การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม

นายอรรณพ ลิ้มสีมารัตน์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2550

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

APPLICATION OF MULTIPOLE RE-EXPANSION TO THE CALCULATION OF ELECTRIC FIELD AND FORCE ON SPHERICAL DIELECTRIC PARTICLES

Mr. Annop Limsimarat

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic year 2007

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม
โดย	นายอรรณพ ลิ้มสีมารัตน์
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เตชะอำนาจ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(อาจารย์ ดร. คมสัน เพ็ชรรักษ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เตชะอำนาจ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. ชาญณรงค์ บาลมงคล)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. วีระพันธ์ รังสีวิจิตรประภา)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพันธุ์ ตั้งจิตกุศลมั่น)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อรรณพ ลิ้มสีมารัตน์: การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม (APPLICATION OF MULTIPOLE RE-EXPANSION TO THE CALCULATION OF ELECTRIC FIELD AND FORCE ON SPHERICAL DIELECTRIC PARTICLES) อ. ที่ปรึกษา: ผศ. ดร. บุญชัย เตชะอำนาจ, 118 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้ได้ประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำซึ่งประกอบด้วยการเลื่อนขนานมัลติโพลและการหมุนมัลติโพลในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโทรโฟรเรตติก (ดีอีพี) บนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม. แรงดีอีพีเป็นแรงเนื่องจากสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอที่กระทำบนอนุภาคที่เกิดโพลาไรเซชันแต่ไม่มีการอัดประจุ. แรงนี้อาจทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ซึ่งก่อให้เกิดผลดีหรือผลเสียตามมา. ปัญหาการวิเคราะห์แรงที่วิทยานิพนธ์นี้พิจารณามี 2 กรณี คือ 1. อนุภาคฉนวนในกับดักอนุภาคในระบบไฟฟ้าที่ฉนวนด้วยก๊าซซึ่งมีสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอเกิดจากรูปร่างของกับดักอนุภาค. 2. ของไหลอีอาร์ซึ่งมีอนุภาคฉนวนแขวนลอยอยู่ในฉนวนเหลวซึ่งมีความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าเกิดจากการมีอยู่ของอนุภาคเอง. วิทยานิพนธ์นี้เน้นให้เห็นความแตกต่างของผลการวิเคราะห์อย่างละเอียดที่ได้ เมื่อเปรียบเทียบกับผลการประมาณด้วยไดโพลซึ่งนิยมใช้โดยทั่วไป.

การวิเคราะห์แรงบนอนุภาคในกับดักอนุภาคทำเพื่อพิจารณาพฤติกรรมของอนุภาคในกับดักอนุภาค. แรงที่ทำกับอนุภาคถูกคำนวณอย่างละเอียดโดยใช้มัลติโพลและเงาที่เกิดจากมัลติโพลอย่างครบถ้วน. วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาผลที่มีต่อแรงบนอนุภาคของ ตำแหน่งของอนุภาค มุมของกับดักอนุภาค และอัตราส่วนสภาพยอมของอนุภาคต่อก๊าซ. นอกจากนี้ เพื่อหากรณีที่สามารถประมาณด้วยไดโพลทั้งแบบที่ละเลย และรวมผลของเงาไดโพล ตามลำดับ วิทยานิพนธ์นี้จึงวิเคราะห์ความแม่นยำของการประมาณด้วยไดโพลทั้งสองแบบด้วย.

การศึกษาของไหลอีอาร์ทำเพื่อพิจารณาการจัดเรียงตัวของอนุภาคภายในของไหล และเพื่อดูความแตกต่างของการจัดเรียงที่ได้เมื่อคำนวณแรงด้วย (1) แบบจำลองไดโพล และ (2) แบบจำลองมัลติโพลที่มีความแม่นยำสูงกว่า. การเคลื่อนที่ของอนุภาคถูกจำลองเพื่อแสดงการจัดเรียงตัวของอนุภาค โดยมีการใช้อัตราส่วนปริมาตรของอนุภาคต่อระบบที่แตกต่างกัน. ตำแหน่งของอนุภาคคำนวณโดยอินทิเกรตสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเวลา โดยใช้แรงจากแบบจำลองไดโพลและแบบจำลองมัลติโพล. วิทยานิพนธ์นี้ตรวจสอบเวลาที่อนุภาคเรียงตัวเป็นโซ่อนุภาคเชื่อมระหว่างอิเล็กโทรด และแสดงความแตกต่างของการจัดเรียงตัวของอนุภาคที่ได้จากแบบจำลองทั้งสอง. นอกจากนี้ ยังศึกษาถึงความเหมาะสมของการใช้ระยะกระจัดยกกำลังสองเฉลี่ยเป็นตัวบ่งชี้การเรียงตัวของอนุภาค และศึกษาโอกาสเกิดโครงข่ายผลึกบอดี้เซนเตอร์เตตระโกนอลในของไหลอีอาร์อีกด้วย.

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต [signature]
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา [signature]
ปีการศึกษา 2550

4571843021 : ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: DIELECTRIC PARTICLE/ MULTIPOLE / ELECTRIC FIELD

ANNOP LIMSIMARAT : APPLICATION OF MULTIPOLE RE-EXPANSION TO THE CALCULATION OF ELECTRIC FIELD AND FORCE ON SPHERICAL DIELECTRIC PARTICLES. THESIS ADVISOR: ASSIST. PROF. BOONCHAI TECHAUMNAT, Dr. Eng., 118 pp.

This dissertation applies the multipole re-expansion consisting of multipole translation and multipole rotation to calculate electric field and dielectrophoretic (DEP) force on spherical dielectric particles. The DEP force is exerted on a polarized, but uncharged particle by a non-uniform field. This force may affect the particle motion, which may lead to desired or adverse consequences. Two problems of force analysis are treated in this dissertation: 1. A dielectric particle in the particle trap, in which the field non-uniformity is exerted by electrode profiles, in a gas insulated system. 2. ER fluid, a suspension of dielectric particles in a non-conducting fluid, where the particles themselves give rise to a non-uniform field. This dissertation focuses on differences between the results of thorough analysis and those from the conventional dipole approximation.

Force in the particle trap is analyzed to investigate the particle behavior in the trap. The force on the particle is accurately calculated by using multipoles and all their images. The effects on the force of particle position, the angle of the trap, and the permittivity ratio of the particle to gas are studied. To find out the case that force can be approximated by using only a dipole or using a dipole and a few of its images, this dissertation also determines the accuracy of these two kinds of approximation.

The ER fluids are studied to determine the aggregation of particles in the fluid and difference between particle arrangement from the forces obtained by (1) the dipole model and (2) the multipole model having higher accuracy. The simulations of the particle movement are done to show particle aggregation for different volume fractions of particles to system. The particle positions are computed by integrating the equation of motion when the dipole and the multipole models are used. This dissertation determines the time that particles form a chain bridging electrodes and shows the difference in particle aggregation by the two models. In addition, propriety of the mean square displacement in identifying particle aggregation and the possibility of the formation of body centered tetragonal lattice are also studied.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department ......Electrical Engineering..... Student's signature ....

Field of study .....Electrical Engineering..... Advisor's signature ....

Academic year ....2007....................

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องจากได้รับความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เตชะอำนาจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งกรุณาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิทยานิพนธ์ รวมทั้งได้กรุณาตรวจสอบและแก้ไขเนื้อหาวิทยานิพนธ์จนสำเร็จเรียบร้อย

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่าน ซึ่งประกอบด้วย อาจารย์ ดร. คมสัน เพ็ชรรักษ์ อาจารย์ ดร. ชาญณรงค์ บาลมงคล อาจารย์ ดร. วีระพันธ์ รังสีวิจิตรประภา และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพันธุ์ ตั้งจิตกุศลมั่น ที่กรุณาตรวจสอบ แก้ไข และให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์ให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดาและมารดา ที่ให้การสนับสนุน และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ

กิตติกรรมประกาศ .... ฉ

สารบัญ .... ช

สารบัญตาราง .... ฎ

สารบัญภาพ .... ฏ

บทที่

1. บทนำ 1
   - 1.1 ที่มาของปัญหา 2
   - 1.2 ผลงานการศึกษาในอดีต 2
   - 1.3 วัตถุประสงค์ 6
   - 1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ 6
     - 1.4.1 อนุภาคฉนวนในกับดักอนุภาคอย่างง่าย 6
     - 1.4.2 อนุภาคฉนวนกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ 7
   - 1.5 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์ 8
2. การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม 9
   - 2.1 นิยามของตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณ 9
   - 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างปัญหากับสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาค 9
     - 2.2.1 ตัวนำและฉนวน 9
       - 2.2.1.1 ประจุเหนี่ยวนำในตัวนำ 10
       - 2.2.1.2 ประจุผูกพัน (Bound charge) และโพลาไรเซชัน (Polarization) ของฉนวน 10
     - 2.2.2 แรงคูลอมบ์ 11
     - 2.2.3 แรงไดอิเล็กโตรโฟเรตติก (Dielectrophoretic force) 11
   - 2.3 ลักษณะร่วมของปัญหา 13
   - 2.4 ศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม 13
     - 2.4.1 ศักย์ไฟฟ้าในรูปของฮาร์มอนิกทรงกลม 13

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ หน้า
2.4.2 การคำนวณศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้า 15
2.5 การกระจายมัลติโพลซ้ำ 17
2.5.1 มัลติโพล (Multipoles) 18
2.5.2 การเลื่อนขนานมัลติโพล (Multipole translation) 19
2.5.3 การหมุนมัลติโพล (Multipole rotation) 20
2.6 เงามัลติโพลและระนาบกราวด์ 20
2.7 การคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวน 22
2.7.1 สนามไฟฟ้าจากไดโพล 22
2.7.2 สนามไฟฟ้าภายในและภายนอกอนุภาค 23
2.7.2.1 สนามไฟฟ้าในทิศ r 23
2.7.2.2 สนามไฟฟ้าในทิศ θ 23
2.7.2.3 สนามไฟฟ้าในทิศ ϕ 24
2.7.3 สนามไฟฟ้าบนอนุภาคเนื่องจากการมีอยู่ของอนุภาคอื่น 24
2.8 การคำนวณแรงดีอีพีที่กระทำบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม 26
2.8.1 การคำนวณแรงดีอีพีจากประจุบนอนุภาคและการกระจายของศักย์ไฟฟ้ารอบอนุภาค 26
2.8.2 การคำนวณแรงดีอีพีจากความเค้นที่กระทำต่ออนุภาค 28
2.9 การประมาณแรง 29
2.9.1 แรงไดโพล 29
2.9.2 แรงมัลติโพล 30
2.10 ตัวอย่างการคำนวณสนามไฟฟ้าเมื่ออนุภาคฉนวนรูปทรงกลมอยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทรดเอียงด้วยการวางเงามัลติโพล 31
3. การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำกับอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมในกับดักอนุภาคอย่างง่าย 34
3.1 การจัดวาง และข้อมูลทางกายภาพที่ใช้คำนวณ 34
3.2 การประมาณแรงที่กระทำบนอนุภาคด้วยไดโพล (dp) 35
3.3 การประมาณโดยใช้ไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก (dps) 37
3.4 การคำนวณแรงด้วยมัลติโพลและเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดทุกชุด (mps) 39
3.5 ลักษณะสมบัติของแรงที่ได้จากวิธีการต่างๆ 42

บทที่ หน้า

3.5.1 แรงเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง 42
3.5.2 แรงเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง 48
3.5.3 ขนาดแรงสูงสุดบนอนุภาค 51
3.5.3.1 $F_{\rho,\max}$ 51
3.5.3.2 $F_{\alpha,\max}$ 52
3.5.3.3 ผลของการเปลี่ยนอัตราส่วนสภาพะยอม $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ ต่อขนาดสูงสุดของแรงบนอนุภาค 53
3.6 สรุปผล 55
4. การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำกับอนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ 57
4.1 การจัดวาง และข้อมูลทางกายภาพที่ใช้คำนวณ 57
4.2 วิธีการ และขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณ 58
4.2.1 แรงจากการประมาณด้วยแบบจำลองไดโพล 58
4.2.2 แรงจากการประมาณด้วยแบบจำลองมัลติโพล 59
4.2.3 การเคลื่อนที่ของอนุภาค 60
4.3 โครงสร้างของของไหลอีอาร์ 62
4.4 จำนวนครั้งในการทำซ้ำ N_{iter} และอันดับมัลติโพลสูงสุด N_{mp} ของแบบจำลองมัลติโพล 64
4.4.1 แรงที่กระทำต่ออนุภาค 2 ลูกที่สัมผัสกัน 65
4.4.2 ผลของ N_{iter} และ N_{mp} ต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ 68
4.5 การจำลองแบบของไหลอีอาร์ 69
4.5.1 การจำลองของไหลอีอาร์ที่มีอนุภาคจำนวน 20 ลูก 70
4.5.2 การจำลองของไหลอีอาร์ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูก 73
4.6 สรุปผล 77
5. สรุปและข้อเสนอแนะ 79
5.1 สรุปผลการประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำ 79
5.1.1 อนุภาคฉนวนในกับดักอนุภาคอย่างง่าย 79
5.1.2 อนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ 80
รายการอ้างอิง 82
ภาคผนวก 85

บทที่ หน้า

ภาคผนวก ก. 86

ภาคผนวก ข. 88

ภาคผนวก ค. 90

ภาคผนวก ง. 91

ภาคผนวก จ. 94

ภาคผนวก ฉ. 102

ภาคผนวก ช. 111

ภาคผนวก ซ. 113

ภาคผนวก ฌ. 115

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 118

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

บทที่ หน้า

4.1 แรงดูด และแรงผลักมากที่สุดของ F^*_{horiz} และ F^*_{vert} บนอนุภาคลูกล่างที่ค่า $N_{mp} = 4$ 67

4.2 แรงดูด และแรงผลักมากที่สุดของ F^*_{horiz} และ F^*_{vert} บนอนุภาคลูกล่างที่ค่า $N_{iter} = 2$ 67

4.3 ค่าของ c_1, c_2 และ c_3 ที่ $t = 300\,\text{ms}$ จากการจำลองของไหลอีอาร์ระบบ (a), (b) และ (c) ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูกด้วยแบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp) 77

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

1.1 อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมในกับดักอนุภาค 7

1.2 อนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ 7

1.3 อนุภาคจัดเรียงตัวในของไหลอีอาร์ 8

2.1 ประจุเหนี่ยวนำบนตัวนำที่เกิดจากอิทธิพลของประจุไฟฟ้า $+q$ 10

2.2 ประจุผูกพันและการเกิดโพลาไรซ์ในฉนวน (ก) ประจุภายในโมเลกุล และ (ข) โพลาไรเซชันของอนุภาคฉนวน 10

2.3 แรงคูลอมบ์ระหว่างประจุ q_1 และ q_2 11

2.4 ตำแหน่งของไดโพล 11

2.5 แรงที่เกิดขึ้นกับไดโพลภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ 12

2.6 ปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์ 13

2.7 ตำแหน่งบนพื้นผิวของอนุภาครูปทรงกลมภายในกับดักอนุภาค 16

2.8 ศักย์ไฟฟ้าที่จุด C จากผลของประจุ Q ที่ระยะห่างกัน r 18

2.9 ตัวอย่างของมัลติโพลอันดับต่างๆ 18

2.10 การกระจายมัลติโพลซ้ำจากมัลติโพลที่จุด C ไปยังจุด A 19

2.11 การหมุนมัลติโพล $B_{n,m}$ ไปเป็นมัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ 20

2.12 เงาของมัลติโพลและระนาบกราวด์ (ก) ระนาบกราวด์ขนานกับระนาบ xy และ (ข) ระนาบกราวด์ขนานกับระนาบ xz 21

2.13 มัลติโพล และเงาของมัลติโพลกับระนาบเอียงทำมุม θ_0 (ก) มัลติโพล $B_{n,m}$ ก่อนทำการหมุน และ (ข) มัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ หลังทำการหมุน และเงามัลติโพล $\tilde{B}'_{n,k}$ 22

2.14 ไดโพลและตำแหน่งในการคำนวณสนามไฟฟ้า 23

2.15 อนุภาคฉนวน a และ b ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก และการกระจายมัลติโพลซ้ำจากอนุภาค b ไปยัง อนุภาค a 24

2.16 อนุภาครูปทรงกลมและ $\bar{T}$ ที่กระทำต่อพื้นผิวย่อย $d\bar{s}$ 28

2.17 ระบบพิกัดในการคำนวณแรงระหว่างคู่อนุภาค a และ b 29

2.18 เงาของมัลติโพล $B_{j,k}$ ของอนุภาค a ซึ่งอยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทรดเอียง 31

3.1 การจัดวางตำแหน่งของอนุภาคในการคำนวณ 34

ภาพประกอบ หน้า

3.2 ไดโพลแทนผลของอนุภาคฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$
(ก) โพลาไรเซชันของอนุภาคฉนวน และ (ข) ไดโพลแทนการเกิดโพลาไรเซชัน 35
3.3 ตำแหน่งเงาของอิเล็กโทรดชุดแรกที่ใช้ในการคำนวณ 37
3.4 การหมุน, การเลื่อนขนาน และตำแหน่งของเงาไดโพล $\left[B'^{(0)}_{j,k}\right]_1$ เนื่องจากอิเล็กโทรดล่าง และ $\left[B'^{(0)}_{j,k}\right]_2$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนที่ใช้ในการคำนวณรอบแรกด้วยวิธีทำซ้ำของการคำนวณแบบ dps 39
3.5 การหมุนมัลติโพล การเลื่อนขนานมัลติโพล และ ตำแหน่งของเงามัลติโพล เมื่อ $\alpha_0 = 45°$
(ก) เงามัลติโพลชุดแรกเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างก่อนอิเล็กโทรดบนจำนวน 4 ลูก และ (ข) เงามัลติโพลชุดที่สองเนื่องจากอิเล็กโทรดบนก่อนอิเล็กโทรดล่างจำนวน 4 ลูก 41
3.6 ตำแหน่งในการคำนวณแรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง 42
3.7 $\left|F^*_\rho\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 30°$ 44
3.8 $\left|F^*_\alpha\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 30°$ 44
3.9 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 60°$
(ก) $\left|F^*_\rho\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ
(ข) $\left|F^*_\alpha\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps 45
3.10 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 1$ และ $\alpha_0 = 30°$
(ก) $\left|F^*_\rho\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ
(ข) $\left|F^*_\alpha\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps 46
3.11 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 1$ และ $\alpha_0 = 60°$
(ก) $\left|F^*_\rho\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ
(ข) $\left|F^*_\alpha\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps 47
3.12 ตำแหน่งในการคำนวณแรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง 48
3.13 $\left|F^*_\rho\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 30°$ 49
3.14 $\left|F^*_\alpha\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 30°$ 49

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาพประกอบ หน้า

3.15 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 60^\circ$
(ก) $\left|F_\rho^*\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ
(ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps 50
3.16 $\left|F_{\rho,\max}^*\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° 52
3.17 $\left|F_{\alpha,\max}^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° 52
3.18 ตำแหน่งที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° 53
3.19 $\left|F_{\rho,\max}^*\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่อเปลี่ยนอัตราส่วน $\varepsilon_N / \varepsilon_E$
ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$ 54
3.20 $\left|F_{\alpha,\max}^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่อเปลี่ยนอัตราส่วน $\varepsilon_N / \varepsilon_E$
ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$ 54
4.1 ระบบของไหลอีอาร์ที่อนุภาคกระจายแบบสุ่ม 58
4.2 ระบบพิกัดในการคำนวณแรงผลักระหว่างคู่อนุภาค a และ b 61
4.3 แผนภูมิสายงานในการคำนวณตำแหน่งของอนุภาค 62
4.4 โครงข่ายผลึกแบบบีซีทีของอนุภาค 63
4.5 อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมสัมผัสกันภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก 65
4.6 แรงที่กระทำบนอนุภาคลูกล่างในรูปที่ 4.5 จากการประมาณด้วยไดโพล (dipole)
การประมาณด้วยมัลติโพล เมื่อ $N_{mp} = 4$ และ $N_{iter} = 2,3,4,5$ และแรง $N_{mp} = 100$
(ก) F_{horiz}^* (ข) F_{vert}^* 66
4.7 แรงที่กระทำบนอนุภาคลูกล่างในรูปที่ 4.5 จากการประมาณด้วยไดโพล (dipole)
การประมาณด้วยมัลติโพล เมื่อ $N_{iter} = 2$ และ $N_{mp} = 3,4,5,20$ และแรง $N_{mp} = 100$
(ก) F_{horiz}^* และ (ข) F_{vert}^* 68
4.8 ผลของ N_{iter} และ N_{mp} กับเวลาในการคำนวณต่อช่วงก้าวเวลาด้วยอนุภาค 20 ลูก 69
4.9 ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคฉนวนจำนวน 20 ลูกในการจำลองของไหลอีอาร์ 70
4.10 ตำแหน่งของอนุภาคฉนวนจำนวน 20 ลูกในของไหลอีอาร์ทุกๆ 30 ms
เมื่อใช้แบบจำลองไดโพล 71
4.11 ตำแหน่งของอนุภาคฉนวนจำนวน 20 ลูกในของไหลอีอาร์ทุกๆ 30 ms
เมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล 72
4.12 $\left\langle R^{*2} \right\rangle$ จากการจำลองโดยใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp) 73

ภาพประกอบ หน้า

4.13 ตำแหน่งของอนุภาคเริ่มต้น และที่เวลา 300 ms ในของไหลอีอาร์ระบบ (a) จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp) 74

4.14 ตำแหน่งของอนุภาคเริ่มต้น และที่เวลา 300 ms ในของไหลอีอาร์ระบบ (b) จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp) 74

4.15 ตำแหน่งของอนุภาคเริ่มต้น และที่เวลา 300 ms ในของไหลอีอาร์ระบบ (c) จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp) 75

4.16 $\left\langle R^{*2} \right\rangle$ ของระบบ (a), (b) และ (c) ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูกซึ่งได้จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp) 75

4.17 ตำแหน่งของอนุภาคฉนวนจำนวน 67 ลูกในของไหลอีอาร์ระบบ (a) เมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล ที่เวลา 380 ms 76

4.18 การเปลี่ยนแปลงของค่า c_1, c_2 และ c_3 ตามเวลาของของไหลอีอาร์ระบบ (a) ซึ่งมีอนุภาคจำนวน 67 ลูก จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp) 77

ก.1 การหมุนมัลติโพล $B_{n,m}$ ไปเป็นมัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ 86

ง.1 วางเงามัลติโพลที่กระทำกับอิเล็กโทรดล่างก่อนอิเล็กโทรดบน 91

ง.2 วางเงามัลติโพลที่กระทำกับอิเล็กโทรดบนก่อนอิเล็กโทรดล่าง 92

จ.1 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 1$ และ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 94

จ.2 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 1$ และ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 95

จ.3 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 96

จ.4 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 97

จ.5 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 7$ และ $\alpha_0 = 30^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 98

จ.6 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 7$ และ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 99

ภาพประกอบ หน้า

จ.7 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่าง อิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 7$ และ $\alpha_0 = 60^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 100

จ.8 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่าง อิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 7$ และ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 101

ฉ.1 มุม และระยะในการคำนวณแรงระหว่างไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ และ $\overline{\mathrm{p}}_2$ 102

ฉ.2 ตำแหน่งและระยะห่างระหว่างไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ และ $\overline{\mathrm{p}}_2$ ของระนาบเอียง 104

ฉ.3 ตำแหน่ง มุม และระยะของไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ 105

ฉ.4 ตำแหน่ง มุม และระยะของไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_2$ 106

ฉ.5 $\left|F_\rho^*\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.30) เมื่ออนุภาคอยู่ติดกับอิเล็กโทรดล่าง กับการเปลี่ยนค่า ρ ที่ $\alpha_0 = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 108

ฉ.6 $\left|F_\alpha^*\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.31) เมื่ออนุภาคอยู่ติดกับอิเล็กโทรดล่าง กับการเปลี่ยนค่า ρ ที่ $\alpha_0 = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 108

ฉ.7 $\left|F_{\rho,\max}^*\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.31) เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° 109

ฉ.8 $\left|F_{\alpha,\max}^*\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.30) เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° 110

ฉ.9 ระยะ ρ^* ที่เกิด $\left|F_{\alpha,\max}^*\right|$ เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° 110

ช.1 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 111

ช.2 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ 112

ซ.1 การวางเงามัลติโพลที่กระทำกับระนาบอิเล็กโทรดคู่ขนาน 113

ฌ.1 ตำแหน่งของอนุภาคในของไหลอีอาร์ระบบ (a) จากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล 115

ฌ.2 ตำแหน่งของอนุภาคในของไหลอีอาร์ระบบ (b) จากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล 116

ฌ.3 ตำแหน่งของอนุภาคในของไหลอีอาร์ระบบ (c) จากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล 117

บทที่ 1

บทนำ

ปัจจุบันมีการใช้งานวัสดุไฟฟ้าในรูปแบบของอนุภาคในของเหลวหรือก๊าซ. ชนิดของอนุภาคมีทั้งอนุภาคฉนวน อนุภาคตัวนำทั้งที่มีประจุลัพธ์และไม่มีประจุลัพธ์. เมื่ออนุภาคเหล่านี้อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าซึ่งก่อให้เกิดโพลาไรเซชันบนอนุภาค. ผลที่ตามมาคือเกิดแรงกระทำบนอนุภาคเป็นผลทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ตามแนวของสนามไฟฟ้า. แรงที่เกิดบนอนุภาคแบ่งออกได้เป็นสองประเภทคือ แรงคูลอมบ์ และ แรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก (Dielectrophoretic force) ซึ่งแรงทั้งสองประเภทนี้ขึ้นอยู่กับสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาค. ดังนั้นการคำนวณสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคจึงเป็นสิ่งสำคัญในการออกแบบและวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้นจากการใช้งานวัสดุทางไฟฟ้า.

การหาค่าสนามไฟฟ้าที่ผิวของอนุภาคทรงกลมโดยทั่วไปทำได้สองวิธีคือ วิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงเลข. วิธีเชิงวิเคราะห์มีข้อดีคือให้ความแม่นยำในการคำนวณสูงมากเนื่องจากไม่มีความผิดพลาดอันเกิดจากการจำลองเรขาคณิตของปัญหา เพราะคำตอบที่ได้เป็นไปตามสมการลาปลาซหรือสมการหลัก. อย่างไรก็ตามวิธีเชิงวิเคราะห์มีข้อเสียคือใช้ได้เฉพาะรูปร่างและการจัดวางเฉพาะแบบ รวมทั้งใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำมาก ถ้าการคำนวณนั้นมีจำนวนอนุภาคหรืออิเล็กโทรดมากกว่าหนึ่ง. วิธีเชิงเลขมีข้อดีคือ ใช้ในการคำนวณปัญหาทั่วไปได้ และการใช้เวลาและหน่วยความจำไม่ขึ้นกับจำนวนอิเล็กโทรดมากเท่ากับวิธีเชิงวิเคราะห์. ข้อเสียของวิธีเชิงเลขคือ มีปัญหาด้านความแม่นยำโดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีสนามไฟฟ้ามีความไม่สม่ำเสมอสูงยกตัวอย่างเช่นเมื่ออนุภาคสัมผัสหรืออยู่ใกล้กับอิเล็กโทรด. อย่างไรก็ดีถ้าจำนวนอนุภาคมากวิธีเชิงเลขยังคงใช้เวลาและหน่วยความจำจำนวนมากเป็นทวีคูณของจำนวนอนุภาค หรือ $O\left(n^2\right)$ เมื่อ n คือจำนวนอนุภาค.

วิทยานิพนธ์นี้ พัฒนาวิธีการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคด้วยวิธีการกระจายมัลติโพลซ้ำ เพื่อให้วิเคราะห์ปัญหาได้อย่างแม่นยำโดยใช้เวลาในการคำนวณไม่นานเกินไป. วิธีการคำนวณดังกล่าวเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์ซึ่งใช้ วิธีเงามัลติโพลโดยใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำ [1-3]. จากนั้น ได้นำวิธีที่พัฒนาขึ้นไปวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงในปัญหาที่ยังไม่ได้รับการศึกษาอย่างละเอียด ดังแสดงในหัวข้อที่ 4.

1.1 ที่มาของปัญหา

ดังที่กล่าวแล้วในตอนต้น เมื่ออนุภาคอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้า จะมีแรงเกิดขึ้นบนอนุภาคซึ่งทำให้อนุภาคเคลื่อนที่. การเคลื่อนที่ของอนุภาคก่อให้เกิดผลดีหรือผลเสียตามมา. กรณีแรกคือในระบบไฟฟ้าแรงสูงที่ฉนวนด้วยก๊าซ. เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ใกล้อิเล็กโทรดหรือในบริเวณที่มีสนามไฟฟ้าสูงอาจก่อให้เกิดการเบรกดาวน์หรือดิสชาร์จบางส่วนขึ้นซึ่งเป็นผลเสียหายต่อระบบ. ดังนั้น ระบบจึงมีกับดักอนุภาค (Particle trap) เพื่อป้องกันการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใน. รูปร่างของกับดักอนุภาคมีผลต่อสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นบนอนุภาค. การศึกษาส่วนใหญ่เกี่ยวข้องกับอนุภาคตัวนำ [4,5] แต่ส่วนที่เป็นอนุภาคฉนวนยังไม่ได้รับการวิเคราะห์. กรณีที่สองคือ อนุภาคในของเหลวที่มีผลกระทบแบบอิเล็กโตรรีออลอจิคอล (Electrorheological effect fluid) หรือเรียกสั้นๆว่า ของไหลอีอาร์(ER Fluid). ของไหลอีอาร์เป็นของเหลวที่มีอนุภาคของแข็งจำนวนมากลอยอยู่กระจัดกระจาย. ของไหลอีอาร์เปลี่ยนสถานะจากของเหลวกลายเป็นลักษณะเหมือนเจลได้อย่างรวดเร็ว (มิลลิวินาที). เมื่อได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก อนุภาคในของไหลอีอาร์จะจัดเรียงตัวตามทิศทางของสนามไฟฟ้าที่ป้อนเข้าไปและก่อตัวเป็นโซ่ [6]. โซ่อนุภาคทำให้ความหนืดของของไหลอีอาร์เพิ่มมากขึ้นจนเปลี่ยนสถานะเป็นลักษณะเหมือนเจลได้. ปรากฏการณ์นี้สามารถนำไปใช้ในงานอุตสาหกรรมเช่น ส่วนรับแรงกระแทก, คลัช, โช้กอัพ และ วาล์วไฮดรอลิก เป็นต้น. การทดลองเกี่ยวกับของไหลอีอาร์มีจำนวนมากแต่การวิเคราะห์พื้นฐานของแรงบนอนุภาคยังมีน้อยโดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีที่พิจารณาปฏิกิริยาระหว่างอนุภาคจำนวนมาก. ในกรณีนี้ เราสนใจเวลาที่ใช้ในการก่อตัวของอนุภาค หรือเวลาตอบสนองของระบบของไหลอีอาร์ และสนใจแรงที่เกิดขึ้นเมื่ออนุภาคเรียงตัวเป็นโซ่.

1.2 ผลงานการศึกษาในอดีต

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาค Davis [7] และ Stoy [8] ได้คำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ โดยทั้งสองงานคำนวณบนพิกัดแบบสองทรงกลมซึ่งเป็นพิกัดที่แสดงพื้นผิวของทรงกลมสองลูก [9]. ศักย์และสนามไฟฟ้าแสดงในรูปอนุกรมอนันต์ซึ่งสัมประสิทธิ์คำนวณได้จากวิธีทำซ้ำแต่วิธีการของ [8] ใช้คำนวณทรงกลมที่ขนาดต่างกันได้. ข้อจำกัดของ [7,8] คือ สามารถคำนวณสนามไฟฟ้าได้แค่จำนวนทรงกลม 2 ลูก และใช้หน่วยความจำมาก เพราะใช้พิกัดแบบสองทรงกลม. ส่วนการศึกษาแรงบนอนุภาคในสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอในพิกัดทรงกลม Jones [10] เสนอการคำนวณแรงบนอนุภาคทรงกลมฉนวนและทรงกลมฉนวนที่มีสภาพนำจำกัด. การคำนวณแรงใช้การประมาณด้วยไดโพลประสิทธิผล (Effective dipole). จากนั้น Jones [11] ใช้การคำนวณด้วยวิธีเงาประจุ (Method of images)

เพื่อคำนวณไดโพลและควอดรูโพลประสิทธิผลของสายอนุภาคตัวนำซึ่งมีขนาดและชนิดเดียวกัน. สายอนุภาคตัวนำเป็นสายสั้นไม่เกิน 3 อนุภาค และแต่ละอนุภาคไม่สัมผัสกัน. ข้อด้อยของวิธีการ [10,11] คือไม่สามารถใช้ได้เมื่ออนุภาคสัมผัสกันหรืออยู่ใกล้กับอิเล็กโทรดซึ่งเป็นบริเวณที่สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอสูง.

เพื่อพัฒนาวิธีการคำนวณแรงจากเดิมที่เป็นการประมาณด้วยไดโพลประสิทธิผล[10] Washizu และ Jones [12] เสนอวิธีคำนวณแรงบนอนุภาคโดยใช้การกระจายของมัลติโพลในรูปเกรเดียนต์ของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าภายนอก ทำให้สามารถคำนวณแรงในกรณีที่อนุภาคอยู่ในบริเวณที่สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอสูงได้ และยังได้เสนอวิธีการที่ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำบนอนุภาคฉนวนสองลูก [13]. วิธีนี้ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำในพิกัดทรงกลมซึ่งทำให้การคำนวณไม่จำกัดอยู่แค่สองอนุภาค. ข้อจำกัดของ [12,13] คือต้องสร้างสมการเชิงเส้นและแก้สมการหาคำตอบของระบบ จึงทำให้การคำนวณทำได้ยากเมื่อจำนวนอนุภาคเพิ่มขึ้น. สำหรับการคำนวณที่ไม่ต้องอาศัยการสร้างสมการเชิงเส้นในการหาคำตอบนั้น Techaumnat และ Takuma [1,2] เสนอวิธีเงามัลติโพล (Method of multipole images) ในการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าของสายอนุภาคทรงกลมฉนวน. วิธีการ [1,2] ใช้หน่วยความจำที่น้อยกว่า และการคำนวณสามารถทำได้ในหลายรูปแบบการจัดวางของอนุภาคและอิเล็กโทรดโดยที่ชนิดของอนุภาคเป็นได้ทั้งฉนวนและตัวนำ แต่วิธีการดังกล่าวยังไม่ได้นำเสนอกรณีเฉพาะเช่นระนาบเอียงที่สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอซึ่งต้องอาศัยการหมุนของมัลติโพลมาร่วมด้วยในการคำนวณ.

การจำลองด้วยคอมพิวเตอร์มักใช้การจำลองโดยใช้แรงไดโพลในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงที่กระทำระหว่างอนุภาค หรือเรียกสั้นๆว่า แบบจำลองไดโพล (Dipole model) [14-16]. เพื่อสังเกตการจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ Klingenberg และคณะ [14] พัฒนาแบบจำลองที่ใช้จำลองของไหลอีอาร์ด้วยคอมพิวเตอร์โดยใช้ไดโพลในการประมาณแรงที่กระทำบนอนุภาค. ผลการคำนวณระบุว่าการจัดเรียงตัวของอนุภาคขึ้นกับสนามไฟฟ้าและความหนืดของของไหล ซึ่งตรงกับที่สังเกตได้จากการทดลองจริง และการจัดเรียงของอนุภาคไวต่อการเปลี่ยนแปลงแรงผลักระหว่างอนุภาคที่ใช้ในการจำลอง. อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้สนใจเฉพาะผลกระทบจากแรงทางไฟฟ้าเท่านั้นจึงไม่รวมผลของแรงบราวเนี่ยน (Brownian force) ซึ่งเป็นแรงที่ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่แบบสุ่มซึ่งเกิดจากผลของอุณหภูมิที่ทำให้เกิดการชนกันระหว่างอนุภาคกับโมเลกุลของก๊าซหรือของเหลว. หลังจากนั้น Tao และ Jiang [15] จำลองของไหลอีอาร์ด้วยคอมพิวเตอร์โดยใช้แบบจำลองไดโพลเช่นกันแต่ได้รวมผลของอุณหภูมิหรือแรงบราวเนี่ยนไว้ในการคำนวณด้วย เพื่อศึกษาโครงสร้างของอนุภาคในของไหลอีอาร์. ผลการจำลองระบุว่าแรงบราวเนี่ยนนี้ขัดขวางการจัดเรียงตัวของอนุภาคเป็นโครงสร้างที่เสถียร และยังได้ผลว่าโครงสร้างการจัดเรียงตัวของอนุภาคเป็นแบบบอดีเซ็นเตอร์เตตระโกนอล (Body centered tetragonal) หรือ

เรียกสั้นๆว่า บีซีที โดยสังเกตโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีจากตัวแปรการจัดเรียงอันดับ (Order parameter). อนุภาคในของไหลอีอาร์จากการจำลองของ Tao และ Jiang [15] เรียงตัวตามทิศทางสนามไฟฟ้ารวดเร็วกว่าในทิศทางอื่น และเมื่อเวลานานขึ้น โซ่เดี่ยวของอนุภาครวมตัวกันเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีซึ่งมีค่าตัวแปรการจัดเรียงอันดับใกล้เคียงกับค่าอุดมคติ. โซ่อนุภาคที่เกิดขึ้นเร็วที่สุดใช้เวลาประมาณ 10 ms ซึ่งผลที่ได้นานกว่าผลจากการทดลองเนื่องมาจากการคำนวณที่ไม่รวมผลของมัลติโพลอันดับสูง ประจุ และกระแสในของไหลอีอาร์. เพื่อพิจารณาผลของความหนืดของของไหลอีอาร์เนื่องจากความเค้นฉือน (Shear stress) Enomoto และ Oba [16] ประมาณแรงบนอนุภาคด้วยไดโพล และเปลี่ยนอัตราเฉือน (Shear rate). ผลการคำนวณพบว่าการเปลี่ยนแปลงเมื่อไม่มีความเค้นมี 2 สถานะ คืออนุภาครวมตัวเป็นโซ่และโซ่รวมกันเป็นคอลัมน์ที่แน่นและเมื่อมีความเค้นการจัดเรียงตัวของอนุภาคมี 3 สถานะตามความเข้มของสนามไฟฟ้า. เพื่อให้ผลการคำนวณได้เวลาตอบสนองของของไหลอีอาร์ใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการทดลอง Wang และคณะ [17] จึงเพิ่มจำนวนอนุภาคมากขึ้นและเปลี่ยนอัตราส่วนสภาพยอมสัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคกับของไหลรวมทั้งเพิ่มความเค้นเฉือนเข้าไปด้วย. ผลการคำนวณพบว่า การจัดเรียงตัวของอนุภาคไม่ไวต่ออัตราส่วนสภาพยอมสัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคและของไหล แต่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งเริ่มต้นและความหนาแน่นของอนุภาค. Wang และคณะ [17] ใช้แรงไดโพล และแรงที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของไดโพลจากอนุภาคอื่นในการจำลองซึ่งแตกต่างจากแรงไดโพลใน [14-16] ทำให้แรงกระทำระหว่างอนุภาคมีค่าสูงขึ้น. ผลจากการใช้แรงดังกล่าวทำให้เวลาตอบสนองของของไหลอีอาร์สั้นกว่าใน [14-16] ซึ่งตรงกับผลจากการทดลอง.

อย่างไรก็ตามแรงที่คำนวณได้จากแบบจำลองไดโพลมีขนาดน้อยกว่าแรงจริงที่เกิดขึ้นมากโดยเฉพาะเมื่ออนุภาคอยู่ใกล้กัน. Klingenberg และคณะ [18] เสนอแบบจำลองที่มีความถูกต้องมากกว่าโดยการใช้ฟังก์ชันในการคำนวณแรงที่ได้จากการทดลอง (Empirical function) ซึ่งได้รวมผลของมัลติโพลเทอมที่สูงกว่าไดโพลที่เกิดขึ้นระหว่างอนุภาคไว้ด้วย. ผลการคำนวณระบุว่าเวลาตอบสนองของของไหลอีอาร์นอกจากขึ้นกับคุณสมบัติทางไดอิเล็กตริกยังขึ้นกับแรงกระทำระยะสั้นระหว่างอนุภาคอีกด้วย. เพื่อศึกษาลักษณะสมบัติของของไหลอีอาร์ภายใต้โหลดแบบต่างๆ กับโครงสร้างแบบต่างๆ คือ สายโซ่เดี่ยว โซ่เรียงตัวแบบบีซีที และ แบบบีซีทีที่อนุภาคเรียงตัวหนาแน่น Lukkarinen และ Kaski [19] ใช้แบบจำลองของ Klingenberg และคณะ [18] ในการจำลองของไหลอีอาร์ และพบว่าโซ่อนุภาคเกิดขึ้นในช่วงเวลาเป็นมิลลิวินาทีแต่การก่อตัวขึ้นเป็นคอลัมน์จะใช้เวลาประมาณ 100 วินาที หรือ มากกว่า. Clercx และ Bossis [20] เสนอวิธีการซึ่งรวมการกระทำแบบมัลติโพลทั้งหมดสำหรับระบบหลายอนุภาค. อย่างไรก็ตามวิธีการนี้ต้องการการตั้งระบบสมการเชิงเส้นซึ่งไม่เหมาะในการนำมาใช้กับการจำลองพลวัตเมื่อมีอนุภาคจำนวนมากอยู่ในระบบของไหลอีอาร์.

มีการศึกษาเพิ่มเติมในเรื่องของโครงสร้างของการจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ แต่ก็ยังคงใช้ไดโพลในการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ . Klingenberg และคณะ [21] ศึกษาการจัดเรียงตัวของอนุภาคโดยใช้เวลาในการเกิดโซ่อนุภาคสายแรกที่เชื่อมระหว่างอิเล็กโทรดในการระบุเวลาตอบสนองของของไหลอีอาร์. ที่อัตราส่วนปริมาตรระหว่างอนุภาคกับระบบต่ำ อนุภาคในของไหลอีอาร์ใช้เวลาในการสร้างโซ่อนุภาคสายแรกนานมาก และเวลาจะลดลงเหลือประมาณ 10 ms เมื่ออัตราส่วนปริมาตรระหว่างอนุภาคกับระบบสูงขึ้นซึ่งตรงกับผลที่ได้จากการทดลอง. การจัดเรียงตัวของอนุภาคขึ้นกับการจัดเรียงเริ่มต้นของอนุภาค. Tao และ Sun [22] ทำการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับผลการทดลองและได้เสนอโครงสร้างของการจัดเรียงตัวของอนุภาคเป็นแบบบีซีทีเมื่ออนุภาคอยู่ในสถานะกราวด์ (Ground state) ซึ่งเป็นสถานะที่มีพลังงานต่ำที่สุด. ผลที่ได้พบว่า เมื่อให้ความสูงระหว่างระนาบของอิเล็กโทรดมีค่าตั้งแต่ 13 เท่าของรัศมีของอนุภาคแล้ว อนุภาคในของไหลอีอาร์จะมีโครงสร้างการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที. เพื่อศึกษาโครงสร้างของการจัดเรียงของอนุภาคในของไหลอีอาร์ในภาวะไม่สมดุล Hass [23] จำลองของไหลอีอาร์ด้วยคอมพิวเตอร์โดยใช้วิธีการของ Klingenberg และคณะ [21]. ผลที่ได้เมื่อเปลี่ยนอัตราส่วนปริมาตรระหว่างอนุภาคกับระบบพบว่า โซ่อนุภาคสายแรกที่เชื่อมระหว่างอิเล็กโทรดใช้เวลาก่อตัวประมาณ 10 เท่าของเวลาที่อนุภาคสัมผัสกันครั้งแรก. ลักษณะเหมือนเจลของของไหลอีอาร์เกือบจะสมบูรณ์เมื่อเวลาผ่านไปนานมากโดยไม่มีการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกอย่างเป็นระเบียบชัดเจน. Dassanayake และ คณะ [24] ศึกษาโครงสร้างของของการจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์จากการทดลองโดยการเปลี่ยนค่าอัตราส่วนปริมาตรระหว่างอนุภาคกับระบบ. จากผลการทดลองพบว่า ที่สภาวะสมดุลซึ่งอนุภาคมีพลังงานต่ำที่สุด อนุภาคมีการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที และที่สภาวะไม่สมดุล เมื่อมองจากด้านบนลงมา การจัดเรียงตัวของอนุภาคเป็นโครงสร้างแบบแผ่นเหมือนเขาวงกต (Sheet-like labyrinth) รวมทั้งมีโซ่อนุภาคที่แยกตัวเป็นอิสระด้วย. โครงสร้างที่ภาวะไม่สมดุลขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคและสนามไฟฟ้าที่ป้อนให้กับของไหลอีอาร์. Guo และคณะ [25] ศึกษาโครงสร้างการจัดเรียงตัวของอนุภาคโดยการสร้างแผนภาพการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของของไหลอีอาร์ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปรคือ อัตราส่วนระหว่างแรงไดโพลและแรงบราวเนี่ยน และอัตราส่วนระหว่างแรงเฉือนและแรงบราวเนี่ยน. การจัดเรียงตัวเป็นโครงสร้างของอนุภาคแบ่งออกเป็น 3 สถานะ คือ ของเหลว สายอนุภาคแบบเฉือน และคริสตัล. สถานะของเหลวนั้น เมื่ออัตราส่วนระหว่างแรงเฉือน และแรงบราวเนี่ยนเป็นศูนย์ อนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ และเมื่ออัตราส่วนระหว่างแรงเฉือนและแรงบราวเนี่ยนมากกว่าศูนย์ โซ่อนุภาคขนาดสั้นก่อตัวขึ้นและกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์. สำหรับสถานะสายอนุภาคแบบเฉือนนั้น อนุภาคเรียงตัวกันเป็นสายหลายๆ เส้น และสายอนุภาคแต่ละเส้นเรียงตัวติดกันด้านต่อด้านจนกลายเป็นโครงข่ายผลึกแบบหกเหลี่ยมแบบ

บิดเบือน (Distort hexagonal lattice). สถานะคริสตัลนั้น เมื่ออัตราส่วนระหว่างแรงเฉือนและแรงบราวเนี่ยนเป็นศูนย์ อนุภาคเรียงตัวเป็นโซ่อนุภาคแบบมิติเดียวตามทิศทางสนามไฟฟ้าหรือรวมตัวกันเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที และเมื่ออัตราส่วนระหว่างแรงเฉือนและแรงบราวเนี่ยนมากกว่าศูนย์ อนุภาคเรียงตัวเป็นโครงสร้างสองมิติแบบเป็นชั้นๆ.

1.3 วัตถุประสงค์

1.3.1 พัฒนาการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคฉนวนโดยใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำ.

1.3.2 ประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำเพื่อนำไปวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงที่กระทำต่ออนุภาคฉนวนในการใช้งานด้านต่างๆ.

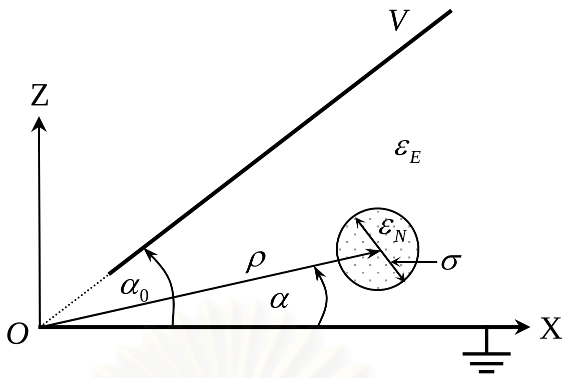
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำในการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมซึ่งแทนรูปร่างของอนุภาคอย่างง่าย.

1.4.1 อนุภาคฉนวนในกับดักอนุภาคอย่างง่าย

รูปแบบปัญหานี้จำลองกับดักอนุภาคอย่างง่ายในระบบไฟฟ้าแรงสูงที่ฉนวนด้วยก๊าซ เพื่อป้องกันการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายในระบบ. อนุภาคในแบบจำลองแทนอนุภาคฉนวนอิสระที่อยู่ในระบบซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง σ. ตำแหน่งที่จุดศูนย์กลางของอนุภาคอยู่ที่ (ρ,α) เมื่อ α คือมุมที่จุดศูนย์กลางของอนุภาคทำกับระนาบกราวด์ และ ρ คือ ระยะทางจากจุดกำเนิดหรือจุดตัดเสมือนระหว่างอิเล็กโทรดบนกับล่างถึงจุดศูนย์กลางของอนุภาค. กับดักอนุภาคเป็นระนาบอิเล็กโทรดลู่เข้าซึ่งมีสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอซึ่งในที่นี้เกิดจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าระหว่างระนาบอิเล็กโทรดเท่ากับ V และมีมุมของกับดักอนุภาค α_0 ดังรูปที่ 1.1. อนุภาคเป็นของแข็งมีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_N อยู่ในช่วง 2 ถึง 6 อยู่ในก็าซซึ่งมีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_E เท่ากับ 1. รูปแบบปัญหานี้ใช้วิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นบนอนุภาค ซึ่งทำให้เราทราบลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคในกับดักอนุภาค.

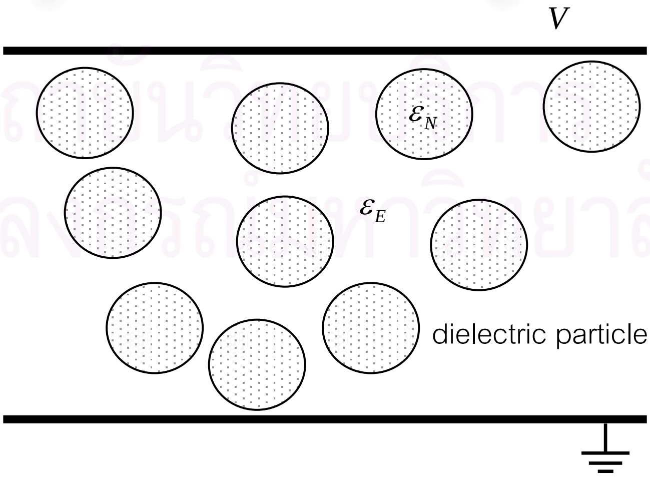
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



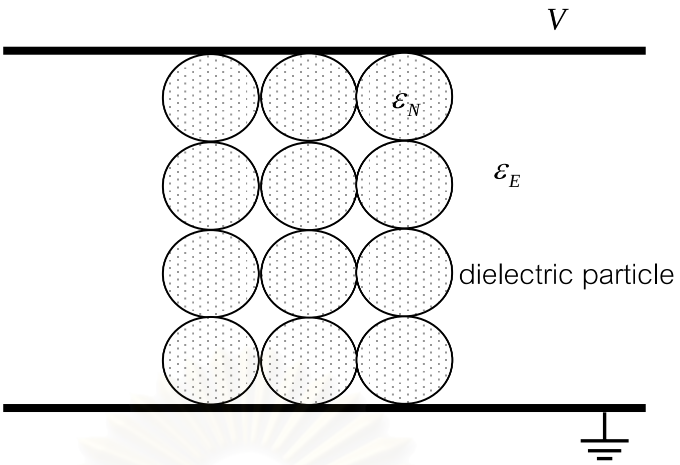
รูปที่ 1.1 อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมในกับดักอนุภาค.

1.4.2 อนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์

รูปแบบปัญหาเป็นการจำลองอนุภาคที่อยู่อย่างกระจัดกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ เมื่อป้อนสนามไฟฟ้าซึ่งในที่นี้คือป้อนศักย์ไฟฟ้าระหว่างระนาบอิเล็กโทรดบนและล่างเท่ากับ V ดังรูปที่ 1.2. อนุภาคในของไหลอีอาร์จะเกิดโพลาไรเซชัน และเรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าทำให้ของไหลอีอาร์เปลี่ยนสถานะเป็นเหมือนเจล เนื่องจากอนุภาคภายในของเหลวได้รับสนามไฟฟ้าและเรียงตัวเป็นโซ่ตามแนวสนามไฟฟ้าระหว่างระนาบอิเล็กโทรดขนาน ดังรูปที่ 1.3. อนุภาคเป็นของแข็งมีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_N อยู่ในช่วง 2 ถึง 6 ลอยอยู่ในน้ำมันฉนวนที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_E ประมาณ 2 ถึง 2.5 และ ขนาดของอนุภาคส่วนใหญ่อยู่ในระดับไมโครเมตร. วิทยานิพนธ์นี้วิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคโดยใช้การประมาณแรงด้วยมัลติโพลและเปรียบเทียบกับการประมาณแรงด้วยไดโพล รวมทั้งเวลาที่ใช้ในการเรียงตัวเป็นโซ่ของอนุภาคเหล่านี้.



รูปที่ 1.2 อนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์.



รูปที่ 1.3 อนุภาคจัดเรียงตัวในของไหลอีอาร์.

1.5 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 อธิบายถึงศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนในรูปฮาร์มอนิกทรงกลม การกระจายมัลติโพลซ้ำ เงาของมัลติโพลและระนาบกราวด์ การคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงที่กระทำบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม. ในบทที่ 3 และ 4 จะกล่าวถึงการนำการกระจายมัลติโพลซ้ำไปประยุกต์ใช้งานในแบบต่างๆ โดยใช้การคำนวณในบทที่ 2 เพื่อคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงที่กระทำบนอนุภาค. กรณีแรกที่กล่าวในบทที่ 3 อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมอยู่ภายในกับดักอนุภาคอย่างง่าย ในปัญหานี้ศึกษาพฤติกรรมของแรงที่กระทำบนอนุภาคซึ่งมีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคในกับดักอนุภาค พร้อมทั้งพิจารณาตัวแปรอื่นที่มีผลกระทบต่อสนามไฟฟ้าและแรงเช่น มุมของกับดักอนุภาค ตำแหน่งของอนุภาค และอื่นๆ. กรณีที่สองในบทที่ 4 อนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ โดยพิจารณาการจัดเรียงตัวของอนุภาค เวลาที่ใช้ในการจัดเรียงตัวของอนุภาค โครงสร้างของอนุภาค และ แรงระหว่างอนุภาค. บทที่ 5 เป็นการสรุป และข้อเสนอแนะต่างๆ ของงานวิจัยนี้.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

การคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม

2.1 นิยามของตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณ

ε_r	คือ สภาพยอมสัมพัทธ์
ε_N	คือ สภาพยอมสัมพัทธ์ของอนุภาคฉนวน
ε_E	คือ สภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลางรอบอนุภาค
ε_0	คือ สภาพยอมของสุญญากาศ
σ	คือ เส้นผ่าศูนย์กลางของอนุภาค
(r,θ,ϕ)	คือ ระบบพิกัดทรงกลม และ
(r_C,θ_C,ϕ_C)	คือ ระบบพิกัดทรงกลมที่มีจุด C เป็นจุดกำเนิด.

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างปัญหากับสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาค

2.2.1 ตัวนำและฉนวน

วัสดุต่างๆ แบ่งออกเป็นประเภทตามการแบ่งทางไฟฟ้าได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ ตัวนำและฉนวน. กล่าวโดยทั่วไป คือ ตัวนำเป็นวัสดุที่มีประจุอิสระที่จะเคลื่อนที่ไปได้ตลอดพื้นที่ของวัสดุนั้น ส่วนฉนวนนั้นประจุทั้งหมดจะยึดติดกับอะตอมหรือโมเลกุลและสามารถเคลื่อนที่ได้เพียงเล็กน้อยภายในอะตอมหรือโมเลกุลเท่านั้น.

<u>คุณสมบัติของตัวนำอุดมคติ</u>

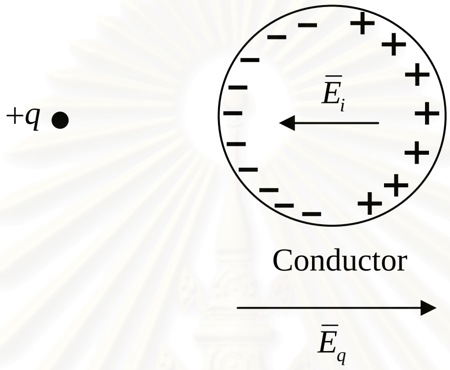
1. สนามไฟฟ้าสถิตภายในตัวนำมีค่าเป็นศูนย์.
2. ประจุทั้งหมดปรากฏอยู่ที่ผิวของตัวนำในรูปประจุเชิงผิว.
3. ศักย์ไฟฟ้าสถิตทุกๆ จุดบนผิวตัวนำมีค่าเท่ากัน.
4. ที่จุดใดจุดหนึ่งภายนอกตัวนำแต่ใกล้กับผิวตัวนำ สนามไฟฟ้าสถิตมีทิศตั้งฉากกับผิวของตัวนำเสมอ.
5. ไม่มีกระแสไหลในเนื้อตัวนำภายใต้สภาวะไฟฟ้าสถิต.

<u>คุณสมบัติของฉนวนอุดมคติ</u>

1. อะตอมหรือโมเลกุลของวัสดุเป็นกลางหรือไม่นำไฟฟ้า.
2. ไม่มีประจุอิสระ (Free charge).
3. ประจุภายในโมเลกุลของฉนวนเป็นประจุผูกพัน (Bound charge).

2.2.1.1 **ประจุเหนี่ยวนำในตัวนำ** (Induced charge)

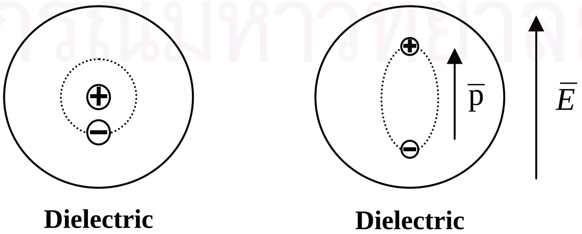
ถ้าวางประจุ $+q$ ใกล้กับตัวนำที่ไม่มีประจุ ดังรูปที่ 2.1 ประจุและตัวนำจะดึงดูดซึ่งกันและกันเนื่องจากประจุ $+q$ จะเหนี่ยวนำประจุในตัวนำ. ประจุ $+q$ จะดึงประจุลบของตัวนำทั้งหมดมาอยู่ทางด้านใกล้ประจุ และผลักประจุบวกของตัวนำไปอยู่ทางด้านไกลประจุ. ประจุเหนี่ยวนำนี้ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าภายใน $\bar{E}_i$ ซึ่งตรงข้ามกับสนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_q$ ที่เกิดจากประจุ $+q$ ทำให้เกิดการหักล้างกัน. ประจุของตัวนำจะหยุดเคลื่อนที่มาที่ผิวของตัวนำเมื่อสนามไฟฟ้าภายในเท่ากับภายนอกหรือการหักล้างของสนามไฟฟ้าสมบูรณ์.



รูปที่ 2.1 ประจุเหนี่ยวนำบนตัวนำที่เกิดจากอิทธิพลของประจุไฟฟ้า $+q$.

2.2.1.2 **ประจุผูกพัน** (Bound charge) **และ โพลาไรเซชัน** (Polarization) **ของฉนวน**

เมื่อโมเลกุลของฉนวนปราศจากอิทธิพลของสนามไฟฟ้า ประจุบวกและลบของแต่ละโมเลกุลของฉนวนจะเป็นดังรูปที่ 2.2(ก). ดังนั้นฉนวนจึงมีสภาพเป็นกลางและประจุลบในโมเลกุลของฉนวนไม่สามารถหลุดพ้นออกไปจากโมเลกุลได้. ประจุภายในโมเลกุลของฉนวนจึงเป็นประจุผูกพัน. อย่างไรก็ตามเมื่อป้อนสนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}$ ให้แก่ฉนวนดังรูปที่ 2.2(ข) ประจุบวกและลบจะไม่วิ่งไปที่ผิวของฉนวนเหมือนกับตัวนำแต่ประจุบวกและลบในโมเลกุลของฉนวนจะแยกตัวออกห่างกันเล็กน้อย และจะแสดงตัวเป็นไดโพล ซึ่งเราเรียกว่าเกิดโพลาไรเซชันในฉนวนดังรูปที่ 2.2(ข) เมื่อ $\bar{\mathrm{p}}$ คือ ไดโพลโมเมนต์ที่เกิดจากโพลาไรเซชัน.



(ก) (ข)

รูปที่ 2.2 ประจุผูกพันและการเกิดโพลาไรซ์ในฉนวน

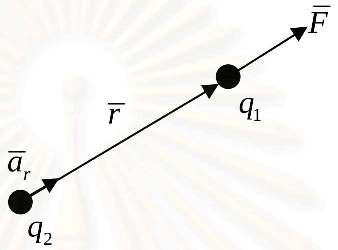
(ก)ประจุภายในโมเลกุล และ (ข) โพลาไรเซชันของอนุภาคฉนวน.

2.2.2 **แรงคูลอมบ์** (Coulomb force)

แรงคูลอมบ์คือแรงระหว่างวัตถุขนาดเล็กสองอันซึ่งมีประจุไฟฟ้า และห่างกันเป็นระยะทางที่ยาวกว่าขนาดความกว้างยาวของวัตถุทั้งสองมาก. พิจารณาประจุ q_1 และ q_2 ซึ่งมีระยะห่างระหว่างประจุทั้งสอง $\bar{r}$ ดังรูปที่ 2.3. แรงที่กระทำต่อประจุ q_1 โดยผลของประจุ q_2 คำนวณจาก

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{|\bar{r}|^2}\right)\bar{a}_r \tag{2.1}$$

เมื่อ $\bar{a}_r$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวที่ลากจาก q_2 ไปยัง q_1.

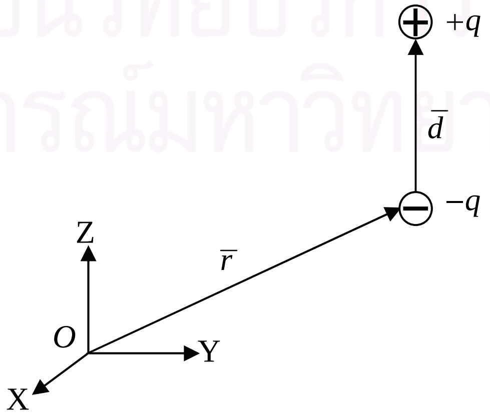


รูปที่ 2.3 แรงคูลอมบ์ระหว่างประจุ q_1 และ q_2.

แรงคูลอมบ์นี้ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่เนื่องจากประจุลัพธ์บนอนุภาค. อย่างไรก็ตามยังมีแรงอีกประเภทหนึ่งซึ่งทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของอนุภาคเช่นกันแต่เกิดเนื่องจากไดโพลหรือมัลติโพลของอนุภาคฉนวนซึ่งเกิดจากการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้าภายนอกดังจะได้กล่าวในหัวข้อถัดไป.

2.2.3 **แรงไดอิเล็กโทรโฟเรตติก** (Dielectrophoretic force)

แรงไดอิเล็กโทรโฟเรตติก หรือเรียกสั้นๆ ว่า แรงดีอีพี (DEP force) คือแรงที่เกิดจากสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอที่กระทำบนอนุภาคฉนวนที่เกิดโพลาไรเซชัน และอนุภาคฉนวนไม่มีการอัดประจุ. ในที่นี้จะยกตัวอย่างแรงดีอีพีที่เกิดจากไดโพล ดังรูปที่ 2.4.



รูปที่ 2.4 ตำแหน่งของไดโพล.

ไดโพลที่ก่อให้เกิดแรงทางไฟฟ้ามีตำแหน่งดังรูปที่ 2.4 เมื่อ $\bar{r}$ คือระยะจากจุดกำเนิดมายังตำแหน่งของประจุ $-q$. ประจุ $+q$ และ ประจุ $-q$ วางห่างกันเป็นระยะ $\bar{d}$. แรงที่เกิดจากไดโพลสามารถคำนวณได้จาก

$$\bar{F} = q\bar{E}\left(\bar{r}+\bar{d}\right) - q\bar{E}\left(\bar{r}\right). \qquad (2.2)$$

เมื่อกระจายพจน์ของสนามไฟฟ้า $\bar{E}\left(\bar{r}+\bar{d}\right)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์ที่มีตำแหน่ง $\bar{r}$ เป็นจุดศูนย์กลางของการกระจาย. สมการที่ (2.2) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\bar{F} = q\left[\bar{E}\left(\bar{r}\right) + \left(\bar{d}\bullet\nabla\right)\bar{E} + \ldots\right] - q\bar{E}\left(\bar{r}\right) \qquad (2.3)$$

โดยพจน์ที่ $d^2, d^3, \ldots$ ถูกละไว้.

เมื่อให้ระยะ $\left|\bar{d}\right| \to 0$ สมการที่ (2.3) เขียนได้เป็น

$$\bar{F} = \lim_{\left|\bar{d}\right| \to 0} q\left[\bar{E}\left(\bar{r}\right) + \left(\bar{d}\bullet\nabla\right)\bar{E} + \ldots\right] - q\bar{E}\left(\bar{r}\right). \qquad (2.4)$$

ดังนั้นแรงที่เกิดจากไดโพลคำนวณได้จาก

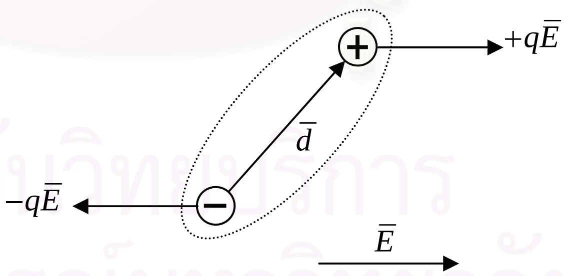
$$\bar{F} = \left(\bar{\mathrm{p}}\bullet\nabla\right)\bar{E} \qquad (2.5)$$

เมื่อ $\bar{\mathrm{p}} = q\bar{d}$ เป็น ไดโพลโมเมนต์.

ยกตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ และไม่สม่ำเสมอ กับแรงที่เกิดขึ้นกับไดโพลภายใต้สนามไฟฟ้าทั้งสองแบบตามลำดับดังนี้.

1. สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

แรงที่เกิดจากประจุ $+q$ และประจุ $-q$ ของไดโพลจะหักล้างกันจึงไม่มีแรงกระทำต่อไดโพลดังรูปที่ 2.5.



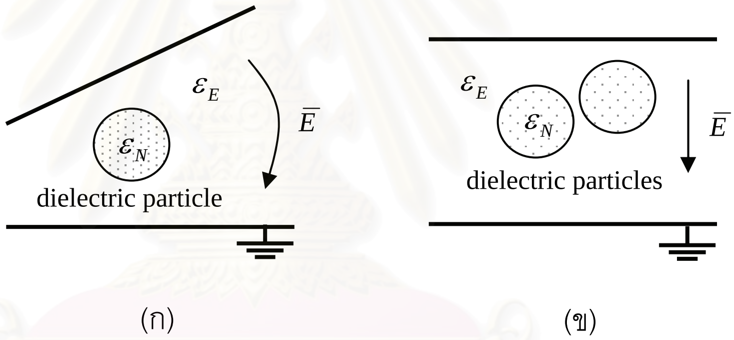
รูปที่ 2.5 แรงที่เกิดขึ้นกับไดโพลภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ.

2. สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ

แรงที่เกิดจากประจุบวกและประจุลบไม่หักล้างกันจึงมีแรงลัพธ์ที่กระทำกับไดโพลโดยที่แรงลัพธ์คำนวณได้จากสมการที่ (2.5). ดังนั้นแรงดีอีพีจะเกิดขึ้นได้เมื่ออนุภาคฉนวนอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ และ แรงดีอีพีขึ้นกับการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าหรือเกรเดียนท์ของสนามไฟฟ้า.

2.3 ลักษณะร่วมของปัญหา

ปัญหาที่ถูกนำมาวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นรูปแบบของอนุภาคฉนวนในตัวกลางที่เป็นฉนวน ดังรูปที่ 2.6. รูปร่างของอนุภาคฉนวนที่นำมาวิเคราะห์เป็นรูปทรงกลมซึ่งแทนรูปร่างของอนุภาคอย่างง่ายในการคำนวณ. แรงดีอีพีที่กระทำบนอนุภาคเกิดจากสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ ดังนั้น ความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าในปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ดังรูปที่ 2.6(ก) และ 2.6(ข) เกิดขึ้นดังนี้. ในรูปที่ 2.6(ก) อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมอยู่ในกับดักอนุภาคอย่างง่ายซึ่งแทนด้วยระนาบอิเล็กโทรดเอียง. ดังนั้น สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอเกิดจากอิเล็กโทรดโดยตรง. ในรูปที่ 2.6(ข) ยกตัวอย่างอนุภาคฉนวนสองลูกแขวนลอยอยู่ในของไหลซึ่งเป็นฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอซึ่งแทนด้วยระนาบอิเล็กโทรดแบบขนาน. ความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าเกิดจากการมีอยู่ของอนุภาคและอนุภาคที่อยู่ใกล้เคียง. ปัญหาทั้งสองแบบต้องคำนวณสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนอนุภาคก่อนจากนั้นคำนวณแรงที่กระทำบนอนุภาคเนื่องจากสนามไฟฟ้านั้นพร้อมทั้งวิเคราะห์พฤติกรรมของแรงที่เกิดขึ้น.



รูปที่ 2.6 ปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์.

2.4 ศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม

ในวิธีการคำนวณนั้นศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมถูกแสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดศูนย์กลางของอนุภาคซึ่งใช้แทนจุดกำเนิดของระบบพิกัดทรงกลมโดยมีวิธีการคำนวณดังต่อไปนี้.

2.4.1 ศักย์ไฟฟ้าในรูปของฮาร์มอนิกทรงกลม

ศักย์ไฟฟ้าของอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมนั้นเหมาะที่จะใช้ระบบพิกัดทรงกลม (r,θ,ϕ) ในการคำนวณ. สมการลาปลาซในระบบพิกัดทรงกลมเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0\,. \tag{2.6}$$

จากผลตอบของสมการเมื่อใช้การแยกกันได้ของตัวแปร (Separation of variables) ศักย์ไฟฟ้าแสดงในรูปของอนุกรมของฮาร์มอนิกทรงกลมได้ดังสมการ

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}\left[M_{j,k}r^{j} + \frac{B_{j,k}}{r^{j+1}}\right]\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \qquad (2.7)$$

เมื่อ $M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ คือ โมเมนต์ของการกระจาย และ

$\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi)$ คือ ฮาร์มอนิกฟังก์ชันทรงกลมแบบบรรทัดฐาน (Normalized spherical harmonic function) ซึ่งนิยามโดย $\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) = \bar{P}_{j,k}(\cos\theta)e^{ik\phi}$ และ $i = \sqrt{-1}$.

$\bar{P}_{j,k}(\cos\theta)$ คือ ฟังก์ชันเลอช็องดร์สมทบแบบบรรทัดฐาน (Normalized associated Legendre function) ซึ่งคำนวณได้จาก $\bar{P}_{j,k}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{(j-|k|)!}{(j+|k|)!}}P_{j,|k|}(\cos\theta)$ เมื่อ $P_{j,|k|}(\cos\theta)$ คือ ฟังก์ชันเลอช็องดร์สมทบ.

เมื่อนำสมการที่ (2.7) มาใช้คำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าบนอนุภาคเพื่อวิเคราะห์ปัญหาในด้านต่างๆ ดังที่กล่าวมา. ศักย์ไฟฟ้าภายใน (φ_I) และศักย์ไฟฟ้าภายนอก (φ_E) ของอนุภาคทรงกลมแสดงในรูปของกลุ่มฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดกำเนิดของระบบพิกัดทรงกลมซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของอนุภาคเป็นไปตามสมการดังนี้ [1,2]

$$\varphi_I = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} L_{j,k}r^{j}\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \qquad (2.8)$$

$$\varphi_E = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}\left[M_{j,k}r^{j} + \frac{B_{j,k}}{r^{j+1}}\right]\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \qquad (2.9)$$

เมื่อ $L_{j,k}, M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่ต้องการทราบค่า. ศักย์ไฟฟ้าภายในอนุภาคตามสมการที่ (2.8) เกิดจากผลของสนามไฟฟ้าภายนอกอนุภาค. สมการที่ (2.8) ได้มาจากการที่สัมประสิทธิ์ในพจน์ที่สองของสมการที่ (2.7) มีค่าเป็นศูนย์หรือศักย์ไฟฟ้ามีค่าอนันต์ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาคทำให้ผลเฉลยในสมการที่ (2.7) เหลือเพียงพจน์แรกเท่านั้น. ศักย์ไฟฟ้าภายนอกอนุภาคตามสมการที่ (2.9) นั้นพจน์แรกของสมการแสดงศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกอนุภาค และพจน์ที่สองแสดงศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากการมีอยู่ของอนุภาค.

สัมประสิทธิ์ $L_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ สามารถคำนวณได้จากสัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ ด้วยการทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมเป็นจริง ดังนี้

$$B_{j,k} = \left[\frac{(\varepsilon_E - \varepsilon_N)j}{(\varepsilon_E + \varepsilon_N)j + \varepsilon_E}\right]\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2j+1}M_{j,k} \qquad (2.10)$$

$$L_{j,k} = \left[\frac{\varepsilon_E(2j+1)}{(\varepsilon_E + \varepsilon_N)j + \varepsilon_E}\right]M_{j,k} \quad . \qquad (2.11)$$

2.4.2 การคำนวณศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้า

หัวข้อนี้กล่าวถึงวิธีการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ $L_{j,k}$, $M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ ในสมการศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคที่เขียนในรูปฮาร์มอนิกทรงกลมในหัวข้อที่ 2.4.1. ศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมเกิดเนื่องจากการวางอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอและไม่สม่ำเสมอ. วิธีการคำนวณเป็นดังต่อไปนี้.

ผลเฉลยของสมการลาปลาซในระบบพิกัดทรงกลมในรูปฮาร์มอนิกทรงกลมที่เป็นจำนวนจริงคือ

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n,0} r^n \bar{P}_{n,0}(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{U_{n,m} r^n \cos(m\phi) + W_{n,m} r^n \sin(m\phi)\right\}\bar{P}_{n,m}(\cos\theta) \quad (2.12)$$

เมื่อ $U_{n,m}$ และ $W_{n,m}$ คือ สัมประสิทธิ์ที่ต้องการทราบค่า. จากผลเฉลยของสมการลาปลาซตามสมการที่ (2.7) นั้นมีพจน์ r^{-j-1} อยู่แต่ในสมการที่ (2.12) ไม่มีเนื่องจากศักย์ไฟฟ้าต้องมีค่าจำกัด (finite) ที่ $r = 0$ และ $\theta = 0$ ภายในอนุภาครูปทรงกลมทำให้พจน์ r^{-j-1} ถูกตัดทิ้งไป. ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธ์ $M_{n,m}$ กับ $U_{n,m}$ และ $W_{n,m}$ เป็นดังนี้

$$M_{n,0} = U_{n,0} \quad (2.13)$$

$$\mathrm{Re}\left[M_{n,m}\right] = (-1)^m \left(U_{n,m}/2\right) \quad (2.14)$$

$$\mathrm{Im}\left[M_{n,m}\right] = (-1)^{m+1} \left(W_{n,m}/2\right) \quad (2.15)$$

เมื่อ $\mathrm{Re}[\ ]$ และ $\mathrm{Im}[\ ]$ คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนตามลำดับ.

สมการที่ (2.13) ถึง (2.15) ได้จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการซึ่งมีขั้นตอนดังนี้.

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวของอนุภาค ผลตอบของสมการที่ (2.12) คือ

$$\varphi_0(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n,0} (\sigma/2)^n \bar{P}_{n,0}(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{U_{n,m}\cos(m\phi) + W_{n,m}\sin(m\phi)\right\}(\sigma/2)^n \bar{P}_{n,m}(\cos\theta) \quad (2.16)$$

เมื่อ $\varphi_0(\theta,\phi)$ คือ ศักย์ไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคฉนวนที่ตำแหน่ง (θ,ϕ) ในระบบพิกัดทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางของอนุภาคเป็นจุดกำเนิด.

สัมประสิทธิ์ $U_{n,m}$ และ $W_{n,m}$ ในสมการที่ (2.16) คำนวณได้จากสมการต่อไปนี้ [9]

$$U_{n,0} = \left[\frac{2n+1}{4\pi(\sigma/2)^n}\right]\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0(\theta,\phi)\bar{P}_{n,0}(\cos\theta)\sin(\theta)\,d\theta d\phi \qquad m = 0 \quad (2.17)$$

$$U_{n,m} = \left[\frac{2n+1}{2\pi(\sigma/2)^n}\right]\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0(\theta,\phi)\bar{P}_{n,m}(\cos\theta)\cos(m\phi)\sin(\theta)\,d\theta d\phi \quad m \ge 1 \quad (2.18)$$

$$W_{n,m} = \left[\frac{2n+1}{2\pi(\sigma/2)^n}\right]\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0(\theta,\phi)\bar{P}_{n,m}(\cos\theta)\sin(m\phi)\sin(\theta)\,d\theta d\phi \quad m \ge 1. \quad (2.19)$$

ผลเฉลยในรูปของฮาร์มอนิกทรงกลมที่ผิวของอนุภาคที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ

$$\varphi_0\left(\theta,\phi\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(-1\right)^m M_{n,m}\bar{Y}_{n,m}\left(\theta,\phi\right). \tag{2.20}$$

สำหรับศักย์ไฟฟ้าที่เป็นจำนวนจริงเมื่อกระจายสัมประสิทธิ์ $M_{n,m}$ ในสมการที่ (2.20) ซึ่งประกอบด้วยพจน์ $M_{n,+m}$ และ $M_{n,-m}$ โดยที่ $M_{n,-m}=(-1)^m M_{n,m}^*$ เมื่อเครื่องหมาย * คือจำนวนเชิงซ้อนสังยุค (Complex conjugate). รวมพจน์ $n,+m$ และ $n,-m$ เข้าด้วยกันจะได้

$$\left[M_{n,+m}\bar{Y}_{n,+m}\left(\theta,\phi\right)+M_{n,-m}\bar{Y}_{n,-m}\left(\theta,\phi\right)\right]=2\mathrm{Re}\left[M_{n,+m}\bar{Y}_{n,+m}\left(\theta,\phi\right)\right] \tag{2.21}$$

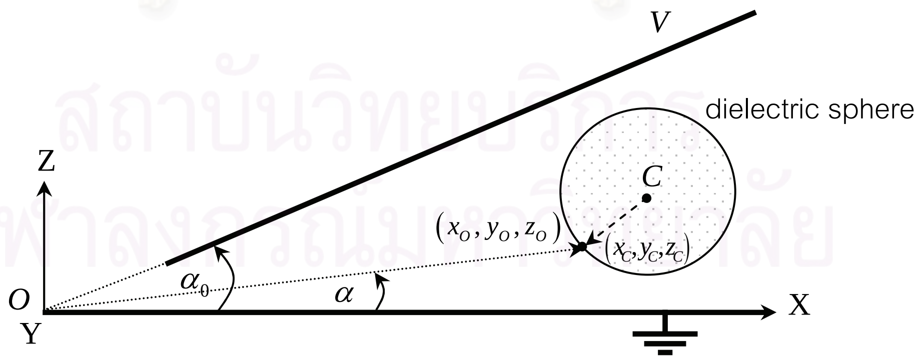
กระจายสมการที่ (2.20) โดยใช้สมการที่ (2.21) จะได้

$$\begin{aligned}\varphi_0(\theta,\phi)&=\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,0}\bar{P}_{n,0}\left(\cos\theta\right)\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\left\{2\,\mathrm{Re}\left[M_{n,m}\right]\cos\left(m\phi\right)\right\}\bar{P}_{n,m}\left(\cos\theta\right)\\&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\left\{-2\,\mathrm{Im}\left[M_{n,m}\right]\sin\left(m\phi\right)\right\}\bar{P}_{n,m}\left(\cos\theta\right)\end{aligned} \tag{2.22}$$

และเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการที่ (2.16) จะได้ผลดังสมการที่ (2.13) ถึง (2.15).

<u>ตัวอย่างการคำนวณศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอภายนอก</u>

พิจารณาอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนอยู่ที่จุด $C\left(x_{CO},y_{CO},z_{CO}\right)$ เมื่อจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดเสมือนของอิเล็กโทรดทั้งสองเป็นจุดกำเนิด. อนุภาคอยู่ภายในกับดักอนุภาคอย่างง่ายซึ่งมีมุม α_0 และมีศักย์ไฟฟ้า V ระหว่างอิเล็กโทรด ดังรูปที่ 2.7.



รูปที่ 2.7 ตำแหน่งบนพื้นผิวของอนุภาครูปทรงกลมภายในกับดักอนุภาค.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตำแหน่งต่างๆ บนผิวของอนุภาครูปทรงกลมในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x_C, y_C, z_C) คำนวณได้จากระบบพิกัดทรงกลม (r_C, θ_C, ϕ_C) ซึ่งมีจุดศูนย์กลางของอนุภาค C เป็นจุดกำเนิด ดังนี้

$$x_C = (\sigma/2)\sin\theta_C \cos\phi_C \tag{2.23}$$

$$y_C = (\sigma/2)\sin\theta_C \sin\phi_C \tag{2.24}$$

$$z_C = (\sigma/2)\cos\theta_C\,. \tag{2.25}$$

ตำแหน่งบนผิวของอนุภาคทรงกลมในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x_O, y_O, z_O) ซึ่งมีจุดกำเนิด O เป็นจุดกำเนิดในรูปที่ 2.7 คำนวณได้จาก

$$(x_O, y_O, z_O) = (x_{CO} + x_C,\ y_{CO} + y_C,\ z_{CO} + z_C)\,. \tag{2.26}$$

ศักย์ไฟฟ้า $\varphi_0(\theta,\phi)$ ที่เกิดจากอิเล็กโทรดแบบระนาบเอียงบนที่จุดใดๆ บนผิวของอนุภาคฉนวน ซึ่งเป็นศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง (θ,ϕ) ในระบบพิกัดทรงกลมที่มีจุด O เป็นจุดกำเนิดคือ

$$\varphi_0(\theta,\phi) = V\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) \tag{2.27}$$

เมื่อ α คือ มุมที่จุดใดๆ บนผิวของอนุภาคทำกับอิเล็กโทรดล่าง โดยที่ $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{z_O}{\sqrt{x_O^2 + y_O^2}}\right)$.

จากผลเฉลยในรูปฮาร์มอนิกทรงกลมที่ผิวของอนุภาค ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าของกับดักอนุภาคที่จุดใดๆ ภายนอกอนุภาคคำนวณได้จากการแทนค่าสมการที่ (2.27) ลงในสมการที่ (2.17) ถึง (2.19) จากนั้นคำนวณสัมประสิทธิ์ $M_{n,m}$ ด้วยสมการที่ (2.13) ถึง (2.15) จะได้ศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} M_{n,m} r_C^n \bar{Y}_{n,m}(\theta_C, \phi_C)\,. \tag{2.28}$$

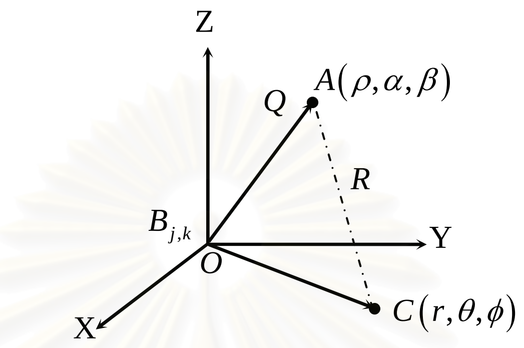
2.5 การกระจายมัลติโพลซ้ำ (Multipole re-expansion)

หัวข้อนี้กล่าวถึงการกระจายมัลติโพลซ้ำซึ่งเป็นวิธีในการย้ายการกระจายของมัลติโพล และวิธีการหมุนมัลติโพลเพื่อนำไปใช้ในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาค. การกระจายมัลติโพลซ้ำทำให้ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลรอบจุดกำเนิดของระบบพิกัดหนึ่งเขียนแสดงได้ในรูปของฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดกำเนิดของอีกระบบพิกัดหนึ่ง. การกระจายมัลติโพลซ้ำลดความยุ่งยากในการคำนวณจากเดิมซึ่งต้องคำนวณจากมัลติโพลทุกตัวซึ่งมีการกระจายคนละตำแหน่งในระบบทำให้สามารถคำนวณได้จากมัลติโพลตัวเดียวเมื่อทำการกระจายมัลติโพลซ้ำมาที่ตำแหน่งเดียวกัน. การกระจายมัลติโพลซ้ำที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วย การเลื่อนขนานและการหมุนมัลติโพลดังจะได้อธิบายต่อไป.

2.5.1 **มัลติโพล** (Multipoles)

พิจารณาจุด C อยู่ที่พิกัด (r,θ,ϕ) ซึ่งอยู่ห่างจากประจุ Q ซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $A(\rho,\alpha,\beta)$ เป็นระยะ R ดังรูปที่ 2.8. ศักย์ไฟฟ้าที่จุด C คำนวณได้จากสมการ

$$\varphi(C)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{Q}{R}. \tag{2.29}$$



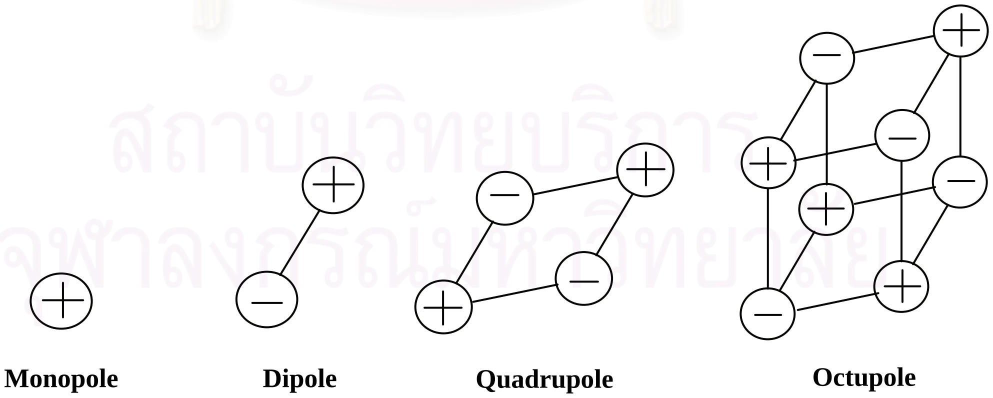
รูปที่ 2.8 ศักย์ไฟฟ้าที่จุด C จากผลของประจุ Q ที่ระยะห่างกัน r.

ที่ระยะ $r>\rho$ ศักย์ไฟฟ้าที่จุด C สามารถเขียนในรูปมัลติโพลที่จุดกำเนิด O ได้จาก

$$\varphi(C)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{k=j}\frac{B_{j,k}}{r^{j+1}}\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \tag{2.30}$$

เมื่อ $B_{j,k}$ แทนมัลติโพลอันดับที่ (j,k) ซึ่งวางอยู่ที่จุดกำเนิด O.

มัลติโพล $B_{j,k}$ ประกอบไปด้วยโพลหลายๆ อันดับ เช่น ไดโพล (Dipole) ควอดรูโพล (Quadrupole) ออกโตโพล (Octopole) และอื่นๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.9.



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างของมัลติโพลอันดับต่างๆ.

ศักย์ไฟฟ้าในรูปฮาร์มอนิกทรงกลมตามสมการที่ (2.30) ให้การประมาณค่าศักย์ไฟฟ้าที่ดีกว่าสมการที่ (2.29) เพราะได้รวมพจน์ที่มีผลเมื่อระยะ r ระหว่างการกระจายของประจุและตำแหน่งที่ต้องการทราบศักย์ไฟฟ้ามีค่าน้อยไว้ในการคำนวณด้วย เช่น ไดโพลแปรผกผันกับ r^2 หรือ ควอดรูโพลแปรผกผันกับ r^3. ที่ระยะ r มากๆ ศักย์ไฟฟ้าสามารถคำนวณโดยใช้สมการที่ (2.29) เช่นเดิม.

2.5.2 **การเลื่อนขนานมัลติโพล** (Multipole translation)

หัวข้อนี้แสดงวิธีการเลื่อนขนานมัลติโพลซึ่งนำไปใช้ในการย้ายมัลติโพลจากระบบพิกัดหนึ่งมายังอีกระบบพิกัดหนึ่ง. พิจารณามัลติโพล $B_{n,m}$ ที่มีอันดับ n ซึ่งวางอยู่ที่จุด C ศักย์ไฟฟ้าของมัลติโพลแสดงได้โดย

$$\varphi = \frac{B_{n,m}}{r_C^{n+1}} \bar{Y}_{n,m}(\theta_C, \phi_C). \qquad (2.31)$$

กำหนดให้ A เป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดใหม่ และพิกัด (r_A, θ_A, ϕ_A) นิยามเหมือนกับ (r_C, θ_C, ϕ_C). ศักย์ไฟฟ้าสามารถกระจายซ้ำไปยังรอบจุด A ได้เป็น [2]

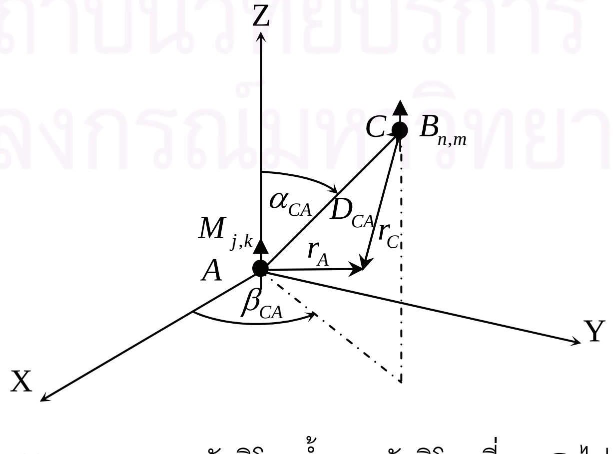
$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} M_{j,k} r_A^j \bar{Y}_{j,k}(\theta_A, \phi_A) \qquad (2.32)$$

โดยที่ $r_A \le D_{CA}$ เมื่อ $(D_{CA}, \alpha_{CA}, \beta_{CA})$ เป็นพิกัดทรงกลมของ C เมื่อ A เป็นจุดกำเนิด ดังรูปที่ 2.10. โมเมนต์การกระจายซ้ำแสดงได้เป็น

$$M_{j,k} = (-1)^n \frac{A_{n,m,j,k}}{D_{CA}^{j+n+1}} \bar{Y}_{j+n,m-k}(\alpha_{CA}, \beta_{CA}) B_{n,m} \qquad (2.33)$$

เมื่อ $A_{n,m,j,k}$ คำนวณได้จาก

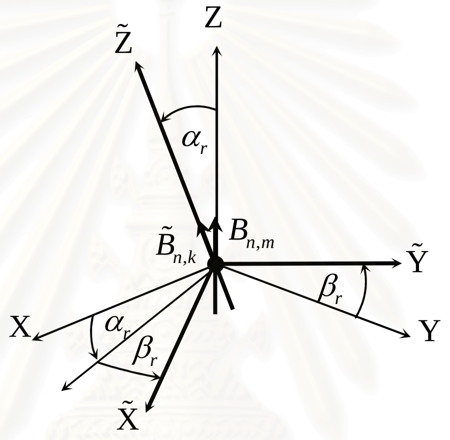
$$A_{n,m,j,k} = i^{|k-m|-|k|-|m|} \sqrt{\frac{(n+m+j-k)!(n-m+j+k)!}{(n+m)!(n-m)!(j+k)!(j-k)!}}. \qquad (2.34)$$



รูปที่ 2.10 การกระจายมัลติโพลซ้ำจากมัลติโพลที่จุด C ไปยังจุด A.

2.5.3 **การหมุนมัลติโพล** (Multipole rotation)

การหมุนมัลติโพลนำไปใช้เพื่อหมุนมัลติโพลให้มีทิศทางตามที่ต้องการสำหรับการสร้างเงาของมัลติโพล. มัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ ของระบบพิกัดใหม่เกิดจากการหมุนมัลติโพลของระบบพิกัดเดิม $B_{n,m}$ เมื่อตำแหน่งของมัลติโพลอยู่ที่เดิมด้วยการใช้ตัวดำเนินการหมุน (Rotation operator) คือ $d_{km}^{n}\left(\alpha_r\right)e^{ik\beta_r}$ [26]. มุม α_r และ β_r ที่ใช้ในตัวดำเนินการหมุนคือมุมในการหมุนระบบพิกัดเดิมในทิศ θ และ ϕ ไปยังระบบพิกัดใหม่ $\left(r,\tilde{\theta},\tilde{\phi}\right)$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.11. $d_{km}^{n}\left(\alpha_r\right)$ คือ ตัวดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับการหมุนในทิศ θ ซึ่งคำนวณได้จากสูตรเวียนเกิด (Recurrence formula) [27] ซึ่งแสดงวิธีการคำนวณไว้ในภาคผนวก ก.



รูปที่ 2.11 การหมุนมัลติโพล $B_{n,m}$ ไปเป็นมัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$.

มัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ คำนวณได้จาก

$$\tilde{B}_{n,k} = \sum_{m=-n}^{n} B_{n,m} d_{km}^{n}\left(\alpha_r\right) e^{im\beta_r} . \tag{2.35}$$

ศักย์ไฟฟ้าของระบบพิกัดใหม่แสดงได้เป็น

$$\varphi = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\tilde{B}_{n,k}}{r^{n+1}} \bar{Y}_{n,k}\left(\tilde{\theta},\tilde{\phi}\right). \tag{2.36}$$

2.6 เงาของมัลติโพลและระนาบกราวด์

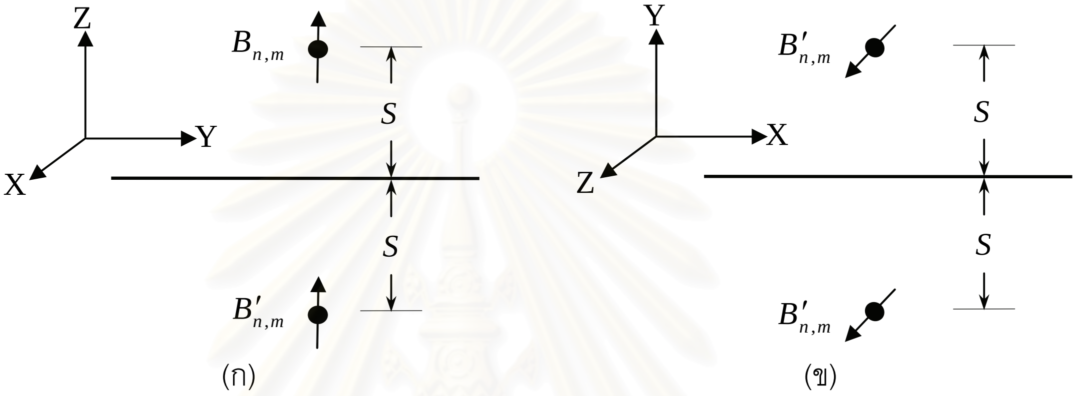
ปัญหาที่นำมาวิเคราะห์มีอิเล็กโทรดเป็นตัวป้อนแรงดันและสนามไฟฟ้า. เพื่อความถูกต้องในการคำนวณต้องคิดผลของอิเล็กโทรดร่วมด้วยโดยการเพิ่มเงามัลติโพลซึ่งทำกับอิเล็กโทรดในการคำนวณ. พิจารณามัลติโพล $B_{n,m}$ ในทิศทาง $+z$ วางอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งสูงจากระนาบกราวด์เป็นระยะ S และระนาบกราวด์ขนานกับระนาบ xy ดังรูปที่ 2.12(ก). เพื่อทำให้สภาวะแรงดันบนระนาบเป็นศูนย์ เราจะวางเงามัลติโพล $B'_{n,m}$ ซึ่งมีอันดับเท่ากันกับมัลติโพล $B_{n,m}$ และอยู่ที่

ตำแหน่งต่ำกว่าระนาบกราวด์เป็นระยะ S เท่ากัน. เงามัลติโพล $B'_{n,m}$ ในรูปที่ 2.12(ก) คำนวณได้จาก

$$B'_{n,m} = (-1)^{n+m+1} B_{n,m} . \tag{2.37}$$

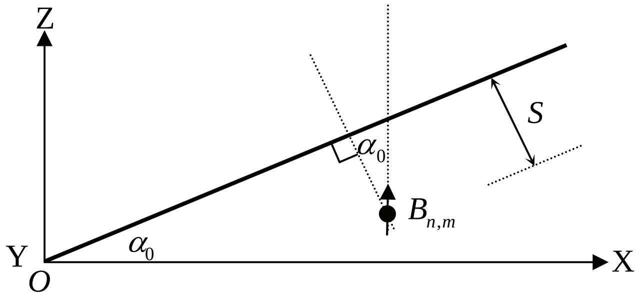
และเช่นเดียวกันเมื่อมัลติโพล $B_{n,m}$ วางอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งสูงจากระนาบกราวด์เป็นระยะ S และระนาบกราวด์ขนานกับระนาบ xz ดังรูปที่ 2.12(ข). เงามัลติโพล $B'_{n,m}$ คำนวณได้จาก

$$B'_{n,m} = (-1)(B_{n,m})^* . \tag{2.38}$$

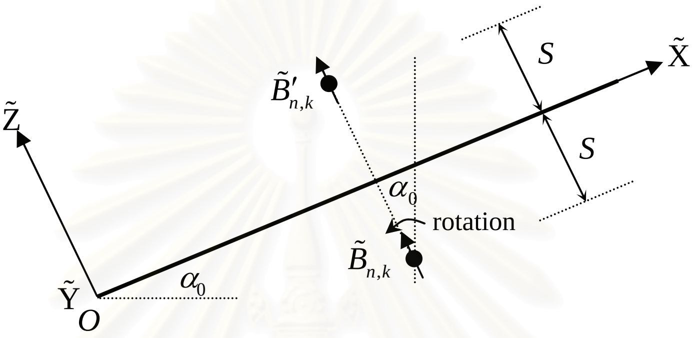


รูปที่ 2.12 เงาของมัลติโพลและระนาบกราวด์ (ก) ระนาบกราวด์ขนานกับระนาบ xy และ (ข) ระนาบกราวด์ขนานกับระนาบ xz .

การวางเงาของมัลติโพลกับระนาบเอียงหรืออิเล็กโทรดบนของกับดักอนุภาคอย่างง่ายซึ่งทำมุม α_0 แสดงดังรูปที่ 2.13. ในรูปที่ 2.13 (ก) มัลติโพล $B_{n,m}$ วางอยู่ต่ำกว่าระนาบเอียงเป็นระยะ S และอยู่ในระบบพิกัด (x, y, z). เพื่อทำให้มัลติโพล $B_{n,m}$ มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบเอียงจึงหมุนมัลติโพล $B_{n,m}$ ไปเป็นมุม α_0 เท่ากับมุมของระนาบเอียง. ผลที่ได้จากการหมุน คือ มัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ ซึ่งมีระบบพิกัดใหม่เป็น $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ ดังรูปที่ 2.13(ข). ตำแหน่งของมัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับมัลติโพล $B_{n,m}$ คือ อยู่ต่ำกว่าระนาบเอียงเป็นระยะ S เท่ากันแต่มีทิศของมัลติโพลแตกต่างกัน. เพื่อทำให้สภาวะแรงดันบนระนาบเอียงเป็นศูนย์จึงวางเงามัลติโพล $\tilde{B}'_{n,k}$ ในรูปที่ 2.13(ข) ที่ตำแหน่งสูงกว่าระนาบเอียงเป็นระยะ S เท่ากัน. เงามัลติโพล $\tilde{B}'_{n,k}$ คำนวณได้จากสมการที่ (2.37) หรือ (2.38) ขึ้นกับทิศทางของระนาบเอียงว่าขนานกับระนาบ $\tilde{x}\tilde{y}$ หรือ ระนาบ $\tilde{x}\tilde{z}$ ยกตัวอย่างเช่น ในดังรูปที่ 2.13(ข) ใช้สมการที่ (2.37) ในการคำนวณเนื่องจากระนาบเอียงขนานกับระนาบ $\tilde{x}\tilde{y}$.



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.13 มัลติโพล และเงาของมัลติโพลกับระนาบเอียงทำมุม θ_0 (ก) มัลติโพล $B_{n,m}$ ก่อนทำการหมุน และ (ข) มัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ หลังทำการหมุน และเงามัลติโพล $\tilde{B}'_{n,k}$.

2.7 การคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวน

หัวข้อนี้กล่าวถึงการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนเพื่อนำไปใช้คำนวณแรงที่กระทำบนอนุภาคในปัญหาที่นำมาวิเคราะห์.

2.7.1 สนามไฟฟ้าจากไดโพล

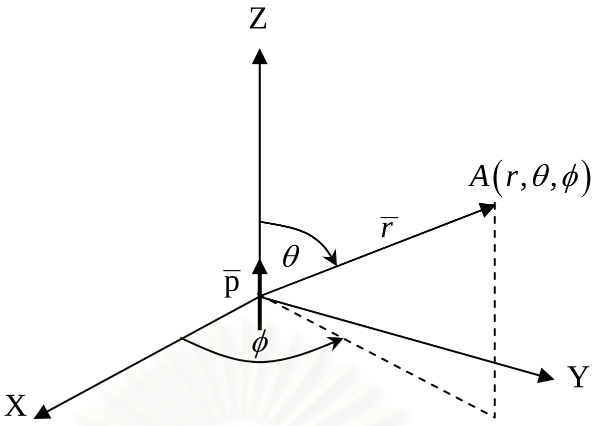
พิจารณาไดโพลวางอยู่ที่จุดกำเนิดและมีทิศทางไปตามแนวแกน +z ดังรูปที่ 2.14. สนามไฟฟ้าที่เกิดจากไดโพล $\bar{E}_{dip}$ ในระบบพิกัดทรงกลมที่ตำแหน่ง A ใดๆ สามารถคำนวณได้จาก

$$\bar{E}_{dip}\left(r,\theta,\phi\right)=\frac{|\bar{\mathrm{p}}|}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0|\bar{r}|^3}\left(2\cos\theta\bar{a}_r+\sin\theta\bar{a}_\theta\right) \qquad (2.39)$$

เมื่อ $\bar{\mathrm{p}}$ คือ ไดโพลโมเมนต์

$\bar{r}$ คือ เวกเตอร์ในทิศ r และ

$\bar{a}_r$ และ $\bar{a}_\theta$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ r และ θ ตามลำดับ.



รูปที่ 2.14 ไดโพลและตำแหน่งในการคำนวณสนามไฟฟ้า.

2.7.2 **สนามไฟฟ้าภายในและภายนอกอนุภาค**

สนามไฟฟ้าภายใน $\left(\bar{E}\right)_I$ และภายนอกอนุภาค $\left(\bar{E}\right)_E$ ในระบบพิกัดทรงกลม (r,θ,ϕ) คำนวณได้จากสมการที่ (2.8) และ (2.9) ซึ่งแสดงศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมตามลำดับดังวิธีการในภาคผนวก ข. สนามไฟฟ้า $\left(\bar{E}\right)_I$ และ $\left(\bar{E}\right)_E$ ในระบบพิกัดทรงกลมเป็นดังสมการต่อไปนี้.

2.7.2.1 **สนามไฟฟ้าในทิศ** r

$$\left(E_r\right)_I = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} L_{j,k}\left(j\right) r^{j-1}\bar{Y}_{j,k}\left(\theta,\phi\right) \tag{2.40}$$

$$\left(E_r\right)_E = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}\left[M_{j,k}\left(j\right) r^{j-1} - B_{j,k}\left(\frac{j+1}{r^{j+2}}\right)\right]\bar{Y}_{j,k}\left(\theta,\phi\right). \tag{2.41}$$

2.7.2.2 **สนามไฟฟ้าในทิศ** θ

$$\begin{aligned}\left(E_\theta\right)_I = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} L_{j,k}\left(\frac{r^{j-1}}{\sin\theta}\right)\Big\{&\left(j+1\right)\cos\theta\bar{Y}_{j,k}\left(\theta,\phi\right)\\ &-\sqrt{\left(j+1\right)^2-k^2}\,\bar{Y}_{j+1,k}\left(\theta,\phi\right)\Big\}\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\left(E_\theta\right)_E = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}\left[M_{j,k} r^{j-1} + \frac{B_{j,k}}{r^{j+2}}\right]\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\Big\{&\left(j+1\right)\cos\theta\bar{Y}_{j,k}\left(\theta,\phi\right)\\ &-\sqrt{\left(j+1\right)^2-k^2}\,\bar{Y}_{j+1,k}\left(\theta,\phi\right)\Big\}\end{aligned} . \tag{2.43}$$

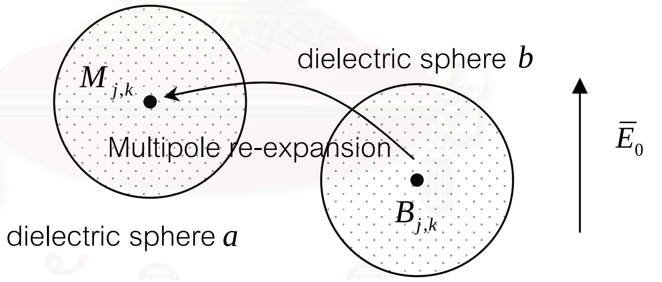
2.7.2.3 สนามไฟฟ้าในทิศ ϕ

$$\left(E_\phi\right)_I = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} L_{j,k}\left(ik\right)\left(\frac{r^{j-1}}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j,k}\left(\theta,\phi\right) \tag{2.44}$$

$$\left(E_\phi\right)_E = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}\left[M_{j,k}\left(ik\right)\left(\frac{r^{j-1}}{\sin\theta}\right) + B_{j,k}\left(ik\right)\left(\frac{1}{r^{j+2}\sin\theta}\right)\right]\bar{Y}_{j,k}\left(\theta,\phi\right). \tag{2.45}$$

2.7.3 สนามไฟฟ้าบนอนุภาคเนื่องจากการมีอยู่ของอนุภาคอื่น

เนื่องจากปัญหาที่นำมาวิเคราะห์มีจำนวนของอนุภาคมากกว่าหนึ่งลูก ดังนั้นนอกจากสนามไฟฟ้าจะเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการมีอยู่ของอนุภาคแล้ว ผลของการมีอยู่ของอนุภาคอื่นจึงทำให้สนามไฟฟ้าบนอนุภาคที่เราพิจารณาเปลี่ยนแปลงไปด้วยซึ่งแตกต่างจากการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคในหัวข้อที่ 2.7.2. พิจารณาอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม a และ b ดังรูปที่ 2.15 โพลาไรเซชันในอนุภาค a และ b เกิดเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$. อนุภาค b มีมัลติโพล $B_{j,k}$ ซึ่งเกิดจากโพลาไรเซชันวางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค. สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ ซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค a เกิดจากการกระจายมัลติโพลซ้ำของมัลติโพล $B_{j,k}$ ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค b ไปยังจุดศูนย์กลางของอนุภาค a. ในกรณีที่อนุภาคใดอนุภาคหนึ่งอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้า $\bar{E}_0$ สามารถคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคได้จากสมการในข้อที่ 2.7.2. หัวข้อนี้แสดงการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคหนึ่งซึ่งเกิดจากอีกอนุภาคหนึ่งซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้.



รูปที่ 2.15 อนุภาคฉนวน a และ b ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก และการกระจายมัลติโพลซ้ำจากอนุภาค b ไปยัง อนุภาค a.

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศักย์ไฟฟ้าที่อนุภาค a เนื่องจากผลของอนุภาค b และสนามไฟฟ้าภายนอกนั้นทำได้โดยการคำนวณมัลติโพล $B_{j,k}$ ที่เกิดขึ้นบนอนุภาค b จากสนามไฟฟ้าภายนอกจากนั้นทำการเลื่อนขนานมัลติโพลไปยังจุดศูนย์กลางของอนุภาค a. ดังนั้นศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาค a เขียนได้ดังสมการ

$$\varphi_a = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} r_a^j M_{j,k}\bar{Y}_{j,k}\left(\theta_a,\phi_a\right). \tag{2.46}$$

สนามไฟฟ้าบนอนุภาค a จากผลของอนุภาค b ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y, z) คำนวณได้โดยเริ่มจากการใช้กฎลูกโซ่ตามสมการที่ (ค.1) ถึง (ค.3) ในภาคผนวก ค เพื่อแปลงระบบพิกัดทรงกลมมาเป็นระบบพิกัดคาร์ทีเซียน. คำนวณอนุพันธ์เทียบกับ (x, y, z) และแทนอนุพันธ์ที่คำนวณได้ลงในสมการที่ (ค.1) ถึง (ค.3) ในภาคผนวก ค จะได้สนามไฟฟ้าบนอนุภาค a ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนดังนี้

$$\left(-\frac{\partial\varphi_a}{\partial x}\right) = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{k=j} M_{j,k} r^{j-1}\left\{\left(\frac{j}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) - \sqrt{(j-|k|)(j+|k|)}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j-1,k}(\theta,\phi)\right\}\cos\phi$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{k=j} M_{j,k} r^{j-1}\left\{\left(\frac{i|k|}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi)\right\}\sin\phi \qquad (2.47)$$

$$\left(-\frac{\partial\varphi_a}{\partial y}\right) = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{k=j} M_{j,k} r^{j-1}\left\{\left(\frac{j}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) - \sqrt{(j-|k|)(j+|k|)}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j-1,k}(\theta,\phi)\right\}\sin\phi$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} M_{j,k} r^{j-1}\left\{\left(\frac{i|k|}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi)\right\}\cos\phi \qquad (2.48)$$

$$\left(-\frac{\partial\varphi_a}{\partial z}\right) = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{k=j} M_{j,k} r^{j-1}\sqrt{j^2-k^2}\,\bar{Y}_{j-1,k}(\theta,\phi). \qquad (2.49)$$

เมื่อใช้เอกลักษณ์ของฮาร์มอนิกฟังก์ชันทรงกลมแบบบรรทัดฐานตามสมการที่ (ค.6) และ (ค.7) ในภาคผนวก ค แทนลงในสมการที่ (2.47) และ (2.48) จากนั้นจัดรูปสมการใหม่โดยมีการแก้ไขเพื่อให้ค่าที่ $k<0$ เป็นจริง สมการใหม่จึงเขียนได้เป็น

$$\left(-\frac{\partial\varphi_a}{\partial x}\right) = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{k=j} M_{j,k} r^{j-1}\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\delta_{kk}\sqrt{(j+|k|)(j+|k|-1)}\,\bar{Y}_{j-1,(|k|-1)\delta}(\theta,\phi) \\ +\frac{1}{2}\sqrt{(j-|k|)(j-|k|-1)}\,\bar{Y}_{j-1,(|k|+1)\delta}(\theta,\phi) \end{array}\right\} \qquad (2.50)$$

$$\left(-\frac{\partial\varphi_a}{\partial y}\right) = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{k=j} M_{j,k} r^{j-1}\left\{\begin{array}{l} -\frac{i}{2}\delta_{kk}\delta\sqrt{(j+|k|)(j+|k|-1)}\,\bar{Y}_{j-1,(|k|-1)\delta}(\theta,\phi) \\ -\frac{i}{2}\delta\sqrt{(j-|k|)(j-|k|-1)}\,\bar{Y}_{j-1,(|k|+1)\delta}(\theta,\phi) \end{array}\right\} \qquad (2.51)$$

เมื่อ $\delta = \begin{cases} 1 & k \ge 0 \\ -1 & k < 0 \end{cases}$ และ $\delta_{kk} = \begin{cases} -1 & k = 0 \\ 1 & k \ne 0 \end{cases}.$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าบนอนุภาค a เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกและผลของอนุภาค b ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนคำนวณได้โดยใช้สมการที่ (2.49) ถึง (2.51). สนามไฟฟ้าในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนบนผิวของอนุภาค a คำนวณได้โดยแทน $r=\sigma/2$ และ $j=j+1$ ลงในสมการที่ (2.49) ถึง (2.51) จากนั้นจัดรูปใหม่จะได้

$$\left(-\frac{\partial \varphi_a}{\partial x}\right)_{r=\frac{\sigma}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} M_{j+1,k}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{j}\left\{\frac{1}{2}\delta_{kk}\sqrt{\left(j+|k|+1\right)\left(j+|k|\right)}\bar{Y}_{j,(|k|-1)\delta}\left(\theta,\phi\right)\right\}$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} M_{j+1,k}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{j}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\left(j-|k|+1\right)\left(j-|k|\right)}\bar{Y}_{j,(|k|+1)\delta}\left(\theta,\phi\right)\right\} \quad (2.52)$$

$$\left(-\frac{\partial \varphi_a}{\partial y}\right)_{r=\frac{\sigma}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} M_{j+1,k}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{j}\left\{\frac{i}{2}\delta_{kk}\delta\sqrt{\left(j+|k|+1\right)\left(j+|k|\right)}\bar{Y}_{j,(|k|-1)\delta}\left(\theta,\phi\right)\right\}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} M_{j+1,k}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{j}\left\{\frac{i}{2}\delta\sqrt{\left(j-|k|+1\right)\left(j-|k|\right)}\bar{Y}_{j,(|k|+1)\delta}\left(\theta,\phi\right)\right\} \quad (2.53)$$

$$\left(-\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)_{r=\frac{\sigma}{2}} = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} M_{j+1,k}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{j}\left[\sqrt{\left(j+1\right)^{2}-k^{2}}\right]\bar{Y}_{j,k}\left(\theta,\phi\right) \quad (2.54)$$

2.8 การคำนวณแรงดีอีพีที่กระทำบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม

หัวข้อนี้กล่าวถึงวิธีการคำนวณแรงจริงที่กระทำบนอนุภาคซึ่งใช้สนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณในหัวข้อที่ 2.7 เพื่อเป็นพื้นฐานในการนำวิธีการคำนวณดังกล่าวไปใช้ในการประมาณแรงที่กระทำบนอนุภาคสำหรับนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่นำมาศึกษาต่อไป.

การคำนวณแรงที่กระทำบนอนุภาคทำได้ 2 วิธี คือ วิธีแรกคำนวณแรงจากความหนาแน่นประจุบนอนุภาคและการกระจายของศักย์ไฟฟ้ารอบอนุภาค และวิธีที่สองคำนวณแรงจากความเค้นที่กระทำบนอนุภาค. การคำนวณทั้งสองวิธีมีรายละเอียดดังนี้.

2.8.1 การคำนวณแรงดีอีพีจากประจุบนอนุภาคและการกระจายของศักย์ไฟฟ้ารอบอนุภาค

แรงที่กระทำบนอนุภาคคำนวณได้จากการอินทิเกรตพื้นผิวโดยรอบอนุภาค a ดังนี้

$$\bar{F}_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_E\left(q_a\right)\left[-\nabla\left(\varphi_a\right)_{ext}\right]\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2}\sin\theta d\theta d\phi \quad (2.55)$$

เมื่อ q_a คือ ประจุประสิทธิผลบนพื้นผิวของอนุภาค a. ประจุนี้เทียบเท่าประจุจริงที่ก่อให้เกิดศักย์ไฟฟ้าเหนี่ยวนำเช่นเดียวกับที่เกิดจากอนุภาค a และ

$\left(\varphi_a\right)_{ext}$ คือ ศักย์ไฟฟ้าบนอนุภาค a เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกและการรบกวนของอนุภาคอื่นทั้งหมด.

พิจารณาอนุภาครูปทรงกลม a ซึ่งเป็นฉนวนจึงไม่มีประจุอิสระแต่จะมีประจุผูกพัน ดังนั้นประจุบนพื้นผิวของอนุภาค a คำนวณได้จาก

$$q_a = -\left[\varepsilon_0\left(\varepsilon_E-1\right)\left(E_r\right)_E - \varepsilon_0\left(\varepsilon_N-1\right)\left(E_r\right)_I\right]. \quad (2.56)$$

เมื่อแทนค่า $\left(E_r\right)_I$ และ $\left(E_r\right)_E$ จากสมการที่ (2.40) และ (2.41) ลงในสมการที่ (2.56) จะได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$q_a = -\left\{ \varepsilon_0 \left(\varepsilon_E - 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} \left[M_{j,k}\left(j \right) r^{j-1} - B_{j,k} \left(\frac{j+1}{r^{j+2}} \right) \right] \overline{Y}_{j,k}\left(\theta, \phi \right) \right.$$
$$\left. - \varepsilon_0 \left(\varepsilon_N - 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} L_{j,k}\left(j \right) r^{j-1} \overline{Y}_{j,k}\left(\theta, \phi \right) \right\}. \tag{2.57}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวของอนุภาคคือ $\varphi_I = \varphi_E$ และ $\varepsilon_N \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = \varepsilon_E \frac{\partial \varphi_E}{\partial r}$ รวมทั้งความสัมพันธ์ระหว่าง $M_{j,k}$ กับ $B_{j,k}$ และ $L_{j,k}$ ในสมการที่ (2.10) และ (2.11) ตามลำดับนั้น เมื่อนำมาแทนลงในสมการที่ (2.57) พร้อมทั้งจัดรูปสมการใหม่จะได้ q_a เป็น

$$q_a = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} \left[\frac{\left(\varepsilon_N - \varepsilon_E \right) \varepsilon_0 \left(j \right) \left(2j+1 \right)}{\left(\varepsilon_E + \varepsilon_N \right) j + \varepsilon_E} \right] M_{j,k}\left(j \right) \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{j-1} \overline{Y}_{j,k}\left(\theta, \phi \right). \tag{2.58}$$

เมื่อทำให้อยู่ในรูปของมัลติโพล $B_{j,k}$ ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค a จะได้

$$q_a = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} \left[\frac{\varepsilon_0 \left(2j+1 \right)}{\left(\sigma / 2 \right)^{j+2}} \right] B_{j,k} \overline{Y}_{j,k}\left(\theta, \phi \right). \tag{2.59}$$

จาก $-\nabla\left(\varphi_a \right)_{ext}$ บนผิวของอนุภาค a ตามสมการที่ (2.52) ถึง (2.54) เมื่อแทนลงในสมการที่ (2.55) และทำการอินทิเกรตจะได้แรงที่กระทำบนอนุภาค a ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนดังนี้

$$\frac{F_{a,x}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_E} = \sum_{j=0}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left[M_{j+1,1} \right]\left(B_{j,0} \right) \beta\left(j+1 \right) - \sum_{j=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left[B_{j,1} \right]\left(M_{j+1,0} \right) \beta\left(j \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left[\left(B_{j,1} \right)\left(M_{j+1,-2} \right) \right] \beta\left(j+2 \right)$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{j} 2\mathrm{Re}\left[\left(B_{j,k} \right)\left(M_{j+1,-(k+1)} - M_{j+1,-(k-1)} \right) \right] \beta\left(j+k+1 \right) \tag{2.60}$$

$$\frac{F_{a,y}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_E} = -\sum_{j=0}^{\infty} 2\,\mathrm{Im}\left[M_{j+1,1} \right]\left(B_{j,0} \right) \beta\left(j+1 \right) + \sum_{j=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Im}\left[B_{j,1} \right]\left(M_{j+1,0} \right) \beta\left(j \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Im}\left[\left(B_{j,1} \right)\left(M_{j+1,-2} \right) \right] \beta\left(j+2 \right)$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{j} 2\,\mathrm{Im}\left[\left(B_{j,k} \right)\left(M_{j+1,-(k+1)} + M_{j+1,-(k-1)} \right) \right] \beta\left(j+k+1 \right) \tag{2.61}$$

$$\frac{F_{a,z}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E} = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(B_{j,0} \right)\left(M_{j+1,0} \right)\left(j+1 \right)$$
$$- \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} 2\,\mathrm{Re}\left[\left(B_{j,k} \right)\left(M_{j+1,-k} \right) \right] \sqrt{\left(j+1 \right)^2 - k^2} \tag{2.62}$$

เมื่อ $\beta\left(j \right) = \sqrt{j\left(j+1 \right)}$ และ

$\mathrm{Re}[\ ]$ และ $\mathrm{Im}[\ ]$ คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนตามลำดับ.

2.8.2 การคำนวณแรงดีอีพีจากความเค้นที่กระทำต่ออนุภาค

แรงที่กระทำบนอนุภาคที่เกิดจากสนามไฟฟ้าสามารถคำนวณได้จากแรงที่กระทำบนพื้นที่ย่อยหนึ่งหน่วย หรือ ความเค้นได้ดังนี้

$$T_{ij} = \varepsilon_E \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) \qquad (2.63)$$

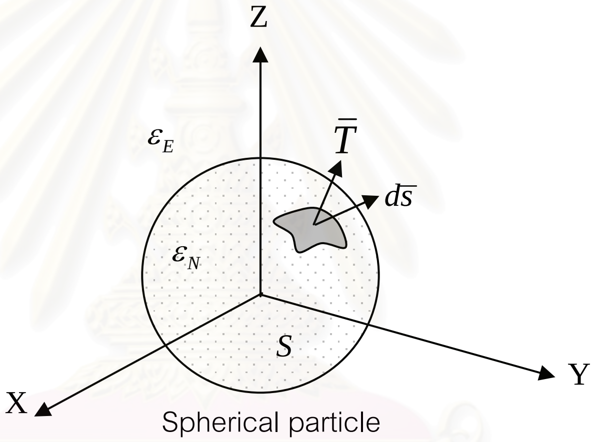
เมื่อ T_{ij} คือ เทนเซอร์ความเค้นของแมกเวลล์ (Maxwell stress tensor) [28] หรือ แรงในทิศ i ที่กระทำบนพื้นผิวย่อยที่เรียงตัวในทิศ j

i, j คือ ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y, z)

E คือ สนามไฟฟ้าบนอนุภาค และ

δ_{ij} คือ ฟังก์ชันที่มีค่าดังนี้ $\delta_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ และ $\delta_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$

ยกตัวอย่างเช่น $T_{xx} = \varepsilon_E \varepsilon_0 \frac{1}{2}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right)$ และ $T_{xy} = \varepsilon_E \varepsilon_0 \left(E_x E_y\right)$.



รูปที่ 2.16 อนุภาคทรงกลมและ $\bar{T}$ ที่กระทำต่อพื้นผิวย่อย $d\bar{s}$.

อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมมีพื้นผิว S ซึ่งแบ่งพื้นผิวออกเป็นพื้นผิวย่อย $d\bar{s}$ ดังรูปที่ 2.16. เวกเตอร์พื้นผิวย่อย $d\bar{s}$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนคือ $\left(ds_x, ds_y, ds_z\right)$. เทนเซอร์ความเค้นของแมกเวลล์ T_{ij} ในสมการที่ (2.63) นำมาเขียนใหม่ในรูปของเวกเตอร์ $\bar{T}$ ซึ่งเป็นแรงที่กระทำต่อพื้นผิวหนึ่งหน่วย ดังรูปที่ 2.16 และ $\bar{T}$ ทำผลคูณเชิงสเกลาร์กับ $d\bar{s}$ ในทิศทาง j ของระบบพิกัดคาร์ทีเซียนได้ดังนี้

$$\left(\bar{T} \bullet d\bar{s}\right)_j = \sum_{i=x,y,z} T_{ij} ds_i \qquad (2.64)$$

เมื่อ j แทน x, y หรือ z .

แรงที่กระทำบนอนุภาคในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งได้จากการอินทิเกรตแรงที่กระทำบนพื้นผิวย่อยหนึ่งหน่วยหรือความเค้นเป็นดังสมการ

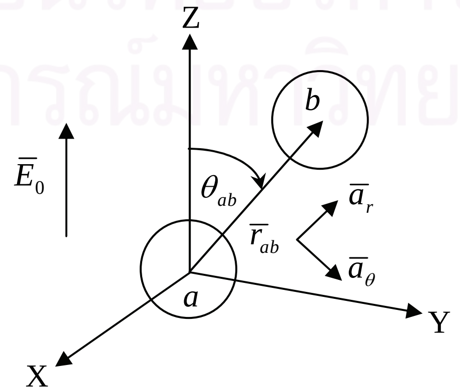
$$\overline{F} = \oint_{S} \overline{T} \bullet d\overline{s} \ . \tag{2.65}$$

2.9 การประมาณแรง

การคำนวณแรงที่กล่าวมาในหัวข้อที่ 2.8 เป็นการคำนวณแรงที่กระทำบนอนุภาคจริงที่เกิดขึ้นซึ่งสมการที่ใช้นั้นมีจำนวนอันดับสูงสุดของมัลติโพลในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงเป็นอนันต์ แต่ในทางปฏิบัติมัลติโพลอันดับสูงจะมีผลต่อแรงที่คำนวณน้อยมาก และเวลาที่ใช้ในการคำนวณแรงจะมากขึ้นตามจำนวนอันดับของมัลติโพลที่ใช้ซึ่งจะนานมากเมื่ออันดับของมัลติโพลเข้าใกล้ค่าอนันต์. ดังนั้นการประมาณแรงดีอีพีที่กระทำบนอนุภาคจึงถูกนำมาใช้เพื่อความเหมาะสมของขนาดของแรงและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ. การคำนวณแรงดีอีพีที่กระทำบนอนุภาคนั้นโดยทั่วไปใช้การประมาณแรงด้วยไดโพล หรือเรียกสั้นๆ ว่า แรงไดโพล (Dipolar force) ซึ่งง่ายและรวดเร็วแต่ให้ความถูกต้องและขนาดของแรงน้อยกว่าแรงจริงที่เกิดขึ้นมากโดยเฉพาะเมื่ออนุภาคอยู่ใกล้กัน. ส่วนการประมาณแรงอีกวิธีหนึ่งใช้การประมาณแรงด้วยมัลติโพล หรือ แรงมัลติโพล (Multipolar force) ซึ่งรวมเอาการกระทำระหว่างกันของมัลติโพลทั้งหมดในการคำนวณแรงที่เกิดขึ้นบนอนุภาคและให้ความถูกต้องใกล้เคียงกับแรงจริงที่เกิดขึ้นมากกว่าแรงไดโพล. การประมาณแรงทั้งสองวิธีเป็นดังนี้.

2.9.1 แรงไดโพล

การประมาณแรงดีอีพีเมื่อคำนวณจากผลของไดโพลสามารถคำนวณได้ตาม [14-16] ดังนี้. พิจารณาแรงกระทำระหว่างอนุภาค a ที่ตำแหน่ง $\overline{r}_a$ และอนุภาค b ที่ตำแหน่ง $\overline{r}_b$ ดังแสดงในรูปที่ 2.17.



รูปที่ 2.17 ระบบพิกัดในการคำนวณแรงระหว่างคู่อนุภาค a และ b .

การประมาณแรงดีอีพีด้วยแรงไดโพลเป็นดังสมการ

$$\bar{F}_{ab}^{dep} = \left(\frac{3|\bar{\mathrm{p}}|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E |\bar{r}_{ab}|^4} \right) \left[\left(1 - 3\cos^2\theta_{ab}\right)\bar{a}_r - \sin\left(2\theta_{ab}\right)\bar{a}_\theta \right] \tag{2.66}$$

เมื่อ $\bar{\mathrm{p}}$ คือ ไดโพลโมเมนต์เหนี่ยวนำ (Induced dipole moment)

$\bar{r}_{ab}$ คือ เวกเตอร์ระยะทางระหว่าง อนุภาค a และ b คำนวณได้จาก $\bar{r}_{ab} = \bar{r}_a - \bar{r}_b$

θ_{ab} คือ มุมระหว่าง $\bar{r}_{ab}$ และ แกน z

$\bar{a}_r$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ r คำนวณได้จาก $\bar{a}_r = \bar{r}_{ab} / |\bar{r}_{ab}|$ และ

$\bar{a}_\theta$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ θ คำนวณได้จาก

$$\bar{a}_\theta = \bar{a}_r \times \left(\bar{a}_r \times \bar{a}_z\right) / \left|\bar{a}_r \times \left(\bar{a}_r \times \bar{a}_z\right)\right|.$$

ไดโพลโมเมนต์เหนี่ยวนำคำนวณได้จาก

$$\bar{\mathrm{p}} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \left[\frac{\left(\varepsilon_N - \varepsilon_E\right)}{\left(\varepsilon_N + 2\varepsilon_E\right)} \right] \bar{E}_0 \tag{2.67}$$

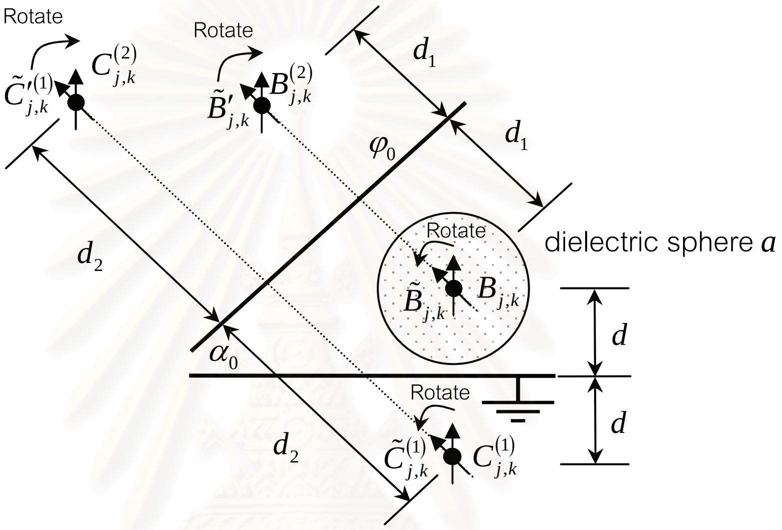
เมื่อ $\bar{E}_0$ คือ สนามไฟฟ้าภายนอก.

2.9.2 แรงมัลติโพล

การประมาณแรงดีอีพีด้วยแรงไดโพลไม่ได้คำนึงถึงผลของมัลติโพลที่อันดับสูงกว่าจึงทำให้ขนาดของแรงต่ำกว่าที่ควรจะเป็น. แรงมัลติโพลประมาณค่าแรงดีอีพีได้ดีกว่าแรงไดโพลซึ่งสามารถคำนวณได้ 2 วิธี คือ วิธีแรกคำนวณแรงได้จากประจุบนอนุภาคและการกระจายของศักย์ไฟฟ้ารอบอนุภาค และ วิธีที่สองคำนวณแรงได้จากความเค้นที่กระทำต่ออนุภาค. การประมาณแรงด้วยวิธีแรกคำนวณได้ตามสมการที่ (2.60) ถึง (2.62) ซึ่งกำหนดจำนวนอันดับสูงสุดของมัลติโพลที่ใช้ N_{mp} ตามความเหมาะสมของขนาดของแรงและเวลาที่ใช้ในการคำนวณดังจะได้กล่าวในบทต่อไป. สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ ในสมการที่ (2.60) ถึง (2.62) ได้มาจากการคำนวณด้วยวิธีทำซ้ำ การวางเงามัลติโพล และการกระจายมัลติโพลซ้ำ เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมเป็นจริง โดยที่ $M_{j,k}$ เป็นผลของสนามไฟฟ้าภายนอกและอนุภาคอื่น ส่วน $B_{j,k}$ เกิดจากการมีอยู่ของอนุภาค. การประมาณแรงด้วยวิธีที่สองคำนวณได้จากความเค้นที่กระทำต่ออนุภาคตามสมการที่ (2.65). เวกเตอร์ $\bar{T}$ ในสมการที่ (2.65) คำนวณได้จากเทนเซอร์ความเค้นของแมกเวลล์ T_{ij} ตามสมการที่ (2.63). สนามไฟฟ้าบนอนุภาคที่ใช้หาค่า T_{ij} คำนวณได้จากสมการที่ (2.40) ถึง (2.45) โดยใช้อันดับสูงสุดของมัลติโพล N_{mp} ในการคำนวณ. สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ ในการคำนวณสนามไฟฟ้าตามสมการที่ (2.40) ถึง (2.45) นั้นหาได้จากการคำนวณด้วยวิธีทำซ้ำ การวางเงามัลติโพล และการกระจายมัลติโพลซ้ำ เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาค

ฉนวนรูปทรงกลมเป็นจริงเช่นเดียวกับวิธีแรก. เมื่อได้เวกเตอร์ $\bar{T}$ จากค่าสนามไฟฟ้าบนอนุภาคแล้ว แรงที่กระทำบนอนุภาคคำนวณได้จากการอินทิเกรตสมการที่ (2.65) ด้วยวิธีการอินทิเกรตเชิงเลข.

2.10 ตัวอย่างการคำนวณศักย์ไฟฟ้าเมื่ออนุภาคฉนวนรูปทรงกลมอยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทรดเอียงด้วยการวางเงามัลติโพล



รูปที่ 2.18 เงาของมัลติโพล $B_{j,k}$ ของอนุภาค a ซึ่งอยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทรดเอียง.

อนุภาค a อยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทรดเอียงซึ่งมีศักย์ไฟฟ้าของอิเล็กโทรดบน และอิเล็กโทรดล่างเท่ากับ φ_0 และ 0 ตามลำดับ. อิเล็กโทรดทั้งสองทำมุม α_0 และ อนุภาค a มีจุดศูนย์กลางของอนุภาคสูงกว่าอิเล็กโทรดล่างเป็นระยะ d . มัลติโพล $B_{j,k}$ อยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค a ดังรูปที่ 2.18. วิธีการคำนวณศักย์ไฟฟ้าของอนุภาค a เป็นดังนี้.

1. ศักย์ไฟฟ้าภายนอกอนุภาค a เนื่องจากสนามไฟฟ้า $\bar{E}_0$ ซึ่งเกิดจากผลของระนาบอิเล็กโทรดเอียง เขียนได้เป็น

$$(\varphi_a)_M = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{k=j} M_{j,k} r_a^j \bar{Y}_{j,k}(\theta_a, \phi_a) \tag{2.68}$$

เมื่อ $M_{j,k}$ คำนวณได้จากสมการที่ (2.13) ถึง (2.15) และ

(r_a, θ_a, ϕ_a) คือ พิกัดทรงกลมที่มีจุดกำเนิดที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค a .

2. ศักย์ไฟฟ้าภายนอกอนุภาค a เขียนได้เป็น

$$\left(\varphi_a\right)_E^{(0)} = \left(\varphi_a\right)_M + \left(\varphi_a\right)_B \tag{2.69}$$

เมื่อ $\left(\varphi_a\right)_B = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} \frac{B_{j,k}}{r_a^{j+1}} \bar{Y}_{j,k}\left(\theta_a, \phi_a\right)$.

ดังนั้นศักย์ไฟฟ้า $\left(\varphi_a\right)_E^{(0)}$ เป็นไปตามสมการปัวซองแต่เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดทั้งสองยัง ไม่เป็นจริงจึงต้องวางเงามัลติโพลเพื่อทำให้เงื่อนไขเป็นจริง.

3. เพื่อทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดล่างเป็นจริง วางเงามัลติโพล $C_{j,k}^{(1)}$ ไว้ที่ตำแหน่งต่ำกว่าอิเล็กโทรดล่างเป็นระยะ d เท่ากันกับระยะจากมัลติโพล $B_{j,k}$ ดังรูปที่ 2.18. ศักย์ไฟฟ้าในสมการที่ (2.69) จะกลายเป็น

$$\left(\varphi_a\right)_E^{(1)} = \left(\varphi_a\right)_E^{(0)} + \frac{C_{j,k}^{(1)}}{r_{C1}^{j+1}} \bar{Y}_{j,k}\left(\theta_{C1}, \phi_{C1}\right) \tag{2.70}$$

เมื่อ $C_{j,k}^{(1)} = \left(-1\right)^{j+k+1} B_{j,k}$ และ

$\left(r_{C1}, \theta_{C1}, \phi_{C1}\right)$ คือ พิกัดทรงกลมที่มีจุดกำเนิดที่ตำแหน่งของ $C_{j,k}^{(1)}$.

4. เพื่อทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดบนเป็นจริง วางเงามัลติโพล $\tilde{B}'_{j,k}$ และ $\tilde{C}'^{(1)}_{j,k}$ ไว้สูงจากอิเล็กโทรดบนที่ระยะ d_1 และ d_2 ตามลำดับซึ่งเป็นระยะเดียวกันกับที่มัลติโพล $B_{j,k}$ และ $C_{j,k}^{(1)}$ วางอยู่ต่ำกว่าอิเล็กโทรดบน ดังรูปที่ 2.18. เงามัลติโพลทั้งสองคำนวณได้จากมัลติโพล $\tilde{B}_{j,k}$ และ $\tilde{C}_{j,k}^{(1)}$ ซึ่งเกิดจากการหมุนมัลติโพล $B_{j,k}$ และ $C_{j,k}^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (2.35) และสมการในภาคผนวก ก. มุมที่ใช้ในการหมุนมัลติโพลคือ α_0 เพื่อทำให้ทิศทางของมัลติโพลตั้งฉากกับระนาบอิเล็กโทรดบน. เงามัลติโพล $\tilde{B}'_{j,k}$ และ $\tilde{C}'^{(1)}_{j,k}$ คำนวณได้จาก

$$\tilde{B}'_{j,k} = \left(-1\right)^{j+k+1} \tilde{B}_{j,k} \tag{2.71}$$

$$\tilde{C}'^{(1)}_{j,k} = \left(-1\right)^{j+k+1} \tilde{C}^{(1)}_{j,k}. \tag{2.72}$$

5. เพื่อให้ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากเงามัลติโพล $\tilde{B}'_{j,k}$ และ $\tilde{C}'^{(1)}_{j,k}$ อยู่ในระบบพิกัดเดียวกันกับศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากมัลติโพล $B_{j,k}$ และ $C_{j,k}^{(1)}$ จึงหมุนเงามัลติโพล $\tilde{B}'_{j,k}$ และ $\tilde{C}'^{(1)}_{j,k}$ กลับเพื่อให้เงามัลติโพลทั้งสองมีทิศทางและระบบพิกัดเดียวกับมัลติโพล $B_{j,k}$ และ $C_{j,k}^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (2.35). มุมที่ใช้ในการหมุนมัลติโพลกลับคือ $-\alpha_0$. หลังจากหมุนเงามัลติโพลทั้งสองกลับแล้วจะได้เงามัลติโพลใหม่เป็น $B_{j,k}^{(2)}$ และ $C_{j,k}^{(2)}$ ตามลำดับ. ศักย์ไฟฟ้าภายนอกอนุภาค a จึงกลายเป็น

$$\left(\varphi_a\right)_E^{(2)} = \left(\varphi_a\right)_E^{(1)} + \frac{B_{j,k}^{(2)}}{r_{B2}^{j+1}} \bar{Y}_{j,k}\left(\theta_{B2}, \phi_{B2}\right) + \frac{C_{j,k}^{(2)}}{r_{C2}^{j+1}} \bar{Y}_{j,k}\left(\theta_{C2}, \phi_{C2}\right) \tag{2.73}$$

เมื่อ $\left(r_{B2}, \theta_{B2}, \phi_{B2}\right)$ และ $\left(r_{C2}, \theta_{C2}, \phi_{C2}\right)$ นิยามเช่นเดียวกับ $\left(r_{C1}, \theta_{C1}, \phi_{C1}\right)$.

การวาง $B_{j,k}^{(2)}$ และ $C_{j,k}^{(2)}$ จะทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าที่อิเล็กโทรดล่างไม่เป็นจริงอีก.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6. เช่นเดียวกันกับขั้นตอนที่ 3 ถึง 5 เราต้องทำการวางเงามัลติโพล $B_{j,k}^{(i)}$ และ $C_{j,k}^{(i)}$ เพื่อทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดทั้งสองเป็นจริง ตามลำดับ. ยิ่งจำนวนครั้งในการวางเงามัลติโพลมากขึ้น ระยะห่างระหว่างเงามัลติโพลกับอิเล็กโทรดทั้งสองจะยิ่งมากขึ้นตาม. ดังนั้นเราสามารถหยุดการวางเงามัลติโพลได้เมื่อผลที่เกิดจากการวางเงามัลติโพลที่มีต่อศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดทั้งสองนั้นมีน้อยมาก.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

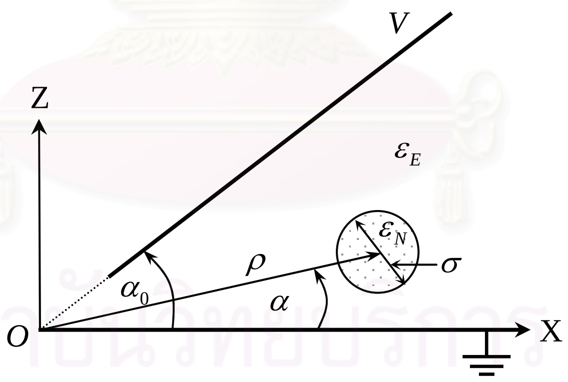
บทที่ 3

การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำกับอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมในกับดักอนุภาคอย่างง่าย

รูปแบบปัญหานี้มีอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมอยู่ภายในคู่ระนาบอิเล็กโทรดเอียง. อิเล็กโทรดล่างขนานกับแกน x และอิเล็กโทรดบนทำมุมเอียงกับอิเล็กโทรดล่างเพื่อทำให้เกิดสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอเหมือนกับดักอนุภาคจริงที่ใช้อยู่ในระบบไฟฟ้าที่ฉนวนด้วยก๊าซ. หัวข้อนี้วิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นบนอนุภาค. การวิเคราะห์แรงบนอนุภาคใช้การคำนวณ 3 วิธี คือ วิธีประมาณด้วยไดโพล (dp) วิธีประมาณด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก (dps) และ วิธีคำนวณด้วยมัลติโพลและเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดทุกชุด (mps).

3.1 การจัดวาง และข้อมูลทางกายภาพที่ใช้ในการคำนวณ

การคำนวณแรงที่กระทำบนอนุภาคในกับดักอนุภาคใช้การจัดวางตามรูปที่ 3.1. อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมมีเส้นผ่าศูนย์กลาง σ และ สภาพยอมสัมพัทธ์ ε_N อยู่ในก๊าซที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_E . คู่ระนาบอิเล็กโทรดเอียงมีความต่างศักย์ V และทำมุม α_0 .



รูปที่ 3.1 การจัดวางตำแหน่งของอนุภาคในการคำนวณ.

ตัวแปร (ρ,α) ที่ใช้ในการบอกตำแหน่งของอนุภาคในระบบพิกัดทรงกระบอกบนระนาบ (x,z) ซึ่งมีจุดกำเนิด O อยู่ที่จุดตัดเสมือนของคู่ระนาบอิเล็กโทรดเอียงมีนิยามดังนี้

α คือ มุมที่จุดศูนย์กลางของอนุภาคทำกับอิเล็กโทรดล่าง

ρ คือ ระยะทางจากจุด O ถึงจุดศูนย์กลางของอนุภาค

$\rho_{\min}$ คือ ระยะ ρ สั้นที่สุดที่ใช้ในการคำนวณซึ่งอนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดบนและล่าง

$$\rho_{\min} = \left(\frac{\sigma/2}{\sin(\alpha_0/2)} \right) \tag{3.1}$$

$\alpha_{\min}$ คือ มุม α เมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง. $\alpha_{\min}$ คำนวณได้จาก

$$\alpha_{\min} = \arcsin\left(\frac{\sigma/2}{\rho} \right) \tag{3.2}$$

$\alpha_{\max}$ คือ มุม α เมื่ออนุภาคอยู่กึ่งกลางระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง โดยที่

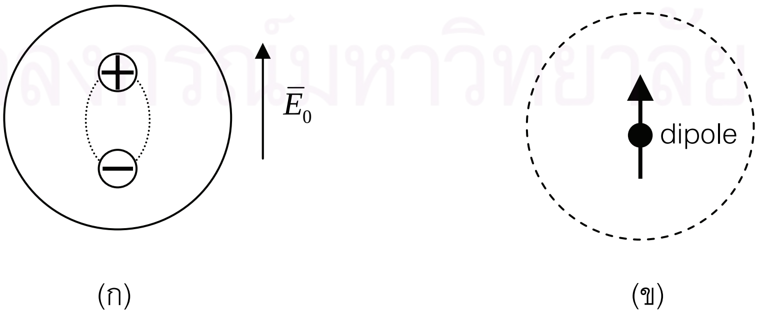
$$\alpha_{\max} = \alpha_0/2\,. \tag{3.3}$$

<u>ค่าที่ใช้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐาน</u>

การทำให้เป็นบรรทัดฐานทำให้เกิดความยืดหยุ่นในการนำผลการคำนวณไปใช้งาน. นอกจากนั้น ยังทำให้การเปรียบเทียบผลการคำนวณมีความชัดเจนเพราะลดผลซึ่งเกิดจากตัวแปรอื่นๆ ที่ไม่เกี่ยวข้อง. ค่าที่ใช้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐานของระยะ, สนามไฟฟ้า และ แรง มีขนาดเป็น σ, (V/σ) และ $(1/8)\varepsilon_0 V^2$ ตามลำดับ เมื่อ ε_0 คือ สภาพยอมของสุญญากาศ และเครื่องหมาย * แทนตัวแปรที่ทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว. แรงที่ใช้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐานคำนวณจาก $(1/2)\varepsilon_0 A E^2$ ซึ่งเป็นแรงภายใต้สนามไฟฟ้า $E = V/\sigma$ ที่กระทำบนพื้นที่ A ของอิเล็กโทรดขนาด $(\sigma/2)^2$ เมื่อไม่มีอนุภาค.

3.2 การประมาณแรงที่กระทำบนอนุภาคด้วยไดโพล (dp)

พิจารณาอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก $\bar{E}_0$. อนุภาคฉนวนภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าภายนอกจะเกิดโพลาไรเซชันซึ่งประจุบวกและลบในโมเลกุลของฉนวนจะแยกตัวออกห่างกันเล็กน้อย ดังรูปที่ 3.2(ก) และทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าภายในอนุภาคและรอบนอกอนุภาค. วิธีการประมาณนี้แทนการวางอนุภาคฉนวนที่เกิดโพลาไรเซชันด้วยไดโพลซึ่งให้สนามไฟฟ้าเหมือนกับการวางอนุภาคฉนวน ดังรูปที่ 3.2(ข).



รูปที่ 3.2 ไดโพลแทนผลของอนุภาคฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$
(ก) โพลาไรเซชันของอนุภาคฉนวน และ (ข) ไดโพลแทนการเกิดโพลาไรเซชัน.

จากผลเฉลยของสมการลาปลาซ ศักย์ไฟฟ้าภายนอกอนุภาคคำนวณได้จาก

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \gamma \left|\bar{E}_0\right| \frac{\cos\theta}{r^2} \tag{3.4}$$

เมื่อ φ_0 คือ ศักย์ไฟฟ้า ณ จุดศูนย์กลางของอนุภาค

(r,θ,ϕ) คือ พิกัดทรงกลมซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค และ

$\gamma = \frac{(\varepsilon_N - \varepsilon_E)}{(\varepsilon_N + 2\varepsilon_E)}$.

พจน์แรกทางด้านขวามือของสมการที่ (3.4) คือศักย์ไฟฟ้าจากสนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$ ส่วนพจน์ที่สองคือศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากการมีอยู่ของอนุภาคฉนวน. เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ระหว่างสมการศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากไดโพลกับสมการที่ (3.4) เราได้ไดโพล

$$\bar{\mathrm{p}} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \bar{E}_0 \tag{3.5}$$

แรงที่กระทำบนอนุภาคจากการประมาณด้วยไดโพลคำนวณได้ตามสมการที่ (2.5) ในบทที่ 2 ดังนี้

$\bar{F} = (\bar{\mathrm{p}} \bullet \nabla)\bar{E}_0$.

แทนสมการที่ (3.5) ลงในสมการที่ (2.5) จะได้แรงที่กระทำบนอนุภาคที่ประมาณด้วยไดโพลเป็น

$$\bar{F}_{dp} = \left[4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \bar{E}_0 \bullet \nabla\right]\bar{E}_0 . \tag{3.6}$$

จากเอกลักษณ์ของเวกเตอร์

$$\nabla(\bar{A} \bullet \bar{B}) = (\bar{A} \bullet \nabla)\bar{B} + (\bar{B} \bullet \nabla)\bar{A} + \bar{A} \times (\nabla \times \bar{B}) + \bar{B} \times (\nabla \times \bar{A}) \tag{3.7}$$

แรงในสมการที่ (3.6) เขียนได้เป็น

$$\bar{F}_{dp} = \frac{1}{4}\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma\sigma^3 \nabla\left|\bar{E}_0\right|^2 . \tag{3.8}$$

สำหรับอิเล็กโทรดระนาบเอียงดังรูปที่ 3.1 สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ $\bar{E}_0$ เมื่อไม่มีอนุภาคอยู่ภายในกับดักอนุภาคคือ

$$\bar{E}_0 = \bar{E}_\alpha = \frac{V}{\rho\alpha_0}\bar{a}_\alpha \tag{3.9}$$

เมื่อ $\bar{a}_\alpha$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ α และมุม α_0 มีหน่วยเป็น เรเดียน. ดังนั้น $\nabla\left|\bar{E}_0\right|^2$ ในระบบพิกัด (ρ,α) ดังรูปที่ 3.1 คำนวณได้จาก

$$\nabla\left|\bar{E}_0\right|^2 = \frac{\partial\left|\bar{E}_0\right|^2}{\partial\rho}\bar{a}_\rho = \frac{-2V^2}{\rho^3\alpha_0^2}\bar{a}_\rho \tag{3.10}$$

จะได้แรงเป็น

$$\bar{F}_{dp} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma\sigma^3\left|\bar{E}_0\right|^2}{\rho}\right)\bar{a}_\rho \tag{3.11}$$

จากสมการของแรงที่กระทำบนอนุภาคเมื่อประมาณด้วยไดโพล ลักษณะของแรงเป็นดังนี้

1. แรงแปรผันตรงกับกำลังสองของแรงดัน และแปรผกผันกับมุมของกับดักอนุภาคยกกำลังสอง. นอกจากนี้ แรงยังแปรผันตรงกับกำลังสามของขนาดของอนุภาค และ แปรผันตรงกับความแตกต่างของสภาพยอมสัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคและฉนวนรอบอนุภาค. ความแตกต่างของสภาพยอมสัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคกับฉนวนรอบอนุภาคมีผลต่อทิศทางของแรงดังนี้

   $\varepsilon_N > \varepsilon_E$ แรงกระทำบนอนุภาคดึงอนุภาคเข้าสู่ด้านในของกับดักอนุภาค

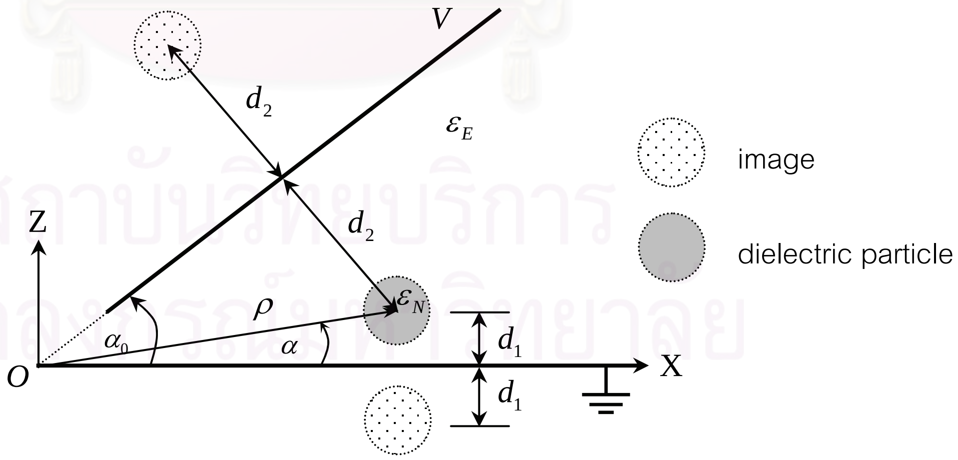
   $\varepsilon_N < \varepsilon_E$ แรงกระทำบนอนุภาคผลักอนุภาคออกจากกับดักอนุภาค และ

   $\varepsilon_N = \varepsilon_E$ ไม่มีแรงกระทำบนอนุภาค.

2. แรงแปรผกผันกับระยะห่างของอนุภาคจากจุดตัดเสมือนของอิเล็กโทรด กล่าวคือ เมื่อระยะห่างน้อยแรงที่กระทำบนอนุภาคมีมาก.

3.3 **การประมาณโดยใช้ไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก** (dps)

วิธีประมาณแบบ dp ละเลยผลของอิเล็กโทรดซึ่งมีผลต่อสนามไฟฟ้าภายนอก เราสามารถปรับปรุงการประมาณแรงด้วยไดโพลโดยรวมผลของเงาที่เกิดจากอิเล็กโทรดชุดแรกซึ่งทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดบนและล่างมีความถูกต้องมากขึ้นจากเดิม. เงาของอนุภาคที่ทำกับอิเล็กโทรดล่างและบนวางห่างจากอิเล็กโทรดเป็นระยะ d_1 และ d_2 เท่ากับระยะที่อนุภาคห่างจากอิเล็กโทรดล่างและบน ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.3.



รูปที่ 3.3 ตำแหน่งเงาของอิเล็กโทรดชุดแรกที่ใช้ในการคำนวณ.

สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}, B_{j,k}$ และ $L_{j,k}$ ในสมการสนามไฟฟ้าบนอนุภาคที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 วิธีการประมาณนี้ใช้อันดับ $j=1$ ในการคำนวณ และเนื่องจากสนามไฟฟ้าไม่สมมาตรรอบ

อนุภาคทำให้สัมประสิทธิ์มีพจน์ที่ $k \neq 0$. สัมประสิทธิ์ $M_{1,k}^{(i)}$ $B_{1,k}^{(i)}$ และ $L_{1,k}^{(i)}$ คำนวณด้วยวิธีการทำซ้ำเมื่อ (i) แทนลำดับที่ในการทำซ้ำ. เรานำสัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธีทำซ้ำไปใช้ในการคำนวณแรงบนอนุภาคต่อไป. ขั้นตอนการคำนวณเป็นดังต่อไปนี้.

1) คำนวณสัมประสิทธิ์ $M_{1,k}^{(0)}$ ที่เกิดจากศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากคู่ระนาบอิเล็กโทรดเอียง. พิจารณาตำแหน่งบนผิวของอนุภาคในระบบคาร์ทีเซียน (x, y, z) ศักย์ไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคคำนวณได้จาก

$$\varphi = V\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) \tag{3.12}$$

เมื่อ $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

แทนสมการที่ (3.12) ลงในสมการที่ (2.17) ถึง (2.19) จากนั้นอินทิเกรตสมการเพื่อคำนวณสัมประสิทธิ์ $U_{1,k}$ และ $W_{1,k}$. แทนค่า $U_{1,k}$ และ $W_{1,k}$ ลงในสมการที่ (2.13) ถึง (2.15) จะได้สัมประสิทธิ์ $M_{1,k}^{(0)}$.

2) คำนวณสัมประสิทธิ์ $B_{1,k}^{(0)}$ และ $L_{1,k}^{(0)}$ จาก $M_{1,k}^{(0)}$ ด้วยสมการที่ (2.10) และ (2.11) โดยที่ $B_{1,k}^{(0)}$ คือ ไดโพลที่เกิดจากการมีอยู่ของอนุภาค.

3) คำนวณตำแหน่งของเงาไดโพลชุดแรกของ $B_{1,k}^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่าง ดังรูปที่ 3.4 โดยใช้วิธีการในภาคผนวก ง.

4) คำนวณเงาไดโพล $\left[B_{1,k}'^{(0)}\right]_1$ เนื่องจากอิเล็กโทรดล่างจากไดโพล $B_{1,k}^{(0)}$ ด้วยสมการที่ (2.37) ดังรูปที่ 3.4.

5) คำนวณเงาไดโพล $\left[B_{1,k}'^{(0)}\right]_2$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนโดยหมุนไดโพล $B_{1,k}^{(0)}$ ก่อนเพื่อทำให้ทิศของไดโพลตั้งฉากกับระนาบอิเล็กโทรดบนด้วยสมการที่ (2.35) และใช้มุม α_0 ในการหมุน. หลังจากหมุนไดโพล $B_{1,k}^{(0)}$ แล้วจะได้ไดโพลที่ผ่านการหมุนแล้วเป็น $\tilde{B}_{1,k}^{(0)}$ ในรูปที่ 3.4. คำนวณเงาไดโพลที่ผ่านการหมุนแล้ว $\tilde{B}_{1,k}'^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนจากสมการที่ (2.37). จากนั้นหมุนเงาไดโพล $\tilde{B}_{1,k}'^{(0)}$ กลับด้วยมุม $-\alpha_0$ เพื่อให้เงาไดโพลอยู่ในระบบพิกัดเดียวกันกับ $\left[B_{1,k}'^{(0)}\right]_1$ จะได้เงาไดโพลเป็น $\left[B_{1,k}'^{(0)}\right]_2$ ดังรูปที่ 3.4.

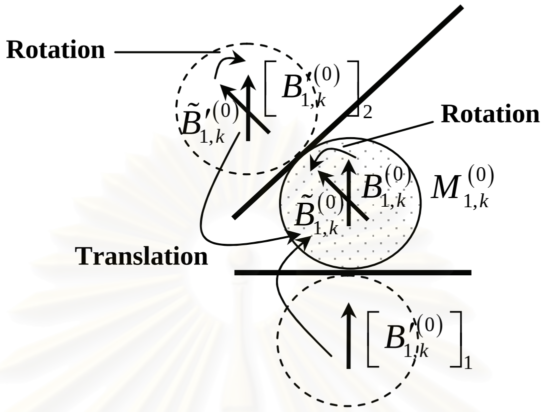
6) เลื่อนขนานเงาไดโพล $\left[B_{1,k}'^{(0)}\right]_1$ และ $\left[B_{1,k}'^{(0)}\right]_2$ จากการคำนวณในข้อที่ 4 และ 5 มายังจุดศูนย์กลางของอนุภาคจะได้สัมประสิทธิ์เป็น $M_{1,k}'^{(0)}$. $M_{1,k}^{(1)}$ สำหรับการทำซ้ำรอบถัดไปคำนวณได้จาก

$$M_{1,k}^{(1)} = M_{1,k}^{(0)} + M_{1,k}'^{(0)}. \tag{3.13}$$

หลังจากนั้นคำนวณสัมประสิทธิ์ $B_{1,k}^{(1)}$ และ $L_{1,k}^{(1)}$ จาก $M_{1,k}^{(1)}$.

7) คำนวณข้อ 4 ถึง 6 ซ้ำจนกระทั่งคำตอบลู่เข้า.

8) เมื่อได้ $M_{1,k}$, $B_{1,k}$ และ $L_{1,k}$ จากวิธีทำซ้ำแล้ว นำสัมประสิทธิ์ที่ได้แทนลงในสมการที่ (2.40) ถึง (2.45) เพื่อคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาค.
9) คำนวณแรงจากการประมาณด้วยไดโพลที่กระทำบนอนุภาคด้วยความเค้นที่กระทำบนอนุภาคจากการอินทิเกรตเชิงเลขตามสมการที่ (2.65).



รูปที่ 3.4 การหมุน, การเลื่อนขนาน และตำแหน่งของเงาไดโพล $\left[B'^{(0)}_{j,k}\right]_1$ เนื่องจากอิเล็กโทรดล่าง และ $\left[B'^{(0)}_{j,k}\right]_2$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนที่ใช้ในการคำนวณรอบแรกด้วยวิธีทำซ้ำของการคำนวณแบบ dps.

3.4 **การคำนวณแรงด้วยมัลติโพลและเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดทุกชุด** (mps)

แรงบนอนุภาคที่มีความถูกต้องสามารถคำนวณได้โดยใช้มัลติโพลและรวมผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดทุกชุดไว้ในการคำนวณ. แรงกระทำบนอนุภาคคำนวณได้จากสนามไฟฟ้าบนอนุภาคตามสมการในบทที่ 2. สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ $B_{j,k}$ และ $L_{j,k}$ ในสมการของสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคคำนวณได้โดยใช้วิธีทำซ้ำเช่นเดียวกับหัวข้อที่ 3.3 แต่แตกต่างกันที่อันดับสูงสุดของมัลติโพล และจำนวนชุดของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่าง. การรวมเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดทุกชุดทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดทั้งสองในรูปที่ 3.1 มีความถูกต้องสมบูรณ์. ทว่า วิธีการนี้ใช้ได้เฉพาะกรณีที่ α_0 หาร 360 องศาได้ลงตัวเท่านั้น. ขั้นตอนการคำนวณเป็นดังนี้.

1) กำหนดอันดับสูงสุดของมัลติโพล N_{mp} ที่ใช้ในการคำนวณ. ในที่นี้ ใช้ $N_{mp} = 60$.
2) คำนวณสัมประสิทธิ์ $M^{(0)}_{j,k}$ ที่เกิดจากศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากคู่ระนาบอิเล็กโทรดเอียง โดยใช้วิธีการในลักษณะเดียวกับวิธีการคำนวณข้อที่ 1 ในหัวข้อที่ 3.3 แต่ใช้อันดับ $j \le N_{mp}$.
3) คำนวณสัมประสิทธิ์ $B^{(0)}_{j,k}$ และ $L^{(0)}_{j,k}$ จาก $M^{(0)}_{j,k}$ ด้วยสมการที่ (2.10) และ (2.11) เมื่อ $B^{(0)}_{j,k}$ คือ มัลติโพลซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค.

4) คำนวณตำแหน่งของเงามัลติโพลของ $B_{j,k}^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่าง โดยใช้การคำนวณเช่นเดียวกับการคำนวณข้อที่ 3 ในหัวข้อที่ 3.3 แต่ตำแหน่งของเงามัลติโพลที่ใช้มีครบทุกชุด. จำนวนเงามัลติโพลทั้งหมดเป็น $(360/\alpha_0)-1$. ตัวอย่างของตำแหน่งการวางเงามัลติโพลทุกชุด ที่มุม $\alpha_0 = 45^\circ$ เป็นดังรูปที่ 3.5.

5) คำนวณเงามัลติโพลชุดแรกเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างก่อนอิเล็กโทรดบนซึ่งมีจำนวนเงาเป็น $(360/2\alpha_0)$ ลูก ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.5(ก) ซึ่งมีจำนวนเงาทั้งหมด 4 ลูก. เริ่มต้น คำนวณเงามัลติโพล $B_{j,k}'^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดล่างก่อนโดยใช้สมการที่ (2.37). หลังจากได้เงามัลติโพล $B_{j,k}'^{(0)}$ แล้ว หมุน $B_{j,k}'^{(0)}$ ให้ตั้งฉากกับอิเล็กโทรดบนด้วยสมการที่ (2.35) จะได้เงามัลติโพลที่หมุนแล้ว $\tilde{B}_{j,k}'^{(0)}$. จากนั้นคำนวณเงามัลติโพล $\tilde{B}_{j,k}''^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนด้วยสมการที่ (2.37). หมุนเงามัลติโพล $\tilde{B}_{j,k}''^{(0)}$ กลับทิศด้วยมุม $-\alpha_0$ เพื่อให้อยู่ในระบบพิกัดเดียวกับเงามัลติโพล $B_{j,k}'^{(0)}$ จะได้เงามัลติโพล $B_{j,k}''^{(0)}$. หลังจากคำนวณเงามัลติโพลจนครบทุกตำแหน่งแล้ว เราจะได้เงามัลติโพล คือ $B_{j,k}'^{(0)}, B_{j,k}''^{(0)}, B_{j,k}'''^{(0)}, \ldots$

6) คำนวณเงามัลติโพลชุดที่สองเนื่องจากอิเล็กโทรดบนก่อนอิเล็กโทรดล่างซึ่งมีจำนวนเงาเป็น $(360/2\alpha_0)$ ลูก ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.5(ข) ซึ่งมีจำนวนเงาทั้งหมด 4 ลูก. เริ่มต้นคำนวณเงามัลติโพล $B_{j,k}'^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนก่อน โดยหมุนมัลติโพล $B_{j,k}^{(0)}$ ไปเป็นมุม α_0 ด้วยสมการที่ (2.35) ดังรูปที่ 3.5(ข). หลังจากหมุนมัลติโพล $B_{j,k}^{(0)}$ แล้วจะได้เป็นมัลติโพลที่หมุนแล้ว $\tilde{B}_{j,k}^{(0)}$. คำนวณเงามัลติโพลที่หมุนแล้ว $\tilde{B}_{j,k}'^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนด้วยสมการที่ (2.37). จากนั้นหมุนเงามัลติโพลที่หมุนแล้ว $\tilde{B}_{j,k}'^{(0)}$ กลับทิศด้วยมุม $-\alpha_0$ เพื่อให้ได้เงามัลติโพล $B_{j,k}'^{(0)}$ ในระบบพิกัดเดียวกันกับ $B_{j,k}^{(0)}$. คำนวณเงามัลติโพล $B_{j,k}''^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดล่างต่อด้วยสมการที่ (2.37). เมื่อคำนวณเงามัลติโพลจนครบทุกตำแหน่งแล้ว เราจะได้เงามัลติโพล คือ $B_{j,k}'^{(0)}, B_{j,k}''^{(0)}, B_{j,k}'''^{(0)}, \ldots$

7) เงามัลติโพลตำแหน่งสุดท้ายที่ซ้ำกันจากในข้อที่ 5 และ 6 ให้เลือกใช้เงาลูกใดลูกหนึ่งเพียงลูกเดียว.

8) เลื่อนขนานเงามัลติโพลทั้งหมดในข้อที่ 5 ถึง 7 มายังจุดศูนย์กลางของอนุภาคจะได้สัมประสิทธิ์เป็น $M_{j,k}'^{(0)}$. $M_{j,k}^{(1)}$ สำหรับการทำซ้ำรอบถัดไปคำนวณได้จาก

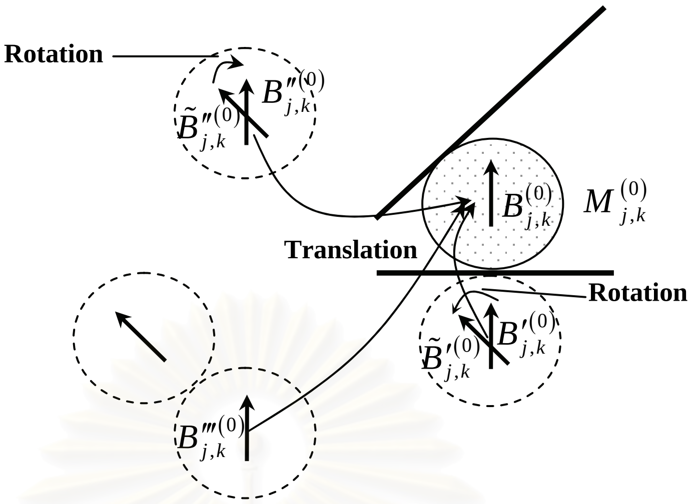
$$M_{j,k}^{(1)} = M_{j,k}^{(0)} + M_{j,k}'^{(0)}. \qquad (3.14)$$

จากนั้นคำนวณสัมประสิทธิ์ $B_{j,k}^{(1)}$ และ $L_{j,k}^{(1)}$ จาก $M_{j,k}^{(1)}$.

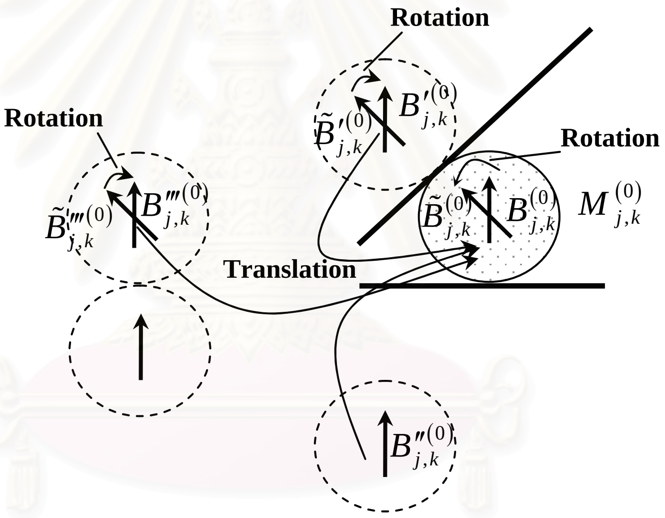
9) คำนวณข้อ 5 ถึง 8 ซ้ำจนกระทั่งคำตอบลู่เข้า.

10) เมื่อได้สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ $B_{j,k}$ และ $L_{j,k}$ จากวิธีทำซ้ำแล้ว นำไปคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคเช่นเดียวกับวิธีการคำนวณข้อที่ 8 และ 9 ในหัวข้อที่ 3.3 แต่ใช้อันดับ $j \le N_{mp}$.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก)



(ข)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

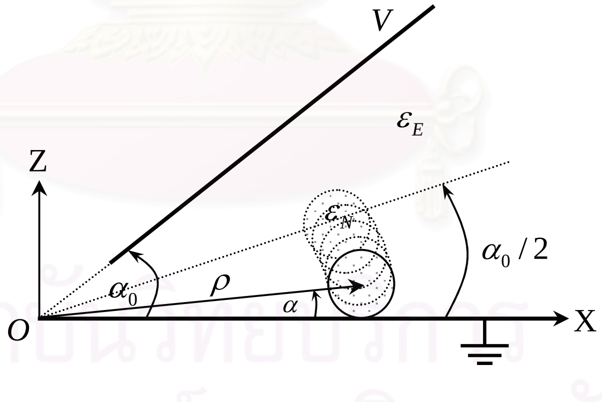
รูปที่ 3.5 การหมุนมัลติโพล การเลื่อนขนานมัลติโพล และ ตำแหน่งของเงามัลติโพล เมื่อ $\alpha_0 = 45°$ (ก) เงามัลติโพลชุดแรกเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างก่อนอิเล็กโทรดบนจำนวน 4 ลูก และ (ข) เงามัลติโพลชุดที่สองเนื่องจากอิเล็กโทรดบนก่อนอิเล็กโทรดล่างจำนวน 4 ลูก.

3.5 ลักษณะสมบัติของแรงที่ได้จากวิธีการต่าง ๆ

การเปรียบเทียบลักษณะสมบัติของแรงที่กระทำบนอนุภาคจากวิธีการทั้งสามวิธีที่กล่าวมา แบ่งออกเป็น 3 กรณี. ลักษณะสมบัติของแรงสองกรณีแรก คือ แรงเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง และ แรงเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง เพื่อให้เห็นภาพลักษณะสมบัติของแรงที่ได้เมื่อ ρ คงที่ และ เมื่อ ρ เปลี่ยนแปลง ตามลำดับ. ลักษณะสมบัติของแรงกรณีสุดท้าย คือ ขนาดของแรงที่กระทำบนอนุภาคมากที่สุด. ผลการคำนวณที่ได้เป็นดังต่อไปนี้.

3.5.1 แรงเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง

ตำแหน่งของอนุภาคเปลี่ยนไปตามรูปที่ 3.6 โดยเริ่มจากตำแหน่งที่อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่างจนกระทั่งตำแหน่งของอนุภาคอยู่กึ่งกลางระหว่างอิเล็กโทรดทั้งสอง. ระยะ ρ ที่ใช้ในการคำนวณมี 3 ค่า คือ $\rho = \rho_{\min} + (k\sigma/2)$ เมื่อ $k = 1,3,7$ โดยเปลี่ยนมุม α_0 เป็น 30°, 45°, 60° และ 90°. ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ที่ใช้คือ $\varepsilon_E = 1$ และ $\varepsilon_N = 4$. อย่างไรก็ตาม ในที่นี้ แรงบนอนุภาคจากการประมาณด้วยไดโพล (dp) การประมาณด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก (dps) และการคำนวณด้วยมัลติโพลและเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดทุกชุด (mps) แสดงเพียงค่า $k = 1$ และ 3 ที่มุม α_0 เท่ากับ 30° และ 60°. ผลการคำนวณในกรณีที่เหลือแสดงไว้ในภาคผนวก จ.



รูปที่ 3.6 ตำแหน่งในการคำนวณแรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง.

ลักษณะโดยทั่วไปของสนามไฟฟ้าภายในกับดักอนุภาค คือ ที่ ρ น้อย $(k=1)$ จะมีสนามไฟฟ้าสูงกว่าบริเวณที่อนุภาคอยู่ไกลออกมา $(k=3,7)$. รูปที่ 3.7 และ 3.8 แสดงการเปลี่ยนแปลงของ $|F_\rho^*|$ และ $|F_\alpha^*|$ ตามลำดับ เมื่อเปลี่ยนมุม α ที่ ρ คงที่ $(k=3)$ และ $\alpha_0 = 30^\circ$ โดยคำนวณจาก 3 วิธี คือ dp, dps และ mps. F_ρ และ F_α ขึ้นกับระยะห่าง $2d_1$ ระหว่างอนุภาคกับเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดล่าง และ $2d_2$ ระหว่างอนุภาคกับเงาเนื่องจาก

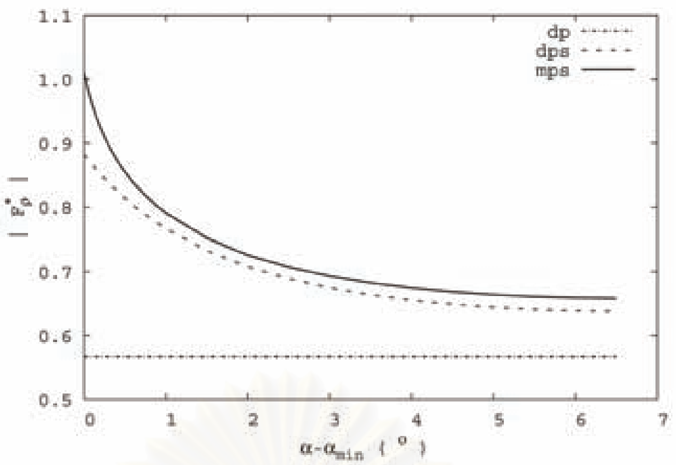
อิเล็กโทรดบน ในรูปที่ 3.3. ผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างมีมากกว่าเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนเพราะตำแหน่งของอนุภาคอยู่ใกล้กับอิเล็กโทรดล่าง (มุม α เพิ่มขึ้นจากอิเล็กโทรดล่าง) และผลของเงาทั้งสองจะเท่ากันที่มุม $\alpha = \alpha_0 / 2$. เมื่อมุม α เพิ่มมากขึ้น แนวโน้มของ F_ρ มีขนาดลดลง ดังเส้นกราฟแบบ mps ในรูปที่ 3.7 เพราะผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างลดลงตามระยะระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโทรดล่างที่เพิ่มขึ้น. เมื่อใช้การประมาณแบบ dps F_ρ มีแนวโน้มเช่นเดียวกับการคำนวณที่ถูกต้องแบบ mps แต่มีขนาดต่ำกว่า. ในรูปที่ 3.7 เนื่องจากการคำนวณแบบ dp ไม่ได้คิดผลของอิเล็กโทรดจึงมีเฉพาะ F_ρ เท่านั้น และทำให้การเปลี่ยนมุม α ไม่มีผลต่อ F_ρ รวมทั้งขนาดของแรงก็น้อยที่สุดในวิธีการคำนวณทั้งสามแบบ. ดังนั้น การประมาณแบบ dp จึงให้ผลไม่ตรงกับแรงที่เกิดขึ้นจริง. เมื่อนำแรงจากการคำนวณทั้ง 3 วิธีมาเปรียบเทียบกัน ได้ผลคือ บริเวณที่สนามไฟฟ้าสูง $(\alpha = \alpha_{\min})$ F_ρ แบบ mps มีค่าประมาณ 1.8 และ 1.1 เท่าของแรงแบบ dp และ dps เมื่อ $\alpha_0 = 30^\circ$ ตามลำดับ. ความแตกต่างของ F_ρ แบบ mps กับแบบ dp และ dps จะลดลงเมื่อมุม α เพิ่มมากขึ้น เพราะผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างลดลง เช่น ที่ $\alpha = \alpha_0 / 2$ ความแตกต่างของแรงจะลดลง และมีค่าประมาณ 1.2 และ 1.03 เท่าของแบบ dp และ dps ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.7. การประมาณแบบ dps จึงให้ผลที่ดีกว่าแบบ dp และ F_ρ แบบ dps มีค่าประมาณ 1.1 และ 1.6 เท่าของแรงแบบ dp ที่ $\alpha = \alpha_0 / 2$ และ $\alpha = \alpha_{\min}$ ตามลำดับ. เมื่อเราใช้วิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก แรงบนอนุภาคประมาณได้ด้วยสมการ (ดูภาคผนวก ฉ)

$$F_\rho = -\frac{3K_1}{256\rho^6\alpha_0^2}\left\{\frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]}{\sin^3(\alpha_0-\alpha)}+\frac{\left[\cos^2(\alpha)+1\right]}{\sin^3(\alpha)}\right\} \qquad (3.14)$$

$$F_\alpha = \frac{3K_1}{256\rho^6\alpha_0^2}\left\{\frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]\cos(\alpha_0-\alpha)}{\sin^4(\alpha_0-\alpha)}-\frac{\left[\cos^2(\alpha)+1\right]\cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)}\right\} \qquad (3.15)$$

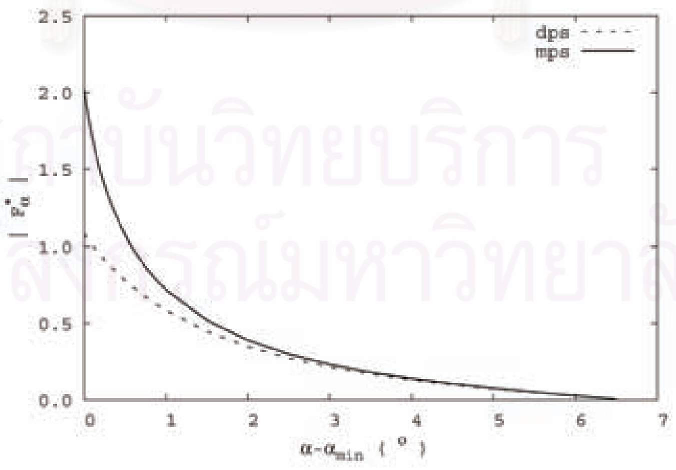
เมื่อ $K_1 = \pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma^2\sigma^6V^2$.

พจน์แรกและพจน์ที่สองในวงเล็บทางด้านขวามือของสมการที่ (3.14) และ (3.15) เป็นผลที่เกิดจากเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่าง ตามลำดับ. เมื่อมุม α เพิ่มขึ้น พจน์แรกและพจน์ที่สองในวงเล็บทางด้านขวามือของสมการที่ (3.14) มีค่าเพิ่มขึ้น และลดลง ตามลำดับ. อย่างไรก็ตาม ผลของพจน์ที่สองมีมากกว่าพจน์แรกจึงทำให้ F_ρ ลดลงตามการเพิ่มของมุม α ซึ่งมีแนวโน้มเช่นเดียวกับแรงจากการคำนวณแบบ dps ในรูปที่ 3.7.



รูปที่ 3.7 $|F_{\rho}^{*}|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 30^\circ$.

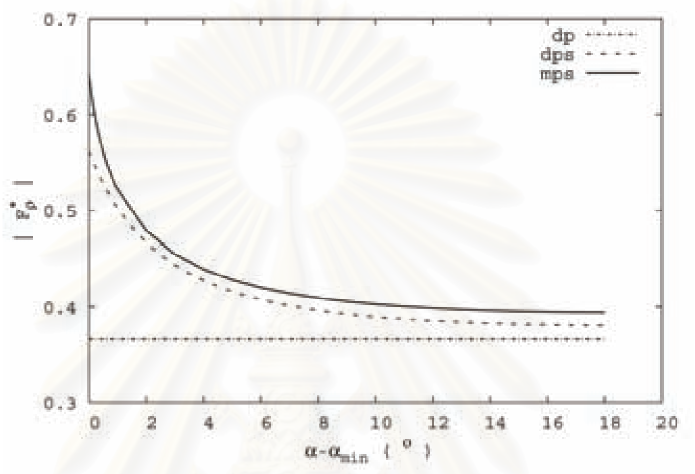
F_α เกิดจากผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่าง. เมื่อมุม α เพิ่มขึ้น F_α มีขนาดลดลง และมีขนาดเป็นศูนย์เมื่อ $\alpha = \alpha_0 / 2$ เพราะผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่างเท่ากัน ดังเส้นกราฟแบบ mps ในรูปที่ 3.8. F_α แบบ dps มีแนวโน้มเช่นเดียวกับแบบ mps. อย่างไรก็ตาม F_α แบบ dps มีขนาดน้อยกว่าแรงของแบบ mps เพราะผลของจำนวนเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดที่น้อยกว่า ตัวอย่างเช่น F_α แบบ mps มีค่าประมาณ 1.9 เท่าของแรงแบบ dps ที่ $\alpha = \alpha_{\min}$. จากสมการที่ (3.15) เมื่อมุม α เพิ่มขึ้น ผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนจะมากขึ้นทำให้พจน์แรกในวงเล็บทางด้านขวามือมีค่ามากขึ้น แต่ผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างลดลงทำให้พจน์ที่สองในวงเล็บทางด้านขวามือมีค่าลดลงจึงทำให้ F_α ลดลง.



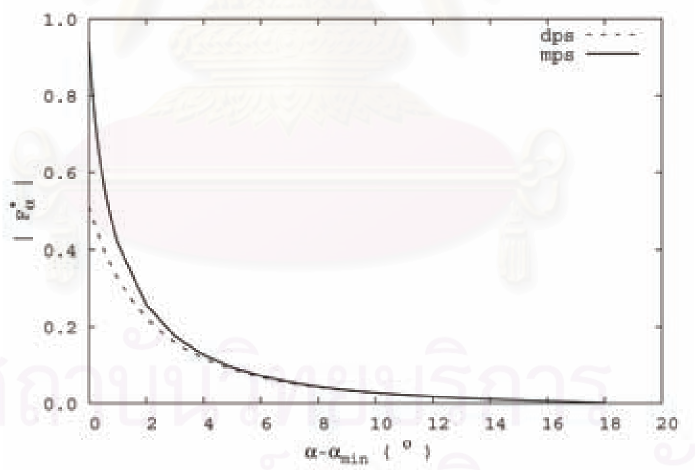
รูปที่ 3.8 $|F_{\alpha}^{*}|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 30^\circ$.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้นเป็น 60° การเปลี่ยนแปลงของ $\left|F_\rho^*\right|$ และ $\left|F_\alpha^*\right|$ เมื่อเปลี่ยนมุม α ที่ $k=3$ จากการคำนวณแบบ dp, dps และ mps แสดงไว้ในรูปที่ 3.9. เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้นทำให้ F_ρ และ F_α จากการคำนวณทั้งสามวิธีลดลง. จากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำ F_ρ และ F_α มีขนาดลดลงเนื่องจากแปรผันตรงกับ $1/\alpha_0^2$ ตามสมการที่ (3.14) และ (3.15) ตามลำดับ. นอกจากนี้ F_ρ และ F_α จากการคำนวณทั้งสามมีขนาดลดลงใกล้เคียงกันเนื่องจากสนามไฟฟ้าลดลง.



(ก)

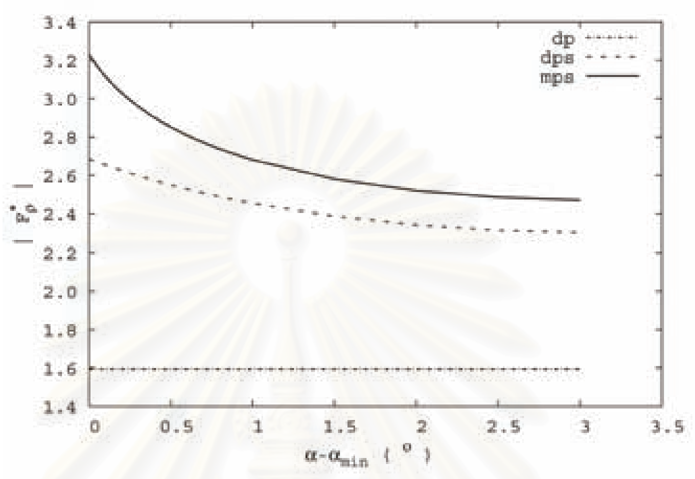


(ข)

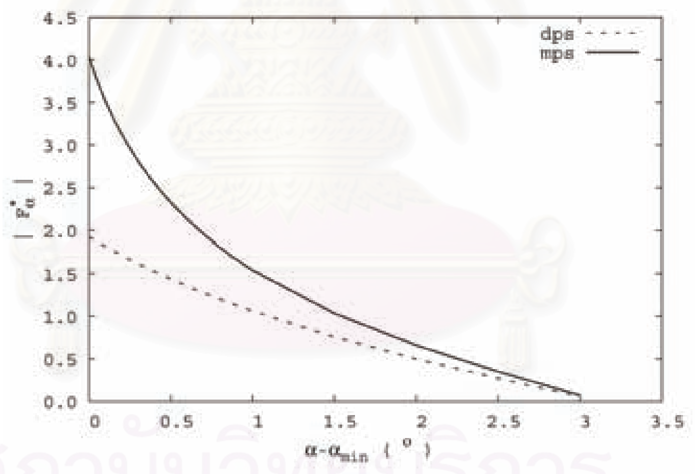
รูปที่ 3.9 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k=3$ และ $\alpha_0=60°$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps.

รูปที่ 3.10 แสดงการเปลี่ยนแปลงของ $\left|F_\rho^*\right|$ และ $\left|F_\alpha^*\right|$ เมื่อเปลี่ยนมุม α ที่ $k=1$ และ $\alpha_0=30°$ โดยคำนวณจากวิธีแบบ dp, dps และ mps. เมื่อระยะ ρ ลดลง $(k=1)$ อนุภาคอยู่

ในบริเวณที่สนามไฟฟ้าสูงขึ้น และระยะระหว่างอนุภาคกับเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่างลดลง. ผลดังกล่าวทำให้ F_ρ และ F_α มีขนาดสูงขึ้นจากกรณีที่ $k=3$ แต่แนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของแรงยังเป็นเช่นเดียวกัน. นอกจากนี้ ความแตกต่างของแรงบนอนุภาคจากการคำนวณแบบ mps กับการประมาณแบบ dp และ dps มีค่ามากขึ้นด้วย.



(ก)

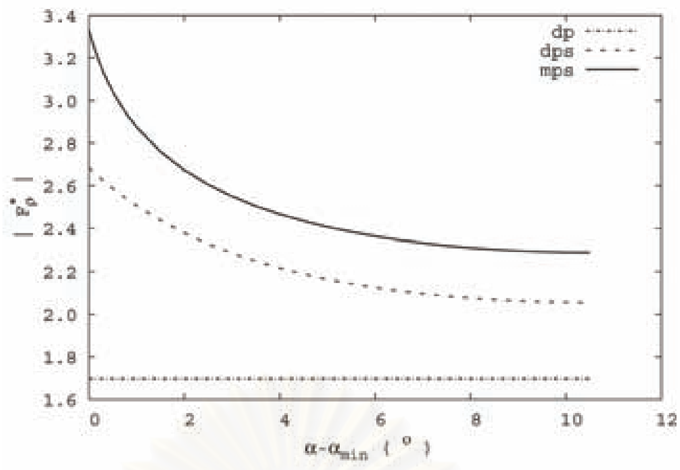


(ข)

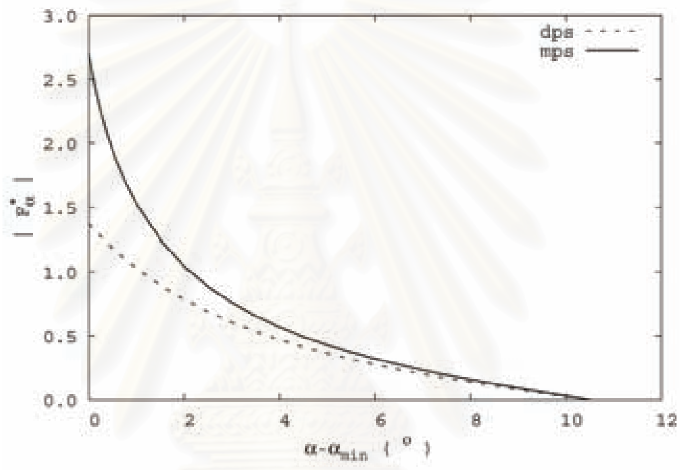
รูปที่ 3.10 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k=1$ และ $\alpha_0 = 30^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps.

เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้นเป็น 60° การเปลี่ยนแปลงของ $\left|F_\rho^*\right|$ และ $\left|F_\alpha^*\right|$ เมื่อเปลี่ยนมุม α ที่ $k=1$ จากการคำนวณทั้ง 3 วิธี คือ dp, dps และ mps แสดงไว้ในรูปที่ 3.11. เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้น F_ρ และ F_α ที่เกิดขึ้นมีขนาดลดลงและมีแนวโน้มเช่นเดียวกับกรณีที่ $k=3$ แต่ขนาดของแรงยังมีค่าสูงกว่าเนื่องจากอนุภาคอยู่ในบริเวณที่สนามไฟฟ้าสูง.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก)



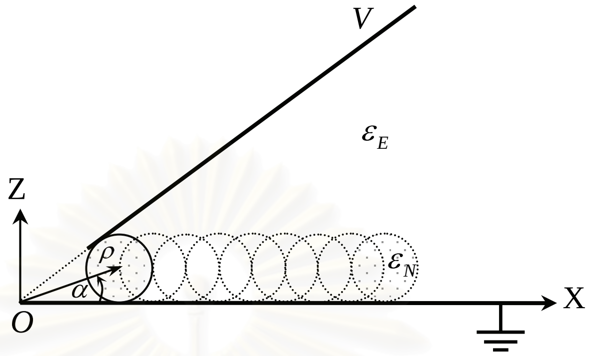
(ข)

รูปที่ 3.11 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k=1$ และ $\alpha_0 = 60^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps.

จากผลการคำนวณในกรณีนี้ อิเล็กโทรดทั้งสองมีผลต่อแรงบนอนุภาค และการประมาณแรงบนอนุภาคจากการคำนวณแบบ dp และ dps มีความคลาดเคลื่อนมากเมื่ออนุภาคอยู่ใกล้กับอิเล็กโทรด สังเกตได้จากความแตกต่างของแรงกับการคำนวณแบบ mps. ความแตกต่างของแรงจากการคำนวณแบบ dp และ dps กับแบบ mps มีค่าน้อยที่สุดเมื่ออนุภาคอยู่กึ่งกลางระหว่างอิเล็กโทรดทั้งสอง. ดังนั้นการประมาณแบบ dp และ dps ใช้ได้ดีเฉพาะกรณีที่อนุภาคอยู่ห่างจากอิเล็กโทรดซึ่งเป็นบริเวณที่สนามไฟฟ้าต่ำ.

3.5.2 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง

การเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาคในกรณีนี้เป็นดังรูปที่ 3.12 โดยผลการคำนวณแรงบนอนุภาคในที่นี้แสดงเพียงมุม α_0 เท่ากับ 30° และ 60°. ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ที่ใช้เป็นเช่นเดียวกับหัวข้อที่ 3.5.1. ผลการคำนวณของกรณีอื่นๆ ที่ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ช.



รูปที่ 3.12 ตำแหน่งในการคำนวณแรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง.

$\left|F_\rho^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dp, dps และ mps เมื่อเปลี่ยน ρ โดยให้อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 30°$ แสดงไว้ในรูปที่ 3.13. การเพิ่มขึ้นของ ρ ทำให้ F_ρ ลดลงเพราะเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนอยู่ห่างจากอนุภาคมากขึ้นส่งผลทำให้สนามไฟฟ้าลดลง ดังเส้นกราฟแบบ mps ในรูปที่ 3.13. ที่ $\rho_{\min}$ F_ρ แบบ dp และ dps ลดลงตามการเพิ่มของ ρ เช่นเดียวกัน แต่มีขนาดต่ำกว่าแบบ mps และอัตราการลดลงแตกต่างกัน. F_ρ แบบ mps มีค่าประมาณ 3.2 และ 1.4 เท่าของแรงแบบ dp และ dps ตามลำดับ. การประมาณแบบ dp ตามสมการที่ (3.8) มีเฉพาะแรง F_ρ ดึงอนุภาคเข้าสู่ด้านในของกับดักอนุภาค และแปรผกผันกับ ρ^3 ดังสมการ

$$F_\rho = -\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_E \gamma \sigma^3 V^2}{\rho^3 \alpha_0^2}\right). \tag{3.16}$$

เมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง แรงบนอนุภาคจากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก (ดูภาคผนวก ฉ) เป็นดังสมการ

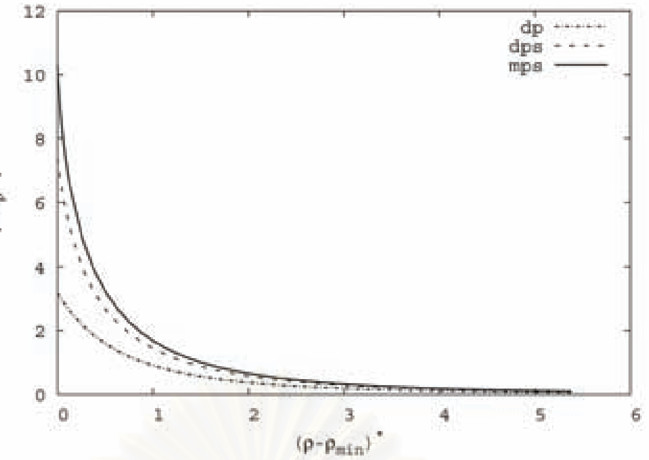
$$F_\rho = -\frac{3K_1}{256\rho^5\alpha_0^2}\left\{\frac{\left(2\rho^2 - d^2\right)}{d^3} + \frac{\left(16\rho^2 - 2\sigma^2\right)}{\sigma^3}\right\} \tag{3.17}$$

$$F_\alpha = \frac{3K_1}{256\rho^5\alpha_0^2}\left\{\frac{\left(2\rho^2 - d^2\right)\sqrt{\rho^2 - d^2}}{d^4} - \frac{\left(16\rho^2 - 2\sigma^2\right)\sqrt{4\rho^2 - \sigma^2}}{\sigma^4}\right\} \tag{3.18}$$

เมื่อ d คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางของอนุภาคถึงระนาบอิเล็กโทรดบน โดยที่

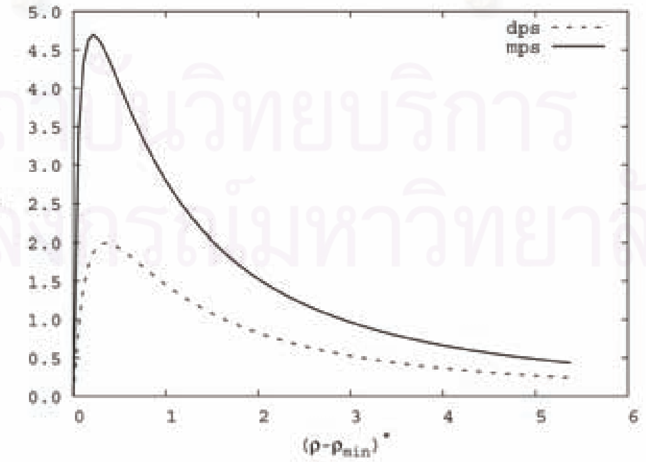
$$d = \left(\sqrt{4\rho^2 - \sigma^2}/2\right)\sin\left(\alpha_0\right) - \left(\sigma/2\right)\cos\left(\alpha_0\right). \tag{3.19}$$

จากสมการที่ (3.17) เมื่อระยะ ρ เพิ่มขึ้นทำให้ระยะ d เพิ่มขึ้น และ F_ρ ลดลงเพราะแปรผันตรงกับ $1/d^3$ และ $1/\rho^5$.



รูปที่ 3.13 $\left|F_{\rho}^{*}\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$.

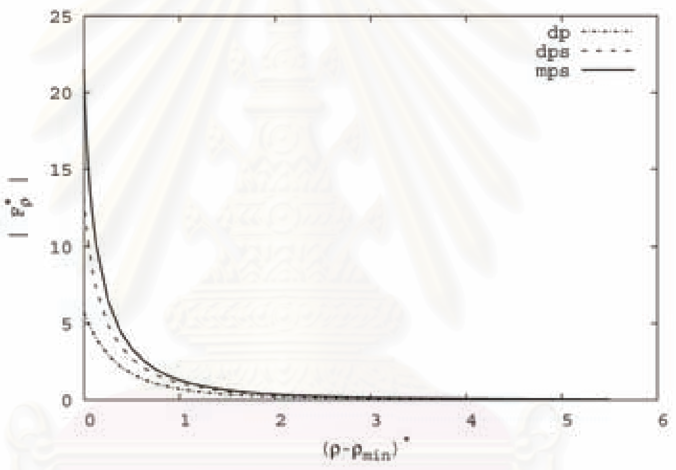
รูปที่ 3.14 แสดง $\left|F_{\alpha}^{*}\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่อเปลี่ยน ρ โดยให้อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$. การเปลี่ยนแปลงของ F_α ที่ถูกต้องจากแบบ mps คือ ช่วงแรก F_α เพิ่มขึ้นตาม ρ และช่วงที่สองแรงลดลงเมื่อ ρ เพิ่มขึ้น. ตำแหน่งที่ F_α มากที่สุดเปลี่ยนไปตามมุม α_0. F_α จากการคำนวณแบบ dps มีแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงเหมือนกับแบบ mps แต่ F_α แบบ mps มีขนาดสูงกว่าแบบ dps โดยที่ F_α มากที่สุดของแบบ mps มีขนาดประมาณ 2.3 เท่าของแบบ dps. เมื่อเพิ่มระยะ ρ ทำให้พจน์แรกในวงเล็บทางด้านขวามือของสมการที่ (3.18) มีค่าลดลงเพราะระยะ d เพิ่มขึ้น และพจน์ที่สองมีค่าเพิ่มขึ้น. การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวทำให้ F_α จากสมการที่ (3.18) มีลักษณะเช่นเดียวกับแรงแบบ dps ในรูปที่ 3.14.



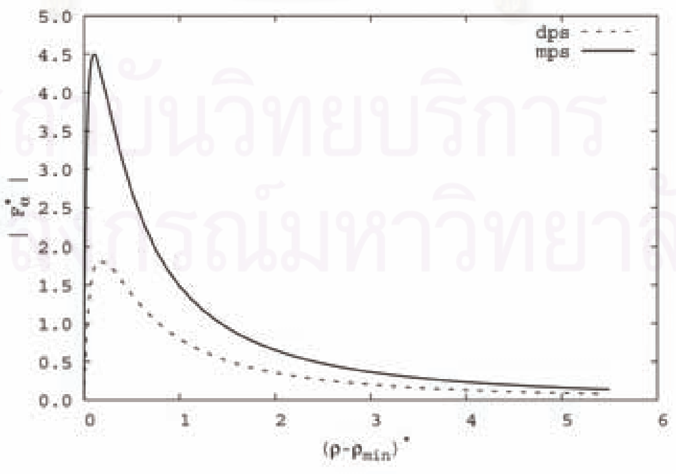
รูปที่ 3.14 $\left|F_{\alpha}^{*}\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$.

เมื่อเพิ่มมุม α_0 ที่ใช้ในการคำนวณเป็น 60° (ระยะ $\rho_{\min}$ ลดลง) $\left|F_\rho^*\right|$ และ $\left|F_\alpha^*\right|$ แสดงในรูปที่ 3.15. F_ρ มีขนาดเพิ่มขึ้น แต่ F_α มีขนาดลดลงเมื่อเทียบกับกรณีที่ $\alpha_0 = 30°$. เมื่อพิจารณาแรงบนอนุภาคจากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำพบว่า F_ρ เพิ่มขึ้นเพราะระยะ ρ ลดลง ซึ่งทำให้ $1/\rho^5$ มีผลมากกว่า $1/\alpha_0^2$ และพจน์ทั้งสองในวงเล็บทางด้านขวามือของสมการที่ (3.17) ที่มีค่าลดลง. F_α มีขนาดลดลงเพราะผลของ $1/\alpha_0^2$ และพจน์ทั้งสองในวงเล็บทางด้านขวามือของสมการที่ (3.18) มีค่าลดลงเมื่อเทียบกับที่ $\alpha_0 = 30°$ และมีผลมากกว่า $1/\rho^5$ ซึ่งเพิ่มขึ้นจากระยะ ρ ที่น้อยลง.

เมื่อคำนวณที่ k สูงขึ้นไปพบว่า การประมาณแบบ dps ให้ความคลาดเคลื่อนของ F_ρ และ F_α ต่ำกว่า 10% และ 45% ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบกับแบบ mps ที่ $\rho = \rho_{\min} + 5\sigma$ $(k = 10)$ ในช่วงมุม α_0 เท่ากับ 30° ถึง 90°. ในกรณีที่อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่งใกล้กว่านี้ควรคำนวณอย่างละเอียดเพื่อให้ได้ค่าของแรงที่แม่นยำพอสมควร.



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.15 แรงบนอนุภาคเมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 60°$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps.

3.5.3 ขนาดแรงสูงสุดบนอนุภาค

กำหนดให้ $F_{\rho,\max}$ และ $F_{\alpha,\max}$ เป็นขนาดสูงสุดของแรงในทิศ ρ และ α ตามลำดับ ของกับดักอนุภาคหนึ่งๆ (α_0 คงที่). $F_{\rho,\max}$ เกิดขึ้นเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดบนและล่าง และ $F_{\alpha,\max}$ ในที่นี้ เกิดขึ้นเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง.

3.5.3.1 $F_{\rho,\max}$

รูปที่ 3.16 แสดงการเปลี่ยนแปลงของ $\left|F^*_{\rho,\max}\right|$ จากการคำนวณแบบ dp, dps และ mps กับการเพิ่มของมุม α_0 จาก 5° ถึง 90°. $F_{\rho,\max}$ ที่ถูกต้องจากแบบ mps มีขนาดเพิ่มขึ้นเมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้น. เมื่อใช้การประมาณแบบ dp และ dps $F_{\rho,\max}$ เพิ่มตามการเพิ่มขึ้นของมุม α_0 เช่นเดียวกัน แต่ $F_{\rho,\max}$ แบบ dps มีขนาดสูงกว่าแบบ dp โดยเฉลี่ยประมาณ 2.3 เท่าในช่วง $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90°. อย่างไรก็ตาม เมื่อมุม α_0 เข้าใกล้ 90° การเพิ่มขึ้นของ $F_{\rho,\max}$ แบบ mps ยังคงเพิ่มมากขึ้น ต่างกับแบบ dp และ dps ที่มีขนาดลดลง. เมื่อใช้การประมาณแบบ dp และ dps ทำให้ $F_{\rho,\max}$ มีขนาดน้อยกว่า $F_{\rho,\max}$ ที่ควรจะเป็นซึ่งได้จากแบบ mps โดยที่ $F_{\rho,\max}$ แบบ mps มีค่าประมาณ 3 และ 1.3 เท่าของแรงแบบ dp และ dps ตามลำดับ ที่ $\alpha_0 = 5^\circ$ และความแตกต่างของแรงจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จน $F_{\rho,\max}$ แบบ mps มีค่าประมาณ 5 และ 2.3 เท่าของ $F_{\rho,\max}$ แบบ dp และ dps ตามลำดับ ที่ $\alpha_0 = 90^\circ$.

$F_{\rho,\max}$ แบบ dp คำนวณได้จากสมการที่ (3.11) โดยแทนสมการที่ (3.9) และ (3.1) ลงไป. $F_{\rho,\max}$ แบบ dp เป็นไปตามสมการ

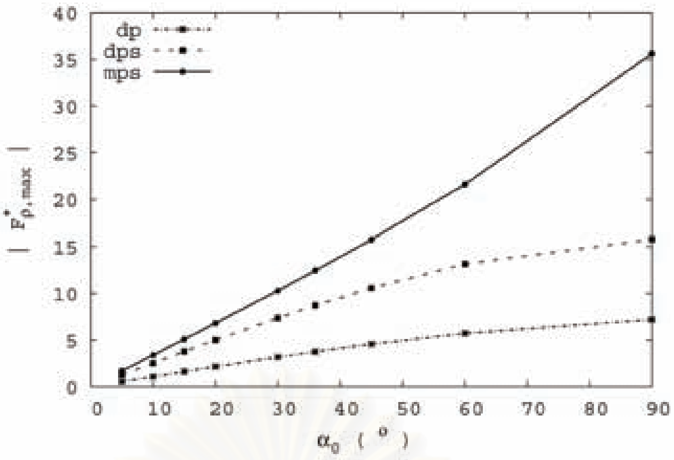
$$F_{\rho,\max} = -4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma V^2\left[\frac{\sin^3(\alpha_0/2)}{\alpha_0^2}\right]. \tag{3.20}$$

จากสมการที่ (3.20) เมื่อมุม α_0 เพิ่มมากขึ้นพจน์ $\sin^3(\alpha_0/2)$ มีผลมากกว่าพจน์ $1/\alpha_0^2$ จึงทำให้ $F_{\rho,\max}$ เพิ่มขึ้น. $F_{\rho,\max}$ จากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก (ดูภาคผนวก ฉ) เป็นไปตามสมการ

$$F_{\rho,\max} = -\frac{3K_2}{2\alpha_0^2}\left\{\left[\cos^2(\alpha_0/2)+1\right]\sin^3(\alpha_0/2)\right\} \tag{3.21}$$

เมื่อ $K_2 = \pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma^2V^2$.

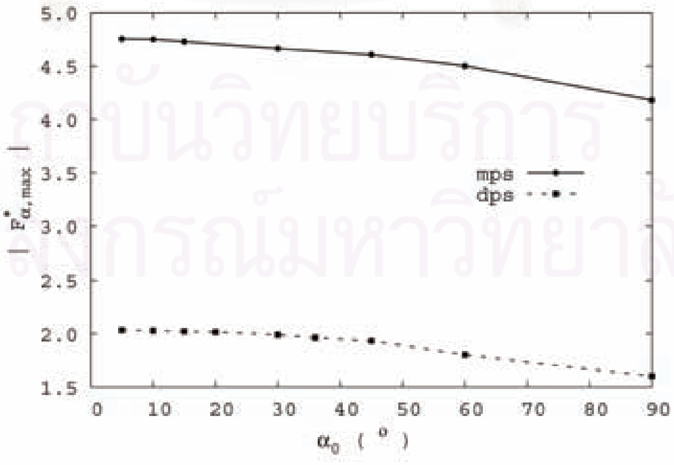
จากสมการที่ (3.21) เมื่อมุม α_0 เพิ่มมากขึ้นทำให้ $F_{\rho,\max}$ เพิ่มขึ้นตามพจน์ $\sin^3(\alpha_0/2)$ ซึ่งมีผลมากกว่าการลดลงของ $\left[\cos^2(\alpha_0/2)+1\right]$ และพจน์ K_2/α_0^2 หน้าวงเล็บซึ่งมีขนาดลดลงเช่นเดียวกัน. แนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของ $F_{\rho,\max}$ ตามสมการที่ (3.21) เป็นเช่นเดียวกับแรงจากแบบ dps.



รูปที่ 3.16 $\left|F^*_{\rho,\max}\right|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่อ $\alpha_0 = 5°$ ถึง $90°$.

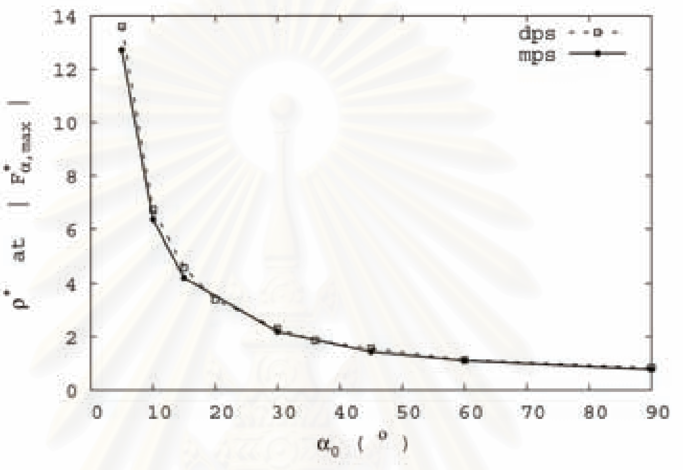
3.5.3.2 $F_{\alpha,\max}$

การเปลี่ยนแปลงของ $\left|F^*_{\alpha,\max}\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps กับการเพิ่มของมุม α_0 จาก 5° ถึง 90° แสดงไว้ในรูปที่ 3.17. การเปลี่ยนแปลงของ $F_{\alpha,\max}$ ลดลงตามการเพิ่มของมุม α_0 ดังกราฟจากการคำนวณที่ถูกต้องแบบ mps. เมื่อใช้การประมาณแบบ dps $F_{\alpha,\max}$ มีแนวโน้มลดลงเช่นเดียวกันแต่มีขนาดต่ำกว่าแบบ mps ยกตัวอย่างเช่น $F_{\alpha,\max}$ แบบ mps มีขนาดประมาณ 2.3 และ 2.6 เท่าของแบบ dps ที่มุม α_0 เท่ากับ 5° และ 90° ตามลำดับ. จากสมการที่ (3.18) ที่ได้จากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำ $F_{\alpha,\max}$ มีแนวโน้มลดลงตามการเพิ่มของมุม α_0 เพราะค่าของ $1/\alpha_0^2$ และพจน์ในวงเล็บทางด้านขวามือของสมการที่ (3.18) ลดลงและมีผลเด่นกว่าการเพิ่มขึ้นของ $1/\rho^5$.



รูปที่ 3.17 $\left|F^*_{\alpha,\max}\right|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่อ $\alpha_0 = 5°$ ถึง $90°$.

ระยะ ρ ณ ตำแหน่งที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps แสดงดังรูปที่ 3.18. เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้น ระยะ ρ ณ ตำแหน่งที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ แบบ dps และ mps มีแนวโน้มลดลงเช่นเดียวกัน แต่ระยะ ρ ณ ตำแหน่งที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ ต่างกันโดยเฉลี่ยประมาณ 7%. แม้ว่าตำแหน่งของอนุภาคที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ จะแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยก็ตาม แต่การประมาณแบบ dps ยังมีความคลาดเคลื่อนมากเนื่องจากขนาดของ $F_{\alpha,\max}$ แตกต่างจากการคำนวณแบบ mps หลายเท่าดังที่กล่าวไปแล้วข้างต้น.



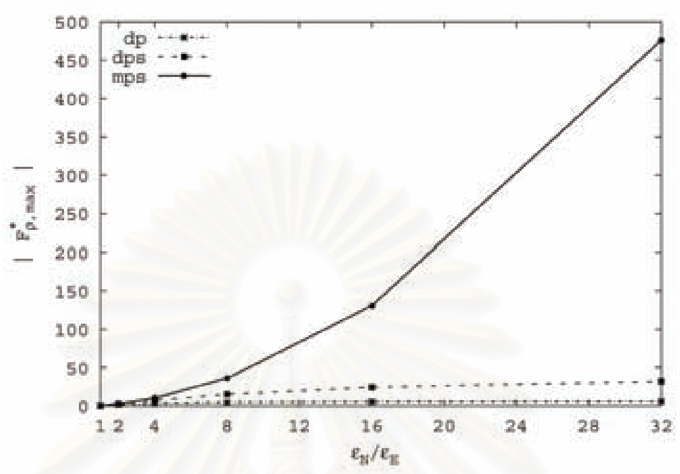
รูปที่ 3.18 ตำแหน่งที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90°.

3.5.3.3 ผลของการเปลี่ยนอัตราส่วนสภาพยอม $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ ต่อขนาดสูงสุดของแรงบนอนุภาค

หัวข้อนี้ศึกษาผลของอัตราส่วน $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ ที่มีต่อ $F_{\rho,\max}$ และ $F_{\alpha,\max}$. อัตราส่วน $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ ที่ใช้ในการคำนวณคือ 1, 2, 4, 8, 16 และ 32. หัวข้อนี้แสดง $F_{\rho,\max}$ และ $F_{\alpha,\max}$ จากการคำนวณแบบ dp, dps และ mps เฉพาะที่ $\alpha_0 = 30^\circ$.

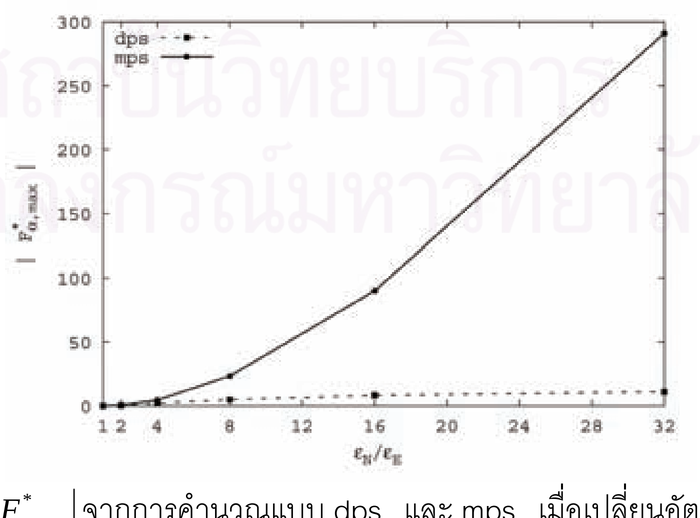
รูปที่ 3.19 แสดง $\left|F^*_{\rho,\max}\right|$ จากวิธีการคำนวณแบบ dp, dps และ mps ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$. สัมประสิทธิ์ $B_{j,k}$ และ $M_{j,k}$ จากสมการที่ (2.40) ถึง (2.45) ที่ใช้คำนวณสนามไฟฟ้าภายในและภายนอกอนุภาคในบทที่ 2 สัมพันธ์กับ $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ ตามสมการที่ (2.10). ดังนั้น $F_{\rho,\max}$ แบบ mps จึงขึ้นกับ $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ โดยเป็นฟังก์ชันของ $\sum_{j=0}^{N_{mp}} \frac{(\xi-1)\, j}{\left[(\xi+1)\, j+1\right]}$ เมื่อใช้อันดับมัลติโพลสูงสุด N_{mp} และ $\xi = \varepsilon_N / \varepsilon_E$. $F_{\rho,\max}$ แบบ mps มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตาม $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ และจะเพิ่มสูงขึ้นมากเมื่อ $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ มีค่ามาก. $F_{\rho,\max}$ จากการคำนวณแบบ dp และ dps ซึ่งใช้ไดโพลในการคำนวณขึ้นกับ $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ โดยเป็นฟังก์ชันของ γ และ γ^2 ตามสมการที่ (3.20) และ (3.21) ตามลำดับ. ดังนั้น เมื่อเพิ่ม $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ $F_{\rho,\max}$ แบบ dp และ dps จึงเพิ่มขึ้นน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับ $F_{\rho,\max}$ แบบ mps.

ที่ $\varepsilon_N / \varepsilon_E = 2$ $F_{\rho,\max}$ แบบ mps มีขนาดมากกว่า $F_{\rho,\max}$ แบบ dp และ dps ประมาณ 1.9 และ 1.3 ตามลำดับ และความแตกต่างของแรงจะเพิ่มมากขึ้นเป็น 91 และ 16 เท่า ตามลำดับ เมื่อ $\varepsilon_N / \varepsilon_E = 32$ ดังรูปที่ 3.19.



รูปที่ 3.19 $|F^*_{\rho,\max}|$ จากการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่อเปลี่ยนอัตราส่วน $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$.

$|F^*_{\alpha,\max}|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$ แสดงไว้ในรูปที่ 3.20. การเปลี่ยนแปลงของ $F_{\alpha,\max}$ แบบ dps และ mps กับการเพิ่มของ $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ เป็นเช่นเดียวกับ $F_{\rho,\max}$. เมื่อ $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ มีค่ามาก การเพิ่มขึ้นของ $F_{\alpha,\max}$ แบบ dps ลดลง แต่ $F_{\alpha,\max}$ แบบ mps ยังคงเพิ่มมากขึ้น. $F_{\alpha,\max}$ แบบ mps มีค่าประมาณ 1.5 และ 29 เท่าของแรงแบบ dps ที่ $\varepsilon_N / \varepsilon_E = 2$ และ $\varepsilon_N / \varepsilon_E = 32$ ตามลำดับ.



รูปที่ 3.20 $|F^*_{\alpha,\max}|$ จากการคำนวณแบบ dps และ mps เมื่อเปลี่ยนอัตราส่วน $\varepsilon_N / \varepsilon_E$ ที่ $\alpha_0 = 30^\circ$.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความแตกต่างของแรงบนอนุภาคแบบ mps กับแบบ dp และ dps เพิ่มขึ้นตาม $\varepsilon_N/\varepsilon_E$ ที่มากขึ้น. การประมาณแบบ dp และ dps สามารถใช้ได้เมื่อ $\varepsilon_N/\varepsilon_E$ มีค่าน้อย. เมื่อคำนวณที่ $\varepsilon_N/\varepsilon_E \le 2$ และ $\alpha_0 \le 30^\circ$ $F_{\rho,\max}$ แบบ dp และแบบ dps มีความคลาดเคลื่อนจากแบบ mps น้อยกว่า 40% และ10% ตามลำดับ และ $F_{\alpha,\max}$ แบบ dps มีความคลาดเคลื่อนจากแบบ mps. น้อยกว่า 28%. ดังนั้น การประมาณแบบ dps สามารถใช้ได้เมื่อ $\varepsilon_N/\varepsilon_E \le 2$ และ $\alpha_0 \le 30^\circ$ แต่เมื่อ $\varepsilon_N/\varepsilon_E$ มีค่าสูง และ $\alpha_0 > 30^\circ$ ควรใช้การคำนวณอย่างละเอียดเพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้อง.

3.6 สรุปผล

1. ที่มุมของกับดักอนุภาคหนึ่ง (α_0 คงที่) แรงบนอนุภาคที่ถูกต้องมีทั้งในทิศ ρ และ α ซึ่งได้จากการคำนวณแบบ mps. การประมาณแบบ dps มีแรงบนอนุภาคทั้งสองทิศทางเช่นกัน แต่แบบ dp มีแรงเฉพาะในทิศ ρ เท่านั้น. แรงบนอนุภาคขึ้นกับตำแหน่งของอนุภาค(ρ,α) เพราะตัวแปรทั้งสองมีผลทำให้สนามไฟฟ้าบนอนุภาคเปลี่ยน. เมื่อระยะ ρ คงที่โดยให้มุม α เพิ่มขึ้น แรงบนอนุภาคลดลงเพราะผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างลดลง. เมื่อระยะ ρ เพิ่มขึ้น แรงในทิศ ρ ลดลง (แรงจากการคำนวณแบบ dp แปรผันตรงกับ $1/\rho^3$ ส่วนแรงจากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำแปรผันตรงกับ $1/\rho^5$) และแรงในทิศ α แปรผันกับมุม และระยะที่อนุภาคทำกับอิเล็กโทรดบนและล่าง.
2. เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้น ที่ระยะ ρ คงที่ แรงบนอนุภาคทั้งในทิศ ρ และ α ลดลงเนื่องจากสนามไฟฟ้าลดลง. อย่างไรก็ตาม ที่ระยะ ρ เปลี่ยน (ระยะ $\rho_{\min}$ ลดลง) ทำให้แรงในทิศ ρ เพิ่มขึ้น และแรงในทิศ α ลดลงเพราะสนามไฟฟ้าลดลง และผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนที่น้อยลง.
3. ตำแหน่งของแรงบนอนุภาคมากที่สุดในทิศ ρ และ α แตกต่างกัน คือ อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดบนและล่าง และอนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง ตามลำดับ.
4. จากสมการของวิธีวิเคราะห์ที่ได้ เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้น แรงสูงสุดบนอนุภาคในทิศ ρ เพิ่มขึ้นโดยแปรผันตาม $\sin^3(\alpha_0/2)/\alpha_0^2$ และแรงสูงสุดบนอนุภาคในทิศ α ลดลงเนื่องจากแปรผันโดยประมาณกับ $\cos^3(\alpha_0)/\left[\alpha_0^2 \sin^4(\alpha_0)\right]$.
5. เมื่อ $\varepsilon_N/\varepsilon_E$ เพิ่มขึ้น ขนาดแรงสูงสุดบนอนุภาคเพิ่มขึ้น. การประมาณแบบ dps สามารถนำมาใช้ได้เมื่อ $\varepsilon_N/\varepsilon_E \le 2$ และ $\alpha_0 \le 30^\circ$ ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 10% แต่เมื่อ $\varepsilon_N/\varepsilon_E$ มีค่าสูงขึ้นควรใช้การคำนวณอย่างละเอียดเพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้อง.

6. การคำนวณแบบ dp และ dps นั้นจะใช้ได้เมื่อตำแหน่งของอนุภาคอยู่ห่างจากอิเล็กโทรด และบริเวณที่สนามไฟฟ้าสูง. ถ้าต้องการใช้เวลาในการคำนวณที่เร็ว การคำนวณแบบ dps สามารถนำมาใช้ได้ที่ตำแหน่งของอนุภาค $\rho \geq \rho_{\min} + 5\sigma$ หรือ $k = 10$ ในช่วงมุม α_0 เท่ากับ 30° ถึง 90° และ $\varepsilon_N / \varepsilon_E \leq 4$ โดยมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของแรงในทิศ ρ และ α น้อยกว่า 10% และ 45% ตามลำดับ. อย่างไรก็ตาม เมื่อตำแหน่งของอนุภาคอยู่ใกล้กับอิเล็กโทรดควรใช้การคำนวณอย่างละเอียดแบบ mps ซึ่งสามารถทำได้ที่ทุกๆ ตำแหน่งของอนุภาค และให้ค่าที่ถูกต้อง.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

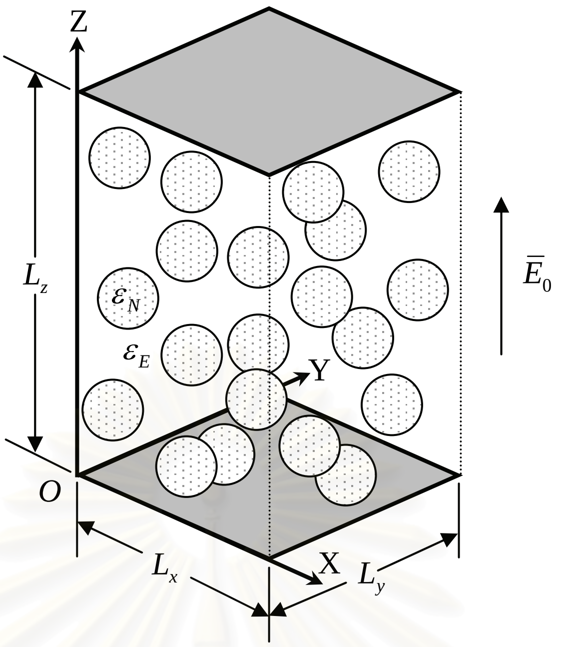
บทที่ 4

การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำกับอนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์

รูปแบบปัญหาเป็นการจำลองอนุภาคที่กระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก. สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอเกิดจากผลของการมีอยู่ของอนุภาค และอนุภาคที่อยู่ใกล้กัน. หัวข้อนี้วิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคโดยใช้แบบจำลองไดโพลและแบบจำลองมัลติโพล. ในที่นี้ แบบจำลองไดโพลและแบบจำลองมัลติโพล หมายถึง การประมาณแรงบนอนุภาคด้วยไดโพลและมัลติโพล ตามลำดับ โดยที่การประมาณแรงทั้งสองวิธีรวมผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดที่ป้อนสนามไฟฟ้าให้กับของไหลอีอาร์. หัวข้อนี้พิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของแบบจำลองมัลติโพลที่นำมาใช้ในการจำลองของไหลอีอาร์. จากนั้นแบบจำลองมัลติโพลที่ใช้พารามิเตอร์ค่าดังกล่าวถูกนำมาใช้ในการจำลองของไหลอีอาร์ และเปรียบเทียบความแตกต่างรวมทั้งข้อดี และข้อเสียกับผลจากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพล. นอกจากนี้ หัวข้อนี้ยังพิจารณาเวลาที่อนุภาคใช้ในการเรียงตัวเป็นโซ่ และความเหมาะสมของตัวแปรที่ใช้ในการวิเคราะห์การจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ด้วย.

4.1 การจัดวาง และข้อมูลทางกายภาพที่ใช้ในการคำนวณ

อนุภาคที่อยู่ในระบบที่ทำการศึกษาเป็นอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมที่มีขนาดเท่ากันทั้งหมด (Monodisperse) และกระจายแบบสุ่มในของไหลซึ่งอยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทรดคู่ขนาน. อิเล็กโทรดบนและล่างมีพื้นที่ $L_x \times L_y$ และอยู่ที่ตำแหน่ง $z = L_z$ และ $z = 0$ ตามลำดับ เมื่อ (x, y, z) แทนระบบคาร์ทีเซียน ดังรูปที่ 4.1. อนุภาคฉนวนมีสภาพยอมสัมพัทธ์ $\varepsilon_N = 8$ ความถ่วงจำเพาะ ρ_N เป็น 1 g/mm^3 และ มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $\sigma = 10$ μm. ของไหลมีสภาพยอมสัมพัทธ์ $\varepsilon_E = 2$. ของไหลมีความหนืด (Viscosity) $\eta = 0.02$ Pa-s. ค่าที่ใช้ในการจำลองข้างต้นอ้างอิงมาจากของไหลอีอาร์จริงซึ่งเป็นอนุภาคอลูมิน่าที่ลอยอยู่ในน้ำมันปิโตรเลียม [15,16,18]. สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก $\bar{E}_0$ ที่ป้อนให้กับของไหลอีอาร์ด้วยคู่ระนาบอิเล็กโทรดมีขนาด 3 kV/mm. ขนาดของอิเล็กโทรดที่ใช้คือ $L_x = L_y = 5\sigma$ และ $L_z = 14\sigma$. จำนวนของอนุภาคฉนวนที่ใช้ในการคำนวณคือ 20 และ 67 ลูก ซึ่งทำให้อัตราส่วนระหว่างปริมาตรของอนุภาคต่อปริมาตรของระบบเป็น 0.03 และ 0.1 ตามลำดับ.



รูปที่ 4.1 ระบบของไหลอีอาร์ที่อนุภาคกระจายแบบสุ่ม.

4.2 วิธีการ และขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณ

แบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพลซึ่งใช้ในการจำลองของไหลอีอาร์ ประมาณแรงที่กระทำบนอนุภาคด้วยไดโพลและมัลติโพล ตามลำดับ. ขั้นตอนในการคำนวณแรงของแบบจำลองทั้งสองเป็นดังต่อไปนี้.

4.2.1 แรงจากการประมาณด้วยแบบจำลองไดโพล

แรงบนอนุภาคประมาณด้วยไดโพล และรวมผลของเงาที่อนุภาคทำกับอิเล็กโทรดบนและล่าง ในรูปที่ 4.1 มีขั้นตอนการคำนวณแรงบนอนุภาค a ในระบบของไหลอีอาร์ดังต่อไปนี้.

1) คำนวณขนาดของไดโพล $\bar{\text{p}}$ ที่เกิดจากการมีอยู่ของอนุภาค a ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$.
2) คำนวณระยะ $\bar{r}_{ab}$ ระหว่างจุดศูนย์กลางของอนุภาค a กับอนุภาค b อื่น และ θ_{ab} ซึ่งเป็นมุมที่ $\bar{r}_{ab}$ ทำกับแกน Z ในระบบพิกัดทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางของอนุภาค a เป็นจุดกำเนิด ดังรูปที่ 2.17 ในหัวข้อที่ 2.9.1 ของบทที่ 2.
3) คำนวณแรงบนอนุภาค a ที่เกิดจากอนุภาค b อื่นในระบบด้วยสมการที่ (2.66) โดยใช้ $\bar{\text{p}}$ จากข้อที่ 1 และ $\bar{r}_{ab}$ และ θ_{ab} จากข้อที่ 2.
4) คำนวณตำแหน่งของเงาที่อนุภาค a ทำกับอิเล็กโทรดบนและล่าง. ในที่นี้ จำนวนเงาของอนุภาคที่กระทำกับแต่ละอิเล็กโทรดเท่ากับ 2.

5) คำนวณระยะ $\vec{r}'_{ab}$ ระหว่างจุดศูนย์กลางของอนุภาค a กับเงาของอนุภาค a ที่กระทำกับอิเล็กโทรดทั้งสอง และมุม θ'_{ab} ที่ $\vec{r}'_{ab}$ ทำกับแกน Z ในระบบพิกัดทรงกลมที่นิยามเช่นเดียวกับข้อที่ 2.
6) คำนวณแรงบนอนุภาค a ที่เกิดจากเงาของอนุภาค a ด้วยสมการที่ (2.66) โดยใช้ $\overline{\mathrm{p}}$ จากข้อที่ 1 และ $\vec{r}'_{ab}$ และ θ'_{ab} จากข้อที่ 5.
7) แรงบนอนุภาค a ทั้งหมดเกิดจากผลรวมของแรงในข้อที่ 3 และ 6.

4.2.2 แรงจากการประมาณด้วยแบบจำลองมัลติโพล

การประมาณแรงบนอนุภาคด้วยแบบจำลองมัลติโพลคำนวณได้จากสนามไฟฟ้าบนอนุภาคโดยใช้สมการที่ (2.52) ถึง (2.54) ในบทที่ 2. การคำนวณสัมประสิทธิ์ $M_{j,k}^{(i)}$ และ $B_{j,k}^{(i)}$ ที่ใช้คำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคในบทที่ 2 ได้จากวิธีทำซ้ำ เมื่อ (i) แทนลำดับที่ในการทำซ้ำ. การคำนวณรวมผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่างเช่นเดียวกับแบบจำลองไดโพล. วิธีการคำนวณแรงบนอนุภาค a ในของไหลอีอาร์เป็นดังนี้.

1) กำหนดอันดับสูงสุดของมัลติโพล N_{mp} และ จำนวนครั้งในการทำซ้ำ N_{iter} ที่ใช้ในการคำนวณ.
2) คำนวณสัมประสิทธิ์ $M_{j,k}^{(0)}$ ที่เกิดจากศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากระนาบอิเล็กโทรดคู่ขนานของแต่ละอนุภาคตามสมการ

$$\varphi = M_{0,0}^{(0)}\bar{P}_{0,0}\left(\cos\theta_C\right) + M_{1,0}^{(0)} r_C \bar{P}_{1,0}\left(\cos\theta_C\right) \tag{4.1}$$

เมื่อ $M_{0,0}^{(0)} = \bar{E}_0 \bullet \left(\bar{C} - \bar{G}\right)$ และ $M_{1,0}^{(0)} = \left|\bar{E}_0\right|$ โดย $M_{n,m}^{(0)}$ ที่ n,m ค่าอื่นเป็นศูนย์

$\bar{C}$ คือ ตำแหน่งที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค

$\bar{G}$ คือ ตำแหน่งใดๆ ที่มีศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์ และ

$\left(r_C, \theta_C, \phi_C\right)$ คือ พิกัดทรงกลมที่มี $\bar{C}$ เป็นจุดกำเนิด.

3) คำนวณสัมประสิทธิ์ $B_{j,k}^{(0)}$ จาก $M_{j,k}^{(0)}$ ด้วยสมการที่ (2.10).
4) คำนวณตำแหน่งและขนาดของเงามัลติโพล $B_{j,k}'^{(0)}$ เนื่องจากอิเล็กโทรดบนและล่างของแต่ละอนุภาคจากวิธีการในภาคผนวก ซ. ในที่นี้ จำนวนเงาของอนุภาคที่กระทำกับแต่ละอิเล็กโทรดเท่ากับ 2 เช่นเดียวกับแบบจำลองไดโพล.
5) เลื่อนขนานมัลติโพล $B_{j,k}^{(0)}$ ของอนุภาค b อื่นในระบบมายัง $\bar{C}$ ของอนุภาค a จะได้สัมประสิทธิ์ $\left[M_{j,k}^{(0)}\right]_p$. เลื่อนขนานเงามัลติโพล $B_{j,k}'^{(0)}$ ที่ทำกับอิเล็กโทรดบนและล่างของทุกอนุภาคมายัง $\bar{C}$ ของอนุภาค a จะได้สัมประสิทธิ์เป็น $\left[M_{j,k}'^{(0)}\right]_{im}$. สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}^{(1)}$ คำนวณได้จาก

$$M_{j,k}^{(1)} = \left[M_{j,k}^{(0)}\right]_p + \left[M_{j,k}'^{(0)}\right]_{im}. \tag{4.2}$$

6) คำนวณข้อ 3 ถึง 5 ซ้ำจนครบตามจำนวน N_{iter} ที่กำหนด.
7) เมื่อได้สัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ จากการคำนวณด้วยวิธีทำซ้ำแล้ว แทนสัมประสิทธิ์ที่ได้ลงในสมการที่ (2.52) ถึง (2.54) เพื่อคำนวณสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาค a ในระบบคาร์ทีเซียน.
8) คำนวณแรงมัลติโพลที่กระทำบนอนุภาค a จากความหนาแน่นประจุบนผิวของอนุภาคและการกระจายของศักย์ไฟฟ้ารอบอนุภาคด้วยสมการที่ (2.60) ถึง (2.62).

4.2.3 การเคลื่อนที่ของอนุภาค

การจัดเรียงตัวของอนุภาค และเวลาที่ใช้ในการจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ สังเกตจากการเคลื่อนที่ และตำแหน่งของอนุภาคด้วยวิธีการดังต่อไปนี้. พิจารณาอนุภาค a มวล m ที่ตำแหน่ง $\bar{r}_a$ ณ เวลา t. การเคลื่อนที่ของอนุภาค a คำนวณได้จาก

$$m\frac{d^2\bar{r}_a}{dt^2} = \bar{F}_a^{dep} + \bar{F}_a^{rep} + \bar{F}_a^{hyd} \tag{4.3}$$

เมื่อ $\bar{F}_a^{dep}$ คือ แรงดีอีพีซึ่งคำนวณได้จากแบบจำลองไดโพล หรือ แบบจำลองมัลติโพล.

$\bar{F}_a^{hyd}$ คือ แรงไฮโดรไดนามิก และ

$\bar{F}_a^{rep}$ คือ แรงผลักบนอนุภาคมีไว้เพื่อป้องกันการซ้อนทับกันของอนุภาค a กับอนุภาคอื่น และการซ้อนทับกันอนุภาค a กับอิเล็กโทรดของระบบ. แรงผลักเทียม $\bar{F}_a^{dep}$ ใช้เป็นประจำในการจำลองเชิงเลขของอนุภาคในของไหลอีอาร์ [14-19]. โดยพื้นฐานแล้วแรง $\bar{F}_a^{dep}$ ต้องมากพอสำหรับป้องกันการซ้อนทับของอนุภาคในระยะใกล้ และต้องลดลงเป็นศูนย์อย่างรวดเร็วที่ระยะไกลเพื่อที่จะได้ไม่ส่งผลกระทบต่ออนุภาคอื่นที่อยู่ไกลออกไป. แรงผลักระยะสั้นระหว่างอนุภาค a กับอนุภาค b ที่ตำแหน่ง $\bar{r}_b$ คำนวณได้ตามสมการ

$$\bar{F}_{ab}^{rep} = 2F_{\max}\exp\left[-100\left(\frac{|\bar{r}_{ab}|}{\sigma} - 1.0\right)\right]\bar{a}_r \tag{4.4}$$

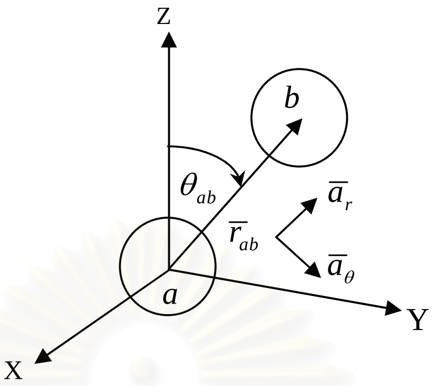
เมื่อ $\bar{a}_r$ และ $\bar{r}_{ab} = \bar{r}_a - \bar{r}_b$ แสดงในรูปที่ 4.2 และ $F_{\max}$ คือแรงดีอีพีสูงสุดที่ได้จากการคำนวณในกรณีของอนุภาคสองลูกสัมผัสกัน. $F_{\max}$ จากแบบจำลองมัลติโพลคำนวณด้วย N_{iter} และ N_{mp} ที่กำหนด. แรงผลักระหว่างอนุภาค a กับอิเล็กโทรดบนและล่างคำนวณจาก

$$\bar{F}_a^{wall} = 2F_{\max}\left\{\exp\left[-100\left(\frac{z_a}{\sigma} - 0.5\right)\right] - \exp\left[-100\left(\frac{(L_z - z_a)}{\sigma} - 0.5\right)\right]\right\}\bar{a}_z \tag{4.5}$$

เมื่อ z_a และ $\bar{a}_z$ คือ ตำแหน่งของอนุภาค a และ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน Z ตามลำดับ. พจน์เอ็กซ์โพเนนเชียลแรกทางด้านขวามือของสมการที่ (4.5) คือแรงผลักเนื่องจากอิเล็กโทรดล่าง และพจน์ที่สองคือแรงผลักเนื่องจากอิเล็กโทรดบน. แรงผลักทั้งหมดที่กระทำบนอนุภาค a คือผลรวมของแรงในสมการที่ (4.4) และ (4.5) เป็นดังสมการ

$$\bar{F}_a^{rep} = \sum_{b,b\neq a}^{N} \bar{F}_{ab}^{rep} + \bar{F}_a^{wall} \tag{4.6}$$

เมื่อ N คือจำนวนอนุภาค.



รูปที่ 4.2 ระบบพิกัดในการคำนวณแรงผลักระหว่างคู่อนุภาค a และ b.

แรงไฮโดรไดนามิกสำหรับอนุภาคทรงกลมคำนวณจากสมการสโตรก คือ

$$\bar{F}_a^{hyd} = -3\pi\sigma\eta \frac{d\bar{r}_a}{dt}. \tag{4.7}$$

สำหรับของไหลอีอาร์ทั่วไป พจน์ของความเร่งทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.3) สามารถละเลยได้เนื่องจากพจน์ของความหนืดทางด้านขวามือมีค่าเด่นกว่ามาก. ดังนั้น เมื่อแทนสมการที่ (4.7) ลงในสมการที่ (4.3) จะได้

$$3\pi\sigma\eta \frac{d\bar{r}_a}{dt} = \bar{F}_a^{dep} + \bar{F}_a^{rep}. \tag{4.8}$$

ค่าที่ใช้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐานของแรง F_n เวลา t_n และระยะทาง r_n คือ

$$F_n = \frac{1}{16}\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma^2\sigma^2\left|\bar{E}_0\right|^2 \tag{4.9}$$

$$t_n = 3\pi\eta\sigma^2 / F_n \tag{4.10}$$

$$r_n = \sigma \tag{4.11}$$

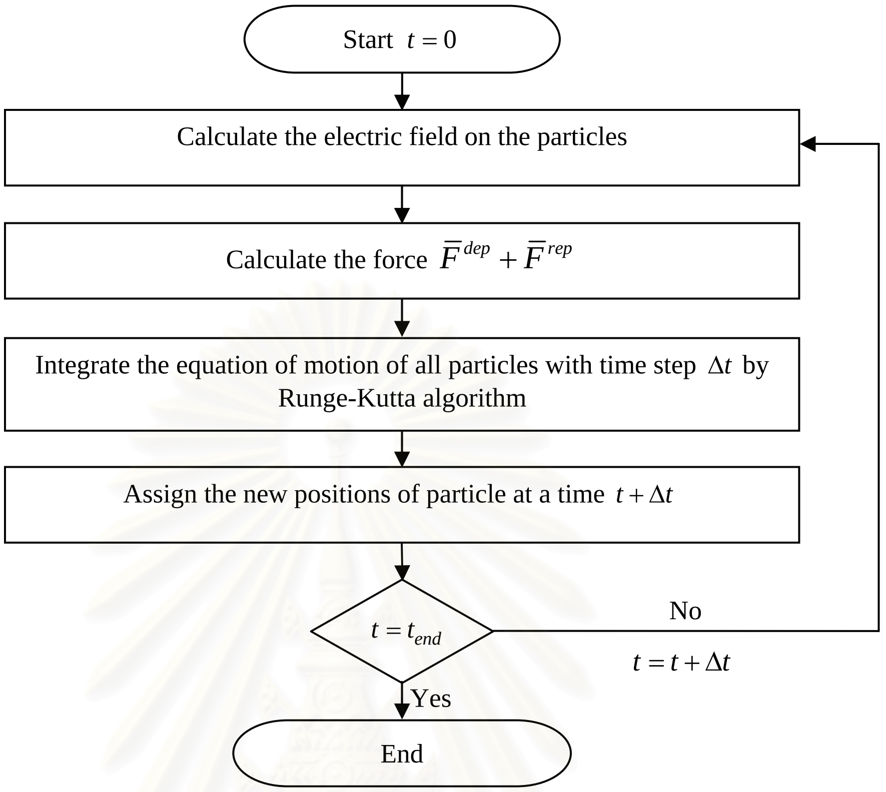
เมื่อ $\gamma = (\varepsilon_N - \varepsilon_E)/(\varepsilon_N + 2\varepsilon_E)$.

สมการที่ (4.8) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d\bar{r}_a^*}{dt^*} = \bar{F}_a^{dep*} + \bar{F}_a^{rep*} \tag{4.12}$$

เมื่อ เครื่องหมาย * แสดงตัวแปรที่ทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว.

การคำนวณตำแหน่งของอนุภาค a ที่เวลา t^* ใช้วิธีการรุงเงอ-คุทตา (Runge-Kutta algorithm). วิธีการคำนวณเป็นไปตามแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 4.3.

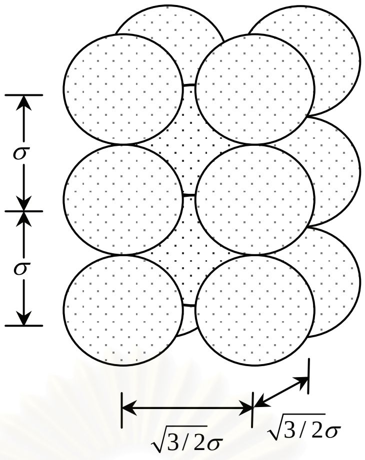


รูปที่ 4.3 แผนภูมิสายงานในการคำนวณตำแหน่งของอนุภาค.

4.3 โครงสร้างของของไหลอีอาร์

อนุภาคในของไหลอีอาร์เรียงตัวกันเป็นโครงข่ายผลึก (lattice) ซึ่งหมายถึงจุดใดๆ ในปริภูมิซึ่งรอบๆ แต่ละจุดนั้นมีการจัดเรียงเหมือนกัน. โครงข่ายผลึกอุดมคติของสถานะที่อนุภาคมีพลังงานต่ำที่สุด หรือมีเสถียรภาพมากที่สุดในของไหลอีอาร์ คือ โครงข่ายผลึกแบบบีซีที (BCT (Body-Centered Tetragonal) lattice) [15,22]. ความยาวของโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีเป็น $\sqrt{3/2}\sigma$, $\sqrt{3/2}\sigma$ และ σ ตามแกน X , Y และ Z ตามลำดับ เมื่อ σ แทนเส้นผ่าศูนย์กลางของอนุภาครูปทรงกลม ดังรูปที่ 4.4.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.4 โครงข่ายผลึกแบบบีซีทีของอนุภาค.

การแสดงลักษณะโครงสร้างของของไหลอีอาร์ในสถานะสถิตใช้ตัวแปรการจัดเรียงอันดับ (Order parameter) คือ c_1, c_2 และ c_3 ซึ่งคำนวณได้จาก

$$c_j = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \exp\left(i\bar{b}_j \bullet \bar{r}_k \right) \right| \tag{4.13}$$

เมื่อ i คือ $\sqrt{-1}$

j คือ 1, 2 และ 3

$\bar{r}_k$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาคที่ k และ

$\bar{b}_j$ คือ รีซิโปรคอลแลตทิซเวกเตอร์ (reciprocal lattice vector) ที่ j ของโครงข่ายผลึกแบบบีซีที.

รีซิโปรคอลแลตทิซเวกเตอร์ คือ เซตของเวกเตอร์ $\bar{b}_j$ ซึ่งทำให้ $\exp\left(i\bar{b}_j \bullet \bar{r}_k \right) = 1$ สำหรับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\bar{r}_k$ ทั้งหมด. รีซิโปรคอลแลตทิซเวกเตอร์ของโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีคำนวณได้จาก

$$\bar{b}_1 = \frac{2\pi}{Vol}\left[\bar{a}_2 \times \bar{a}_3 \right] \tag{4.14}$$

$$\bar{b}_2 = \frac{2\pi}{Vol}\left[\bar{a}_3 \times \bar{a}_1 \right] \tag{4.15}$$

$$\bar{b}_3 = \frac{2\pi}{Vol}\left[\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \right] \tag{4.16}$$

เมื่อ Vol คือ ปริมาตรของเซลล์หนึ่งหน่วย (unit cell) และ

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ คือ เวกเตอร์เลื่อนขนาน (translation vector).

เวกเตอร์เลื่อนขนาน $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งโครงข่ายผลึกสามารถย้ายไปและกลับมาเป็นโครงข่ายผลึกเดิมได้. ในที่นี้ เลือกเวกเตอร์เลื่อนขนานของโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีเป็น

$$\bar{a}_1 = \frac{\sqrt{6}\sigma}{2}\bar{a}_x \qquad (4.17)$$

$$\bar{a}_2 = \frac{\sqrt{6}\sigma}{2}\bar{a}_y \qquad (4.18)$$

$$\bar{a}_3 = \left(\frac{\sqrt{6}\sigma}{4}\right)\bar{a}_x + \left(\frac{\sqrt{6}\sigma}{4}\right)\bar{a}_y + \frac{\sigma}{2}\bar{a}_z \qquad (4.19)$$

เมื่อ $\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน.

เซลล์หนึ่งหน่วย คือเซลล์เล็กที่สุดซึ่งประกอบด้วยอย่างน้อยหนึ่งอนุภาค และประกอบเป็นผลึกซึ่งเกิดจากการเรียงตัวแบบรายคาบของอนุภาคหรือกลุ่มอนุภาค. ปริมาตรของเซลล์หนึ่งหน่วยคำนวณได้จากเวกเตอร์เลื่อนขนานดังนี้

$$Vol = \bar{a}_1 \bullet [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] = \bar{a}_2 \bullet [\bar{a}_3 \times \bar{a}_1] = \bar{a}_3 \bullet [\bar{a}_1 \times \bar{a}_2]. \qquad (4.20)$$

แทนสมการที่ (4.17) ถึง (4.20) ลงในสมการที่ (4.14) ถึง (4.16) จะได้รีซิโปรคอลแลตทิซเวกเตอร์ของโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีเป็น

$$\bar{b}_1 = \left(\frac{4\pi}{\sqrt{6}\sigma}\right)\bar{a}_x - \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)\bar{a}_z \qquad (4.21)$$

$$\bar{b}_2 = \left(\frac{4\pi}{\sqrt{6}\sigma}\right)\bar{a}_y - \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)\bar{a}_z \qquad (4.22)$$

$$\bar{b}_3 = \left(\frac{4\pi}{\sigma}\right)\bar{a}_z. \qquad (4.23)$$

c_1, c_2 และ c_3 แสดงลักษณะสมบัติของโครงสร้าง คือ c_1 และ c_2 แสดงการจัดเรียงตัวของอนุภาคในระนาบ XY ขณะที่ c_3 แสดงการจัดเรียงตัวของอนุภาคตามแนวแกน Z. ค่าของ c_1, c_2 และ c_3 เป็นจำนวนจริงเพราะเป็นขนาดของจำนวนเชิงซ้อน และอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1. c_1, c_2 และ c_3 มีค่าเท่ากับ 1 เมื่ออนุภาคเรียงติดกันตามแนวแกน X, Y และ Z ตามลำดับ แต่เมื่ออนุภาคอยู่กระจัดกระจาย ค่าของตัวแปรทั้งสามไม่เท่ากับ 1. นอกจากนี้ c_1, c_2 และ c_3 มีค่าเท่ากับ 1 พร้อมกันซึ่งถือเป็นค่าอุดมคติก็ต่อเมื่ออนุภาคเรียงชิดติดกันและมีระยะห่างตามรูปที่ 4.4.

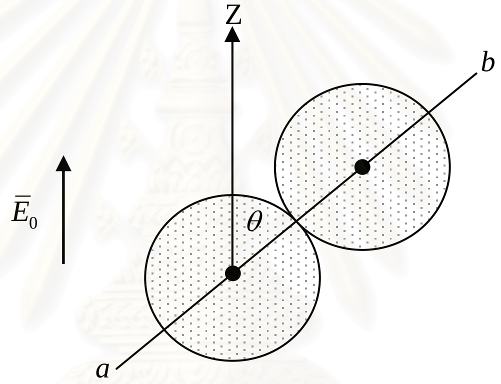
4.4 จำนวนครั้งในการทำซ้ำ N_{iter} และอันดับมัลติโพลสูงสุด N_{mp} ของแบบจำลองมัลติโพล

แรงที่ได้จากแบบจำลองมัลติโพลขึ้นกับตัวแปรในการคำนวณ 2 ตัวคือ N_{iter} และ N_{mp}. หัวข้อนี้ศึกษาผลกระทบของตัวแปรทั้งสองต่อแรงที่ได้จากการประมาณ และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ. วิทยานิพนธ์นี้เริ่มต้นพิจารณาแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของแรงจากแบบจำลองมัลติโพลโดยเปลี่ยนค่า N_{iter} และ N_{mp} ในกรณีที่อนุภาคสองลูกสัมผัสกันซึ่งมีแรงกระทำระหว่างอนุภาคสูงสุด. แรงจากแบบจำลองมัลติโพลนำมาเปรียบเทียบกับแรงจากแบบจำลองไดโพล และแรงที่คำนวณจากวิธีการทำซ้ำจนคำตอบลู่เข้าด้วย $N_{mp} = 100$ เพื่อให้ทราบถึงความต่างของแรงทั้ง

สามจากการเปลี่ยนค่า N_{iter} และ N_{mp}. นอกจากนี้ ผลการคำนวณยังได้ค่าแรงสูงสุด $F_{\max}$ เพื่อนำไปใช้คำนวณแรงผลักในสมการที่ (4.4) และ (4.5). หลังจากทราบผลของ N_{iter} และ N_{mp} ต่อแนวโน้มและความแตกต่างของแรงที่เกิดขึ้นแล้ว ผลดังกล่าวถูกนำมาพิจารณาควบคู่กับเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมื่ออนุภาคในระบบเพิ่มขึ้นเป็น 20 ลูก เพื่อให้ได้ค่า N_{iter} และ N_{mp} ที่เหมาะสม.

4.4.1 แรงที่กระทำบนอนุภาค 2 ลูกที่สัมผัสกัน

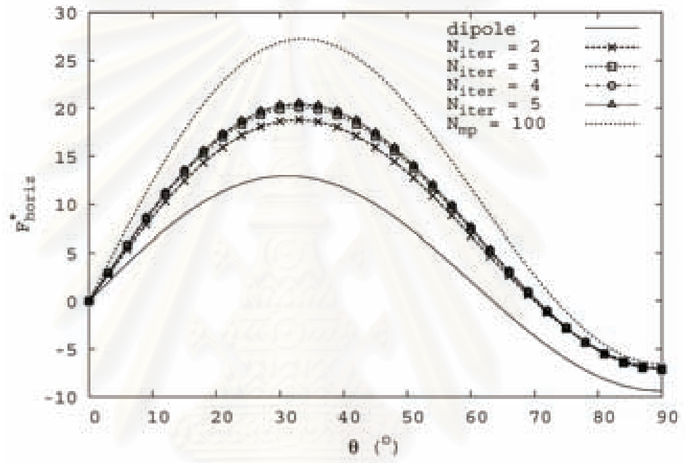
อนุภาคทั้งสองอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$ ในแนวแกน Z โดยสมมติว่าอิเล็กโทรดบนและล่างอยู่ห่างจากอนุภาคทั้งสองมาก. เส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุดศูนย์กลางของอนุภาคทั้งสอง (เส้น ab ในรูปที่ 4.5) ทำมุม θ กับแกน Z. เพื่อให้สามารถนำค่า N_{iter} และ N_{mp} ไปพิจารณาควบคู่กับเวลาที่ใช้ในการคำนวณจากการจำลองของไหลอีอาร์ในหัวข้อต่อไปจึงใช้ค่า σ, $\left|\bar{E}_0\right|$, ε_E และ ε_N เช่นเดียวกับในการจำลองจริงซึ่งระบุไว้ในหัวข้อที่ 4.1.



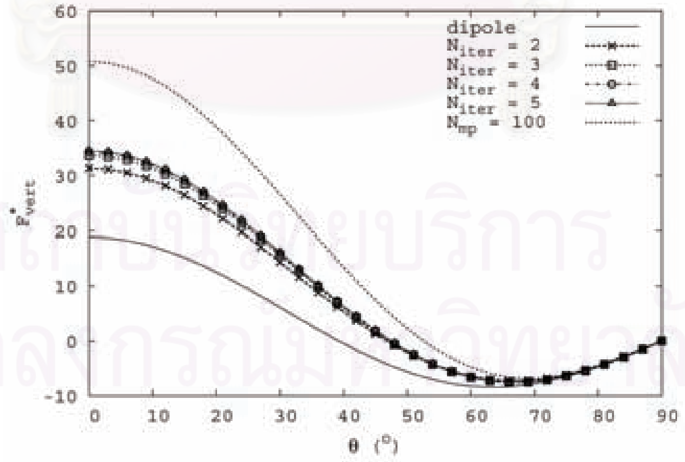
รูปที่ 4.5 อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมสัมผัสกันภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก.

ผลของ N_{iter} ที่มีต่อแรงจากการประมาณด้วยมัลติโพลแสดงในรูปที่ 4.6. แรง F_{horiz} บนอนุภาคในแนวนอน และแรง F_{vert} ในแนวตั้ง คำนวณด้วยค่า $N_{mp}=4$ และ $N_{iter}=2,3,4$ และ 5. รูปที่ 4.6 เปรียบเทียบแรงบนอนุภาคลูกล่างจากการคำนวณ 3 วิธี คือ การประมาณด้วยไดโพล, การประมาณด้วยมัลติโพลซึ่งใช้ $N_{iter}=2,3,4$ และ 5 และการคำนวณจากมัลติโพลโดยใช้ $N_{mp}=100$ ด้วยวิธีทำซ้ำจนคำตอบลู่เข้า. ลักษณะของแรงบนอนุภาคลูกล่างเป็นดังเส้นกราฟแรง $N_{mp}=100$ ในรูปที่ 4.6 คือ เครื่องหมายของแรงเปลี่ยนจากบวกเป็นลบ. การเปลี่ยนเครื่องหมายของแรง หมายถึง แรงเปลี่ยนจากแรงดูด (บวก) เป็นแรงผลัก (ลบ). การประมาณแรงด้วยมัลติโพลให้ค่าแรงบนอนุภาคใกล้เคียงกับแรง $N_{mp}=100$ มากกว่าแรงจากการประมาณด้วยไดโพล ตัวอย่างเช่นค่า F_{horiz} มากที่สุดของแรง $N_{mp}=100$ มีค่าเป็น 1.45 เท่าของแรงจากการประมาณด้วยมัลติโพล ที่ค่า $N_{iter}=2$ และมีค่าเป็น 2.10 เท่าของแรงจากการประมาณด้วยไดโพล ดังตารางที่ 4.1. เมื่อใช้การประมาณด้วยมัลติโพล การเปลี่ยนค่า N_{iter} ไม่มีผลต่อตำแหน่งของแรงมากที่สุด. แรง F_{horiz} มีขนาดแรงดูดสูงสุดที่มุม $\theta=33^\circ$ และมีขนาดแรงผลักสูงสุดที่

$\theta = 90°$ ส่วน F_{vert} มีแรงดูดสูงสุดอยู่ที่ $\theta = 0°$ ตามทิศทาง $\bar{E}_0$ ดังตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.6. จากผลดังกล่าว ทำให้ $F_{\max}$ ในสมการที่ (4.4) และ (4.5) ที่ได้จากกรณีนี้ไม่ทำให้ทิศทางของแรงเปลี่ยนแม้เปลี่ยนค่า N_{iter}. ขนาดของแรง F_{horiz} และ F_{vert} เพิ่มขึ้นตามค่าของ N_{iter}. ที่ค่า $N_{iter} = 2$ ขนาดของแรง F_{horiz} และ F_{vert} มากที่สุดจากการประมาณด้วยมัลติโพลมีค่าเป็น 1.45 และ 1.66 เท่าของแรงจากการประมาณด้วยไดโพล ตามลำดับ. เมื่อค่า N_{iter} สูงขึ้น แรงจากการประมาณด้วยมัลติโพลเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย สังเกตได้จากตารางที่ 4.1 และ รูปที่ 4.6 ยกตัวอย่างเช่น แรงดูดสูงสุดของ F_{horiz} ที่ค่า $N_{iter} = 2$ มีขนาดน้อยกว่าแรงที่ค่า $N_{iter} = 3,4$ และ 5 เท่ากับ 1.07, 1.08 และ 1.09 เท่า ตามลำดับ.



(ก)



(ข)

รูปที่ 4.6 แรงที่กระทำบนอนุภาคลูกล่างในรูปที่ 4.5 จากการประมาณด้วยไดโพล (dipole) การประมาณด้วยมัลติโพล เมื่อ $N_{mp} = 4$ และ $N_{iter} = 2,3,4,5$ และแรง $N_{mp} = 100$ (ก) F^*_{horiz} (ข) F^*_{vert} .

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

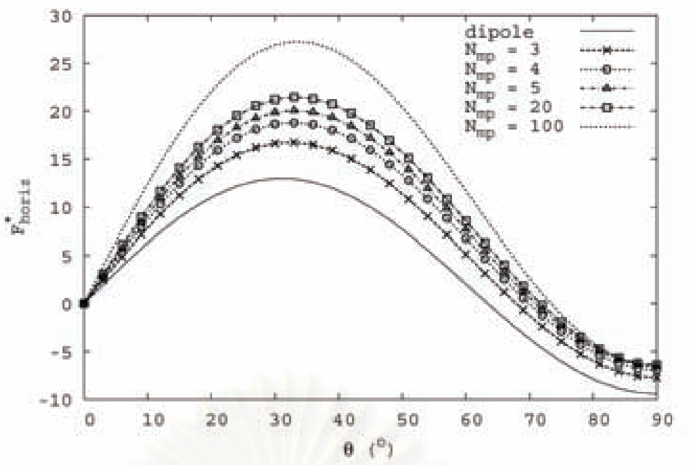
ตารางที่ 4.1 แรงดูด และแรงผลักมากที่สุดของ F^*_{horiz} และ F^*_{vert} บนอนุภาคลูกล่างที่ค่า $N_{mp}=4$.

ประเภทของแรง		F^*_{horiz}				F^*_{vert}			
		แรงดูด		แรงผลัก		แรงดูด		แรงผลัก	
		$\theta(^\circ)$	ขนาด	$\theta(^\circ)$	ขนาด	$\theta(^\circ)$	ขนาด	$\theta(^\circ)$	ขนาด
แรงไดโพล (dipole)		30	12.959	90	9.425	0	18.850	63	8.427
แรงมัลติโพล (multipole)	$N_{iter}=2$	33	18.807	90	6.944	0	31.309	66	7.281
	$N_{iter}=3$	33	20.105	90	7.164	0	33.685	66	7.572
	$N_{iter}=4$	33	20.424	90	7.126	0	34.347	66	7.567
	$N_{iter}=5$	33	20.519	90	7.133	0	34.529	66	7.580
แรง $N_{mp}=100$		33	27.265	90	6.623	0	50.822	69	6.959

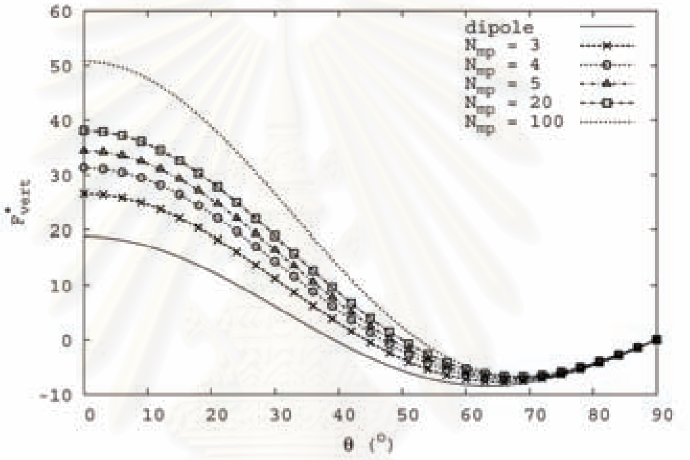
ผลของ N_{mp} ที่มีต่อ F_{horiz} และ F_{vert} เมื่อใช้ค่า $N_{iter}=2$ แสดงในรูปที่ 4.7. ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของแรงบนอนุภาคลูกล่างจากเส้นกราฟแรง $N_{mp}=100$ มีการเปลี่ยนเครื่องหมายของแรงเช่นเดียวกับรูปที่ 4.6. แรงจากการประมาณด้วยมัลติโพลมีขนาดใกล้เคียงกับแรง $N_{mp}=100$ มากกว่าแรงจากการประมาณด้วยไดโพล. ตัวอย่างเช่น เมื่อค่า $N_{mp}=3$ F_{horiz} มากที่สุดของแรง $N_{mp}=100$ มีค่าเป็น 1.63 เท่าของแรงจากการประมาณด้วยมัลติโพล และมีค่าเป็น 2.10 เท่าของแรงจากการประมาณด้วยไดโพล. เมื่อค่า N_{mp} เพิ่มขึ้นขนาดของแรงจากการประมาณด้วยมัลติโพล F_{horiz} และ F_{vert} จะสูงขึ้นตาม และใกล้เคียงกับแรง $N_{mp}=100$ มากขึ้นด้วย. ในตารางที่ 4.2 ขนาดของ F_{horiz} สูงสุดจากการประมาณด้วยมัลติโพล ที่ $N_{mp}=3,4,5$ และ 20 เป็น 1.29, 1.45, 1.55 และ 1.65 เท่าของแรงจากการประมาณด้วยไดโพล ตามลำดับ. ที่ค่า $N_{mp}=3,4,5$ และ 20 ขนาดของ F_{vert} สูงสุดจากการประมาณด้วยมัลติโพลเป็น 1.41, 1.66, 1.83 และ 2.02 เท่าของแรงจากการประมาณด้วยไดโพล ตามลำดับ ดังตารางที่ 4.2. ดังนั้น อัตราการเพิ่มขึ้นของแรง F_{horiz} และ F_{vert} จะลดลงเมื่อ N_{mp} สูงขึ้น ดังรูปที่ 4.7.

ตารางที่ 4.2 แรงดูด และแรงผลักมากที่สุดของ F^*_{horiz} และ F^*_{vert} บนอนุภาคลูกล่างที่ค่า $N_{iter}=2$.

ประเภทของแรง		F^*_{horiz}				F^*_{vert}			
		แรงดูด		แรงผลัก		แรงดูด		แรงผลัก	
		$\theta(^\circ)$	ขนาด	$\theta(^\circ)$	ขนาด	$\theta(^\circ)$	ขนาด	$\theta(^\circ)$	ขนาด
แรงไดโพล (dipole)		30	12.959	90	9.425	0	18.850	63	8.427
แรง มัลติโพล (multipole)	$N_{mp}=3$	33	16.739	90	7.739	0	26.609	66	7.744
	$N_{mp}=4$	33	18.807	90	6.944	0	31.309	66	7.281
	$N_{mp}=5$	33	20.083	90	6.571	0	34.426	66	6.965
	$N_{mp}=20$	33	21.470	90	6.402	0	38.144	69	6.679
แรง $N_{mp}=100$		33	27.265	90	6.623	0	50.822	69	6.959



(ก)



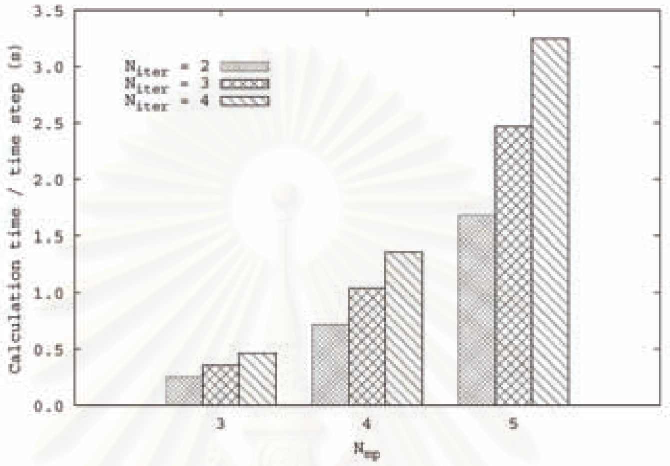
(ข)

รูปที่ 4.7 แรงที่กระทำบนอนุภาคลูกล่างในรูปที่ 4.5 จากการประมาณด้วยไดโพล (dipole) การประมาณด้วยมัลติโพล เมื่อ $N_{iter} = 2$ และ $N_{mp} = 3,4,5,20$ และแรง $N_{mp} = 100$ (ก) F^*_{horiz} และ (ข) F^*_{vert} .

4.4.2 ผลของ N_{iter} และ N_{mp} ต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

สิ่งที่ต้องพิจารณาควบคู่กับแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของแรงคือเวลาในการคำนวณที่ค่า N_{iter} และ N_{mp} ต่างๆ . ในที่นี้ ใช้ค่า $N_{iter} = 2,3,4$ และ $N_{mp} = 3,4,5$. เวลาในการคำนวณต่อช่วงก้าวเวลาบนเครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งมีซีพียูเอเอ็มดี ความเร็ว 1.92 GHz ระบบปฏิบัติการ GNU/Linux สำหรับอนุภาคจำนวน 20 ลูก แสดงดังรูปที่ 4.8. ที่ค่า $N_{iter} = 3$ และ 4 ในรูปที่ 4.8 นั้น เวลาในการคำนวณมากกว่าเวลาที่ค่า $N_{iter} = 2$ อยู่มาก แต่เมื่อพิจารณาประกอบกับผลของ N_{iter} และ N_{mp} ที่มีต่อแรงบนอนุภาคในหัวข้อ 4.4.1 แล้ว พบว่าการเพิ่มค่า N_{iter} ทำให้ขนาดของแรงบนอนุภาคเพิ่มขึ้นในอัตราที่น้อยมากเมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้ในการคำนวณ. ตัวอย่างเวลาในการคำนวณด้วย $N_{iter} = 2$ เมื่อ $N_{mp} = 4$ และ 5 มีค่าประมาณ 0.72 และ 1.68 s ตามลำดับ.

ดังนั้น วิทยานิพนธ์นี้จึงเลือกใช้ค่า $N_{iter} = 2$ และ $N_{mp} = 4$ ซึ่งมีขนาดของแรงบนอนุภาคจากแบบจำลองมัลติโพลเหมาะสมกับเวลาในการคำนวณ. แม้ว่าแบบจำลองมัลติโพลใช้ค่า N_{iter} ต่ำที่สุดซึ่งเท่ากับ 2 แล้วก็ตามก็ยังใช้เวลาในการคำนวณนานกว่าเวลาที่ได้จากแบบจำลองไดโพลซึ่งเท่ากับ 1.92 ms. ที่ค่า $N_{mp} = 3,4,5$ เวลาในการคำนวณจากแบบจำลองมัลติโพลนานกว่าเวลาจากแบบจำลอง ไดโพลประมาณ 131, 186 และ 241 เท่า ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.8.



รูปที่ 4.8 ผลของ N_{iter} และ N_{mp} กับเวลาในการคำนวณต่อช่วงก้าวเวลาด้วยอนุภาค 20 ลูก.

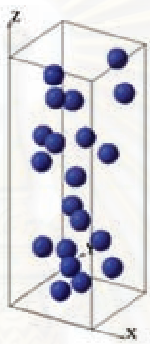
4.5 การจำลองของไหลอีอาร์

หัวข้อนี้เสนอผลการนำแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพลซึ่งใช้ค่า $N_{iter} = 2$ และ $N_{mp} = 4$ จากในหัวข้อที่ 4.4 มาใช้จำลองของไหลอีอาร์. เริ่มต้นจากการจำลองของไหลอีอาร์ที่มีอนุภาค 20 ลูกก่อน หลังจากนั้น จำนวนอนุภาคเพิ่มมากขึ้นเป็น 67 ลูก เพื่อพิจารณาผลที่เกิดขึ้นกับของไหลอีอาร์ที่ใกล้เคียงกับการใช้งานจริง. การจำลองของไหลอีอาร์ทั้งที่มีอนุภาคจำนวนน้อย และที่ใกล้เคียงกับการใช้งานจริงนั้น เพื่อศึกษาลักษณะสมบัติของของไหลอีอาร์ และเปรียบเทียบผลจากแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล รวมทั้งวิเคราะห์ความเหมาะสมของตัวแปรที่นำมาใช้พิจารณาการจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ด้วย. ค่าต่างๆ ที่ใช้ในการจำลองเป็นไปตามหัวข้อที่ 4.1 โดยมีค่า $t_n = 75$ ms. สนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$ ถูกป้อนที่เวลา $t = 0$ ms ด้วยระนาบอิเล็กโทรดคู่ขนานซึ่งทำให้อนุภาคฉนวนซึ่งลอยอยู่ในของไหลอีอาร์เริ่มเคลื่อนที่. จำนวนช่วงก้าวของเวลา (time step) ที่ใช้ คือ 50,000 ช่วง. การเลือกระยะเวลาที่ห่างกันของแต่ละช่วงก้าว Δt^* มีผลต่อความแม่นยำในการอินทิเกรตสมการการเคลื่อนที่. ที่ Δt^* มีค่าน้อย การคำนวณมีความแม่นยำสูงแต่ใช้เวลาการคำนวณนาน. เพื่อลดเวลาการคำนวณลง ค่า Δt^* ถูกเพิ่มขึ้นจาก $\Delta t^* = 1\times10^{-5}$ ถึง $\Delta t^* = 16\times10^{-5}$ และสังเกตความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของอนุภาคจากการอินทิเกรตเปรียบเทียบกัน. ที่ค่า $\Delta t^* \ge 16\times10^{-5}$ การอินทิเกรตมี

ความคลาดเคลื่อนสูง และตำแหน่งของอนุภาคมีการซ้อนทับกัน. ในที่นี้ การจำลองจึงเลือกใช้ค่า $\Delta t^* = 8\times10^{-5}$ เพื่อให้ได้ความแม่นยำสูง และไม่ใช้เวลาการคำนวณนานเกินไป.

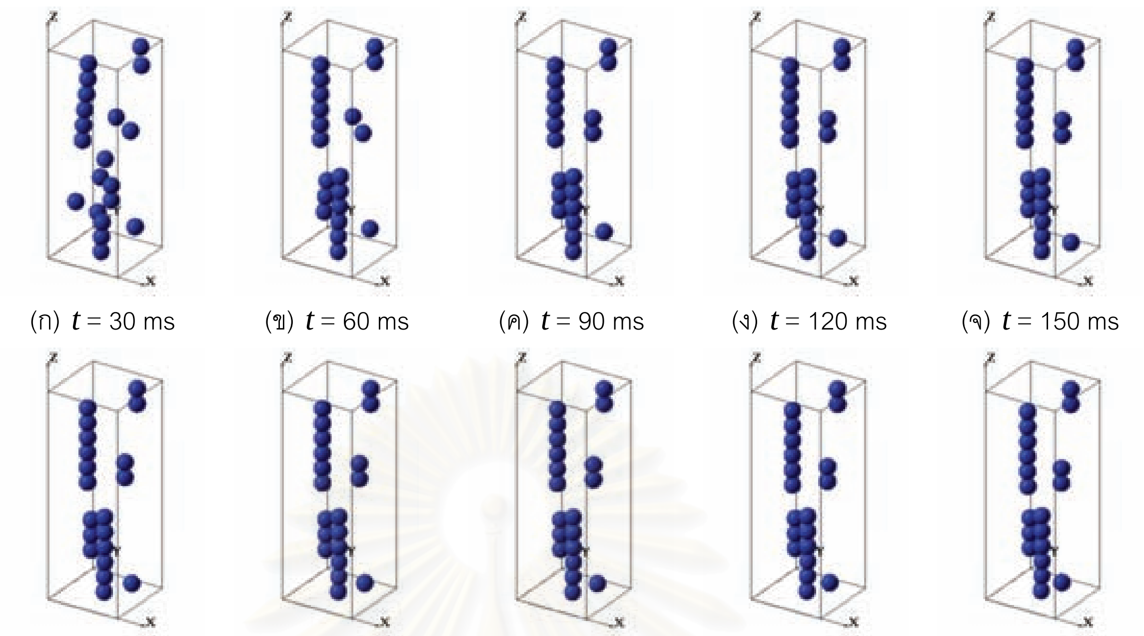
4.5.1 การจำลองของไหลอีอาร์ที่มีอนุภาคจำนวน 20 ลูก

จำนวนอนุภาคในของไหลอีอาร์เท่ากับ 20 ลูก นั้น มีอัตราส่วน ϕ_V ระหว่างปริมาตรของอนุภาคต่อปริมาตรของระบบคือ 0.03 . ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคในการคำนวณแสดงไว้ในรูปที่ 4.9. การเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาคทุกๆ 30 ms ซึ่งคำนวณโดยใช้แบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพลแสดงไว้ในรูปที่ 4.10 และ 4.11 ตามลำดับ.



รูปที่ 4.9 ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคฉนวนจำนวน 20 ลูกในการจำลองของไหลอีอาร์.

อนุภาคในของไหลอีอาร์ที่จำลองด้วยแบบจำลองไดโพลนั้นเริ่มจัดเรียงตัวและสร้างโซ่อนุภาคขนาดสั้นๆ แต่โซ่อนุภาคเหล่านี้ยังจัดเรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าได้ไม่ดี ดังรูปที่ 4.10(ก). ที่ $t = 90$ ms อนุภาคจับตัวกันเป็นโซ่อนุภาคขนาดสั้นๆ ทั้งหมด และมีเพียงอนุภาคเดียวที่แยกตัวออกไปดังรูปที่ 4.10(ค). เมื่อเวลาผ่านไป อนุภาคและโซ่อนุภาคเคลื่อนตัวเข้าใกล้กันมากขึ้นและการจัดเรียงตัวของอนุภาคตามแนวสนามไฟฟ้าดีขึ้นดังรูปที่ 4.10(ง) ถึง (ช). หลังจากนั้น โซ่อนุภาคเริ่มจัดเรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าดังรูปที่ 4.10(ซ) ถึง (ญ) แต่ความแตกต่างของการเรียงตัวและตำแหน่งของอนุภาคระหว่างรูปที่ 4.10(ซ) กับ (ญ) มีเพียงเล็กน้อยเท่านั้น.

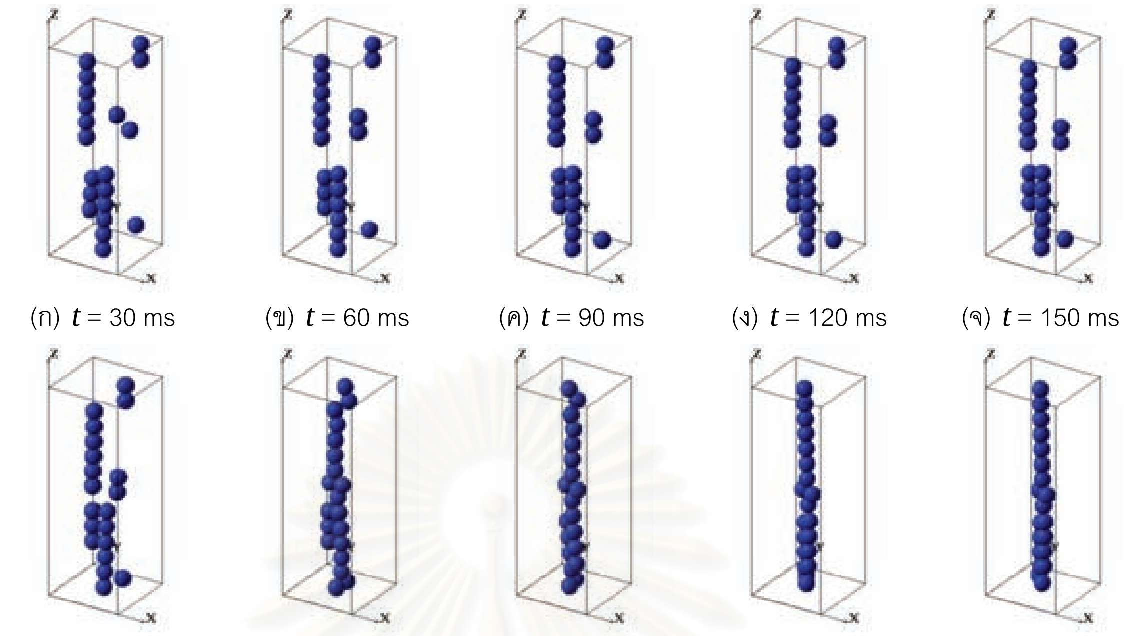


(ก) t = 30 ms (ข) t = 60 ms (ค) t = 90 ms (ง) t = 120 ms (จ) t = 150 ms

(ฉ) t = 180 ms (ช) t = 210 ms (ซ) t = 240 ms (ฌ) t = 270 ms (ญ) t = 300 ms

รูปที่ 4.10 ตำแหน่งของอนุภาคฉนวนจำนวน 20 ลูกในของไหลอีอาร์ทุกๆ 30 ms เมื่อใช้แบบจำลองไดโพล.

เมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล ที่ $t = 30$ ms อนุภาคเริ่มเกาะตัวกันและสร้างโซ่อนุภาคขนาดสั้นๆ ตามแนวสนามไฟฟ้าดังรูปที่ 4.11(ก) และการจัดเรียงตัวของอนุภาคดีกว่าผลที่ได้จากแบบจำลองไดโพลที่เวลาเดียวกัน. จากนั้น อนุภาคเริ่มเรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้า และเกาะกันเป็นโซ่อนุภาคที่ยาวขึ้น ในขณะที่โซ่อนุภาคก็เคลื่อนที่เข้าใกล้กันมากขึ้นด้วย ดังรูปที่ 4.11(ข) ถึง (ฉ). ที่ $t = 210$ ms โซ่อนุภาคขนาดสั้นและยาวรวมเข้าด้วยกันเป็นโซ่อนุภาคที่เชื่อมต่อระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่างดังรูปที่ 4.11(ช) (ที่เวลาเดียวกันนี้อนุภาคจากแบบจำลองไดโพลเพิ่งเริ่มจัดเรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าเท่านั้น). ที่ $t = 300$ ms การจัดเรียงตัวของโซ่อนุภาคตามแนวสนามไฟฟ้าเกือบสมบูรณ์ ดังรูปที่ 4.11(ญ). ดังนั้น เวลาที่อนุภาคใช้เชื่อมต่ออิเล็กโทรดบนและอิเล็กโทรดล่างจากแบบจำลองมัลติโพลนั้นน้อยกว่าเวลาที่ได้จากแบบจำลองไดโพล (465 ms) ประมาณ 2.2 เท่า.



(ก) t = 30 ms (ข) t = 60 ms (ค) t = 90 ms (ง) t = 120 ms (จ) t = 150 ms

(ฉ) t = 180 ms (ช) t = 210 ms (ซ) t = 240 ms (ฌ) t = 270 ms (ญ) t = 300 ms

รูปที่ 4.11 ตำแหน่งของอนุภาคฉนวนจำนวน 20 ลูกในของไหลอีอาร์ทุกๆ 30 ms เมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล.

นอกจากการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคสามารถสังเกตเห็นได้จากรูปที่ 4.10 และ 4.11 แล้ว การเปลี่ยนตำแหน่ง และการจัดเรียงตัวของอนุภาคยังสามารถใช้ค่าระยะกระจัดยกกำลังสองเฉลี่ย (mean square displacement, $\langle R^2 \rangle$) เป็นตัวบ่งชี้ได้อีกด้วย. $\langle R^2 \rangle$ ของอนุภาค a ที่เวลา t ใดๆ คำนวณได้จากวิธีการดังต่อไปนี้.

คำนวณระยะกระจัดยกกำลังสองของอนุภาค a ที่เวลา t ได้จาก

$$\left[R_a(t)\right]^2 = \left[x_a(t) - x_a(0)\right]^2 + \left[y_a(t) - y_a(0)\right]^2 + \left[z_a(t) - z_a(0)\right]^2 \qquad (4.24)$$

เมื่อ $x_a(t)$, $y_a(t)$ และ $z_a(t)$ เป็นตำแหน่งของอนุภาค a ที่เวลา t ในระบบคาร์ทีเซียน และ $x_a(0)$, $y_a(0)$ และ $z_a(0)$ เป็นตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาค a ที่เวลา $t = 0$.

ค่าระยะกระจัดยกกำลังสองเฉลี่ยคำนวณได้จากสมการ

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} \left[R_a(t)\right]^2 \qquad (4.25)$$

เมื่อ N แทนจำนวนของอนุภาค.

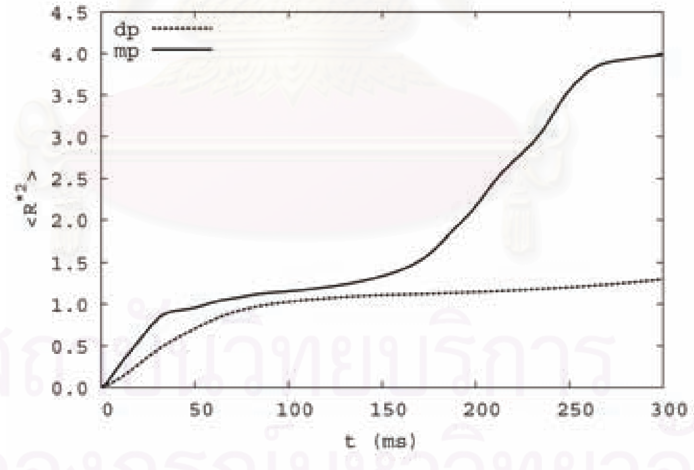
ทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $r_n = \sigma$ จะได้

$$\langle R^{*2} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} \left[R_a^*(t)\right]^2 \qquad (4.26)$$

เมื่อ * แทนตัวแปรซึ่งทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การเปลี่ยนแปลงของค่า $\langle R^{*2} \rangle$ ตามเวลาแสดงในรูปที่ 4.12. ในช่วงแรกค่า $\langle R^{*2} \rangle$ ของแบบจำลองมัลติโพลมีการเปลี่ยนแปลงที่เร็วกว่าค่าของแบบจำลองไดโพล เนื่องจากความชันของกราฟสูงกว่าซึ่งเกิดจากอนุภาคเริ่มเกาะกันเป็นโซ่อนุภาคหลายๆ เส้น ทำให้การเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาคสูงขึ้นมากอย่างเห็นได้ชัด. หลังจากที่อนุภาคเกาะกันเป็นโซ่แล้ว การเคลื่อนที่ของอนุภาคจากแบบจำลองมัลติโพลลดลงอย่างช้าๆ สังเกตจากความชันของกราฟที่ค่อยๆ ลดลงในรูปที่ 4.12. ที่เวลาประมาณ 175 ms โซ่อนุภาคหลายเส้นรวมเข้าด้วยกัน และจัดเรียงอนุภาคใหม่ส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของค่า $\langle R^{*2} \rangle$ อย่างรวดเร็วอีกครั้งหนึ่ง สังเกตได้จากความชันของกราฟที่เพิ่มสูงขึ้นอีกครั้ง. ที่เวลาประมาณ 250 ms หลังจากที่โซ่อนุภาคหลายสายรวมกันเป็นสายยาวเชื่อมต่อระหว่างอิเล็กโทรดแล้ว ทำให้การเคลื่อนที่หรือการเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาคลดน้อยลง. ค่า $\langle R^{*2} \rangle$ ของแบบจำลองไดโพลเพิ่มขึ้นในช่วงแรกเช่นเดียวกับค่า $\langle R^{*2} \rangle$ ของแบบจำลองมัลติโพล และอัตราการเพิ่มขึ้นค่อยๆ ลดลง และลดลงมากหลังจากเวลาประมาณ 150 ms. ที่เวลา 300 ms เมื่อเปรียบเทียบกับการจัดเรียงตัวในรูปที่ 4.10(ญ) อนุภาคที่จำลองด้วยแบบจำลองไดโพลไม่เชื่อมต่อระหว่างอิเล็กโทรด และมีการเคลื่อนที่ของอนุภาคน้อยกว่าทำให้ค่าของ $\langle R^{*2} \rangle$ ต่ำกว่าค่าที่ได้จากแบบจำลองมัลติโพล. ผลที่ได้จากการใช้ $\langle R^{*2} \rangle$ ในการสังเกตการเคลื่อนที่ของอนุภาคสอดคล้องกับผลที่ได้จากรูปที่ 4.10 และ 4.11.



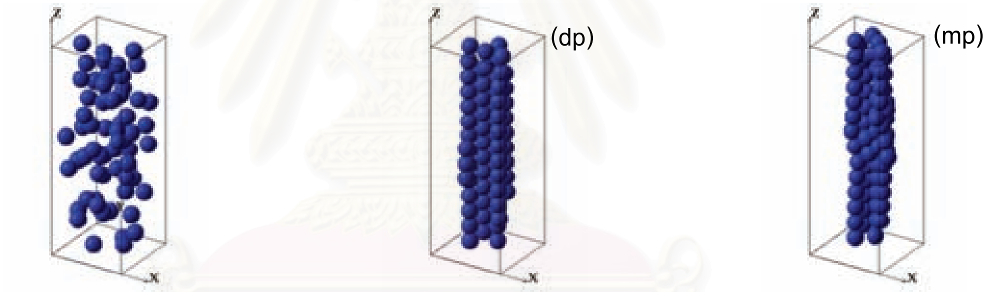
รูปที่ 4.12 $\langle R^{*2} \rangle$ จากการจำลองโดยใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp).

4.5.2 **การจำลองของไหลอีอาร์ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูก**

หัวข้อนี้ศึกษาลักษณะสมบัติของของไหลอีอาร์ที่มีอัตราส่วนปริมาตรสูงขึ้นเป็น $\phi_V = 0.1$ ซึ่งใกล้เคียงกับของไหลอีอาร์ที่ใช้งานจริง. ของไหลอีอาร์ที่ใช้ในการจำลองมี 3 ระบบคือ (a), (b) และ (c) ซึ่งมีตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคในของไหลอีอาร์แตกต่างกัน. ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคในของไหลอีอาร์ทั้ง 3 ระบบ และผลการจำลองโดยใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลอง

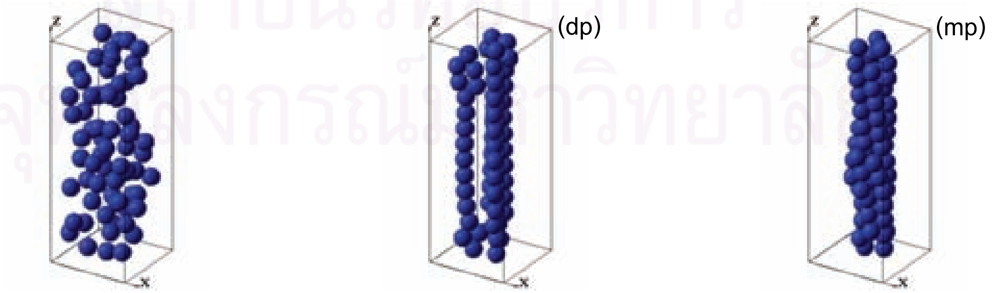
มัลติโพล (mp) ที่เวลา 300 ms แสดงไว้ในรูปที่ 4.13 ถึง 4.15. รายละเอียดการเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาคในระบบทั้งสามทุกๆ 60 ms แสดงอยู่ในภาคผนวก ฌ.

รูปที่ 4.13 ถึง 4.15 แสดงว่าการจัดเรียงตัวของอนุภาคทั้ง 3 ระบบขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาค. ในระบบ (a) อนุภาคที่จำลองด้วยแบบจำลองไดโพลจัดเรียงตัวตามทิศของสนามไฟฟ้าดีมาก และช่องว่างระหว่างอนุภาคมีน้อยมาก ดังรูปที่ 4.13(ข). ส่วนในระบบ (b) และ (c) นั้น การจัดเรียงตัวของอนุภาคจากแบบจำลองไดโพลยังไม่ดีเท่ากับในระบบ (a) สังเกตจากช่องว่างระหว่างโซ่อนุภาคในรูปที่ 4.14(ข) และ 4.15(ข). การจัดเรียงตัวของอนุภาคจากการใช้แบบจำลองมัลติโพลของทั้ง 3 ระบบตามแนวสนามไฟฟ้าไม่ดีเท่ากับผลจากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพล ดังรูปที่ 4.13(ค), 4.14(ค) และ 4.15(ค). อย่างไรก็ตาม อนุภาคของทั้ง 3 ระบบจากแบบจำลองมัลติโพลที่เวลา 300 ms อยู่ชิดติดกันมากกว่าอนุภาคจากแบบจำลองไดโพล. แม้ว่าตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคในการจำลองแตกต่างกัน การจัดเรียงตัวของอนุภาคจากแบบจำลองมัลติโพลมีความสม่ำเสมอ เนื่องจากอนุภาคทั้ง 3 ระบบเรียงชิดติดกัน และมีช่องว่างระหว่างอนุภาคน้อยเหมือนกัน.



(ก) t = 0 ms (ข) t = 300 ms (ค) t = 300 ms

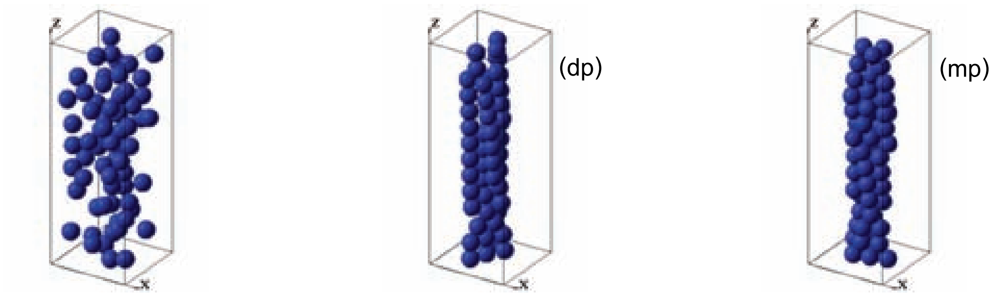
รูปที่ 4.13 ตำแหน่งของอนุภาคเริ่มต้น และที่เวลา 300 ms ในของไหลอีอาร์ระบบ (a) จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp).



(ก) t = 0 ms (ข) t = 300 ms (ค) t = 300 ms

รูปที่ 4.14 ตำแหน่งของอนุภาคเริ่มต้น และที่เวลา 300 ms ในของไหลอีอาร์ระบบ (b) จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp).

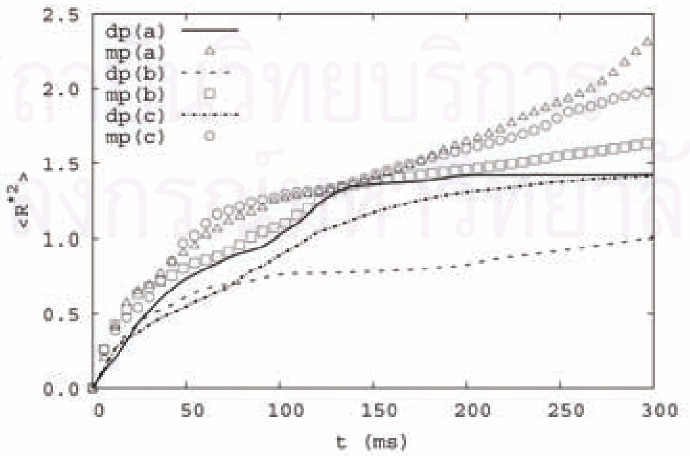
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) t = 0 ms　　(ข) t = 300 ms　　(ค) t = 300 ms

รูปที่ 4.15 ตำแหน่งของอนุภาคเริ่มต้น และที่เวลา 300 ms ในของไหลอีอาร์ระบบ (c) จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp).

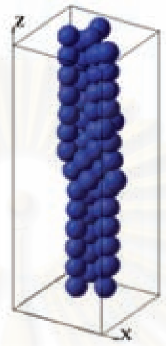
การเปลี่ยนแปลงของค่า $\langle R^{*2} \rangle$ ตามเวลาของอนุภาคทั้ง 3 ระบบจากการใช้แบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพลเป็นดังรูปที่ 4.16. ในช่วงแรกค่าของ $\langle R^{*2} \rangle$ ทั้ง 3 ระบบจากการใช้แบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพลเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว โดยสังเกตได้จากความชันของกราฟ. ที่เป็นเช่นนี้ เพราะอนุภาคมีการเคลื่อนที่มากเพื่อสร้างโซ่หรือคู่ของอนุภาค. ค่าของ $\langle R^{*2} \rangle$ จากการใช้แบบจำลองไดโพลของระบบ (a) ลู่เข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่งที่เวลาประมาณ 300 ms แต่ค่า $\langle R^{*2} \rangle$ ของระบบ (b) และ (c) ยังคงเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ. การเปลี่ยนแปลงของระบบ (a) สอดคล้องกับผลจากแบบจำลองไดโพลในรูปที่ 4.13(ข) ซึ่งอนุภาคจัดเรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าได้ดี และช่องว่างสำหรับให้อนุภาคเคลื่อนที่มีน้อยมาก. แม้ว่า $\langle R^{*2} \rangle$ ของระบบ (b) และ (c) จากการใช้แบบจำลองไดโพลยังไม่ลู่เข้า แต่อัตราการเพิ่มขึ้นของค่า $\langle R^{*2} \rangle$ ลดลงมากจากในช่วงแรกของการคำนวณ. เมื่อใช้แรงจากแบบจำลองมัลติโพล $\langle R^{*2} \rangle$ ของทั้ง 3 ระบบมีค่ามากกว่า $\langle R^{*2} \rangle$ ของแบบจำลองไดโพลซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีการเคลื่อนที่ของอนุภาคมากกว่า. $\langle R^{*2} \rangle$ ของทั้ง 3 ระบบจากการใช้แบบจำลองมัลติโพลยังไม่คงที่ และยังคงมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ที่เวลา 300 ms.



รูปที่ 4.16 $\langle R^{*2} \rangle$ ของระบบ (a), (b) และ (c) ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูกซึ่งได้จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp).

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อย่างไรก็ตาม จากการสังเกตการเคลื่อนที่ของอนุภาคเมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล ที่เวลานานขึ้น พบว่าอนุภาคมีการเคลื่อนที่น้อยลงมาก ยกตัวอย่างเช่น การจัดเรียงตัวของอนุภาคของระบบ (a) โดยใช้แบบจำลองมัลติโพล ที่เวลา 380 ms ดังรูปที่ 4.14. ดังนั้น การใช้ค่า $\langle R^{*2} \rangle$ เป็นตัวบ่งชี้การจัดเรียงตัวของอนุภาคนั้นอาจไม่เหมาะสมเมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพลในการจำลองระบบของไหลอีอาร์.

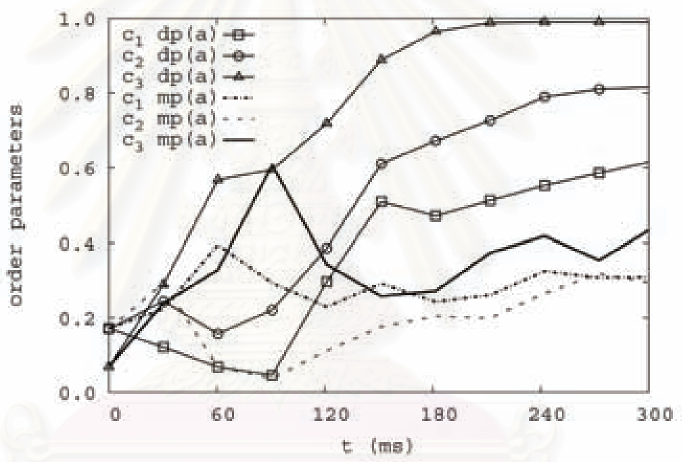


รูปที่ 4.17 ตำแหน่งของอนุภาคฉนวนจำนวน 67 ลูกในของไหลอีอาร์ระบบ (a) เมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล ที่เวลา 380 ms.

ค่าของตัวแปรการจัดเรียงอันดับ c_1, c_2 และ c_3 ที่ $t = 300$ ms จากการจำลองของไหลอีอาร์ระบบ (a), (b) และ (c) ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูกด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพลแสดงไว้ในตารางที่ 4.3. การเคลื่อนที่ของอนุภาคเพื่อจัดเรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าส่งผลให้ค่า c_1, c_2 และ c_3 มีค่าแกว่งไปมา ยกตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงค่า c_1, c_2 และ c_3 ของระบบ (a) ดังรูปที่ 4.18. ที่ $t = 300$ ms ค่าของ c_3 ของทั้ง 3 ระบบจากการใช้แบบจำลองไดโพลมากกว่าค่าของ c_3 จากการใช้แบบจำลองมัลติโพล แสดงว่าอนุภาคเรียงตัวตามแนวแกน Z ได้ดีกว่าอนุภาคจากการใช้แบบจำลองมัลติโพล. ค่าของ c_1 และ c_2 เกือบทุกระบบจากการใช้แบบจำลองไดโพลมากกว่าค่าที่ได้จากการใช้แบบจำลองมัลติโพล. อย่างไรก็ตาม ค่า $c_1 =$ 0.30 ของระบบ (b) จากการใช้แบบจำลองไดโพลน้อยกว่าค่า $c_1 =$ 0.45 ของระบบ (b) จากการใช้แบบจำลองมัลติโพลอยู่เล็กน้อย. ดังนั้น โครงสร้างของอนุภาคในระนาบ XY จากการใช้แบบจำลองไดโพลดีกว่าแบบจำลองมัลติโพล. ผลการจำลองแสดงให้เห็นว่า อนุภาคในของไหลอีอาร์เมื่อจำลองด้วยแบบจำลองไดโพลมีโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีดีกว่าอนุภาคเมื่อจำลองด้วยแบบจำลองมัลติโพล. เนื่องจากการสร้างโครงข่ายผลึกแบบบีซีทีโดยใช้แบบจำลองมัลติโพลใช้เวลานานกว่าแบบจำลองไดโพล หัวข้อนี้จึงสรุปเป็นนัยได้ว่า อนุภาคในของไหลอีอาร์ซึ่งใช้งานจริงใช้เวลานานในการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที หรืออาจจะไม่มีการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที.

ตารางที่ 4.3 ค่าของ c_1, c_2 และ c_3 ที่ $t = 300\,\text{ms}$ จากการจำลองของไหลอีอาร์ระบบ (a), (b) และ (c) ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูกด้วยแบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp).

ระบบ	แบบจำลอง	ตัวแปรการจัดเรียงอันดับ		
		c_1	c_2	c_3
(a)	dp	0.62	0.82	0.99
	mp	0.31	0.29	0.44
(b)	dp	0.30	0.54	0.37
	mp	0.45	0.19	0.31
(c)	dp	0.32	0.47	0.55
	mp	0.08	0.43	0.13



รูปที่ 4.18 การเปลี่ยนแปลงของค่า c_1, c_2 และ c_3 ตามเวลาของของไหลอีอาร์ระบบ (a) ซึ่งมีอนุภาคจำนวน 67 ลูก จากการใช้แบบจำลองไดโพล (dp) และแบบจำลองมัลติโพล (mp).

4.6 สรุปผล

1. อนุภาคในของไหลอีอาร์จากการใช้แบบจำลองมัลติโพลให้ผลที่ใกล้เคียงกับของไหลอีอาร์จริงเนื่องจากแรงบนอนุภาคที่ใกล้เคียงกว่าแรงจากการใช้แบบจำลองไดโพล.
2. จำนวนครั้งในการทำซ้ำ N_{iter} และอันดับมัลติโพลสูงสุด N_{mp} ที่ใช้ในแบบจำลองมัลติโพลส่งผลต่อแรงที่กระทำบนอนุภาค และต้องเลือกค่าทั้งสองให้เหมาะสมกับเวลาในการคำนวณ. วิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้ค่า $N_{iter} = 2$ และ $N_{mp} = 4$.
3. การจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาค.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. เมื่ออัตราส่วนปริมาตรระหว่างอนุภาคต่อระบบของไหลอีอาร์น้อย เวลาในการจัดเรียงตัวของอนุภาคเพื่อเชื่อมต่อระหว่างอิเล็กโทรดจากการใช้แบบจำลองมัลติโพลสั้นกว่าเวลาที่ได้จากการใช้แบบจำลองไดโพล.
5. เมื่ออัตราส่วนปริมาตรระหว่างอนุภาคต่อระบบของไหลอีอาร์สูงขึ้นใกล้เคียงกับของไหลอีอาร์ที่ใช้งานจริง อนุภาคจากการใช้แบบจำลองมัลติโพลเคลื่อนที่มากกว่า แต่เรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าด้อยกว่าอนุภาคจากการใช้แบบจำลองไดโพล.
6. การจัดเรียงตัวของอนุภาคจากการใช้แบบจำลองมัลติโพลมีความสม่ำเสมอกว่าการใช้แบบจำลองไดโพล.
7. การใช้ค่าระยะกระจัดยกกำลังสองเฉลี่ย $\left\langle R^{*2} \right\rangle$ เป็นตัวบ่งชี้การจัดเรียงตัวของอนุภาคนั้นอาจไม่เหมาะสมเมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล.
8. อนุภาคในของไหลอีอาร์ซึ่งใช้งานจริงใช้เวลานานในการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที หรืออาจจะไม่มีการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

สรุปและข้อเสนอแนะ

วิทยานิพนธ์นี้พัฒนาวิธีการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวนรูปทรงกลมด้วยวิธีการกระจายมัลติโพลซ้ำ และประยุกต์ใช้วิธีการดังกล่าวในการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคในปัญหาที่ยังไม่ได้รับการศึกษาอย่างละเอียด. วิธีการดังกล่าวเป็นวิธีวิเคราะห์ซึ่งใช้วิธีเงามัลติโพลโดยใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำ. ทฤษฎีและหลักการคำนวณต่างๆ ของวิธีเงามัลติโพลที่กล่าวในบทที่ 2 เป็นการวิเคราะห์หาสมการจากการกำหนดรูปแบบการจัดเรียงที่พิจารณาเพื่อให้ได้กระบวนการคำนวณสำหรับการประยุกต์ใช้งานอนุภาคฉนวนรูปทรงกลม.

ปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นรูปแบบของอนุภาคฉนวนในตัวกลางที่เป็นฉนวนซึ่งมีดังต่อไปนี้ ปัญหาแรกคือ อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมอยู่ในกับดักอนุภาคอย่างง่ายซึ่งแทนด้วยระนาบอิเล็กโทรดเอียงซึ่งสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอเกิดจากอิเล็กโทรดโดยตรง. ปัญหาที่สองคือ อนุภาคฉนวนแขวนลอยอยู่ในของไหลซึ่งเป็นฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอซึ่งแทนด้วยระนาบอิเล็กโทรดแบบขนานซึ่งความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าเกิดจากการมีอยู่ของอนุภาค.

อนุภาคฉนวนในกับดักอนุภาคอย่างง่าย

การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำในปัญหานี้นำมาใช้คำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคเพื่อศึกษาพฤติกรรมของแรงบนอนุภาคในกับดักอนุภาค. แรงบนอนุภาคที่ได้จากการคำนวณโดยใช้มัลติโพลและรวมผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดทุกชุด (mps) มีความถูกต้องและแม่นยำกว่าการประมาณด้วยไดโพล (dp) และการประมาณด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก (dps). ดังนั้น พฤติกรรมของแรงจากการคำนวณแบบ mps จึงใกล้เคียงกับแรงบนอนุภาคที่เกิดขึ้นจริง. พฤติกรรมของแรงต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ตำแหน่งของอนุภาค (ρ,α) ต่างๆ กัน สรุปได้ดังนี้.

แรงบนอนุภาคขึ้นกับตำแหน่งของอนุภาคเพราะตัวแปรทั้งสองมีผลทำให้สนามไฟฟ้าบนอนุภาคเปลี่ยน. ที่ตำแหน่งของอนุภาคใดๆ แรงบนอนุภาคมีทั้ง 2 ทิศทางคือทั้งในทิศ ρ และ α. การประมาณแบบ dps มีแรงบนอนุภาคทั้งสองทิศทางเช่นกันแต่มีขนาดของแรงน้อยกว่าแบบ mps ส่วนการประมาณแบบ dp มีแรงเฉพาะในทิศ ρ เท่านั้น. ดังนั้น การประมาณแบบ dp และ dps ควรใช้ในกรณีที่อนุภาคอยู่ห่างจากอิเล็กโทรดมากซึ่งเป็นบริเวณที่มีสนามไฟฟ้าต่ำ เพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น.

ที่มุมของกับดักอนุภาคหนึ่ง (α_0 คงที่) เมื่อระยะ ρ คงที่โดยให้มุม α เพิ่มขึ้น แรงบนอนุภาคลดลงเพราะผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดล่างลดลงจากตำแหน่งของอนุภาคที่อยู่ห่างจากอิเล็กโทรดมากขึ้น. เมื่อระยะ ρ เพิ่มขึ้น แรงในทิศ ρ ลดลง และแรงในทิศ α แปรผันกับมุมและระยะที่อนุภาคทำกับอิเล็กโทรดบนและล่าง. เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้น ที่ระยะ ρ คงที่ แรงบนอนุภาคลดลงเนื่องจากสนามไฟฟ้าลดลง. อย่างไรก็ตาม ที่ระยะ ρ เปลี่ยน (ระยะ $\rho_{\min}$ ลดลง) ทำให้แรงในทิศ ρ เพิ่มขึ้น และแรงในทิศ α ลดลงเพราะสนามไฟฟ้าลดลง และผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโทรดบนที่น้อยลง.

ตำแหน่งของแรงสูงสุดบนอนุภาคในทิศ ρ และ α คือ อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดบนและล่าง และ อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง ตามลำดับ. จากสมการของวิธีวิเคราะห์ที่ได้ เมื่อมุม α_0 เพิ่มขึ้น แรงบนอนุภาคมากที่สุดในทิศ ρ สูงขึ้นเพราะแปรผันตรงกับ $\sin^3(\alpha_0/2)/\alpha_0^2$ และแรงมากที่สุดในทิศ α ลดลงเนื่องจากแปรผันโดยประมาณกับ $\cos^3(\alpha_0)/\left[\alpha_0^2\sin^4(\alpha_0)\right]$. เมื่ออัตราส่วน $\varepsilon_N/\varepsilon_E$ เพิ่มขึ้น ขนาดแรงสูงสุดบนอนุภาคเพิ่มขึ้น. การประมาณแบบ dps สามารถใช้ได้เมื่อ $\varepsilon_N/\varepsilon_E \le 2$ และ $\alpha_0 \le 30^\circ$ และเมื่ออัตราส่วน $\varepsilon_N/\varepsilon_E$ มีค่าสูงขึ้น และ $\alpha_0 > 30^\circ$ ควรใช้การคำนวณอย่างละเอียดแบบ mps เพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้อง.

ถ้าต้องการใช้เวลาในการคำนวณที่เร็วขึ้น การคำนวณแบบ dps สามารถนำมาใช้ได้ที่ตำแหน่งของอนุภาค $\rho \ge \rho_{\min} + 5\sigma$ หรือ $k = 10$ โดยมีความคลาดเคลื่อนของแรงในทิศ ρ และ α น้อยกว่า 10% และ 45% ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบกับแรงแบบ mps ในช่วงมุม α_0 เท่ากับ 30° ถึง 90° และ $\varepsilon_N/\varepsilon_E \le 4$. อย่างไรก็ตาม เมื่อตำแหน่งของอนุภาคอยู่ใกล้กับอิเล็กโทรดควรใช้การคำนวณอย่างละเอียดแบบ mps ซึ่งสามารถทำได้ที่ทุกๆ ตำแหน่งของอนุภาค และให้ค่าที่ถูกต้อง.

อนุภาคกระจายแบบสุ่มในของไหลอีอาร์

การประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำในการคำนวณแรงบนอนุภาคฉนวนในกรณีนี้เป็นการจำลองของอนุภาคฉนวนที่กระจายแบบสุ่มในของไหลซึ่งเป็นฉนวนซึ่งเรียกว่า ของไหลอีอาร์. วิทยานิพนธ์นี้พิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของแบบจำลองมัลติโพลที่ใช้การกระจายมัลติโพลซ้ำเพื่อนำมาใช้ในการจำลองไหลอีอาร์ และยังพิจารณาเวลาที่ใช้ในการเรียงตัวเป็นโซ่และความเหมาะสมของตัวแปรที่ใช้ในการวิเคราะห์การจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ด้วย. ผลสรุปที่ได้เป็นดังต่อไปนี้.

อนุภาคในของไหลอีอาร์จากการใช้แบบจำลองมัลติโพลให้ผลที่ใกล้เคียงกับของไหลอีอาร์จริงเนื่องจากแรงบนอนุภาคที่ใกล้เคียงกว่าแรงจากแบบจำลองไดโพล. จำนวนครั้งในการทำซ้ำและอันดับมัลติโพลสูงสุดที่ใช้ในแบบจำลองมัลติโพลส่งผลต่อแรงที่กระทำบนอนุภาค และต้อง

เลือกค่าทั้งสองที่เหมาะสมกับเวลาในการคำนวณ. วิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้จำนวนครั้งในการทำซ้ำและอันดับมัลติโพลสูงสุดเท่ากับ 2 และ 4 ตามลำดับ.

ผลจากการจำลองของไหลอีอาร์ด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล แสดงให้เห็นว่า การจัดเรียงตัวของอนุภาคในของไหลอีอาร์ขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาค. เวลาในการจัดเรียงตัวของอนุภาคเพื่อเชื่อมต่อระหว่างอิเล็กโทรดของแบบจำลองมัลติโพลสั้นกว่าเวลาที่ได้จากการใช้แบบจำลองไดโพล. เมื่ออัตราส่วนปริมาตรระหว่างอนุภาคต่อระบบของไหลอีอาร์สูงขึ้นใกล้เคียงกับของไหลอีอาร์ที่ใช้งานจริง อนุภาคจากการใช้แบบจำลองมัลติโพลเคลื่อนที่มากกว่าแต่เรียงตัวตามแนวสนามไฟฟ้าด้อยกว่าอนุภาคจากการใช้แบบจำลองไดโพล. การจัดเรียงตัวของอนุภาคจากการใช้แบบจำลองมัลติโพลมีความสม่ำเสมอกว่าการจัดเรียงตัวของอนุภาคจากการใช้แบบจำลองไดโพล. การใช้ค่าระยะกระจัดยกกำลังสองเฉลี่ยเป็นตัวบ่งชี้การจัดเรียงตัวของอนุภาคนั้นอาจไม่เหมาะสมเมื่อใช้แบบจำลองมัลติโพล และอนุภาคในของไหลอีอาร์ซึ่งใช้งานจริงใช้เวลานานในการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที หรืออาจจะไม่มีการจัดเรียงตัวเป็นโครงข่ายผลึกแบบบีซีที.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

[1] Techaumnat, B. and Takuma, T. Calculation of the electric field for lined-up spherical dielectric particle. IEEE Transaction on Dielectrics and Electrical Insulation 10 (August 2003): 623-633.

[2] Techaumnat, B., Eua-arporn, B., and Takuma, T. Calculation of electric field and dielectrophoretic force on spherical particle in chain. Journal of Applied Physics 95 (February 2004): 1586-1593.

[3] Greengard, L. and Rokhlin, V. A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions. Acta Numerica 6 (1997): 229-269.

[4] Sakai, K., Tsuru, S., Abella, D. L. and Hara, M. Conducting particle motion and particle-initiated breakdown in dc electric field between diverging conducting plates in atmospheric air. IEEE Transaction on Dielectrics and Electrical Insulation 6 (February 1999): 122-130.

[5] Sakai, K., Tsuru, S., Abella, D. L., Khan, Y., Suehiro, J. and Hara, M. Theoretical and experimental studies for spherical free-conducting particle behavior between non-parallel plane electrodes with ac voltages in air. IEEE Transaction on Dielectrics and Electrical Insulation 10 (June 2003): 404-457.

[6] Jordan, T.C., and Shaw, M. T. Electrorheology. IEEE Transactions on Electrical Insulation 24 (1989): 849-877.

[7] Davis, M. H. Electrostatic field and force on a dielectric sphere near a conducting plane – a note on the application of electric theory to water droplets. American Journal of Physics 37 (January 1969): 26-29.

[8] Story, R. D. Induced multipole strength for two dielectric spheres in an external electric field. Journal of Applied Physics 69 (March 1991): 2800-2804.

[9] Moon, P. and Spencer, D. E. Field Theory for Engineers New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1961

[10] Jones, T. B. Dielectrophoretic force calculation. Journal of Electrostatics 6 (1979): 69-82.

[11] Jones, T. B. Dipole moments of conducting particle chains. Journal of Applied Physics 60 (October 1986): 2226-2230.

[12] Washizu, M. and Jones, T. B. Multipolar dielectrophoretic force calculation. Journal of Electrostatics 33 (1994): 187-198.

[13] Washizu, M. and Jones, T. B. Dielectrophoretic interaction of two spherical particles calculated by equivalent multipole-moment method. IEEE Transaction on Industrial Applications 32 (March/April 1996): 233-242.

[14] Klingenberg, D. J., Frank, van S., and Zukoski, C. F. Dynamic simulation of electrorheological suspensions. Journal of Chemical Physics 91 (December 1989): 7888-7895.

[15] Tao, R. and Jiang, Q. Simulation of Structure Formation in an Electrorheological Fluid. Physical Review Letters 73 (July 1994): 205-208.

[16] Enomoto, Y. and Oba, K. Simulation of structures and their rheological properties in electrorheological fluids. Physica A 309 (October 2001): 15-25.

[17] Wang, Z., Lin, Z. and Tao, R. Many-body effect in electrorheological responses. International Journal of Modern Physics B 10 (July 1995): 1153-1166.

[18] Klingenberg, D. J., Frank, van S., and Zukoski, C. F. The small shear rate response of electrorheological suspensions.II. Extension beyond the point-dipole. Journal of Chemical Physics 94 (December 1991): 6170-6178.

[19] Lukkarinen, A. and Kaski, K. Simulation studies of electrorheological fluids under shear, compression, and elongation loading. Journal of Applied Physics 83 (February 1998): 1717-1725.

[20] Clercx, H. J. H. and Bossis, G. Many-body electrostatic interactions in electrorheological fluids. Physical Review E 48 (October 1993): 2721-2738.

[21] Klingenberg, D. J., Zukoski, C. F. and Hill, J. C. Kinetics of structure formation in electrorheological suspensions. Journal of Applied Physics 73 (May 1993): 4644-4648.

[22] Tao, R. and Sun, J. M. Three-Dimesional Structure of Induced Electrorheological Solid. Physical Review Letters 67 (July 1991): 398-401.

[23] Hass, K. C. Computer simulation of nonequilibrium structure formation in electrorheological fluids. Physical Review E 47 (May 1993): 3362-3373.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[24] Dassansyake, U., Fraden, S. and Blaaderen, A. van. Structure of electrorheological fluids. Journal of Chemical Physics 112 (February 2000): 3851-3858.

[25] Guo, H. X. H., Mai, Z. H. and Tian, H. H. Computer simulation of structures and rheological properties of electrorheological fluids. Physical Review E 53 (April 1996): 3823-3831.

[26] Edmonds, A. R. Angular Momentum in Quantum Mechanics New Jersey: Princeton, 1957.

[27] Blanco, M. A., Florez, M., and Bermejo, M. Evaluation of the rotation matrices in the basis of real spherical harmonics. Journal of Molecular Structure 419 (1997): 19-27.

[28] Griffiths, D. J. Introduction to Electrodynamics New Jersey: Prentice-Hall International, Inc., 1999.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

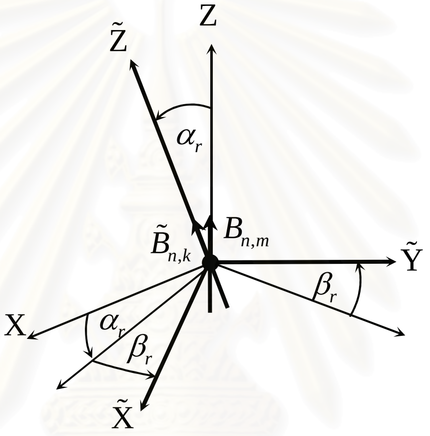
ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

วิธีการคำนวณ $d^{n}_{km}\left(\alpha_r\right)$ ด้วยสูตรเวียนเกิด

มัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$ ของระบบพิกัดใหม่ $\left(r,\tilde{\theta},\tilde{\phi}\right)$ คำนวณได้จากการหมุนมัลติโพล $B_{n,m}$ ของระบบพิกัดเดิม $\left(r,\theta,\phi\right)$ โดยที่ตำแหน่งของมัลติโพลอยู่ที่เดิมด้วยการใช้ตัวดำเนินการหมุน คือ $d^{n}_{km}\left(\alpha_r\right)e^{ik\beta_r}$ [4] เมื่อ α_r และ β_r คือ มุมในการหมุนระบบพิกัดเดิมในทิศทาง θ และ ϕ ไปยังระบบพิกัดใหม่ตามลำดับ ดังรูปที่ ก.1. $d^{n}_{km}\left(\alpha_r\right)$ คือ ตัวดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับการหมุนในทิศทาง θ ซึ่งคำนวณได้จากสูตรเวียนเกิดดังนี้.



รูปที่ ก.1 การหมุนมัลติโพล $B_{n,m}$ ไปเป็นมัลติโพล $\tilde{B}_{n,k}$.

ก.1 ค่าเริ่มต้นเมื่อ $n=0,1$

$$d^{0}_{00}\left(\alpha_r\right)=1.0 \tag{ก.1}$$

$$d^{1}_{00}\left(\alpha_r\right)=\cos\left(\alpha_r\right) \tag{ก.2}$$

$$d^{1}_{-1-1}\left(\alpha_r\right)=\left[\cos\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^2=d^{1}_{11}\left(\alpha_r\right) \tag{ก.3}$$

$$d^{1}_{-10}\left(\alpha_r\right)=\frac{\sin\left(\alpha_r\right)}{\sqrt{2}}=d^{1}_{01}\left(\alpha_r\right) \tag{ก.4}$$

$$d^{1}_{-11}\left(\alpha_r\right)=\left[\sin\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^2=d^{1}_{1-1}\left(\alpha_r\right) \tag{ก.5}$$

$$d^{1}_{0-1}\left(\alpha_r\right)=-\frac{\sin\left(\alpha_r\right)}{\sqrt{2}}=d^{1}_{10}\left(\alpha_r\right) \tag{ก.6}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ก.2 การคำนวณเมื่อ $n \ge 2$

ก.2.1 การคำนวณ $d_{km}^{n}\left(\alpha_r\right)$ เมื่อ $k=0,\ldots,n-2$ และ $m=-k,1-k,2-k,\ldots,k$

$$d_{km}^{n}\left(\alpha_r\right)=\frac{n\left(2n-1\right)}{\sqrt{\left(n^2-k^2\right)\left(n^2-m^2\right)}}\left\{\left[d_{00}^{1}\left(\alpha_r\right)-\frac{km}{n\left(n-1\right)}\right]d_{km}^{n-1}\left(\alpha_r\right)\right\}$$

$$-\frac{n\left(2n-1\right)}{\sqrt{\left(n^2-k^2\right)\left(n^2-m^2\right)}}\left[\frac{\sqrt{\left(\left(n-1\right)^2-m^2\right)\left(\left(n-1\right)^2-k^2\right)}}{\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}\right]d_{km}^{n-2}\left(\alpha_r\right). \quad (ก.7)$$

ก.2.2 การคำนวณ $d_{nn}^{n}\left(\alpha_r\right)$

$$d_{nn}^{n}\left(\alpha_r\right)=\left[\cos\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^{n}=d_{11}^{1}\left(\alpha_r\right)d_{n-1n-1}^{n-1}\left(\alpha_r\right) . \quad (ก.8)$$

ก.2.3 การคำนวณ $d_{n-1n-1}^{n}\left(\alpha_r\right)$

$$d_{n-1n-1}^{n}\left(\alpha_r\right)=\left(n\cos\alpha_r-n+1\right)\left[\cos^2\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^{n-1} . \quad (ก.9)$$

ก.2.4 การคำนวณ $d_{nm}^{n}\left(\alpha_r\right)$ เมื่อ $m=n-1,\ldots,-n$

$$d_{nm}^{n}\left(\alpha_r\right)=\sqrt{\frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!}}\left[\cos\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^{n+m}\left[-\sin\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^{n-m} . \quad (ก.10)$$

ก.2.5 การคำนวณ $d_{n-1m}^{n}\left(\alpha_r\right)$ เมื่อ $m=n-2,\ldots,1-n$

$$d_{n-1m}^{n}\left(\alpha_r\right)=\lambda\sqrt{\frac{(2n-1)!}{(n+m)!(n-m)!}}\left[\cos\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^{n-1+m}\left[-\sin\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)\right]^{n-1-m} \quad (ก.11)$$

เมื่อ $\lambda=\left(n\cos\alpha_r-m\right)$.

ก.3 การคำนวณค่าที่เหลือของ $d_{km}^{n}\left(\alpha_r\right)$

ก.3.1 $d_{mk}^{n}\left(\alpha_r\right)=\left(-1\right)^{m-k}d_{km}^{n}\left(\alpha_r\right)$. (ก.12)

ก.3.2 $d_{mk}^{n}\left(\alpha_r\right)=\left(-1\right)^{m-k}d_{-m-k}^{n}\left(\alpha_r\right)$. (ก.13)

ภาคผนวก ข

สนามไฟฟ้าภายในและภายนอกอนุภาคในระบบพิกัดทรงกลม

ศักย์ไฟฟ้าภายใน (φ_I) และภายนอก (φ_E) ของอนุภาครูปทรงกลมแสดงในพจน์ของกลุ่มฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดกำเนิดซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของอนุภาคในระบบพิกัดทรงกลม (r,θ,ϕ) เป็นไปตามสมการ

$$\varphi_I = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} L_{j,k} r^j \bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \tag{ข.1}$$

$$\varphi_E = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} \left[M_{j,k} r^j + \frac{B_{j,k}}{r^{j+1}} \right] \bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \tag{ข.2}$$

เมื่อ $L_{j,k}$, $M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ คือ สัมประสิทธิ์ที่ต้องการทราบค่า และ

$\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi)$ คือ ฮาร์มอนิกฟังก์ชันทรงกลมแบบบรรทัดฐานซึ่งนิยามโดย $\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) = \bar{P}_{j,k}(\cos\theta)e^{ik\phi}$ โดยที่ $\bar{P}_{j,k}(\cos\theta)$ คือฟังก์ชันเลอช็องดร์สมทบแบบบรรทัดฐาน และ $i = \sqrt{-1}$.

สนามไฟฟ้าภายใน $(\bar{E})_I$ และภายนอก $(\bar{E})_E$ ของอนุภาคในระบบพิกัดทรงกลมคำนวณจากสมการที่ (ข.1) และ (ข.2) ได้ดังนี้.

ข.1 สนามไฟฟ้า E_r ภายในและภายนอกอนุภาค

$$(E_r)_I = -\frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} L_{j,k}(j) r^{j-1} \bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \tag{ข.3}$$

$$(E_r)_E = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial r} = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} \left[M_{j,k}(j) r^{j-1} - B_{j,k}\left(\frac{j+1}{r^{j+2}}\right) \right] \bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \tag{ข.4}$$

ข.2 สนามไฟฟ้า E_θ ภายในและภายนอกอนุภาค

$$(E_\theta)_I = -\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \varphi_I}{\partial \theta} = -\sum_{j=0}^{\infty} r^{j-1} \sum_{k=-j}^{j} L_{j,k} \frac{d\bar{P}_{j,|k|}(\cos\theta)}{d\theta} e^{ik\phi} \tag{ข.5}$$

$$(E_\theta)_E = -\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \varphi_E}{\partial \theta} = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} \left[M_{j,k} r^{j-1} + \frac{B_{j,k}}{r^{j+2}} \right] r^{j-1} \frac{d\bar{P}_{j,|k|}(\cos\theta)}{d\theta} e^{ik\phi} \tag{ข.6}$$

จากเอกลักษณ์ของการหาอนุพันธ์ของเลอช็องดร์ฟังก์ชันสมทบ

$$\begin{aligned} \frac{dP_{j,|k|}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} &= \left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\Big[(j+1)(\cos\theta)P_{j,|k|}(\cos\theta)\Big] \\ &\quad -\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\Big[(j-|k|+1)P_{j+1,|k|}(\cos\theta)\Big] \end{aligned} \tag{ข.7}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และความสัมพันธ์ระหว่างเลอช็องดร์ฟังก์ชันสมทบกับเลอช็องดร์ฟังก์ชันสมทบแบบบรรทัดฐาน

$$\bar{P}_{j,|k|}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{(j-|k|)!}{(j+|k|)!}}P_{j,|k|}(\cos\theta) \quad (ข.8)$$

$$\sqrt{\frac{(j+|k|+1)}{(j-|k|+1)}}\bar{P}_{j+1,|k|}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{(j-|k|)!}{(j+|k|)!}}P_{j+1,|k|}(\cos\theta). \quad (ข.9)$$

แทนสมการที่ (ข.8) และ (ข.9) ลงในสมการที่ (ข.7) จะได้

$$\frac{d\bar{P}_{j,|k|}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\Big[(j+1)(\cos\theta)\bar{P}_{j,|k|}(\cos\theta) -\sqrt{(j-|k|+1)(j+|k|+1)}\bar{P}_{j+1,|k|}(\cos\theta)\Big]. \quad (ข.10)$$

เปลี่ยนอนุพันธ์ของเลอช็องดร์ฟังก์ชันสมทบแบบบรรทัดฐานในสมการที่ (ข.5) และ (ข.6) จากความสัมพันธ์

$$\frac{d\bar{P}_{j,|k|}(\cos\theta)}{d\theta}=-(\sin\theta)\frac{d\bar{P}_{j,|k|}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}. \quad (ข.11)$$

แทนสมการที่ (ข.11) ลงในสมการที่ (ข.5) และ (ข.6) จากนั้นใช้สมการที่ (ข.10) แทนลงไปและเขียนสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของฮาร์มอนิกฟังก์ชันทรงกลมจะได้

$$(E_\theta)_I=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}L_{j,k}\left(\frac{r^{j-1}}{\sin\theta}\right)\left\{(j+1)\cos\theta\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi)\right\} -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}L_{j,k}\left(\frac{r^{j-1}}{\sin\theta}\right)\left\{\sqrt{(j+1)^2-k^2}\bar{Y}_{j+1,k}(\theta,\phi)\right\} \quad (ข.12)$$

$$(E_\theta)_E=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}\left[M_{j,k}r^{j-1}+\frac{B_{j,k}}{r^{j+2}}\right]\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left\{(j+1)\cos\theta\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) -\sqrt{(j+1)^2-k^2}\bar{Y}_{j+1,k}(\theta,\phi)\right\}. \quad (ข.13)$$

ข.3 สนามไฟฟ้า E_ϕ ภายในและภายนอกอนุภาค

$$(E_\phi)_I=-\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial\varphi_I}{\partial\phi}=-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}L_{j,k}(ik)\left(\frac{r^{j-1}}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \quad (ข.14)$$

$$(E_\phi)_E=-\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial\varphi_I}{\partial\phi} =-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}\left[M_{j,k}(ik)\left(\frac{r^{j-1}}{\sin\theta}\right)+B_{j,k}(ik)\left(\frac{1}{r^{j+2}\sin\theta}\right)\right]\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi) \quad (ข.15)$$

ภาคผนวก ค

กฎลูกโซ่ เอกลักษณ์ของเลอช็องดร์ฟังก์ชันสมทบ และเอกลักษณ์ของฮาร์มอนิกฟังก์ชันทรงกลมแบบบรรทัดฐาน

ค.1 กฎลูกโซ่ในการแปลงจากระบบพิกัดทรงกลมไปเป็นระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\left[\sin\theta\cos\phi\right] + \frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta}\left[\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\right] + \frac{\partial \varphi_a}{\partial \phi}\left[\frac{-\sin\phi}{r\sin\theta}\right] \qquad (ค.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\left[\sin\theta\sin\phi\right] + \frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta}\left[\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\right] + \frac{\partial \varphi_a}{\partial \phi}\left[\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\right] \qquad (ค.2)$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\left[\cos\theta\right] + \frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta}\left[-\frac{\sin\theta}{r}\right]. \qquad (ค.3)$$

ค.2 เอกลักษณ์ของเลอร์ช็องดร์ฟังก์ชันสมทบ

$$\frac{P_{j,k}(\cos\theta)}{\sin\theta} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)P_{j-1,k}(\cos\theta) - (j+k-1)P_{j-1,k-1}(\cos\theta) \qquad (ค.4)$$

$$(2k)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)P_{j-1,k}(\cos\theta) = -P_{j-1,k+1}(\cos\theta) - (j-k)(j+k-1)P_{j-1,k-1}(\cos\theta). \qquad (ค.5)$$

ค.3 เอกลักษณ์ของฮาร์มอนิกฟังก์ชันทรงกลมแบบบรรทัดฐาน

$$\frac{\bar{Y}_{j,k}(\theta,\phi)}{\sin\theta} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sqrt{\frac{(j-|k|)}{(j+|k|)}}\bar{Y}_{j-1,k}(\theta,\phi) - \delta_k\sqrt{\frac{(j-|k|-1)}{(j+|k|)}}\bar{Y}_{j-1,|k|-1}(\theta,\phi)e^{i(k-|k|+1)\phi} \qquad (ค.6)$$

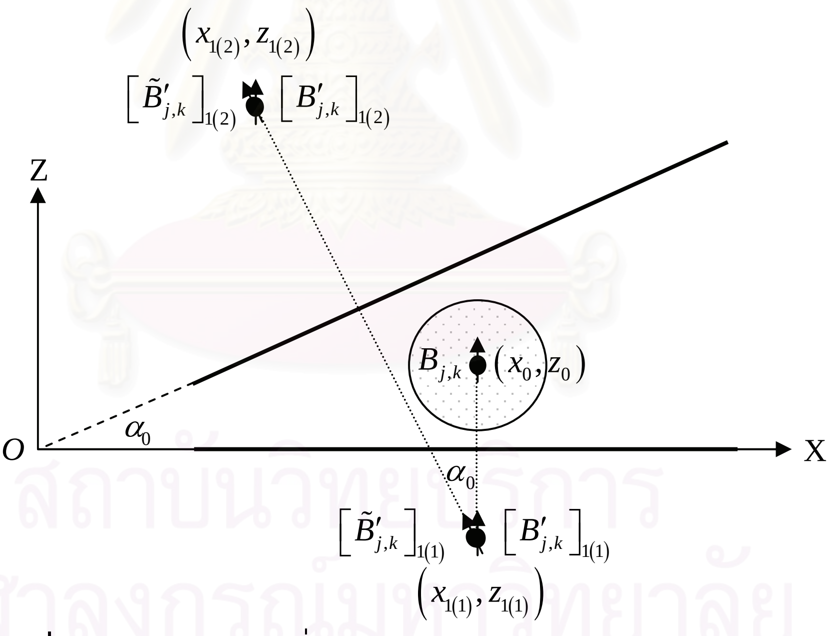
$$(2|k|)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\bar{Y}_{j-1,k}(\theta,\phi) = -\sqrt{(j-|k|-1)(j+|k|)}\bar{Y}_{j-1,|k|+1}(\theta,\phi)e^{i(k-|k|-1)\phi} - \delta_k\sqrt{(j-|k|)(j+|k|-1)}\bar{Y}_{j-1,|k|-1}(\theta,\phi)e^{i(k-|k|+1)\phi} \qquad (ค.7)$$

เมื่อ $\delta_k = 1$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $\delta_k = -1$ เมื่อ $k = 0$.

ภาคผนวก ง

ตำแหน่งของการวางเงามัลติโพลสำหรับระนาบอิเล็กโทรดเอียง

อนุภาครูปทรงกลมวางอยู่ระหว่างระนาบอิเล็กโทรดเอียงซึ่งทำมุม α_0 และจุดศูนย์กลางของอนุภาควางอยู่ที่ตำแหน่ง $\left(x_0, z_0\right)$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เมื่อจุด O เป็นจุดกำเนิด ดังรูปที่ ง.1. พิจารณามัลติโพล $B_{j,k}$ วางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาค เงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ที่กระทำกับระนาบอิเล็กโทรดเอียงถูกวางด้วยวิธีการที่เป็นลำดับขั้นตอน. วิธีการวางเงามัลติโพลแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน. ขั้นตอนแรกคือวางเงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ที่กระทำกับอิเล็กโทรดล่างก่อนอิเล็กโทรดบน ขั้นตอนที่สองคือวางเงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ที่กระทำกับอิเล็กโทรดบนก่อนอิเล็กโทรดล่าง. เงาลำดับที่ m เมื่อ $m = 1, 2, 3, ...$ ของเงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ตามขั้นตอนที่หนึ่งและสองคือ $\left[B'_{j,k}\right]_{1(m)}$ และ $\left[B'_{j,k}\right]_{2(m)}$ ตามลำดับ. รูปที่ ง.1 และ ง.2 แสดงตัวอย่างของตำแหน่งการวางเงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{1(1)}$ $\left[B'_{j,k}\right]_{1(2)}$ $\left[B'_{j,k}\right]_{2(1)}$ และ $\left[B'_{j,k}\right]_{2(2)}$ ตามลำดับ.



รูปที่ ง.1 วางเงามัลติโพลที่กระทำกับอิเล็กโทรดล่างก่อนอิเล็กโทรดบน.

ตำแหน่งของเงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{1(m)}$ คำนวณได้ดังนี้

ตำแหน่ง $\left(x_{1(1)}, z_{1(1)}\right)$ คำนวณได้จาก

$$x_{1(1)} = x_0 \qquad (ง.1)$$

$$z_{1(1)} = -z_0 \qquad (ง.2)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตำแหน่ง $\left(x_{1(m)}, z_{1(m)}\right)$ เมื่อ m เป็นเลขคู่

$$x_{1(m)} = x_{1(m-1)} - 2\left\{\left[x_{1(m-1)}\tan\left(\alpha_0\right)\right] - \left[z_{1(m-1)}\cos\left(\alpha_0\right)\right]\right\}\sin\left(\alpha_0\right) \qquad (ง.3)$$

$$z_{1(m)} = z_{1(m-1)} + 2\left\{\left[x_{1(m-1)}\tan\left(\alpha_0\right)\right] - \left[z_{1(m-1)}\cos\left(\alpha_0\right)\right]\right\}\cos\left(\alpha_0\right) \qquad (ง.4)$$

ตำแหน่ง $\left(x_{1(m)}, z_{1(m)}\right)$ เมื่อ m เป็นเลขคี่

$$x_{1(m)} = x_{1(m-1)} \qquad (ง.5)$$

$$z_{1(m)} = -z_{1(m-1)} \qquad (ง.6)$$

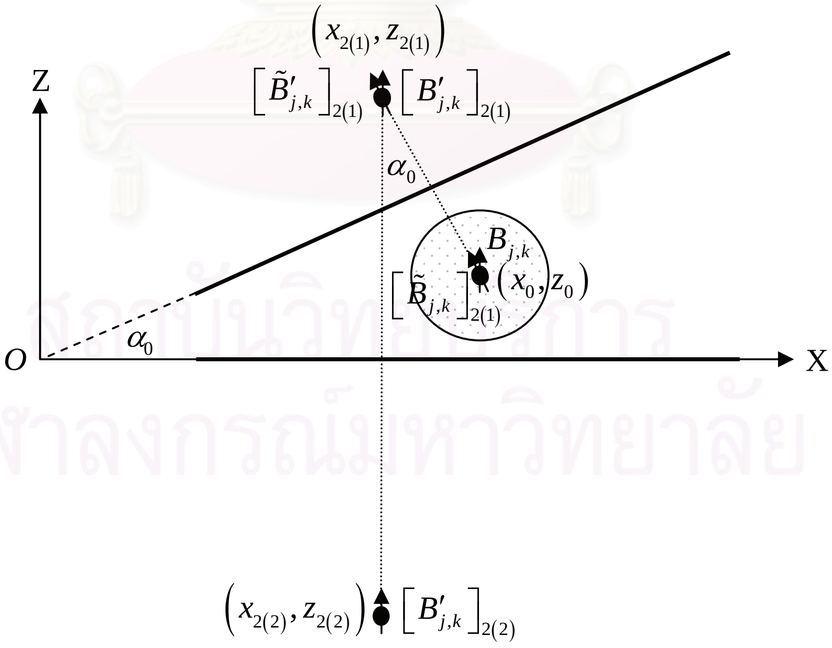
ขนาดของเงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{1(1)}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดล่างคือ

$$\left[B'_{j,k}\right]_{1(1)} = \left(-1\right)^{j+k+1} B_{j,k}\,. \qquad (ง.7)$$

หลังจากหมุน $\left[B'_{j,k}\right]_{1(1)}$ ไปเป็น $\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{1(1)}$ ด้วยมุม α_0 โดยใช้สมการในภาคผนวก ก แล้ว ขนาดของเงามัลติโพล $\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{1(2)}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดบนคำนวณได้จาก

$$\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{1(2)} = \left(-1\right)^{j+k+1}\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{1(1)}\,. \qquad (ง.8)$$

เงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{1(2)}$ เกิดจากการหมุนมัลติโพล $\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{1(2)}$ กลับด้วยมุม $-\alpha_0$ โดยใช้สมการในภาคผนวก ก เช่นกัน.



รูปที่ ง.2 วางเงามัลติโพลที่กระทำกับอิเล็กโทรดบนก่อนอิเล็กโทรดล่าง.

ตำแหน่งของเงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{2(m)}$ คำนวณได้ดังนี้

ตำแหน่ง $\left(x_{2(1)}, z_{2(1)}\right)$ คำนวณได้จาก

$$x_{2(1)} = x_0 - 2\left\{\left[x_0 \tan\left(\alpha_0\right)\right] - \left[z_0 \cos\left(\alpha_0\right)\right]\right\}\sin\left(\alpha_0\right) \quad (ง.9)$$

$$z_{2(1)} = z_0 + 2\left\{\left[x_0 \tan\left(\alpha_0\right)\right] - \left[z_0 \cos\left(\alpha_0\right)\right]\right\}\cos\left(\alpha_0\right) \quad (ง.10)$$

ตำแหน่ง $\left(x_{2(m)}, z_{2(m)}\right)$ เมื่อ m เป็นเลขคู่

$$x_{2(m)} = x_{2(m-1)} \quad (ง.11)$$

$$z_{2(m)} = -z_{2(m-1)} \quad (ง.12)$$

ตำแหน่ง $\left(x_{2(m)}, z_{2(m)}\right)$ เมื่อ m เป็นเลขคี่

$$x_{2(m)} = x_{2(m-1)} - 2\left\{\left[x_{2(m-1)} \tan\left(\alpha_0\right)\right] - \left[z_{2(m-1)} \cos\left(\alpha_0\right)\right]\right\}\sin\left(\alpha_0\right) \quad (ง.13)$$

$$z_{2(m)} = z_{2(m-1)} + 2\left\{\left[x_{2(m-1)} \tan\left(\alpha_0\right)\right] - \left[z_{2(m-1)} \cos\left(\alpha_0\right)\right]\right\}\cos\left(\alpha_0\right) \quad (ง.14)$$

ขนาดของเงามัลติโพล $\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{2(1)}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดบนคือ

$$\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{2(1)} = \left(-1\right)^{j+k+1} \tilde{B}_{j,k} \quad (ง.15)$$

เมื่อมัลติโพล $\tilde{B}_{j,k}$ เกิดจากการหมุนมัลติโพล $B_{j,k}$ ด้วยมุม α_0 โดยใช้สมการในภาคผนวก ก. มัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{2(1)}$ คำนวณได้จากการหมุน $\left[\tilde{B}'_{j,k}\right]_{2(1)}$ กลับด้วยมุม $-\alpha_0$ โดยใช้สมการในภาคผนวก ก. ขนาดของเงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{2(2)}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดล่างคือ

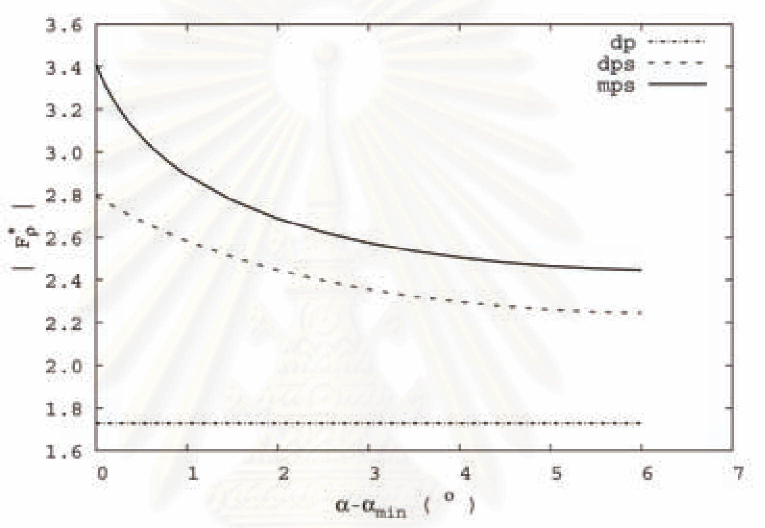
$$\left[B'_{j,k}\right]_{2(2)} = \left(-1\right)^{j+k+1}\left[B'_{j,k}\right]_{2(1)}. \quad (ง.16)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

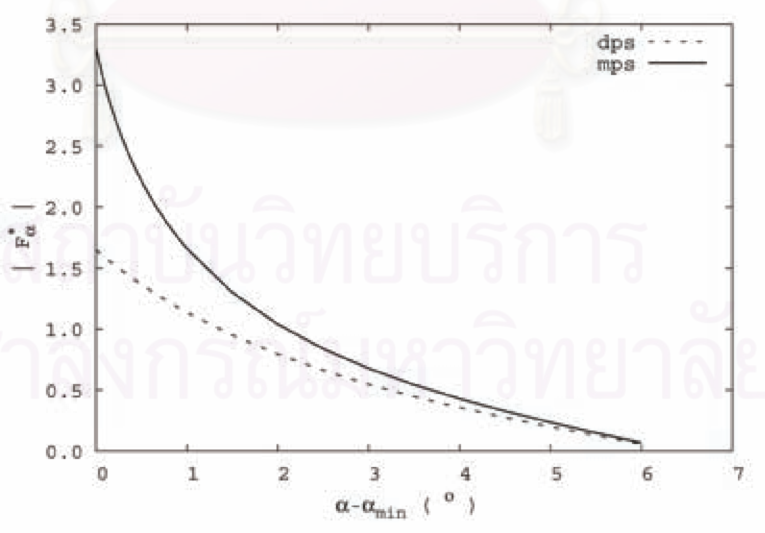
ภาคผนวก จ

แรงที่กระทำบนอนุภาคเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง

ข้อมูลผลการคำนวณแรงบนอนุภาคจากการประมาณด้วยไดโพล (dp) การประมาณด้วยไดโพลและเงาของอิเล็กโทรดชุดแรก (dps) และการคำนวณด้วยมัลติโพลและเงาของอิเล็กโทรดทุกชุด (mps) ในหัวข้อที่ 3.5.1.

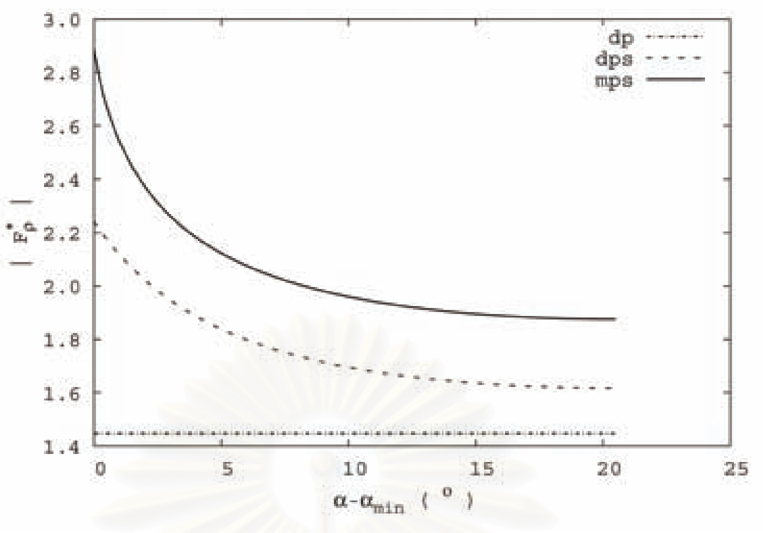


(ก)

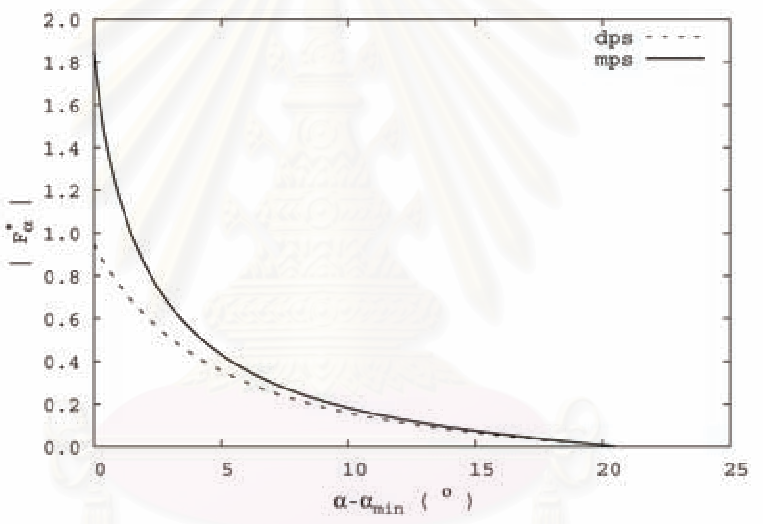


(ข)

รูปที่ จ.1 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k=1$ และ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.



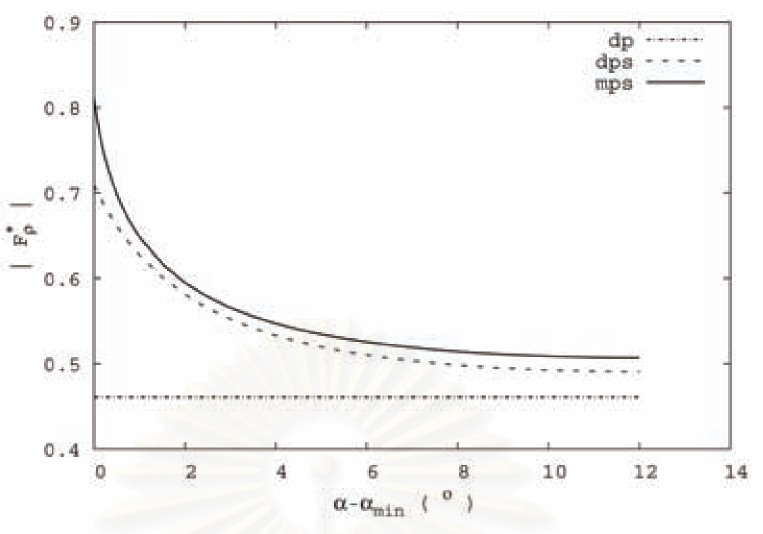
(ก)



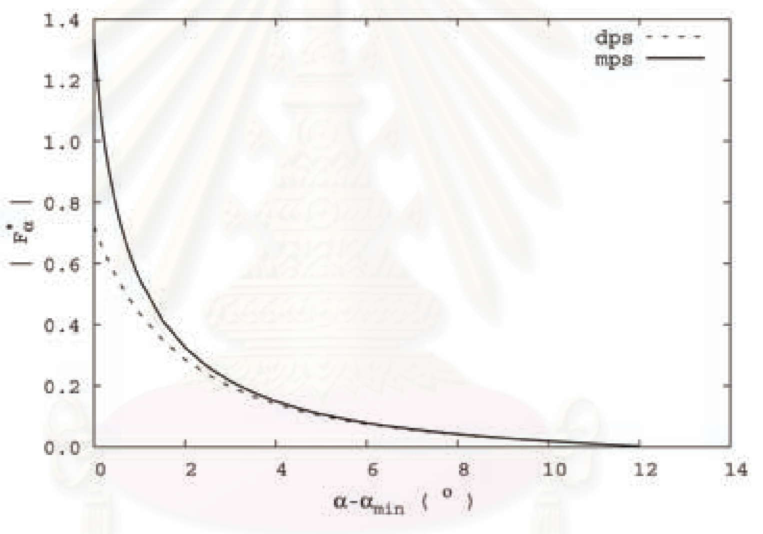
(ข)

รูปที่ จ.2 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 1$ และ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



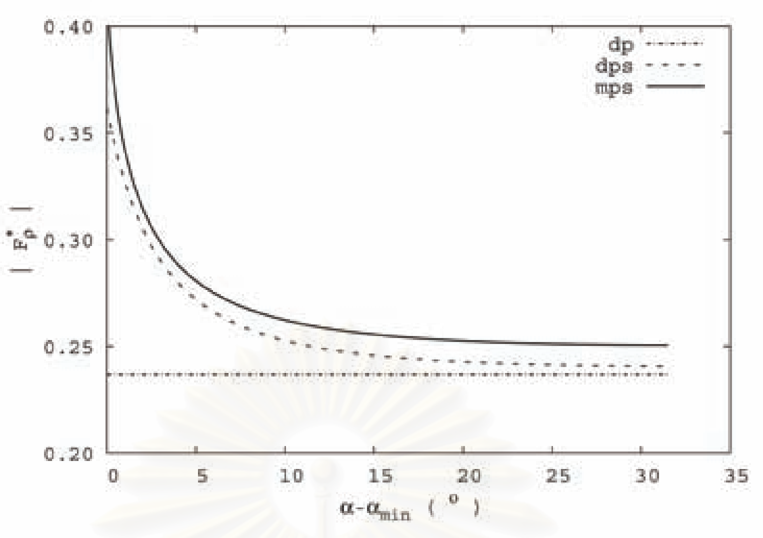
(ก)



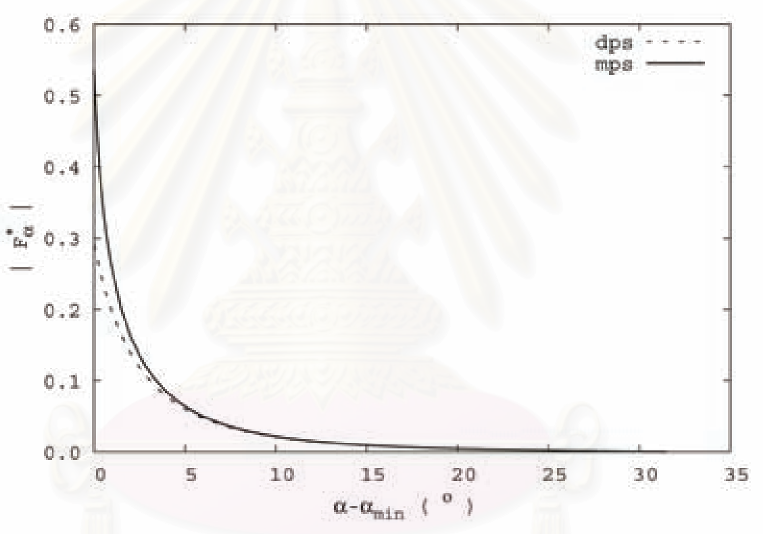
(ข)

รูปที่ จ.3 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 3$ และ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



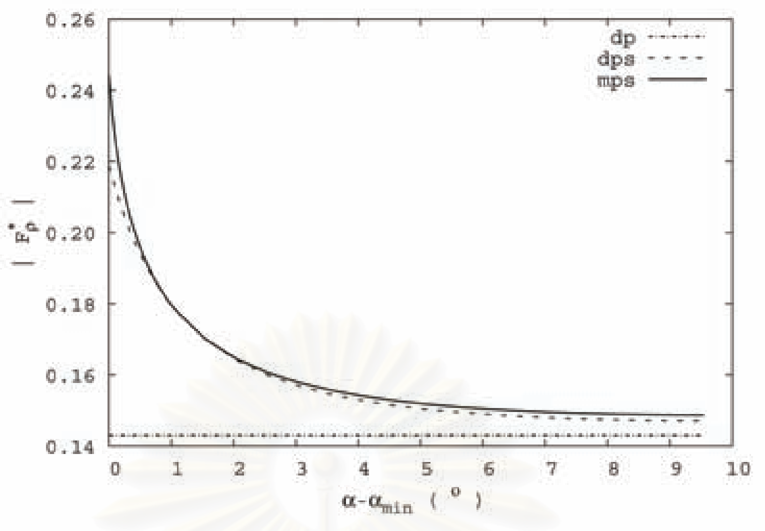
(ก)



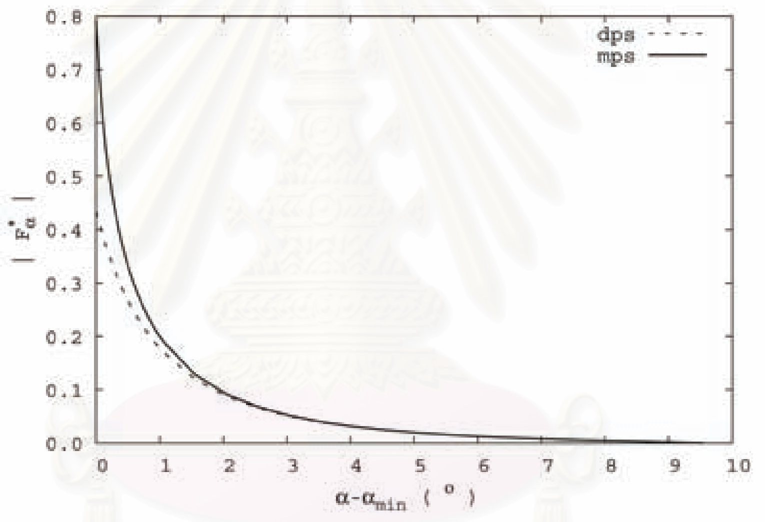
(ข)

รูปที่ จ.4 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k=3$ และ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



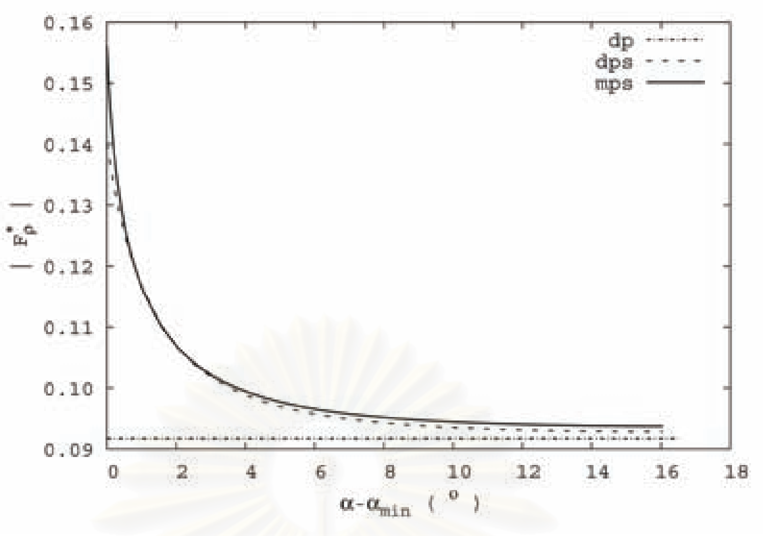
(ก)



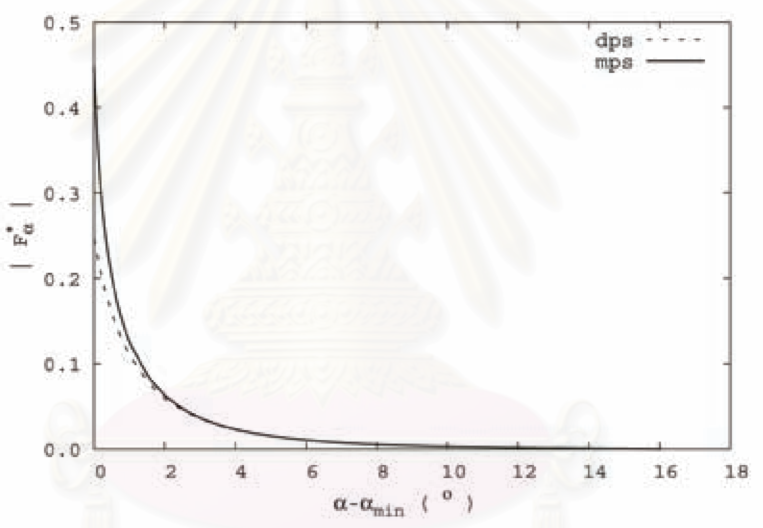
(ข)

รูปที่ จ.5 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k=7$ และ $\alpha_0 = 30^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



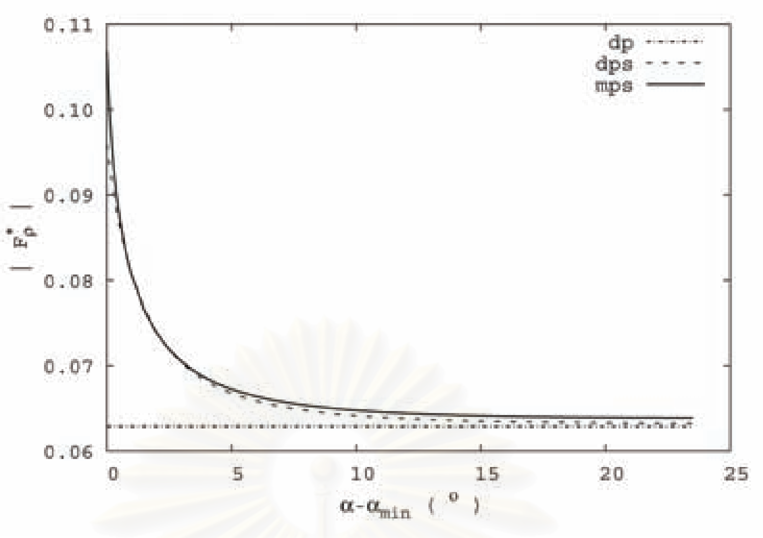
(ก)



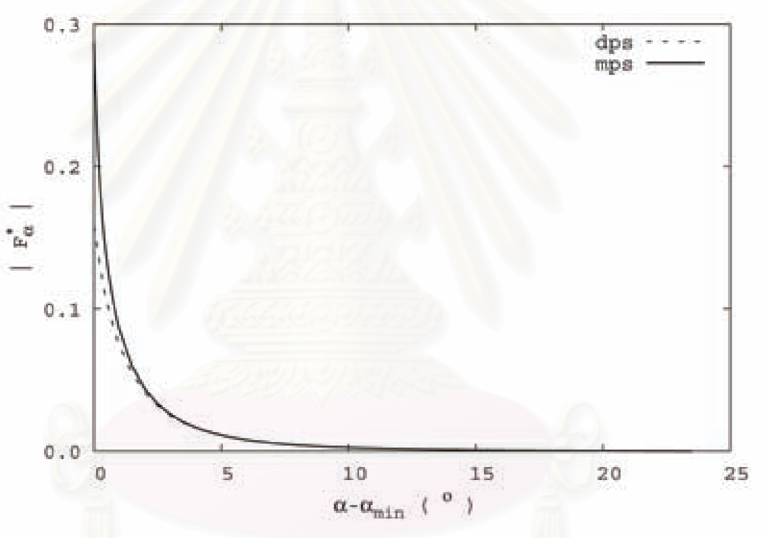
(ข)

รูปที่ จ.6 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 7$ และ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

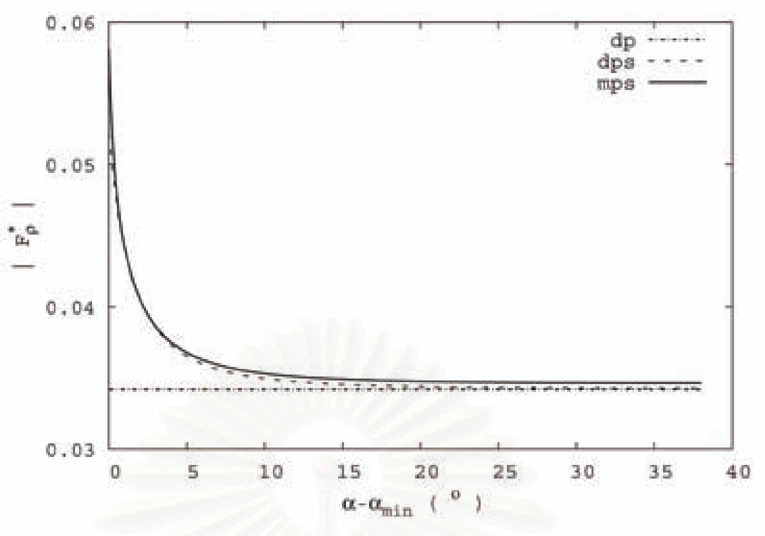


(ก)

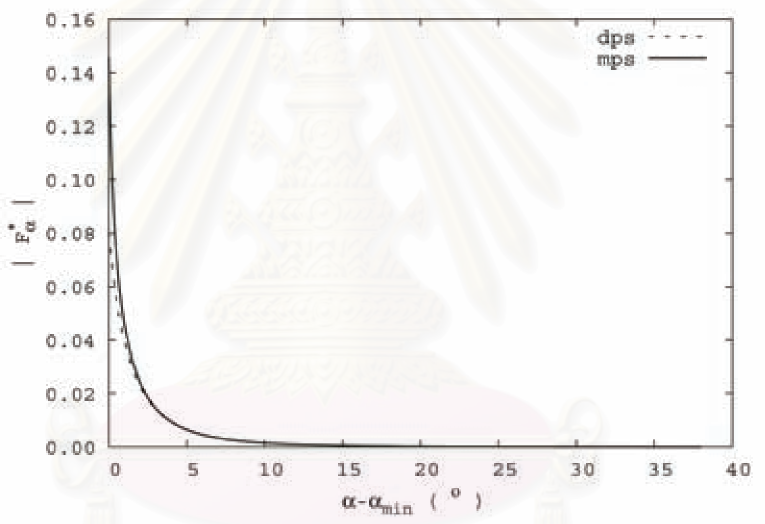


(ข)

รูปที่ จ.7 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 7$ และ $\alpha_0 = 60°$ (ก) $|F^*_\rho|$ และ (ข) $|F^*_\alpha|$.



(ก)



(ข)

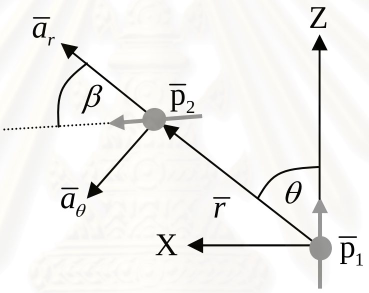
รูปที่ จ.8 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง ที่ $k = 7$ และ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.

ภาคผนวก ฉ

การคำนวณแรงบนอนุภาคฉนวนภายในระนาบเอียงจากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรก

ฉ.1 การคำนวณแรงระหว่างไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ และ $\overline{\mathrm{p}}_2$ ที่มีมุมแตกต่างกัน

ไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ อยู่ในทิศตามแกน Z และ ตำแหน่งของไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_2$ อยู่ห่างจากไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ เป็นระยะ $\bar{r}$ และทำมุม θ ในระบบพิกัดทรงกลมที่มี $\overline{\mathrm{p}}_1$ เป็นจุดกำเนิด. มุม θ เป็นบวกเมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ ฉ.1. $\bar{a}_r$ และ $\bar{a}_\theta$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงกลมซึ่งมี $\overline{\mathrm{p}}_1$ เป็นจุดกำเนิดตามทิศ r และ θ ตามลำดับ. ไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_2$ ทำมุม β จากทิศทางของ $\overline{\mathrm{p}}_2$ มายัง $\bar{r}$ โดยเป็นบวกเมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกา และเป็นลบเมื่อหมุนตามเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ ฉ.1.



รูปที่ ฉ.1 มุม และระยะในการคำนวณแรงระหว่างไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ และ $\overline{\mathrm{p}}_2$

สนามไฟฟ้าที่เกิดจาก $\overline{\mathrm{p}}_1$ ณ ตำแหน่ง $\overline{\mathrm{p}}_2$ คือ

$$\bar{E} = \frac{|\overline{\mathrm{p}}_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E|\bar{r}|^3}\left[2\cos\theta\bar{a}_r + \sin\theta\bar{a}_\theta\right] \qquad (ฉ.1)$$

เมื่อ ε_E คือ สภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง และ

ε_0 คือ สภาพยอมของสุญญากาศ

แรงระหว่างไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ และ $\overline{\mathrm{p}}_2$ คำนวณได้จาก

$$\bar{F} = (\overline{\mathrm{p}}_2 \bullet \nabla)\bar{E} \qquad (ฉ.2)$$

แทน $\overline{\mathrm{p}}_2$ และ ∇ ลงในสมการที่ (ฉ.2)

$$\bar{F} = \left[\left(|\overline{\mathrm{p}}_2|\cos\beta\bar{a}_r - |\overline{\mathrm{p}}_2|\sin\beta\bar{a}_\theta\right)\bullet\left(\frac{\partial}{\partial r}\bar{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{a}_\theta\right)\right]\bar{E} \qquad (ฉ.3)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดรูปสมการที่ (ฉ.3) ใหม่

$$\bar{F} = \left|\bar{\mathrm{p}}_2\right| \cos\beta \frac{\partial \bar{E}}{\partial r} - \left|\bar{\mathrm{p}}_2\right| \sin\beta \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} \qquad \text{(ฉ.4)}$$

สนามไฟฟ้า $\bar{E}$ ในพิกัดคาร์ทีเซียน (x,z) คือ

$$\bar{E} = \frac{\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^3}\left[\left(3\cos\theta\sin\theta\right)\bar{a}_x + \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\bar{a}_z\right] \qquad \text{(ฉ.5)}$$

เมื่อ $\bar{a}_x$ และ $\bar{a}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X และ Z ตามลำดับ.

อนุพันธ์ของ $\bar{E}$ เทียบกับตัวแปร r คำนวณได้จาก

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial r} = \frac{-3\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^4}\left[\left(3\cos\theta\sin\theta\right)\bar{a}_x + \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\bar{a}_z\right] \qquad \text{(ฉ.6)}$$

เปลี่ยน $\bar{a}_x$ และ $\bar{a}_z$ กลับเป็น $\bar{a}_r$ และ $\bar{a}_\theta$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial r} = \frac{-3\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^4}\left(2\cos\theta\bar{a}_r + \sin\theta\bar{a}_\theta\right) \qquad \text{(ฉ.7)}$$

อนุพันธ์ของ $\bar{E}$ เทียบกับตัวแปร θ คำนวณได้จาก

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} = \frac{\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(3\cos\theta\sin\theta\right)\bar{a}_x + \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\bar{a}_z\right] \qquad \text{(ฉ.8)}$$

อนุพันธ์ของ $\bar{E}$ เทียบกับตัวแปร θ คือ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} = \frac{-3\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^4}\left[-\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\bar{a}_x + \left(2\cos\theta\sin\theta\right)\bar{a}_z\right] \qquad \text{(ฉ.9)}$$

เปลี่ยน $\bar{a}_x$ และ $\bar{a}_z$ กลับเป็น $\bar{a}_r$ และ $\bar{a}_\theta$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} = \frac{-3\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^4}\left[\sin\theta\bar{a}_r - \cos\theta\bar{a}_\theta\right] \qquad \text{(ฉ.10)}$$

แทนค่าอนุพันธ์ในสมการที่ (ฉ.7) และ (ฉ.10) ลงในสมการที่ (ฉ.4)

$$\bar{F} = \frac{-3\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|\left|\bar{\mathrm{p}}_2\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^4}\left\{\left[2\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\right]\bar{a}_r + \left[\sin\left(\theta-\beta\right)\right]\bar{a}_\theta\right\} \qquad \text{(ฉ.11)}$$

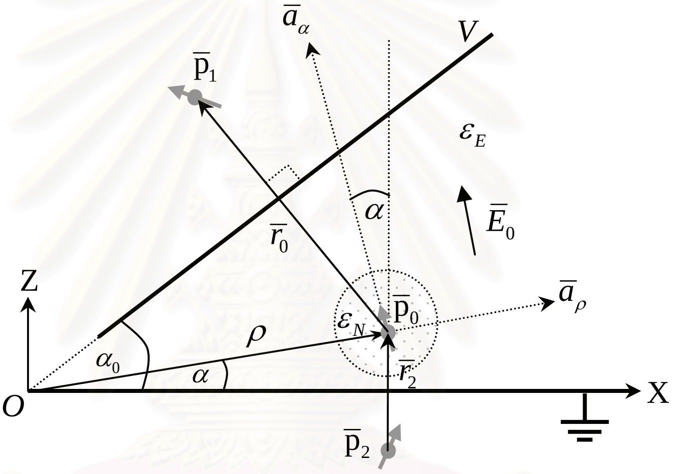
เมื่อมุม β เป็นบวก แรงระหว่าง $\bar{\mathrm{p}}_1$ และ $\bar{\mathrm{p}}_2$ เป็น

$$\bar{F} = \frac{-3\left|\bar{\mathrm{p}}_1\right|\left|\bar{\mathrm{p}}_2\right|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E \left|\bar{r}\right|^4}\left\{\left[2\cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta\right]\bar{a}_r + \left[\sin\left(\theta+\beta\right)\right]\bar{a}_\theta\right\} \qquad \text{(ฉ.12)}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉ.2 แรงบนอนุภาคฉนวนจากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรกเมื่ออนุภาคอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดบนและล่าง

อนุภาคฉนวนรูปทรงกลมมีเส้นผ่าศูนย์กลาง σ และ สภาพยอมสัมพัทธ์ ε_N อยู่ในก๊าซที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_E ดังรูปที่ ฉ.2. จุดศูนย์กลางของอนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง (ρ,α) ในระบบระนาบเอียงซึ่งมีมุมระหว่างระนาบ α_0 และมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ ρ และ α เป็น $\bar{a}_\rho$ และ $\bar{a}_\alpha$ ตามลำดับ. ไดโพล $\bar{\mathrm{p}}_0$ ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาคเกิดจากสนามไฟฟ้าภายนอก $\bar{E}_0$ (ในทิศ $\bar{a}_\alpha$) ซึ่งเกิดจากความต่างศักย์ V ของอิเล็กโทรดทั้งสอง. $\bar{\mathrm{p}}_1$ และ $\bar{\mathrm{p}}_2$ เป็นเงาไดโพลที่เกิดจาก $\bar{\mathrm{p}}_0$ กับระนาบอิเล็กโทรดบนและล่าง ตามลำดับ และห่างจากไดโพล $\bar{\mathrm{p}}_0$ เป็นระยะ $\bar{r}_0$ และ $\bar{r}_2$ ตามลำดับ ดังรูปที่ ฉ.2.



รูปที่ ฉ.2 ตำแหน่งและระยะห่างระหว่างไดโพล $\bar{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\bar{\mathrm{p}}_1$ และ $\bar{\mathrm{p}}_2$ ของระนาบเอียง.

ระยะ $\bar{r}_0$ และ $\bar{r}_2$ ในรูปที่ ฉ.2 คำนวณได้จาก

$$|\bar{r}_0| = 2\rho\sin(\alpha_0-\alpha) \quad (ฉ.13)$$

$$|\bar{r}_2| = 2\rho\sin(\alpha) \quad (ฉ.14)$$

ไดโพล $\bar{\mathrm{p}}_0$, $\bar{\mathrm{p}}_1$ และ $\bar{\mathrm{p}}_2$ คำนวณได้จาก

$$\bar{\mathrm{p}}_0 = K\bar{a}_\alpha \quad (ฉ.15)$$

$$\bar{\mathrm{p}}_1 = K\left[-\sin(2\alpha_0-2\alpha)\bar{a}_\rho + \cos(2\alpha_0-2\alpha)\bar{a}_\alpha\right] \quad (ฉ.16)$$

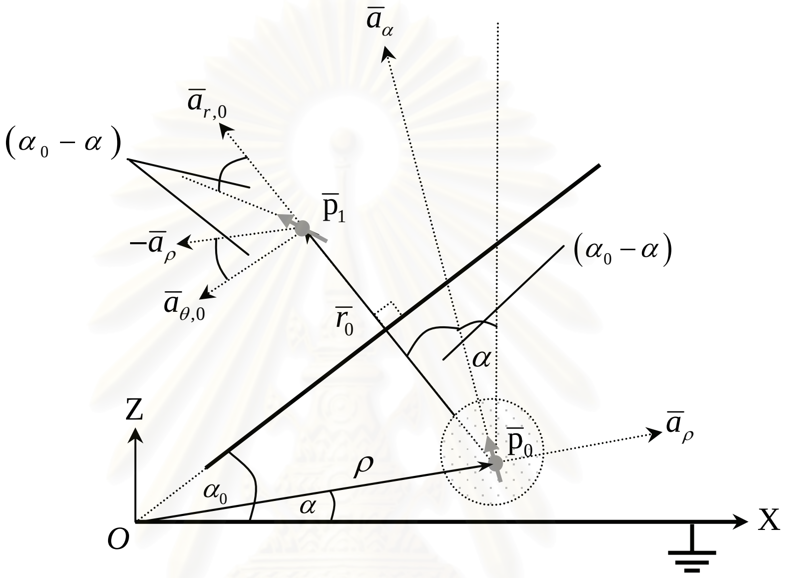
$$\bar{\mathrm{p}}_2 = K\left[\sin(2\alpha)\bar{a}_\rho + \cos(2\alpha)\bar{a}_\alpha\right] \quad (ฉ.17)$$

เมื่อ $\gamma = \dfrac{(\varepsilon_N-\varepsilon_E)}{(\varepsilon_N+2\varepsilon_E)}$ และ $K = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^3\left|\bar{E}_0\right| = \dfrac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma\sigma^3V}{2\rho\alpha_0}$.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉ.2.1 แรงที่เงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ กระทำกับ $\overline{\mathrm{p}}_0$

รูปที่ ฉ.3 แสดงตำแหน่ง มุม และระยะระหว่างไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$. $\overline{\mathrm{p}}_1$ อยู่ห่างจาก $\overline{\mathrm{p}}_0$ เป็นระยะ $\overline{r}_0$ และทำมุม $(\alpha_0-\alpha)$ ในระบบพิกัดทรงกลมซึ่งมี $\overline{\mathrm{p}}_0$ เป็นจุดกำเนิด โดยที่ $\overline{a}_{r,0}$ และ $\overline{a}_{\theta,0}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงกลมตามทิศ r_0 และ $(\alpha_0-\alpha)$ ตามลำดับ ดังรูปที่ ฉ.3. $\overline{\mathrm{p}}_1$ ทำมุม $(\alpha_0-\alpha)$ ตามเข็มนาฬิกาจากแกนของ $\overline{\mathrm{p}}_1$ มายัง $\overline{r}_0$. จากสมการที่ (ฉ.15) และ (ฉ.16) จะได้ $|\overline{\mathrm{p}}_0|=|\overline{\mathrm{p}}_1|$.



รูปที่ ฉ.3 ตำแหน่ง มุม และระยะของไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$.

จากสมการที่ (ฉ.11) เมื่อแทนมุม $\theta=(\alpha_0-\alpha)$ และมุม $\beta=(\alpha_0-\alpha)$ จะได้แรงที่ $\overline{\mathrm{p}}_0$ กระทำกับ $\overline{\mathrm{p}}_1$ เป็น

$$\overline{F}_{p_0p_1}=\frac{-3|\overline{\mathrm{p}}_0|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E|\overline{r}_0|^4}\left[2\cos^2(\alpha_0-\alpha)+\sin^2(\alpha_0-\alpha)\right]\overline{a}_{r,0} \qquad \text{(ฉ.18)}$$

ดังนั้น แรงที่เงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ กระทำกับไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ คือ

$$\overline{F}_{p_1p_0}=\frac{3|\overline{\mathrm{p}}_0|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E|\overline{r}_0|^4}\left\{\left[2\cos^2(\alpha_0-\alpha)+\sin^2(\alpha_0-\alpha)\right]\overline{a}_{r,0}\right\} \qquad \text{(ฉ.19)}$$

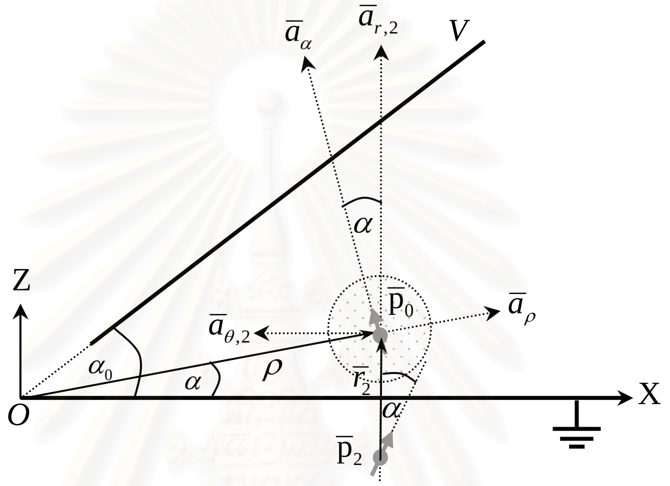
จากรูปที่ ฉ.3 $\overline{a}_{r,0}$ และ $\overline{a}_{\theta,0}$ เปลี่ยนเป็น $\overline{a}_\rho$ และ $\overline{a}_\alpha$ โดยหมุนตามเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม $(\alpha_0-\alpha)$. ดังนั้นแรง $\overline{F}_{p_1p_0}$ ในทิศ $\overline{a}_\rho$ และ $\overline{a}_\alpha$ เป็น

$$\overline{F}_{p_1p_0}=\frac{3|\overline{\mathrm{p}}_0|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E|\overline{r}_0|^4}\Big\{-\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]\sin(\alpha_0-\alpha)\overline{a}_\rho + \left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]\cos(\alpha_0-\alpha)\overline{a}_\alpha\Big\} \qquad \text{(ฉ.20)}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉ.2.2 แรงที่เงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_2$ กระทำกับ $\overline{\mathrm{p}}_0$

รูปที่ ฉ.4 แสดงตำแหน่ง มุม และระยะระหว่างไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_2$. $\overline{\mathrm{p}}_0$ อยู่ห่างจาก $\overline{\mathrm{p}}_2$ เป็นระยะ $\overline{r}_2$ และทำมุม α ในระบบพิกัดทรงกลมซึ่งมี $\overline{\mathrm{p}}_2$ เป็นจุดกำเนิด โดยที่ $\overline{a}_{r,2}$ และ $\overline{a}_{\theta,2}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงกลมตามทิศ r_2 และ α ตามลำดับ ดังรูปที่ ฉ.4. $\overline{\mathrm{p}}_0$ ทำมุม α ตามเข็มนาฬิกาจากแกนของ $\overline{\mathrm{p}}_0$ มายัง $\overline{r}_2$. จากสมการที่ (ฉ.15) และ (ฉ.17) จะได้ $|\overline{\mathrm{p}}_0| = |\overline{\mathrm{p}}_2|$.



รูปที่ ฉ.4 ตำแหน่ง มุม และระยะของไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ กับเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_2$.

จากสมการที่ (ฉ.11) เมื่อแทนมุม $\theta = \alpha$ และ มุม $\beta = \alpha$ จะได้แรงที่ $\overline{\mathrm{p}}_2$ กระทำกับ $\overline{\mathrm{p}}_0$ เป็น

$$\overline{F}_{p_2 p_0} = \frac{-3|\overline{\mathrm{p}}_0|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E |\overline{r}_2|^4}\left\{\left[2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right]\overline{a}_{r,2}\right\} \tag{ฉ.21}$$

จากรูปที่ ฉ.4 $\overline{a}_{r,2}$ และ $\overline{a}_{\theta,2}$ เปลี่ยนเป็น $\overline{a}_\rho$ และ $\overline{a}_\alpha$ โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม α ดังนั้น แรง $\overline{F}_{p_2 p_0}$ ในทิศ $\overline{a}_\rho$ และ $\overline{a}_\alpha$ คือ

$$\overline{F}_{p_2 p_0} = \frac{3|\overline{\mathrm{p}}_0|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_E |\overline{r}_2|^4}\left\{-\left[\cos^2\alpha + 1\right]\sin(\alpha)\overline{a}_\rho - \left[\cos^2\alpha + 1\right]\cos(\alpha)\overline{a}_\alpha\right\} \tag{ฉ.22}$$

ฉ.2.3 แรงลัพธ์ที่กระทำบนไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$

แรงลัพธ์ทั้งหมดที่กระทำบนไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_0$ เกิดจากเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ และ $\overline{\mathrm{p}}_2$. แรงจากเงาไดโพล $\overline{\mathrm{p}}_1$ ในสมการที่ (ฉ.20) เมื่อแทน $|\overline{r}_0|$ จากสมการที่ (ฉ.13) ลงไป จะได้

$$\bar{F}_{p_1p_0} = \frac{3|\bar{\mathrm{p}}_0|^2}{64\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\rho^4}\left\{-\frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]}{\sin^3(\alpha_0-\alpha)}\bar{a}_\rho + \frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]\cos(\alpha_0-\alpha)}{\sin^4(\alpha_0-\alpha)}\bar{a}_\alpha\right\} \qquad \text{(ฉ.23)}$$

แรงจากเงาไดโพล $\bar{\mathrm{p}}_2$ ในสมการที่ (ฉ.22) เมื่อแทน $|\bar{r}_2|$ จากสมการที่ (ฉ.14) ลงไป จะได้

$$\bar{F}_{p_2p_0} = \frac{3|\bar{\mathrm{p}}_0|^2}{64\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\rho^4}\left\{-\frac{\left[\cos^2\alpha+1\right]}{\sin^3\alpha}\bar{a}_\rho - \frac{\left[\cos^2\alpha+1\right]\cos\alpha}{\sin^4\alpha}\bar{a}_\alpha\right\} \qquad \text{(ฉ.24)}$$

จากสมการที่ (ฉ.23) และ (ฉ.24) แรงลัพธ์ที่กระทำบนไดโพล $\bar{\mathrm{p}}_0$ ในทิศ ρ และ α เป็น

$$F_\rho = \frac{-3|\bar{\mathrm{p}}_0|^2}{64\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\rho^4}\left\{\frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]}{\sin^3(\alpha_0-\alpha)} + \frac{\left[\cos^2(\alpha)+1\right]}{\sin^3(\alpha)}\right\} \qquad \text{(ฉ.25)}$$

$$F_\alpha = \frac{3|\bar{\mathrm{p}}_0|^2}{64\pi\varepsilon_0\varepsilon_E\rho^4}\left\{\frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]\cos(\alpha_0-\alpha)}{\sin^4(\alpha_0-\alpha)} - \frac{\left[\cos^2(\alpha)+1\right]\cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)}\right\} \qquad \text{(ฉ.26)}$$

แทน $|\bar{\mathrm{p}}_0|$ จากสมการที่ (ฉ.15) ลงในสมการที่ (ฉ.25) และ (ฉ.26) จะได้

$$F_\rho = \frac{-3K_1}{256\rho^6\alpha_0^2}\left\{\frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]}{\sin^3(\alpha_0-\alpha)} + \frac{\left[\cos^2(\alpha)+1\right]}{\sin^3(\alpha)}\right\} \qquad \text{(ฉ.27)}$$

$$F_\alpha = \frac{3K_1}{256\rho^6\alpha_0^2}\left\{\frac{\left[\cos^2(\alpha_0-\alpha)+1\right]\cos(\alpha_0-\alpha)}{\sin^4(\alpha_0-\alpha)} - \frac{\left[\cos^2(\alpha)+1\right]\cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)}\right\} \qquad \text{(ฉ.28)}$$

เมื่อ $K_1 = \pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma^2\sigma^6V^2$.

ฉ.3 แรงบนอนุภาคฉนวนจากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรกเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง

เมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของอนุภาคกับอิเล็กโทรดล่างเท่ากับ $\sigma/2$. ดังนั้น $\sin\alpha$ คำนวณได้จาก

$$\sin\alpha = \frac{\sigma}{2\rho} \qquad \text{(ฉ.29)}$$

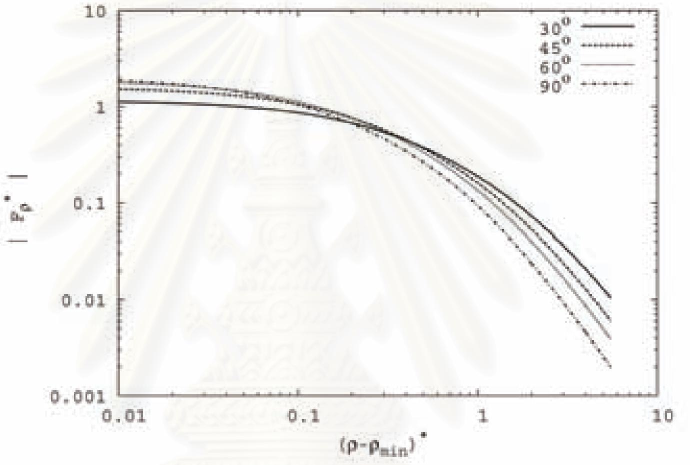
เมื่อแทนสมการที่ (ฉ.29) ลงในสมการที่ (ฉ.27) และ (ฉ.28) แรงลัพธ์ที่กระทำบนอนุภาคในทิศ ρ และ α เป็น

$$F_\rho = \frac{-3K_1}{256\rho^5\alpha_0^2}\left\{\frac{\left(2\rho^2-d^2\right)}{d^3} + \frac{\left(16\rho^2-2\sigma^2\right)}{\sigma^3}\right\} \qquad \text{(ฉ.30)}$$

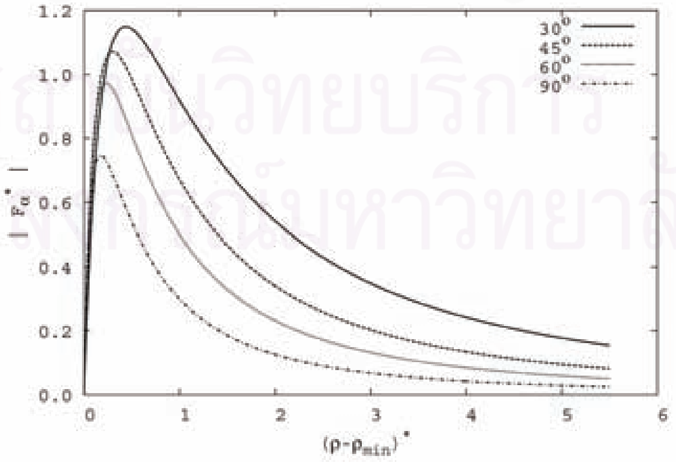
$$F_{\alpha} = \frac{3K_1}{256\rho^5\alpha_0^2}\left\{\frac{\left(2\rho^2-d^2\right)\sqrt{\rho^2-d^2}}{d^4} - \frac{\left(16\rho^2-2\sigma^2\right)\sqrt{4\rho^2-\sigma^2}}{\sigma^4}\right\} \qquad \text{(ฉ.31)}$$

เมื่อ $d = \left(\sqrt{4\rho^2-\sigma^2}/2\right)\sin(\alpha_0) - (\sigma/2)\cos(\alpha_0)$.

แรง $\left|F_{\rho}^{*}\right|$ และ $\left|F_{\alpha}^{*}\right|$ เมื่อเปลี่ยนระยะ ρ โดยที่ $\rho_{\min} = \left(\frac{\sigma/2}{\sin(\alpha_0/2)}\right)$ และ $\rho_{\max} = \rho_{\min} + \left(\frac{11\sigma}{2}\right)$ ที่ $\alpha_0 = 30°, 45°, 60°, 90°$ แสดงไว้ในรูปที่ ฉ.5 และ ฉ.6 ตามลำดับ. ค่าที่ใช้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐานของระยะ และ แรง เป็น σ และ $(1/8)\varepsilon_0 V^2$ ตามลำดับ โดยที่เครื่องหมาย * แทนตัวแปรที่ทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว.



รูปที่ ฉ.5 $\left|F_{\rho}^{*}\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.30) เมื่ออนุภาคอยู่ติดกับอิเล็กโทรดล่างกับการเปลี่ยนค่า ρ ที่ $\alpha_0 = 30°, 45°, 60°, 90°$.



รูปที่ ฉ.6 $\left|F_{\alpha}^{*}\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.31) เมื่ออนุภาคอยู่ติดกับอิเล็กโทรดล่างกับการเปลี่ยนค่า ρ ที่ $\alpha_0 = 30°, 45°, 60°, 90°$.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

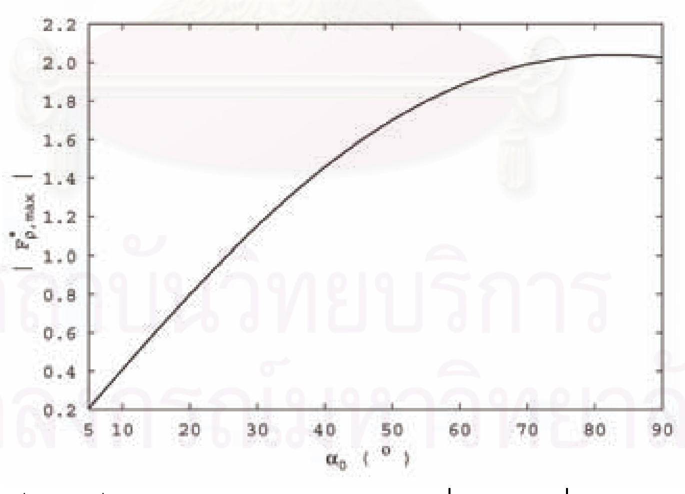
ฉ.4 แรงสูงสุดบนอนุภาคจากวิธีวิเคราะห์โดยไม่ใช้วิธีทำซ้ำด้วยไดโพลและเงาไดโพลเนื่องจากอิเล็กโทรดชุดแรกภายในระนาบเอียง

กำหนดให้ $F_{\rho,\max}$ และ $F_{\alpha,\max}$ เป็นขนาดของแรงมากที่สุดในทิศ ρ และ α เมื่อมุม α_0 คงที่ ตามลำดับ. $F_{\rho,\max}$ เพิ่มมากขึ้น และ $F_{\alpha,\max}$ ลดลงตามการเพิ่มขึ้นของมุม α_0. $F_{\rho,\max}$ เกิดขึ้นเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดบนและล่าง และ $F_{\alpha,\max}$ ในที่นี้เกิดขึ้นเมื่อตำแหน่งของอนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง. ตำแหน่งของอนุภาคที่เกิด $F_{\rho,\max}$ มี $\alpha = \alpha_0 / 2$ และ $\rho = \rho_{\min}$. แทนค่าดังกล่าวลงในสมการที่ (ฉ.27) จะได้

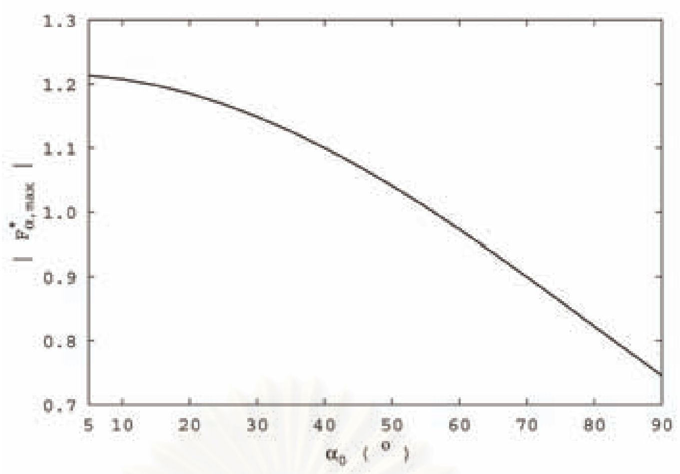
$$F_{\rho,\max} = -\frac{3K_2}{2\alpha_0^2}\left\{\left[\cos^2\left(\alpha_0/2\right)+1\right]\sin^3\left(\alpha_0/2\right)\right\} \qquad (ฉ.32)$$

เมื่อ $K_2 = \pi\varepsilon_0\varepsilon_E\gamma^2 V^2$.

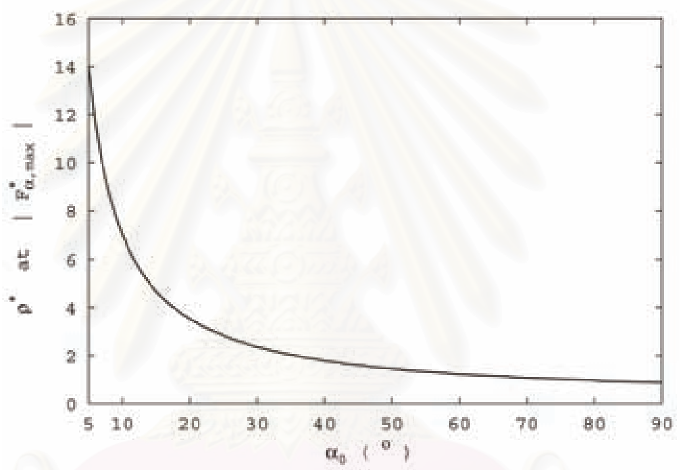
$\left|F^*_{\rho,\max}\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.32) เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° แสดงไว้ในรูปที่ ฉ.7. เมื่อมุม α_0 เพิ่มมากขึ้น $F_{\rho,\max}$ เพิ่มขึ้น และ การเพิ่มขึ้นของ $F_{\rho,\max}$ ค่อยๆ ลดลงเมื่อมุม α_0 เข้าใกล้ 90° ดังรูปที่ ฉ.7. การเปลี่ยนแปลงของ $\left|F^*_{\alpha,\max}\right|$ และระยะ ρ^* ณ ตำแหน่งที่เกิด $\left|F^*_{\alpha,\max}\right|$ เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90° แสดงไว้ในรูปที่ ฉ.8 และ ฉ.9 ตามลำดับ. เมื่อมุม α_0 เพิ่มมากขึ้น $F_{\alpha,\max}$ ลดลง และลดลงเป็นเชิงเส้นเมื่อมุม α_0 เข้าใกล้ 90° ดังรูปที่ ฉ.8. ในที่นี้ ตำแหน่ง ρ ที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ คำนวณจากสมการที่ (ฉ.31) ด้วยวิธีการสมมติและตรวจสอบกลับ (trial and error method) และระยะ ρ ที่เกิด $F_{\alpha,\max}$ ลดลงเมื่อมุม α_0 เพิ่มมากขึ้น ดังรูปที่ ฉ.9.



รูปที่ ฉ.7 $\left|F^*_{\rho,\max}\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.31) เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90°.



รูปที่ ฉ.8 $\left|F^*_{\alpha,\max}\right|$ จากการคำนวณด้วยสมการที่ (ฉ.30) เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90°.



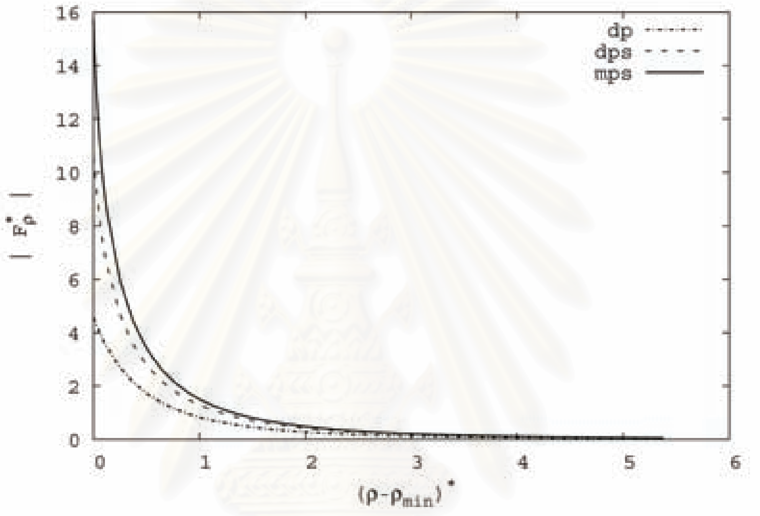
รูปที่ ฉ.9 ระยะ ρ^* ที่เกิด $\left|F^*_{\alpha,\max}\right|$ เมื่อ $\alpha_0 = 5^\circ$ ถึง 90°.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

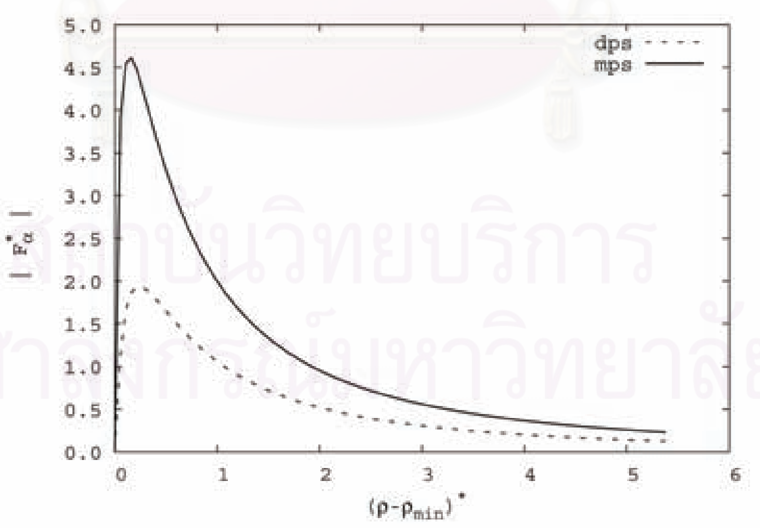
ภาคผนวก ช

แรงที่กระทำบนอนุภาคเมื่ออนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดล่าง

ข้อมูลผลการคำนวณแรงบนอนุภาคจากการประมาณด้วยไดโพล (dp) การประมาณด้วยไดโพลและเงาของอิเล็กโทรดชุดแรก (dps) และการคำนวณด้วยมัลติโพลและเงาของอิเล็กโทรดทุกชุด (mps) ในหัวข้อที่ 3.5.2.



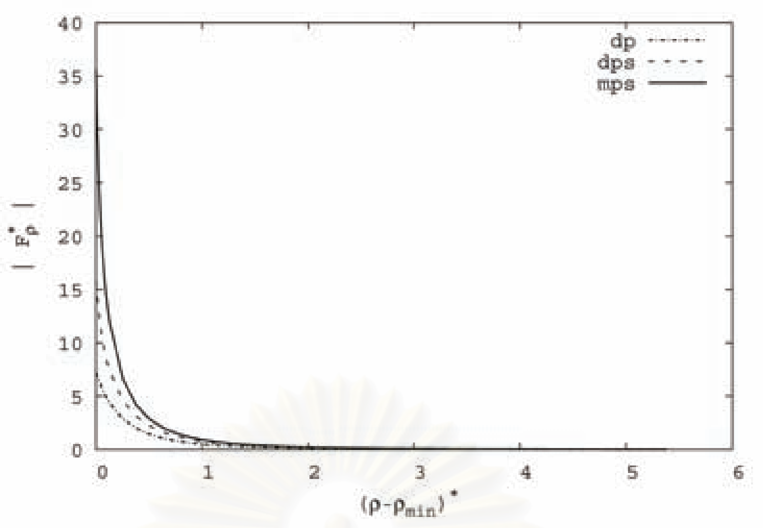
(ก)



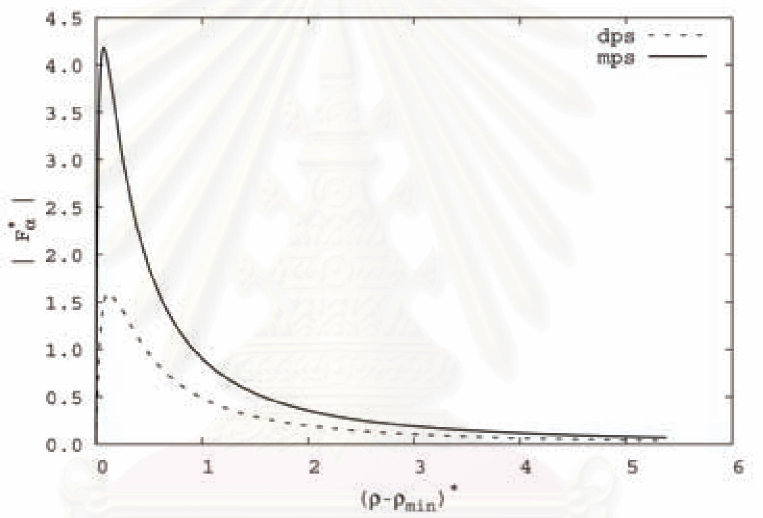
(ข)

รูปที่ ช.1 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่างที่ $\alpha_0 = 45^\circ$ (ก) $|F_\rho^*|$ และ (ข) $|F_\alpha^*|$.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก)



(ข)

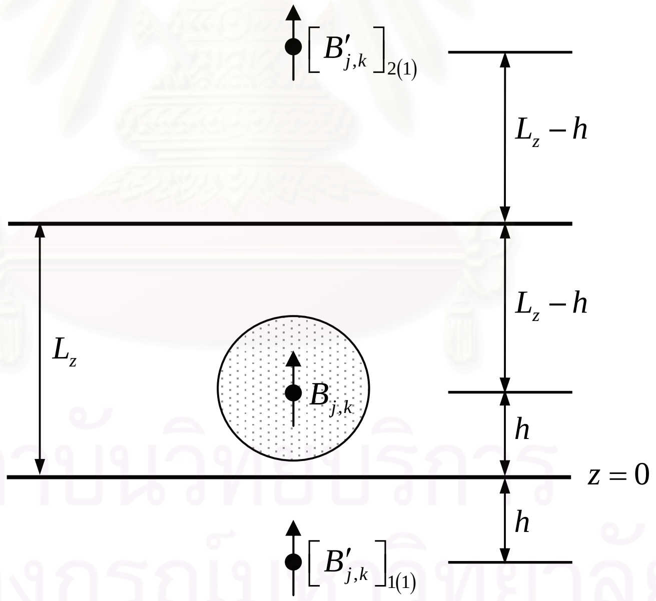
รูปที่ ซ.2 แรงจากวิธีการคำนวณทั้งสาม (dp, dps และ mps) เมื่ออนุภาคสัมผัสอิเล็กโทรดล่าง ที่ $\alpha_0 = 90^\circ$ (ก) $\left|F_\rho^*\right|$ และ (ข) $\left|F_\alpha^*\right|$.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ซ

ตำแหน่งของการวางเงามัลติโพลสำหรับการคำนวณด้วยระนาบอิเล็กโทรดคู่ขนาน

อนุภาควางอยู่ระหว่างอิเล็กโทรดคู่ขนานซึ่งวางห่างกันเป็นระยะ L_z ดังรูปที่ ซ.1. พิจารณามัลติโพล $B_{j,k}$ วางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาคซึ่งอยู่สูงกว่าอิเล็กโทรดล่างเป็นระยะ h. เงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ที่กระทำกับอิเล็กโทรดคู่ขนานถูกวางด้วยวิธีการที่เป็นลำดับขั้นตอน. วิธีการวางเงามัลติโพลแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน. ขั้นตอนแรกคือวางเงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ที่กระทำกับอิเล็กโทรดล่างก่อนอิเล็กโทรดบน ส่วนขั้นตอนที่สองคือวางเงามัลติโพลสลับลำดับกันกล่าวคือวางเงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ที่กระทำกับอิเล็กโทรดบนก่อนอิเล็กโทรดล่าง. เงาลำดับที่ m เมื่อ $m=1,2,3,\ldots$ ของเงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ตามขั้นตอนที่หนึ่งและสองคือ $\left[B'_{j,k}\right]_{1(m)}$ และ $\left[B'_{j,k}\right]_{2(m)}$ ตามลำดับ. รูปที่ ซ.1 แสดงตัวอย่างของการวางเงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{1(1)}$ และ $\left[B'_{j,k}\right]_{2(1)}$.



รูปที่ ซ.1 การวางเงามัลติโพลที่กระทำกับระนาบอิเล็กโทรดคู่ขนาน.

ตำแหน่งของเงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{1(m)}$ และ $\left[B'_{j,k}\right]_{2(m)}$ คำนวณได้จากสมการ

$$z_{1(m)} = (-1)^m \left\{\left[(m-1)L_z\right] + L_z\left[(m-1)\%2\right] + h\right\} \qquad (ซ.1)$$

$$z_{2(m)} = (-1)^{m-1} \left\{\left[(m-1)L_z\right] + \left[(m\%2)L_z\right] + (L_z - h)\right\} \qquad (ซ.2)$$

เมื่อ $z_{1(m)}$ คือ ตำแหน่งของเงามัลติโพล $\left[\tilde{B}_{j,k}\right]_{1(m)}$

$z_{2(m)}$ คือ ตำแหน่งของเงามัลติโพล$\left[\tilde{B}_{j,k}\right]_{2(m)}$ และ

% คือ เครื่องหมายซึ่งแสดงเศษที่ได้หลังการหาร และ $z = 0$ ที่ตำแหน่งของอิเล็กโทรดล่าง.

ในรูปที่ ซ.1 นั้น เงามัลติโพล $\left[B'_{j,k}\right]_{1(1)}$ และ $\left[B'_{j,k}\right]_{2(1)}$ วางอยู่ที่ตำแหน่ง $z_{1(1)} = -h$ และ $z_{2(1)} = 2L_z - h$ ตามลำดับ. ขนาดของเงามัลติโพล $B'_{j,k}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดคู่ขนานคำนวณได้จาก

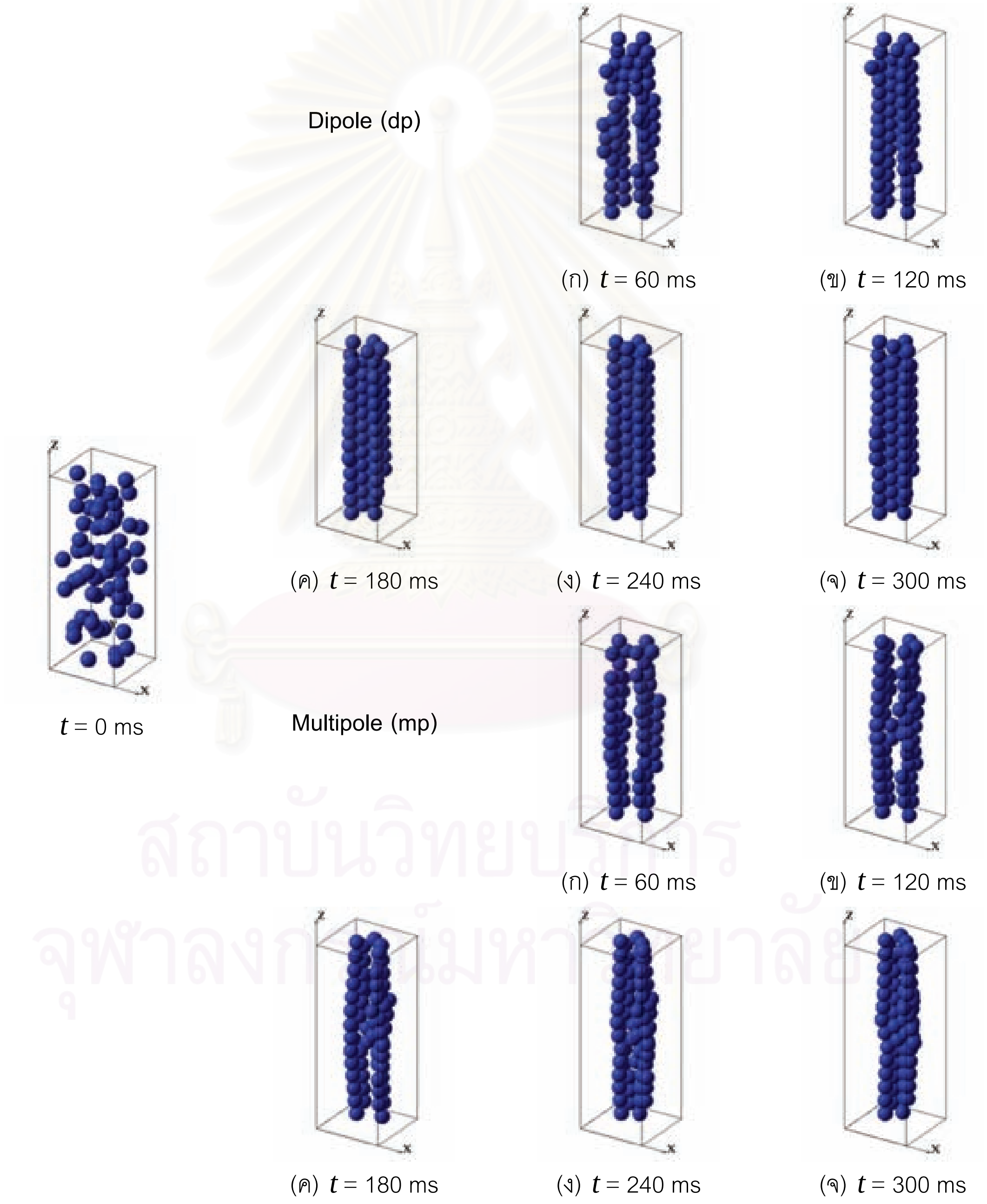
$$B'_{j,k} = \left(-1\right)^{j+k+1} B_{j,k} . \qquad (ซ.3)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ณ

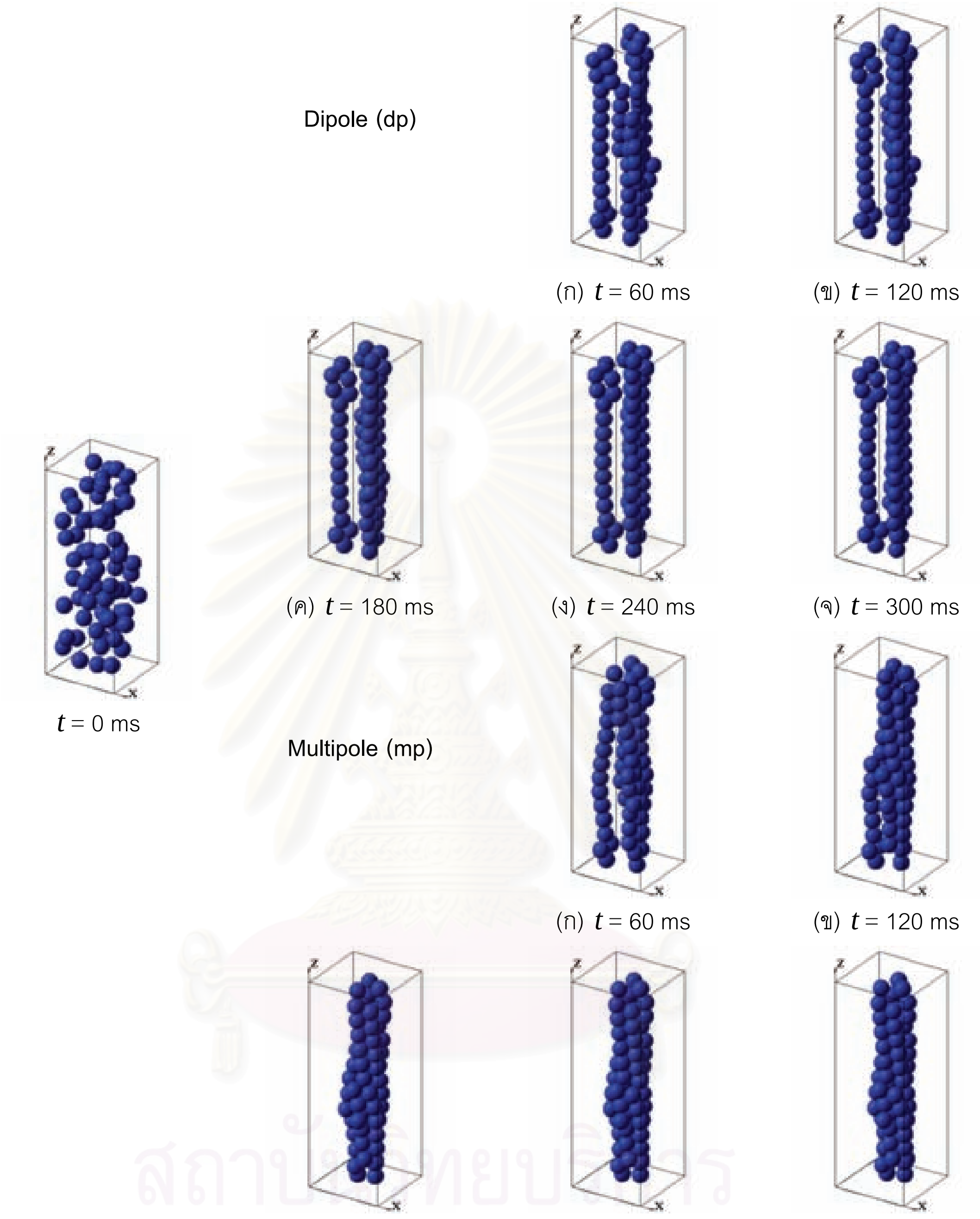
ผลการจำลองของไหลอีอาร์ที่มีอนุภาคจำนวน 67 ลูก ด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล

ข้อมูลเพิ่มเติมจากการจำลองของไหลอีอาร์ในหัวข้อที่ 4.5.2. ของไหลอีอาร์ที่ใช้ในการจำลองมีการจัดวาง และข้อมูลทางกายภาพที่ใช้ในการคำนวณตามหัวข้อที่ 4.1.



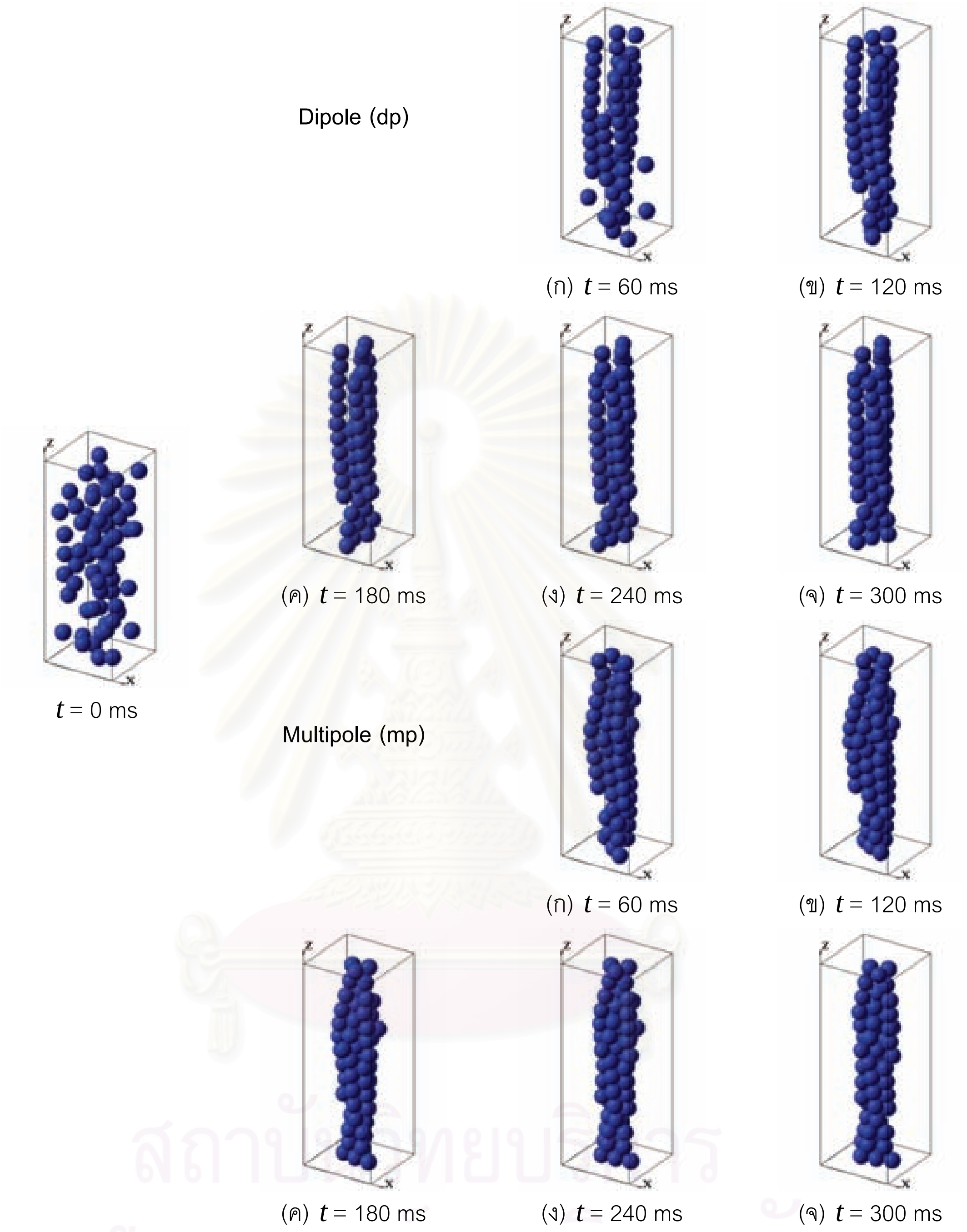
รูปที่ ณ.1 ตำแหน่งของอนุภาคในของไหลอีอาร์ระบบ (a) จากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ ณ.2 ตำแหน่งของอนุภาคในของไหลอีอาร์ระบบ (b) จากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพลและแบบจำลองมัลติโพล.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ ณ.3 ตำแหน่งของอนุภาคในของไหลอีอาร์ระบบ (c) จากการจำลองด้วยแบบจำลองไดโพล และแบบจำลองมัลติโพล.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายอรรณพ ลิ้มสีมารัตน์ เกิดวันที่ 9 กันยายน พ.ศ. 2517 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต และ วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2538 และ 2542 ตามลำดับ เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ณ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ตั้งแต่ปีการศึกษา 2545 จนถึงปัจจุบัน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย