาชิกภายในประกอบด้วยเวกเตอร์มูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ จากการคำนวณด้วยวิธีของ Arnoldi, $\mathbf{y}^{(k)}$ คือเวกเตอร์ขนาด (k) สมาชิกประกอบด้วยค่า $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ ที่ได้จากการทำค่า 2-นอร์มของเวกเตอร์ตกค้างให้มีค่าต่ำสุด.

วิธีของ Arnoldi มีลำดับขั้นการคำนวณดังนี้

1) กำหนดค่า $\mathbf{v}^{(1)}$ โดยมีเงื่อนไขว่า $\left\| \mathbf{v}^{(1)} \right\| = 1$

2) คำนวณซ้ำ $j = 1, 2, 3, \ldots$

 2.1) คำนวณ $\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)} = \mathbf{A}\,\mathbf{v}^{(j)}$

 2.2) คำนวณซ้ำ $i = 1, 2, 3, \ldots, j$

  2.2.1) คำนวณ $h_{i,j} = \left\langle \tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)}, \mathbf{v}^{(i)} \right\rangle$ และ $\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)} \leftarrow \tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)} + h_{i,j}\mathbf{v}^{(i)}$

 2.3) คำนวณ $h_{j+1,j} = \left\| \tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)} \right\|$

 2.4) คำนวณ $\mathbf{v}^{(j+1)} = \dfrac{\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)}}{h_{j+1,j}}$

ลำดับขั้นการคำนวณข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k\mathbf{H}_k + h_{k+1,k}\mathbf{v}_{k+1}\boldsymbol{\xi}_k^T = \mathbf{V}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1,k} \tag{3.30}$$

เมื่อ $\mathbf{H}_k$ เป็นเมตริกซ์เฮสเซนเบิร์กบน(Upper Hessenberg Matrix)ขนาด $(k \times k)$. สมาชิกในตำแหน่ง (i, j) เมื่อ $j = 1, \ldots, k$ และ $i = 1, \ldots, \min\{j+1, k\}$ มีค่าเท่ากับ $h_{i,j}$ ส่วนสมาชิกในตำแหน่ง (i, j) อื่นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์. $\mathbf{H}_{k+1,k}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $(k+1) \times k$ ดังสมการที่ (3.31). $\boldsymbol{\xi}_k$ เป็นเวกเตอร์ขนาด k โดยสมาชิกตำแหน่งที่ k มีค่าเท่ากับ 1 ส่วนตำแหน่งอื่นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์.

$$\mathbf{H}_{k+1,k} = \begin{bmatrix} & \mathbf{H}_k & & \\ & & & \\ \hdashline 0 & 0 \; \ldots \; 0 & h_{k+1,k} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

การหาค่าเวกเตอร์ $\mathbf{y}^{(k)}$ ในสมการที่ (3.29) ทำโดยการหาค่าต่ำสุดของเวกเตอร์ตกค้าง $\mathbf{r}^{(k)}$ นั่นคือ

$$\min \left\| \mathbf{r}^{(k)} \right\| \tag{3.32}$$

แทนค่า $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{A}\,\mathbf{V}_k \mathbf{y}$ ได้เป็น

$$\min \left\| \mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{A}\,\mathbf{V}_k\,\mathbf{y} \right\| \tag{3.33}$$

แทนค่า $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{V}_{k+1}\beta\xi_1, \mathbf{AV}_k = \mathbf{V}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1,k}$ และจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\min \left\| \beta\xi_1 - \mathbf{H}_{k+1,k}\mathbf{y} \right\| \tag{3.34}$$

เมื่อ $\beta = \left\| \mathbf{r}^{(0)} \right\|$ และ ξ_1 เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยขนาด $(k+1)$ โดยที่สมาชิก ณ ตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับหนึ่ง ส่วนสมาชิก ณ ตำแหน่งอื่นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $[1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^T$. การแก้สมการที่ (3.34) ทำโดยการแยกตัวประกอบแบบ QR ของเมตริกซ์ $\mathbf{H}_{k+1,k}$ อยู่ในรูปของ

$$\mathbf{H}_{k+1,k} = \mathbf{FR} \tag{3.35}$$

โดย $\mathbf{R}$ เป็นเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนขนาด $(k+1)\times(k)$ และ $\mathbf{F}$ เป็นเมตริกซ์ยูนิแทรี(Unitary Matrix) ขนาด $(k+1)\times(k+1)$.

การหาค่าเมตริกซ์ $\mathbf{R}$ และ $\mathbf{F}$ จากแยกตัวประกอบแบบ QR ของเมตริกซ์ $\mathbf{H}_{k+1,k}$ ณ รอบการคำนวณที่ k ใดๆ ทำโดยอาศัยเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{F}}_i \, (i = 1, 2, \ldots, k)$ ตามสมการที่ (3.36). $\tilde{\mathbf{F}}_i$ เป็นเมตริกซ์หมุนที่ใช้ในการหมุนเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ξ_i และ ξ_{i+1} ไปเป็นมุมเท่ากับ θ_i.

$$\widetilde{\mathbf{F}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(i-1)} & & & \\ & c_i & s_i & \\ & -\bar{s}_i & c_i & \\ & & & \mathbf{I}_{(k-i)} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

เมื่อ $c_i \equiv \cos(\theta_i)$ และ $s_i \equiv \sin(\theta_i)$. c_i และ s_i คำนวณได้จากสมาชิกของเมตริกซ์ $\mathbf{H}_{k+1,k}$ ตามสมการ

$$c_i = \frac{|h_{i,i}|}{\sqrt{|h_{i,i}|^2 + |h_{i+1,i}|^2}} \tag{3.37}$$

และ

$$\bar{s}_i = c_i \frac{h_{i+1,i}}{h_{i,i}} \tag{3.38}$$

ตัวอย่างเช่น เมตริกซ์ $\mathbf{R}^{(k)}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนที่ได้จากการแยกตัวประกอบแบบ QR ของเมตริกซ์ $\mathbf{H}_{k+1,1}$ ในรอบการคำนวณที่ k มีค่าเท่ากับ

$$\mathbf{R}^{(k)} = \left(\widetilde{\mathbf{F}}_k \widetilde{\mathbf{F}}_{k-1} \ldots \widetilde{\mathbf{F}}_1\right)\mathbf{H}_{k+1,k} = \left[\begin{array}{cccc} x & x & \ldots & x \\ & x & \ldots & x \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right] \tag{3.39}$$

โดย x เป็นตำแหน่งที่สมาชิกของเมตริกซ์ไม่เท่ากับศูนย์. ในทำนองเดียวกันเมตริกซ์ $\mathbf{R}^{(k+1)}$ ในรอบการคำนวณที่ $k+1$ สามารถคำนวณจาก

$$\mathbf{R}^{(k+1)} = \left(\widetilde{\mathbf{F}}_{k+1} \widetilde{\mathbf{F}}_k \widetilde{\mathbf{F}}_{k-1} \ldots \widetilde{\mathbf{F}}_1\right)\mathbf{H}_{k+2,k+1} = \left[\begin{array}{ccccc} x & x & \ldots & x & x \\ & x & \ldots & x & x \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & x & x \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.40}$$

จากสมการที่ (3.34) ผลลัพธ์ $\mathbf{y}^{(k)}$ ที่ต้องการอยู่ในรูปของสมการ

$$\mathbf{R}_{k,k}\mathbf{y}^{(k)} = \beta\left(\mathbf{F}\xi_1\right) \tag{3.41}$$

เมื่อ $\mathbf{R}_{k,k}$ เป็นเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนขนาด $(k \times k)$ ซึ่งละเลยสมาชิกแถวที่ $(k+1)$ ของ $\mathbf{R}$. พจน์ $\mathbf{F}\xi_1$ ได้จากการคูณเมตริกซ์หมุน $\tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{F}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{F}}_k$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ξ_1.

วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปมีลำดับขั้นการคำนวณดังนี้

1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}^{(0)}$

2) คำนวณ $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$ และ $\mathbf{v}^{(1)} = \dfrac{\mathbf{r}^{(0)}}{\left\|\mathbf{r}^{(0)}\right\|}$

3) กำหนดค่า $\xi_1 = [1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^T$ และ $\beta = \left\|\mathbf{r}^{(0)}\right\|$

4) คำนวณซ้ำ $k = 1, 2, 3, \ldots$

   4.1) คำนวณ $\mathbf{v}^{(k+1)}$ และ $h_{i,k}$ เมื่อ $i = 1, \ldots, k+1$ โดยวิธีของ Arnoldi

   4.2) คำนวณ $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_k\mathbf{y}^{(k)}$

   เมื่อ $\mathbf{y}^{(k)}$ เป็นคำตอบที่ได้จากสมการ $\min\left\|\beta\xi_1 - \mathbf{H}_{k+1,k}\mathbf{y}\right\|$.

ข้อเสียของการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปอยู่ตรงที่ต้องการหน่วยความจำในการเก็บเมตริกซ์ $\mathbf{H}_{k+1,k}$ และภาระการคำนวณเพิ่มขึ้นเมื่อรอบการคำนวณ k มีค่ามาก. ในทางปฏิบัติการคำนวณจะกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่(Restart Iteration) เพื่อเป็นการจำกัดขนาดเมตริกซ์ $\mathbf{H}_{k+1,k}$.

3.5 **วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร**(BiConjugate Gradient Stabilized Method, BiCGSTAB)

วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรถูกพัฒนามาจากวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่กับวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป. วิธีนี้เหมาะกับระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรนี้ปรับปรุงการคำนวณในส่วนการหาค่าเวกเตอร์ตกค้างเพื่อแก้ไขอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยที่มีลักษณะไม่สม่ำเสมอ. เวกเตอร์ตกค้างและเวกเตอร์ทิศทางสามารถคำนวณโดยใช้สมการ

$$\mathbf{r}^{(k)} = \chi^{(k)}(\mathbf{A})\varphi^{(k)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} \tag{3.42}$$

$$\mathbf{p}^{(k)} = \chi^{(k)}(\mathbf{A})\psi^{(k)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} \tag{3.43}$$

เมื่อ $\chi^{(k)}(\mathbf{A})$ เป็นสมการพหุนาม อยู่ในรูป

$$\chi^{(k)}(\mathbf{A}) = (1-\omega^{(1)}\mathbf{A})(1-\omega^{(2)}\mathbf{A})\ldots(1-\omega^{(k)}\mathbf{A}) \tag{3.44}$$

โดย $\omega^{(k)}$ คือตัวประกอบที่ทำให้ $\mathbf{r}^{(k)}$ ในแต่ละรอบการคำนวณมีค่าต่ำสุด. จากวิธีกำลังสองเกรเดียนต์สังยุค[10] กำหนด

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} = \varphi^{(k-1)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} - a^{(k-1)}\mathbf{A}\,\psi^{(k-1)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} \tag{3.45}$$

และ

$$\psi^{(k)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} = \varphi^{(k)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} - b^{(k)}\mathbf{A}\,\psi^{(k-1)}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)} \tag{3.46}$$

แทนค่าสมการที่ (3.44) ถึง (3.46) ลงในสมการที่ (3.42) และ (3.43) จัดรูปสมการใหม่ ได้เป็น

$$\mathbf{r}^{(k)} = (\mathbf{I} - \omega^{(k)}\mathbf{A})(\mathbf{r}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}) \tag{3.47}$$

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} + b^{(k)}(\mathbf{I} - \omega^{(k)}\mathbf{A})\mathbf{p}^{(k)} \tag{3.48}$$

การหาค่าตัวประกอบ $a^{(k-1)}$ และ $b^{(k)}$ ในสมการที่ (3.47) และสมการที่ (3.48) คำนวณจากสมการ

$$a^{(k-1)} = \frac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle} \tag{3.49}$$

$$b^{(k)} = \frac{a^{(k-1)}}{\omega^{(k)}} \frac{\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle} \tag{3.50}$$

โดย $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)}$ คือเวกเตอร์ตกค้างที่สัมพันธ์กับ $\mathbf{A}^{T}$ เมื่อ $\left\langle \mathbf{r}^{(0)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle \neq 0$.

วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรมีลำดับขั้นการคำนวณดังนี้

1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}^{(0)}$

2) คำนวณ $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$ และให้ $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$

3) กำหนดค่า $\widetilde{\mathbf{r}}^{(0)}$ ที่ทำให้ $\left\langle \mathbf{r}^{(0)}, \widetilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle \neq 0$

4) คำนวณซ้ำ $k = 1, 2, 3, \ldots$

4.1) คำนวณ $\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$

4.2) คำนวณ $\mathbf{x}^{(k-1/2)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + a^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$

เมื่อ $a^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \widetilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}, \widetilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}$

4.3) คำนวณ $\mathbf{r}^{(k-1/2)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$

4.4) คำนวณ $\mathbf{A}\,\mathbf{r}^{(k-1/2)}$

4.5) คำนวณ $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1/2)} + \omega^{(k)}\mathbf{r}^{(k-1/2)}$

เมื่อ $\omega^{(k)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1/2)}, \mathbf{A}\,\mathbf{r}^{(k-1/2)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{A}\,\mathbf{r}^{(k-1/2)}, \mathbf{A}\,\mathbf{r}^{(k-1/2)} \right\rangle}$

4.6) คำนวณ $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1/2)} - \omega^{(k)}\mathbf{A}\,\mathbf{r}^{(k-1/2)}$

4.7) คำนวณ $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} + b^{(k)}\left(\mathbf{p}^{(k-1)} - \omega^{(k)}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}\right)$

เมื่อ $b^{(k)} = \dfrac{a^{(k-1)}}{\omega^{(k)}} \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \widetilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \widetilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}$.

3.6 ข้อพิจารณาในการประยุกต์วิธีทำซ้ำเพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

การเลือกวิธีทำซ้ำในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเป็นสิ่งสำคัญ เพราะมีผลต่อเวลาการคำนวณ. การพิจารณาเลือกวิธีทำซ้ำสามารถดูจากลักษณะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการนั้นๆ. กรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์สมมาตรและมีค่าบวกแน่นอน วิธีที่เหมาะสมกับระบบสมการดังกล่าวได้แก่วิธีเกรเดียนต์สังยุค. ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร การเลือกวิธีทำซ้ำที่เหมาะสมกับระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวค่อนข้างทำได้ยากกว่า. ถ้าเราพิจารณาเรื่องเวลาการคำนวณเป็นสำคัญ เมื่อเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีลักษณะเป็นเมตริกซ์หน่าแน่น(Dense Matrix) การใช้วิธีทำซ้ำที่มีจำนวนการคูณเมตริกซ์กับเวกเตอร์หลายครั้งในหนึ่งรอบการคำนวณซ้ำ จะใช้เวลาคำนวณและหน่วยความจำมากกว่าวิธีอื่น. แต่ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์มากเลขศูนย์(Sparse Matrix) มักไม่มีปัญหาเรื่องการใช้หน่วยความจำเพราะเราสามารถเลือกเก็บข้อมูลเฉพาะตำแหน่งได้. คุณลักษณะของวิธีทำซ้ำต่างๆ มีดังนี้

<u>วิธีเกรเดียนต์สังยุค</u>

- เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์สมมาตร.
- อัตราการลู่เข้าของผลเฉลยขึ้นอยู่กับตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์.
- ภาระการคำนวณในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำประกอบด้วย ผลคูณเมตริกซ์-เวกเตอร์ 1 ครั้ง ผลคูณภายใน 2 ครั้ง และคำนวณเวกเตอร์ 3 ตัว.
- ต้องการหน่วยความจำในการเก็บข้อมูลน้อยที่สุด.

<u>วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่</u>

- เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร โดยเพิ่มการคำนวณในส่วนของ $\mathbf{A}^T$.
- ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำใช้หน่วยความจำและมีภาระการคำนวณเป็นสองเท่าของวิธีเกรเดียนต์สังยุค.

<u>วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป</u>

- เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร.
- ภาระการคำนวณในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำประกอบด้วย ผลคูณเมตริกซ์-เวกเตอร์ 1 ครั้ง และผลคูณภายในเท่ากับ $k+1$ ครั้ง เมื่อ k คือรอบการคำนวณซ้ำ.
- การใช้หน่วยความจำในการเก็บข้อมูลขึ้นอยู่กับจำนวนรอบการคำนวณซ้ำ.

<u>วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร</u>

- เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร.
- ภาระการคำนวณในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำประกอบด้วย ผลคูณเมตริกซ์-เวกเตอร์ 2 ครั้ง ผลคูณภายใน 4 ครั้ง.

บทที่ 4

การปรับปรุงสภาพล่วงหน้า

ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำ อัตราการลู่เข้าของผลเฉลยขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์. เราสามารถลดเวลาการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำโดยใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าส่วนใหญ่มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น ทั้งนี้เนื่องจากไม่ต้องการเพิ่มภาระการคำนวณ. หลักการเลือกตัวปรับสภาพล่วงหน้านั้น พิจารณาจากเหตุผล 2 ประการคือ

1. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าต้องง่ายต่อการคำนวณ.
2. การคูณตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ผลลัพธ์ที่ได้ต้องมีลักษณะใกล้เคียงกับเมตริกซ์เอกลักษณ์.

4.1 หลักการเบื้องต้น

จากระบบสมการ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ กำหนดให้ $\mathbf{M}$ เป็นเมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้า. เมตริกซ์ $\mathbf{M}$ มีขนาดเท่ากับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ คือ $m \times n$. เมื่อคูณเมตริกซ์ $\mathbf{M}^{-1}$ ทั้งสองข้างของระบบสมการ จะได้

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \tag{4.1}$$

เมื่อเลือกเมตริกซ์ $\mathbf{M}$ ให้มีลักษณะใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \approx \mathbf{I} \tag{4.2}$$

เราสามารถหาคำตอบโดยประมาณของระบบสมการได้จาก

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \tag{4.3}$$

จากสมการดังกล่าวข้างต้นจะเห็นว่า ถ้าตัวปรับสภาพล่วงหน้ามีลักษณะใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มากเท่าใด คำตอบ $\mathbf{x}$ ที่ได้จากสมการที่ (4.3) จะมีค่าใกล้เคียงคำตอบจริงของระบบสมการ.

การประยุกต์ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับวิธีทำซ้ำ ไม่ได้คูณตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์โดยตรง เนื่องจากเป็นการเพิ่มภาระการคำนวณและจำนวนหน่วยความจำที่ใช้เก็บข้อมูล. การปรับปรุงการคำนวณอาศัยการคูณตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับเวกเตอร์ตกค้างหรือเวกเตอร์ทิศทาง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับชนิดของวิธีทำซ้ำ. ตัวอย่างขั้นตอนการคำนวณของวิธีเกรเดียนต์สังยุคเมื่อประยุกต์ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า แสดงได้ดังนี้

1) กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}^{(0)}$, คำนวณ $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$ และ $\mathbf{Mz}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

2) กำหนดค่า $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

3) คำนวณซ้ำ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots$

3.1) คำนวณ $\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$.

3.2) คำนวณ $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + a^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$ เมื่อ $a^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{z}^{(k-1)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{p}^{(k-1)}, \mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)} \right\rangle}$.

3.3) คำนวณ $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$.

3.4) คำนวณ $\mathbf{Mz}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$.

2.5) คำนวณ $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{z}^{(k)} + b^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$ เมื่อ $b^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{z}^{(k-1)} \right\rangle}$.

จากลำดับขั้นการคำนวณข้อที่ 3.4 เป็นการคำนวณซึ่งอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น ดังนั้นข้อสำคัญอย่างหนึ่งในการเลือกใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าคือ ต้องแก้ระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{Mz}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ ได้ง่าย. ลำดับขั้นการคำนวณของวิธีทำซ้ำอื่นๆ เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าสามารถดูได้จากภาคผนวก ข.

4.2 ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่าง ๆ

ชนิดของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบ่งออกได้เป็นหลายชนิด ซึ่งแต่ละชนิดมีความยากง่ายในการคำนวณหาค่าเมตริกซ์ **M** ต่างกันออกไป. การเลือกชนิดของตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นแบบที่สามารถคำนวณหาค่าเมตริกซ์ **M** โดยตรงจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์. การคำนวณหาค่าเมตริกซ์ **M** ที่ไม่ยุ่งยากและซับซ้อน มีข้อดีตรงที่ภาระการคำนวณไม่เพิ่มขึ้นจากเดิมมากนัก. สำหรับตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่มีการคำนวณที่ซับซ้อน(ตัวอย่างเช่น ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบแยกตัวประกอบแอลยูแบบไม่บริบูรณ์) แม้ว่าจะช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณและเวลาคำนวณลงได้มาก แต่จำเป็นต้องใช้หน่วยความจำเพื่อเก็บค่าเมตริกซ์ **M** ไว้. ดังนั้น ในทางปฏิบัติทำได้ค่อนข้างยากเมื่อระบบสมการเชิงเส้นมีขนาดใหญ่. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ได้แก่

4.2.1 **ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบี**(Jacobi Preconditioner)

เมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบีมีลักษณะเป็นเมตริกซ์ทแยงมุม. สมาชิกในแนวทแยงมีค่าเท่ากับสมาชิกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ นั่นคือ

$$m_{ij} = a_{ij} \qquad \text{กรณีที่ } i = j \tag{4.4}$$

และ

$$m_{ij} = 0 \qquad \text{กรณีที่ } i \neq j \tag{4.5}$$

โดย m_{ij} คือสมาชิกของเมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้า

a_{ij} คือสมาชิกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์.

ลักษณะของเมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าเป็นไปตามสมการคือ

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

ข้อดีของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบีคือ ต้องการหน่วยความจำในการเก็บข้อมูลของเมตริกซ์ **M** น้อย และการคำนวณทำได้ง่าย.

4.2.2 **ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดล**(Gauss-Seidel Preconditioner)

เมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดลมีลักษณะเป็นเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง. สมาชิก ณ ตำแหน่งต่างๆ มีค่าเท่ากับสมาชิกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์. โดย

$$m_{ij} = a_{ij} \qquad \text{กรณีที่ } i \geq j \tag{4.7}$$

และ

$$m_{ij} = 0 \qquad \text{กรณีที่ } i < j \tag{4.8}$$

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

การประยุกต์ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดล อาศัยการแก้ระบบสมการ $\mathbf{My} = \mathbf{u}$ เมื่อ $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์ตกค้างหรือเวกเตอร์ทิศทาง. การหาค่าเวกเตอร์ $\mathbf{y}$ ทำโดยการแทนค่าไปข้างหน้า ดังสมการ

$$y_i = \left(u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{i} m_{ij} u_i \right) / m_{ii} \qquad (4.10)$$

โดย y_i คือสมาชิกตำแหน่งที่ i ของเวกเตอร์ $\mathbf{y}$

u_i คือสมาชิกตำแหน่งที่ i ของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$.

4.2.3 **ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง**(Successive Overrelaxation Preconditioner, SOR)

เมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องมีลักษณะเป็นเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างเช่นเดียวกับเมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดล. สมาชิกของเมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าจะคำนวณจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ โดยแยกตัวประกอบเมตริกซ์สัมประสิทธิ์อยู่ในรูป

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{U} + \mathbf{L} \qquad (4.11)$$

โดย $\mathbf{D}$ คือเมตริกซ์ทแยงมุม

$\mathbf{U}$ คือเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนโดยแท้

$\mathbf{L}$ คือเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างโดยแท้.

การสร้างเมตริกซ์ $\mathbf{M}$ อาศัยเมตริกซ์ $\mathbf{D}$ และ $\mathbf{L}$ ที่ได้จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ตามสมการ

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\omega}\left(\mathbf{D} + \omega\,\mathbf{L}\right) \qquad (4.12)$$

โดย ω คือค่าคงที่เพื่อช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณ.

เมตริกซ์ **M** มีลักษณะดังนี้

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \omega m_{21} & m_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega m_{m1} & \omega m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

การประยุกต์ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบนี้อาศัยการแก้ระบบสมการ $\mathbf{My} = \mathbf{u}$ เหมือนกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดล.

4.2.4 **ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร**(Symmetric Successive Overrelaxation Preconditioner, SSOR)

สมาชิกแต่ละตัวของเมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรหาค่าได้จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เช่นเดียวกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบอื่นๆ. การสร้างเมตริกซ์ **M** อาศัยการแยกตัวประกอบเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ดังสมการที่ (4.11). การแยกตัวประกอบของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ดังกล่าว สามารถหาค่าเมตริกซ์ **M** ได้ตามสมการ

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\omega}{2-\omega}\right)\left(\omega^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{L}\right)\mathbf{D}^{-1}\left(\omega^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{U}\right) \tag{4.14}$$

การใช้เมตริกซ์ปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร การคำนวณแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนคือ

1) จากระบบสมการ $\mathbf{My} = \mathbf{u}$ กำหนด $\mathbf{M}_1 = \mathbf{D} + \omega\mathbf{L}$ และ $\mathbf{M}_2 = \mathbf{D} + \omega\mathbf{U}$. แก้ระบบสมการ $\mathbf{M}_1\mathbf{v} = \omega(2-\omega)\mathbf{u}$ เพื่อหาค่าเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

2) คำนวณหาค่าเวกเตอร์ $\mathbf{z}$ จากสมการ $\mathbf{Dv} = \mathbf{z}$

3) คำนวณหาเวกเตอร์ $\mathbf{y}$ จาก $\mathbf{M}_2\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

การหาค่าเวกเตอร์ **v** และ **y** ในขั้นตอนที่ 1 และ 3 ทำโดยการแทนค่าย้อนกลับและแทนค่าไปข้างหน้าตามลำดับ ตามสมการ

$$v_i = \left(u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i} (m_1)_{ij} u_i\right) / (m_1)_{ii} \tag{4.15}$$

$$y_i = \left(z_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{i} \left(m_2 \right)_{ij} u_i \right) / \left(m_2 \right)_{ii} \tag{4.16}$$

โดย v_i คือสมาชิกตำแหน่งที่ i ของเวกเตอร์ **v**

z_i คือสมาชิกตำแหน่งที่ i ของเวกเตอร์ **z**

$\left(m_1\right)_{ij}$ และ $\left(m_2\right)_{ij}$ คือสมาชิกของเมตริกซ์ $\mathbf{M}_1$ และ $\mathbf{M}_2$ ตามลำดับ.

บทที่ 5

ผลการคำนวณและวิเคราะห์ผลการคำนวณ

ในบทนี้กล่าวถึงการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิวและแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำกับปัญหาตัวอย่าง. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{A\sigma} = \mathbf{b}$ ด้วยวิธีทำซ้ำอาศัยตัวปรับสภาพล่วงหน้าเพื่อช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาคำนวณ. การเปรียบเทียบผลของการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำโดยอาศัยตัวปรับสภาพล่วงหน้า จะเปรียบเทียบจำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาที่ใช้คำนวณของแต่ละวิธี เพื่อหาวิธีที่เหมาะสมกับระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้หาค่า $\boldsymbol{\sigma}$ ของวิธีประจุพื้นผิว. ปัญหาตัวอย่างที่ใช้คำนวณประกอบด้วย ทรงกลมฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ.

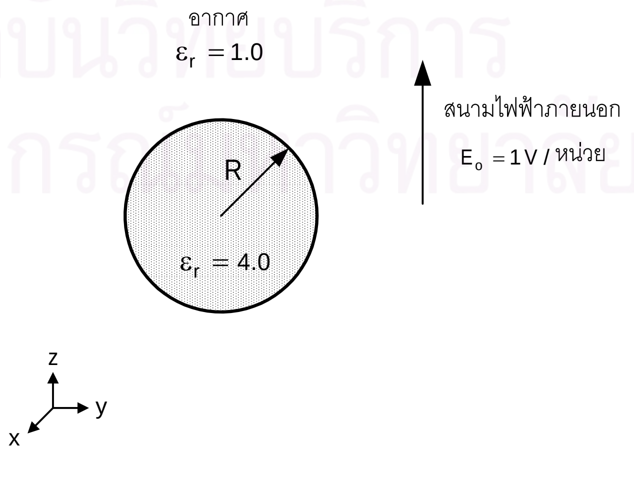
วิทยานิพนธ์นี้การคำนวณทำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ซีพียูเพนเทียม 4 ความเร็ว 1.6 MHz มีหน่วยความจำแบบ DDR ขนาด 256 MB และใช้ระบบปฏิบัติการณ์ลินุกซ์.

5.1 ทรงกลมฉนวนเดี่ยวในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

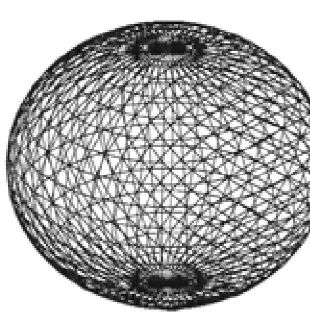
แบบจำลองทรงกลมฉนวนเป็นทรงกลมรัศมีเท่ากับ R วางอยู่ในตัวกลางอากาศภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_o ดังรูปที่ 5.1.

รายละเอียดของแบบจำลองประกอบด้วย

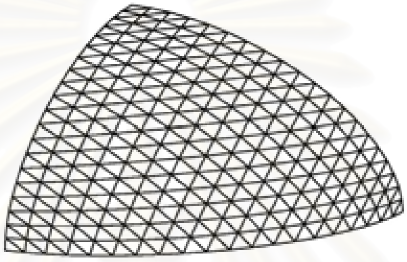
- ทรงกลมฉนวนรัศมี R เท่ากับ 1 หน่วย มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่พิกัด $(0,0,0)$.
- ค่าสภาพยอมภายนอกและภายในทรงกลมมีค่าเท่ากับ 1.0 และ 4.0 ตามลำดับ.
- ทรงกลมอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ ในทิศทาง $+z$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 V / หน่วย.



รูปที่ 5.1 ทรงกลมฉนวนเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ



รูปที่ 5.2 ทรงกลมฉนวนเมื่อแบ่งพื้นผิวเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม



รูปที่ 5.3 ตัวอย่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี 1 เอลิเมนต์

การคำนวณได้แบ่งพื้นผิวของทรงกลมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,520 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.2. จำนวนตัวแปรของระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}$ เท่ากับ 1,520 ตัวแปร. เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ใช้เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี[11] เพื่อให้มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับทรงกลมมากที่สุด. ตัวอย่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งดังกล่าว แสดงในรูปที่ 5.3.

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากวิธีประจุพื้นผิวด้วยวิธีทำซ้ำ มีเงื่อนไขการคำนวณดังนี้

- ค่าความคลาดเคลื่อนยินยอมเท่ากับ 1×10^{-6}
- ใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นของผลเฉลย $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ เป็น

$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = 0$ เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า,

$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า.

การกำหนดค่าเริ่มต้น $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ ในกรณีใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า เนื่องจากต้องการให้ค่าเริ่มต้น $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ ที่สุ่มกำหนดค่ามีค่าใกล้เคียงกลับคำตอบจริง. การกำหนดค่าเริ่มต้นในลักษณะดังกล่าว เพื่อให้กระบวนการคำนวณด้วยวิธีทำซ้ำลู่เข้าหาคำตอบที่เราต้องการเร็วยิ่งขึ้น. จากสมการ

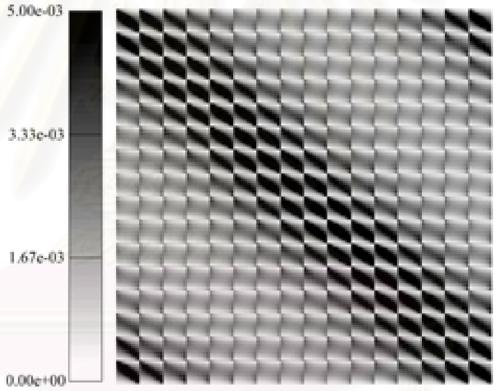
$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \qquad (5.1)$$

เมื่อ $$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \approx \mathbf{I} \tag{5.2}$$

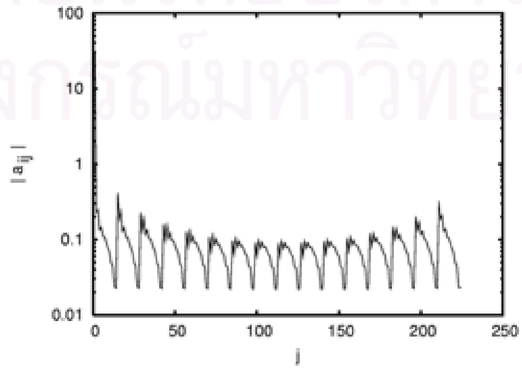
จะได้ $$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} \approx \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \tag{5.3}$$

5.1.1 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น

ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำ ปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อจำนวนรอบการคำนวณซ้ำก็คือลักษณะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น. เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธีประจุพื้นผิวมีลักษณะเป็นเมตริกซ์หนาแน่นไม่สมมาตร และสมาชิกในแนวทแยงมุมมีค่ามากที่สุด. รูปที่ 5.4 แสดงลักษณะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ตัวอย่างขนาด 224×224 โดยละเลยสมาชิกในแนวทแยงมุมและสมาชิกในตำแหน่งต่างๆ ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วยค่าในแนวทแยงมุม. รูปที่ 5.5 แสดงค่า $|a_{ij}|$ ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ กรณี $i = 1$ และ $1 \le j \le 224$. ค่า $|a_{ij}|$ มีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่างจุด i กับ j. โดยเมื่อ $i = j$ เป็นตำแหน่งที่ $|a_{ij}|$ มีค่ามากที่สุด.



รูปที่ 5.4 ตัวอย่างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 224×224

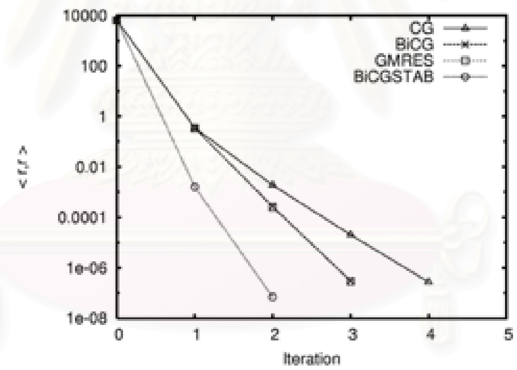


รูปที่ 5.5 ค่า $|a_{ij}|$ ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เมื่อ $i = 1$ และ $1 \le j \le 224$

ปัจจัยอีกประการหนึ่งที่มีผลต่อการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำคือค่าตัวเลขเงื่อนไข (Conditioned Number)ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\kappa(\mathbf{A})$. ตัวเลขเงื่อนไขเป็นตัวบ่งบอกสภาวะของระบบสมการเชิงเส้นแบ่งออกเป็นสภาวะเลว(ill-conditioned) และสภาวะดี(well-conditioned). ระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในสภาวะเลวค่าตัวเลขเงื่อนไขจะมีค่ามาก. ระบบสมการเชิงเส้นขนาด 1,520 ตัวแปรของแบบจำลองทรงกลมฉนวนเดี่ยวในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอมีค่า $\kappa(\mathbf{A})$ เท่ากับ 2.51.

5.1.2 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาคำนวณของวิธีทำซ้ำต่างๆ เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า

ในหัวข้อนี้เป็นการคำนวณเปรียบเทียบวิธีทำซ้ำต่างๆ โดยไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า. รูปที่ 5.6 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ กับจำนวนรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำแต่ละวิธี. ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ แสดงโดยประมาณถึงความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้จากวิธีทำซ้ำ ณ รอบการคำนวณสุดท้าย. เนื่องจากเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ คำนวณจากสมการ $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ ดังนั้นถ้าค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ มีค่าต่ำมากเท่าไร ก็แสดงว่าคำตอบ $\mathbf{x}$ ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับคำตอบจริงของระบบสมการ.



รูปที่ 5.6 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำเมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า

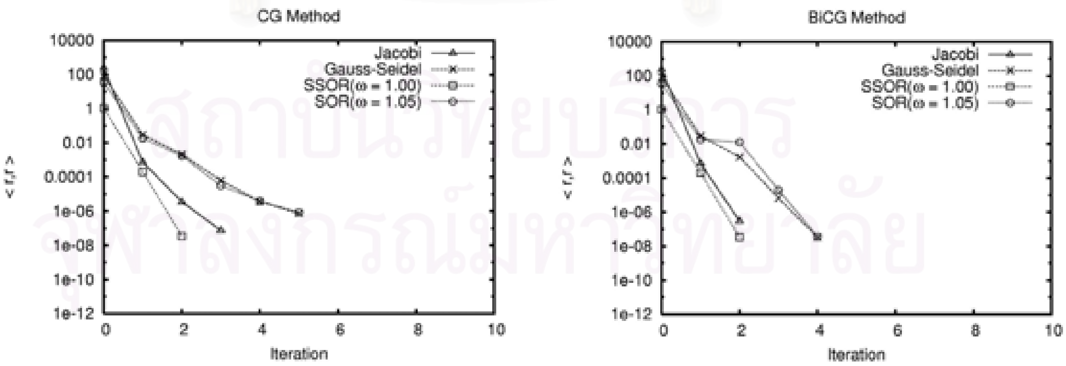
ตารางที่ 5.1 เปรียบเทียบเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณและจำนวนรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำต่างๆ

วิธีทำซ้ำ	CG	BiCG	GMRES	BiCGSTAB
จำนวนรอบ(รอบ)	4	3	3	2
เวลาคำนวณ(วินาที)	69.16	104.26	104.82	69.19

จากรูปที่ 5.6 เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับการคำนวณ วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร(BiCGSTAB) มีอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยดีที่สุด และมีค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ต่ำที่สุด. จำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณของวิธีต่างๆ สรุปอยู่ในตารางที่ 5.1. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรมีจำนวนรอบการคำนวณซ้ำน้อยที่สุด(2 รอบ). วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่(BiCG) และวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป(GMRES) ใช้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำเท่ากันคือ 3 รอบ. วิธีเกรเดียนต์สังยุคใช้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำมากที่สุด(4 รอบ) เนื่องจากเป็นวิธีที่เหมาะกับระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์สมมาตร และถ้าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีลักษณะไม่สมมาตรมากๆ ผลเฉลยอาจจะไม่ลู่เข้าหาค่าที่ต้องการ. วิธีเกรเดียนต์สังยุคและวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรใช้เวลาคำนวณใกล้เคียงกันคือประมาณ 69 วินาที. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปใช้เวลาคำนวณมากที่สุดเท่ากับ 104.82 วินาที และเวลาคำนวณของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่เท่ากับ 104.26 วินาที.

5.1.3 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาคำนวณของวิธีทำซ้ำต่างๆ เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า

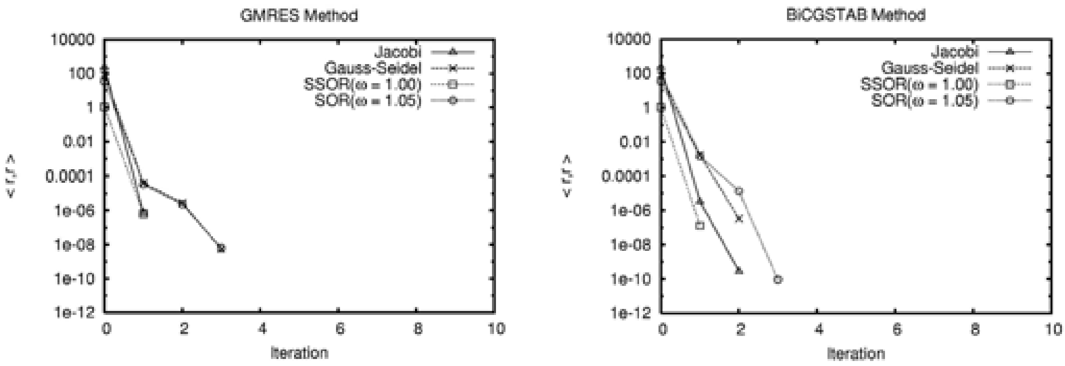
รูปที่ 5.7 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ กับจำนวนรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำแต่ละวิธี เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าชนิดต่างๆ ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 ช่วยในการคำนวณ. การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรกำหนดค่า ω เท่ากับ 1.05 และ 1.0 ตามลำดับ. ผลของค่า ω ที่มีต่อจำนวนรอบการคำนวณซ้ำเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรสามารถดูได้จากภาคผนวก ค. การกำหนดค่า ω ของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องเท่ากับ 1.05 เนื่องจากที่ค่า $\omega = 1.0$ เมตริกซ์ $\mathbf{M}$ มีลักษณะเหมือนกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดล.



ก. วิธีเกรเดียนต์สังยุค

ข. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่

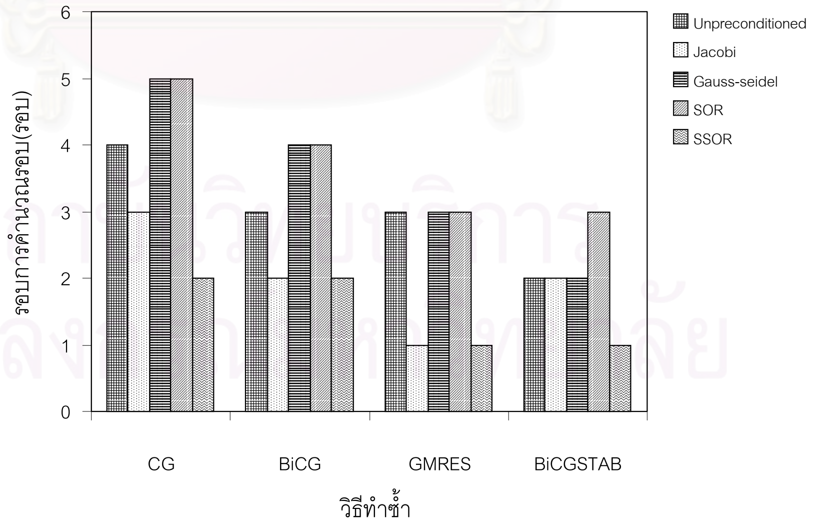
รูปที่ 5.7 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำต่างๆ



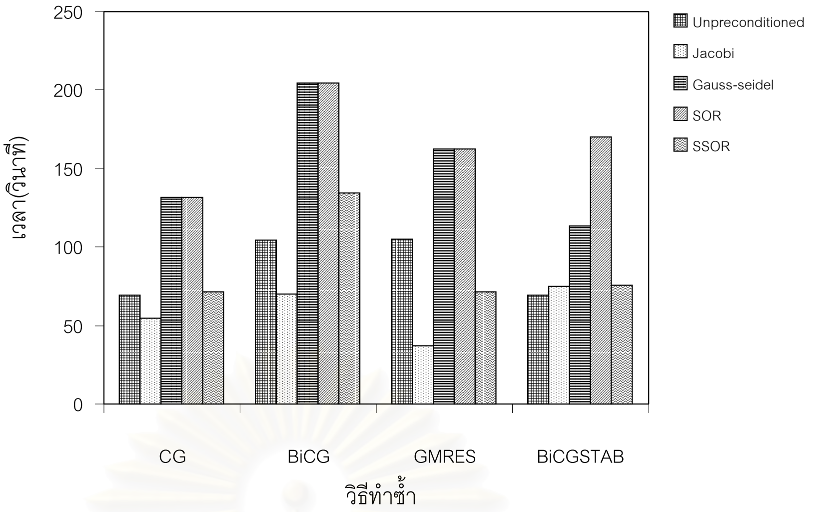
ค. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป　　　　ง. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

รูปที่ 5.7 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำต่างๆ(ต่อ)

จากรูปที่ 5.7 ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร(SSOR) ช่วยลดจำนวนรอบการคำนวณลงได้มากที่สุด. จากรูปที่ 5.8 เห็นได้ว่าในแต่ละกรณีนั้น จำนวนรอบการคำนวณซ้ำมีค่าไม่มาก เนื่องจากลักษณะของแบบจำลองไม่ซับซ้อนมาก. จำนวนรอบการคำนวณซ้ำที่ใช้ต่ำที่สุดเท่ากับ 1 รอบได้แก่ 2 กรณีคือ กรณีแรกเมื่อใช้วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบีและตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร. กรณีที่สองเมื่อใช้วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร.กราฟรูปที่ 5.9 แสดงเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณ. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปเมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบีมีเวลาคำนวณต่ำที่สุดเท่ากับ 36.79 วินาที.



รูปที่ 5.8 เปรียบเทียบจำนวนรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ



รูปที่ 5.9 เปรียบเทียบเวลารวมทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณของวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ

ตารางที่ 5. 2 ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ

ตัวปรับสภาพล่วงหน้า	Jacobi	Gauss-Seidel	SOR	SSOR
ตัวเลขเงื่อนไข	2.50	1.79	1.76	1.28

การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าทำให้ค่าตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ลดลง. ตารางที่ 5.2 แสดงค่าตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์. จากตารางเห็นได้ว่าตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรสามารถลดตัวเลขเงื่อนไขลงได้มากที่สุด. ตัวเลขเงื่อนไขลดลงจาก 2.51 เหลือ 1.28 หรือลดลง 49 เปอร์เซ็นต์.

5.1.4 สนามไฟฟ้าและค่าผิดพลาดของสนามไฟฟ้า

การคำนวณสนามไฟฟ้าจากความหนาแน่นประจุเชิงผิวที่ได้จากระบบสมการ $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}$ ใช้คำตอบ $\boldsymbol{\sigma}$ ที่ได้จากวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง. กรณีดังกล่าวมีค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ที่ต่ำที่สุด คือประมาณ 1×10^{-10}. จุดที่คำนวณสนามไฟฟ้าได้แก่ $(0,0,z)$ โดยที่ z มีค่าตั้งแต่ 0 จนถึง 5 หน่วยดังรูปที่ 5.10. ความผิดพลาดของสนามไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงกลมฉนวน คำนวณจากสมการ

$$\text{ความผิดพลาด (\%)} = \left| \frac{(E_Z)_{real} - (E_Z)_{cal}}{(E_Z)_{real}} \right| \times 100 \qquad (5.4)$$

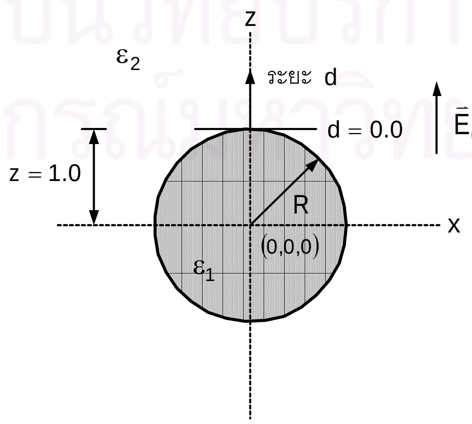
ผลเฉลยแม่นตรงของสนามไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงกลมฉนวนคำนวณได้จากสมการ

$$(E_Z)_{in} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \qquad (5.5)$$

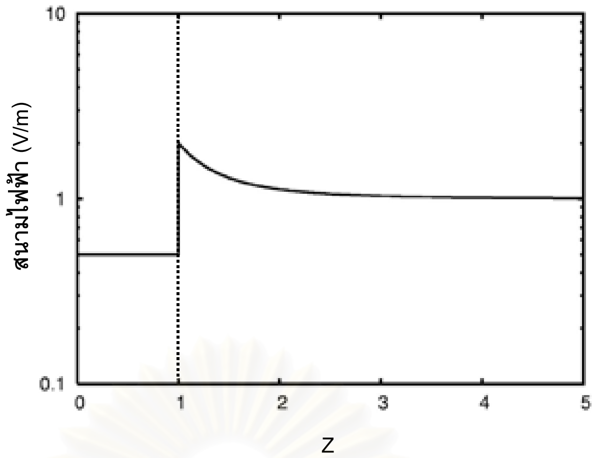
$$(E_Z)_{ext} = \left[1 + \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \times \frac{R^3}{(R+d)^3}\right] E_0 \qquad (5.6)$$

โดย E_Z คือสนามไฟฟ้าในทิศทางแกน z
R คือรัศมีของทรงกลมฉนวน
d คือระยะตามแกน z วัดจากผิวของทรงกลมฉนวนดังรูปที่ 5.10
ε_1 คือค่าสภาพยอมภายในทรงกลมฉนวน
ε_2 คือค่าสภาพยอมภายนอกทรงกลมฉนวน
ดัชนีล่าง real แสดงถึงค่าสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จากสมการผลเฉลยแม่นตรง
ดัชนีล่าง cal แสดงถึงค่าสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จากวิธีประจุพื้นผิว
ดัชนีล่าง in แสดงถึงบริเวณภายในทรงกลม
ดัชนีล่าง ext แสดงถึงบริเวณภายนอกทรงกลม

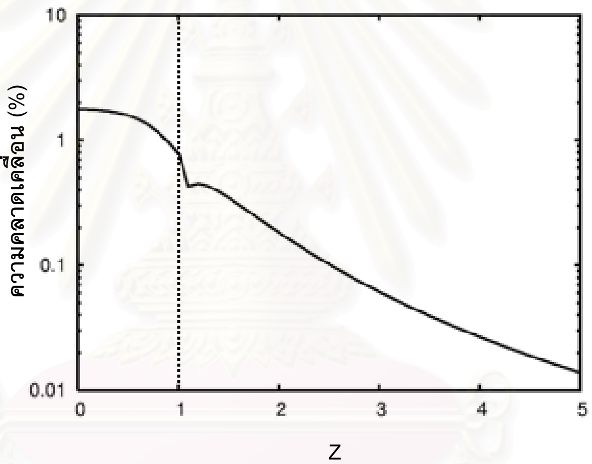
สนามไฟฟ้าตามแนวแกน z ที่จุด $(0,0,z)$ เมื่อ $(0 \le z \le 5)$ แสดงในรูปที่ 5.11. ภายในทรงกลม $(z < 1)$ สนามไฟฟ้าจะมีค่าคงที่เท่ากับ $0.5\,V$ / หน่วย. ภายนอกทรงกลมบริเวณใกล้ผิวของทรงกลมค่าสนามไฟฟ้ามีค่าประมาณ $2.0\,V$ / หน่วย. เมื่อระยะ z เพิ่มขึ้นสนามไฟฟ้าจะลู่เข้าหาค่า E_O คือ $1\,V$ / หน่วย.



รูปที่ 5.10 ระยะ d ตามแกน z ที่ใช้คำนวณสนามไฟฟ้าตามสมการที่ 5.6



รูปที่ 5.11 สนามไฟฟ้าที่จุด $(0,0,z)$ เมื่อ $(0 \le z \le 5)$ โดยเส้นประแสดงขอบเขตระหว่างด้านในและด้านนอกของทรงกลมฉนวน



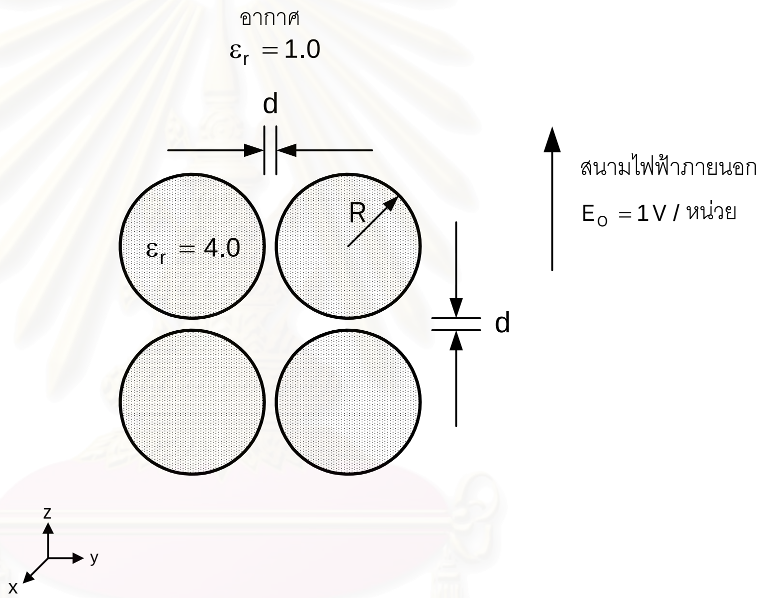
รูปที่ 5.12 ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่จุด $(0,0,z)$ เมื่อ $(0 \le z \le 5)$

เปอร์เซ็นต์ผิดพลาดของสนามไฟฟ้าในรูปที่ 5.12 มีค่าต่ำกว่า 2 เปอร์เซ็นต์. การลดความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าทำได้โดยการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณ. ในกรณีของแบบจำลองทรงกลมฉนวนลูกเดียว การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำสามารถทำได้ง่ายและคำตอบที่ได้มีค่าความถูกต้องสูง. ทั้งนี้เนื่องจากแบบจำลองมีลักษณะไม่ซับซ้อน. การคำนวณเมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับการใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าจึงไม่เห็นความแตกต่างที่ชัดเจน.

5.2 ทรงกลมฉนวนหลายลูกในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

แบบจำลองประกอบด้วยทรงกลมฉนวน 8 ซึ่งมีลักษณะการวางดังแสดงในรูปที่ 5.13. รายละเอียดของแบบจำลองประกอบด้วย

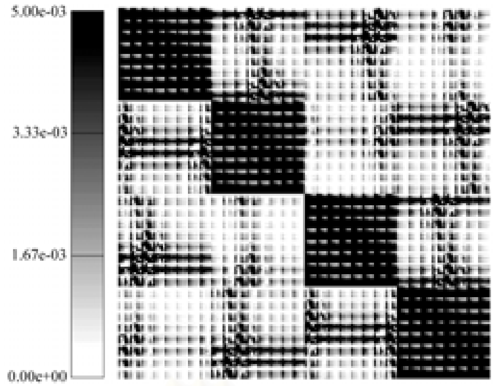
- รัศมี R ของทรงกลมแต่ละลูกเท่ากับ 1 หน่วย.
- ค่าสภาพยอมภายในและนอกทรงกลมมีค่าเท่ากับ 1 และ 4 ตามลำดับ.
- ทรงกลมอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ ในทิศทาง $+z$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 V / หน่วย.
- พื้นผิวของทรงกลมแต่ละลูกถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีจำนวน 1,520 เอลิเมนต์.
- ระยะห่างระหว่างทรงกลม d เท่ากับ 0.0001 หน่วย.



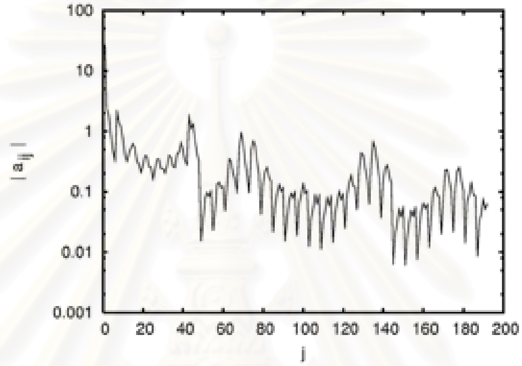
รูปที่ 5.13 แบบจำลองทรงกลมฉนวนหลายลูกภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

5.2.1 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น

จากรูปที่ 5.13 สร้างระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{A\sigma} = \mathbf{b}$ เพื่อหาค่าความหนาแน่นประจุ ณ เอลิเมนต์ต่างๆ ออกมา. โดยตัวอย่างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 192×192 ของระบบสมการเชิงเส้นมีลักษณะดังรูปที่ 5.14. เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีลักษณะเป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร. สมาชิกในตำแหน่งอื่นๆ จะถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วยค่าในแนวทแยงมุม ซึ่งเป็นตำแหน่งที่มีค่ามากที่สุด. ในรูปที่ 5.15 เป็นกราฟแสดงค่าสมาชิก $|a_{ij}|$ ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เมื่อ $i = 1$. ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 192×192 จากแบบจำลองมีค่าเท่ากับ 3.08.



รูปที่ 5.14 ตัวอย่างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 192×192



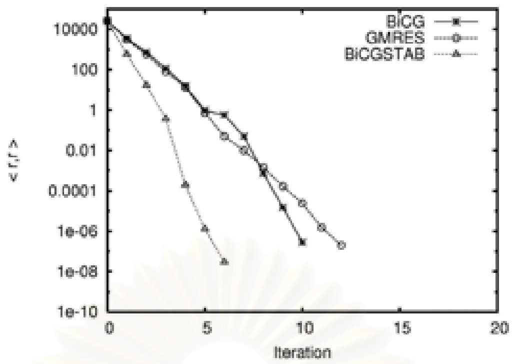
รูปที่ 5.15 ค่า $|a_{ij}|$ ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เมื่อ $i = 1$ และ $1 \le j \le 192$

5.2.2 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาคำนวณของวิธีทำซ้ำต่างๆ เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า

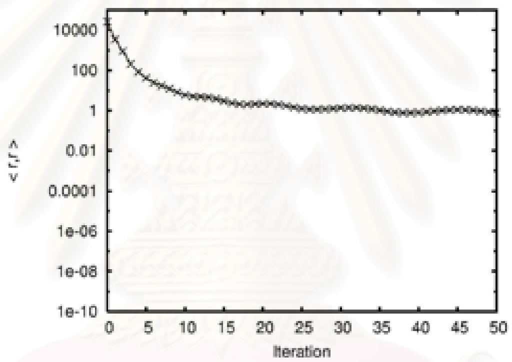
ในหัวข้อนี้เป็นการเปรียบเทียบการคำนวณของวิธีทำซ้ำต่างๆ เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า. เงื่อนไขการคำนวณของวิธีทำซ้ำกำหนดเช่นเดียวกับหัวข้อที่ 5.1. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่เท่ากับ 3 รอบการคำนวณ เพื่อเป็นการจำกัดปริมาณหน่วยความจำที่ใช้คำนวณ. ผลของรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่ที่มีต่อการคำนวณของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปสามารถดูได้จากภาคผนวก ง.

รูปที่ 5.16 แสดงค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ และวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปใช้รอบการคำนวณซ้ำเท่ากับ 10 และ 12 รอบตามลำดับ. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรมีรอบการคำนวณซ้ำต่ำที่สุดคือ 6 รอบและใช้เวลาคำนวณเท่ากับ 5,940.98 วินาที. จำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณสรุปดังตารางที่ 5.3. กรณีของวิธีเกรเดียนต์สังยุค เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าผลเฉลย

ไม่ลู่เข้าหาค่าที่ต้องการ. ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีเกรเดียนต์สังยุคแสดงในรูปที่ 5.17.



รูปที่ 5.16 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร



รูปที่ 5.17 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีเกรเดียนต์สังยุค

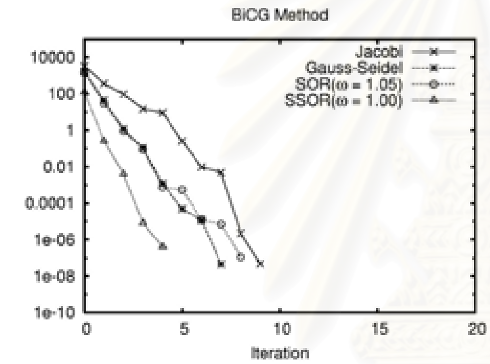
ตารางที่ 5.3 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

วิธีทำซ้ำ	BiCG	GMRES	BiCGSTAB
รอบการคำนวณ(รอบ)	10	12	6
เวลาคำนวณ(วินาที)	9,406.83	12,202.94	5,940.98

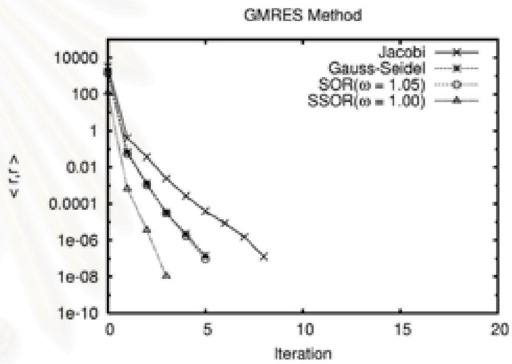
5.2.3 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำและเวลาคำนวณของวิธีทำซ้ำต่างๆ เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า

วิธีทำซ้ำที่ใช้ในหัวข้อนี้ ได้แก่วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร. การคำนวณไม่ใช้วิธีเกรเดียนต์สังยุคเนื่องจากผลเฉลยไม่ลู่เข้าหาค่าที่ต้องการ. การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรกำหนดค่า ω เท่ากับ 1.05 และ 1.0 ตามลำดับ.

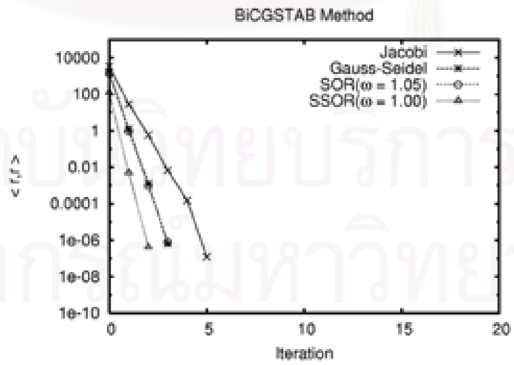
รูปที่ 5.18 แสดงค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ. จากรูป ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรให้อัตราการลู่เข้าหาของผลเฉลยดีที่สุด. กราฟเปรียบรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ แสดงดังรูปที่ 5.19.



ก. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่



ข. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป



ค. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

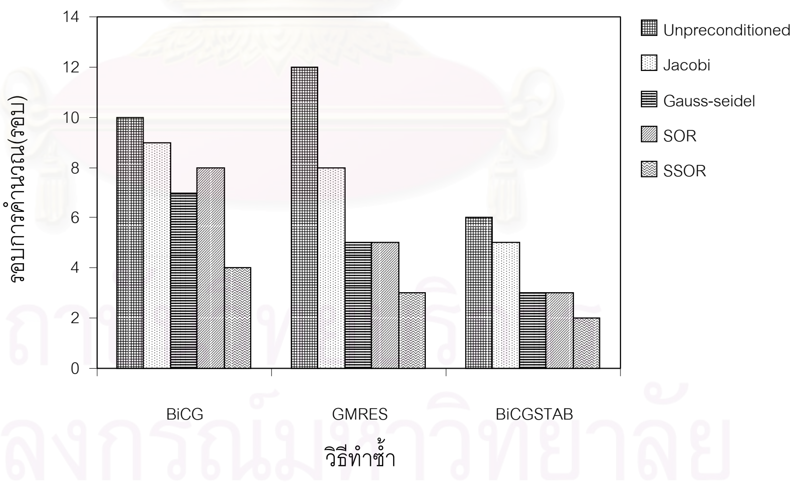
รูปที่ 5.18 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ

วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่เมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบี แบบเกาส์-ไซเดล และแบบผ่อนปรนกินสืบเนื่องจำนวนรอบการคำนวณซ้ำเท่ากับ 9, 7, และ 8 รอบตามลำดับ. การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนกินสืบเนื่องสมมาตรให้รอบการคำนวณซ้ำต่ำที่สุดคือ 4 รอบ.

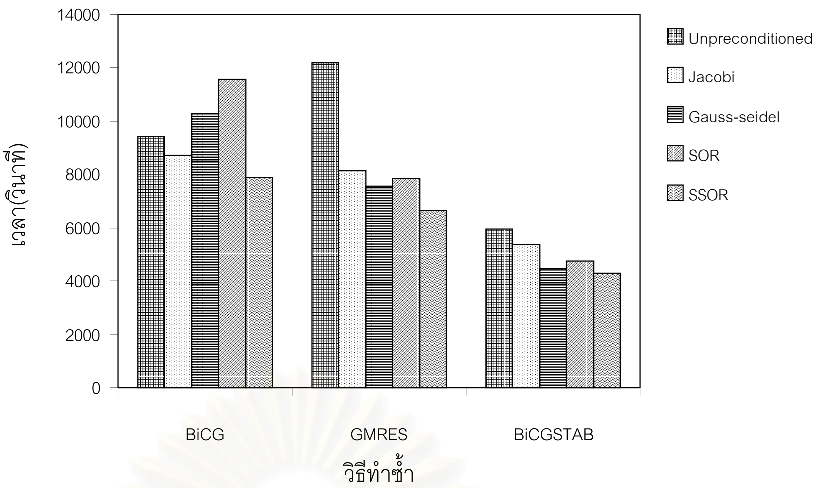
วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปเมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบีจำนวนรอบการคำนวณซ้ำเท่ากับ 8 รอบ. การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดลและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องมีรอบการคำนวณซ้ำเท่ากันคือ 4 รอบ. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนกินสืบเนื่องสมมาตรให้รอบการคำนวณซ้ำต่ำที่สุดคือ 3 รอบ.

และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรเมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบีมีรอบการคำนวณซ้ำเท่ากับ 5 รอบ. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดลและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องมีรอบการคำนวณซ้ำเท่ากันคือ 3 รอบ. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนกินสืบเนื่องสมมาตรให้รอบการคำนวณซ้ำต่ำที่สุดคือ 2 รอบ.

รูปที่ 5.20 เป็นกราฟเปรียบเทียบเวลารวมทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรเมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรใช้เวลาคำนวณทั้งหมดต่ำสุดเท่ากับ 4,294.85 วินาที. วิธีที่ใช้เวลาคำนวณมากที่สุดได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่เมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง. เวลาคำนวณทั้งหมดเท่ากับ 11,554.23 วินาที.



รูปที่ 5.19 รอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ



รูปที่ 5.20 เวลารวมทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ

ตารางที่ 5.4 ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ

ตัวปรับสภาพล่วงหน้า	Jacobi	Gauss-Seidel	SOR	SSOR
ตัวเลขเงื่อนไข	3.01	2.08	2.06	1.23

หมายเหตุ เมตริกซ์ $\mathbf{A}$ มีขนาดเท่ากับ (192×192).

ตารางที่ 5.4 แสดงตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ก่อนและหลังที่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่างๆ. เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\kappa(\mathbf{A})$ มีค่าเท่ากับ 3.08. การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรทำให้ตัวเลขเงื่อนไขลดลงมากที่สุดเหลือ 1.23 หรือลดลง 60 เปอร์เซ็นต์.

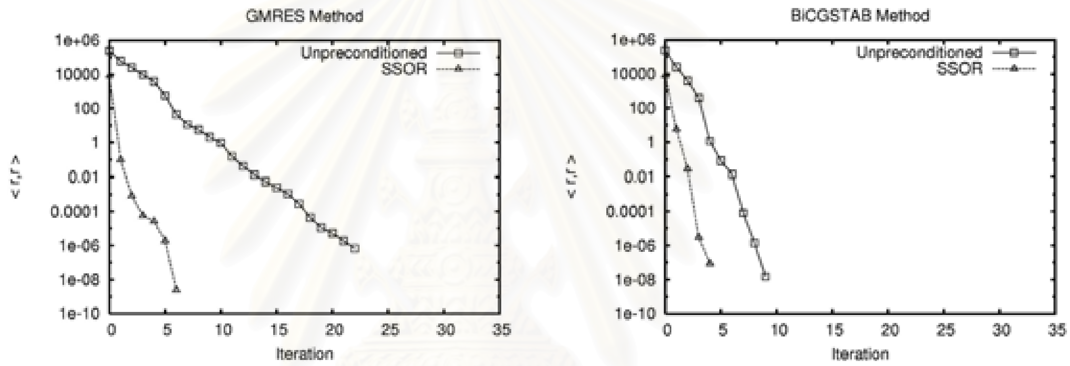
5.2.4 ผลของค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ต่อการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

เราได้เปลี่ยนแปลงค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมฉนวนของแบบจำลองข้างต้นจาก 4 เป็น 10 และ 80 เพื่อดูผลที่มีต่อการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบ $\boldsymbol{\sigma}$ ที่ต้องการ. วิธีทำซ้ำที่ใช้คำนวณได้แก่วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่ใช้เป็นแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร ซึ่งจากหัวข้อที่ 5.2.3 สามารถลดจำนวนรอบการคำนวณซ้ำลงได้ดีที่สุด.

รูปที่ 5.21 และรูปที่ 5.22 แสดงค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร เมื่อค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมมีค่าเท่ากับ 10 และ 80 ตามลำดับ. จากรูปที่ 5.21 การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกิน

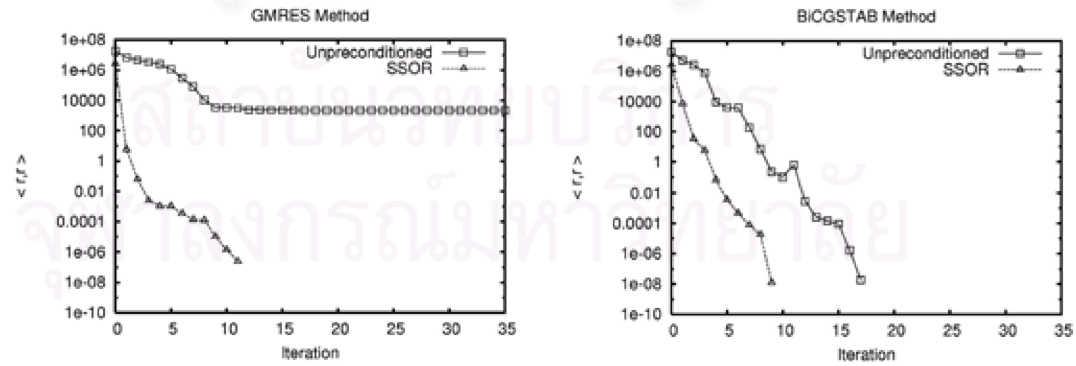
สืบเนื่องสมมาตรทำให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปลดลงจาก 22 รอบเหลือ 6 รอบ. เวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณลดลงจาก 23,113.69 วินาทีเหลือ 12,610.72 วินาที. ในส่วนของวิธีเกรเดียนต์สังยุคเสถียรภาพคู่จำนวนรอบการคำนวณลดลงจาก 9 รอบเหลือ 4 รอบ และเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณลดลงจาก 10,616.01 วินาทีเหลือ 9,055.36 วินาที.

จากรูปที่ 5.22 เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปผลเฉลยไม่ลู่เข้าหาค่าที่ต้องการ ในการใช้รอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่เท่ากับ 3 รอบ. จำนวนรอบการคำนวณซ้ำเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าเท่ากับ 11 รอบและใช้เวลาคำนวณทั้งหมด 22,821.69 วินาที. วิธีเกรเดียนต์สังยุคเสถียรภาพคู่จำนวนรอบการเมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าเท่ากับ 17 รอบและเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าเท่ากับ 9 รอบ. เวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณลดลงจาก 14,154.85 วินาทีเหลือ 11,322.25 วินาที. เวลารวมทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณแสดงในตารางที่ 5.5.



ก. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป ข. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

รูปที่ 5.21 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำเมื่อค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมมีค่าเท่ากับ 10



ก. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป ข. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

รูปที่ 5.22 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำเมื่อค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมมีค่าเท่ากับ 80

ตารางที่ 5.5 เวลารวมทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

วิธีทำซ้ำ	ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์	เวลาคำนวณ(วินาที)	
		Unpreconditioned	SSOR
GMRES	10	23,113.69	12,610.72
	80	-	22,821.69
BiCGSTAB	10	10,616.01	9,055.36
	80	14,154.85	11,322.25

การเพิ่มค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมทำให้ลักษณะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นเปลี่ยนแปลง. การกำหนดค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 10 ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าเท่ากับ 5.74. การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าตัวเลขเงื่อนไขลดลงเหลือ 1.74. ส่วนกรณีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 80 เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าตัวเลขเงื่อนไขลดลงจาก 10.84 เหลือ 3.02. ทั้งนี้การคำนวณกระทำโดยใช้เมตริกซ์ตัวอย่างจากแบบจำลองที่มีจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด(รวมทุกอนุภาค)ขนาดเท่ากับ 192 เอลิเมนต์.

จากผลการคำนวณที่ผ่านมาทั้งหมด พบว่าตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรสามารถลดจำนวนรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำต่างๆ ได้ดีกว่าแบบอื่น. ข้อเสียอย่างหนึ่งของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรคือมีภาระการคำนวณมาก เนื่องจากลักษณะของเมตริกซ์ **M** เป็นเมตริกซ์หนาแน่น.

บทที่ 6

สรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับวิธีทำซ้ำเพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นจากวิธีประจุพื้นผิว. วิธีทำซ้ำที่ใช้ได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุค วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร. การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ามีวัตถุประสงค์เพื่อลดเวลาการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำ. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่ใช้ได้แก่ ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบี แบบเกาส์-ไซเดล แบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง และแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร.

คุณสมบัติของวิธีทำซ้ำต่าง ๆ

วิธีเกรเดียนต์สังยุคเป็นวิธีทำซ้ำที่เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์สมมาตร. ภาระการคำนวณในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำประกอบด้วย ผลคูณเมตริกซ์-เวกเตอร์ 1 ครั้ง ผลคูณภายใน 2 ครั้ง และคำนวณเวกเตอร์ 3 ตัว. วิธีนี้เป็นวิธีที่ต้องการหน่วยความจำในการเก็บข้อมูลน้อยที่สุด.

วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ปรับปรุงจากวิธีเกรเดียนต์สังยุค. โดยเพิ่มการคำนวณในส่วนของ $\mathbf{A}^T$ เพื่อให้เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร. การคำนวณอาศัยกระบวนการ Two-side Lanczos เพื่อสร้างเวกเตอร์เชิงตั้งฉากสองชุดที่สัมพันธ์กับเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}^T$. วิธีนี้มีภาระการคำนวณและใช้หน่วยความจำเป็นสองเท่าของวิธีเกรเดียนต์สังยุค.

วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปเหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นทั้งเมตริกซ์สมมาตรและไม่สมมาตร. วิธีนี้อาศัยวิธีของ Arnoldi ในการสร้างเวกเตอร์มูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ. ภาระการคำนวณในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำประกอบด้วย ผลคูณเมตริกซ์-เวกเตอร์ 1 ครั้ง และผลคูณภายในเท่ากับ $k+1$ ครั้ง เมื่อ k คือรอบการคำนวณซ้ำ. การใช้หน่วยความจำในการเก็บข้อมูลขึ้นอยู่กับจำนวนรอบการคำนวณซ้ำ แต่ทั้งนี้เราสามารถจำกัดการใช้หน่วยความจำได้โดยการกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่.

วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรพัฒนามาจากวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่กับวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางตัวทั่วไป โดยปรับปรุงในส่วนการหาค่าเวกเตอร์ตกค้างเพื่อให้อัตราการลู่เข้าของผลเฉลยดีขึ้น. วิธีนี้เหมาะกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์สมมาตรและไม่

สมมาตร. ภาระการคำนวณในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำประกอบด้วย ผลคูณเมตริกซ์-เวกเตอร์ 2 ครั้ง ผลคูณภายใน 4 ครั้ง.

สรุปลักษณะของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบต่าง ๆ

ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบีมีลักษณะเป็นเมตริกซ์ทแยงมุม. สมาชิกในแนวทแยงมีค่าเท่ากับสมาชิกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบนี้ง่ายต่อการคำนวณแต่ช่วยลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำได้ไม่ดีนัก.

ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดลมีลักษณะเป็นเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง. สมาชิก ณ ตำแหน่งต่างๆ มีค่าเท่ากับสมาชิกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดลสามารถลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำได้ดีกว่าตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบยาโคบี.

ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องมีลักษณะเป็นเมตริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างเช่นเดียวกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดล ต่างตรงที่มีค่าคงที่ ω ซึ่งเป็นตัวช่วยลดรอบการคำนวณ. แต่อย่างไรก็ดี การปรับค่า ω ไม่ช่วยลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำลงอย่างเห็นได้ชัด. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสามารถลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำลงได้เช่นเดียวกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดล.

ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรเป็นตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเดียวที่มีลักษณะเป็นเมตริกซ์หนาแน่น. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบนี้ช่วยลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำลงได้ดีที่สุดเมื่อเทียบกับแบบอื่นๆ. เช่นเดียวกับกรณีของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง การปรับค่า ω ไม่ช่วยลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำลงอย่างเห็นได้ชัด.

แบบจำลองทรงกลมฉนวนเดี่ยวในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

<u>ผลการใช้วิธีทำซ้ำแก้ระบบสมการเชิงเส้นจากวิธีประจุพื้นผิว</u>

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นจากแบบจำลองมีลักษณะเป็นเมตริกซ์หนาแน่นและไม่สมมาตร. ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าไม่มาก. เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า วิธีทำซ้ำทั้ง 4 วิธีสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นหาค่า $\boldsymbol{\sigma}$ ได้. วิธีที่มีอัตราลู่เข้าของผลเฉลยดีที่สุดได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่และวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปให้มีอัตราลู่เข้าของผลเฉลยที่ใกล้เคียงกัน. วิธีที่ใช้รอบการคำนวณมากที่สุดคือวิธีเกรเดียนต์สังยุค. ทั้งนี้ วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรกับวิธีเกรเดียนต์สังยุคใช้เวลาคำนวณใกล้เคียงกันมากและต่ำกว่าอีกสองวิธีที่เหลือ.

<u>ผลการใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับวิธีทำซ้ำต่างๆ</u>

การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าสามารถช่วยลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำลงได้. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าที่สามารถลดรอบการคำนวณลงได้มากที่สุดคือตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปเมื่อใช้กับตัวปรับสภาพล่วงหน้าดังกล่าว ใช้เวลาคำนวณต่ำที่สุด(36.79 วินาที)และมีรอบการคำนวณต่ำที่สุด(1 รอบ). อย่างไรก็ตาม ในบางกรณีผู้เขียนพบว่าการใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าทำให้รอบการคำนวณเพิ่มขึ้น. ตัวอย่างเช่น กรณีของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดลและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องเมื่อใช้ร่วมกับวิธีเกรเดียนต์สังยุคและวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่.

เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าทำให้ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ลดลง. โดยตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรสามารถลดตัวเลขเงื่อนไขลงได้มากที่สุดคือ 49 เปอร์เซ็นต์. ตัวเลขเงื่อนไขลดลงจาก 2.51 เหลือ 1.28.

การคำนวณสนามไฟฟ้าจากค่า σ ที่ได้จากวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร. ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้มีค่าต่ำกว่า 2 เปอร์เซ็นต์.

แบบจำลองทรงกลมฉนวนหลายลูกในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

<u>ผลการใช้วิธีทำซ้ำแก้ระบบสมการเชิงเส้นจากวิธีประจุพื้นผิว</u>

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นจากแบบจำลองมีลักษณะเป็นเมตริกซ์หนาแน่นและไม่สมมาตร. ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่ามากกว่าแบบจำลองทรงกลมฉนวนเดี่ยว. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นหาค่า σ จึงทำได้ยากกว่า. เมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป และวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรสามารถหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นได้. โดยวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรมีรอบการคำนวณซ้ำต่ำที่สุด(6 รอบ)และใช้เวลาคำนวณน้อยที่สุด(5,940.98 วินาที). ในส่วนของวิธีเกรเดียนต์สังยุคเมื่อไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าผลเฉลยไม่ลู่เข้าหาค่าที่ต้องการ.

<u>ผลการใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับวิธีทำซ้ำต่างๆ</u>

ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรสามารถช่วยลดรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำลงได้ดีกว่าตัวปรับสภาพล่วงหน้าอื่นๆ. โดยที่ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรเมื่อใช้ร่วมกับวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรใช้เวลาคำนวณน้อยที่สุด(4,294.85 วินาที)ที่รอบการคำนวณทั้งหมด 2 รอบ. ข้อสังเกตุอย่างหนึ่ง ในกรณีของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่เมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบเกาส์-ไซเดลและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องก็คือ ตัวปรับสภาพล่วงหน้าทั้งสองช่วยลดรอบการคำนวณทั้งหมดลงได้. เวลาที่ใช้ในการคำนวณกลับมีค่ามากกว่าใน

กรณีที่ไม่ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า ทั้งนี้เป็นผลจากภาระการคำนวณที่เพิ่มขึ้นเมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้า.

ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เมื่อใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ามีค่าลดลง. กรณีตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร ตัวเลขเงื่อไขลดลงมากที่สุดจาก 3.08 เป็น 1.23 หรือลดลงประมาณ 60 เปอร์เซ็นต์.

การเพิ่มค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมฉนวนจาก 4 เป็น 10 และ 80 ทำให้ตัวเลขเงื่อนไขของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เพิ่มขึ้นเป็น 5.74 และ 10.84 ตามลำดับ. กรณีที่สภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมฉนวนมีค่าเท่ากับ 10. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรเมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรมีรอบการคำนวณต่ำที่สุด. รอบการคำนวณลดลงจาก 9 รอบเหลือ 4 รอบและเวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลงจาก 10,616.01 วินาทีเหลือ 9,055.36 วินาที. เวลาคำนวณที่ลดลงคิดเป็น 14.7 เปอร์เซ็นต์. กรณีที่สภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมฉนวนมีค่าเท่ากับ 80. วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปผลเฉลยไม่ลู่เข้าหาค่าที่ต้องการ. แต่เมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรสามารถคำนวณหาผลเฉลยได้ โดยใช้รอบการคำนวณเท่ากับ 11 รอบและเวลาคำนวณเท่ากับ 22,821.69 วินาที. วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรเมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรมีรอบการคำนวณและเวลาคำนวณต่ำกว่าวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป. รอบการคำนวณลดลงจาก 17 รอบเหลือ 9 รอบและเวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลงจาก 14,154.85 วินาทีเหลือ 11,322.25 วินาทีหรือลดลงประมาณ 20 เปอร์เซ็นต์.

การใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรร่วมกับวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่เป็นวิธีที่มีรอบการคำนวณต่ำและใช้เวลาคำนวณน้อยเมื่อเทียบกับวิธีอื่นๆ. แต่อย่างไรก็ดี ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตรก็มีข้อเสียตรงที่มีภาระการคำนวณมากกว่าตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบอื่นๆ.

รายการอ้างอิง

1. Heldring, A.; Rius, J.M.; and Ligthart, L. New block ILU preconditioner scheme for numerical analysis of very large electromagnetic problem. IEEE Transaction on Magnetics 38, 2 (March 2002) : 337-340.
2. Jinming, W.; Dexim, X.; Yingying, Y.; and Mohammed, O.A. A modified solution for large sparse symmetric linear system in electromagnetic field analysis. IEEE Trans. on Magnetics 37, 5 (September 2001) : 3494-3497.
3. Chen, R.S.; Yung, E.K.; Chen, C.H.; Wang, D.X.; and Fang, D.G. Application of the SSOR preconditioned CG algorithm to the vector FEM for 3-D full-wave analysis of electromagnetic-field boundary-value problems. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques 50, 4 (April 2002) : 1165-1172.
4. Shen, J.; Hybler, T.; and Kost, A. Preconditioned iterative solvers for complex and unsymmetric system of equations resulting from the hybrid FE-BE method. IEEE Trans. on Magnetics 33, 2 (March 1997) : 1764-1767.
5. Boukari, N.; Lefevre, Y.; and Spiteri, P. Modeling the movement of electrostatic motors in a 3D finite element code. IEEE Trans. on Magnetics 36, 4 (July 2000) : 722-727.
6. Clark, A.R.; Fourie, A.; and Nitch, D.C. Stationary, nonstationary, and hybrid iterative method of moments solution schemes. IEEE Trans. on Antennas and Propagation 49, 10 (October 2001) : 1462-1469.
7. Tsang, K.F.; Lei, M.; and Chen, R.S. Application of the preconditioned conjugated-gradient algorithm to the mixed potential integral equation. Antennas and Propagation Society International Symposium IEEE, 4 (2002) : 630-633.
8. Botros, Y.Y. and Volakis, J.L. Preconditiond generalized minimal residual iterative scheme for perfectly matched layer terminated applications. IEEE Microwave and Guide Wave Letters 9, 2 (February 1999) : 45-47.
9. Hoffmann, J.N. and Pulino, P. New development on the combined application of charge simulation and numerical methods for the computation of electric fields. IEEE Trans. on Power Delivery 10, 2 (April 1995) : 1105-1111.

10. Greenbaum, A. Iterative Methods for Solving Linear Systems. Philadelphia:Socity for Industrial and Applied Mathematics, 1997

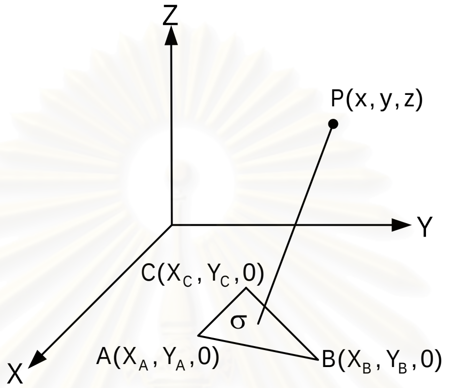
11. วุฒิภูมิ อิทธิพลโสภา และ บุญชัย เตชะอำนาจ. การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์ผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีในการคำนวณศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์. การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 25 (พฤศจิกายน 2545) : หน้า 129-132.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การหาตัวประกอบศักย์และสนามไฟฟ้าสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมใด ๆ

กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC เป็นเอลิเมนต์บนระนาบ xy ดังรูปที่ 1 ที่มีค่าความหนาแน่นประจุเท่ากับ σ.



รูปที่ ก.1 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมบนระนาบ xy

ศักย์ไฟฟ้าที่จุด $P(x, y, z)$ เนื่องจากแผ่นประจุรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 1 สามารถคำนวณได้โดย

$$\phi = \int_{\Delta} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o \, | r' - r |} ds \tag{ก.1}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} ds \tag{ก.2}$$

โดย ϕ คือศักย์ไฟฟ้า (V)

r' คือเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุด P

r คือเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดกึ่งกลางเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

s คือพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.

จากสมการที่(ก.2) เมื่อทำการอินทิเกรทพจน์ $\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}$ จะสามารถแยกคำตอบและจัดรูปให้อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\phi = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o} \left(S_{AB} - S_{BA} + S_{BC} - S_{CB} + S_{CA} - S_{AC} \right) \tag{ก.3}$$

จากสมการที่(ก.3) เราเรียกพจน์ $\left(S_{AB} - S_{BA} + S_{BC} - S_{CB} + S_{CA} - S_{AC}\right)$ ว่าเป็นตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าโดยที่ในแต่ละส่วนสามารถหาค่าได้จากสมการ

$$S_{AB} = P_{AB}.Q_{AB} + zR_{AB} \tag{ก.4}$$

$$P_{AB} = \frac{-M_{AB}\left(X_B - x\right) + \left(Y_B - y\right)}{\sqrt{M_{AB}^2 + 1}} \tag{ก.5}$$

$$Q_{AB} = \ln\left[\left(X_B - x\right) + M_{AB}\left(Y_B - y\right) + D_B\sqrt{M_{AB}^2 + 1}\right] \tag{ก.6}$$

$$R_{AB} = \tan^{-1}\left[\frac{M_{AB}\left(X_B - x\right)^2 - \left(X_B - x\right)\left(Y_B - y\right) + z^2 M_{AB}}{zD_B}\right] \tag{ก.7}$$

$$M_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \tag{ก.8}$$

$$D_B = \sqrt{\left(X_B - x\right)^2 + \left(Y_B - y\right)^2 + z^2} \tag{ก.9}$$

สมการที่ใช้ในการคำนวณ S_{BA} , S_{BC} , S_{CB} , S_{CA} และ S_{BA} มีลักษณะเช่นเดียวกันกับสมการของ S_{AB} .

การคำนวณสมการของตัวประกอบสนามไฟฟ้า สามารถคำนวณจากสมการการหาสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ที่จุด $P(x, y, z)$ คือ

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{a}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{a}_z\right] \tag{ก.10}$$

หรือ

$$\vec{E} = \left[E_x\bar{a}_x + E_y\bar{a}_y + E_z\bar{a}_z\right] \tag{ก.11}$$

โดย $\bar{a}_x, \bar{a}_y$ และ $\bar{a}_z$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน x, y และ z ตามลำดับ.

E_x ,Ey และ E_Z ในสมการที่ (ก.11)คำนวณได้จาก

$$E_x = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial S_{AB}}{\partial x} - \frac{\partial S_{BA}}{\partial x} + \frac{\partial S_{BC}}{\partial x} - \frac{\partial S_{CB}}{\partial x} + \frac{\partial S_{CA}}{\partial x} - \frac{\partial S_{AC}}{\partial x}\right) \tag{ก.12}$$

$$E_y = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial S_{AB}}{\partial y} - \frac{\partial S_{BA}}{\partial y} + \frac{\partial S_{BC}}{\partial y} - \frac{\partial S_{CB}}{\partial y} + \frac{\partial S_{CA}}{\partial y} - \frac{\partial S_{AC}}{\partial y}\right) \qquad (\text{ก}.13)$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial S_{AB}}{\partial z} - \frac{\partial S_{BA}}{\partial z} + \frac{\partial S_{BC}}{\partial z} - \frac{\partial S_{CB}}{\partial z} + \frac{\partial S_{CA}}{\partial z} - \frac{\partial S_{AC}}{\partial z}\right) \qquad (\text{ก}.14)$$

จากสมการที่ (ก.12) ถึง (ก.14) เราเรียกพจน์ที่เป็นค่าอนุพันธ์เทียบกับ x, y และ z ว่าเป็นค่าตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าโดยแต่ละส่วนของสมการสามารถหาค่าได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{AB}}{\partial x} &= \frac{M_{AB}}{\sqrt{M_{AB}^2+1}}Q_{AB} - P_{AB}\frac{D_B + \sqrt{M_{AB}^2+1}\,(X_B - x)}{D_B\left[(X_B - x) + M_{AB}(Y_B - y) + D_B\sqrt{M_{AB}^2+1}\right]} \\ &\quad - \frac{\left[M_{AB}(Y_B - y) + (X_B - x)\right]M_{AB}}{\left[(Y_B - y) - M_{AB}(X_B - x)\right]^2 + (M_{AB}^2+1)z^2}\cdot\frac{z^2}{D_B}\end{aligned} \qquad (\text{ก}.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{AB}}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{M_{AB}^2+1}}Q_{AB} - P_{AB}\frac{M_{AB}D_B + \sqrt{M_{AB}^2+1}\,(Y_B - y)}{D_B\left[(X_B - x) + M_{AB}(Y_B - y) + D_B\sqrt{M_{AB}^2+1}\right]} \\ &\quad + \frac{M_{AB}(Y_B - y) + (X_B - x)}{\left[(Y_B - y) - M_{AB}(X_B - x)\right]^2 + (M_{AB}^2+1)z^2}\cdot\frac{z^2}{D_B}\end{aligned} \qquad (\text{ก}.16)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{AB}}{\partial z} &= R_{AB} + P_{AB}\frac{z\sqrt{M_{AB}^2+1}}{D_B\left[(X_B - x) + M_{AB}(Y_B - y) + D_B\sqrt{M_{AB}^2+1}\right]} \\ &\quad + \frac{\left[M_{AB}(Y_B - y) + (X_B - x)\right]\left[(Y_B - y) - M_{AB}(X_B - x)\right]}{\left[(Y_B - y) - M_{AB}(X_B - x)\right]^2 + (M_{AB}^2+1)z^2}\cdot\frac{z}{D_B}\end{aligned} \qquad (\text{ก}.17)$$

สำหรับ $\frac{\partial S_{BA}}{\partial x}, \frac{\partial S_{BC}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial S_{AC}}{\partial x}, \frac{\partial S_{BA}}{\partial y}, \frac{\partial S_{BC}}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial S_{AC}}{\partial y}, \frac{\partial S_{BA}}{\partial z}, \frac{\partial S_{BC}}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial S_{AC}}{\partial z}$ สามารถคำนวณหาค่าอนุพันธ์ได้โดยใช้สมการในลักษณะเดียวกันกับ $\frac{\partial S_{AB}}{\partial x}$, $\frac{\partial S_{AB}}{\partial y}$ และ $\frac{\partial S_{AB}}{\partial z}$.

ภาคผนวก ข

ลำดับขั้นการคำนวณของวิธีทำซ้ำ

ลำดับขั้นการคำนวณของวิธีทำซ้ำต่างๆ เมื่อประยุกต์ใช้ตัวปรับสภาพล่วงหน้ากับการคำนวณแสดงดังรูปที่ ข.1 ถึงรูปที่ ข.4[10].

<u>Preconditioned Conjugate Gradient Method</u>

1. Given an initial guess $\mathbf{x}^{(0)}$, compute $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$ and solve $\mathbf{M}\,\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

2. Set $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$.

3. For $k = 1, 2, 3, \ldots$

    3.1 Compute $\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$.

    3.2 Set $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + a^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$, where $a^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{z}^{(k-1)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{p}^{(k-1)}, \mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)} \right\rangle}$.

    3.3 Compute $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\,\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$.

    3.4 Solve $\mathbf{M}\,\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$.

    3.5 Set $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{b}^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$, where $\mathbf{b}^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{z}^{(k-1)} \right\rangle}$.

รูปที่ ข.1 ลำดับขั้นการคำนวณของวิธีเกรเดียนต์สังยุค

<u>Preconditioned BiConjugate Gradient Method</u>

1. Given an initial guess $\mathbf{x}^{(0)}$, compute $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$ and set $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

2. Solve $\mathbf{M}\,\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$ and $\mathbf{M}\,\tilde{\mathbf{z}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(0)}$.

2. Set $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$ and $\tilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)}$.

3. For $k = 1, 2, 3, \ldots$

    3.1 Compute $\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$ and $\mathbf{A}^{T}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$.

    3.2 Set $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + a^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$, where $a^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{z}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(k-1)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)} \right\rangle}$.

    3.3 Compute $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\,\mathbf{A}\,\mathbf{p}^{(k-1)}$ and $\mathbf{r}^{(k)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\,\mathbf{A}^{T}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$.

    3.4 Solve $\mathbf{M}\,\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ and $\mathbf{M}\,\tilde{\mathbf{z}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}$.

    3.5 Set $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{b}^{(k-1)}\mathbf{p}^{(k-1)}$ and $\tilde{\mathbf{p}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(k)} + \mathbf{b}^{(k-1)}\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$,

    where $\mathbf{b}^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{z}^{(k)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{z}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(k-1)} \right\rangle}$.

รูปที่ ข.2 ลำดับขั้นการคำนวณของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่

Preconditioned Generalized Minimal Residual Method

1. Given an initial guess $\mathbf{x}^{(0)}$, compute $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$ and solve $\mathbf{M}\,\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

2. Set $\beta^{(0)} = \left\| \mathbf{z}^{(0)} \right\|$ and $\xi_1 = [1 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0]^T$.

3. Compute $\mathbf{v}^{(1)} = \dfrac{\mathbf{z}^{(0)}}{\left\| \mathbf{z}^{(0)} \right\|}$.

3. For $k = 1, 2, 3, \dots$

   3.1 Compute $\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)}$.

   3.2 Solve $\mathbf{M}\,\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{s}$.

   3.3 Compute $\mathbf{v}^{(k+1)}$ and $h_{i,k}$, $i = 1, \dots, k+1$ using the Arnldi Algorithm.

   3.4 Set $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k$, when $\mathbf{y}_k$ is the solution of $\min \left\| \beta\xi_1 - \mathbf{H}_{k+1,k}\mathbf{y} \right\|$.

รูปที่ ข.3 ลำดับขั้นการคำนวณของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางตัวทั่วไป

Preconditioned BiConjugate Gradient Stabilized Method

1. Given an initial guess $\mathbf{x}^{(0)}$, compute $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$.

2. Set $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$ and $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$.

3. Solve $\mathbf{M}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)}$.

3. For $k = 1, 2, 3, \dots$

   3.1 Compute $\mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$.

   3.2 Set $\mathbf{x}^{(k-1/2)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + a^{(k-1)}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$, where $a^{(k-1)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}$.

   3.3 Compute $\mathbf{r}^{(k-1/2)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - a^{(k-1)}\,\mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}$.

   3.4 Solve $\mathbf{M}\,\mathbf{s}^{(k-1/2)} = \mathbf{r}^{(k-1/2)}$.

   3.5 Compute $\mathbf{A}\,\mathbf{s}^{(k-1/2)}$.

   3.6 Set $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1/2)} + \omega^{(k)}\,\mathbf{s}^{(k-1/2)}$, where $\omega^{(k)} = \dfrac{\left\langle \mathbf{s}^{(k-1/2)}, \mathbf{A}\,\mathbf{s}^{(k-1/2)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{A}\,\mathbf{s}^{(k-1/2)}, \mathbf{A}\,\mathbf{s}^{(k-1/2)} \right\rangle}$.

   3.7 Compute $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k-1/2)} - \omega^{(k)}\,\mathbf{A}\,\mathbf{s}^{(k-1/2)}$.

   3.8 Set $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{b}^{(k)}\left(\mathbf{p}^{(k-1)} - \omega^{(k)}\,\mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k-1)}\right)$,

   where $\mathbf{b}^{(k)} = \dfrac{a^{(k-1)}}{\omega^{(k)}} \dfrac{\left\langle \mathbf{r}^{(k)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \right\rangle}$.

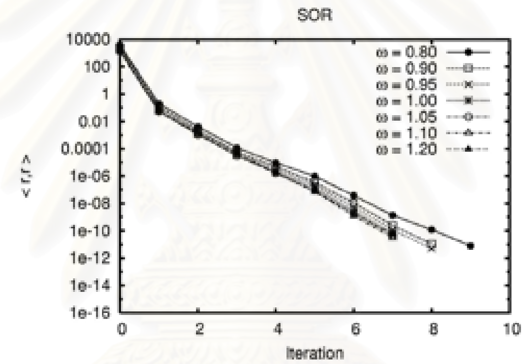
   3.9 Solve $\mathbf{M}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(k)} = \mathbf{p}^{(k)}$.

รูปที่ ข.4 ลำดับขั้นการคำนวณของวิธีเกรเดียนต์สังยุคเสถียรภาพคู่

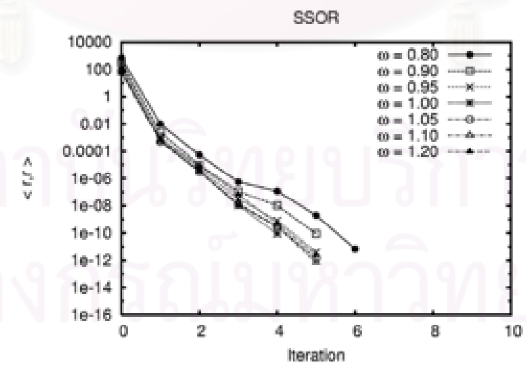
ภาคผนวก ค

การปรับค่า ω ของตัวปรับสภาพล่วงหน้า แบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร.

การดูผลของค่า ω (บทที่ 4 ในหัวข้อเรื่องตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร)ที่มีต่อจำนวนรอบการคำนวณของวิธีทำซ้ำ อาศัยการคำนวณบนแบบจำลองทรงกลมฉนวนหลายลูกในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอเช่นเดียวกับหัวข้อที่ 5.2. สภาพยอมสัมพัทธ์ภายนอกและภายในทรงกลมมีค่าเท่ากับ 1 และ 4 ตามลำดับ. วิธีทำซ้ำที่ใช้แก้ระบบสมการเชิงเส้นได้แก่ วิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปและวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร. ค่า ω ที่ทดลองใช้มีค่าอยู่ระหว่าง 0.8 กับ 1.2. ผลการคำนวณแสดงดังรูปที่ ค.1 และรูปที่ ค.2.

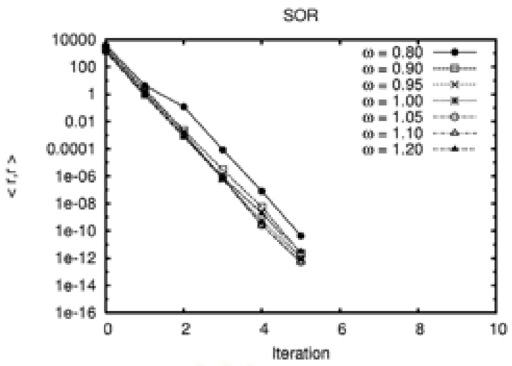


ก. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง

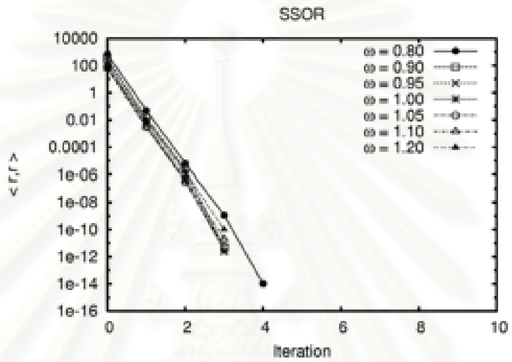


ข. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร

รูปที่ ค.1 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป



ก. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง



ข. ตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร

รูปที่ ค.2 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

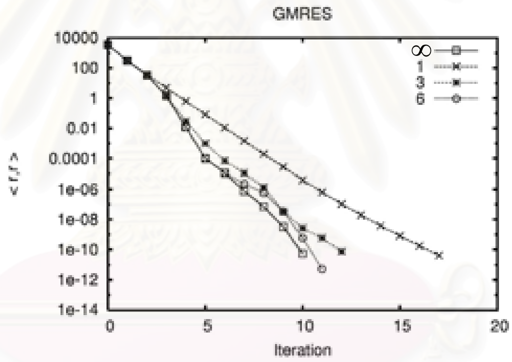
จากรูปที่ ค.1 กรณีของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปเมื่อใช้ร่วมกับตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องและแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องสมมาตร. การปรับค่า ω ไม่มีผลต่อจำนวนรอบการคำนวณมากนักเมื่อเทียบกับที่ $\omega = 1.0$. จำนวนรอบการคำนวณไม่ลดลงอย่างเห็นได้ชัด. ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณเมื่อปรับค่า ω มีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยเท่านั้น. การลดค่า ω ลงให้มีค่าเท่ากับ 0.95, 0.90 และ 0.80 ในกรณีของตัวปรับสภาพล่วงหน้าแบบผ่อนปรนเกินสืบเนื่องยังทำให้รอบการคำนวณเพิ่มขึ้น. เช่นเดียวกัน กรณีของวิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียรดังแสดงในรูปที่ ค.2. การปรับค่า ω ของตัวปรับสภาพล่วงหน้าทั้งสองไม่ทำให้รอบการคำนวณไม่ลดลงเมื่อเทียบกับที่ $\omega = 1.0$.

ภาคผนวก ง

การปรับรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่ของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรมากๆ ด้วยวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไปจำเป็นต้องกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่. การกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่เพื่อเป็นการจำกัดหน่วยความจำที่ใช้ในการเก็บเมตริกซ์ $\mathbf{V}_k$ และ $\mathbf{H}_{k+1,k}$ ที่ใช้ในวิธี Arnoldi. ขนาดของเมตริกซ์ทั้งสองขึ้นอยู่กับตัวแปรของระบบสมการเชิงเส้นและรอบการคำนวณซ้ำของวิธีทำซ้ำ.

การดูผลของรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่ทำโดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นจากแบบจำลองทรงกลมฉนวนหลายลูกในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอในหัวข้อที่ 5.2. โดยใช้เอลิเมนต์ในการคำนวณเท่ากับ 896 เอลิเมนต์และกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่มีค่าเท่า 1, 3, 6, และ 12 รอบ. โดยเราเปรียบเทียบผลการแก้ระบบสมการเชิงเส้นกรณีที่มีการกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่กับกรณีที่ไม่มีการกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่. ผลการคำนวณแสดงดังรูปที่ ง.1.



รูปที่ ง.1 ค่า $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ ในแต่ละรอบการคำนวณเมื่อปรับรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่

การกำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่มีผลต่อรอบการคำนวณทั้งหมดของวิธีตกค้างต่ำสุดแบบวางนัยทั่วไป. โดยจากรูปที่ ง.1 เมื่อเรากำหนดรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่เพิ่มขึ้นจะทำให้จำนวนรอบการคำนวณทั้งหมดนั้นลดลง. เช่น เมื่อรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่เท่ากับ 1 รอบ จำนวนรอบการคำนวณทั้งหมดเท่ากับ 17 รอบ แต่เมื่อเพิ่มรอบการเริ่มคำนวณซ้ำใหม่เป็น 3 รอบ จำนวนรอบการคำนวณทั้งหมดลดลงเหลือ 12 รอบ.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายนิติพงศ์ ปานกลาง เกิดเมื่อวันที่ 25 มีนาคม พ.ศ. 2519 ที่จังหวัดชัยนาท สำเร็จการศึกษาระดับวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จากสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล ในปีการศึกษา 2542 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ณ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ตั้งแต่ปีการศึกษา 2544 จนถึงปัจจุบัน.