ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

นายอธิพงษ์ มาลาทิพย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-17-7187-8

FINITE ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF CONJUGATE HEAT TRANSFER

Mr. Atipong Malatip

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2004

ISBN 974-17-7187-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

โดย นายอธิพงษ์ มาลาทิพย์

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษา ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

อธิพงษ์ มาลาทิพย์ : ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต. (FINITE ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF CONJUGATE HEAT TRANSFER) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 171 หน้า.
ISBN 974-17-7187-8

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คินโดยใช้วิธีการคำนวณแบบแยกกันเพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตซึ่งเป็นการคำนวณการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน ในส่วนของไหลจะวิเคราะห์ด้วยวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คินและวิธีกาเลอร์คินจะใช้วิเคราะห์ในส่วนของแข็ง

ส่วนขั้นตอนการคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้สามารถที่จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่อันดับเท่ากันได้เป็นผลให้สามารถทำความเข้าใจในขั้นตอนของการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยง่าย อีกทั้งยังเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณด้วยการคำนวณแบบแยกกันกล่าวคือตัวแปรความเร็ว ความดันและอุณหภูมิจะถูกคำนวณไม่พร้อมกัน

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ไปเปรียบเทียบกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง ก่อนนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีลักษณะซับซ้อนได้

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....
ปีการศึกษา 2547	

4570626021 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD: FINITE ELEMENT / CONJUGATE HEAT TRANSFER / STREAMLINE UPWIND PETROV GALERKIN METHOD

ATIPONG MALATIP : FINITE ELEMENT FOR ANALYSIS OF CONJUGATE HEAT TRANSFER. THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D. 171 pp. ISBN 974-17-7187-8.

A combined Streamline Upwind Petrov-Galerkin method (SUPG) and segregated finite element algorithm for solving conjugate heat transfer problems where heat conduction in a solid is coupled with heat convection in viscous fluid flow is presented. The Streamline Upwind Petrov-Galerkin method is used for the analysis of viscous thermal flow in the fluid region, while the analysis of heat conduction in solid region is performed by the Galerkin method.

The solution algorithm presented in this thesis uses an equal order element interpolation functions for both the velocity, pressure and temperature that can reduce the complexity in deriving the finite element equations. A segregated solution algorithm is also incorporated to compute the velocities, pressure and temperature separately for improving the computational efficiency.

A corresponding finite element computer program was developed and verified using simple examples that have exact solutions before applying to solve more complex problems. Conjugate heat transfer solutions from several tested problems illustrate the effectiveness of the finite element method that can predict detailed conjugate heat transfer behaviors past complex geometries.

Department Mechanical Engineering Student's signature ....
Field of study Mechanical Engineering Advisor's signature ....
Academic Year 2004

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัย นอกจากนี้ท่านยังได้ถ่ายทอดข้อคิดหลายสิ่งหลายอย่างที่มีคุณค่ายิ่งเกี่ยวกับการทำงานและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ กรรมการที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ อาจารย์นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ และคุณสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช ที่ได้ถ่ายทอดความรู้ ประสบการณ์ และคำปรึกษาในทุก ๆ ด้าน ขอขอบคุณ คุณปริญญา บุญมาเลิศ คุณพัชรี ธีระเอก คุณสมบูรณ์ โอตรวรรณะ สุธี ไตรวิวัฒนา คุณสุธี โอฬารฤทธินันท์ คุณคมกฤษณ์ ชัยโย และคุณกอบศักดิ์ พจนานภาศิริ ซึ่งเป็นเพื่อน ๆ พี่ ๆ ในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับคำแนะนำ ความช่วยเหลือและกำลังใจตลอดเวลาทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ให้คำปรึกษา เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่, เมตริกซ์สัมประสิทธิ์
a	ความเร่ง, ตัวแปรความสูงของช่องการไหล
a_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
b_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
C_p	ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
c_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
D	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
E	พลังงานรวม
e	ค่าความผิดพลาด
F	แรง
Gr	กราชอร์ฟนัมเบอร์ (Grashof Number)
g	แรงโน้มถ่วงโลก
h	ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์
K	อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล
K_{pi}	สัมประสิทธิ์สำหรับความดันที่กระจายมาจากสมการโมเมนตัม
K_x	เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการความดัน
K_y	เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการความดัน
k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
k_f	สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล
k_s	สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง
L	ตัวแปรระยะทาง
m	มวล

N	ฟังก์ชันน้ำหนัก
Nu	นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งใด ๆ (Local Nusselt number)
$\overline{Nu}$	นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ย (Average Nusselt number)
n	ทิศทางตั้งฉาก
Pe	เพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number)
Pr	พรังเดิลนัมเบอร์ (Prandlt number)
p	ความดัน
Q	ความร้อนที่เกิดขึ้นได้เอง
q	ความร้อนที่ผลิตได้เองต่อหนึ่งหน่วยมวล
q_f	ปริมาณความร้อนในของไหล
q_s	ปริมาณความร้อนในของแข็ง
q_x	ปริมาณความร้อนในแนวแกน x
q_y	ปริมาณความร้อนในแนวแกน y
R	เศษตกค้าง, โหลดเวกเตอร์
Ra	เรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh number)
Re	เรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynolds number)
r	เวคเตอร์เศษตกค้าง
T	อุณหภูมิ
T_0	อุณหภูมิอ้างอิง
t	เวลา
u	ความเร็วในแนวแกน x
$\hat{u}_i$	ตัวแปรในสมการโมเมนตัมสำหรับแกน x
v	ความเร็วในแนวแกน y
$\hat{v}_i$	ตัวแปรในสมการโมเมนตัมสำหรับแกน y

W	ฟังก์ชันน้ำหนัก, น้ำหนัก
x	ระยะในแนวราบ
y	ระยะในแนวดิ่ง
Γ	ขอบของการไหล
Γ_ϕ	สัมประสิทธิ์การแพร่
Ω	โดเมนของการไหล
ϕ	ตัวแปรใดๆ
λ	ค่าพารามิเตอร์ของวิธีพินัลตี้, ตัวแปรในการปรับขนาดเอลิเมนต์
μ	ความหนืด
ν	ความหนืดพลศาสตร์
β	สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (Coefficient of thermal expansion)
θ	มุมการไหล
ρ	ความหนาแน่น
σ	ความเค้นในแนวตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบันการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต เป็นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งกับของไหล โดยพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน ซึ่งมีวิธีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อนและการพาความร้อนโดยใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้าและออกจากทั้งของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อของทั้งคู่ต้องมีค่าเท่ากัน ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหลถูกตั้งสมมติฐานให้อุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่ผิวของแข็งมีค่าคงที่เพื่อแก้ไขปัญหาให้ง่ายขึ้น ซึ่งในความเป็นจริงแล้วอุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่บริเวณดังกล่าวอาจมีค่าไม่คงที่ ทำให้การคำนวณการถ่ายเทความร้อนมีความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง ดังนั้นวิธีการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจึงมีความสำคัญในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้น ตัวอย่างของปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ได้แก่ การถ่ายเทความร้อนออกจากครีบของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน การถ่ายเทความร้อนออกจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ และการถ่ายเทความร้อนของรอยเชื่อมออกสู่อากาศ เป็นต้น

สำหรับการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนในของแข็ง จะมีสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องคือสมการปัวส์ซง (Poisson’s Equation) ส่วนการวิเคราะห์ปัญหาการไหล จะมีสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องคือระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งประกอบด้วยสมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการอนุรักษ์พลังงาน สมการเหล่านี้อยู่ในรูปแบบที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหาโดยทั่วๆไป ดังนั้นจึงมีการนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาใช้วิเคราะห์เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณกับปัญหาการไหล

ในอดีตนักวิจัยพยายามวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลด้วยวิธีต่าง ๆ ทั้งการทดลอง การใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) และการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ตัวอย่างเช่น

1.1.1) การถ่ายเทความร้อนในของแข็งและของไหล

ปราโมทย์ เดชะอำไพ [1] ได้ศึกษานำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง พร้อมทั้งประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ (HEAT2D) โปรแกรมดังกล่าวได้ถูกนำมาใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง

Kawahara et al. [2] และ Yamada et al. [3] ได้ทำการแก้ปัญหาโดยเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบผสม (Mixed Interpolation Function) คือได้เลือกประมาณค่าความเร็วด้วยควอดราติกฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความดันเป็นแบบเชิงเส้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ วิธีดังกล่าวช่วยลดการสั่นของผลลัพธ์และได้รับความนิยมอย่างกว้างขวาง

Chorin [4, 5] นำเสนอระเบียบวิธีการคำนวณแบบแยกกัน (Segregated Solution Method) วิธีนี้จะเริ่มทำการคำนวณหาค่าความเร็วก่อนโดยใช้ค่าความดันที่สมมติขึ้น จากนั้นจะใช้สมการที่เกิดจากการรวมกันของสมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในการหาค่าของความดัน ซึ่งค่าความดันที่คำนวณได้นี้จะนำกลับไปใช้ในการคำนวณหาค่าความเร็วใหม่ แต่วิธีการคำนวณแบบแยกกันที่เป็นที่รู้จักและเป็นที่นิยมกันอย่างแพร่หลายจนถึงปัจจุบันได้แก่วิธีที่เรียกว่า SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) [6] โดยที่วิธีดังกล่าวจะทำการแทนสมการอนุรักษ์โมเมนตัมลงในสมการอนุรักษ์มวลเพื่อสร้างสมการของตัวแก้ไขความดัน (Pressure Correction Equation) ซึ่งขั้นตอนในการคำนวณของวิธี SIMPLE มีดังนี้

1. สมมติการกระจายตัวของความดัน
2. แก้สมการโมเมนตัมเพื่อหาค่าความเร็วโดยใช้ค่าความดันที่สมมติไว้
3. คำนวณหาค่าของตัวแก้ไขความดันจากสมการของตัวแก้ไขความดัน
4. คำนวณหาค่าความดันใหม่โดยใช้ตัวแก้ไขความดัน
5. แก้ไขความเร็วใหม่โดยใช้ค่าของตัวแก้ไขความดัน
6. นำค่าความดันใหม่ที่ได้กลับไปคำนวณในข้อที่ 2 ใหม่ และทำการคำนวณซ้ำจนกว่าจะลู่เข้าสู่คำตอบที่ต้องการ

Patankar [7] พัฒนาปรับปรุงวิธี SIMPLE เพื่อให้คำตอบลู่เข้า (Converge) ได้เร็วยิ่งขึ้น โดยเรียกวิธีใหม่นี้ว่า SIMPLER (SIMPLE-Revised) แต่ยังคงเป็นลักษณะการคำนวณแบบแยกกันเช่นเดิม สำหรับรายละเอียดของวิธี SIMPLE และ SIMPLER นี้สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [7,8]

Rice and Schnipke [9] และ Schnipke [10] เสนอวิธีการกับพจน์เนื่องจากการพาที่เรียกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ โดยวิธีดังกล่าวจะทำการคำนวณพจน์เนื่องจากการพาในแนวของเส้นสตรีมไลน์โดยตรง โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีนี้นั้นไม่ก่อให้เกิดการสั่นของผลลัพธ์แต่ยังคงมีผลของการแพร่ที่ผิดพลาดเกิดขึ้นบ้าง

Brooks and Hughes [11] ได้เสนอวิธีเพื่อใช้แก้ปัญหาการเกิดการสั่นของคำตอบโดยการปรับปรุงฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting Function) ที่ใช้ในวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulation) ซึ่งวิธีดังกล่าวได้ส่งผลให้เกิดการแพร่ที่ผิดพลาดเพียงเล็กน้อยเท่านั้นแต่ยังคงเกิดการสั่นของคำตอบอยู่บ้าง

Zienkiewicz and Codina [12] นำเสนอระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic Based Split Algorithm, CBS Algorithm) หรือวิธีที่เรียกกันโดยทั่วไปว่าวิธีซีบีเอสในการจัดการกับพจน์เนื่องจากการพาโดยย้ายพิกัดที่อยู่บนแกนอ้างอิงไปอยู่บนแกนคุณลักษณะซึ่งเป็นแกนที่เคลื่อนที่ไปกับอนุภาคของของไหลบนเส้นทางเดินของของไหล ซึ่งเป็นผลให้พจน์เนื่องจากการพาหายไป จากนั้นจึงทำการประมาณค่าความเร็วและความดันกลับมาอยู่บนแกนอ้างอิงตามเดิม นอกจากนี้ยังได้ประยุกต์ใช้วิธีการคำนวณแบบแยกส่วน ในการหาผลลัพธ์ของความเร็วและความดัน จะเห็นว่าวิธีการดังกล่าวลดการสั่นของผลลัพธ์เนื่องจากการพาและสามารถเลือกใช้อันดับของฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วและความดันที่เท่ากันได้ ช่วยให้ลดความยุ่งยากในการคำนวณจากการ อินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) และได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้น

นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ [13] ได้นำเสนอวิธีการแยกคิดโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ โดยจะทำการคำนวณพจน์การพาในแนวของเส้นสตรีมไลน์โดยตรง โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ส่วนผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีนี้นั้นยังทำให้เกิดการสั่นอยู่บ้างและผลของคำตอบยังคงมีผลของการแพร่ที่ผิดพลาดเกิดขึ้น

Du Toit [14] ได้เสนอวิธีการแยกคิดเพื่อใช้แก้ปัญหาการเกิดการสั่นของคำตอบโดยการปรับปรุงฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting Function) ที่ใช้ในวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อว่าวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulation) โดยทำการใส่ฟังก์ชันน้ำหนักลงในสมการโมเมนตัม สมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์พลังงาน และได้เสนอว่าการใส่ฟังก์ชัน

น้ำหนักในพจน์ของการพาจะให้ผลที่ดีกว่าการใส่ฟังก์ชันน้ำหนักในทุกพจน์ โดยนำมาประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ซึ่งผลที่ได้จะส่งผลให้เกิดการแพร่ผิดพลาดเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

1.1.2) การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

Misra and Sarkar [15] ได้ทำการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยจำลองปัญหาการถ่ายเทความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมโดยแสดงให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งในส่วนของแข็งที่มีการนำความร้อนและในส่วนของไหลที่มีการพาความร้อน

Sugavanam et al. [16] นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาจำลองปัญหาการนำความร้อนที่มีแหล่งความร้อนขนาดเล็กอยู่ภายในครีบ โดยบริเวณผิวด้านบนและด้านล่างของครีบมีการระบายความร้อนด้วยวิธีการพาความร้อนแบบบังคับ พร้อมกันนั้นได้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วย โดยนำผลลัพธ์จากการพิจารณาเฉพาะการพาความร้อนและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตมาเปรียบเทียบกัน ซึ่งการวิเคราะห์ด้วยวิธีการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตให้ผลลัพธ์ที่สามารถนำไปใช้ในการออกแบบครีบให้มีประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนใกล้เคียงกับพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริง

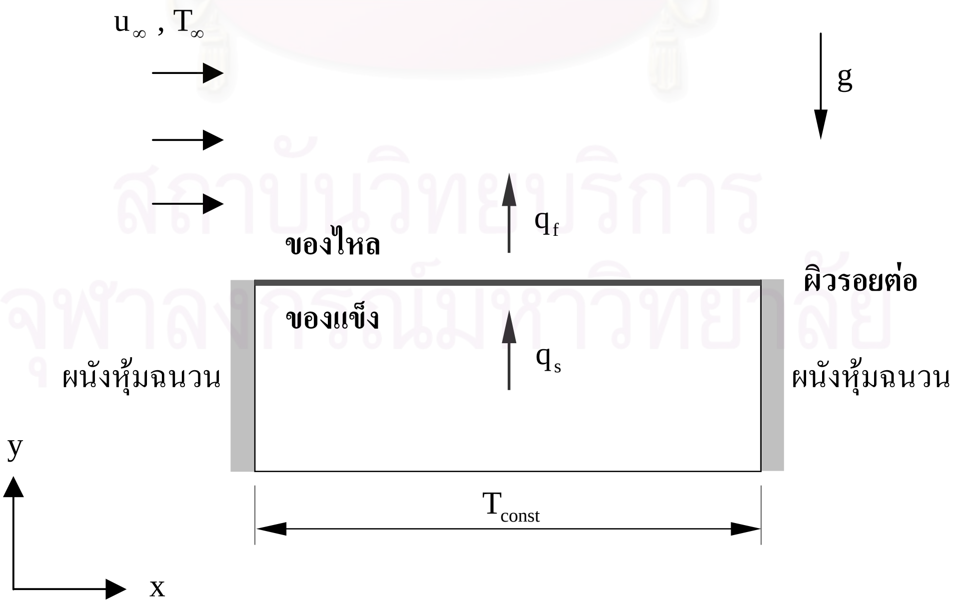
Cole [17] ศึกษาปัญหาการระบายความร้อนออกจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ โดยจำลองปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและวิเคราะห์เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งการจำลองมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วและความหนาของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ เพื่อหาขนาดที่มีความเหมาะสม สำหรับวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนเฉพาะการพาความร้อนโดยไม่พิจารณาผลของการนำความร้อนเนื่องจากอุณหภูมิภายในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์มีค่าเท่ากัน

Chen and Han [18] นำเสนอแนวคิดการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยการจัดสมการอนุรักษ์พลังงานให้เทอมการแพร่มีสัมประสิทธิ์เป็นอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนและค่าความจุความร้อน แต่การจัดสมการในรูปดังกล่าวจะทำให้เกิดปัญหาในการวิเคราะห์ในส่วนของแข็ง กล่าวคือ ค่าความจุความร้อนของของแข็งมีค่าสูง ทำให้สัมประสิทธิ์ของเทอมการแพร่กระจายมีค่าน้อยและผลการจำลองที่ได้ไม่เป็นไปตามปรากฏการณ์จริง ดังนั้นจึงเลือกใช้ค่าความจุความร้อนของของไหลแทนการใช้ค่าความจุความร้อนของของแข็ง ทำให้ผลการจำลองที่ได้มีความสอดคล้องกับปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้น

ยศกร ประทุมวัลย์ [19] ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยทำการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนที่ผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลด้วยวิธีการประมาณแบบค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และทำการศึกษาผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ที่มีผลต่อการถ่ายเทความร้อนและยังศึกษาผลกระทบที่มีต่อการไหลและการถ่ายเทความร้อนจากแรงลอยตัวที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิในการพาความร้อนแบบอิสระ

Dong and Li [20] ได้เสนอการแก้ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อนโดยที่ศึกษาผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ที่มีผลต่อการถ่ายเทความร้อน โดยหาค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อด้วยวิธี Taylor Series

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต รวมทั้งศึกษาการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นในของไหลและของแข็ง โดยเฉพาะอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อของสองสถานะ ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหาสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ตำแหน่งต่าง ๆ ระหว่างรอยต่อของแข็งและของไหลได้ โดยจะก่อให้เกิดประโยชน์ในการออกแบบรูปร่างของครีบที่ใช้ในการถ่ายเทความร้อนและออกแบบอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ต่าง ๆ ที่มีการถ่ายเทความร้อนมาเกี่ยวข้องด้วย



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างโดเมนของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

รูปที่ 1.1 แสดงตัวอย่างของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งมีรายละเอียดคือ ของไหลเข้ามาทางด้านซ้ายด้วยลักษณะสม่ำเสมอโดยมีความเร็วเท่ากับ u_∞ และอุณหภูมิเท่ากับ T_∞ สำหรับของแข็งบริเวณผิวด้านล่างจะมีเงื่อนไขขอบที่มีอุณหภูมิเท่ากับ T_{const} โดยที่บริเวณด้านซ้ายและขวาของของแข็งเป็นฉนวนป้องกันความร้อน

การถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นระหว่างของแข็งและของไหลเป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งอธิบายได้ว่า ปริมาณความร้อนที่ของแข็งถ่ายเทสู่ของไหลมีค่าเท่ากับ q_s ในขณะที่ปริมาณความร้อนที่ของไหลได้รับจากของแข็งมีค่าเท่ากับ q_f โดยในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจะต้องคำนวณการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.2.1 ศึกษาพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่พิจารณาการพาความร้อนกับการนำความร้อนในของไหลและของแข็งควบคู่กัน
1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถนำมาใช้เพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
1.2.3 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำนายพฤติกรรมของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
1.2.4 วิเคราะห์ผลการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ได้จากการคำนวณลักษณะการไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนในรูปแบบต่าง ๆ

1.3 ขั้นตอนการดำเนินงานและขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.3.1 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการถ่ายเทความร้อนในของแข็งและของไหล
1.3.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลโดยใช้ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (SUPG)
1.3.3 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งและของไหลโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ
1.3.4 ประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (SUPG)

1.3.5 ทดสอบโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรงหรือผลการทดลองเพื่อยืนยันความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

1.3.6 ศึกษาลักษณะการถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนและการนำความร้อนควบคู่กัน

1.3.7 ประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จากข้อ 1.3.4 เพื่อแก้ไขปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสองมิติ

1.3.8 ทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับปัญหาการพาความร้อนและการนำความร้อนในปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงหรือผลการทดลอง

1.3.9 ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ซับซ้อน

1.3.10 จัดพิมพ์วิทยานิพนธ์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อนได้

1.4.2 ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจของการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นในของแข็งและของไหลที่พิจารณาการพาความร้อนและการนำความร้อนควบคู่กัน

1.4.3 ก่อให้เกิดความเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างสาขาวิชาพลศาสตร์ของไหล กับการถ่ายเทความร้อน

1.4.4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถทำนายพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งไปสู่ของไหลได้

1.4.5 ก่อให้เกิดความเข้าใจที่สามารถนำไปใช้ในการออกแบบครีบหรืออุปกรณ์ถ่ายเทความร้อนได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะแสดงขั้นตอนในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาการไหล ซึ่งจะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนจะใช้สมการปัวส์ซง (Poisson’s Equation)

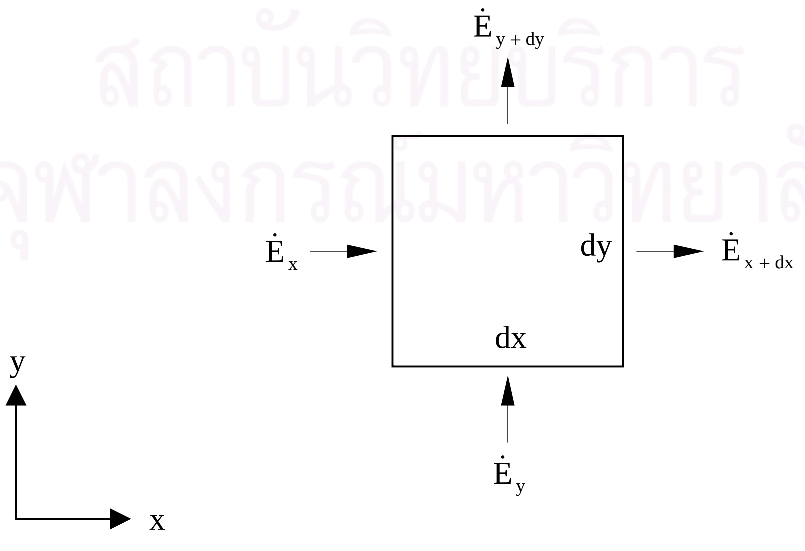
ส่วนที่สองในการวิเคราะห์ปัญหาของไหลมีสมการเกี่ยวข้องดังนี้ [21]

1) สมการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass)
2) สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum)
3) สมการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of Energy)

สำหรับในการศึกษาในงานวิจัยนี้ เป็นการพิจารณาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวในสองมิติและมีการไหลแบบราบเรียบ ดังนั้นความหนาแน่นของการไหลอาจถูกสมมติให้มีค่าคงที่ได้

2.1 สมการปัวส์ซง

พิจารณาการนำความร้อนผ่านของแข็งที่มีขนาดกว้าง dx และ dy และความหนาเท่ากับ 1 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ในระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate)



รูปที่ 2.1 รูปแบบแสดงการนำความร้อนผ่านเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก

จากกฎอนุรักษ์พลังงาน

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{g} \quad = \quad \dot{E}_{st} \tag{2.1}$$

$$\dot{q}''_{x}\,dy + \dot{q}''_{y}\,dx - \dot{q}''_{x+dx}\,dy - \dot{q}''_{y+dy}\,dx + Q'''\,V \quad = \quad \rho c V \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.2}$$

แต่

$$\dot{q}''_{x+dx} \quad = \quad \dot{q}''_{x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{q}''_{x}\right)dx \qquad (2.3\text{ก})$$

$$\dot{q}''_{y+dy} \quad = \quad \dot{q}''_{y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{q}''_{y}\right)dy \qquad (2.3\text{ข})$$

แทนสมการ (2.3ก-ข) ลงในสมการ (2.2) จะได้

$$-\frac{\partial \dot{q}''_{x}}{\partial x}dx\,dy - \frac{\partial \dot{q}''_{y}}{\partial y}dx\,dy + Q'''\,dx\,dy \quad = \quad \rho c\,dx\,dy\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.4}$$

เมื่อ

$$q''_{x} = -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad ; \quad q''_{y} = -k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.5}$$

แทนสมการ (2.5) ลงในสมการ (2.4) จะได้

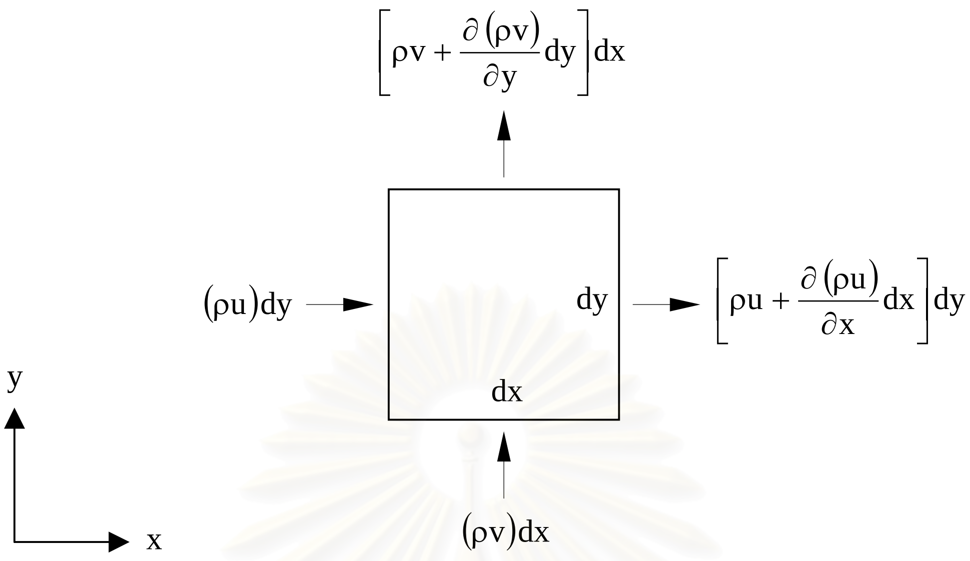
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + Q'''_{gen} \quad = \quad \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.6}$$

เมื่อพิจารณาการแพร่กระจายความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัวและสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายความร้อน k มีค่าคงที่ จะได้

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad = \quad -Q'''_{gen} \tag{2.7}$$

2.2 กฎการอนุรักษ์มวล

พิจารณาการไหลผ่านเอลิเมนต์ผ่านขนาดเล็ก ๆ ขนาดกว้าง dx และ dy ซึ่งตรึงอยู่กับที่บนโดเมนการไหล ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ในระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate) โดยกำหนดให้ u และ v แทนความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ



รูปที่ 2.2 รูปแบบแสดงฟลักซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็กที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล ผ่านเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก

จากรูปที่ 2.2 จะได้ว่าผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน x คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dy - (\rho u) dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\, dy \tag{2.8}$$

ผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน y คือ

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\right] dx - (\rho v) dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\, dx \tag{2.9}$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ไหลออกจากเอลิเมนต์เท่ากับ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] dx\, dy \tag{2.10}$$

สำหรับมวลของของไหลภายในเอลิเมนต์นั้นเท่ากับ $\rho(dx\, dy)$ ดังนั้น

$$\text{อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในเอลิเมนต์} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(dx\, dy) \tag{2.11}$$

จากนิยามของกฎการอนุรักษ์มวลที่ว่า "ผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ไหลออกจากเอลิเมนต์ที่พิจารณาจะเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในเอลิเมนต์นั้น" จากนิยามดังกล่าวสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t}(dx\,dy) \tag{2.12}$$

หรือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.13}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.14}$$

หรือ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.15}$$

พจน์ทางซ้ายมือของสมการ (2.15) อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (Substantial Derivative) จำเป็นต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดา ซึ่งสามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0 \tag{2.16}$$

โดยที่

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \quad \text{และ} \quad \vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

จากที่ได้กล่าวข้างต้นแล้วว่า การศึกษาครั้งนี้พิจารณาการไหลแบบหนืดแต่ไม่มีการอัดตัว (Viscous Incompressible Flow) ซึ่งความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา และตำแหน่งต่าง ๆ ขณะที่เคลื่อนที่ไป ดังนั้น

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \tag{2.17}$$

ดังนั้นสมการ (2.15) จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.18}$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \;=\; 0 \tag{2.19}$$

2.3 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือกฎข้อที่สองของนิวตันมีนิยามว่า “แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้น” ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

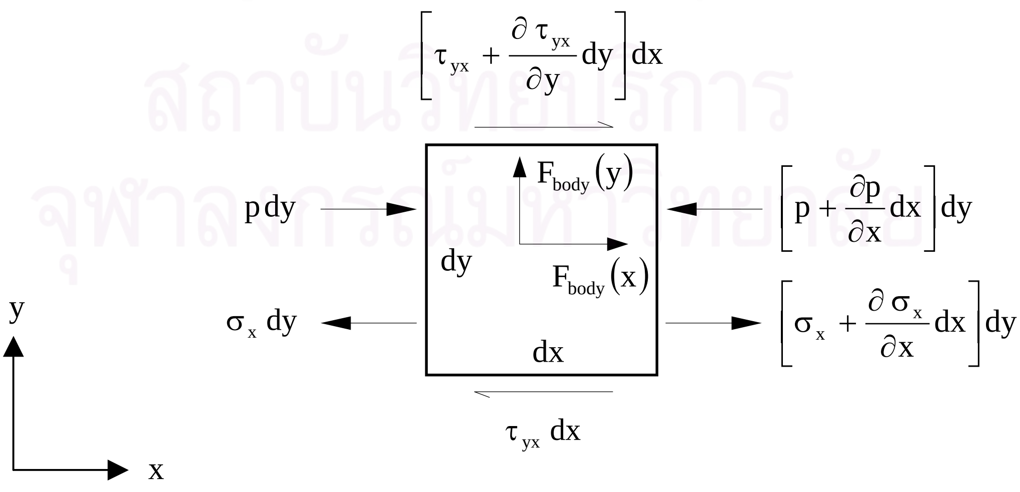
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.20}$$

โดยที่ $\vec{F}$ และ $\vec{a}$ เป็นค่าแรงรวมที่กระทำต่อระบบและค่าความเร่งของของไหลในระบบ ตามลำดับ

กฎข้อที่สองของนิวตันในสมการที่ (2.20) เป็นความสัมพันธ์แบบเวกเตอร์ (Vector) ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปของความสัมพันธ์แบบสกาลาร์ (Scalar) ในแนวแกนต่าง ๆ ได้เมื่อพิจารณาในทิศทางแกน x จะได้

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.21}$$

โดยที่ F_x และ a_x เป็นค่าของแรงและความเร่งในแนวแกน x ตามลำดับ



รูปที่ 2.3 แรงต่าง ๆ ในทิศแกน x ที่กระทำบนก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลผ่านเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก

พิจารณาด้านซ้ายของสมการ (2.21) แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ในรูปประกอบไปด้วยสองส่วนด้วยกันคือ

1. Body Forces คือ แรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคของของไหล โดยไม่มีการสัมผัสทางกายภาพ (Physical Contact) ซึ่งได้แก่แรงจากความโน้มถ่วงของโลก และแรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะผลเนื่องจากแรงโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว
2. Surface Forces คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อผิวด้านนอกของเอลิเมนต์ของของไหลที่ถูกพิจารณา ซึ่งประกอบไปด้วย แรงเนื่องจากความดัน p, ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) σ_x, และแรงเนื่องจากความเค้นเฉือนในแนวสัมผัส (Shear Force) τ_{yx}

ดังนั้นแรงลัพธ์ในแนวแกน x คือ

$$\sum F_x = \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right) - \sigma_x\right]dy + \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dx\right)\right]dy$$

$$+\left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right) - \tau_{yx}\right]dx + \rho f_x\, dx\, dy \tag{2.22}$$

หรือ

$$\sum F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)dx\, dy + \rho f_x\, dx\, dy \tag{2.23}$$

พิจารณาด้านขวาของสมการ (2.21) มวลของของไหลภายในเอลิเมนต์คือ

$$m = \rho dx\, dy \tag{2.24}$$

สำหรับความเร่งในแนวแกน x ของเอลิเมนต์ดังกล่าวนั้น คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในแนวแกน x ดังนั้น

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{2.25}$$

นำสมการ (2.23) - (2.25) ไปแทนค่าในสมการ (2.21) จะได้สมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ดังนี้

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{2.26ก}$$

ในทำนองเดียวกัน สมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศทางแกน y จะได้ว่า

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \tag{2.26ข}$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian Fluid) ความเค้นต่าง ๆ สามารถเขียนอยู่ในเทอมของความเร็วและความเค้น ดังนี้

$$\sigma_x = \lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.27ก}$$

$$\sigma_y = \lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.27ข}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{2.27ค}$$

โดย μ แทนค่าความหนืดพลศาสตร์ (Dynamic Viscosity) หรือค่าความหนืดที่หนึ่ง (First Viscosity) และ λ คือค่าความหนืดที่สอง (Second Viscosity) ซึ่งสโตกส์ได้ตั้งสมมติฐาน (Stokes's Hypothesis) ไว้ว่า

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{2.28}$$

และพบว่าสมมติฐานดังกล่าวนี้ใช้ได้ดีหากของไหลนั้นเป็นก๊าซ (Gas)

เมื่อแทนสมการ (2.27) ลงในสมการ (2.26) จะทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งเรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations) ซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ดังนี้

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \rho f_x \tag{2.29ก}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right] + \rho f_y \tag{2.29ข}$$

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สภาวะอยู่ตัว สมการนาเวียร์-สโตกส์จะลดรูปลงมาเป็น

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\rho f_x \qquad (2.30ก)$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\rho f_y \qquad (2.30ข)$$

ในกรณีของการไหลที่มีอุณหภูมิเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ของไหลที่มีอุณหภูมิสูงจะลอยตัวขึ้น ในขณะที่ของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำนั้นจะเคลื่อนตัวลง แรงลอยตัว (Buoyant Force) ของของไหลอันเนื่องมาจากอุณหภูมิอาจทำการประมาณ โดยใช้สมการของบูซซิเนซค์ (Boussinesq Approximation) [21, 22] โดยนำไปรวมกับแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหลซึ่งแสดงโดยพจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการ (2.30ก-ข) ทำให้สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y กลายเป็น

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\rho g_x\left[1-\beta\left(T-T_o\right)\right] \qquad (2.31ก)$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\rho g_y\left[1-\beta\left(T-T_o\right)\right] \qquad (2.31ข)$$

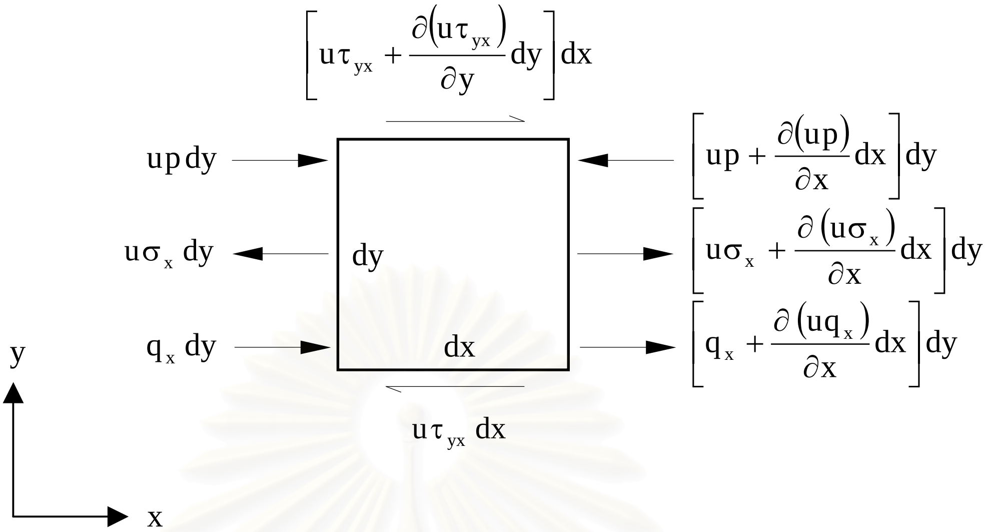
โดย g_x และ g_y แทนค่าคงที่ของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง (Gravitational Acceleration Constant) ในแนวแกนบวก x และบวก y ตามลำดับ β แทนค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (Coefficient of Thermal Expansion) ของของไหล และ T_o แทนอุณหภูมิอ้างอิงที่ของไหลไม่เกิดการลอยตัว

พจน์ทางด้านซ้ายของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองสมการข้างต้น เป็นพจน์อันเนื่องมาจากการพาและเป็นพจน์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear Terms) ซึ่งเป็นสาเหตุให้การแก้สมการดังกล่าวมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

2.3 กฎการอนุรักษ์พลังงาน

เนื่องจากพลังงานไม่สูญหายไปไหน (Conservation of Energy) รูปที่ 2.4 แสดงมวลที่มีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงานสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยใช้กฎข้อแรกของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้กับก้อนมวลนั้น”



รูปที่ 2.4 รูปแบบแสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในทิศแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวล ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล ที่กระทำบนเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวล	=	ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวล	+	อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนั้น

หรือ A = B + C (2.32)

โดย A, B และ C แทนความหมายต่าง ๆ ดังแสดงในสมการข้างบนนี้

หากพิจารณาที่พจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนี้ แรงชนิดแรกคือแรงเนื่องจากน้ำหนักของก้อนมวลเอง (Body Force) ซึ่งเมื่อคูณกับความเร็วของการไหลในทิศทางนั้น จะก่อให้เกิดอัตราของงานคือ

$$\rho\vec{f}\,.\,\vec{V}(dx\,dy) \tag{2.33}$$

จากรูปที่ 2.4 อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[up - \left(u\sigma_x + \frac{\partial(up)}{\partial x}dx\right)\right]dy \quad = \quad -\frac{\partial(up)}{\partial x}dx\,dy \tag{2.34}$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน σ_x ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}dx\right]dy - u\sigma_x dy \quad = \quad \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}dxdy \qquad (2.35)$$

และอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dy\right]dx - u\tau_{yx} dx \quad = \quad \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dxdy \qquad (2.36)$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลในทิศแกน y ก็สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้เช่นกัน ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนี้คือ

$$C \quad = \quad -\left[\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y}\right) + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} - \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$+ \rho\vec{f}.\vec{V}\,dxdy \qquad (2.37)$$

สำหรับพจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลนั้นประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกคือปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนมวลนี้คือ

$$\rho\overline{Q}(dxdy) \qquad (2.38)$$

และจากรูปที่ 2.4 ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน x ผ่านขอบ dx ทั้งทางด้านซ้ายและด้านขวาของก้อนมวลคือ

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial(q_x)}{\partial x}dx\right)\right]dy \quad = \quad -\frac{\partial(q_x)}{\partial x}dx\,dy \qquad (2.39)$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน y ผ่านของ dx ทั้งด้านล่างและด้านบนของก้อนมวลคือ

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial(q_y)}{\partial y}dy\right)\right]dx \quad = \quad -\frac{\partial(q_y)}{\partial y}dxdy \qquad (2.40)$$

ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนมวลนี้คือ

$$B \quad = \quad \left[\rho\overline{Q} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{dy}\right] dxdy \tag{2.41}$$

แต่จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's Law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นแปรผันอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (Temperature Gradient) ดังนี้

$$q_x \; = \; -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{และ} \quad q_y \; = \; -k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.42}$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของของไหล ดังนั้น พจน์ B จึงกลายเป็น

$$B \quad = \quad \left[\rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] dxdy \tag{2.43}$$

ถ้า e แทนพลังงานภายใน และ $\frac{V^2}{2}$ คือพลังงานจลน์ที่ก้อนมวลนั้นไหลด้วยความเร็ว V ดังนั้น พลังงานรวม (Total Energy) คือ $e + \frac{V^2}{2}$ ซึ่งมีหน่วยต่อหนึ่งหน่วยมวล เนื่องจากปริมาณมวลทั้งหมดของก้อนมวลนี้คือ $\rho dxdy$ ดังนั้น พจน์ A แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลคือ

$$A \quad = \quad \rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) dxdy \tag{2.44}$$

แทนสมการ (2.37), (2.43) และ (2.44) ลงในสมการ (2.32) จะได้

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) \; = \; \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \rho\vec{f}\,.\,\vec{V} \tag{2.45}$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน (2.45) ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้นี้ อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ ซึ่งจำเป็นต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาจึงจะสามารถใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุรักษ์มวล (2.18) และสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (2.31) ได้ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (2.45) นี้กระทำบนพจน์ของพลังงานภายใน e และพจน์ของ

พลังงานจลน์ $\frac{V^2}{2}$ ดังนั้น เพื่อให้ง่ายแก่ความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการต่อไป จึงขอแสดงขั้นตอนการแปลงรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียวก่อนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนในการแปลงรูปแบบค่าอนุพันธ์เริ่มจากทำการคูณสมการ (2.26ก) และ (2.26ข) ด้วยความเร็ว u และ v ตามลำดับจะได้

$$\rho\frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x \tag{2.46ก}$$

$$\rho\frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v\frac{\partial p}{\partial y} + v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho v f_y \tag{2.46ข}$$

นำทั้งสองสมการนี้มารวมกัน และเนื่องจาก $u^2 + v^2 = V^2$ ดังนั้นจะได้

$$\rho\frac{D(V^2/2)}{Dt} = -u\frac{\partial p}{\partial x} - v\frac{\partial p}{\partial y} + u\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) + \rho(uf_x + vf_y) \tag{2.47}$$

นำสมการ (2.47) ที่ได้ไปลบออกจากสมการ (2.45) โดยใช้ $\rho\bar{f}.\bar{V} = \rho(uf_x + vf_y)$ จะได้

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.48}$$

สมการ (2.48) สามารถลดรูปได้อีก เนื่องจาก $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ดังนั้นจึงกลายเป็น

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yx}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.49}$$

จากนั้น แทนค่าความเค้นต่าง ๆ ในสมการ (2.49) ในรูปแบบของความเร็วโดยใช้สมการ (2.27ก-ค) จะได้

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$+ \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \tag{2.50}$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial(De)}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho e\vec{V}\right) \tag{2.51}$$

แทนสมการ (2.51) ลงในสมการ (2.50) จะได้

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho e\vec{V}\right) = \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$+ \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \tag{2.52}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานที่เขียนให้อยู่ในรูปของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียว

แต่เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานทั้งหมดภายในก้อนมวลนั้นประกอบด้วยพลังงานภายใน e และพลังงานจลน์ $V^2/2$ ดังนั้น พจน์เชิงอนุพันธ์สัมบูรณ์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.45) สามารถเขียนรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้เช่นกัน โดยทำการจัดรูปดังนี้

$$\rho\frac{D\left(e + V^2/2\right)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right] \tag{2.53}$$

แทนสมการ (2.53) ลงในสมการ (2.45) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right] = \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$- \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \rho\vec{f}\,.\,\vec{V} \tag{2.54}$$

หากกำหนดให้ ε แทนพลังงานรวม (Total Energy) ซึ่งประกอบด้วยพลังงานภายใน e และพลังงานจลน์ $\frac{V^2}{2}$ ดังนี้

$$\varepsilon \;=\; e + \frac{V^2}{2} \;=\; e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \tag{2.55}$$

และเขียนพจน์ทางด้านขวาของสมการ และเขียนพจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.43) ที่เกี่ยวข้องกับความดัน p และความเค้นตั้งฉาก σ_x , σ_y ให้อยู่ในรูปของความเค้นตั้งฉากรวม $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$ ดังนี้

$$\overline{\sigma}_x \;=\; \sigma_x - p \;=\; 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - p \qquad (2.56ก)$$

$$\overline{\sigma}_y \;=\; \sigma_y - p \;=\; 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - p \qquad (2.56ข)$$

$$\tau_{xy} \;=\; \tau_{yx} \;=\; \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (2.56ค)$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (2.54) จะลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \vec{\nabla}.(\rho\varepsilon\vec{V}) \;=\; \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{\partial(u\overline{\sigma}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\overline{\sigma}_y)}{\partial y} + \rho\vec{f}\,.\,\vec{V} \tag{2.57}$$

ในการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สถานะอยู่ตัวนั้น พจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.57) นี้มีค่าเป็นศูนย์ ส่วนพจน์ที่สองสามารถแตกกระจายออกแล้วประยุกต์สมการเชิงอนุรักษ์มวล (2.18) ทำให้สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (2.57) ลดรูปลงไปเป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) \;=\; \rho\overline{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{\partial(u\overline{\sigma}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\overline{\sigma}_y)}{\partial y} + \rho\vec{f}\,.\,\vec{V} \tag{2.58}$$

แทนพลังงานรวมในรูปแบบของพลังงานภายในและพลังงานจลน์จากสมการ (2.55) ลงทางด้านซ้ายของสมการ (2.58) พร้อมกับกระจายพจน์ต่าง ๆ ทางด้านขวาของสมการ (2.58) นี้ออกมา จะได้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)+\rho u\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\rho v\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \rho\overline{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+u\frac{\partial\overline{\sigma}_x}{\partial x}+\overline{\sigma}_x\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{\sigma}_y}{\partial y}+\overline{\sigma}_y\frac{\partial v}{\partial y}+\rho f_x u+\rho f_y v \qquad (2.59)$$

จากนั้นทำการย้ายข้างและจัดพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2.59) นี้ให้เหมาะสมดังนี้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)+u\left[\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial\overline{\sigma}_x}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}-\rho f_x\right]$$

$$+v\left[\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial\overline{\sigma}_y}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}-\rho f_y\right]$$

$$= \rho\overline{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$+\overline{\sigma}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\overline{\sigma}_y\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.60)$$

ผลรวมของพจน์ต่าง ๆ ในวงเล็บสี่เหลี่ยมแรกและสี่เหลี่ยมสองทางด้านซ้ายของสมการ (2.60) นี้ ต่างมีค่าเท่ากับศูนย์ซึ่งสอดคล้องตามสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (2.26ก-ข) ส่วนค่าความเค้นย่อยต่าง ๆ ทางด้านขวามือของสมการ (2.60) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วสำหรับการไหลแบบนิวโทเนียนตามสมการ (2.56ก-ค) เป็นผลให้สมการ (2.60) กลายเป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \rho\overline{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-p\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-p\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.61)$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับความดัน p ทางด้านขวามือของสมการ (2.61) จำนวนสองพจน์เมื่อรวมกันแล้วมีค่าเท่ากับศูนย์สอดคล้องตามสมการเชิงอนุรักษ์มวล (2.18) ดังนั้น

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (2.61) จึงสามารถเขียนโดยย่อต่อไปได้เป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \rho\overline{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\phi \qquad (2.62)$$

โดย ϕ แทนฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous Dissipation Function) ดังนี้

$$\phi = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \qquad (2.63)$$

พจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการ (2.62) แทนการกระจายของพลังงานความหนืดซึ่งเป็นอัตราการสูญเสียพลังงานกล (Mechanical Energy) ในการเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อน (Thermal Energy) อันเนื่องมาจากผลของความหนืดของของไหล สำหรับการไหลที่มีความเร็วค่อนข้างต่ำนั้นการเปลี่ยนรูปแบบของพลังงานเนื่องมาจากพจน์ของการกระจายความหนืดนี้มีค่าน้อยซึ่งอาจละทิ้งได้ เป็นผลให้สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานลดรูปลงสู่รูปแบบที่กะทัดรัดมากยิ่งขึ้นดังนี้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \rho\overline{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.64)$$

และเนื่องจากค่าพลังงานภายใน e อาจสมมติให้แปรผันตามไปกับค่าของอุณหภูมิ T ได้ดังนี้

$$e = cT \qquad (2.65)$$

โดย c แทนความร้อนจำเพาะของของไหลที่ปริมาตรคงตัว (Specific Heat at Constant Volume) และหากกำหนดให้ความร้อนจำเพาะนี้มีค่าคงที่แล้ว สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานคือ

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \rho\overline{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.66)$$

บทที่ 3

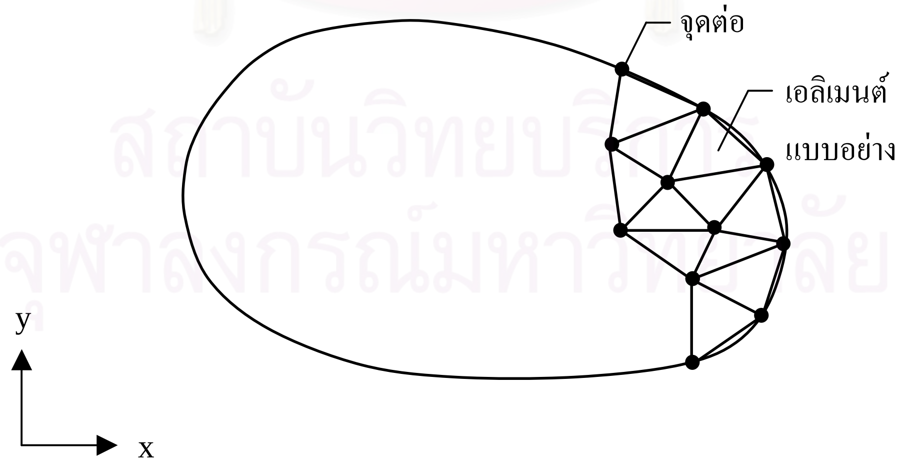
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ระหว่างของแข็งและของไหล

การนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวภายใต้สภาวะอยู่ตัว โดยจะเริ่มจากขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจะอธิบายรายละเอียดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และสุดท้ายจะเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนและการไหลแบบหนืด

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 6 ขั้นตอน [1] คือ

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> แบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ เช่น แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อย ๆ สำหรับปัญหาในสองมิติ ดังรูปที่ 3.1



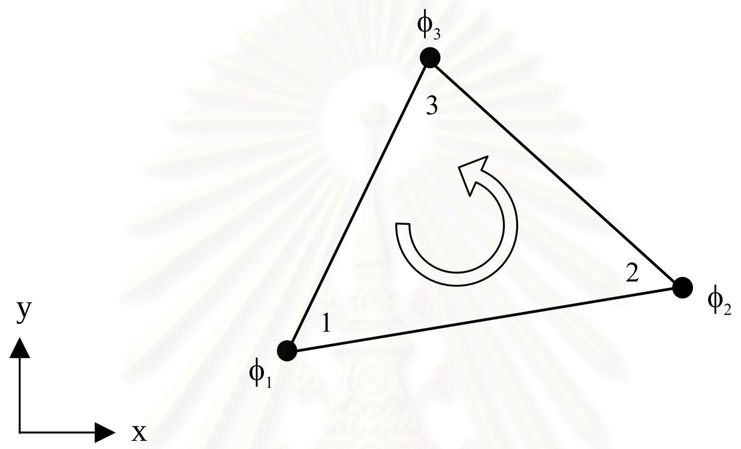
รูปที่ 3.1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

จากนั้นก็ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการแก้นั้น โดยสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ใน

$$D\left(\phi'\right) \quad = \quad 0 \tag{3.1}$$

โดยที่ D คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Differential Operator) และ ϕ' คือตัวแปรตามแม่นตรง

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

ยกตัวอย่างเช่น สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยสามจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้เป็นคุณสมบัติต่าง ๆ ของการไหล ซึ่งสามารถสร้างสมการอธิบายลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi(x,y) \quad = \quad N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \tag{3.2}$$

โดย $N_i(x,y);\ i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ สมการ (3.2) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\phi \;=\; \phi(x,y) \;=\; \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \quad \underset{(1\times3)}{\lfloor N(x,y) \rfloor} \underset{(3\times1)}{\{\phi\}} \tag{3.3}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเป็นแบบเชิงเส้น คือ

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{3.4}$$

โดย A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม สามารถคำนวณได้จากโคออร์ดิเนตที่จุดต่อทั้งสามจุด ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right] \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \qquad & b_1 &= y_2 - y_3 \qquad & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residual) เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพื่อให้ผลลัพธ์โดยประมาณนั้นมีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Equation) ที่สอดคล้องกัน ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$D(\phi)$ จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะเท่ากับ R

โดยที่ R คือเศษตกค้าง (Residual) นั่นหมายถึง

$$R = D(\phi) = D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) \tag{3.7}$$

โดย m คือจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

จากวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin) ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting Function; W) จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W_i\, R\, d\Omega = 0 \qquad i = 1,\ 2, \ldots, m \tag{3.8}$$

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งเราจะเลือกใช้ฟังก์ชันน้ำหนักเป็น $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกโดยทั่วไปว่าบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

สำหรับปัญหาของไหลเราจะเลือกใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulation; SUPG) [23] ซึ่งกำหนดให้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$W_i = N_i + \frac{\alpha h}{2|U|}\left[u\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\right] \tag{3.9}$$

เมื่อ

$$\alpha = \alpha_{opt} = \coth Pe - \frac{1}{Pe} \tag{3.10ก}$$

$$Pe = \frac{|U|h}{2k} \tag{3.10ข}$$

$$|U| = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{3.10ค}$$

โดยที่ h คือขนาดของเอลิเมนต์

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> อินทิเกรตทีละส่วน (Integrate by Part) ซึ่งหากเราแทนสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.8) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} W_i \, R \, d\Omega &= \int_{\Omega^{(e)}} W_i \, D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \, \phi_i\right) d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์ } \Omega^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ } \Gamma^{(e)}} = 0\end{aligned}$$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> จากนั้นเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ นั่นคือ

$$\underset{(m\times m)}{[K]}\ \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} \quad = \quad \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \tag{3.11}$$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (Element Stiffness Matrix) $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์และ $\{F\}$ คือโหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.11) แล้วลำดับขั้นตอนต่อไปก็จะทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขตแล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบสองมิติ ซึ่งวางตัวในแนวระนาบ $x-y$ ดังรูปที่ 3.1 จะมีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad = \quad -Q \tag{3.12}$$

โดย k คือสัมประสิทธ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity) และในที่นี้ถูกสมมติให้คงที่โดยไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ Q คือความร้อนที่เกิดขึ้นได้เอง (Internal Heat Generation) บนแผ่นระนาบนั้น โดยเงื่อนไขขอบเขตตลอดแนวขอบนอกของแผ่นระนาบคือ

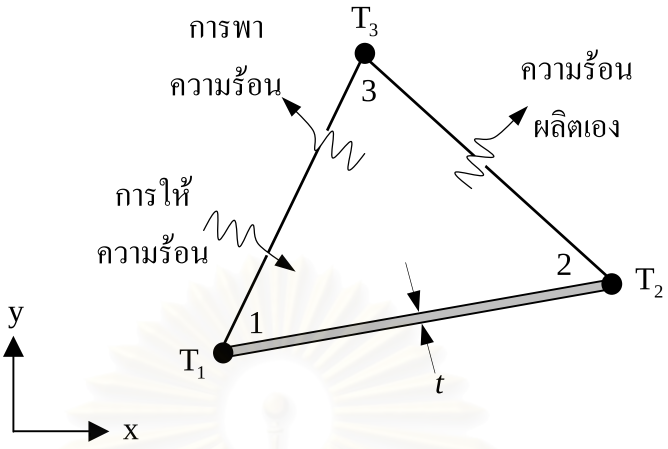
1. กำหนดอุณหภูมิตลอดขอบ

$$T \quad = \quad T_1(x,y) \tag{3.13}$$

2. ไม่มีการถ่ายเทความร้อนตลอดขอบ

$$q_x n_x + q_y n_y \quad = \quad 0 \tag{3.14}$$

โดย q_x และ q_y เป็นปริมาณความร้อนในทิศ x และ y ตามลำดับและ n_x และ n_y เป็นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น



รูปที่ 3.3 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและลักษณะการถ่ายเทความร้อนแบบต่าง ๆ

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับเอลิเมนต์ เมื่อแทนผลเฉลยโดยประมาณลงในพจน์ต่าง ๆ ทางด้านซ้ายของสมการเชิงอนุพันธ์ จะก่อให้เกิดเศษตกค้าง (Residual) ทางด้านขวาของสมการ

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+Q \quad = \quad R \tag{3.15}$$

โดย R แทนค่าของเศษตกค้าง เพราะฉะนั้นการพยายามทำให้เศษตกค้าง R ที่เกิดขึ้นมีค่าต่ำสุด เพื่อที่ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณของอุณหภูมิ T จะได้มีความเที่ยงตรงมากที่สุด เราจึงใช้ระเบียบวิธีเศษตกค้าง ซึ่งประกอบด้วยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i และอินทิเกรตตลอดพื้นที่และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์

$$\int_\Omega W_i\, R\, d\Omega \quad = \quad 0 \qquad \text{เมื่อ} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.16}$$

แทนค่า R จากสมการ (3.15) ลงในสมการ (3.16) จะได้

$$\int_\Omega W_i\left(k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+Q\right)d\Omega \quad = \quad 0 \tag{3.17}$$

เมื่อให้ฟังก์ชันน้ำหนัก $W_i = N_i$ จะได้

$$\int_\Omega N_i\left(k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+Q\right)d\Omega \quad = \quad 0 \tag{3.18}$$

$$k\int_{\Omega} N_i\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)d\Omega \;+\; \int_{\Omega} N_i Q\, d\Omega \;=\; 0 \qquad (3.19)$$

พจน์ทางด้านซ้ายมือประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) ดังนี้

$$\int_{\Omega} u\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\Omega \;=\; \int_{\Gamma} u\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)d\Gamma - \int_{\Omega}\left(\nabla u\cdot\vec{V}\right)d\Omega \qquad (3.20)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสัญลักษณ์ของตัวแปรทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.20) กับพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.19) จะพบว่า

$$u \;=\; N_i$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}\\ \vec{V} &= k\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i}+k\frac{\partial T}{\partial y}\hat{j}\end{aligned}\right\} \quad \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) \;=\; k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

และเนื่องจาก $\hat{n} \;=\; n_x\hat{i}+n_y\hat{j}$ ดังนั้น

$$\vec{V}\cdot\hat{n} \;=\; k\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x+\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)$$

$$u\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right) \;=\; kN_i\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x+\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)$$

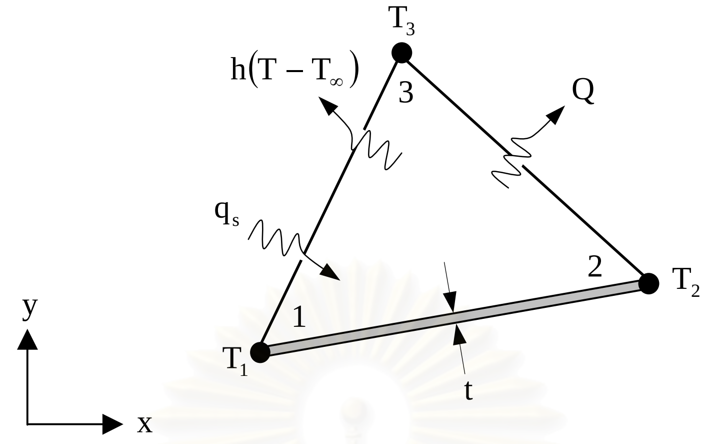
$$\vec{\nabla}u \;=\; \frac{\partial N_i}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}u\cdot\vec{V} \;=\; k\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

จากนั้นสมการ (3.19) จะกลายเป็น

$$k\int_{\Gamma} N_i\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x+\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)d\Gamma - k\int_{\Omega}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)d\Omega+\int_{\Omega} N_i Q\, d\Omega \;=\; 0$$

เมื่อ $i \;=\; 1, 2, 3$ (3.21)



รูปที่ 3.4 การถ่ายเทความร้อนในเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าตลอดขอบแบ่งออกเป็นปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เอง Q ปริมาณความร้อนที่ตกกระทบ q_s และมีการพาความร้อนบนผิวของเอลิเมนต์

เนื่องจากเราได้สมมติลักษณะการกระจายของอุณหภูมิแบบเชิงเส้นตรงดังแสดงดังนี้

$$T(x,y) = \lfloor N_i \rfloor \{T_i\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\rfloor \{T_i\} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\rfloor \{T_i\} \tag{3.22}$$

และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\underbrace{k\int_{\Omega}\left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor+\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega}_{[K_c]}\{T\}+\underbrace{\int_{s}\{N\}h\lfloor N\rfloor ds}_{[K_h]}\{T\}$$

$$= \underbrace{k\int_{\Gamma}\{N\}\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x+\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)d\Gamma}_{\{Q_c\}} + \underbrace{\int_{\Omega}\{N\}Qd\Omega}_{\{Q_Q\}}$$

$$+ \underbrace{\int_{s}\{N\}q_s ds}_{\{Q_q\}} + \underbrace{\int_{s}\{N\}hT_\infty ds}_{\{Q_h\}} \tag{3.23}$$

เมื่อพิจารณาโหลดเวกเตอร์การนำความร้อน (Conduction Load Vector)

$$\{Q_c\} = k\int_{\Gamma}\{N\}\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x + \frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)d\Gamma \qquad (3.24)$$

ซึ่งเป็นการอินทิเกรตตลอดขอบของเอลิเมนต์ หากขอบเขตอยู่ในโดเมนของปัญหา โหลดเวกเตอร์นี้จะหักล้างกันไปหลังจากการรวมเอลิเมนต์ ซึ่งโหลดเวกเตอร์นี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้นจึงเขียนให้อยู่ในรูปของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\left[[K_c]+[K_h]\right]\{T\} = \{Q_Q\}+\{Q_q\}+\{Q_h\} \qquad (3.25)$$

โดยที่

$$[K_c] = k\int_{\Omega}\left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \qquad (3.26ก)$$

$$[K_h] = \int_{s}\{N\}h\lfloor N\rfloor ds \qquad (3.26ข)$$

$$\{Q_Q\} = \int_{\Omega}\{N\}Q\,d\Omega \qquad (3.26ค)$$

$$\{Q_q\} = \int_{s}\{N\}q_s\,ds \qquad (3.26ง)$$

$$\{Q_h\} = \int_{s}\{N\}h\,T_\infty\,ds \qquad (3.26จ)$$

โดยที่ $[K_c]$ = เมตริกซ์การนำความร้อน (Conduction Matrix)

$[K_h]$ = เมตริกซ์การพาความร้อน (Convection Matrix)

$\{T\}$ = เวกเตอร์ของอุณหภูมิที่จุดต่อ (Vector of Nodal Temperatures)

$\{Q_Q\}$ = โหลดเวกเตอร์ความร้อนผลิตเอง (Heat Generation Load Vector)

$\{Q_s\}$ = โหลดเวกเตอร์ความร้อนที่กำหนดให้ (Specifiled Heating Load Vector)

$\{Q_h\}$ = โหลดเวกเตอร์การพาความร้อน (Convection Load Vector)

สมการ (3.25) สามารถนำไปแก้ไขปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบต่าง ๆ ของปัญหาที่พิจารณา

3.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด

ในหัวข้อนี้จะเป็นการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ซึ่งสมการเกี่ยวข้องมีดังนี้

สมการเชิงอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.27}$$

สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม แกน x, y

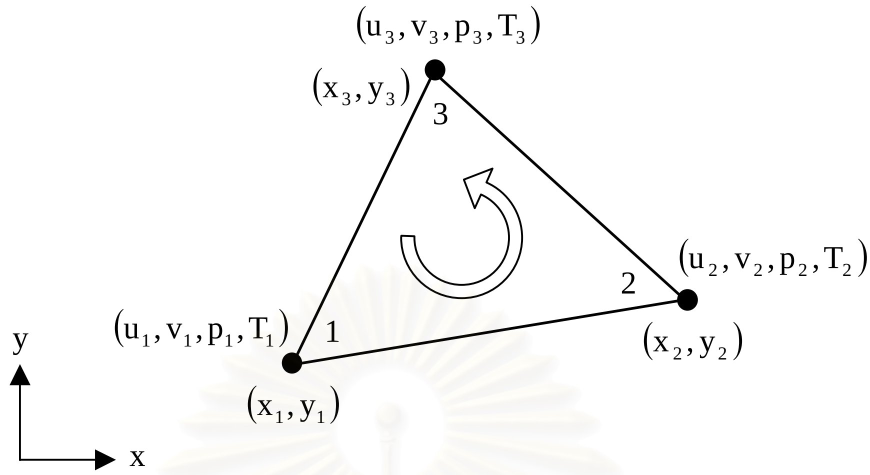
$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho g_x\left[1-\beta(T-T_o)\right] \tag{3.28ก}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \rho g_y\left[1-\beta(T-T_o)\right] \tag{3.28ข}$$

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \rho Q \tag{3.29}$$

การนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา ขั้นแรกจะต้องทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ โดยในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้เลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.5 ซึ่งประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าของความเร็วในทิศทางของแกน x ตัวไม่ทราบค่าของความเร็วในทิศทางของแกน y ตัวไม่ทราบค่าของความดัน p และตัวไม่ทราบค่าอุณหภูมิ T ที่จุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม จากนั้นกำหนดให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิบนเอลิเมนต์มีลักษณะดังนี้



รูปที่ 3.5 การแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

$$u(x,y) = \sum N_i(x,y)u_i = \lfloor N \rfloor \{u\} \tag{3.30ก}$$

$$v(x,y) = \sum N_i(x,y)v_i = \lfloor N \rfloor \{v\} \tag{3.30ข}$$

$$p(x,y) = \sum N_i(x,y)p_i = \lfloor N \rfloor \{p\} \tag{3.30ค}$$

$$T(x,y) = \sum N_i(x,y)T_i = \lfloor N \rfloor \{T\} \tag{3.30ง}$$

ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals) ลงในสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (3.28ก) จะได้

$$\int_\Omega W_i \rho \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega = -\int_\Omega W_i \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega W_i \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega + \int_\Omega W_i \rho g_x \left[1 - \beta(T - T_o)\right] d\Omega \tag{3.31}$$

ซึ่งจะเลือกใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline Upwind/ Petrov-Galerkin Formulation) ได้แสดงในสมการ (3.9) โดยจะทำการประยุกต์ฟังก์ชันน้ำหนักเข้ากับทุกพจน์จะได้

$$\int_{\Omega} W_i \, \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega \quad = \quad -\int_{\Omega} W_i \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} W_i \, \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} W_i \, \rho g_x \left[1 - \beta (T - T_o) \right] d\Omega \qquad (3.32)$$

พิจารณาพจน์ทางด้านขวามือพจน์ที่ 2 ทำการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) แสดงในสมการ (3.20) จะได้

$$\mu \int_{\Omega} W_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega \quad = \quad \mu \int_{\Gamma} W_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega \qquad (3.33)$$

แทนสมการ (3.33) ลงในสมการ (3.32) จะได้

$$\int_{\Omega} W_i \, \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega \quad = \quad -\int_{\Omega} N = W_i \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega$$

$$+ \; \mu \int_{\Gamma} W_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Omega} W_i \, \rho g_x \left[1 - \beta (T - T_o) \right] d\Omega \qquad (3.34)$$

แทนสมการ (3.30ก-ค) ใน (3.34) จะได้

$$\rho \int_{\Omega} \{W\} \left(u \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + v \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \right) d\Omega \, \{u\} + \mu \int_{\Omega} \left(\left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \right) d\Omega \, \{u\}$$

$$= \quad -\int_{\Omega} \{W\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor d\Omega \, \{p\} + \; \mu \int_{\Gamma} \{W\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} \{W\} \rho g_x \left[1 - \beta (T - T_o) \right] d\Omega \qquad (3.35)$$

ทำการจัดพจน์ต่าง ๆ แล้วสมการของเอลิเมนต์สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A] \{u\} = \{R_{px}\} + \{R_u\} + \{R_{gx}\} \qquad (3.36)$$

เมื่อ $\quad [A] \quad = \quad [A_{conv}] + [A_{diff}] \qquad (3.37)$

โดยที่

$$\left[A_{conv}\right] = \rho\int_{\Omega}\{W\}\left(u\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + v\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \quad (3.38ก)$$

$$\left[A_{diff}\right] = \mu\int_{\Omega}\left(\left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial W}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \quad (3.38ข)$$

$$\left\{R_{px}\right\} = -\int_{\Omega}\{W\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor d\Omega\,\{p\} \quad (3.38ค)$$

$$\left\{R_{u}\right\} = \mu\int_{\Gamma}\{W\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \frac{\partial u}{\partial y}n_y\right)d\Gamma \quad (3.38ง)$$

$$\left\{R_{gx}\right\} = \int_{\Omega}\{W\}\rho g_x\left[1-\beta\left(T-T_o\right)\right]d\Omega \quad (3.38จ)$$

โดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ ของสมการ (3.36) ประกอบไปด้วยพจน์จากการพา และพจน์ที่ได้จากพจน์ของการแพร่ดังที่ได้แสดงไว้ในสมการ (3.37)

ในทำนองเดียวกันสำหรับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน y ก็สามารถทำได้เช่นเดียวกันซึ่งจะได้รูปแบบดังนี้

$$[A]\{v\} = \{R_{py}\} + \{R_v\} + \{R_{gy}\} \quad (3.39)$$

เมื่อ $$[A] = [A_{conv}] + [A_{diff}] \quad (3.40)$$

โดยที่

$$\left[A_{conv}\right] = \rho\int_{\Omega}\{W\}\left(u\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + v\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \quad (3.41ก)$$

$$\left[A_{diff}\right] = \mu\int_{\Omega}\left(\left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial W}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \quad (3.41ข)$$

$$\left\{R_{py}\right\} = -\int_{\Omega}\{W\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega\,\{p\} \quad (3.41ค)$$

$$\left\{R_v\right\} = \mu\int_{\Gamma}\{W\}\left(\frac{\partial v}{\partial x}n_x + \frac{\partial v}{\partial y}n_y\right)d\Gamma \tag{3.41ง}$$

$$\left\{R_{gy}\right\} = \int_{\Omega}\{W\}\rho g_y\left[1-\beta\left(T-T_o\right)\right]d\Omega \tag{3.41จ}$$

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับความดันนั้น สามารถทำได้โดยเริ่มจากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการการอนุรักษ์มวลก่อน ซึ่งจะได้สมการสำหรับเอลิเมนต์ดังนี้

$$\int_{\Omega} W_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\Omega = -\int_{\Omega}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}u+\frac{\partial W_i}{\partial y}v\right)d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma} W_i\left(un_x + vn_y\right)d\Gamma = 0 \tag{3.42}$$

นำสมการ (3.36) และ (3.39) มาจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$A_{ii}u_i = -\sum_{j\neq i}A_{ij}u_j + f_i^u - \int_{\Omega}W_i\frac{\partial p}{\partial x}d\Omega \tag{3.43}$$

$$A_{ii}v_i = -\sum_{j\neq i}A_{ij}v_j + f_i^v - \int_{\Omega}W_i\frac{\partial p}{\partial y}d\Omega \tag{3.44}$$

โดยที่ f_i^u และ f_i^v ประกอบไปด้วยพจน์เงื่อนไขขอบเขตและพจน์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง ดังแสดงในสมการ (3.38ง-จ) และ (3.41ง-จ) ตามลำดับจากนั้นสมมติให้การเปลี่ยนแปลงของความดันตลอดภายในเอลิเมนต์มีค่าคงที่ ดังนั้นสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

จะได้
$$u_i = \hat{u}_i - K_{pi}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.45ก}$$

ในทำนองเดียวกัน
$$v_i = \hat{v}_i - K_{pi}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.45ข}$$

โดยที่
$$\hat{u}_i = \frac{-\sum_{j\neq i}A_{ij}u_j + f_i^u}{A_{ii}} \tag{3.45ค}$$

$$\hat{v}_i = \frac{-\sum_{j\neq i} A_{ij} v_j + f_i^v}{A_{ii}} \tag{3.45ง}$$

$$K_{pi} = \frac{\int_\Omega W_i d\Omega}{A_{ii}} \tag{3.45จ}$$

ต่อมานำฟังก์ชันการประมาณภายในของ u และ v จากสมการ (3.30ก-ข) แทนลงในสมการ (3.42) จะได้ว่า

$$-\int_\Omega \frac{\partial W_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j u_j\right) d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial W_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j v_j\right) d\Omega + \int_\Gamma W_i\left(u n_x + v n_y\right) d\Gamma = 0 \tag{3.46}$$

จากนั้นแทนค่า u_i และ v_i จากสมการ (3.46ก-ข) ลงในสมการ (3.46) แล้วจัดพจน์ใหม่

$$\int_\Omega \frac{\partial W_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j K_{p_j}\right)\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial W_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j K_{p_j}\right)\frac{\partial p}{\partial y} d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial W_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j \hat{u}_j\right) d\Omega$$

$$+\int_\Omega \frac{\partial W_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j \hat{v}_j\right) d\Omega - \int_\Gamma W_i\left(u n_x + v n_y\right) d\Gamma \tag{3.47}$$

สุดท้ายแทนฟังก์ชันการประมาณภายในของความดัน สมการ (3.30ค) ลงในสมการ (3.47) และจัดพจน์ใหม่ จะสามารถเขียนสมการเอลิเมนต์ของความดันในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\left[K_x + K_y\right]\{p\} = \{R_u\} + \{R_v\} + \{R_b\} \tag{3.48}$$

โดยที่

$$[K_x] = \int_\Omega \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\}\left(\sum_j N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor d\Omega \tag{3.49ก}$$

$$[K_y] = \int_\Omega \left\{\frac{\partial W}{\partial y}\right\}\left(\sum_j N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega \tag{3.49ข}$$

$$\{R_u\} = \int_\Omega \left(\sum_j N_j \hat{u}_j\right)\left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\} d\Omega \tag{3.49ค}$$

$$\{R_v\} = \int_{\Omega} \left(\sum_j N_j \hat{v}_j \right) \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} \right\} d\Omega \tag{3.49ง}$$

$$\{R_b\} = -\int_{\Gamma} \{N\} \left(u n_x + v n_y \right) d\Gamma \tag{3.49จ}$$

ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสมการ (3.16) ลงในสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (3.29) จะได้

$$\int_{\Omega} W_i \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} W_i k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i \rho Q \, d\Omega \tag{3.50}$$

ทำการประยุกต์ใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulation) ในสมการ (3.9) เฉพาะพจน์ของการพา จะได้

$$\int_{\Omega} W_i \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} W_i k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i \rho Q \, d\Omega \tag{3.51}$$

ทำการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) ลงบนพจน์ทางขวาของสมการ (3.51) จะได้

$$\rho c \int_{\Omega} W_i \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + k \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$= k \int_{\Gamma} W_i \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \tag{3.52}$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในของอุณหภูมิในสมการ (3.30ง) แทนลงในสมการ (3.52) จะได้

$$\rho c \int_{\Omega} \{W\} \left(u \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + v \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \right) d\Omega \, \{T\} + k \int_{\Omega} \left(\left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \right) d\Omega \, \{T\}$$

$$= k \int_{\Gamma} \{W\} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \tag{3.53}$$

ทำการจัดพจน์ต่าง ๆ แล้วสมการของเอลิเมนต์สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\left[A^{T}\right]\{T\} = \left\{R^{T}\right\}+\{Q\} \tag{3.54}$$

เมื่อ $\left[A^{T}\right] = \left[A^{T}_{conv}\right] + \left[A^{T}_{diff}\right]$

โดยที่ $$\left[A^{T}_{conv}\right] = \rho c\int_{\Omega}\{W\}\left(u\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + v\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \tag{3.55ก}$$

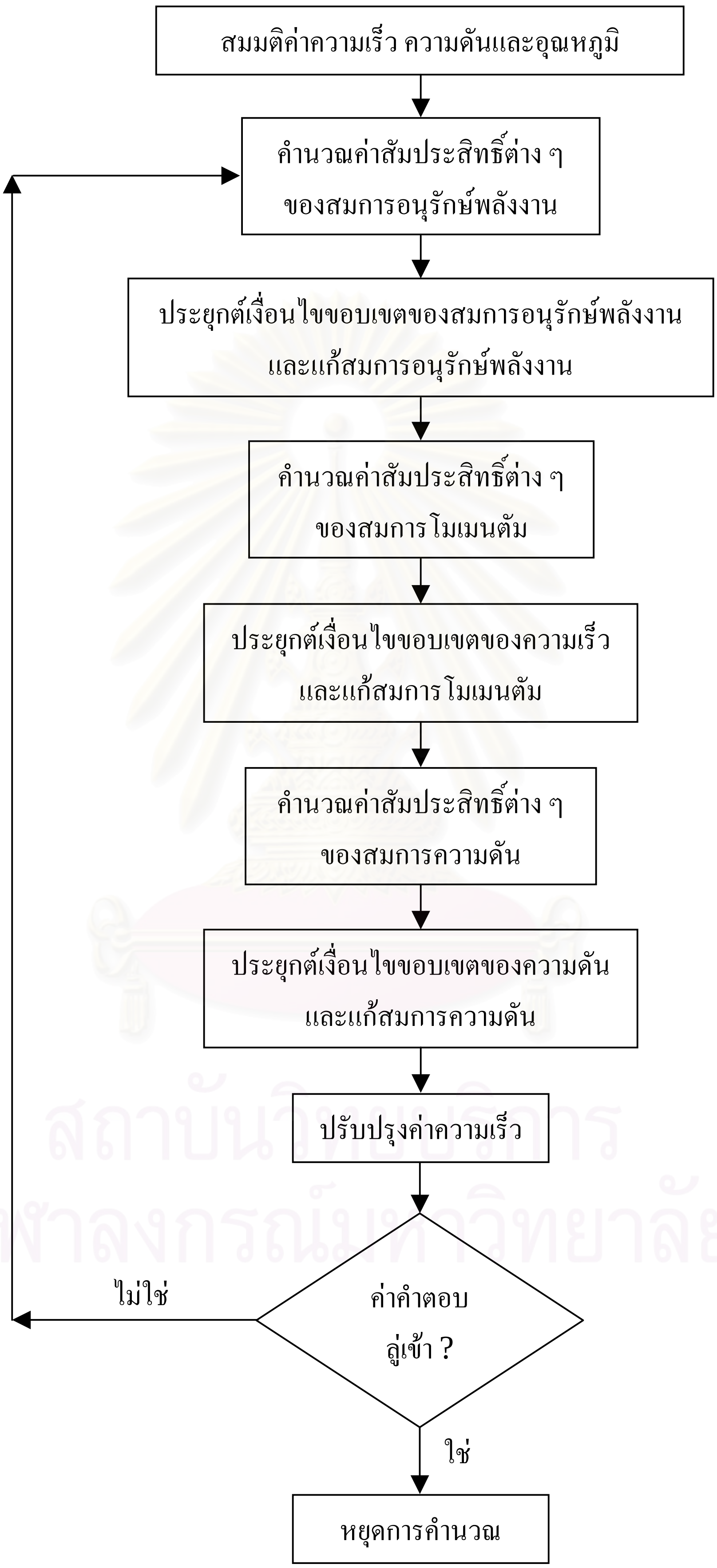
$$\left[A^{T}_{diff}\right] = k\int_{\Omega}\left(\left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial W}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \tag{3.55ข}$$

$$\left\{R^{T}\right\} = k\int_{\Gamma}\{W\}\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x + \frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)d\Gamma \tag{3.55ค}$$

$$\{Q\} = \rho\int_{\Omega}\{W\}Q\,d\Omega \tag{3.55ง}$$

สำหรับการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งพจน์ทางซ้ายของสมการ (3.29) เป็นพจน์ของการพาจะมีค่าเป็นศูนย์ (u, v = 0) สมการจึงลดรูปเหมือนสมการ (3.12) ซึ่งจะสามารถแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งได้

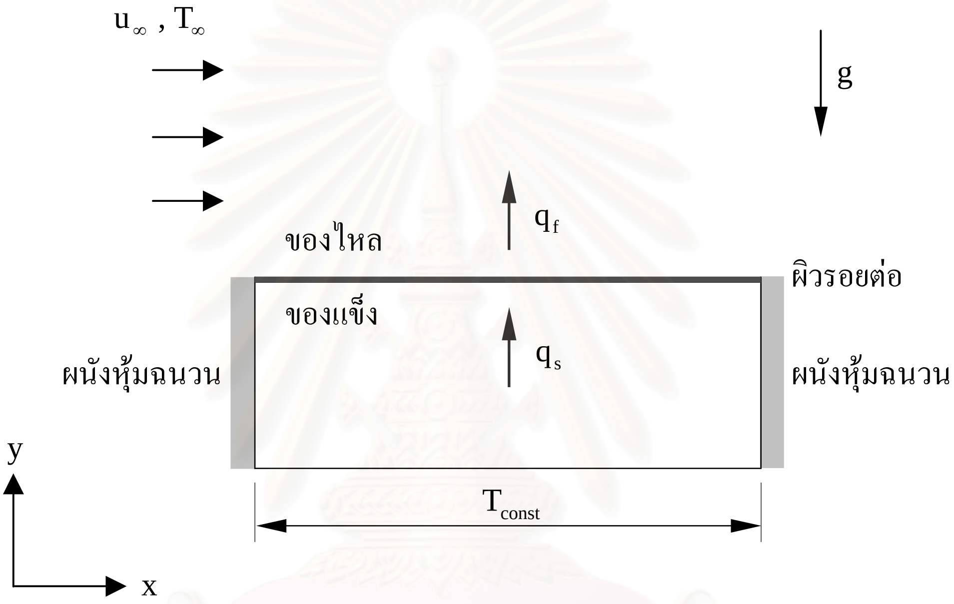
สำหรับขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยใช้สมการต่าง ๆ ข้างต้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.6 ซึ่งจะเริ่มต้นจากการสมมติค่าความเร็ว ความดันและอุณหภูมิ จากนั้นคำนวณหาค่าของอุณหภูมิแต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (3.54) และคำนวณหาค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (3.36) และ (3.39) เมื่อได้ค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อแล้วนำค่าเหล่านี้ไปคำนวณหาค่าความดันค่าใหม่ที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (3.48) สุดท้ายใช้ค่าความดันใหม่ที่ได้มาทำการปรับปรุงค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (3.43) และ (3.44) ขั้นตอนการคำนวณดังกล่าวจะดำเนินซ้ำเป็นวงรอบจนกว่าค่าของคำตอบที่ต้องการจะลู่เข้าแล้วจะหยุดการคำนวณ



รูปที่ 3.6 ขั้นตอนในการคำนวณ

3.4 การคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

สำหรับการถ่ายเทความร้อนบริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลมีการตั้งสมมติฐานให้ความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหลต้องมีปริมาณเท่ากับปริมาณความร้อนที่ของไหลได้รับ ซึ่งจะเป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน ในรูปที่ 3.7 เป็นตัวอย่างของการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยมีทิศทางของความร้อนจากของแข็งไปสู่ของไหล



รูปที่ 3.7 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

ซึ่งบริเวณผิวด้านล่างของของแข็งกำหนดให้มีอุณหภูมิคงที่ (T_{const}) ส่วนผิวด้านซ้ายและขวากำหนดให้เป็นฉนวน ปริมาณความร้อนจากของแข็งที่ถ่ายเทสู่ของไหลมีค่าเท่ากับ q_s ในขณะที่ปริมาณความร้อนซึ่งของไหลได้รับจากของแข็งมีค่าเท่ากับ q_f จากกฎการอนุรักษ์พลังงานจะได้

$$q_s = q_f \tag{3.56}$$

บริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลสามารถคำนวณการถ่ายเทความร้อนได้ และกำหนดให้ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทจากของแข็งสู่ของไหล ซึ่งเกิดจากการแพร่กระจายคือ

$$q_s = \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \tag{3.57}$$

สมการข้างบนนี้เป็นส่วนสำคัญที่ใช้ในการเชื่อมโยงการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลเข้าด้วยกัน ทำให้สามารถคำนวณการถ่ายเทความร้อนทั้งสองลักษณะ

พร้อมกันภายในโดเมนเดียว ซึ่งจะช่วยให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีแบบ Iterative ซึ่งแยกการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในของแข็งและของไหลออกจากกันเป็นสองโดเมนโดยคำนวณหาค่าฟลักซ์ความร้อนในโดเมนหนึ่งแล้วจึงนำค่าฟลักซ์ความร้อนดังกล่าวไปเป็นเงื่อนไขขอบสำหรับการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในอีกโดเมนหนึ่ง ซึ่งวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขณะที่ทำการรวมเอลิเมนต์ต่าง ๆ เข้าด้วยกัน ได้ทำการคิดว่าปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทระหว่างเอลิเมนต์กับเอลิเมนต์มีค่าเท่ากัน

3.5 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ดังในสมการได้แสดงข้างต้นนั้นสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยง่าย วิธีการดังกล่าวจะได้แสดงในหัวข้อนี้

3.5.1 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการโมเมนตัม

เริ่มจากสมการของโมเมนตัมทั้งสองสมการ นั่นคือจากสมการ (3.36) และ (3.39)

$$[A]\{u\} = \{R_{px}\}+\{R_u\}+\{R_{gx}\} \tag{3.58}$$

$$[A]\{v\} = \{R_{py}\}+\{R_v\}+\{R_{gy}\} \tag{3.59}$$

สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ ของทั้งสองสมการนั้นประกอบไปด้วยพจน์การพาและพจน์จากการแพร่นั่นคือ

$$[A] = [A_{conv}] + [A_{diff}]$$

พิจารณาพจน์ของการพาจะได้

$$[A_{conv}] = \rho\int_{\Omega}\{W\}\left(u\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + v\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \tag{3.60}$$

แทนค่าฟังก์ชันน้ำหนักในสมการ (3.9) ลงในสมการ (3.60) และประมาณค่า $u=\bar{u}$, $v=\bar{v}$

$$[A_{conv}] = \rho\int_{\Omega}\left(N_i + \frac{\alpha h}{2|U|}\left[\bar{u}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)+\bar{v}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\right]\right)\left(\bar{u}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor+\bar{v}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega$$

$$[A_{conv}] = \rho\int_\Omega \{N_i\}\left(\bar{u}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \bar{v}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega$$

$$+ \frac{\rho\alpha h}{2|U|}\int_\Omega \left(\bar{u}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} + \bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\right)\left(\bar{u}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \bar{v}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \quad (3.61)$$

ทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$[A_{conv}] = [A_{convn}] + [A_{convw}] \quad (3.62)$$

โดยที่

$$[A_{convn}] = \rho\int_\Omega \{N_i\}\left(\bar{u}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \bar{v}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \quad (3.63)$$

เนื่องจาก

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{b_i}{2A}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{c_i}{2A}\end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3$$

ดังนั้น

เมื่อ

$$\bar{u} = \frac{(u_1 + u_2 + u_3)}{3}, \ \bar{v} = \frac{(v_1 + v_2 + v_3)}{3} \quad (3.64)$$

$$[A_{convn}] = \frac{\rho(u_1 + u_2 + u_3)}{18}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3\rfloor + \frac{\rho(v_1 + v_2 + v_3)}{18}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3\rfloor$$

$$= \frac{\rho(u_1 + u_2 + u_3)}{18}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix} + \frac{\rho(v_1 + v_2 + v_3)}{18}\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\rho}{6}\begin{bmatrix}b_1\bar{u} + c_1\bar{v} & b_2\bar{u} + c_2\bar{v} & b_3\bar{u} + c_3\bar{v}\\ b_1\bar{u} + c_1\bar{v} & b_2\bar{u} + c_2\bar{v} & b_3\bar{u} + c_3\bar{v}\\ b_1\bar{u} + c_1\bar{v} & b_2\bar{u} + c_2\bar{v} & b_3\bar{u} + c_3\bar{v}\end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$[A_{convw}] = \rho\bar{k}\int_\Omega \left(\bar{u}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} + \bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\right)\left(\bar{u}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \bar{v}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega \quad (3.66)$$

เมื่อ $\bar{k} = \dfrac{\alpha h}{2|U|}$

$$[A_{convw}] = \rho\bar{k}\int_{\Omega}\left(\bar{u}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} + \bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\right)\left(\bar{u}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \bar{v}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)d\Omega$$

$$= \rho\bar{k}\left[\int_{\Omega}\bar{u}^2\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega + \int_{\Omega}\bar{u}\bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega\right.$$

$$\left. + \int_{\Omega}\bar{u}\bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor d\Omega + \int_{\Omega}\bar{v}^2\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega\right] \qquad (3.67)$$

ทำการจัดพจน์ต่าง ๆ แล้วสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของผลบวกเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A_{convw}] = \rho\bar{k}\left([A_{w1}] + [A_{w2}] + [A_{w3}] + [A_{w4}]\right) \qquad (3.68)$$

โดยที่

$$[A_{w1}] = \int_{\Omega}\bar{u}^2\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega = \frac{\bar{u}^2}{4A^2}\int_{\Omega}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}\lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor d\Omega$$

$$= \frac{\bar{u}^2}{4A}\begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} \qquad (3.69ก)$$

$$[A_{w2}] = \int_{\Omega}\bar{u}\bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega = \frac{\bar{u}\bar{v}}{4A^2}\int_{\Omega}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}\lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3 \rfloor d\Omega$$

$$= \frac{\bar{u}\bar{v}}{4A}\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3c_3 \end{bmatrix} \qquad (3.69ข)$$

$$[A_{w3}] = \int_{\Omega} \overline{uv} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor d\Omega \quad = \quad \frac{\overline{uv}}{4A^2} \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor d\Omega$$

$$= \frac{\overline{uv}}{4A} \begin{bmatrix} b_1c_1 & b_2c_1 & b_3c_1 \\ b_1c_2 & b_2c_2 & b_3c_2 \\ b_1c_3 & b_2c_3 & b_3c_3 \end{bmatrix} \qquad (3.69ค)$$

$$[A_{w4}] = \int_{\Omega} \overline{v}^2 \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor d\Omega \quad = \quad \frac{\overline{v}^2}{4A^2} \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3 \rfloor d\Omega$$

$$= \frac{\overline{v}^2}{4A} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} \qquad (3.69ง)$$

พิจารณาพจน์ของการแพร่จะได้

$$[A_{diff}] = \mu \int_{\Omega} \left[\left\{ \frac{\partial W_i}{\partial x} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\rfloor + \left\{ \frac{\partial W_i}{\partial y} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\rfloor \right] d\Omega \qquad (3.70)$$

เนื่องจาก $\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial W_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3$ ดังนั้น

$$[A_{diff}] = \left(\frac{\mu}{4A^2} \right) \int_{\Omega} \left[\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3 \rfloor \right] d\Omega$$

$$= \frac{\mu}{4A} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \qquad (3.71)$$

ส่วนทางด้านขวามือของสมการ (3.58) และ (3.59) นั้นสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\{R_{px}\} = -\int_\Omega \{W_i\}\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega$$

$$= -\int_\Omega \{N\}\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \quad - \quad \bar{k}\int_\Omega \left(\bar{u}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} + \bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\right)\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \qquad (3.72)$$

ทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$\{R_{px}\} = \{R_{pnx}\} + \{R_{pwx}\}$$

โดยที่

$$\{R_{pnx}\} = -\int_\Omega \{N\}\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = -\int_\Omega \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \left\lfloor \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right\rfloor d\Omega \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2A}\int_\Omega \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor d\Omega \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2A}\int_\Omega \begin{bmatrix} N_1 b_1 & N_1 b_2 & N_1 b_3 \\ N_2 b_1 & N_2 b_2 & N_2 b_3 \\ N_3 b_1 & N_3 b_2 & N_3 b_3 \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.73)$$

การหาค่าอินทิกรัลของพิกัดพื้นที่สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$\int_\Omega N_1^\alpha \, N_2^\beta \, N_3^\gamma \, d\Omega = \frac{\alpha! \, \beta! \, \gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}.2A \qquad (3.74)$$

$\because \int_\Omega N_i \, d\Omega = \dfrac{A}{3}$ จะได้

$$= -\frac{1}{2A}\frac{A}{3}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{Bmatrix} b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{R_{pnx}\} = -\frac{b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.75}$$

$$\{R_{pwx}\} = -\bar{k}\int_\Omega \left(\bar{u}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} + \bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\right)\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega$$

$$= -\bar{k}\int_\Omega \left(\bar{u}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} + \bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\right)\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\rfloor d\Omega \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$= -\bar{k}\int_\Omega \left(\frac{\bar{u}}{2A}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} + \frac{\bar{v}}{2A}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}\right)\frac{1}{2A}\lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor d\Omega \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$= -\bar{k}\int_\Omega \frac{(b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3)}{4A^2}\begin{Bmatrix} b_1\bar{u} + c_1\bar{v} \\ b_2\bar{u} + c_2\bar{v} \\ b_3\bar{u} + c_3\bar{v} \end{Bmatrix} d\Omega$$

$$\{R_{pwx}\} = -\frac{\bar{k}}{4A}(b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3)\begin{Bmatrix} b_1\bar{u} + c_1\bar{v} \\ b_2\bar{u} + c_2\bar{v} \\ b_3\bar{u} + c_3\bar{v} \end{Bmatrix} \tag{3.76}$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.41ค) สามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$\{R_{py}\} = \{R_{pny}\} + \{R_{pwy}\}$$

ซึ่งจะสามารถประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์ได้ด้วยวิธีเดียวกันซึ่งจะได้เมตริกซ์ลักษณะดังนี้

$$\{R_{pny}\} = -\frac{c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3}{6}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \tag{3.77}$$

$$\{R_{pwy}\} = -\frac{\bar{k}}{4A}(c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3)\begin{Bmatrix}b_1\bar{u} + c_1\bar{v}\\b_2\bar{u} + c_2\bar{v}\\b_3\bar{u} + c_3\bar{v}\end{Bmatrix} \tag{3.78}$$

สำหรับพจน์อินทิเกรตขอบเขตทางด้านขวาของสมการ (3.36) และ (3.39) ($\{R_u\}, \{R_v\}$) นั้น ภายในขอบเขตของปัญหาพจน์เหล่านี้จะตัดกันหมดไปจึงไม่จำเป็นต้องหาค่า

พิจารณาสมการ (3.38จ)

$$\{R_{gx}\} = \int_\Omega \{W\}\rho g_x\left[1-\beta(T-T_o)\right]d\Omega$$

เมื่อ $g_x = -g$

$$\{R_{gx}\} = \rho g\int_\Omega \{N\}\left(\beta T-(1+\beta T_o)\right)d\Omega$$

$$+ \quad \rho g\bar{k}\int_\Omega \left(\bar{u}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\} + \bar{v}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\right)\left(\beta T-(1+\beta T_o)\right)d\Omega \tag{3.79}$$

ทำการจัดรูปใหม่จะได้ $\{R_{gx}\} = \{R_{gnx}\} + \{R_{gwx}\}$

พิจารณาพจน์

$$\{R_{gnx}\} = \rho g\int_\Omega \{N\}\left(\beta T-(1+\beta T_o)\right)d\Omega$$

$$= \rho g\left[\beta\int_\Omega \{N\}T\,d\Omega - \int_\Omega \{N\}(1+\beta T_o)\,d\Omega\right]$$

$$= \rho g \left[\beta \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} (1+\beta T_o)\, d\Omega \right]$$

$$= \rho g \left[\beta \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_1 N_2 & N_2^2 & N_2 N_3 \\ N_1 N_3 & N_2 N_3 & N_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} (1+\beta T_o)\, d\Omega \right]$$

เมื่อ $\int_{\Omega} N_i^2 \, d\Omega = \frac{A}{6}$ และ $\int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega = \frac{A}{12}$

$$= \rho g \left[\frac{\beta A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} - \frac{A}{3}(1+\beta T_o) \right]$$

$$\{R_{gnx}\} = \frac{\rho g A}{12} \left(\beta \begin{Bmatrix} 2T_1 + T_2 + T_3 \\ T_1 + 2T_2 + T_3 \\ T_1 + T_2 + 2T_3 \end{Bmatrix} - 4(1+\beta T_o) \right) \tag{3.80}$$

พิจารณาพจน์ $\{R_{gwx}\} = \rho g \bar{k} \int_{\Omega} \left(\bar{u} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} + \bar{v} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \right) (\beta T - (1+\beta T_o)) d\Omega$

$$= \rho g \bar{k} \left[\int_{\Omega} \left(\bar{u} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} + \bar{v} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \right) \beta \lfloor N \rfloor \{T\} d\Omega \right.$$

$$\left. - \quad (1+\beta T_o) \int_{\Omega} \left(\bar{u} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} + \bar{v} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \right) d\Omega \right]$$

$$\{R_{gwx}\} = \frac{\rho g \bar{k}}{6} [\beta(T_1 + T_2 + T_3) - 3(1+\beta T_0) \ln A] \begin{Bmatrix} b_1 \bar{u} + c_1 \bar{v} \\ b_2 \bar{u} + c_2 \bar{v} \\ b_3 \bar{u} + c_3 \bar{v} \end{Bmatrix} \tag{3.81}$$

3.5.2 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการความดัน

จากสมการ

$$\left[K_x + K_y\right]\{p\} \quad = \quad \{R_u\} + \{R_v\} + \{R_b\} \tag{3.48}$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของความดันสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$[K] \;=\; [K_x] + [K_y]$$

$$= \int_\Omega \left[\left\{\frac{\partial W_i}{\partial x}\right\}\left(N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial W_i}{\partial y}\right\}\left(N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\rfloor \right] d\Omega$$

$$= \int_\Omega \left[\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left(N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\left(N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\rfloor \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{4A^2}\begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \int_\Omega \left(N_1 K_{p1} + N_2 K_{p2} + N_3 K_{p3}\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{4A^2}\,\frac{A}{3}\,\left(K_{p1} + K_{p2} + K_{p3}\right)\begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix}$$

$$[K] \;=\; \left(\frac{K_{p1} + K_{p2} + K_{p3}}{3}\right)\frac{1}{4A}\begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

การสร้างเมตริกซ์ต่าง ๆ ทางด้านขวาของสมการ (3.58) มีขั้นตอนดังนี้

พจน์ $\{R_u\}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\{R_u\} = \int_\Omega \left\{\frac{\partial W_i}{\partial x}\right\}\left(N_j \hat{u}_j\right) d\Omega$$

$$= \int_\Omega \left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left(N_j \hat{u}_j\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \int_\Omega \left(N_1 \hat{u}_1 + N_2 \hat{u}_2 + N_3 \hat{u}_3\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2A}\frac{A}{3}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}\left(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3\right)$$

$$\{R_u\} = \left(\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3}{6}\right)\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \tag{3.83}$$

พจน์ $\{R_v\}$ สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\{R_v\} = \int_\Omega \left\{\frac{\partial W_i}{\partial y}\right\}\left(N_j \hat{v}_j\right) d\Omega$$

$$= \int_\Omega \left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\left(N_j \hat{v}_j\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \int_\Omega \left(N_1 \hat{v}_1 + N_2 \hat{v}_2 + N_3 \hat{v}_3\right) d\Omega$$

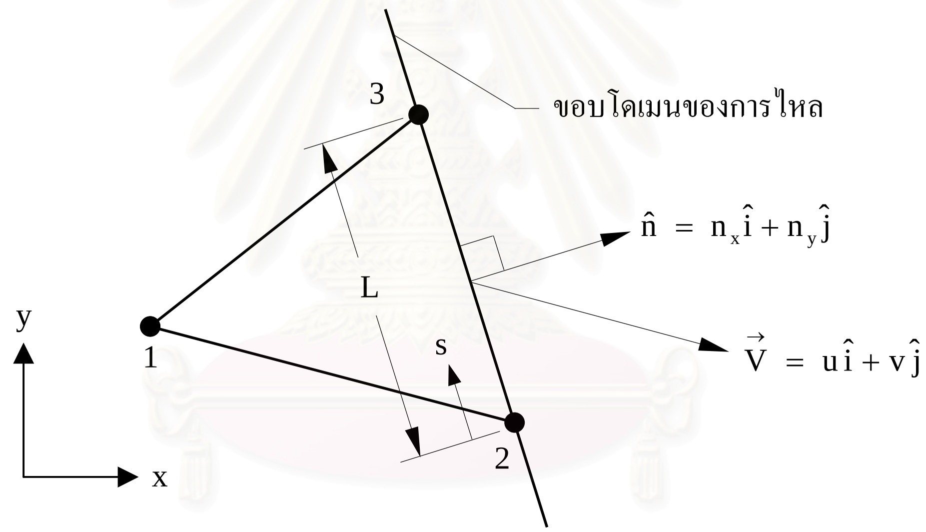
$$= \frac{1}{2A}\frac{A}{3}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}\left(\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3\right)$$

$$\{R_v\} = \left(\frac{\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3}{6}\right)\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{3.84}$$

พจน์ $\{R_b\}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\{R_b\} \quad = \quad -\int_{\Gamma} \{N\} \left(u\, n_x + v\, n_y \right) d\Gamma \tag{3.85}$$

เนื่องจากเป็นพจน์การอินทิเกรตขอบเขต ดังนั้นภายในขอบเขตของปัญหา พจน์เหล่านี้จะตัดกันหมดไป เหลือที่จะต้องคำนวณเฉพาะบริเวณขอบเขตของโดเมนเท่านั้น หากพิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 3.8 ซึ่งมีขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 เป็นขอบโดเมนของการไหล และเนื่องจากลักษณะการกระจายของฟังก์ชันความเร็วสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะอยู่ในลักษณะเชิงเส้นตามขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 ซึ่งมีความยาว L ดังที่แสดงในรูปที่ 3.8 ดังนั้นพจน์ $\{R_b\}$ ในรูปแบบของสูตรอินทิเกรตสมการ (3.85) ที่สอดคล้องกับขอบนี้คือ



รูปที่ 3.8 การคำนวณพจน์ $\{R_b\}$ ที่บริเวณขอบของโดเมนการไหล

$$-\int_0^L \left(u\, n_x + v\, n_y \right) \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds \quad = \quad -\left(u\, n_x + v\, n_y \right) \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds$$

$$= \quad -\left(u\, n_x + v\, n_y \right) \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้นพจน์ $\{R_b\}$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 ซึ่งมีความยาว L อยู่ติดขอบโดเมนของการไหลคือ

$$\{R_b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\left(u n_x + v n_y\right)\frac{L}{2} \\ -\left(u n_x + v n_y\right)\frac{L}{2} \end{Bmatrix} \tag{3.86}$$

3.5.3 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการอนุรักษ์พลังงาน

จากสมการ (3.54)

$$\left[A^T\right]\{T\} = \left\{R^T\right\} + \{Q\} \tag{3.54}$$

สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\left[A^T\right]$ ของทั้งสองสมการนั้นประกอบไปด้วยพจน์การพาและพจน์จากการแพร่นั่นคือ

$$\left[A^T\right] = \left[A^T_{conv}\right] + \left[A^T_{diff}\right]$$

พิจารณาพจน์ของการพาจะได้

$$\left[A^T_{conv}\right] = \rho c \int_\Omega \{W\}\left(u\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + v\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \right) d\Omega \tag{3.87}$$

ซึ่งขั้นตอนการแก้ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับพจน์ของการพาและการแพร่จะทำเหมือนกับสมการ (3.60 –3.69) จะได้

พิจารณาพจน์ของการพาจะได้

$$\left[A^T_{conv}\right] = \left[A^T_{convn}\right] + \left[A^T_{convw}\right]$$

โดยที่

$$\left[A^T_{convn}\right] = \frac{\rho c}{6}\begin{bmatrix} b_1\bar{u} + c_1\bar{v} & b_2\bar{u} + c_2\bar{v} & b_3\bar{u} + c_3\bar{v} \\ b_1\bar{u} + c_1\bar{v} & b_2\bar{u} + c_2\bar{v} & b_3\bar{u} + c_3\bar{v} \\ b_1\bar{u} + c_1\bar{v} & b_2\bar{u} + c_2\bar{v} & b_3\bar{u} + c_3\bar{v} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

$$\left[A^T_{convw}\right] = \rho c\bar{k}\left([A_{w1}] + [A_{w2}] + [A_{w3}] + [A_{w4}] \right)$$

พิจารณาพจน์ของการแพร่จะได้

$$\left[A_{diff}^{T}\right] = k\int_{\Omega}\left[\left\{\frac{\partial W_i}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial W_i}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\rfloor\right]d\Omega$$

$$\left[A_{diff}^{T}\right] = \frac{k}{4A}\begin{bmatrix} b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2} & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ & b_2^{\ 2} + c_2^{\ 2} & b_2b_3 + c_2c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^{\ 2} + c_3^{\ 2} \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

สำหรับพจน์ $\{R^T\}$ ทางด้านขวามือของสมการ (3.54) นั้นพบว่าภายในขอบเขตของปัญหาพจน์เหล่านี้จะตัดกันหมดไปจึงไม่จำเป็นต้องหาค่า

พิจารณา

$$\{Q\} = \rho\int_{\Omega}\{W\}Q\,d\Omega \tag{3.55ง}$$

$$= \rho\int_{\Omega}\{N\}Q\,d\Omega + \rho\bar{k}\int_{\Omega}\left(\bar{u}\frac{\partial N}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial N}{\partial y}\right)Q\,d\Omega$$

$$= \frac{\rho AQ}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} + \rho AQ\bar{k}\begin{Bmatrix}ub_1 + vc_1\\ ub_2 + vc_2\\ ub_3 + vc_3\end{Bmatrix} \tag{3.90}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ ที่ได้แสดงในหัวข้อนี้ สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่สภาวะอยู่ตัวได้โดยตรง ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจะได้แสดงไว้ในบทที่ 5

บทที่ 4

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ (Element by Element)

วิธีที่นิยมใช้กันในอดีต เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ คือ ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination Method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีโดยตรง (Direct Method) และเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องแม่นยำ แต่เมื่อนำมาใช้ในการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ จะทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำเป็นจำนวนมาก ดังนั้นทางเลือกที่เป็นที่นิยมเพิ่มมากขึ้นในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ คือ ระเบียบวิธีแบบทำซ้ำ (Iterative Method) ซึ่งประกอบด้วยหลายวิธีด้วยกันคือ ระเบียบวิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์และระเบียบวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ ซึ่งระเบียบวิธีดังกล่าวสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำอีกทั้งยังใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำไม่มากนัก จึงเหมาะแก่การนำมาใช้แก้ระบบสมการเชิงเส้นขนาดใหญ่

ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในครั้งนี้ จำเป็นต้องแก้ระบบสมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงได้นำเอาระเบียบวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ EBE [25] ซึ่งเป็นระเบียบวิธีแยกคิดมาใช้แก้ระบบสมการดังกล่าว โดยในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการของระเบียบวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ โดยจะอธิบายเพื่อให้เกิดความเข้าใจอย่างเป็นขั้นตอนดังนี้

ระบบสมการเชิงเส้นที่จะทำการแก้นั้นอยู่ในรูป

$$A_{\alpha\beta}U_{\beta} \quad = \quad F_{\alpha} \tag{4.1}$$

โดยที่ U_{β} เป็นเวคเตอร์ที่ไม่ทราบค่า F_{α} เป็นเวคเตอร์ที่ทราบค่า และ $A_{\alpha\beta}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร

จากนั้นแยกเมตริกซ์สมมาตรออกเป็นสองส่วนคือ เมตริกซ์ที่มีแนวเส้นทแยงมุมอย่างเดียว $D_{\alpha\beta}$ บวกกับเมตริกซ์ที่ให้เส้นทแยงมุมเป็นศูนย์ $N_{\alpha\beta}$ ดังนี้

$$A_{\alpha\beta} \quad = \quad D_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \tag{4.2}$$

แทนสมการ (4.2) ลงในสมการ (4.1) จะได้

$$\left(D_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}\right)U_{\beta} \quad = \quad F_{\alpha} \tag{4.3}$$

สมการ (4.3) สามารถจัดพจน์ $U_{\beta}^{(r)}$ ให้อยู่ในรูปของการทำซ้ำที่ (r+1) และ (r) ได้ดังนี้

$$D_{\alpha\beta}U_{\beta}^{(r+1)} \cong F_{\alpha}^{(r)} - N_{\alpha\beta}U_{\beta}^{(r)} \tag{4.4}$$

จากนั้นทำการลบสมการ (4.4) ด้วยพจน์ $D_{\alpha\beta}U_{\beta}^{(r)}$ ทั้งซ้ายและขวาของสมการ แล้วทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$D_{\alpha\beta}\left(U_{\beta}^{(r+1)} - U_{\beta}^{(r)}\right) = F_{\alpha}^{(r)} - \left(N_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}\right)U_{\beta}^{(r)} \tag{4.5}$$

หรือ

$$U_{\alpha}^{(r+1)} = U_{\alpha}^{(r)} - D_{\alpha\beta}^{-1}\left(\overline{F}_{\beta}^{(r)} - F_{\beta}^{(r)}\right) \tag{4.6}$$

โดยพจน์ $\overline{F}_{\alpha}^{(r)}$ มีรายละเอียดดังนี้

$$\overline{F}_{\alpha}^{(r)} = \left(N_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}\right)U_{\beta}^{(r)} = A_{\alpha\beta}U_{\beta}^{(r)} = \bigcup_{e=1}^{E}\overline{F}_{N}^{(e)}\Delta_{N\alpha}^{(e)} \tag{4.7}$$

เมื่อ

$$\overline{F}_{N}^{(e)} = A_{NM}^{(e)}\,U_{M}^{(e)}$$

โดยที่ค่า $\bigcup_{e=1}^{E}\overline{F}_{N}^{(e)}\Delta_{N\alpha}^{(e)}$ คือการประกอบเอลิเมนต์ย่อย ๆ เป็นเอลิเมนต์รวม

จากนั้นทำการจัดรูปใหม่โดยใช้การแยกคิดด้วยวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ โดยที่เมตริกซ์ในสมการ (4.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \end{bmatrix}^{(r+1)} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \end{bmatrix}^{(r)} - \begin{bmatrix} \left(\overline{F}_1 - F_1\right)/D_{11} \\ \left(\overline{F}_2 - F_2\right)/D_{22} \\ \vdots \end{bmatrix}^{(r)} \tag{4.8}$$

ในกรณีที่จะทำให้การลู่เข้าและความถูกต้องของผลลัพธ์เพิ่มขึ้นจำเป็นต้องใช้ Relaxation Process ซึ่งอยู่ในรูป

$$U = \xi U^{(r+1)} + (1-\xi)U^{(r)} \tag{4.9}$$

ซึ่งค่า $0 < \xi < 1$ หรือค่าที่เหมาะสมในการคำนวณจะมีค่าเท่ากับ $\xi = 0.8$ [25] ซึ่งกระบวนการดังกล่าวได้ใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี (Jacobi Iteration) หรือเรียกอีกอย่างว่า EBE Jacobi Method

เพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพของการแก้ระบบสมการให้มีความถูกต้องของผลลัพธ์มากขึ้น สามารถนำวิธี Conjugate Gradient Method [13, 25] มาประยุกต์เข้ากับวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ได้ ซึ่งขั้นตอนการคำนวณมีดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> สมมติค่าเริ่มต้น $U_\alpha^{(r)}$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> คำนวณค่า $E_\alpha^{(r)}$ จาก

$$E_\alpha^{(r)} = F_\alpha - A_{\alpha\beta} U_\beta^{r} = F_\alpha - \overline{F}_\alpha \tag{4.10}$$

เมื่อ

$$\overline{F}_\alpha = \bigcup_{e=1}^{E} \overline{F}_N^{(e)} \Delta_{N\alpha}^{(e)}$$

$$\overline{F}_\alpha^{(e)} = A_{NM}^{(e)} U_M^{(e)}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> สมมติค่า

$$P_\alpha^{(r)} = E_\alpha^{(r)} \tag{4.11}$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> คำนวณหาค่า $E_\alpha^{(r)}$

$$\overline{E}_\alpha^{(r)} = A_{\alpha\beta} P_\beta^{(r)} = \bigcup_{e=1}^{E} \overline{H}_N^{(e)} \Delta_{N\alpha}^{(e)} \tag{4.12}$$

เมื่อ

$$H_N^{(e)} = A_{NM}^{(e)} P_M^{(r)}$$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> คำนวณหาค่า $a^{(r)}$

$$a^{(r)} = \frac{E_\alpha^{(r)} P_\alpha^{(r)}}{\overline{E}_\beta^{(r)} P_\beta^{(r)}} \tag{4.13}$$

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> คำนวณหาค่า $U_\alpha^{(r+1)}$

$$U_\alpha^{(r+1)} = U_\alpha^{(r)} + a^{(r)} P_\alpha^{(r)} \tag{4.14}$$

<u>ขั้นตอนที่ 7</u> คำนวณหาค่า $E_{\alpha}^{(r+1)}$

$$E_{\alpha}^{(r+1)} = E_{\alpha}^{(r)} + a^{(r)}\overline{E}_{\alpha}^{(r)} \qquad (4.15)$$

<u>ขั้นตอนที่ 8</u> คำนวณหาค่า $b^{(r+1)}$

$$b^{(r)} = \frac{E_{\alpha}^{(r+1)}E_{\alpha}^{(r+1)}}{E_{\beta}^{(r)}E_{\beta}^{(r)}} \qquad (4.16)$$

<u>ขั้นตอนที่ 9</u> คำนวณหาค่า $P_{\alpha}^{(r+1)}$

$$P_{\alpha}^{(r+1)} = E_{\alpha}^{(r+1)} + b^{(r)}P_{\alpha}^{(r)} \qquad (4.17)$$

<u>ขั้นตอนที่ 10</u> ย้อนกลับไปคำนวณขั้นตอนที่ 4 จนค่าลู่เข้าสู่คำตอบ

ในบทต่อไปจะแสดงถึงวิธีการใช้โปรแกรม SUPG และทำการเปรียบเทียบผลการแก้สมการเชิงเส้นระหว่างวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์กับระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล (Gauss - Seidel)

บทที่ 5

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาคอนจูเกต

ในบทนี้จะได้นำเอาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 รวมทั้งระเบียบวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ที่ได้อธิบายในบทที่ 4 มาทำการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวสามารถทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้ และสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า SUPG ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.1 ลักษณะของโปรแกรม SUPG

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SUPG ประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (Main Program) และ 7 โปรแกรมย่อย (Subroutine) โดยมีขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมดังนี้

5.1.1 เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านแฟ้มข้อมูลนำเข้าของปัญหาการไหล (Input File) เช่น จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ของปัญหาทั้งหมด, จำนวนรอบในการคำนวณ, ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของของแข็งและของไหล ได้แก่ ค่าความหนาแน่น ค่าความหนืด สัมประสิทธิ์การขยายตัว สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล ค่าปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เอง จากนั้นจะอ่านค่า พิกัดของจุดต่อ เงื่อนไขเริ่มต้นในแต่ละจุดต่อซึ่งได้แก่ ค่าความเร็ว u ในแนวแกน x ค่าความเร็ว v ในแนวแกน y ค่าความดัน p และค่าอุณหภูมิ T และหมายเลขจุดต่อที่ประกอบกันขึ้นเป็นเอลิเมนต์ และชนิดของเอลิเมนต์ว่าเป็นของแข็งหรือของไหล โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE INPUT]

5.1.2 เรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVET] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ โดยจะทำการตรวจสอบเอลิเมนต์ว่าเอลิเมนต์ใดเป็นของแข็งและเอลิเมนต์ใดเป็นของไหลแล้วทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในแต่ละเอลิเมนต์ จากนั้นทำการรวมเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ แล้วทำการแก้ระบบสมการด้วยวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาค่าอุณหภูมิใหม่ที่จุดต่อต่าง ๆ

5.1.3 เรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVEUV] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ สำหรับพจน์การพาและการนำความร้อนในสมการโมเมนตัมทั้ง 2 สมการ จากนั้นจะทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในแต่ละเอลิเมนต์ จากนั้นทำการรวมเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ทั้งค่าความเร็ว u และ v แล้วทำการแก้สมการหาค่าความเร็ว u และ v ใหม่ที่จุดต่อต่าง ๆ ด้วยวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ จากนั้นคำนวณหาค่าที่ต้องใช้ในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ต่าง ๆของสมการความดัน

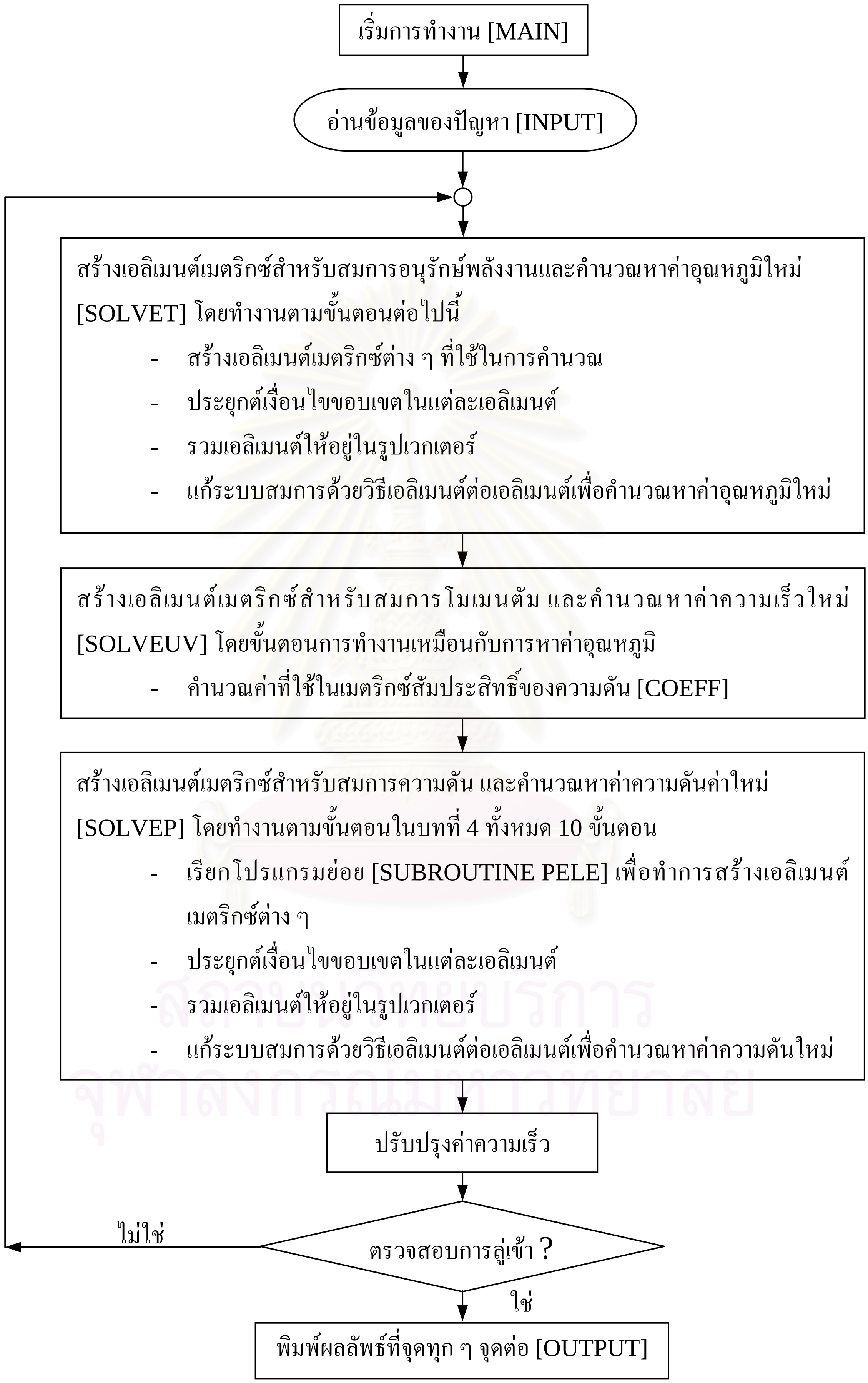
5.1.4 จากนั้นเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVEP] เพื่อทำการคำนวณตามขั้นตอนต่าง ๆ ในบทที่ 4 ด้วยวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์ โดยในขั้นตอนจะทำการเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE PELE] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์ต่าง ๆ ของความดันแล้วกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในแต่ละเอลิเมนต์ จากนั้นทำการรวมเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ของค่าความดัน แล้วทำการแก้หาค่าความดันใหม่แล้วทำตามขั้นตอนต่าง ๆ ทั้งหมด 10 ขั้นตอน

5.1.5 นำค่าความดันค่าใหม่ที่คำนวณได้จากข้อ 5.1.4 มาทำการปรับปรุงค่าความเร็วโดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE UPDATE]

5.1.6 ทำการตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ โดยจะทำการเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE ERROR] โดยที่ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ดำเนินการต่อในข้อ 5.1.7 แต่ถ้าไม่ก็ต้องกลับไปทำการคำนวณตั้งแต่หัวข้อ 5.1.2 ใหม่ จนกระทั่งได้ค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่าที่กำหนดไว้ หรือจนกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

5.1.7 พิมพ์ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสอง ความดันและอุณหภูมิ ลงในไฟล์ที่ต้องการเพื่อนำไปใช้แสดงผลต่อไป

ลำดับขั้นตอนต่าง ๆ นี้สามารถสรุปดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม SUPG

5.2 รายละเอียดของโปรแกรม SUPG

รายละเอียดของโปรแกรม SUPG ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก.

5.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม SUPG ต้องการ

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรมวิเคราะห์การไหลแบบหนืดนี้ต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 6 ส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก	ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร
บรรทัดต่อไป	ประโยคต่าง ๆที่มีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น:

```
2
FINITE ELEMENT DATA FOR CONJUGATE NATURAL CONVECTION  IN A
CAVITY:   Gr = 1000, Pr = 0.71, K = 1
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา พร้อมค่าที่จะใช้ในการคำนวณ

บรรทัดแรก	คำระบุจำนวนจุดต่อ, เอลิเมนต์, เอลิเมนต์ที่ขอบ, รอบการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมให้ได้
บรรทัดต่อไป	ตัวเลขจำนวนจุดต่อ, เอลิเมนต์, เอลิเมนต์ที่ขอบ, รอบการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมให้ได้

ตัวอย่างเช่น:

```
NPOIN     NELEM    NBOU   NITER      TOL
 750       1392      0     2000      5.e-8
```

หมายเหตุ: จำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบ (NBOU) หมายถึง จำนวนเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบเขตของปัญหาซึ่งมีของไหลไหลผ่าน เช่นเอลิเมนต์ที่ขอบทางเข้าของการไหลของของไหลในปัญหาที่จะพิจารณา เป็นต้น

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล

บรรทัดแรก	คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ
บรรทัดต่อไป	ตัวเลขแสดงค่าความหนาแน่น และค่าความหนืดของปัญหา

ตัวอย่างเช่น:

```
DENSITY  VISCOSITY  THERM_EXP  SPEC_CV  Ksolid  Kfluid REF_TEMP  Qgen
  1.0      0.1          1        7.1      5.0     1.0    1.0      0.0
```

ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อ ๆ ไป ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของความเร็วในทิศทาง x และ y พร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตของความดัน ตำแหน่งจุดต่อในแกน x และ y และค่าความเร็วในแกน x, y และค่าความดัน

ตัวอย่างเช่น:

```
   NODE   IBCU   IBCV   IBCP   IBCT     X       Y     U   V   P   T
     1      1      1      0      0    -0.2    0.0    0.  0.  0.  0.
     2      1      1      0      0    -0.16   0.0    0.  0.  0.  0.
     3      1      1      0      0    -0.12   0.0    0.  0.  0.  0.
     4      1      1      0      0    -0.08   0.0    0.  0.  0.  0.
     5      1      1      0      0    -0.04   0.0    0.  0.  0.  0.
     :             :             :            :                   :
   745      0      0      0      0   0.79166  1.0    0.  0.  0.  0.
   746      0      0      0      0   0.83333  1.0    0.  0.  0.  0.
   747      0      0      0      0   0.875    1.0    0.  0.  0.  0.
   748      0      0      0      0   0.91666  1.0    0.  0.  0.  0.
   749      0      0      0      0   0.95833  1.0    0.  0.  0.  0.
   750      0      0      0      0   1.0      1.0    0.  0.  0.  0.
```

หมายเหตุ: เงื่อนไขขอบเขต IBC ของความเร็ว u ในทิศทาง x, ความเร็ว v ในทิศทาง y, เงื่อนไขขอบเขตของความดันและเงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิหมายถึง

IBC = 1 จุดต่อนั้นถูกกำหนดให้มีค่าตามที่ให้ไว้ และไม่ต้องทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

IBC = 0 ให้ทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

(ถ้าจุดต่อใดเป็นของแข็ง ให้แทนค่าความเร็ว u และ v เป็นศูนย์)

ส่วนที่ 5 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์และชนิดของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขของจุดต่อทั้งสามในทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น ๆ

ตัวอย่างเช่น:

ELEMENT NO.	I	J	K	LTYPE1	LTYP2
1	1	8	7	1	0
2	1	2	8	1	0
3	2	9	8	1	0
4	2	3	9	1	0
5	3	10	9	1	0
1388	723	724	748	0	0
1389	724	749	748	0	0
1390	724	725	749	0	0
1391	725	750	749	0	0
1392	725	726	750	0	0

หมายเหตุ: LTYPE1 คือเอลิเมนต์ที่เป็นของแข็ง

หมายถึง LTYPE1 = 1 คือเอลิเมนต์ที่เป็นของแข็งจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง Ksolid

LTYPE1 = 0 คือเอลิเมนต์ที่เป็นของไหลจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล Kfluid

LTYPE2 คือเอลิเมนต์ผลิตความร้อนได้เอง

หมายถึง LTYPE2 = 1 คือเอลิเมนต์ผลิตความร้อนได้เองใช้ค่า Qgen

LTYPE2 = 0 คือเอลิเมนต์ไม่สามารถผลิตความร้อนได้

(ซึ่งค่าต่าง ๆ Ksolid, Kfluid, Qgen อยู่ในส่วนที่ 3)

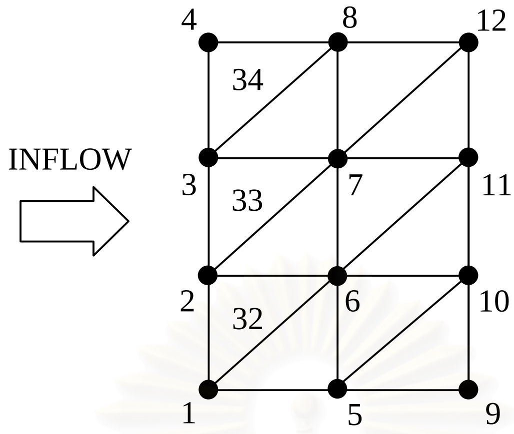
ส่วนที่ 6 เอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบเขตของปัญหาที่มีการไหลไหลผ่านขอบด้านนั้น

บรรทัดแรก คำระบุเอลิเมนต์ขอบเขต

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขเอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบดังกล่าว และหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบของเอลิเมนต์นั้น ๆ (โดยมีจำนวนบรรทัดต้องเท่ากับค่า NBOU ที่ให้ไว้ในส่วนที่ 2)

ตัวอย่างเช่น:

ELEMENT NO.	II	JJ
32	2	1
33	3	2
34	4	3



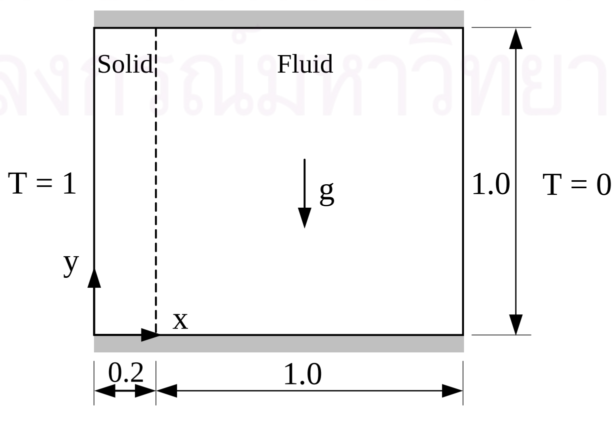
หมายเหตุ: ถ้าในปัญหาไม่มีเอลิเมนต์ที่มีคุณสมบัติดังในส่วนที่ 6 ให้ใส่ค่า NBOU ในส่วนที่ 2 เท่ากับหนึ่ง และใส่หมายเลขของเอลิเมนต์ในส่วนที่ 6 เท่ากับศูนย์ดังนี้

```
ELEMENT NO.     II     JJ
     0          0      0
```

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรม SUPG ต้องการสามารถทำความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้นโดยจะทำการพิจารณาตัวอย่างการใช้โปรแกรมในหัวข้อต่อไป

5.4 ตัวอย่างผลการใช้โปรแกรม SUPG ในการแก้ปัญหา

ในหัวข้อนี้จะได้แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม SUPG ที่ประดิษฐ์ขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมโดยที่มีผนังนำความร้อน แสดงในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมโดยที่มีผนังนำความร้อน

ปัญหาดังกล่าวถูกนำไปวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SUPG โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบไปด้วย 750 จุดต่อและ 1392 เอลิเมนต์ โดยที่ผนังด้านบนและผนังด้านล่างเป็นฉนวน ส่วนผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิ 1 ในขณะที่ผนังด้านขวามีอุณหภูมิต่ำที่ 0 และคิดแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงด้วย ส่วนลักษณะไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการนี้สมมติว่าชื่อ 'NATURAL_CONV.DAT' โดยมีรายละเอียดดังแสดงในหัวข้อข้างบน

เมื่อผู้ใช้ทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม SUPG โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลซึ่งผู้ใช้จะพิมพ์ตอบกลับไป และจากนั้นโปรแกรมจะทำการคำนวณเป็นขั้นตอนดังอธิบายในหัวข้อย่อย 5.1 เมื่อการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะให้ผู้ใช้ใส่ชื่อไฟล์ที่จะบรรจุผลลัพธ์ของความเร็ว, ความดัน และอุณหภูมิซึ่งขั้นตอนทั้งหมดดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 5.3

```
>SUPG      <Enter>

PLEASE ENTER INPUT FILE NAME:
NATURAL_CONV.DAT

  THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :
     NUMBER OF NODES               =    750
     NUMBER OF ELEMENTS            =   1392
     NUMBER OF MAX. ITERATION      =   2000
     SPECIFIED STOPPING TOLERANCE =0.50000E-07

iter =   1  0.100000000E+01  0.100000000E+01  0.251078280E-06  0.563979978E+00
iter =   2  0.144742927E+00  0.453231945E+00  0.192394865E-06  0.232848975E+00
iter =   3  0.917488983E+00  0.131809102E+01  0.167424833E-06  0.153034729E+00
iter =   4  0.156143279E+01  0.151913897E+01  0.148245678E-06  0.114674280E+00
iter =   5  0.510015933E+00  0.576724704E+00  0.176844069E-06  0.918942178E-01
iter =   6  0.534134809E+00  0.346500752E+00  0.188221063E-06  0.767490182E-01
iter =   7  0.449653171E+00  0.263816147E+00  0.174856127E-06  0.659323709E-01
iter =   8  0.312203836E+00  0.220340547E+00  0.169268369E-06  0.578123107E-01
iter =   9  0.224862631E+00  0.193835255E+00  0.169164185E-06  0.514876337E-01
iter =  10  0.180111201E+00  0.174211954E+00  0.162927272E-06  0.464186876E-01
iter =  11  0.158727581E+00  0.156425511E+00  0.149343883E-06  0.422618004E-01
iter =  12  0.145556030E+00  0.140367121E+00  0.148842551E-06  0.387873204E-01
iter =  13  0.134368024E+00  0.126497779E+00  0.148403696E-06  0.358358531E-01
iter =  14  0.123793688E+00  0.114819061E+00  0.197748990E-06  0.332933812E-01
iter =  15  0.113770580E+00  0.104872686E+00  0.184527480E-06  0.310763413E-01
iter =  16  0.104657804E+00  0.966052495E-01  0.169411511E-06  0.291222533E-01
iter =  17  0.966115948E-01  0.895576448E-01  0.206126430E-06  0.273836015E-01
iter =  18  0.895689308E-01  0.831902994E-01  0.190826627E-06  0.258237141E-01
iter =  19  0.833726941E-01  0.773998654E-01  0.203227770E-06  0.244139131E-01
iter =  20  0.778643604E-01  0.721569500E-01  0.191951793E-06  0.231314988E-01
iter =  21  0.729205500E-01  0.675531383E-01  0.176658833E-06  0.219583018E-01
iter =  22  0.684541002E-01  0.635445286E-01  0.162396486E-06  0.208796232E-01
iter =  23  0.644015866E-01  0.598967922E-01  0.150457450E-06  0.198834517E-01
iter =  24  0.607130136E-01  0.565544802E-01  0.139668040E-06  0.189598759E-01
iter =  25  0.573458451E-01  0.534867738E-01  0.213621610E-06  0.181006414E-01
iter =  26  0.542629396E-01  0.506323173E-01  0.203619098E-06  0.172988111E-01
iter =  27  0.514319086E-01  0.479934369E-01  0.199894016E-06  0.165485059E-01
iter =  28  0.488248028E-01  0.456628867E-01  0.191256023E-06  0.158447016E-01
iter =  29  0.464174677E-01  0.435073619E-01  0.190815432E-06  0.151830721E-01
iter =  30  0.441891084E-01  0.414941604E-01  0.184496115E-06  0.145598648E-01

iter =  200  0.611076159E-03  0.622598028E-03  0.215205139E-06  0.791722748E-04
iter =  201  0.598119602E-03  0.609183635E-03  0.244152287E-06  0.768029809E-04
iter =  202  0.585425012E-03  0.596068967E-03  0.205134262E-06  0.745025301E-04
iter =  203  0.573024482E-03  0.583209598E-03  0.231536881E-06  0.722682610E-04
iter =  204  0.560857680E-03  0.570646565E-03  0.201714110E-06  0.700992039E-04
iter =  205  0.548969751E-03  0.558333042E-03  0.223176138E-06  0.679926453E-04
```

```
iter =  206  0.537303163E-03  0.546303472E-03  0.236392349E-06  0.659476933E-04
iter =  207  0.525897587E-03  0.534519473E-03  0.214269337E-06  0.639619637E-04
iter =  208  0.514734526E-03  0.522986579E-03  0.220691598E-06  0.620339382E-04
iter =  209  0.503805392E-03  0.511699374E-03  0.195136821E-06  0.601620103E-04
iter =  210  0.493102172E-03  0.500656898E-03  0.212557409E-06  0.583447416E-04
iter =  211  0.482623706E-03  0.489845165E-03  0.243997395E-06  0.565977230E-04
iter =  212  0.472352005E-03  0.479283712E-03  0.203563200E-06  0.549215483E-04
iter =  213  0.462331525E-03  0.468917648E-03  0.230032943E-06  0.533049986E-04
iter =  214  0.452488127E-03  0.458793885E-03  0.241811324E-06  0.517492761E-04
iter =  215  0.442836238E-03  0.448904604E-03  0.227172243E-06  0.502489279E-04
iter =  216  0.433460639E-03  0.439175435E-03  0.236378544E-06  0.488010701E-04
iter =  217  0.424208089E-03  0.429706680E-03  0.222214029E-06  0.474014296E-04
iter =  218  0.415210980E-03  0.420399799E-03  0.226592263E-06  0.460501596E-04
iter =  219  0.406339779E-03  0.411338877E-03  0.240048739E-06  0.447449910E-04
iter =  220  0.397689508E-03  0.402452329E-03  0.210358921E-06  0.434875413E-04
iter =  221  0.389234331E-03  0.393747747E-03  0.244190329E-06  0.422693018E-04
iter =  222  0.380899892E-03  0.385269519E-03  0.208936268E-06  0.410916730E-04
iter =  223  0.372835806E-03  0.376912373E-03  0.232037282E-06  0.399530129E-04
iter =  224  0.364841433E-03  0.368795573E-03  0.205736768E-06  0.388478279E-04
iter =  225  0.357106651E-03  0.360797495E-03  0.222633364E-06  0.377833504E-04
iter =  226  0.349453654E-03  0.353020732E-03  0.236695699E-06  0.367543594E-04
iter =  227  0.341999493E-03  0.345389512E-03  0.207083277E-06  0.357575697E-04
iter =  228  0.334707411E-03  0.337920075E-03  0.213456517E-06  0.347936625E-04
iter =  229  0.327561201E-03  0.330614200E-03  0.196956155E-06  0.338592826E-04
iter =  230  0.320584681E-03  0.323460143E-03  0.236800480E-06  0.329548935E-04

iter = 470  0.160433711E-05  0.150990618E-05  0.112381582E-06  0.134230596E-06
iter = 471  0.155783952E-05  0.148064022E-05  0.102807199E-06  0.131057776E-06
iter = 472  0.150767188E-05  0.145379990E-05  0.117217969E-06  0.127927192E-06
iter = 473  0.146469434E-05  0.142445961E-05  0.106399407E-06  0.124821672E-06
iter = 474  0.141761955E-05  0.139824667E-05  0.120254674E-06  0.121762676E-06
iter = 475  0.137721946E-05  0.137039440E-05  0.107988299E-06  0.118734231E-06
iter = 476  0.133444826E-05  0.134494106E-05  0.121071096E-06  0.115759823E-06
iter = 477  0.129691550E-05  0.131884451E-05  0.107612519E-06  0.112823573E-06
iter = 478  0.125732812E-05  0.129607176E-05  0.119728787E-06  0.109949240E-06
iter = 479  0.122271331E-05  0.127243586E-05  0.105354567E-06  0.107120508E-06
iter = 480  0.118544413E-05  0.125168939E-05  0.116270348E-06  0.104358138E-06
iter = 481  0.115323466E-05  0.122834604E-05  0.101634304E-06  0.101647567E-06
iter = 482  0.111814942E-05  0.120939685E-05  0.111123352E-06  0.990084595E-07
iter = 483  0.108750110E-05  0.118802816E-05  0.966474538E-07  0.964263432E-07
iter = 484  0.105463698E-05  0.117010529E-05  0.104683148E-06  0.939151572E-07
iter = 485  0.102523526E-05  0.114970044E-05  0.907077235E-07  0.914624039E-07
iter = 486  0.994947085E-06  0.113341673E-05  0.973978405E-07  0.890805011E-07
iter = 487  0.967064999E-06  0.111310131E-05  0.843176024E-07  0.867608761E-07
iter = 488  0.939569722E-06  0.109769392E-05  0.897265294E-07  0.845105542E-07
iter = 489  0.913223289E-06  0.107703013E-05  0.776488398E-07  0.823201887E-07
iter = 490  0.888577917E-06  0.106050897E-05  0.820603154E-07  0.801987996E-07
iter = 491  0.864382507E-06  0.103991836E-05  0.709568368E-07  0.781365041E-07
iter = 492  0.841841333E-06  0.102196830E-05  0.744387074E-07  0.761440665E-07
iter = 493  0.820712938E-06  0.100099533E-05  0.643451930E-07  0.742082681E-07
iter = 494  0.800633968E-06  0.982004986E-06  0.671169574E-07  0.723347636E-07
iter = 495  0.781981305E-06  0.960851635E-06  0.580395668E-07  0.705166483E-07
iter = 496  0.764272434E-06  0.941179563E-06  0.602222111E-07  0.687569212E-07
iter = 497  0.747497943E-06  0.920519935E-06  0.523261767E-07  0.670512071E-07
iter = 498  0.732021441E-06  0.900878193E-06  0.540211243E-07  0.654054204E-07
iter = 499  0.716757091E-06  0.880647531E-06  0.475559332E-07  0.638101105E-07

  Start time :  21:29:36:48
    End time :  21:30:29:37

 ENTER THE OUTPUT FILE NAME
 NATURAL_CONV_EBE.OUT

Stop – Program terminated.
```

รูปที่ 5.3 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม SUPG โดยใช้วิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์

โดยที่ผลลัพธ์ของค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสอง, ความดันและอุณหภูมิ ซึ่งบรรจุอยู่ในไฟล์ “NATURAL_CONV_EBE.OUT” ได้แสดงในรูปที่ 5.4

NODE	U	V	P	T
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.73145E+01	0.10000E+01
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.72833E+01	0.96085E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.72425E+01	0.92164E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.71909E+01	0.88233E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.71299E+01	0.84287E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.70668E+01	0.80322E+00
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.67715E+01	0.10000E+01
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.67455E+01	0.96087E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.67136E+01	0.92170E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.66731E+01	0.88241E+00
11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.66241E+01	0.84297E+00
12	0.00000E+00	0.00000E+00	0.65708E+01	0.80333E+00
13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.62148E+01	0.10000E+01
14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.61961E+01	0.96096E+00
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.61725E+01	0.92187E+00
16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.61426E+01	0.88266E+00
17	0.00000E+00	0.00000E+00	0.61053E+01	0.84329E+00
18	0.00000E+00	0.00000E+00	0.60616E+01	0.80369E+00
19	0.00000E+00	0.00000E+00	0.56398E+01	0.10000E+01
20	0.00000E+00	0.00000E+00	0.56287E+01	0.96111E+00
350	-0.17535E+00	0.16922E+00	0.24508E+01	0.50322E+00
351	-0.19402E+00	0.12852E+00	0.24660E+01	0.46786E+00
352	-0.20796E+00	0.84971E-01	0.24861E+01	0.43357E+00
353	-0.21675E+00	0.39745E-01	0.25108E+01	0.40028E+00
354	-0.22016E+00	-0.61952E-02	0.25395E+01	0.36788E+00
355	-0.21810E+00	-0.51967E-01	0.25716E+01	0.33624E+00
356	-0.21063E+00	-0.96657E-01	0.26060E+01	0.30518E+00
357	-0.19796E+00	-0.13912E+00	0.26414E+01	0.27456E+00
358	-0.18044E+00	-0.17790E+00	0.26761E+01	0.24422E+00
359	-0.15859E+00	-0.21116E+00	0.27084E+01	0.21402E+00
360	-0.13318E+00	-0.23649E+00	0.27362E+01	0.18383E+00
361	-0.10527E+00	-0.25090E+00	0.27577E+01	0.15358E+00
362	-0.76321E-01	-0.25071E+00	0.27708E+01	0.12319E+00
363	-0.48270E-01	-0.23144E+00	0.27741E+01	0.92620E-01
364	-0.23565E-01	-0.18775E+00	0.27667E+01	0.61884E-01
365	-0.54909E-02	-0.11322E+00	0.27469E+01	0.30988E-01
366	0.00000E+00	0.00000E+00	0.27062E+01	0.00000E+00
367	-0.35901E-02	0.13571E+00	0.18434E+01	0.77712E+00
368	-0.14849E-01	0.22092E+00	0.18266E+01	0.73812E+00
369	-0.31685E-01	0.26730E+00	0.18148E+01	0.69916E+00
370	-0.51779E-01	0.28434E+00	0.18057E+01	0.66046E+00
730	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.68204E+01	0.73335E+00
731	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.68835E+01	0.70428E+00
732	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.69693E+01	0.67517E+00
733	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.70740E+01	0.64583E+00
734	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.71941E+01	0.61609E+00
735	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.73258E+01	0.58576E+00
736	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.74661E+01	0.55468E+00
737	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.76122E+01	0.52267E+00
738	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.77616E+01	0.48958E+00
739	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.79120E+01	0.45528E+00
740	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.80613E+01	0.41966E+00
741	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.82075E+01	0.38265E+00
742	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.83484E+01	0.34424E+00
743	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.84814E+01	0.30444E+00
744	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.86036E+01	0.26335E+00
745	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.87108E+01	0.22110E+00

```
   746     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.87982E+01   0.17789E+00
   747     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88598E+01   0.13394E+00
   748     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88898E+01   0.89511E-01
   749     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88859E+01   0.44805E-01
   750     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88540E+01   0.00000E+00
```

รูปที่ 5.4 ลักษณะผลลัพธ์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ที่อยู่ในไฟล์ชื่อ “NATURAL_CONV_EBE.OUT”

5.5 ผลการเปรียบเทียบวิธีแก้สมการเชิงเส้นด้วยวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์กับระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

ในหัวข้อนี้จะทำการเปรียบเทียบระหว่าง 2 วิธีโดยที่วิธีเอลิเมนต์โดยเอิเมนต์ โดยทฤษฎีได้แสดงไว้ในบทที่ 4 และแสดงผลจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ไว้ในหัวข้อที่ 5.4 กับวิธีเกาส์-ไซเดล โดยจะแสดงขั้นตอนของค่า Error ได้แสดงในรูปที่ 5.5

```
>SUPG      <Enter>

PLEASE ENTER INPUT FILE NAME:
NATURAL_CONV.DAT

  THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :
     NUMBER OF NODES             =    750
     NUMBER OF ELEMENTS          =   1392
     NUMBER OF MAX. ITERATION    =   2000
     SPECIFIED STOPPING TOLERANCE =0.50000E-07

iter =    1  0.100000000E+01  0.628365271E+01  0.100000000E+01  0.931060300E+00
iter =    2  0.307630486E+00  0.482960066E+01  0.704852362E+00  0.746985369E+00
iter =    3  0.309060201E+00  0.169801703E+01  0.290828071E+00  0.598756188E+00
iter =    4  0.547511040E+00  0.159051308E+01  0.431749289E+00  0.478392557E+00
iter =    5  0.295897484E+00  0.165019023E+01  0.106117290E+01  0.381205852E+00
iter =    6  0.190482760E+00  0.692103554E+00  0.624361630E+00  0.304726247E+00
iter =    7  0.328341427E+00  0.310207643E+00  0.246474330E+00  0.244371302E+00
iter =    8  0.217316497E+00  0.429562123E+00  0.226490174E+00  0.195508047E+00
iter =    9  0.612709529E-01  0.287422103E+00  0.156886727E+00  0.155580590E+00
iter =   10  0.102046708E+00  0.123377021E+00  0.924936620E-01  0.122962522E+00
iter =   11  0.108986476E+00  0.153468158E+00  0.124756888E+00  0.982351908E-01
iter =   12  0.578156185E-01  0.100150530E+00  0.805714363E-01  0.786833128E-01
iter =   13  0.374519669E-01  0.377813165E-01  0.231053533E-01  0.623504791E-01
iter =   14  0.456389313E-01  0.560019284E-01  0.512761612E-01  0.486795759E-01
iter =   15  0.363690080E-01  0.435271673E-01  0.437959966E-01  0.380648170E-01
iter =   16  0.190473144E-01  0.162330115E-01  0.163477202E-01  0.313152521E-01
iter =   17  0.166054686E-01  0.236329395E-01  0.193265465E-01  0.268522058E-01
iter =   18  0.150713586E-01  0.213768036E-01  0.226613296E-01  0.233089523E-01
iter =   19  0.112289707E-01  0.965349561E-02  0.134651425E-01  0.201308033E-01
iter =   20  0.886845917E-02  0.107917094E-01  0.136420694E-01  0.173825059E-01
```

```
iter = 1000  0.267314934E-05  0.187735481E-05  0.332630200E-05  0.139797251E-04
iter = 1001  0.267421510E-05  0.165648122E-05  0.277634975E-05  0.139629930E-04
iter = 1002  0.266366103E-05  0.171642680E-05  0.312318683E-05  0.139463462E-04
iter = 1003  0.265306311E-05  0.161222986E-05  0.270830555E-05  0.139296662E-04
iter = 1004  0.263041284E-05  0.173253957E-05  0.313214876E-05  0.139130924E-04
iter = 1005  0.265548760E-05  0.180277771E-05  0.329096821E-05  0.138965032E-04
iter = 1006  0.269014856E-05  0.188014488E-05  0.354845273E-05  0.138799538E-04
iter = 1007  0.261473126E-05  0.164052299E-05  0.291965600E-05  0.138633917E-04
iter = 1008  0.263171767E-05  0.165134553E-05  0.294909833E-05  0.138468713E-04
iter = 1009  0.269642699E-05  0.185777838E-05  0.352203708E-05  0.138303304E-04
iter = 1010  0.262247215E-05  0.162739851E-05  0.287155820E-05  0.138137883E-04
```

```
iter = 1011  0.262602019E-05  0.174707824E-05  0.319374453E-05  0.137973171E-04
iter = 1012  0.268039348E-05  0.171072492E-05  0.261204244E-05  0.137808575E-04
iter = 1013  0.262086427E-05  0.171441520E-05  0.306241280E-05  0.137644692E-04
iter = 1014  0.263233887E-05  0.173465935E-05  0.311629525E-05  0.137480292E-04
iter = 1015  0.261145235E-05  0.178738545E-05  0.318128227E-05  0.137316190E-04
iter = 1016  0.260248472E-05  0.164546333E-05  0.287722751E-05  0.137152077E-04
iter = 1017  0.262510480E-05  0.178167507E-05  0.310194711E-05  0.136989094E-04
iter = 1018  0.262449307E-05  0.154121202E-05  0.266213755E-05  0.136826371E-04
iter = 1019  0.263103169E-05  0.160136739E-05  0.273746416E-05  0.136663987E-04
iter = 1020  0.262636735E-05  0.161965823E-05  0.273861216E-05  0.136500796E-04

iter = 1980  0.266650182E-05  0.628119478E-06  0.946079443E-06  0.429440148E-05
iter = 1981  0.269078528E-05  0.676710075E-06  0.125564242E-05  0.428920996E-05
iter = 1982  0.266356436E-05  0.562133068E-06  0.829681250E-06  0.428398295E-05
iter = 1983  0.267445454E-05  0.587901709E-06  0.110397278E-05  0.427882961E-05
iter = 1984  0.265519200E-05  0.520247331E-06  0.803330254E-06  0.427361844E-05
iter = 1985  0.268619724E-05  0.671981429E-06  0.131943486E-05  0.426844747E-05
iter = 1986  0.265633137E-05  0.523687723E-06  0.796514160E-06  0.426323800E-05
iter = 1987  0.265952730E-05  0.570285966E-06  0.794610661E-06  0.425809924E-05
iter = 1988  0.272076923E-05  0.639477160E-06  0.117175923E-05  0.425294343E-05
iter = 1989  0.264615740E-05  0.558536537E-06  0.983713699E-06  0.424774596E-05
iter = 1990  0.265767729E-05  0.510336771E-06  0.707664207E-06  0.424262412E-05
iter = 1991  0.264293810E-05  0.539045946E-06  0.857870416E-06  0.423750536E-05
iter = 1992  0.264440059E-05  0.561604363E-06  0.995314362E-06  0.423236652E-05
iter = 1993  0.264806320E-05  0.562109000E-06  0.103975843E-05  0.422722401E-05
iter = 1994  0.267928653E-05  0.665497287E-06  0.112923029E-05  0.422208732E-05
iter = 1995  0.264418785E-05  0.526675964E-06  0.927788499E-06  0.421698285E-05
iter = 1996  0.263528018E-05  0.489916054E-06  0.856883988E-06  0.421188043E-05
iter = 1997  0.262384230E-05  0.574177036E-06  0.913791738E-06  0.420675340E-05
iter = 1998  0.262586008E-05  0.543763925E-06  0.947275658E-06  0.420162876E-05
iter = 1999  0.264610807E-05  0.742618034E-06  0.120287347E-05  0.419652231E-05
iter = 2000  0.266021426E-05  0.774911828E-06  0.130750105E-05  0.419140470E-05

  Start time :  21:42:29:54
    End time :   4:49:10:00

 ENTER THE OUTPUT FILE NAME
 NATURAL_CONV_GAUSS.OUT

Stop – Program terminated.
```

รูปที่ 5.5 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม SUPG โดยใช้วิธีเกาส์-ไซเดล

โดยที่ผลลัพธ์ของค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสอง, ความดันและอุณหภูมิ ซึ่งบรรจุอยู่ในไฟล์ “NATURAL_CONV_GAUSS.OUT” ได้แสดงในรูปที่ 5.6

NODE	U	V	P	T
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.73244E+01	0.10000E+01
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.72931E+01	0.96082E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.72523E+01	0.92156E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.72006E+01	0.88219E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.71396E+01	0.84268E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.70764E+01	0.80299E+00
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.67811E+01	0.10000E+01
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.67552E+01	0.96085E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.67232E+01	0.92161E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.66828E+01	0.88227E+00
11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.66337E+01	0.84278E+00
12	0.00000E+00	0.00000E+00	0.65804E+01	0.80310E+00
13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.62243E+01	0.10000E+01
14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.62056E+01	0.96094E+00
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.61820E+01	0.92179E+00

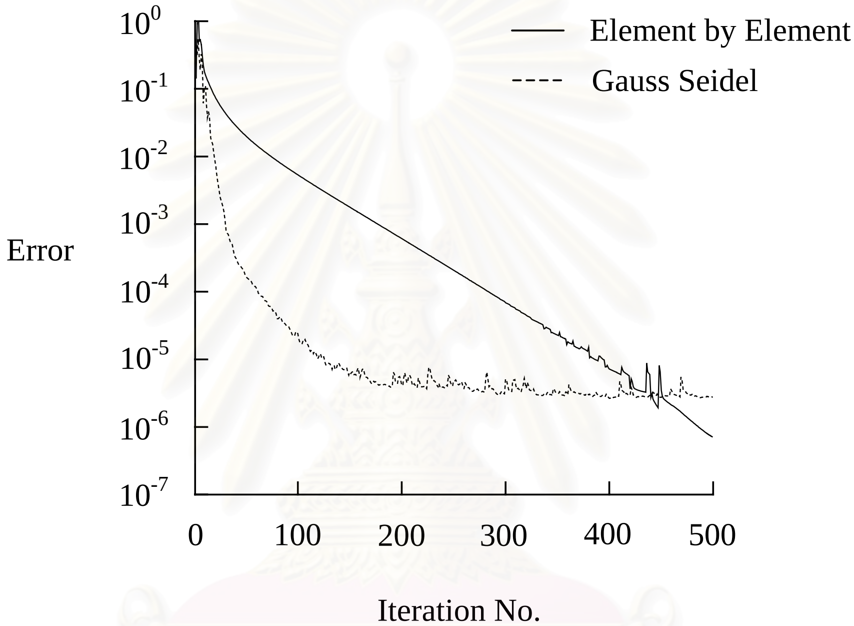
```
 16     0.00000E+00   0.00000E+00   0.61520E+01   0.88252E+00
 17     0.00000E+00   0.00000E+00   0.61147E+01   0.84310E+00
 18     0.00000E+00   0.00000E+00   0.60710E+01   0.80345E+00
 19     0.00000E+00   0.00000E+00   0.56490E+01   0.10000E+01
 20     0.00000E+00   0.00000E+00   0.56380E+01   0.96108E+00


350    -0.17535E+00   0.16920E+00   0.24591E+01   0.50273E+00
351    -0.19403E+00   0.12846E+00   0.24743E+01   0.46736E+00
352    -0.20797E+00   0.84890E-01   0.24943E+01   0.43307E+00
353    -0.21676E+00   0.39646E-01   0.25190E+01   0.39978E+00
354    -0.22016E+00  -0.63047E-02   0.25477E+01   0.36738E+00
355    -0.21809E+00  -0.52067E-01   0.25798E+01   0.33575E+00
356    -0.21061E+00  -0.96723E-01   0.26142E+01   0.30472E+00
357    -0.19793E+00  -0.13918E+00   0.26496E+01   0.27412E+00
358    -0.18039E+00  -0.17791E+00   0.26843E+01   0.24381E+00
359    -0.15852E+00  -0.21119E+00   0.27167E+01   0.21365E+00
360    -0.13309E+00  -0.23647E+00   0.27445E+01   0.18350E+00
361    -0.10519E+00  -0.25077E+00   0.27658E+01   0.15330E+00
362    -0.76258E-01  -0.25054E+00   0.27788E+01   0.12296E+00
363    -0.48235E-01  -0.23132E+00   0.27821E+01   0.92445E-01
364    -0.23549E-01  -0.18762E+00   0.27748E+01   0.61766E-01
365    -0.54875E-02  -0.11314E+00   0.27549E+01   0.30928E-01
366     0.00000E+00   0.00000E+00   0.27143E+01   0.00000E+00
367    -0.35951E-02   0.13576E+00   0.18513E+01   0.77684E+00
368    -0.14861E-01   0.22098E+00   0.18345E+01   0.73780E+00
369    -0.31707E-01   0.26726E+00   0.18228E+01   0.69880E+00
370    -0.51804E-01   0.28430E+00   0.18138E+01   0.66006E+00


731     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.68781E+01   0.70383E+00
732     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.69640E+01   0.67469E+00
733     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.70688E+01   0.64533E+00
734     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.71889E+01   0.61557E+00
735     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.73207E+01   0.58522E+00
736     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.74610E+01   0.55413E+00
737     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.76072E+01   0.52211E+00
738     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.77566E+01   0.48902E+00
739     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.79070E+01   0.45473E+00
740     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.80562E+01   0.41912E+00
741     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.82024E+01   0.38213E+00
742     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.83431E+01   0.34375E+00
743     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.84761E+01   0.30399E+00
744     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.85980E+01   0.26294E+00
745     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.87052E+01   0.22076E+00
746     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.87924E+01   0.17760E+00
747     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88539E+01   0.13372E+00
748     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88838E+01   0.89362E-01
749     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88799E+01   0.44730E-01
750     0.00000E+00   0.00000E+00  -0.88480E+01   0.00000E+00
```

รูปที่ 5.6 ลักษณะผลลัพธ์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ที่อยู่ในไฟล์ชื่อ “NATURAL_CONV_GAUSS.OUT”

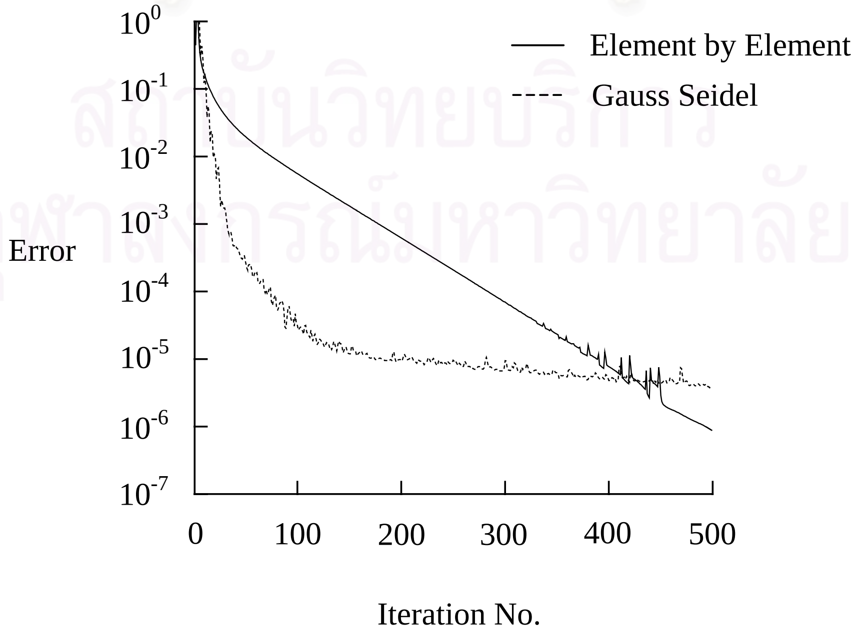
จากรูปที่ 5.3 กับ 5.5 จะเห็นได้ว่าวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์จะใช้เวลาในการคำนวณ 53 วินาทีและวิธีเกาส์-ไซเดลจะใช้เวลาในการคำนวณประมาณ 7 ชั่วโมง ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์จะคำนวณได้เร็วกว่า แต่การลู่เข้าสู่คำตอบในแต่ละ iteration วิธีเกาส์-ไซเดล จะลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็วกว่าระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี (Jacobi Iteration) เพราะวิธีเกาส์-ไซเดลจะทำ

การปรับปรุงค่าต่าง ๆ เมื่อทำการคำนวณในแต่ละครั้ง ส่วนวิธียาโคบี จะปรับปรุงค่าพร้อม ๆ กันทั้งหมดเมื่อคำนวณผ่านไปหนึ่งรอบ

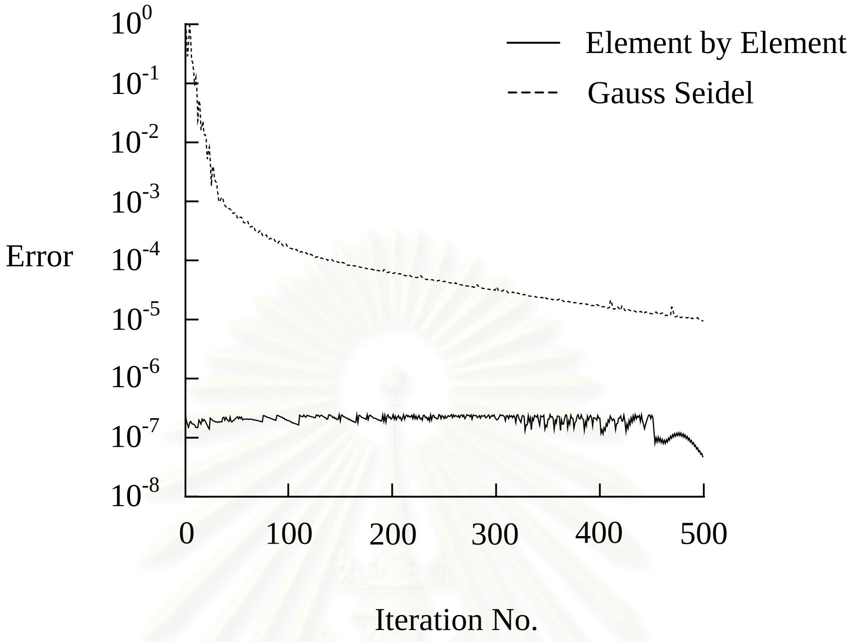
จากนั้นทำการหาค่าความผิดพลาดโดยแสดงในรูปของกราฟเพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น โดยจะแสดงผลการลู่เข้าของผลลัพธ์ของค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสอง, ความดันและอุณหภูมิ โดยการทำซ้ำ 499 ครั้ง ซึ่งแสดงในรูปที่ 5.7(ก-ง)



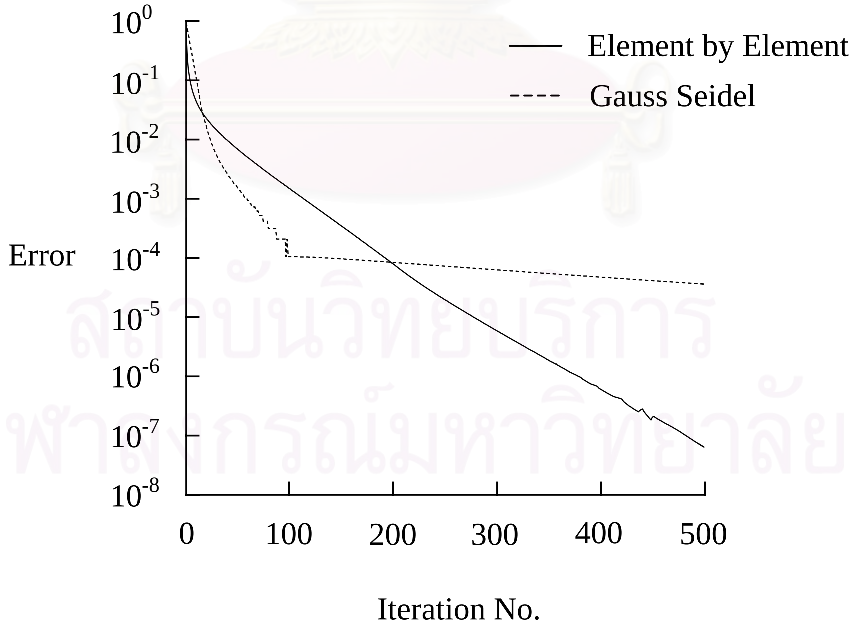
(ก) ค่าความเร็ว u



(ข) ค่าความเร็ว v



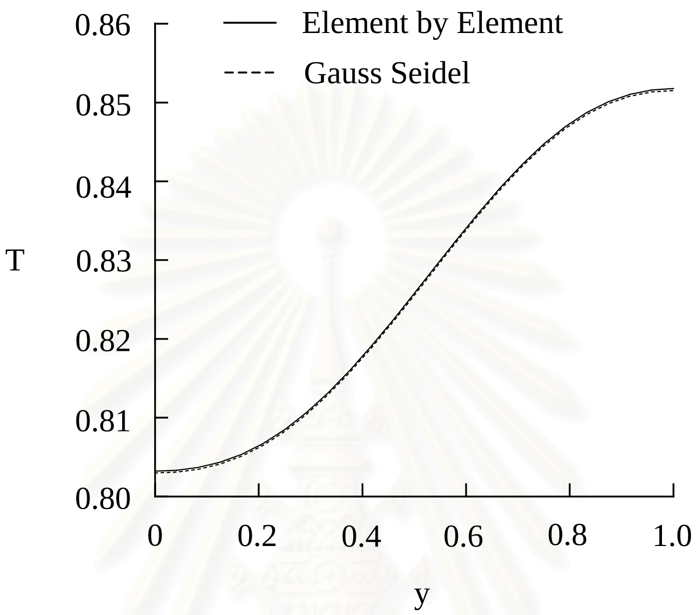
(ค) ค่าความความดัน



(ง) ค่าอุณหภูมิ

รูปที่ 5.7 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดที่ได้จากวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์และวิธีเกาส์-ไซเดล

จากนั้นทำการเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่บริเวณผิวลอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลที่ x = 0 โดยแสดงในรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.8 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล ด้วยวิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์และวิธีเกาส์-ไซเดล

จากรูปที่ 5.8 จะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีที่ได้กล่าวมาข้างต้นนั้นจะให้ผลของคำตอบมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้วิธีเอลิเมนต์ต่อเอลิเมนต์เพื่อการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต เนื่องจากระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณน้อยกว่า และให้ผลลัพธ์ที่น่าพอใจ

บทที่ 6

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

ในบทนี้จะเป็นการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการการถ่ายเทความร้อนในของแข็งและการไหล โดยจะแบ่งปัญหาในการวิเคราะห์ออกเป็นสองส่วนด้วยกัน ในส่วนแรกจะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง โดยจะนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปทดสอบกับปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นตรงจำนวน 2 ปัญหาด้วยกัน เพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม ในส่วนที่สองจะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยจะนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปทดสอบกับปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นตรงจำนวน 2 ปัญหาเพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมและทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นจำนวณ 2 ปัญหา ดังนี้

6.1 การตรวจสอบปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง

6.1.1 ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม (Conduction in Rectangular Plate)

สำหรับปัญหานี้เป็นตัวอย่างการจำลองปัญหาการนำความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยลักษณะของปัญหาเป็นการนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยม ซึ่งแสดงในรูปที่ 6.1 มีการกำหนดให้ขอบที่ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิ 100 ขณะที่ผนังด้านบนและด้านขวากำหนดให้มีอุณหภูมิเท่ากับ 0 ส่วนขอบผนังด้านล่างกำหนดให้เป็นฉนวน สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาจะพิจารณาเฉพาะเทอมของการแพร่ที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าคือ T ซึ่งมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.1)$$

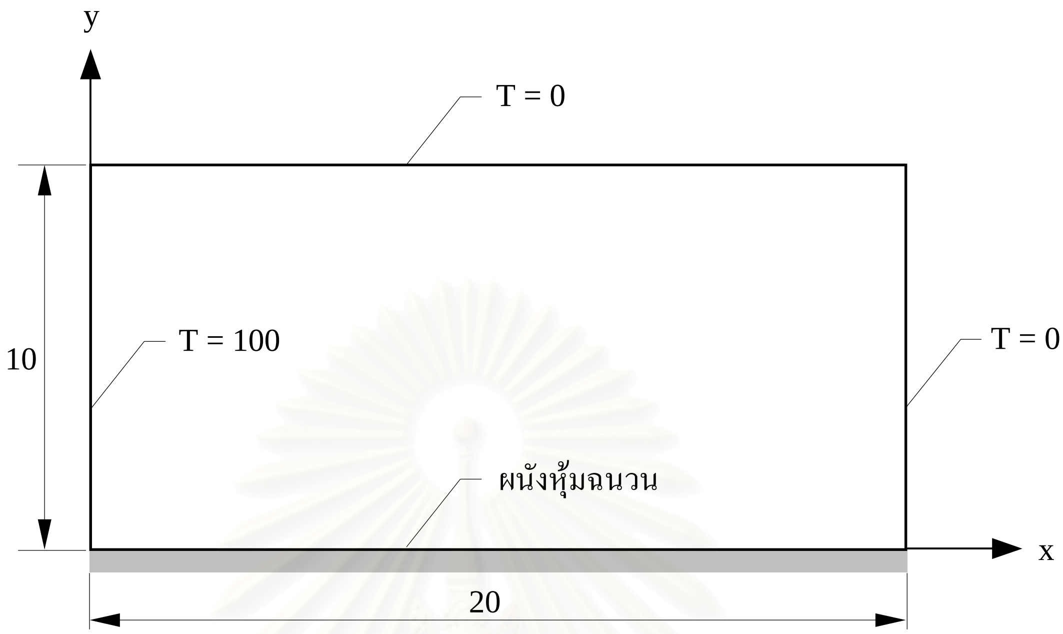
โดยมีเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$T(0, y) = 100 \qquad (6.2ก)$$

$$T(20, y) = 0 \qquad (6.2ข)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \qquad (6.2ค)$$

$$T(x,10) = 0 \qquad (6.2ง)$$



รูปที่ 6.1 ลักษณะของปัญหาการนำความร้อนของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงดังนี้

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{(2n-1)\pi}{20}(20-x)\right]\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{20}y\right] \tag{6.3}$$

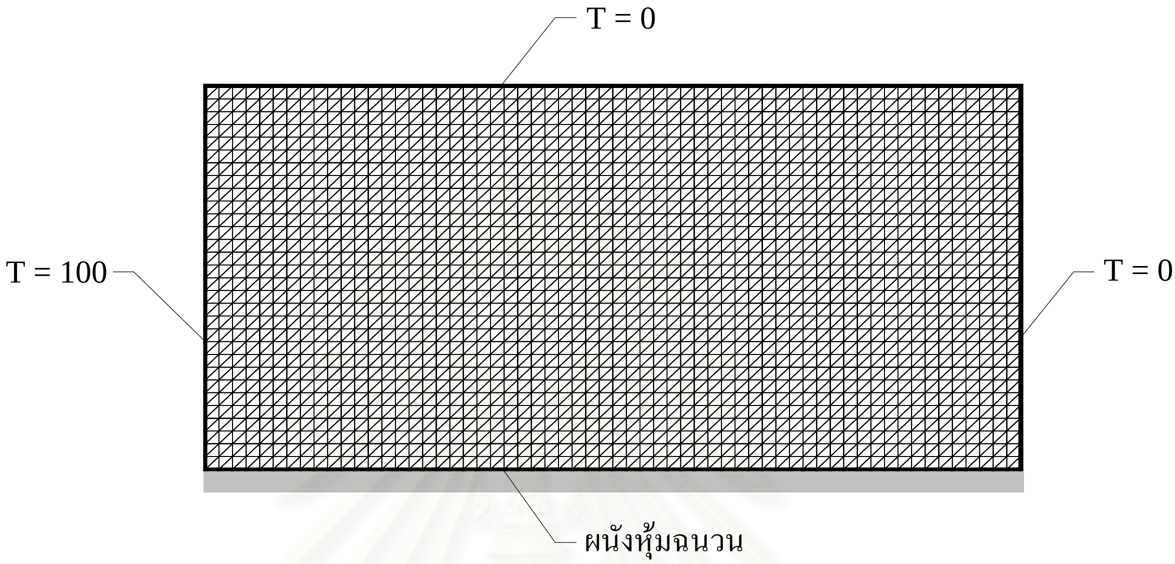
โดยที่

$$A_n = \frac{20\int_0^{10}\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{20}y\right]dy}{\sinh\left[(2n-1)\pi\right]}$$

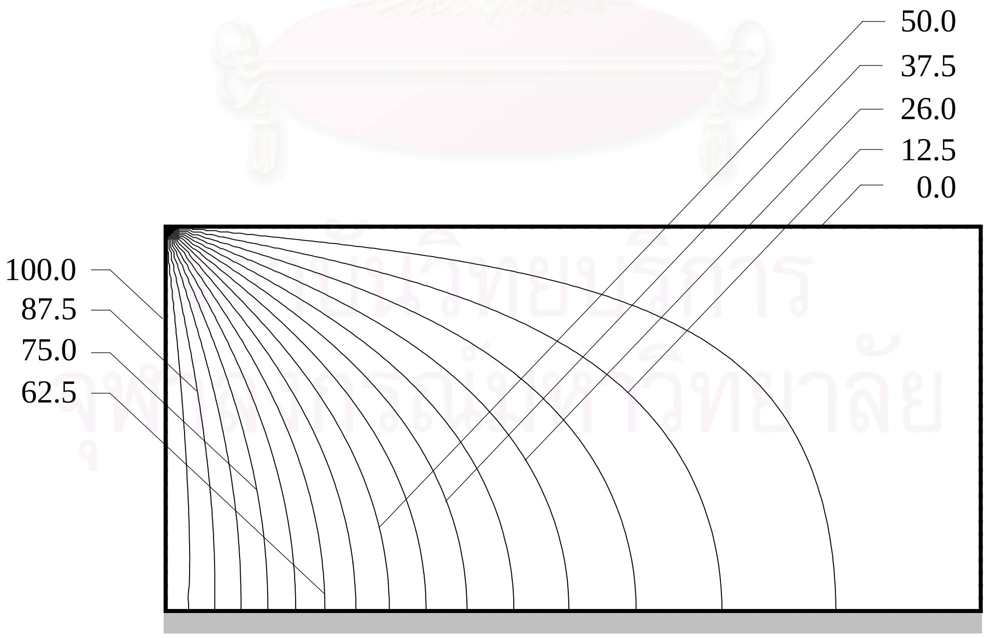
$$= \frac{400}{(2n-1)\pi}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right] \tag{6.4}$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

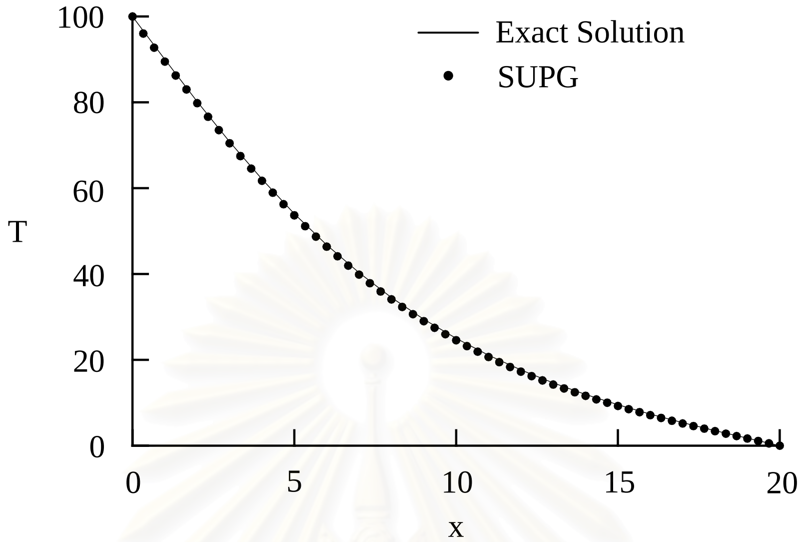
การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วย 1,891 จุดต่อและ 3,600 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตปัญหาการนำความร้อนของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม



รูปที่ 6.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิจากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาการนำความร้อนของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม



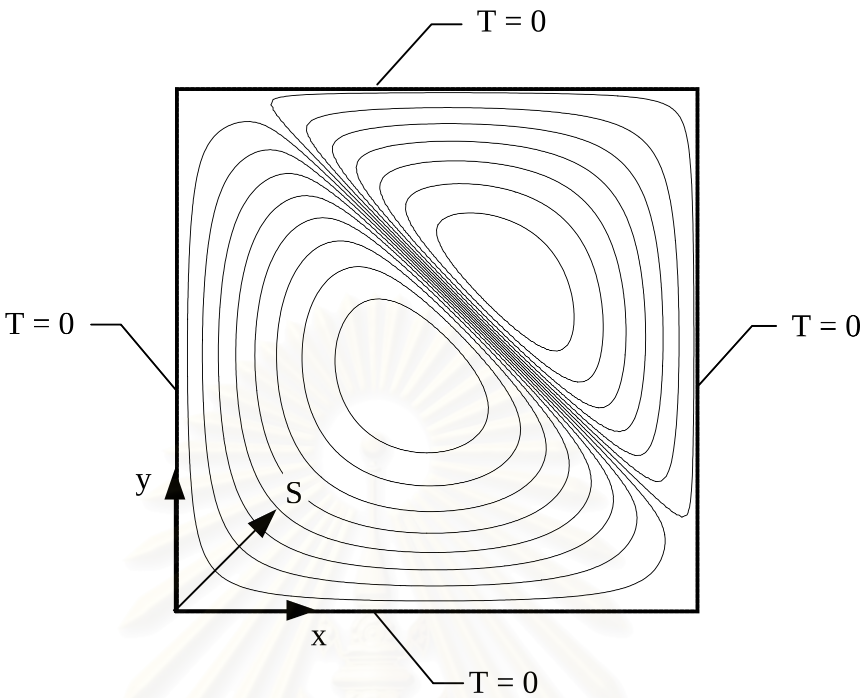
รูปที่ 6.4 แสดงอุณหภูมิที่ขอบผนังด้านล่างของแผ่นบางที่ตำแหน่ง $x = 0$ ระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยวิธี SUPG กับผลเฉลยแม่นตรง

จากการใช้ขนาดเอลิเมนต์ดังที่กล่าวมาจะได้ผลการกระจายตัวของอุณหภูมิดังแสดงในรูปที่ 6.3 และเมื่อทำการเปรียบเทียบอุณหภูมิบริเวณผนังด้านล่างของแผ่นบางที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ ระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับผลเฉลยแม่นตรงในสมการ (6.3) ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในรูปที่ 6.4 จะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

6.1.2 ปัญหาการแพร่กระจายความร้อนโดยมีปริมาณความร้อนที่ผิวแตกต่างกัน [26,27]

สำหรับปัญหานี้เป็นตัวอย่างการจำลองปัญหาการแพร่กระจายความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัวในสองมิติบนพื้นที่ขนาดกว้างและยาวหนึ่งหน่วยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 6.5 ซึ่งก่อให้เกิดเส้นชั้นของอุณหภูมิ (Temperature Contours) ในระดับต่าง ๆ กันอันเป็นผลมาจากค่าของการผลิตความร้อนได้เองตามตำแหน่งต่าง ๆ นั้นมีค่าต่างกัน สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการแพร่กระจายความร้อนนี้คือ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k} \tag{6.5}$$



รูปที่ 6.5 ผลเฉลยแม่นตรงแสดงระดับของอุณหภูมิด้วยเส้นชั้นเนื่องจาก
การแพร่กระจายความร้อนในสองมิติ

โดยที่

$$\frac{Q}{k} = 2y(1-y)\left[\tan^{-1}\beta - \frac{\alpha(1-2x)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2\beta x(1-x)}{2(1+\beta^2)^2}\right]$$

$$+\, 2x(1-x)\left[\tan^{-1}\beta - \frac{\alpha(1-2y)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2\beta y(1-y)}{2(1+\beta^2)^2}\right] \qquad (6.6ก)$$

เมื่อ

$$\beta = \alpha\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - 0.8\right) \qquad (6.6ข)$$

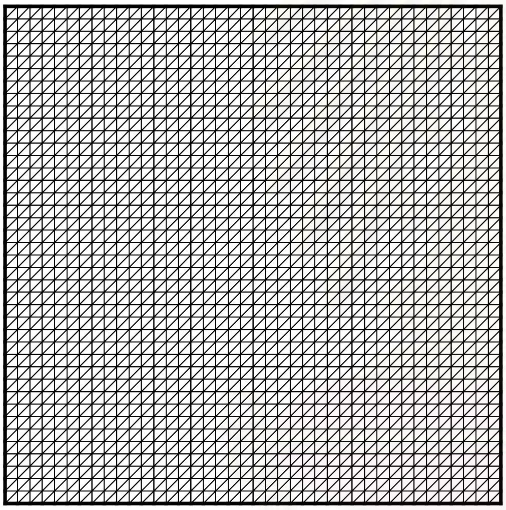
เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้คือการกำหนดอุณหภูมิตลอดขอบทั้ง 4 ด้านให้มีค่าเท่ากับศูนย์แล้ว ผลเฉลยแม่นตรงจะมีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิบนพื้นที่สี่เหลี่ยมนี้คือ

$$T(x,y) = x(1-x)y(1-y)\tan^{-1}\beta \qquad (6.7)$$

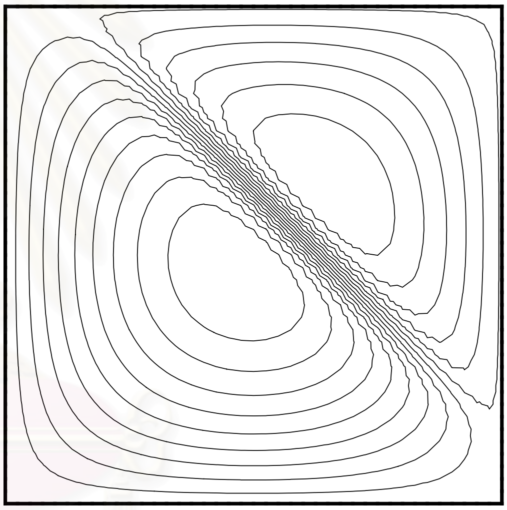
โดยที่ค่าพารามิเตอร์ α ในสมการ (6.6ข) แสดงถึงความชันของการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิต่ำจากบริเวณด้านซ้ายล่างของภาพไปสู่อุณหภูมิสูงในบริเวณด้านขวาบนซึ่งจะสังเกตได้จากจำนวน

เส้นชั้นที่เบียดชิดกัน สำหรับผลลัพธ์ของเส้นชั้นที่แสดงในรูปที่ 6.5 นี้ ค่าพารามิเตอร์ α ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 50

การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วย 1,681 จุดต่อและ 3,200 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.6 (ก) และลักษณะการกระจายของระดับอุณหภูมิที่แสดงด้วยเส้นชั้น ดังแสดงในรูปที่ 6.6 (ข) ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแก้ปัญหาการแพร่กระจายความร้อนได้ แต่ในขณะเดียวกันได้แสดงถึงความคลาดเคลื่อน (Error) และเกิดการสั่นของผลลัพธ์ ซึ่งเกิดเนื่องจากการแบ่งโดเมนของเอลิเมนต์นั้น มีขนาดไม่เพียงพอ ดังแสดงในรูปที่ 6.6 (ข)



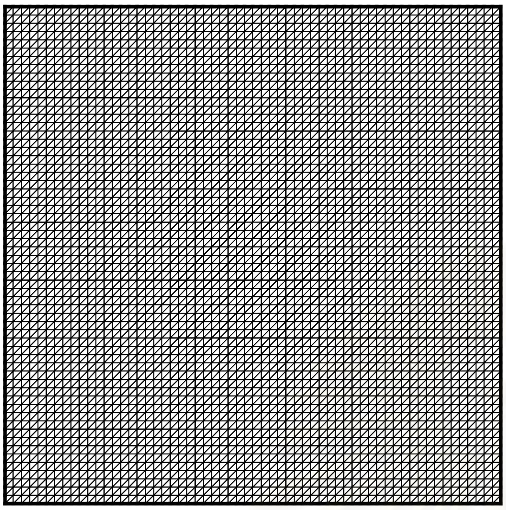
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ 1,681 จุดต่อ 3,200 เอลิเมนต์



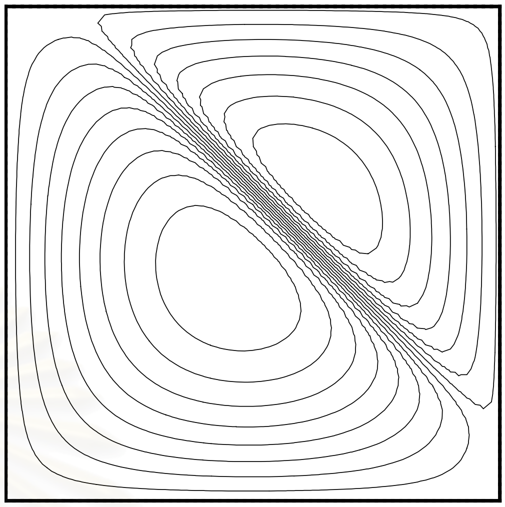
(ข) เส้นชั้นแสดงระดับการกระจายของอุณหภูมิ

รูปที่ 6.6 ปัญหาการแพร่กระจายความร้อนในสองมิติด้วยการใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม

เพื่อให้ผลลัพธ์มีความเที่ยงตรงยิ่งขึ้นเราจึงทำการลดขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลง โดยมีจำนวน 3,721 จุดต่อและ 7,200 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.7 (ก) และลักษณะการกระจายของเส้นชั้นอุณหภูมิได้แสดงในรูปที่ 6.7 (ข) ผลที่ได้จากการลดขนาดเอลิเมนต์นั้นจะทำให้การสั่นลดลง จากนั้นทำการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิตามทิศทาง S ดังแสดงในรูปที่ 6.8 จะเห็นได้ว่าขณะที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ ผลลัพธ์ที่ได้ยังเกิดความคลาดเคลื่อนและเมื่อทำการลดขนาดของเอลิเมนต์ลงจะทำให้ผลลัพท์ที่เกิดขึ้นเข้าใกล้กับผลเฉลยแม่นตรงดียิ่งขึ้น

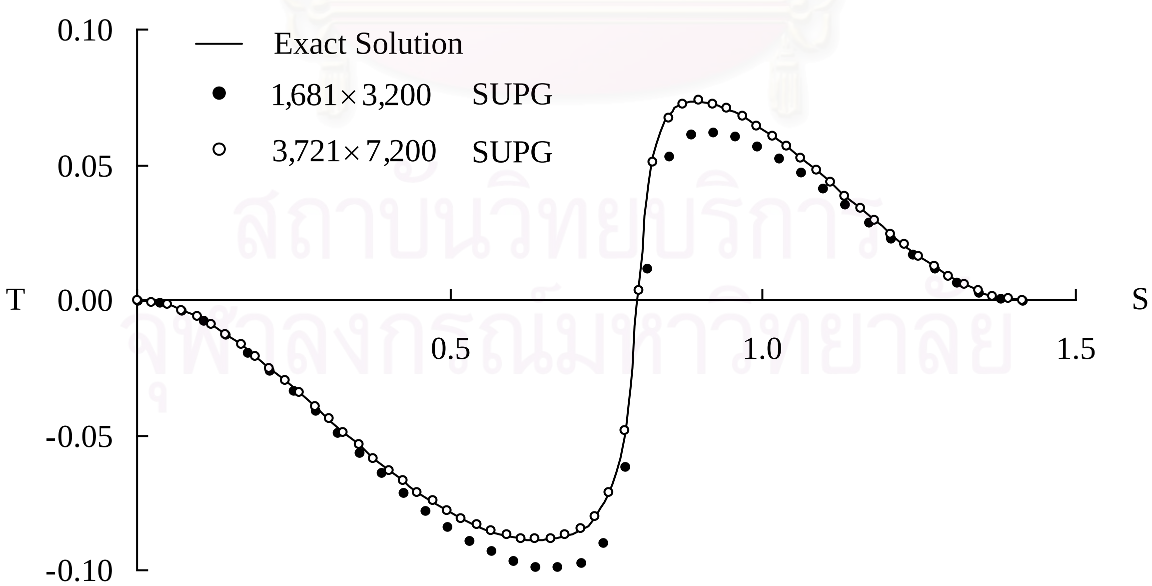


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์
3,721 จุดต่อ 7,200 เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นแสดงระดับการ
กระจายของอุณหภูมิ

รูปที่ 6.7 ปัญหาการแพร่กระจายความร้อนในสองมิติด้วยการใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม

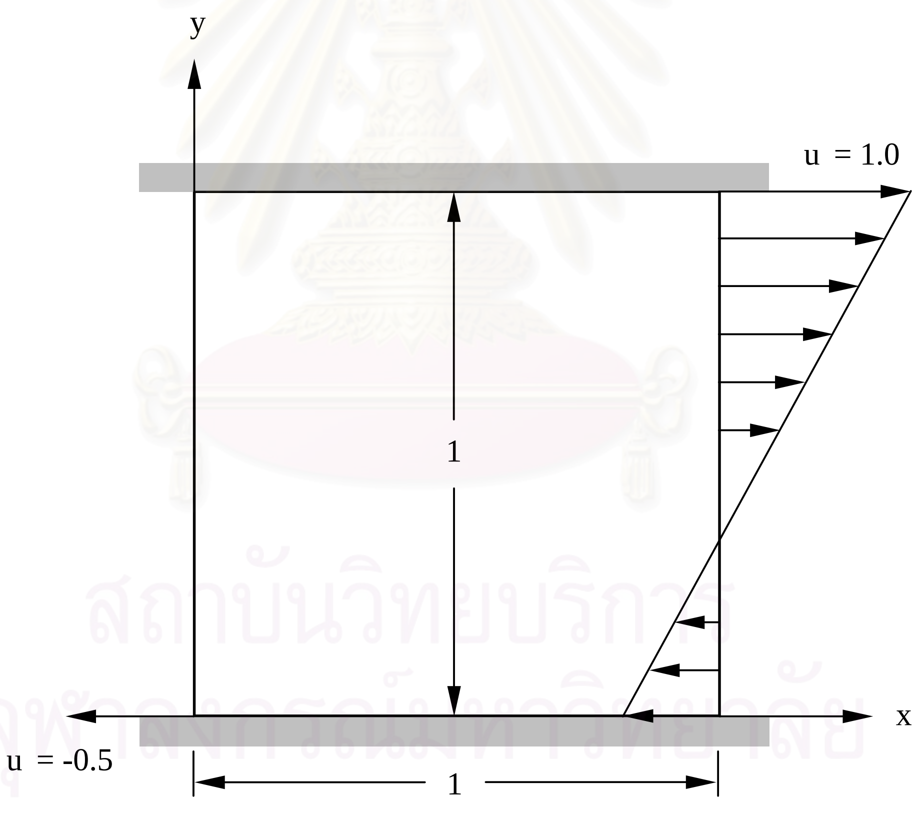


รูปที่ 6.8 แสดงการกระจายของอุณหภูมิ ตามทิศทาง S จากการคำนวณ
ด้วย SUPG กับผลเฉลยแม่นตรง

6.2 การตรวจสอบปัญหาการไหลแบบหนืดในสองมิติ

6.2.1 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานอันเนื่องมาจากความหนืด (Couette Flow) [28, 13]

ลักษณะของปัญหาไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืดเป็นปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวระหว่างแผ่นเรียบสองแผ่น ซึ่งสามารถตรวจสอบความถูกต้องเบื้องต้นของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ระหว่างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับผลเฉลยแม่นตรงได้ ลักษณะของปัญหานี้ได้แสดงในรูปที่ 6.9 โดยที่แผ่นล่างกำหนดให้มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว u เท่ากับ –0.5 ในขณะที่แผ่นบนมีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว u เท่ากับ 1.0 และกำหนดให้ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานเท่ากับ 1



รูปที่ 6.9 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบหนืดระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด

รูปแบบการกระจายของความเร็ว สำหรับปัญหานี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยกำหนดให้ลักษณะของการไหลไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน x ซึ่งจะทำให้สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x สามารถลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6.8}$$

หากทำการอินทิเกรตสมการ (6.8) สองครั้ง จะได้

$$u(y) = A\,y + B \tag{6.9}$$

จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

$$u(x, y=0) = -0.5 \tag{6.10ก}$$

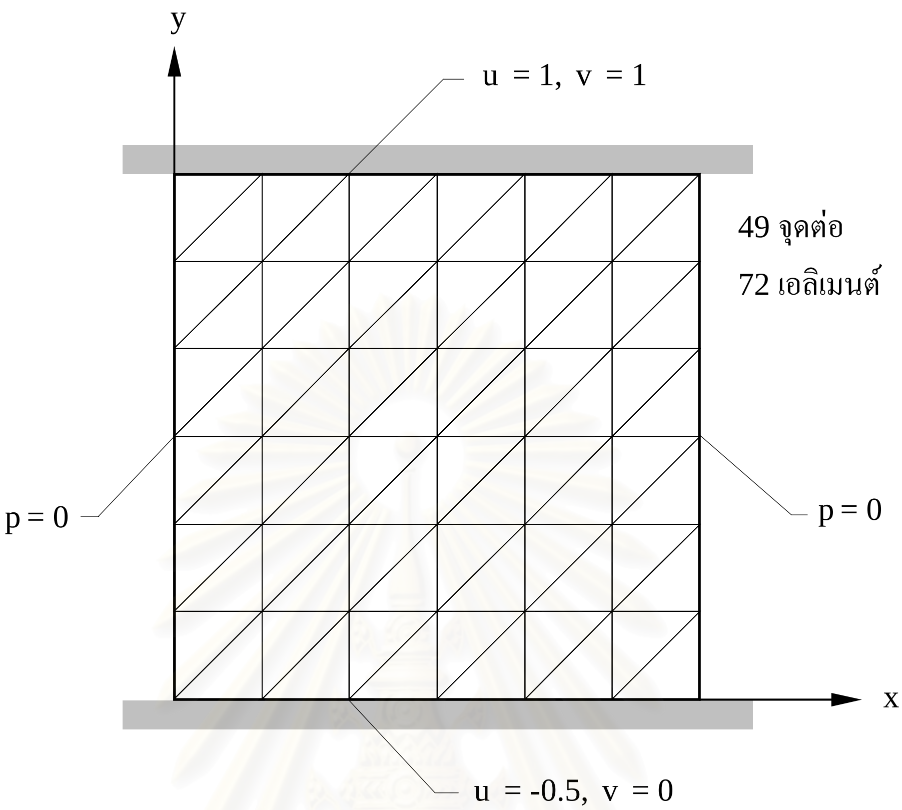
$$u(x, y=1) = 1.0 \tag{6.10ข}$$

เมื่อทำการแทนค่าสมการ (6.10ก) และ (6.10ข) ลงในสมการ (6.9) จะสามารถหาค่าคงที่ในสมการดังกล่าวได้คือ A = 1.5 และ B = -0.5 ดังนั้นรูปแบบการกระจายความเร็วตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ คือ

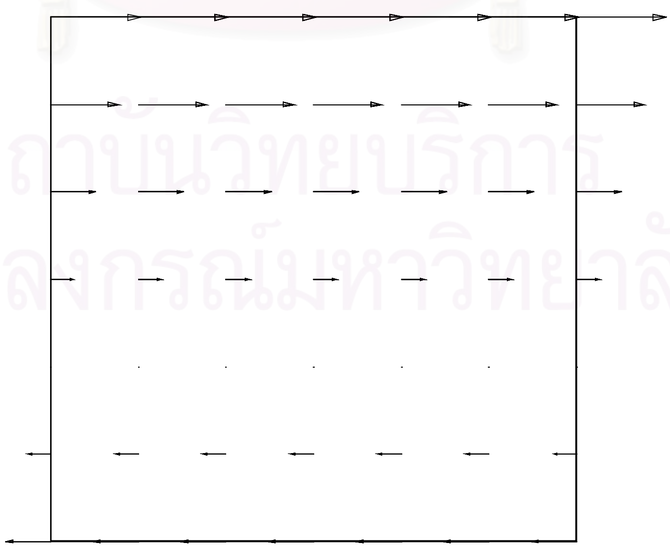
$$u(y) = 1.5\,y - 0.5 \tag{6.11}$$

ปัญหาดังกล่าวถูกนำไปวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SUPG โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 6.10 ซึ่งรูปแบบดังกล่าวประกอบไปด้วย 49 จุดต่อ และ 72 เอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบในแนวดิ่งทางด้านซ้ายและขวาของโดเมนการคำนวณ

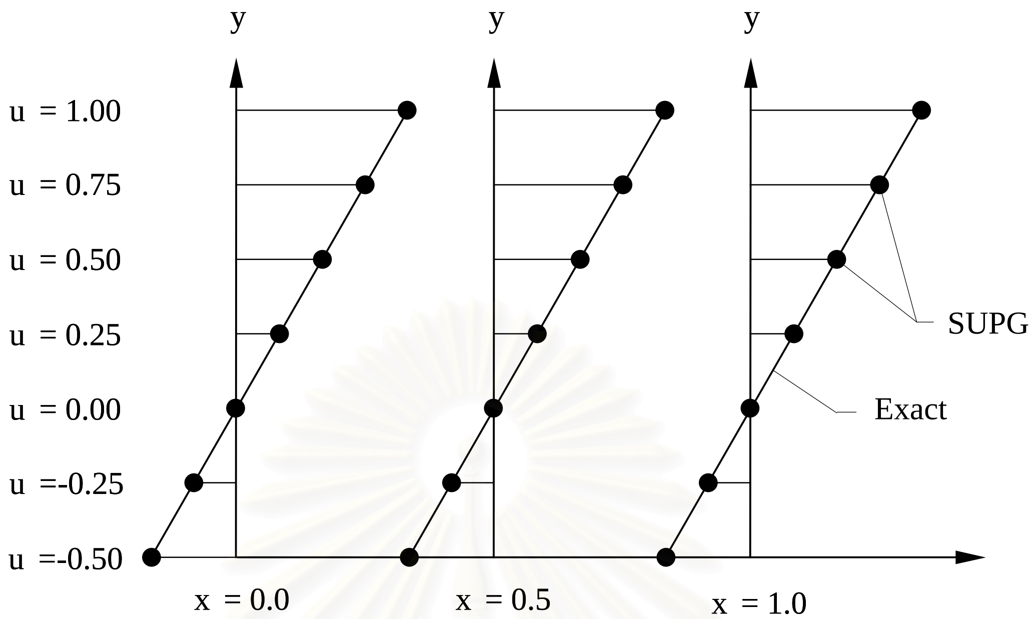
ผลลัพธ์จากการคำนวณที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม จะมีลักษณะการกระจายตัวดังแสดงในรูปที่ 6.11 และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ กัน ได้แก่ตำแหน่ง x = 0.0, 0.5 และ 1.0 ดังแสดงในรูปที่ 6.12 ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 6.10 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา
การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด



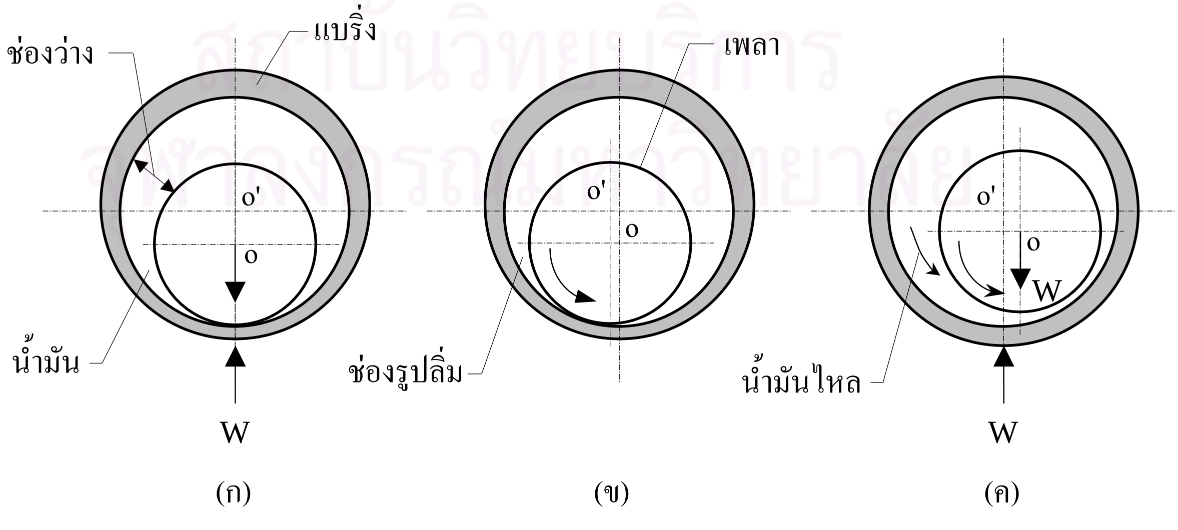
รูปที่ 6.11 เวกเตอร์ของความเร็วสำหรับปัญหาการไหล
ระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด



รูปที่ 6.12 เปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรง ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด ณ ตำแหน่งต่าง ๆ

6.2.2 ปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบริ่ง [29]

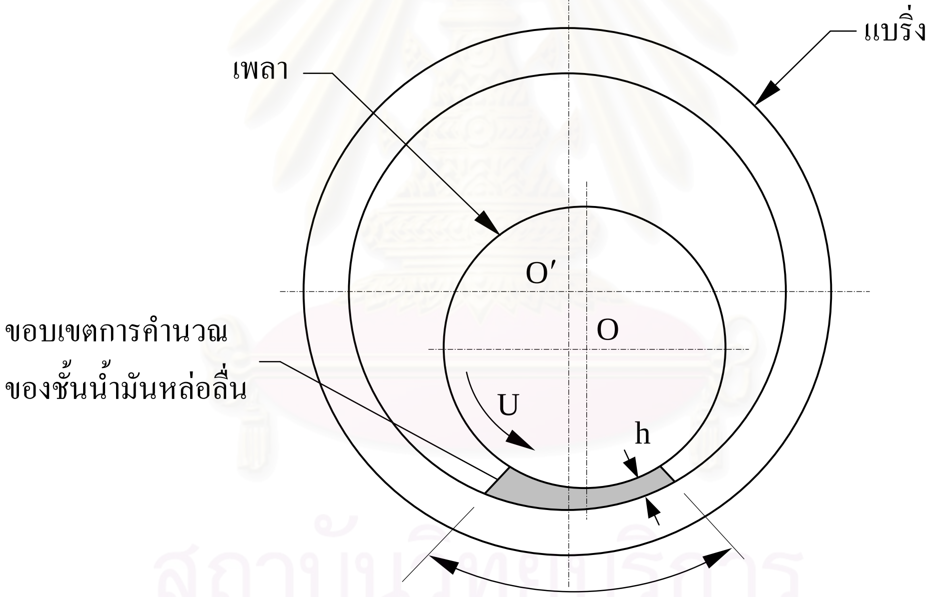
สำหรับปัญหานี้เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหลระหว่างผิววัตถุที่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน นั่นคือการหล่อลื่นของเพลา (หรือเจอร์นัล) กับแบริ่ง ซึ่งมีกลไกการหล่อลื่นดังแสดงในรูปที่ 6.13 ดังนี้



รูปที่ 6.13 กลไกการหล่อลื่นของเจอร์นัลแบริ่ง

ในรูปที่ 6.13 (ก) เป็นขณะที่เพลาอยู่นิ่ง และผิวของเพลากับแบริ่งสัมผัสกันอยู่ เมื่อเพลาเริ่มหมุนทวนเข็มนาฬิกา ก็ยังมีการสัมผัสระหว่างผิวหน้าอยู่ ดังนั้นเพลาจึงปีนขึ้นไปทางด้านซ้าย ดังแสดงในรูปที่ 6.13 (ข) ในขณะนี้เองน้ำมันสำหรับการหล่อลื่นก็จะไหลเข้าไปในช่องรูปลิ่มที่เกิดขึ้น ซึ่งจะทำให้เกิดความดันขึ้นภายในชั้นน้ำมัน เมื่อเพลามีความเร็วที่พอเหมาะ ความดันที่เกิดขึ้นก็จะมีมากพอที่จะรับแรง W และทำให้เพลาลอยตัวขึ้นและเคลื่อนที่มาอยู่ทางด้านขวา ดังแสดงในรูปที่ 6.13 (ค) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในการหล่อลื่นของเจอร์นัลแบริ่งทั่วไป

สำหรับปัญหาดังกล่าว ถ้าสมมติให้ความหนาของชั้นน้ำมันหล่อลื่น (Lubricant Film) ระหว่างเพลากับแบริ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับส่วนโค้งของแบริ่งที่สัมผัสกับน้ำมัน นั่นคือ $h \ll L$ ดังแสดงในรูปที่ 6.14 ทำให้สามารถที่จะพิจารณาปัญหานี้ด้วยลักษณะของปัญหาดังแสดงในรูปที่ 6.15 และ 6.16 แทนได้



รูปที่ 6.14 ระยะระหว่างเพลากับแบริ่งและความยาวส่วนโค้งของแบริ่งที่สัมผัสน้ำมัน

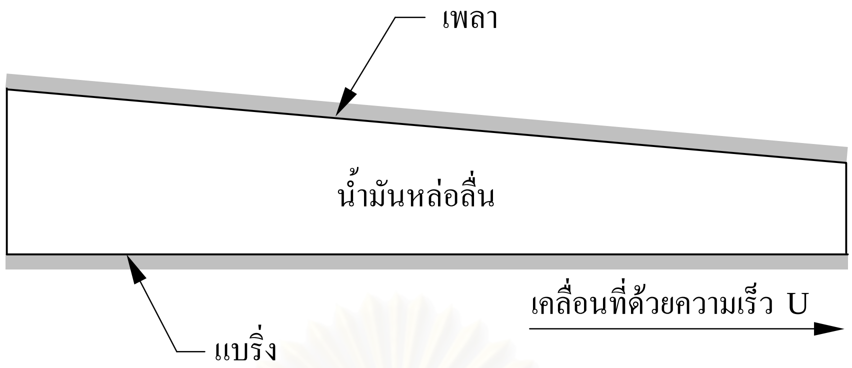
ปัญหาดังกล่าวนี้สามารถหาหาผลเฉลยแม่นตรงได้ดังนี้

$$u = \left(U_0 - \frac{1}{2\mu} h^2(x) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{h(x)}\right)\left(1 - \frac{y}{h(x)}\right) \qquad (6.12ก)$$

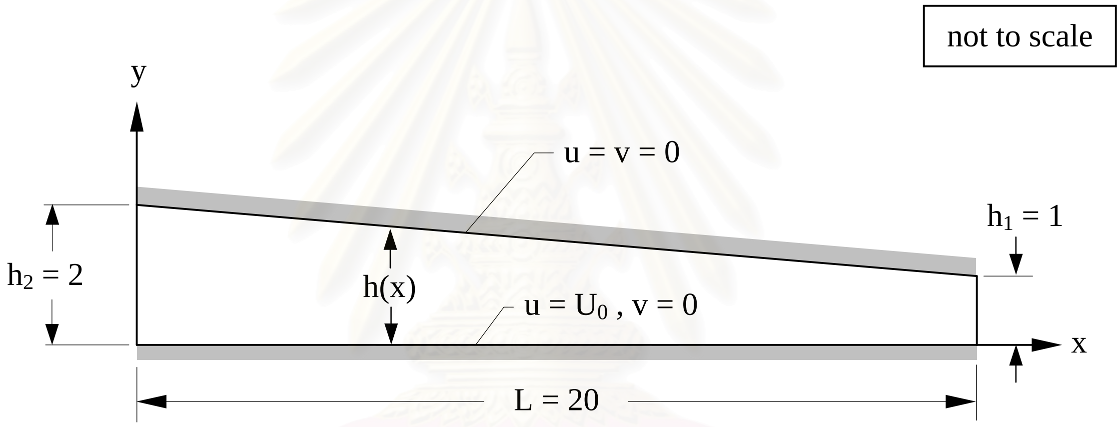
$$p = \frac{6\mu U_0 L \left(h_2 - h(x)\right)\left(h(x) - h_1\right)}{\left(h(x)\right)^2 \left(h_2^2 - h_1^2\right)} \qquad (6.12ข)$$

โดยที่

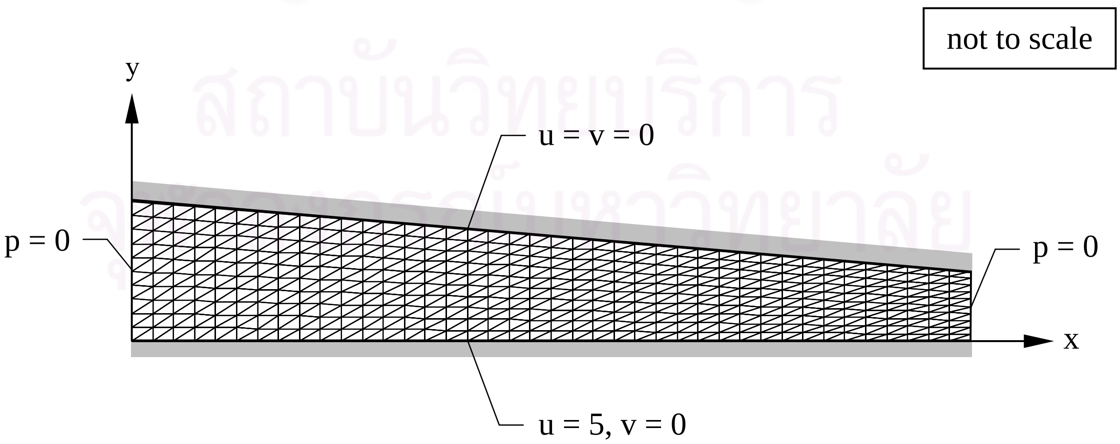
$$h(x) = h_2 + \frac{\left(h_1 - h_2\right)}{L} x \qquad (6.12ค)$$



รูปที่ 6.15 รูปแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์การหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบริ่ง

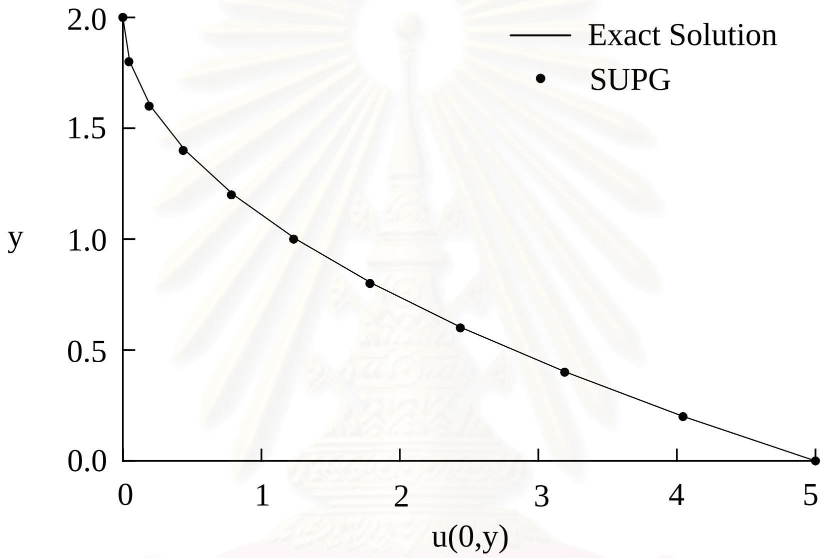


รูปที่ 6.16 รูปแบบจำลองของปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบริ่ง

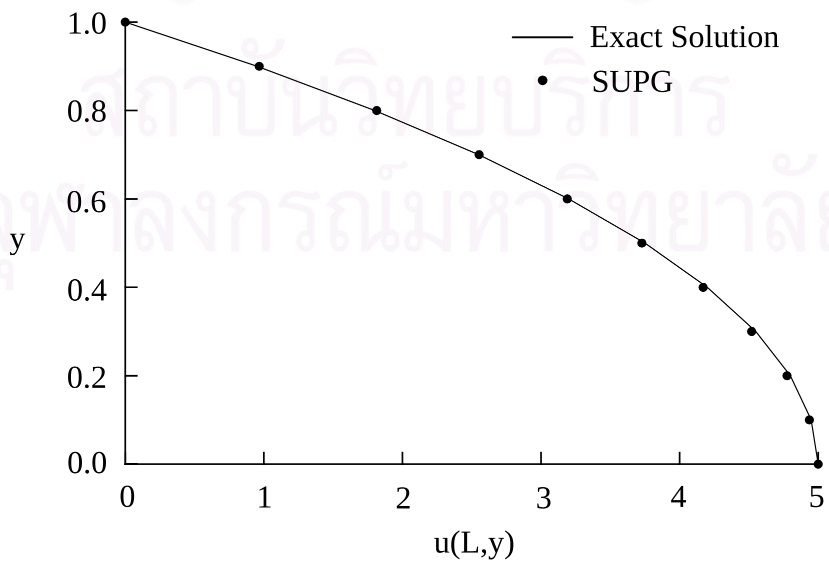


รูปที่ 6.17 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบริ่ง

ปัญหาดังกล่าวได้นำมาใช้ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม SUPG โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาดังได้แสดงในรูปที่ 6.17 ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ประกอบไปด้วย 451 จุดต่อและ 800 เอลิเมนต์ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตนั้นกำหนดให้ตลอดขอบด้านล่างของปัญหามีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว U_0 = 5 ส่วนตลอดขอบด้านบนกำหนดให้ถูกตรึงอยู่กับที่ สำหรับขอบในแนวดิ่งทางด้านซ้ายและขวานั้นกำหนดให้มีค่าความดันเท่ากับศูนย์

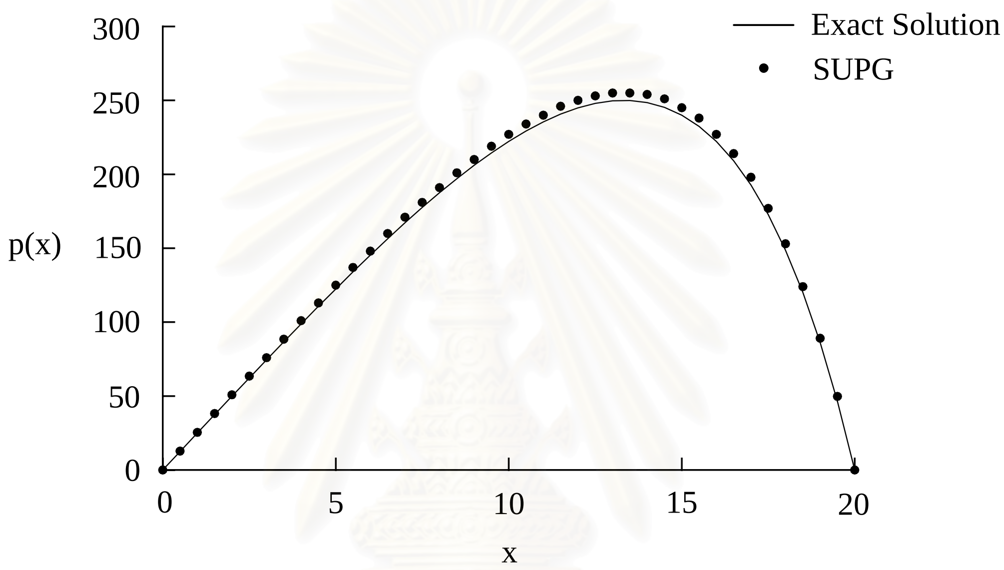


รูปที่ 6.18 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ขอบทางด้านซ้ายกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 6.19 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ทางด้านขวากับผลเฉลยแม่นตรง

ให้ความยาวของขอบเขตของปัญหา L มีค่าเท่ากับ 20 และกำหนดให้ขอบของการไหลทางด้านซ้าย (h_2) มีความสูงเท่ากับ 2 ส่วนความสูงของขอบทางด้านขวา (h_1) มีค่าเท่ากับ 1 สุดท้ายกำหนดให้ความหนาแน่นของของไหลมีค่าเท่ากับ 1 และมีค่าความหนืดเท่ากับ 10 รูปที่ 6.18 และรูปที่ 6.19 แสดงการเปรียบเทียบค่าการกระจายของความเร็วที่ตำแหน่ง x = 0 และ x = L ตามลำดับ

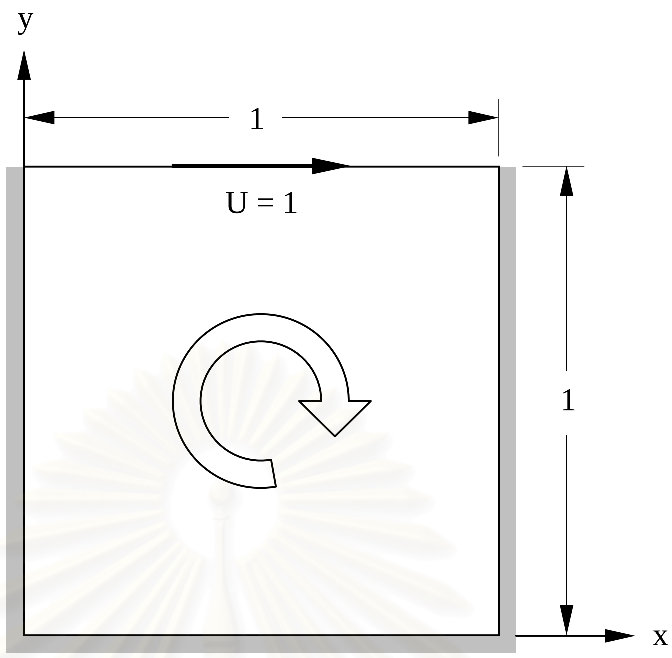


รูปที่ 6.20 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความดันเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

ผลที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับผลเฉลยแม่นตรง โดยที่ค่าความผิดพลาดของความเร็วที่ตำแหน่ง x = 0 และตำแหน่ง x = L มีค่าเท่ากับ 2.41% และ 0.52% ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าค่าที่ได้จากการคำนวณให้ผลที่มีความถูกต้อง สำหรับรูปที่ 6.20 นั้นแสดงค่าการกระจายตัวของความดันที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ เทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งมีค่าความผิดพลาดประมาณ 1.43%

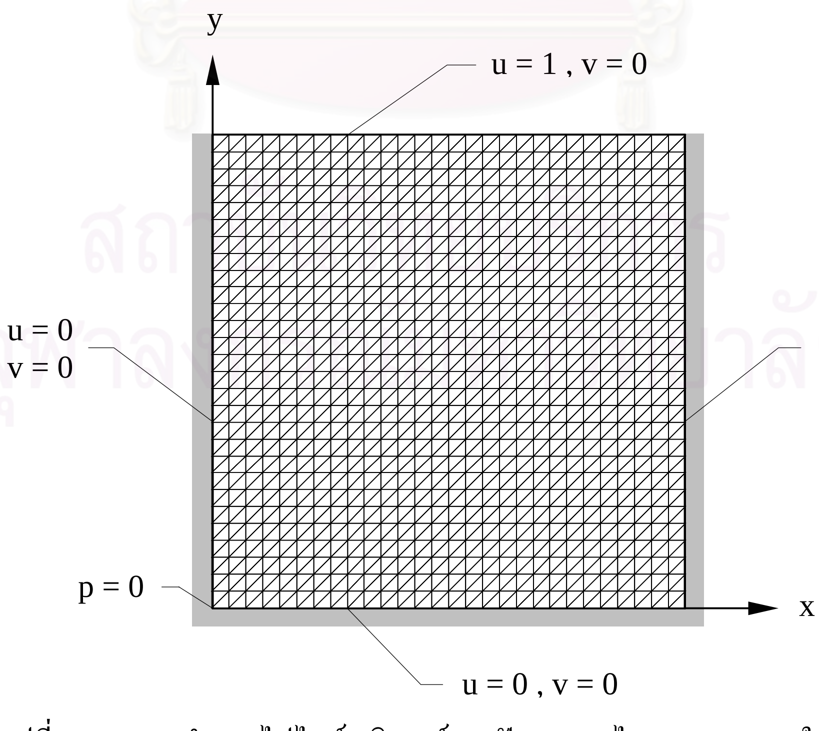
6.2.3 ปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม (Cavity Flow) [30]

ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 เป็นอีกปัญหาหนึ่งที่นำมาใช้ทดสอบความเที่ยงตรงของโปรแกรม SUPG โดยกำหนดให้ตลอดขอบด้านบนมีความเร็วในแนวแกน x เท่านั้นซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 ส่วนอีกสามด้านที่เหลือนั้นถูกกำหนดให้มีความเร็วในแนวแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นของไหลภายในช่องสี่เหลี่ยมจะเกิดการหมุนวนในทิศตามเข็มนาฬิกาดังแสดงในรูปที่ 6.21 ซึ่งลักษณะของการไหลจะขึ้นอยู่กับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์

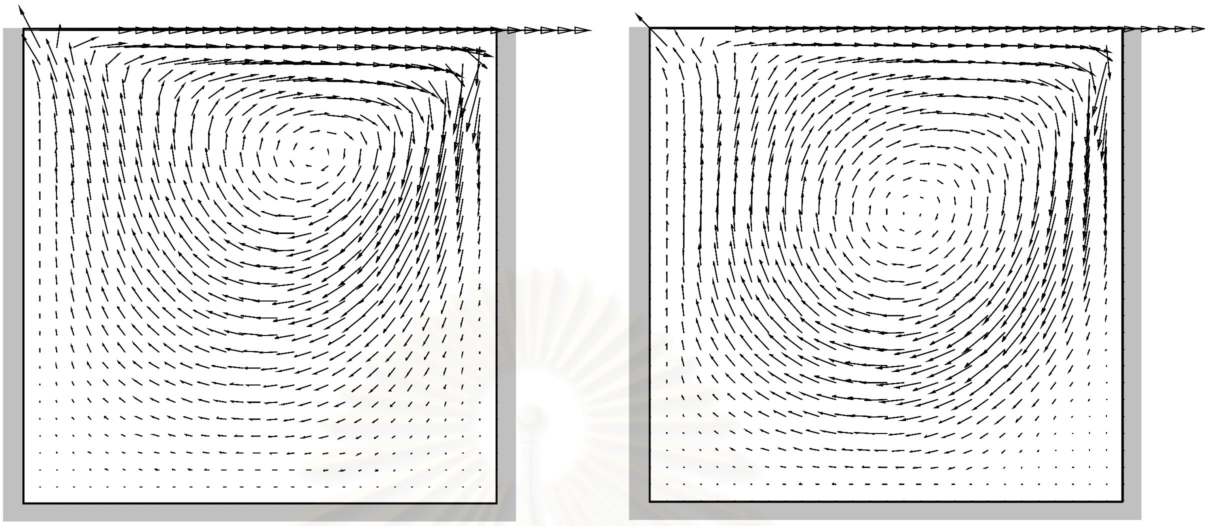


รูปที่ 6.21 ลักษณะของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบ

รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบไปด้วย 841 จุดต่อและ 1,568 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.22 จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาได้แสดงในรูปที่ 6.23 และ 6.24 โดยรูปที่ 6.23 แสดงลักษณะการกระจายตัวของความเร็วและรูปที่ 6.24 แสดงการกระจายตัวของความดัน



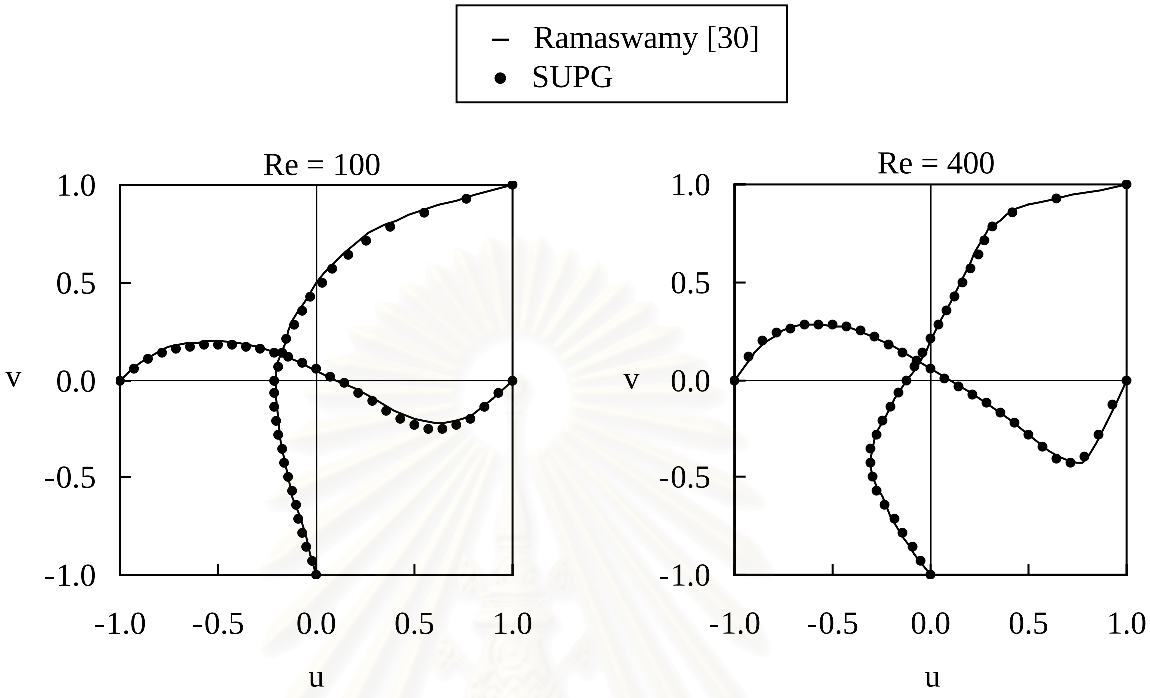
รูปที่ 6.22 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบ
และเงื่อนไขขอบเขต



รูปที่ 6.23 การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ

รูปที่ 6.24 การกระจายตัวของความดันสำหรับปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ

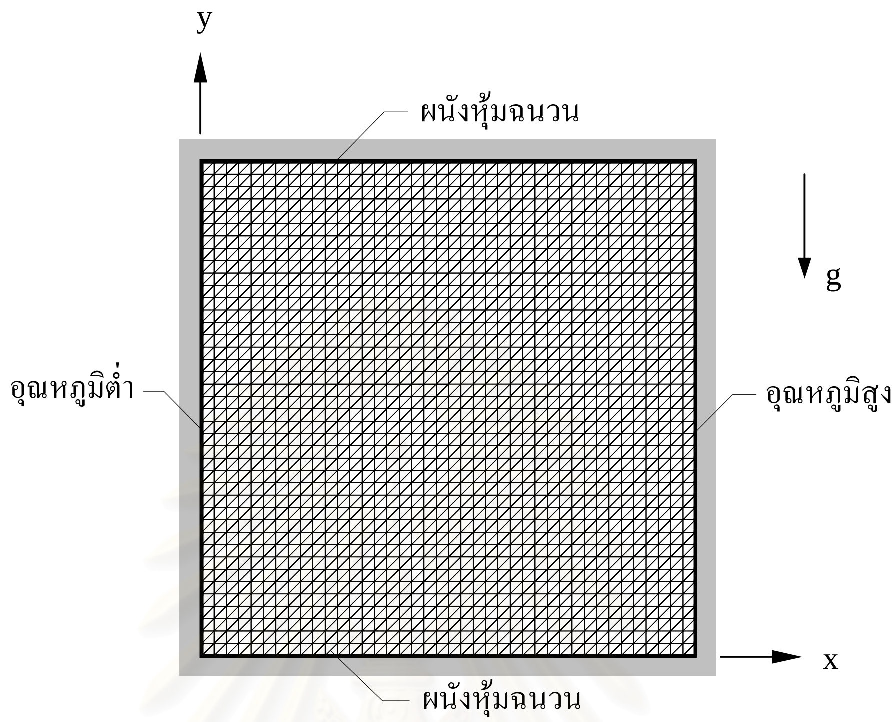
สำหรับรูปที่ 6.25 ได้แสดงลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง x เท่ากับ 0.5 กับค่าการกระจายตัวของความเร็ว v ที่ตำแหน่ง y เท่ากับ 0.5 ที่ค่าเรย์โนลด์ 100 และ 400 ตามลำดับ โดยทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Ramaswamy [30] ซึ่งจะเห็นว่าได้ผลการคำนวณที่มีความสอดคล้องกัน



รูปที่ 6.25 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ค่าเรย์โนลด์ เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ

6.2.4 การไหลเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Free Convection in Square Enclosure) [31,32,33]

ในปัญหานี้จะทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์เชิงตัวเลขจากนักวิจัยท่านอื่นกับวิธี SUPG เพื่อทดสอบความเที่ยงตรงของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น ปัญหานี้ประกอบไปด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดกว้าง 1×1 ภายในบรรจุของไหลอยู่ ผนังด้านบนและผนังด้านล่างเป็นฉนวน ส่วนผนังด้านขวามีอุณหภูมิสูงเท่ากับ 60 ในขณะที่ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิต่ำเท่ากับ 20 ซึ่งความแตกต่างของอุณหภูมิจะทำให้ของไหลเกิดการหมุนวนขึ้นในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ดังแสดงในรูปที่ 6.26 รวมทั้งแสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 1,681 จุดต่อและ 3,200 เอลิเมนต์



รูปที่ 6.26 ปัญหาการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ในขั้นตอนการวิเคราะห์สภาวะการไหลสำหรับปัญหานี้ได้กำหนดให้พรันด์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl Number; Pr) มีค่าเท่ากับ 0.7 ค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์นี้แสดงอัตราส่วนของการแพร่กระจายของโมเมนตัม (Momentum Diffusivity) กับการแพร่กระจายของพลังงานความร้อน (Thermal Diffusivity) [34] ดังนี้

$$Pr \quad = \quad \frac{\mu c}{k} \quad = \quad \frac{\nu}{\alpha} \tag{6.13}$$

โดยที่ α แทนค่าการแพร่กระจายของความร้อนของของไหล ซึ่งเป็นอัตราส่วนของการนำความร้อนกับความสามารถในการจุความร้อนดังสมการ

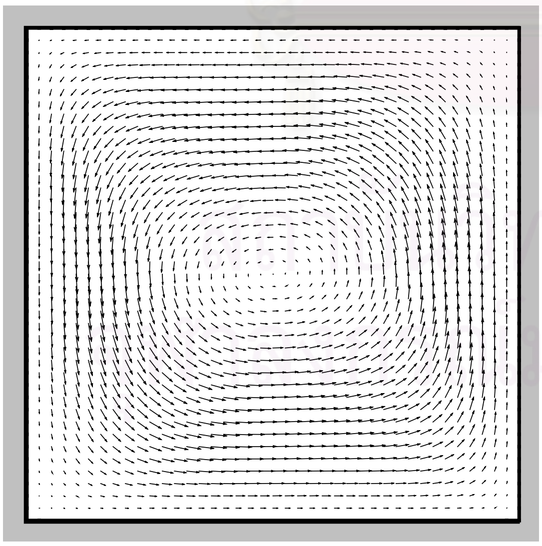
$$\alpha \quad = \quad \frac{k}{\rho c} \tag{6.14}$$

และกำหนดให้ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh Number; Ra) มีค่าเท่ากับ 10^4 และ 10^5 ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์จะแสดงอัตราส่วนของแรงลอยตัวเนื่องจากอุณหภูมิกับแรงของความหนืดในของไหลดังนี้

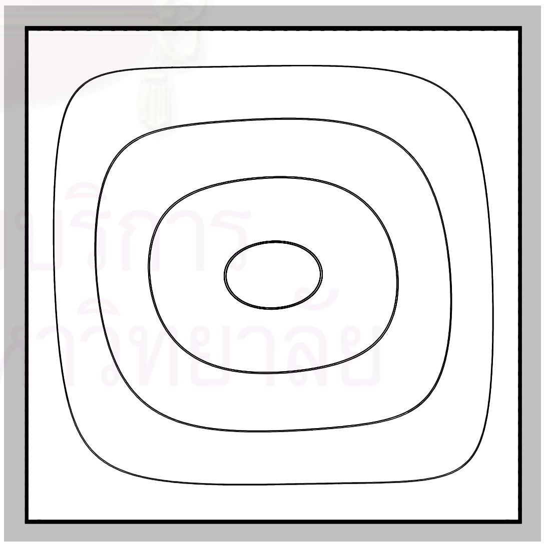
$$Ra \quad = \quad \frac{g\beta \Delta T L^3}{\nu\alpha} \tag{6.15}$$

โดยที่ L แทนค่าความยาวเฉพาะ (Characteristic Length) ของปัญหา ในงานวิจัยนี้จะใช้ค่า L เท่ากับ 1 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้แสดงในรูปที่ 6.27 (ก-ค) ซึ่งรูปที่ 6.27 (ก) แสดงขนาดทิศทางของความเร็วตามจุดต่อต่าง ๆ อธิบายถึงการไหลหมุนวนของของไหลในทิศทวนเข็มนาฬิกาอันเนื่องมาจากของไหล เกิดการลอยตัวสูงขึ้นในบริเวณผนังด้านขวาที่มีอุณหภูมิสูงและลอยตัวลงในบริเวณผนังด้านซ้ายที่มีอุณหภูมิต่ำ รูปที่ 6.27(ข) จะแสดงถึงเส้นกระแสการไหล (Streamline Contours) และรูปที่ 6.27(ค) จะแสดงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิของของเหลวขณะเกิดการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $\mathrm{Ra} = 10^4$

สำหรับปัญหานี้จะทำการวิเคราะห์สภาวะการไหลโดยการทำซ้ำอีกครั้งเมื่อเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ Ra เท่ากับ 10^5 ซึ่งหมายถึงแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิเพิ่มขึ้นเป็น 10 เท่าของกรณีที่แล้วหรือค่าความหนืดของของไหลลดลงไป 10 เท่า ซึ่งก่อให้เกิดผลลัพธ์ของสภาวะการไหลดังแสดงในรูปที่ 6.28 ซึ่งลักษณะการไหลจะเกิดการหมุนวนเพิ่มขึ้น 2 วงในทิศทวนเข็มนาฬิกาดังแสดงในรูปที่ 6.28 (ก) และเส้นกระแสการไหลแสดงในรูปที่ 6.28 (ข) จากผลลัพธ์ที่ได้ค่าเส้นชั้นของอุณหภูมิ (Temperature Contours) จะมีลักษณะบางและแคบลงดังแสดงในรูปที่ 6.28 (ค)



(ก) เวกเตอร์ความเร็ว

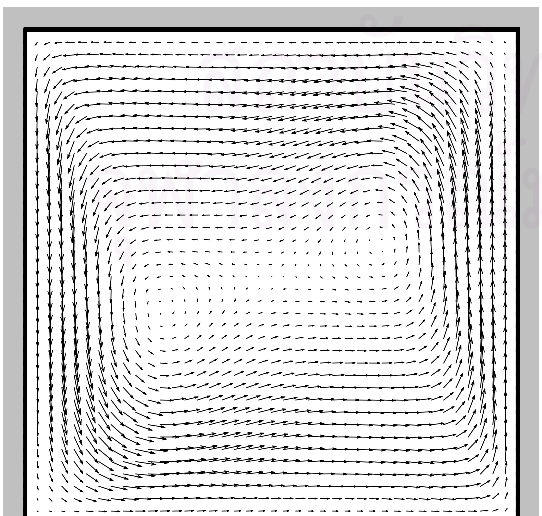


(ข) เส้นกระแสการไหล

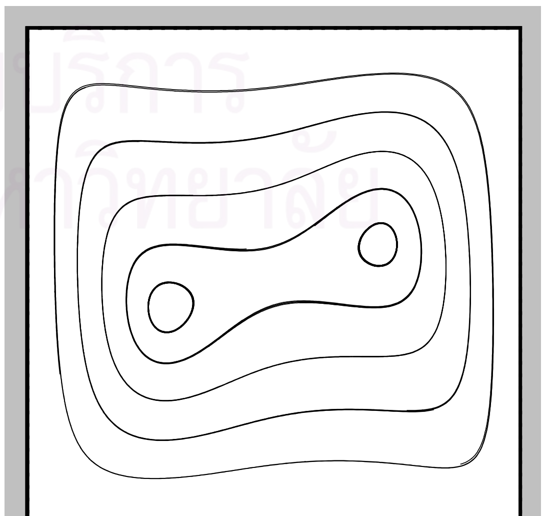
(ค) แสดงเส้นชั้นของอุณหภูมิ

รูปที่ 6.27 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^4$

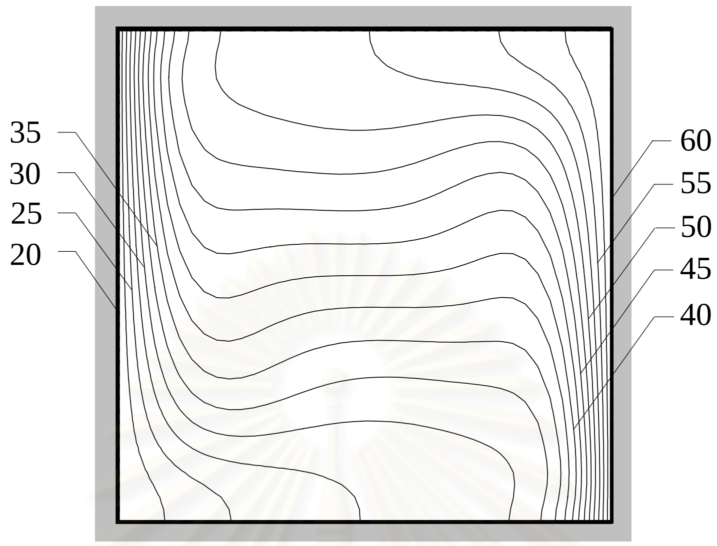
ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในกรณีของค่า Ra เท่ากับ 10^4 และ 10^5 ดังแสดงในรูปที่ 6.27 และ 6.28 ตามลำดับ โดยทำการตรวจสอบความถูกต้องโดยเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จาก [31, 32] ดังแสดงในรูปที่ 6.29 ซึ่งรูปที่ 6.29(ก) แสดงการเปรียบเทียบความเร็ว v ตลอดแนวแกน x ที่ระดับกึ่งกลางความสูงของช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส



(ก) เวกเตอร์ความเร็ว



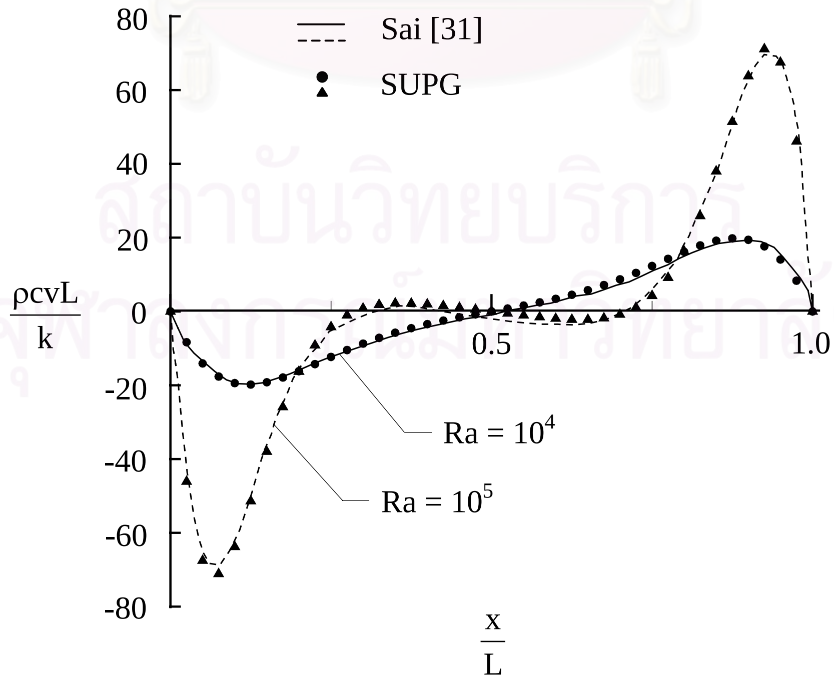
(ข) เส้นกระแสการไหล



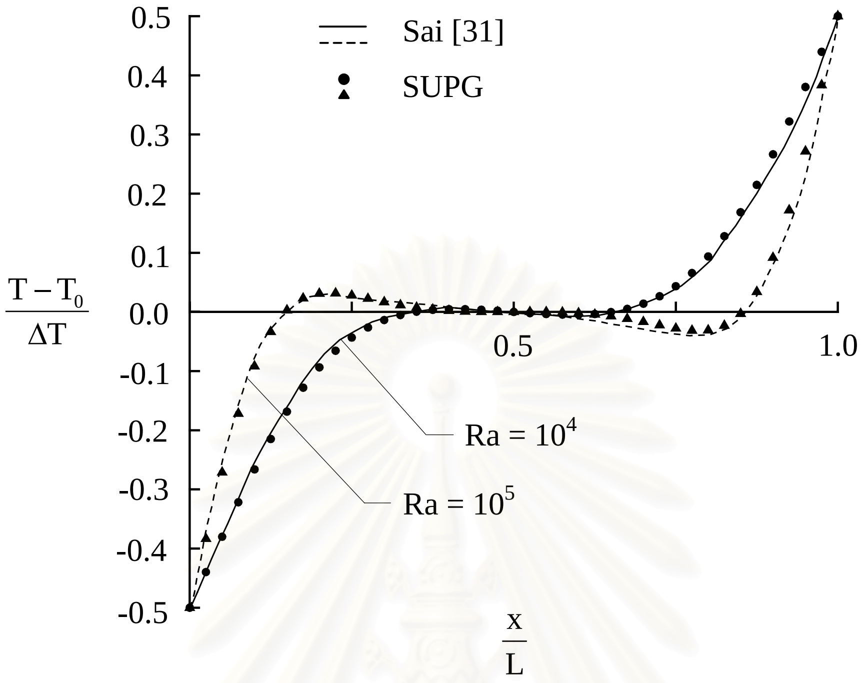
(ค) แสดงเส้นชั้นของอุณหภูมิ

รูปที่ 6.28 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^5$

ในขณะที่รูป 6.29(ข) แสดงการเปรียบเทียบของอุณหภูมิ T ตลอดแนวเดียวกัน รูปนี้แสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากวิธี SUPG ซึ่งผลที่ได้ให้ผลลัพธ์ที่น่าพอใจ



(ก) ความเร็วไร้มิติ



(ข) อุณหภูมิไร้มิติ

รูปที่ 6.29 การเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของความเร็วและอุณหภูมิไร้มิติ ตลอดแนวแกน x ที่ระดับกึ่งกลางความสูงของช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จากตารางที่ 6.1 แสดงการเปรียบเทียบค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ยที่ผนังด้านร้อนระหว่างผลลัพธ์ของวิธี SUPG กับงานวิจัยอื่น ๆ ที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ [35, 31] ซึ่งผลที่ได้ให้ค่าเป็นที่น่าพอใจอย่างมาก

ตารางที่ 6.1 การเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผนังร้อนซึ่งได้เปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ

Ra	ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผนังร้อน (เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับ [35])		
	Benchmark [35]	Finite element [31]	SUPG
10^4	2.238	2.289 (2.28 %)	2.240 (0.09 %)
10^5	4.509	4.688 (4.00 %)	4.512 (0.07 %)

บทที่ 7

โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

ในบทนี้จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาตรวจสอบความถูกต้อง กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยที่มีการนำความร้อนและการพาความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลควบคู่กัน ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณจะได้ทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ผลจากการคำนวณหรือผลการทดลองกับผู้วิจัยที่ได้ทำมาก่อน โดยจะแบ่งปัญหาในการวิเคราะห์ออกเป็นสองส่วน ในส่วนแรกเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ใช้ในการทดสอบมีทั้งการพาความร้อนแบบบังคับและการพาความร้อนแบบอิสระ ซึ่งประกอบด้วยกัน 3 ปัญหา ดังนี้

1) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตระหว่างแผ่นคู่ขนาน
2) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน
3) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน

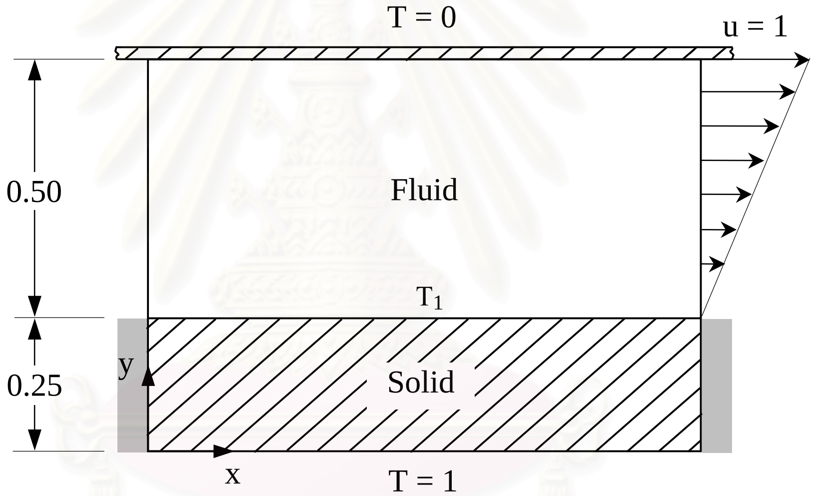
สำหรับส่วนที่สองจะเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างที่ซับซ้อนขึ้น โดยทำการตรวจสอบผลกระทบต่าง ๆ ที่มีผลต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต และสามารถนำไปดัดแปลงใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้โดยจะทำการวิเคราะห์กับ 2 ปัญหาด้วยกัน ดังนี้

1) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อน
2) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยม โดยศึกษาผลกระทบต่อครีบระบายความร้อน

7.1 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

7.1.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตระหว่างแผ่นคู่ขนาน (Conjugate Couette Flow Problem in Parallel Plate Channel)

สำหรับปัญหานี้เป็นปัญหาสำหรับการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น โดยจะนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง [36] ซึ่งลักษณะของปัญหานี้ได้แสดงในรูปที่ 7.1 โดยที่แผ่นบนเป็นแผ่นเย็นโดยมีความเร็วในแนวแกน x เท่ากับ 1 ในขณะที่ผนังด้านล่างเป็นผนังร้อนซึ่งไม่มีการเคลื่อนที่ บริเวณของแข็งด้านล้างมีความหนาเท่ากับ 0.25 และกำหนดให้ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานเท่ากับ 0.5



รูปที่ 7.1 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตระหว่างแผ่นคู่ขนาน

รูปแบบการกระจายของความเร็ว สำหรับปัญหานี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยกำหนดให้ลักษณะของการไหลไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน x และให้ค่าความดันมีค่าคงที่ซึ่งจะทำให้สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x สามารถลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{7.1}$$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ (7.1) สองครั้ง จะได้

$$u(y) = A\,y + B \tag{7.2}$$

จากนั้นจึงทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

$$u(x, y=0.25) \quad = \quad 0.0 \qquad (7.3ก)$$

$$u(x, y=0.75) \quad = \quad 1.0 \qquad (7.3ข)$$

เมื่อทำการแทนค่าสมการ (7.3ก) และ (7.3ข) ลงในสมการ (7.2) จะสามารถหาค่าคงที่ในสมการดังกล่าวได้คือ A = 2 และ B = -0.5 ดังนั้นรูปแบบการกระจายความเร็วแม่นตรงตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ คือ

$$u(y) \quad = \quad 2y - 0.5 \qquad (7.4)$$

รูปแบบการกระจายของอุณหภูมิ โดยกำหนดให้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน x ซึ่งจะทำให้สมการอนุรักษ์พลังงานสามารถลดรูปเป็น

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad = \quad 0 \qquad (7.5)$$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ (7.5) สองครั้ง จะได้

$$T(y) \quad = \quad Cy + D \qquad (7.6)$$

จากนั้นจึงทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

$$T(x, y=0.25) \quad = \quad T_1 \qquad (7.7ก)$$

$$T(x, y=0.75) \quad = \quad 0.0 \qquad (7.7ข)$$

โดยที่ T_1 คืออุณหภูมิตรงบริเวณจุดต่อระหว่างของแข็งและของไหล
ปริมาณความร้อนจากของแข็งที่ถ่ายเทสู่ของไหลย่อมมีค่าเท่ากันจะได้

$$-k_s\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s \quad = \quad -k_f\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_f \qquad (7.8)$$

เนื่องจากการถ่ายเทความร้อนเป็นแบบเชิงเส้นจะได้

$$K\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_s = \left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_f \tag{7.9}$$

ทำการแก้สมการจะได้

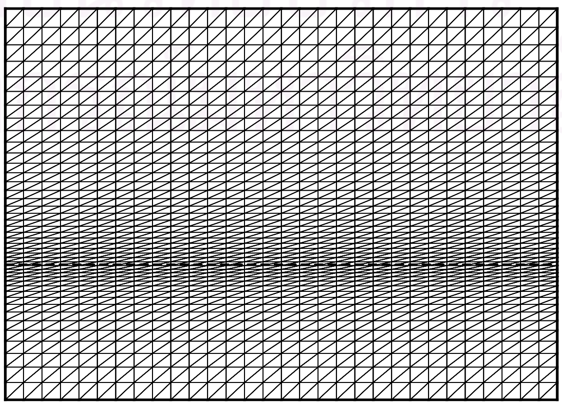
$$T_1 = \frac{2K}{2K+1} \tag{7.10}$$

โดยที่ K คืออัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล $K = \frac{k_s}{k_f}$ เมื่อทำการแทนค่าสมการ (7.7ก) และ (7.7ข) ลงในสมการ (7.6) จะสามารถหาค่าคงที่ในสมการดังกล่าวได้คือ $C = -2T_1$ และ $D = 1.5T_1$ ดังนั้นรูปแบบการกระจายของอุณหภูมิตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ คือ

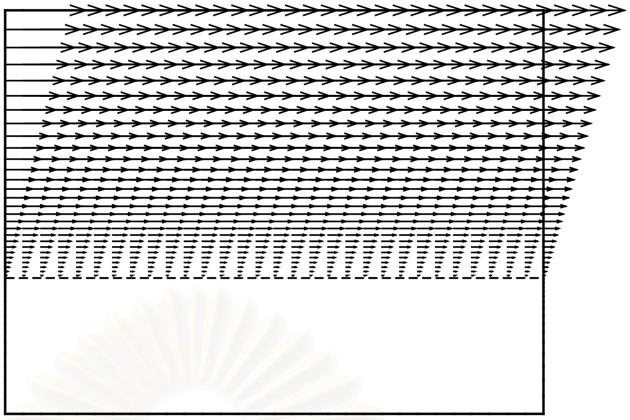
$$T(y) = T_1(1.5 - 2y) \tag{7.11}$$

ปัญหาดังกล่าวถูกนำไปวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SUPG โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 7.2 ซึ่งประกอบไปด้วย 1,364 จุดต่อและ 2,580 เอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบในแนวดิ่งทางด้านซ้ายและขวาของโดเมนการคำนวณ

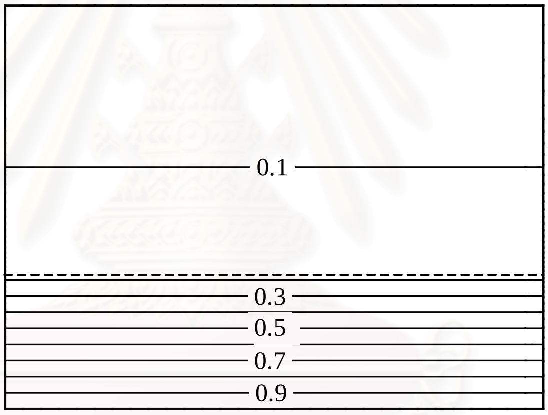
ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม SUPG จะมีลักษณะการกระจายตัวของเวกเตอร์ความเร็วดังแสดงในรูปที่ 7.3 และการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ค่า K เท่ากับ 0.1, 1 และ 10 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 7.4



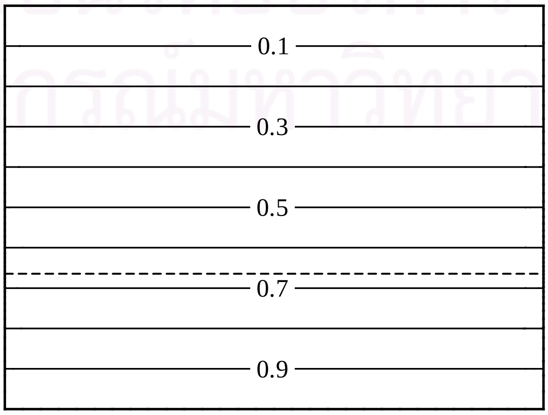
รูปที่ 7.2 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตระหว่างแผ่นคู่ขนาน



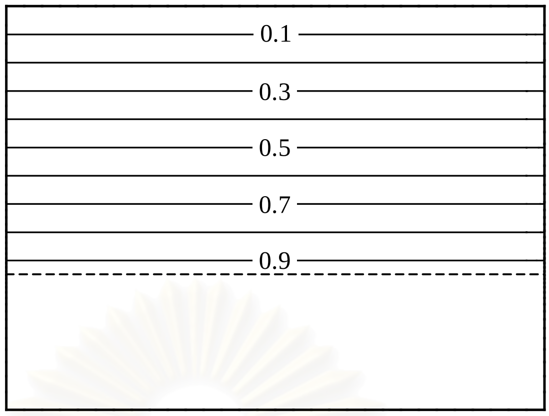
รูปที่ 7.3 เวกเตอร์ของความเร็วสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ระหว่างแผ่นคู่ขนาน



(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ Kเท่ากับ 0.1



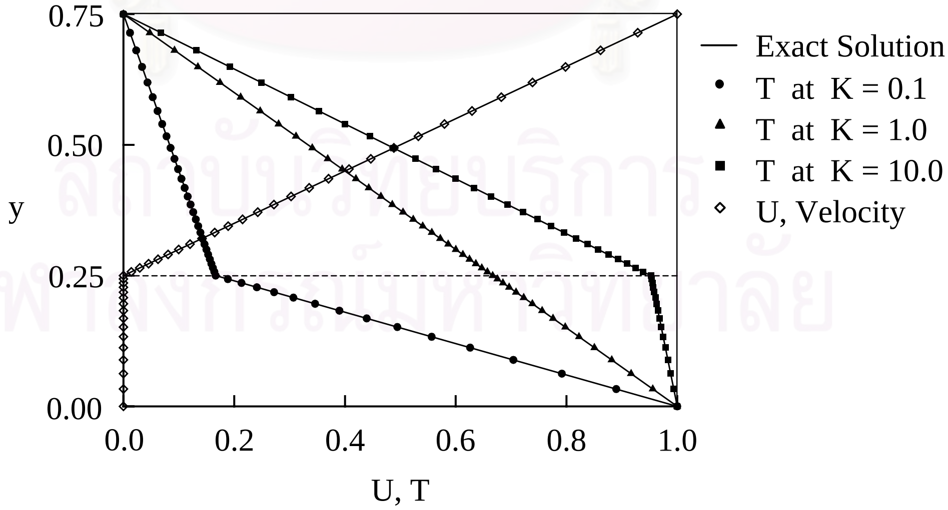
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 1



(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 10

รูปที่ 7.4 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ระหว่างแผ่นคู่ขนาน ที่ค่า K ต่าง ๆ

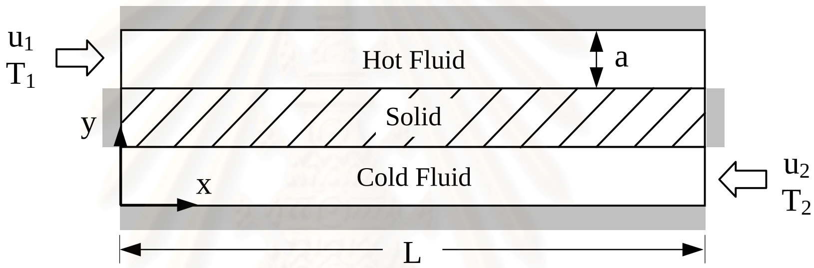
จากรูปจะเห็นได้ว่าเมื่ออัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนมีค่าเพิ่มขึ้นการถ่ายเทความร้อนจะดียิ่งขึ้น ในรูปที่ 7.5 เป็นการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงที่ค่า K เท่ากับ 0.1, 1 และ 10 โดยผลลัพธ์ที่ได้มีค่าความผิดพลาดของความเร็วและค่าของอุณหภูมิมีค่าเท่ากับ 0.01% และ 0.04% ตามลำดับ ซึ่งให้ผลเป็นที่น่าพอใจ



รูปที่ 7.5 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วและอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงที่ค่า K ต่าง ๆ

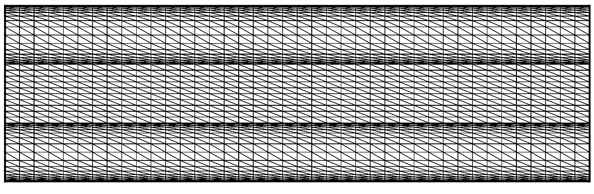
7.1.2 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน (Conjugate Counter Flow Heat Exchanger)

สำหรับปัญหานี้เป็นปัญหาสำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น โดยจะนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของ Chen and Han [18] โดยมีลักษณะของปัญหาเป็นอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกันและมีแผ่นเหล็กเป็นตัวกลางในการแลกเปลี่ยนความร้อน โดยมีปลายทั้งสองเป็นฉนวน สำหรับช่องทางไหลทั้งสองมีทิศทางการไหลสวนทางกัน มีขอบด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวน ดังแสดงในรูปที่ 7.6

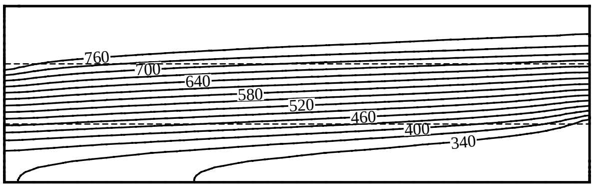


รูปที่ 7.6 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน

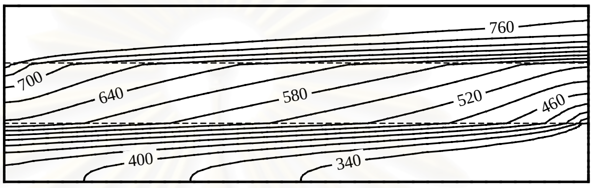
ช่องทางการไหลทั้งสองมีขนาดเท่ากับความหนาของแผ่นเหล็ก a เท่ากับ 0.1 และ L มีค่าเท่ากับ 1.0 โดยที่มีช่องทางการไหลข้างบนเป็นของไหลที่มีอุณหภูมิสูงไหลเข้ามาด้วยความเร็ว u_1 = 0.2 อุณหภูมิ T_1 = 800 และค่าเรย์โนลด์ Re = 133 ส่วนช่องทางการไหลข้างล่างเป็นของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำไหลเข้ามาด้วยความเร็ว u_2= 0.1 อุณหภูมิ T_2= 300 และค่าเรย์โนลด์ Re = 66 ปัญหานี้จะคิดค่า พรันด์เทิลนัมเบอร์ Pr = 0.75 จากนั้นทำการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 1,763 จุดต่อ และ 3,360 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.7



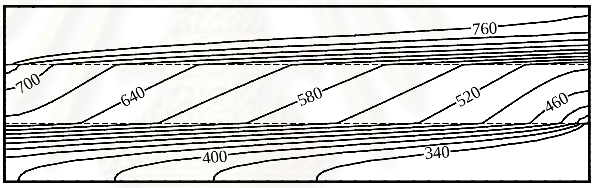
รูปที่ 7.7 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน



(ก) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 1



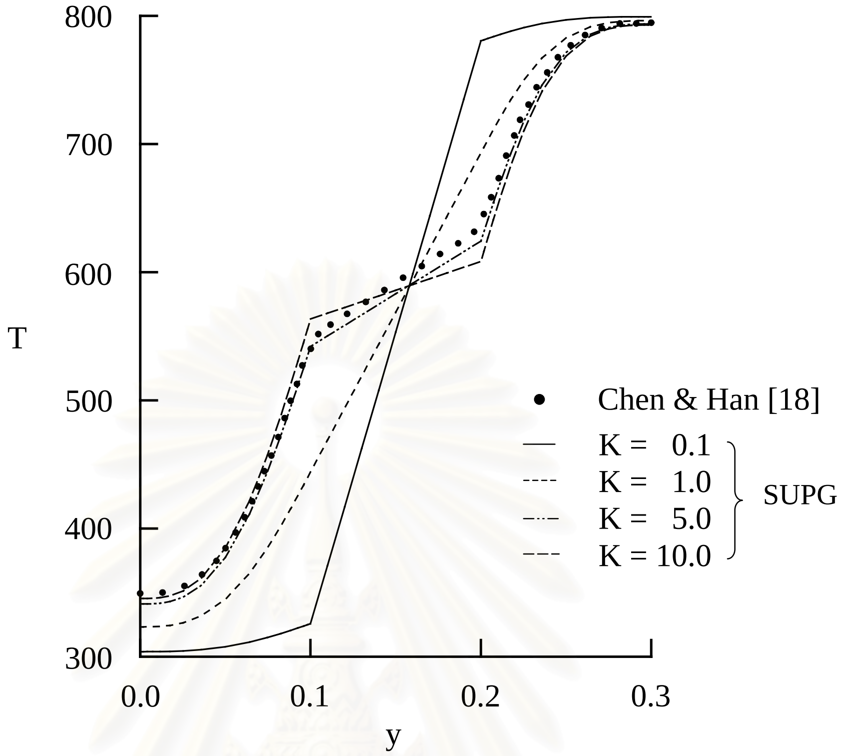
(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 5



(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 10

รูปที่ 7.8 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกันที่ค่า K ต่าง ๆ

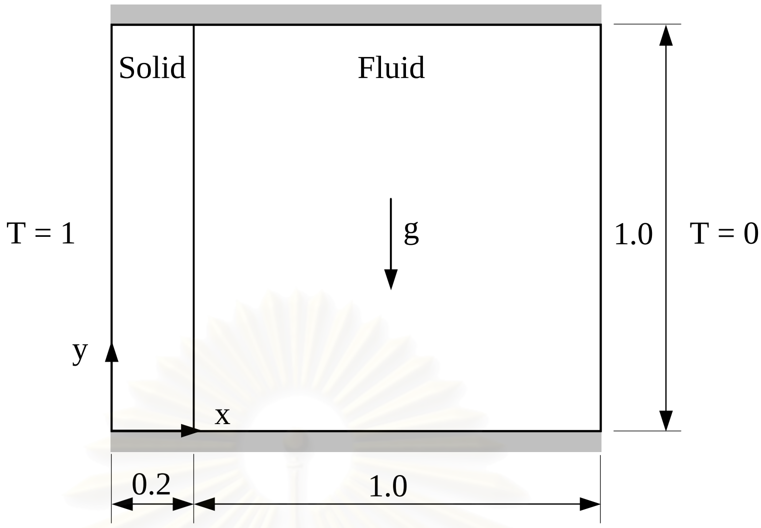
รูปที่ 7.8 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิ ในปัญหานี้จะพบว่าการถ่ายเทความร้อนภายในบริเวณของแข็งเกิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่มีลักษณะเป็นเส้นตรง เนื่องจากมีการถ่ายเทความร้อนแบบการแพร่กระจาย ส่วนในบริเวณของไหลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมีลักษณะเป็นเส้นโค้งเนื่องจากมีการถ่ายเทความร้อนแบบแพร่กระจายและแบบพาความร้อน จากผลการคำนวณเมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน K เพิ่มขึ้นการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างของเหลวจะดีขึ้นโดยสามารถอธิบายได้ในรูปที่ 7.9 ซึ่งแสดงการกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่งกึ่งกลางของปัญหา ($x = 0.5$) ตลอดแนวแกน y ที่ค่า K เท่ากับ 0.1, 1, 5 และ 10 โดยทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Chen and Han [18] ที่ค่า K = 5 พบว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกัน



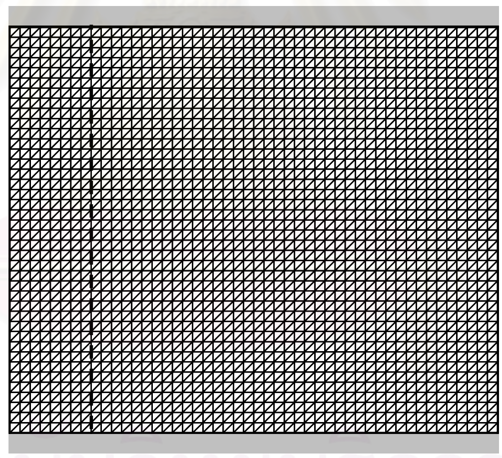
รูปที่ 7.9 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์ของ Chen and Han ที่ตำแหน่ง x = 0.5 ตลอดแกน y ของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกันที่ค่า K ต่าง ๆ

7.1.3 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน (Conjugate Natural Convection in a Square Cavity with a Conducting Wall)

ในปัญหานี้จะทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์เชิงตัวเลขของ Hriberšek & Kuhn [37] เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม SUPG ลักษณะของปัญหาประกอบไปด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดกว้าง 1×1 ซึ่งภายในบรรจุของไหลอยู่ และมีผนังนำความร้อนหนา 0.2 ผนังด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวน ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิสูงเท่ากับ 1 ในขณะที่ผนังด้านขวามีอุณหภูมิต่ำเท่ากับ 0 ซึ่งความแตกต่างของอุณหภูมิจะทำให้ของไหลเกิดการหมุนวนขึ้นในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส ปัญหานี้จะคิดแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ดังแสดงในรูปที่ 7.10 จากนั้นทำการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบไปด้วย 2,009 จุดต่อและ 3,840 เอลิเมนต์แสดงในรูปที่ 7.11



รูปที่ 7.10 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยที่มีผนังนำความร้อน



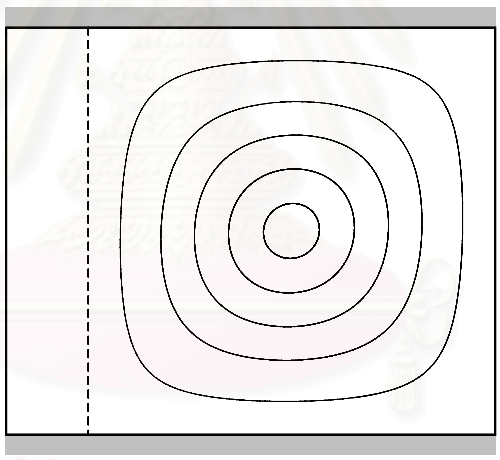
รูปที่ 7.11 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ ในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน

ในขั้นตอนการวิเคราะห์สภาวะการไหลสำหรับปัญหานี้ได้กำหนดให้พรันด์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl Number; Pr) มีค่าเท่ากับ 0.71 และกำหนดให้ค่ากราชอร์ฟนัมเบอร์ (Grashof Number; Gr) มีค่าเท่ากับ 10^3 และ 10^5 โดยค่ากราชอร์ฟนัมเบอร์คืออัตราส่วนของแรงลอยตัวเนื่องจากอุณหภูมิกับแรงของความหนืดในของไหล ดังนี้

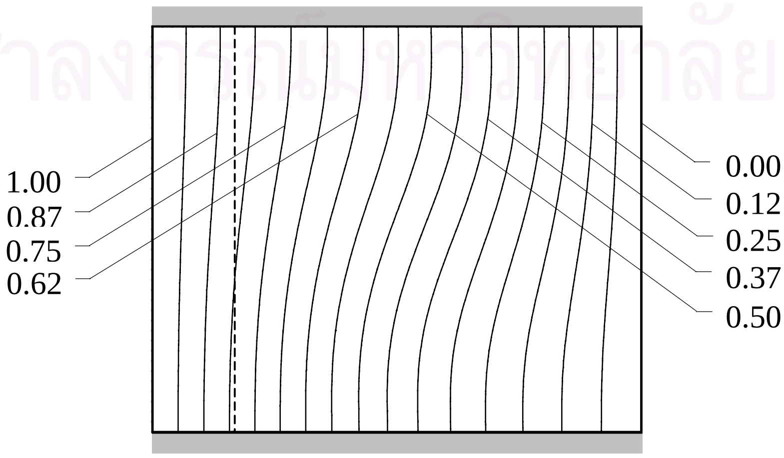
$$Gr = \frac{g\beta\rho^2 \Delta T L^3}{\mu^2} \tag{7.14}$$

โดยที่ L แทนความยาวเฉพาะ (Characteristic Length) โดยมีค่าเท่ากับ 1 ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณสำหรับปัญหาดังกล่าวแสดงในรูปที่ 7.12 (ก-ค) ในรูปที่ 7.12 (ก) แสดงเส้นกระแสการไหล ซึ่งอธิบายถึงการไหลหมุนวนของของไหลในทิศตามเข็มนาฬิกาอันเนื่องมาจากของไหลเกิดการลอยตัวขึ้นในบริเวณผนังด้านซ้ายที่มีอุณหภูมิสูงและลอยตัวลงในบริเวณผนังด้านขวาที่มีอุณหภูมิต่ำ รูปที่ 7.12 (ข-ค) จะแสดงถึงเส้นชั้นของอุณหภูมิ (Temperature Contours) ที่ค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล K เท่ากับ 1 และ 10 ตามลำดับ ที่ค่า $Gr = 10^3$

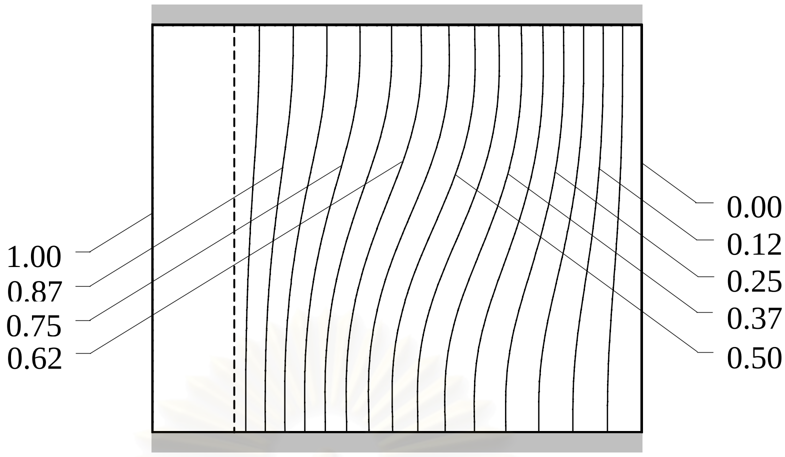
จากนั้นทำการวิเคราะห์สภาวะการไหลสำหรับปัญหานี้โดยการทำซ้ำอีกครั้งในกรณีเมื่อค่ากราชอร์ฟนัมเบอร์ Gr มีค่าสูงขึ้นเป็น 10^5 ซึ่งหมายถึงแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่าของกรณีที่แล้วหรือค่าความหนืดของของไหลลดลงไป 100 เท่า ซึ่งก่อให้เกิดผลลัพธ์ของสภาวะการไหลดังแสดงในรูปที่ 7.13



(ก) เส้นกระแสการไหล

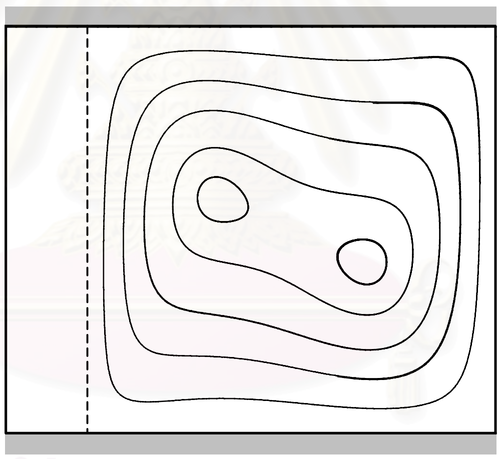


(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 1

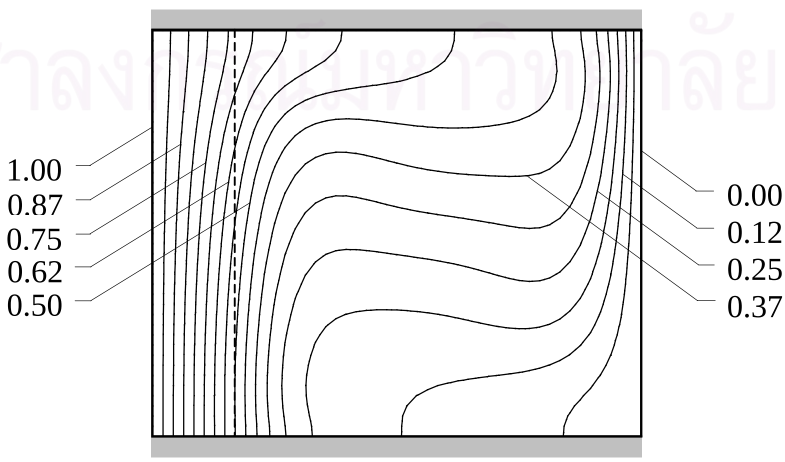


(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 10

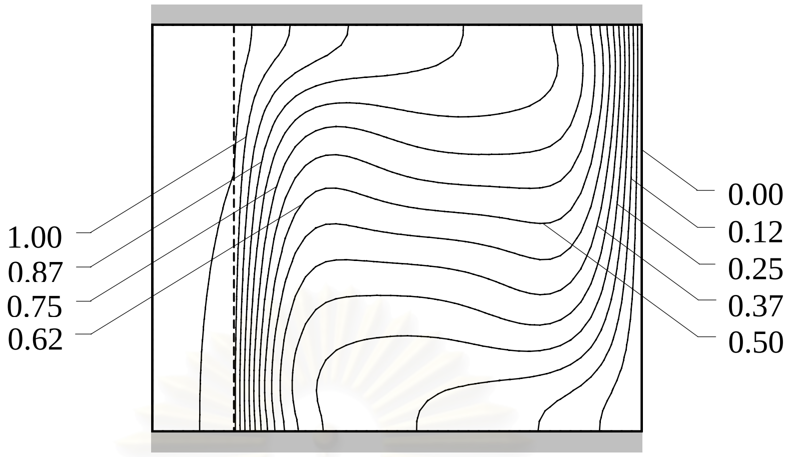
รูปที่ 7.12 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อมีผนังนำความร้อนเมื่อค่า $Gr = 10^3$



(ก) เส้นกระแสการไหล



(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 1

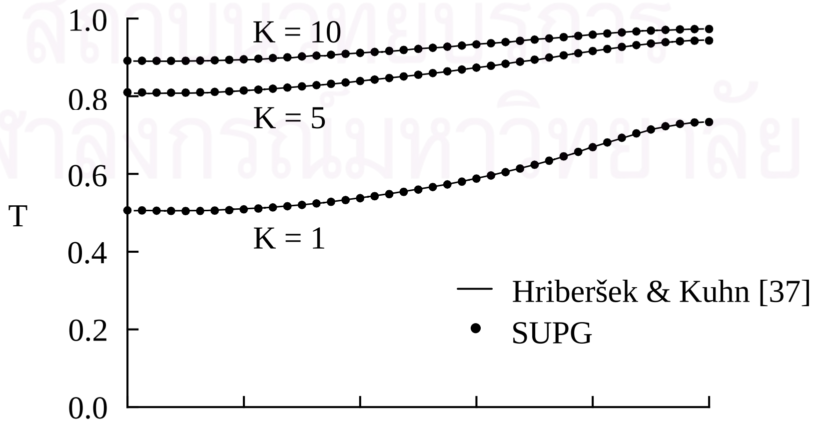


(ค) เส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 10

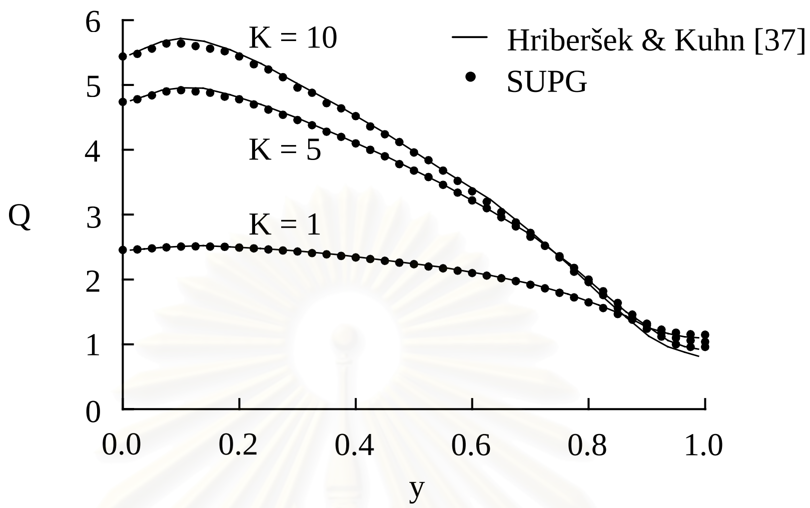
รูปที่ 7.13 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส
เมื่อมีผนังนำความร้อนเมื่อค่า $Gr = 10^5$

ในรูปที่ 7.13 (ก) จะพบว่ามีการไหลหมุนวนในทิศตามเข็มนาฬิกาเพิ่มขึ้นเป็น 2 วง และค่าเส้นชั้นของอุณหภูมิที่ K เท่ากับ 1 และ 10 นั้นบางและแคบลง ดังแสดงในรูป 7.13 (ข-ค)

จากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องโดยเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้กับ Hriberšek & Kuhn [37] โดยจะทำการเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาณความร้อน (Heat Fluxes) ที่บริเวณผิวลอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล, x = 0.2, ตลอดแนวแกน y ที่ค่า K = 1, 5 และ 10 ดังแสดงในรูปที่ 7.14(ก-ข) ตามลำดับ



(ก) ค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อ



(ข) ค่าปริมาณความร้อนที่ผิวรอยต่อ

รูปที่ 7.14 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาณความร้อนที่ผิวรอยต่อโดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Hriberšek & Kuhn ที่ค่า K = 1, 5 และ 10

จากตารางที่ 7.1 แสดงการเปรียบเทียบค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวลอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล, $\overline{Nu}_{x=0.2}$ โดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Hriberšek & Kuhn [37] ผลที่ได้ให้ค่าเป็นที่น่าพอใจอย่างมาก

ตารางที่ 7.1 การเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวลอยต่อ

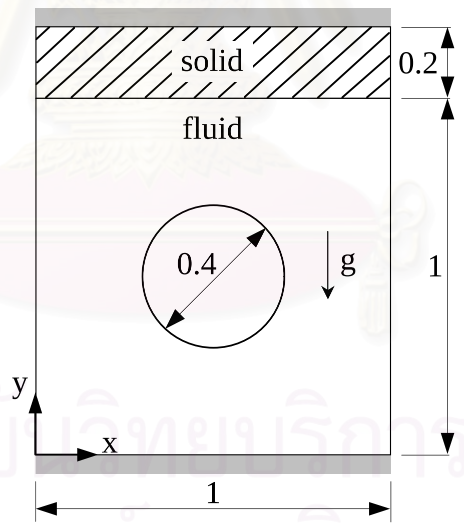
Gr	Conductivity ratio, K	1	5	10
10^3	Hriberšek	0.87	1.02	1.04
10^3	SUPG	0.87 (0.0%)	1.02 (0.0%)	1.04 (0.0%)
10^5	Hriberšek	2.08	3.42	3.72
10^5	SUPG	2.07 (0.48%)	3.39 (0.87%)	3.67 (1.34%)

หมายเหตุ : ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวลอยต่อ (ค่าความคลาดเคลื่อน % โดยเปรียบเทียบกับ Hriberšek & Kuhn [37])

7.2 การวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

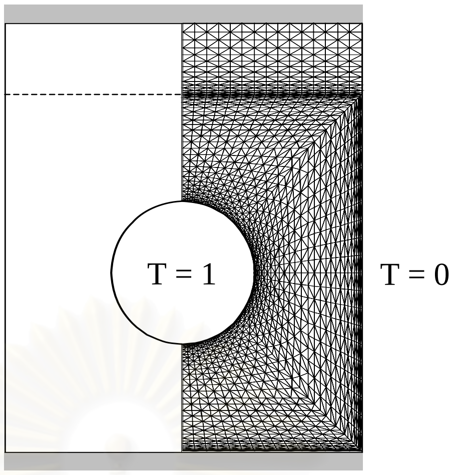
7.2.1 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อน (Conjugate Natural Convection and Conduction from Heated Cylinder in Square Cavity)

ตัวอย่างแรกที่ถูกวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SUPG คือปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อน ทั้งนี้เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม โดยทำการเทียบผลลัพธ์เชิงตัวเลขของ Dong & Li [20] เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ปัญหานี้ประกอบไปด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดกว้าง 1×1 โดยมีผิวท่อทรงกระบอกอุณหภูมิสูงเท่ากับ 1 อยู่ด้านใน ในขณะที่ผนังด้านซ้ายและขวาเป็นผนังอุณหภูมิต่ำเท่ากับ 0 และมีผนังกันความร้อนหนา 0.2 อยู่ด้านบน ส่วนผนังด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวน โดยที่โดเมนของปัญหาแสดงในรูปที่ 7.15



รูปที่ 7.15 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อน

เนื่องจากลักษณะการถ่ายเทความร้อนของปัญหานี้มีความสมมาตร ดังนั้นแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จึงสร้างขึ้นเฉพาะทางด้านขวาของรูปซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,821 จุดต่อและ 3,450 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.16



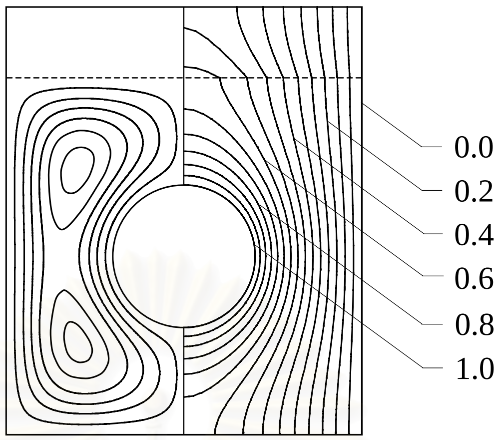
รูปที่ 7.16 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อน

รูปที่ 7.17 – 7.19 แสดงผลลัพธ์สภาวะการไหลที่คำนวณได้เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3, 10^4 และ 10^5 ตามลำดับ โดยค่าความยาวเฉพาะ L ที่ใช้คือค่าความกว้างมีค่าเท่ากับ 1 และค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์ของกรณีนี้มีค่าเท่ากับ 0.71 เมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าเท่ากับ 0.1, 1 และ 10 ตามลำดับ

จากรูปที่ 7.17 เมื่อพิจารณาค่าเส้นชั้นของความเร็วจะเกิดการหมุนวนสองบริเวณในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเมื่อค่า Ra = 10^3 จากนั้นเมื่อทำการเพิ่มค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล K กับเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เป็น 10^4 จะเห็นได้ว่าค่าเส้นชั้นความเร็วจะไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก แต่ค่าความเร็วในการหมุนวนจะมีค่าเพิ่มขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7.18 จากนั้นทำการเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เป็น 10^5 จะเห็นได้ว่าค่าเส้นชั้นความเร็วจะเกิดการเปลี่ยนแปลงโดยจะเกิดการหมุนวนขนาดใหญ่เพียงตำแหน่งเดียว ส่วนบริเวณข้างล่างจะเกิดการหมุนวนตามแนวยาว ดังแสดงในรูปที่ 7.19

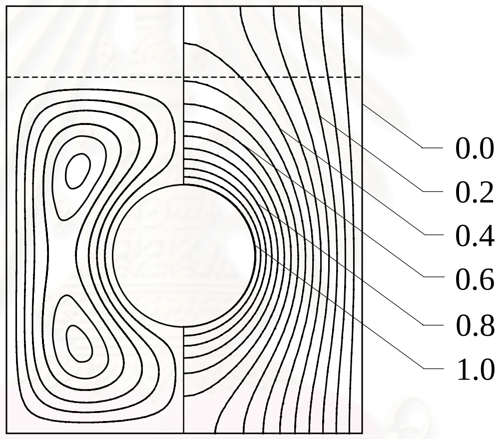
เมื่อพิจารณาเส้นชั้นของอุณหภูมิจากรูปที่ 7.17 จะพบว่าเมื่อทำการเพิ่มค่า K ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของเส้นชั้นอุณหภูมิจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจน แต่เมื่อเพิ่มค่า Ra เป็น 10^4 และพิจารณาค่า K คงที่ จะพบว่าบริเวณของแข็งด้านบนจะมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีขึ้น แต่เมื่อเพิ่มค่า Ra เป็น 10^5 จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของเส้นชั้นอุณหภูมิจะมีความซับซ้อนยิ่งขึ้นและสามารถถ่ายเทความร้อนออกไปสู่บริเวณของแข็งได้เป็นอย่างดี ดังแสดงในรูปที่ 7.19 เนื่องจากค่าความเร็วกับอุณหภูมิมีความสัมพันธ์กัน จะพบว่าบริเวณที่เกิดการหมุนวนบริเวณนั้นจะมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่าบริเวณที่ไม่เกิดการหมุนวน

K = 0.1



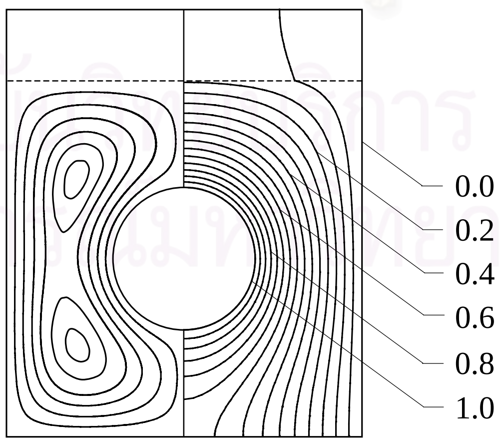
(ก)

K = 1



(ข)

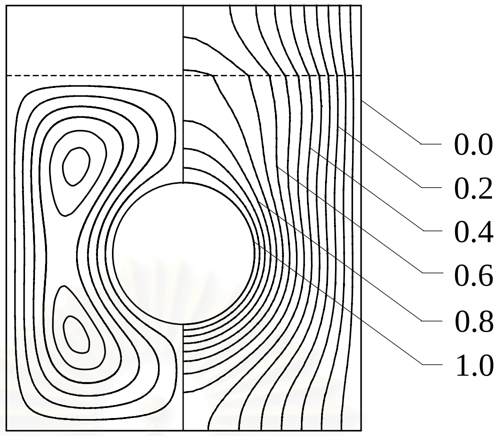
K = 10



(ค)

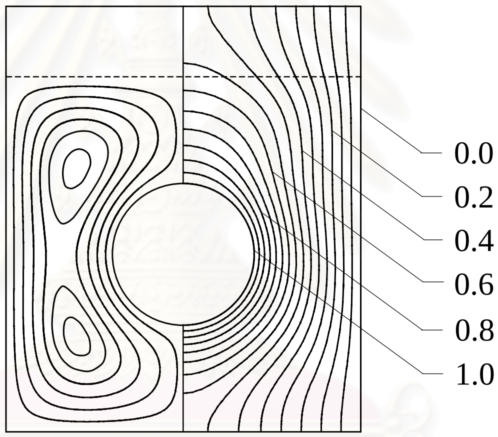
รูปที่ 7.17 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 0.1, 1 และ 10 เมื่อค่า $Ra = 10^3$

K = 0.1



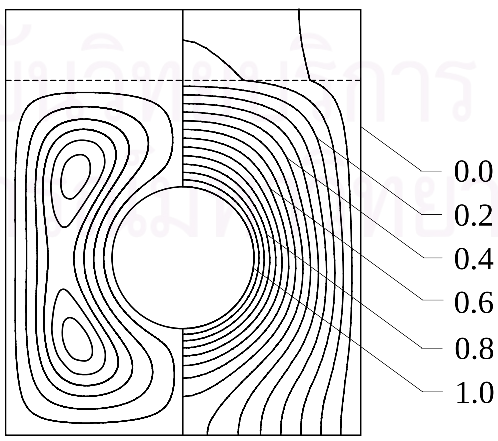
(ก)

K = 1



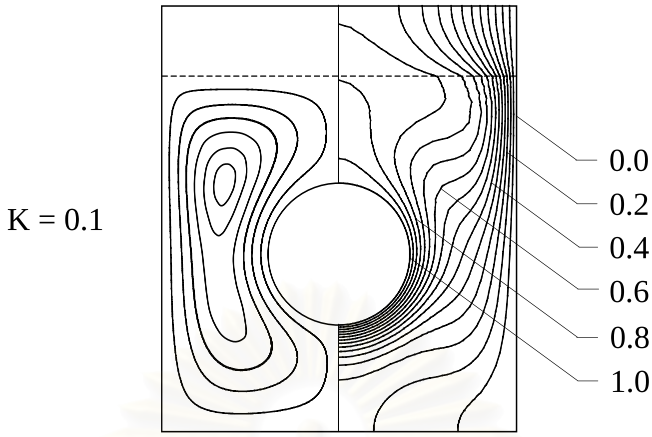
(ข)

K = 10

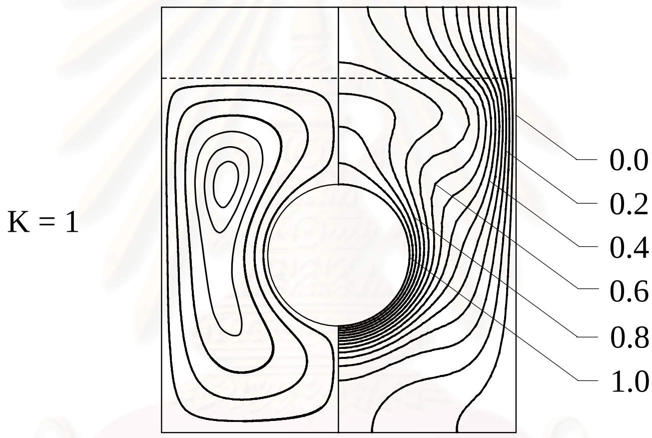


(ค)

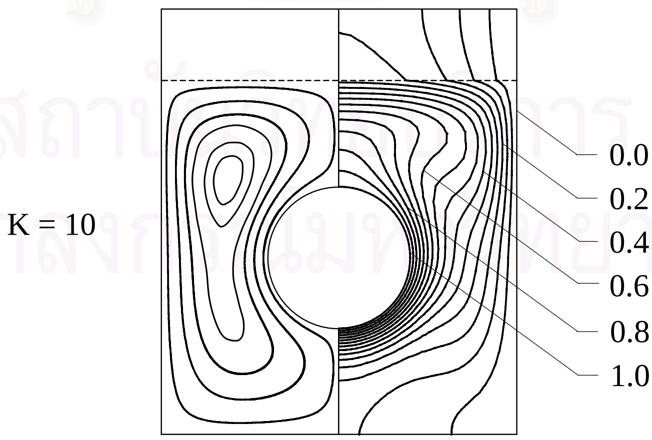
รูปที่ 7.18 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 0.1, 1 และ 10 เมื่อค่า $Ra = 10^4$



(ก)



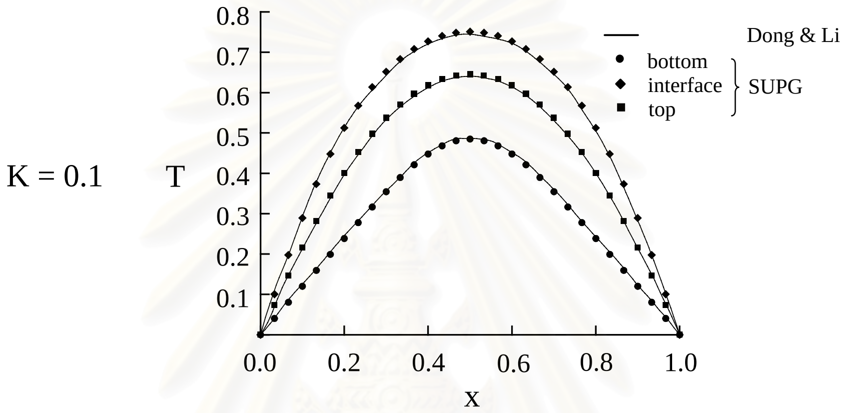
(ข)



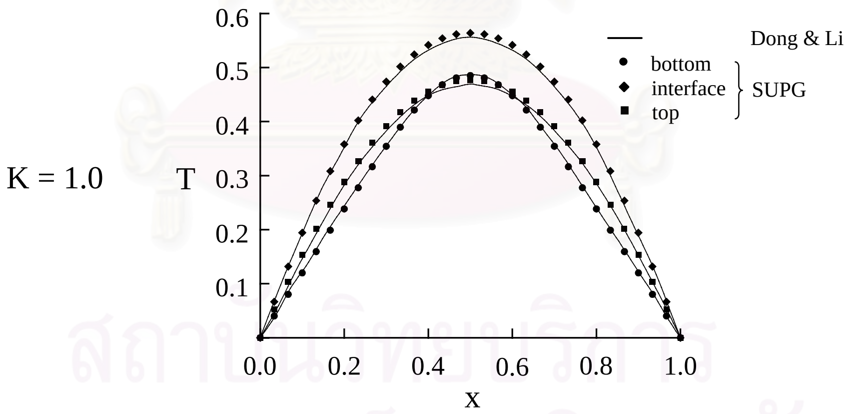
(ค)

รูปที่ 7.19 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 0.1, 1 และ 10 เมื่อค่า $Ra = 10^5$

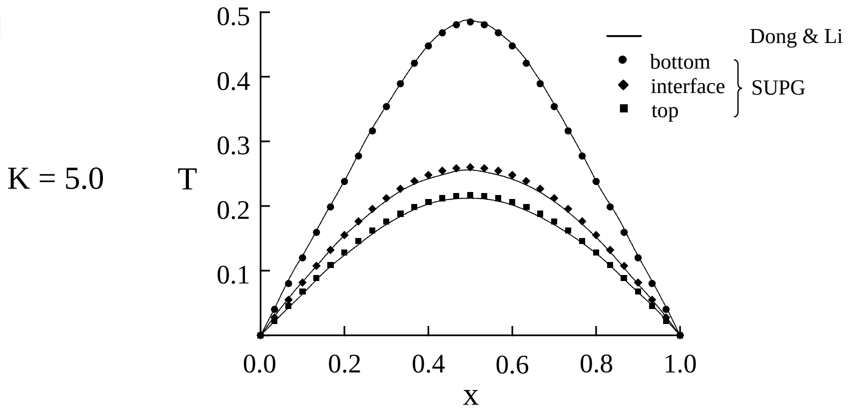
จากนั้นทำการเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่ 3 ตำแหน่งด้วยกันคือผิวด้านล้างสุด (y = 0), ที่บริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล (y = 1) และที่บริเวณผิวด้านบนสุดของของแข็ง (y = 1.2) โดยทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Dong & Li [20] ที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^4 และที่ค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลมีค่าเท่ากับ 0.1, 1, 5 และ 10 ตามลำดับ โดยแสดงในรูปที่ 7.20 จะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้ผลเป็นที่น่าพอใจ



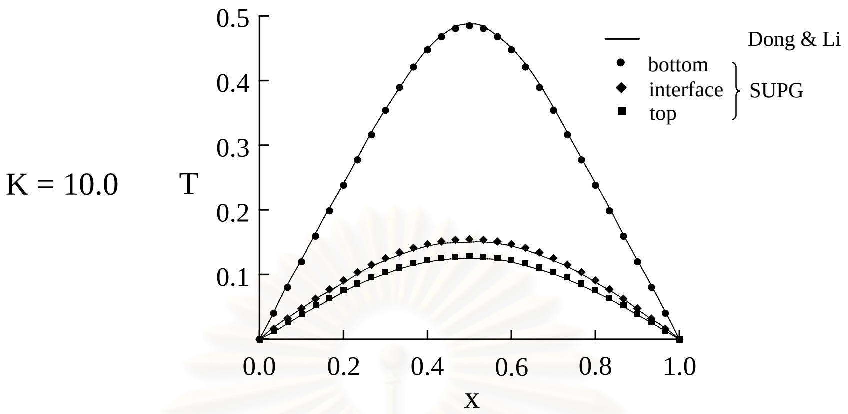
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 7.20 การเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ โดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Dong & Li ที่ค่า K = 0.1, 1, 5 และ 10 เมื่อค่า $Ra = 10^4$

จากรูปที่ 7.20 จะเห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหลมีค่าเพิ่มขึ้นค่าอุณหภูมิบริเวณผิวด้านล่าง, x = 0, จะไม่ค่อยมีการเปลี่ยนแปลง แต่ค่าอุณหภูมิบริเวณผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล (y = 1) และที่บริเวณผิวด้านบนสุดของของแข็ง (y = 1.2) นั้นจะมีค่าลดลง

ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนสำหรับปัญหานี้จะใช้ค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ยซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi r}\int Nu\, ds \tag{7.13}$$

เมื่อ

$$Nu = \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \times \frac{|x - x_c|}{r} + \left|\frac{\partial T}{\partial y}\right| \times \frac{|y - y_c|}{r} \tag{7.14}$$

โดยที่ค่า x_c, y_c คือพิกัดที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก และค่า r คือรัศมีของทรงกระบอก

จากตารางที่ 7.2 แสดงการเปรียบเทียบค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ย, $\overline{Nu}$ ที่บริเวณผิวของทรงกระบอกโดยทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Dong & Li [20] ที่ค่า K = 0.1, 1, 5 และ 10 ที่ค่า $Ra = 10^4$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าที่ได้สอดคล้องกันเป็นอย่างดี

ตารางที่ 7.2 การเปรียบเทียบค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวทรงกระบอก

Ra		Conductivity Ratio, $K = k_s / k_f$			
		0.1	1	5	10
10^3	SUPG	3.78	3.95	4.19	4.28
10^4	Dong & Li	4.05	4.20	-	4.49
10^4	SUPG	3.99 (1.48%)	4.13 (1.67%)	4.35	4.43 (1.34%)
10^5	SUPG	6.84	6.97	7.23	7.35
10^6	SUPG	12.10	12.26	12.70	13.00

หมายเหตุ : ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวผิวทรงกระบอก (ค่าความคลาดเคลื่อน % โดยเปรียบเทียบกับ Dong & Li [20])

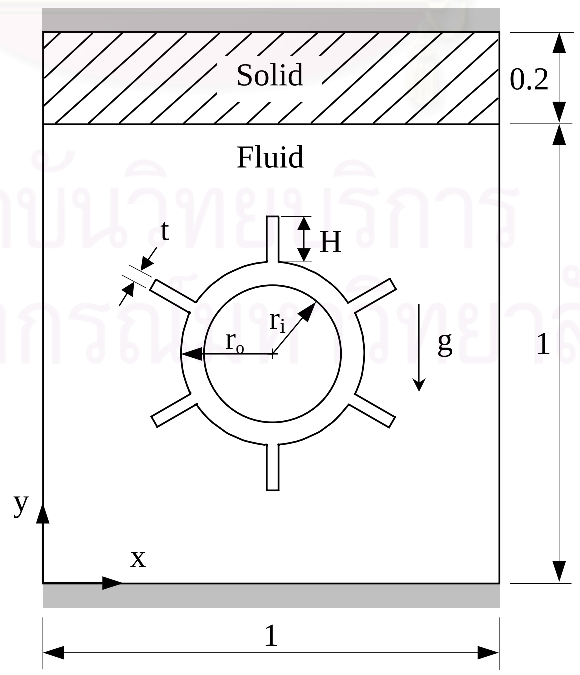
สำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อน สามารถสรุปผลการศึกษาได้ ดังต่อไปนี้

1. เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้นจะทำให้การถ่ายเทความร้อนมีปริมาณมากขึ้น
2. อัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล, K จะมีผลต่อปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทระหว่างของแข็งและของไหล โดยเมื่อค่า K มากขึ้น ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทระหว่างของแข็งและของไหลจะเพิ่มขึ้น

7.2.2 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยม (Conjugate Natural Convection in a Horizontal Cylinder with Fins)

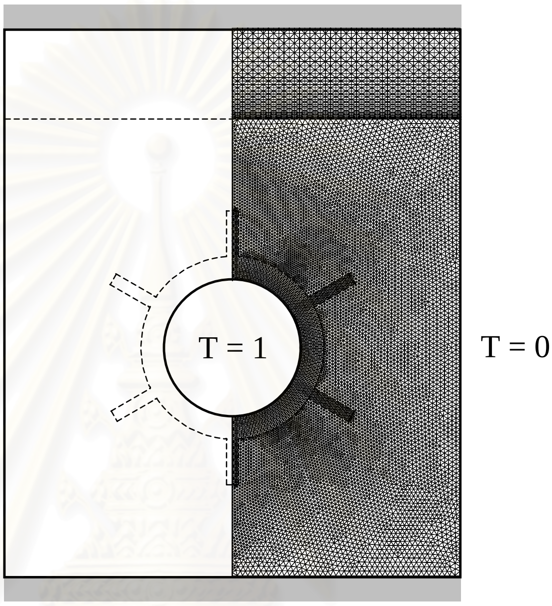
สำหรับในปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยมเราจะทำการศึกษาผลต่อความยาวของครีบระบายความร้อน โดยจะศึกษาต่อจากปัญหาแรก ซึ่งการถ่ายเทความร้อนนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในทางด้านวิศวกรรมอย่างแพร่หลายยกตัวอย่างเช่น การออกแบบการถ่ายเทความร้อนในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ และการออกแบบอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนต่าง ๆ สำหรับปัญหานี้จะมีลักษณะคล้ายกับงานวิจัยของ Rahnama and Farhadi [38] และ Farinas and Garon [39] แต่ในงานวิจัยนี้จะเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยจะคิดการนำความร้อนในของแข็งด้วยเพื่อให้สอดคล้องกับความเป็นจริงมากขึ้น

ลักษณะของปัญหาประกอบไปด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดกว้าง 1×1 โดยที่ผิวท่อด้านในมีอุณหภูมิสูงเท่ากับ 1 รัศมีภายใน r_i และรัศมีภายนอก r_o เท่ากับ 0.15 และ 0.20 ตามลำดับและมีครีบระบายความร้อนสูงเท่ากับ H ในงานวิจัยนี้ทำการศึกษาค่าความสูงของครีบระบายความร้อนเท่ากับ 0.1 และ 0.2 ความหนา t เท่ากับ 0.025 ในขณะที่ผนังด้านซ้ายและผนังด้านขวามีอุณหภูมิต่ำเท่ากับ 0 และมีผนังกันความร้อนหนา 0.2 อยู่ด้านบน ผนังด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวน โดยโดเมนของปัญหาแสดงในรูปที่ 7.21

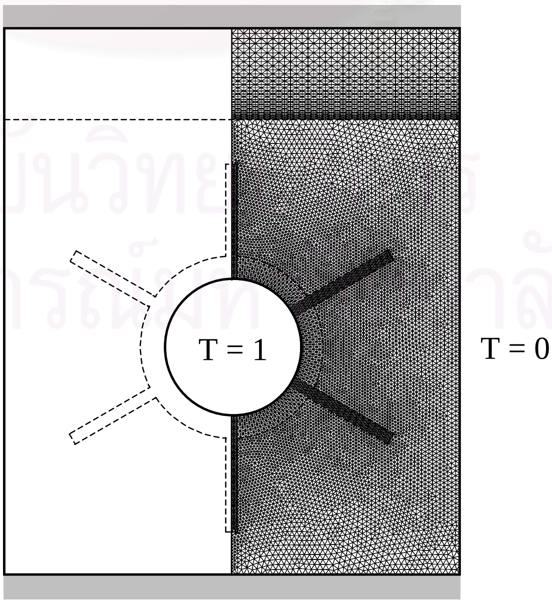


รูปที่ 7.21 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยม

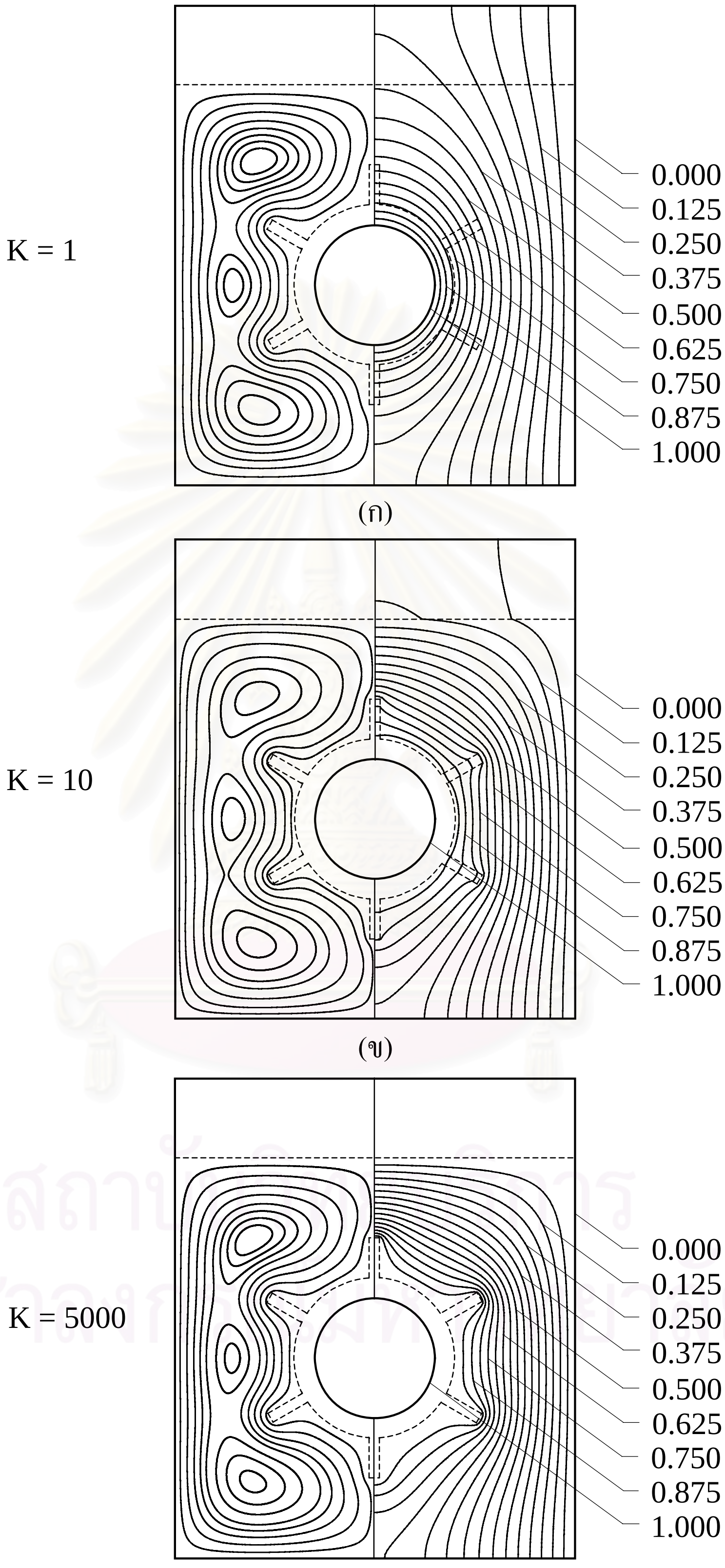
เนื่องจากลักษณะการถ่ายเทความร้อนของปัญหานี้มีความสมมาตร ดังนั้นรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จึงสร้างขึ้นเฉพาะทางด้านขวาของรูป สำหรับค่า H = 0.1 ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 11,111 จุดต่อและ 21,709 เอลิเมนต์แสดงในรูปที่ 7.22 และค่า H = 0.2 ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 9,602 จุดต่อและ 18,747 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.23



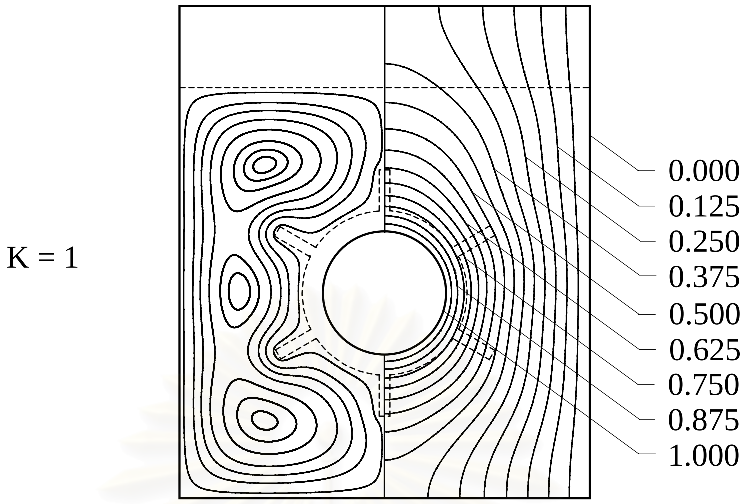
รูปที่ 7.22 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยม เมื่อ H = 0.1



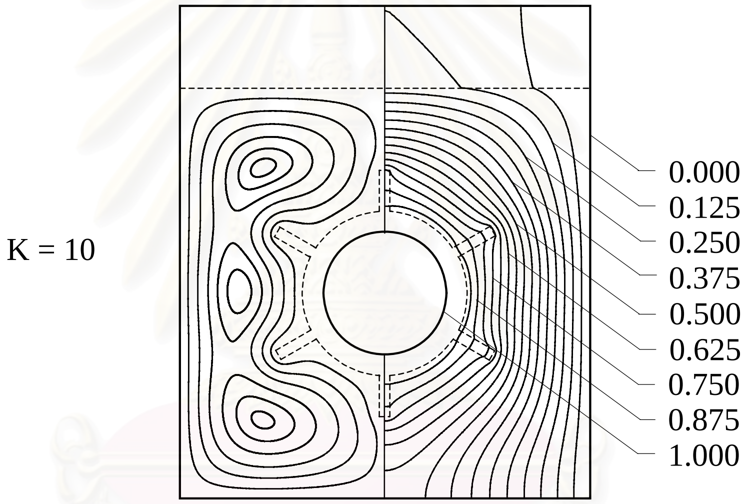
รูปที่ 7.23 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยม เมื่อ H = 0.2



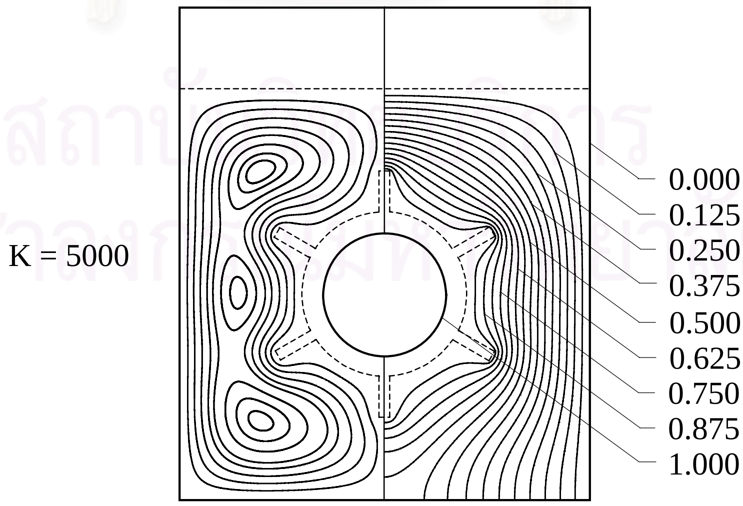
รูปที่ 7.24 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า $Ra = 10^3$ และ H = 0.1



(ก)

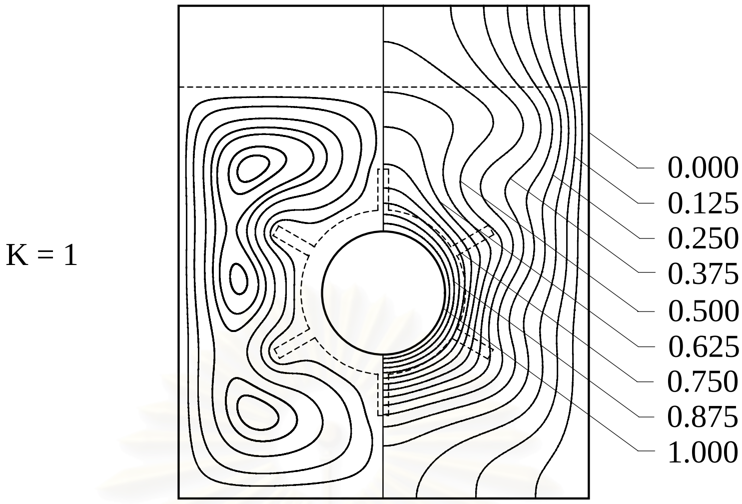


(ข)

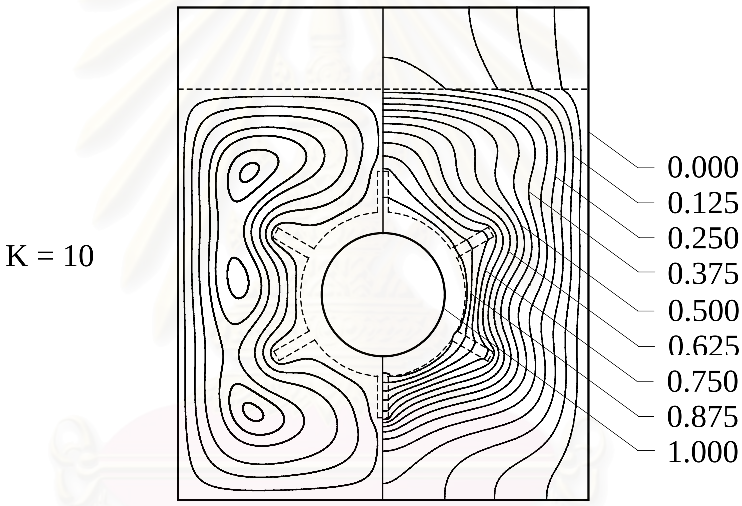


(ค)

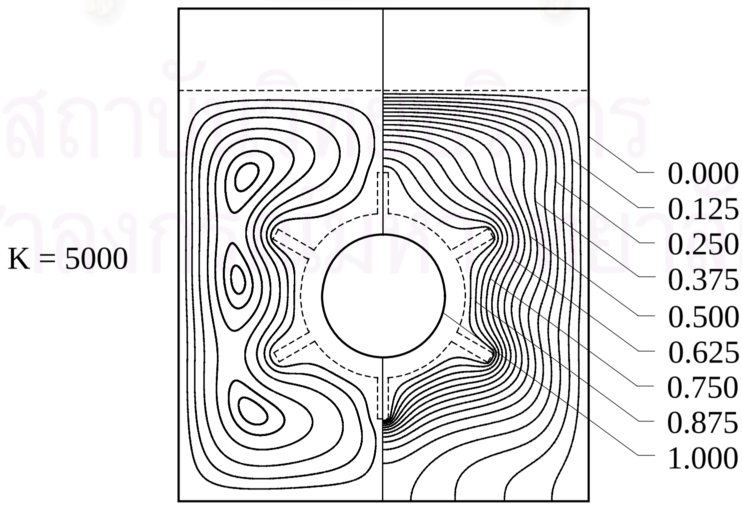
รูปที่ 7.25 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า Ra $= 10^4$ และ H = 0.1



(ก)

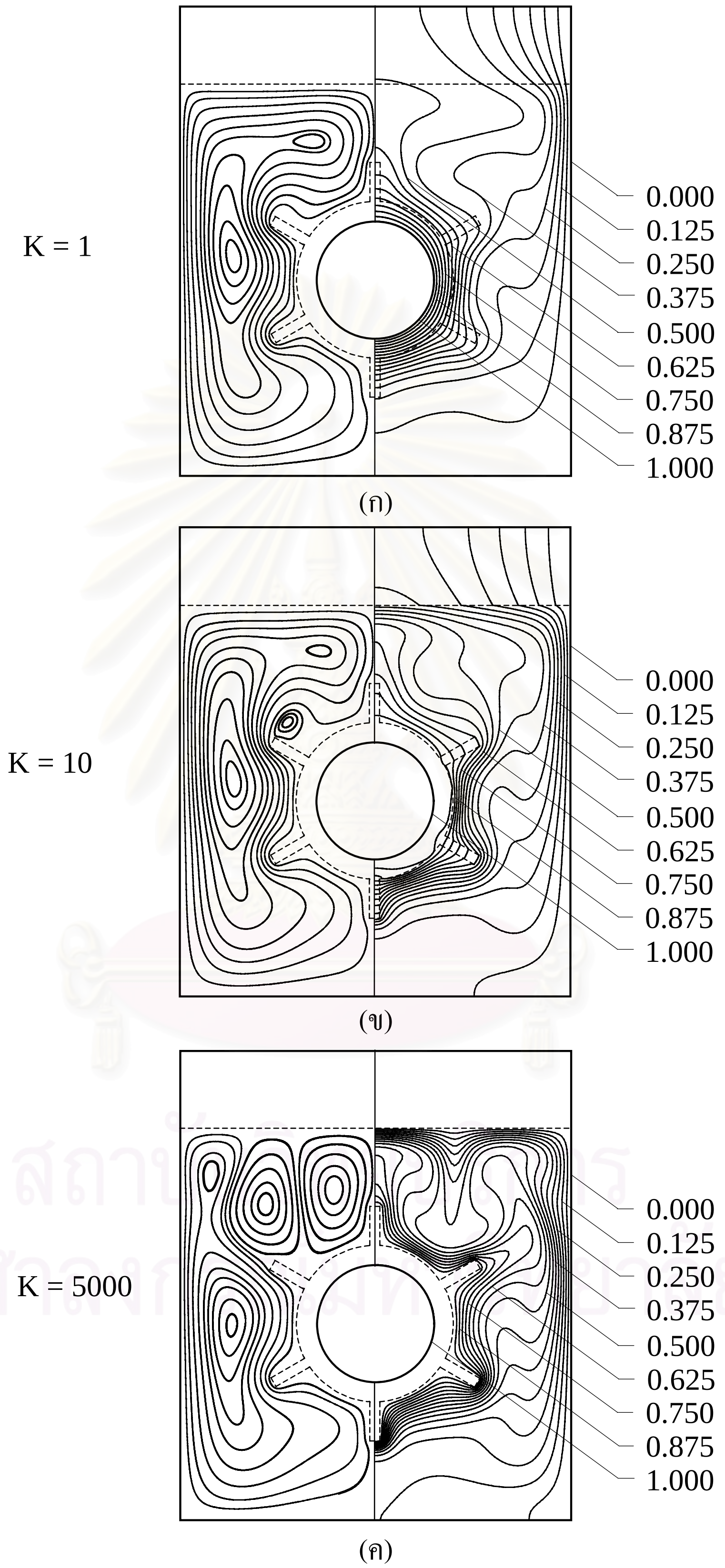


(ข)



(ค)

รูปที่ 7.26 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า $Ra = 10^5$ และ H = 0.1



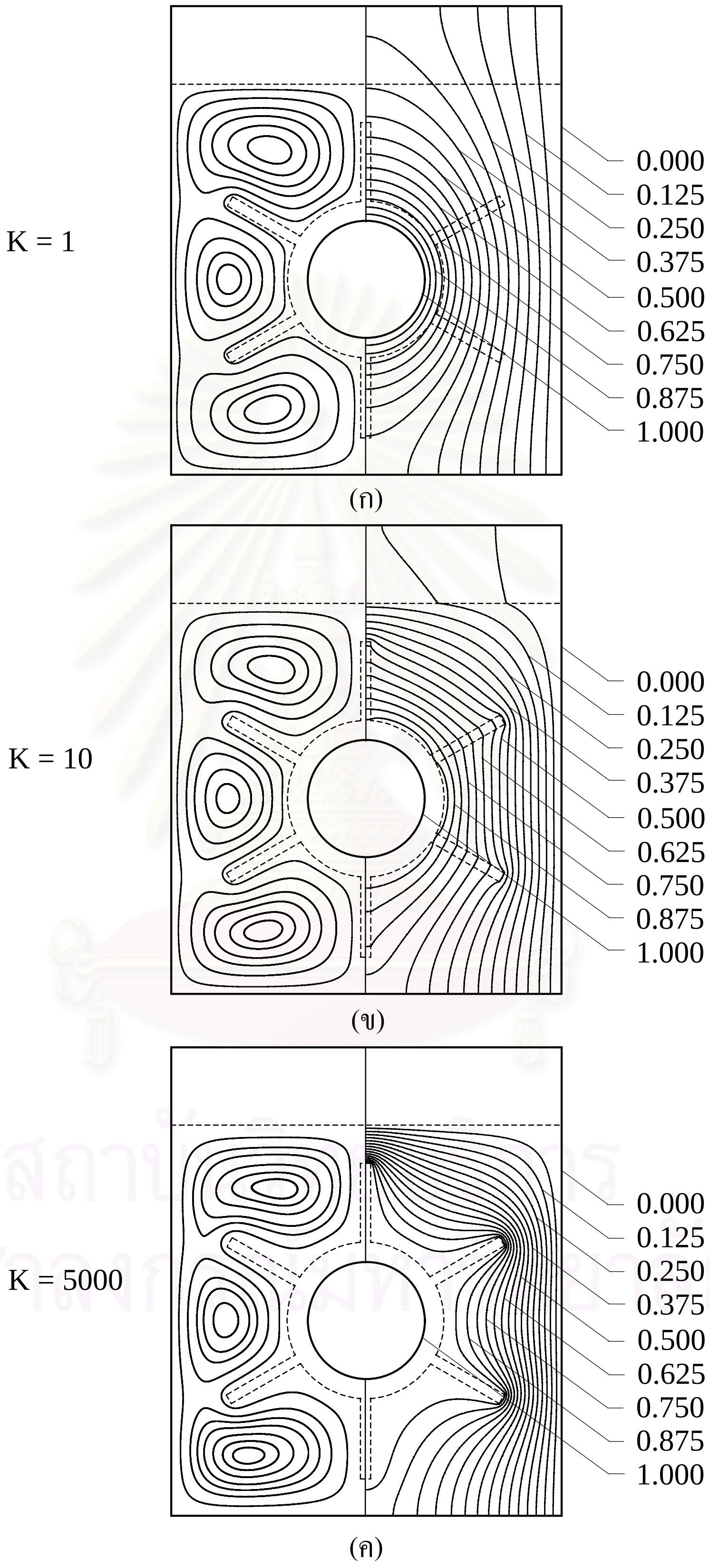
รูปที่ 7.27 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า $Ra = 10^6$ และ H = 0.1

รูปที่ 7.24 – 7.27 แสดงผลลัพธ์สภาวะการไหลที่คำนวณได้เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3, 10^4, 10^5 และ 10^6 ตามลำดับ และค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์ของกรณีนี้มีค่าเท่ากับ 0.71 เมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าเท่ากับ 0.1, 1, 10 และ 5,000 ที่ค่าความยาวของครีบระบายความร้อนมีค่าเท่ากับ 0.1

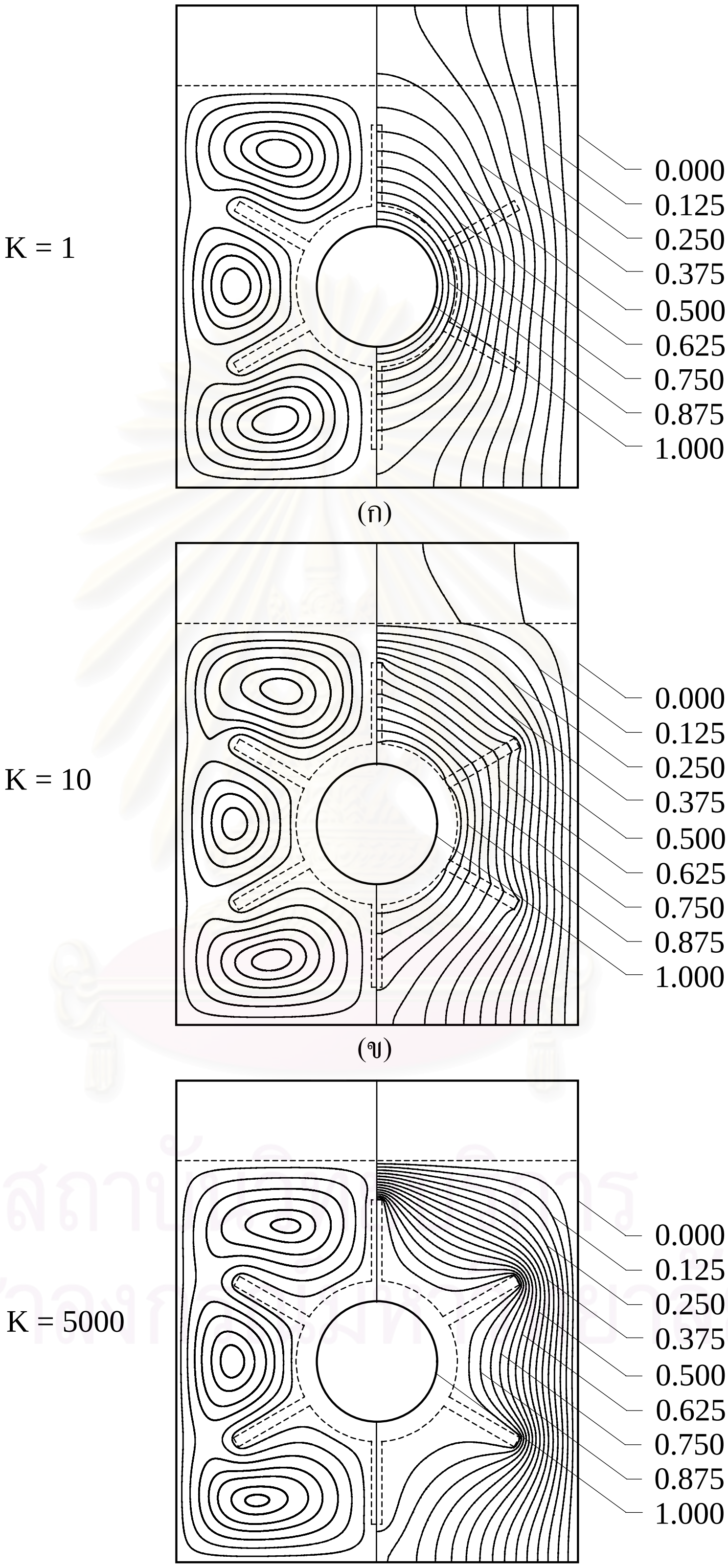
จากรูปที่ 7.24 เมื่อพิจารณาค่าเส้นชั้นของความเร็วจะเกิดการหมุนวนสามบริเวณในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ค่า Ra = 10^3 จากนั้นเมื่อทำการเพิ่มค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล K กับเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ Ra เป็น 10^4 และ 10^5 จะพบว่าค่าเส้นชั้นของความเร็วจะไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก ดังแสดงในรูปที่ 7.25 และ 7.26 ตามลำดับ จากนั้นทำการเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เป็น 10^6 จะเห็นได้ว่าค่าเส้นชั้นความเร็วจะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจน โดยที่ค่า K = 1 จะเกิดการหมุนวน 2 บริเวณด้วยกันโดยจะเกิดการหมุนวนใหญ่ ๆ เพียงตำแหน่งเดียวและมีทิศทวนเข็มนาฬิกาทั้ง 2 วง เมื่อค่า K = 10 จะเกิดการหมุนวนเพิ่มขึ้นเป็น 3 วง โดยที่วงที่สามจะเกิดใกล้กับครีบระบายความร้อนโดยจะเกิดการหมุนวนในทิศตามเข็มนาฬิกาและเมื่อเพิ่มค่า K = 5,000 จะเห็นได้ว่าจะเกิดการหมุนวนเพิ่มขึ้นเป็นจำนวน 4 วง โดยจะเกิดการหมุนวนขนาดใหญ่ 3 วงด้วยกัน โดยที่ตำแหน่งวงกลางที่อยู่ด้านบนจะเกิดการหมุนวนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ส่วนที่เหลืออีก 3 วงจะหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 7.27

เมื่อพิจารณาค่าเส้นชั้นของอุณหภูมิในรูปที่ 7.24 จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัดเมื่อทำการเปลี่ยนค่า K เมื่อค่า K สูงขึ้นการถ่ายเทความร้อนในของแข็งจะดีขึ้น เมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนมีค่าเท่ากับ 5,000 จะเห็นได้ว่าการถ่ายเทความร้อนสามารถถ่ายเทออกจากครีบระบายความร้อนและบริเวณผนังด้านบนได้หมด และเมื่อเพิ่มค่า Ra เป็น 10^4, 10^5 และ 10^6 แล้วพิจารณาค่า K คงที่จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของเส้นชั้นอุณหภูมิจะมีความซับซ้อนยิ่งขึ้นและสามารถถ่ายเทความร้อนออกไปสู่บริเวณของแข็งได้เป็นอย่างดี ดังแสดงในรูปที่ 7.24 – 7.27

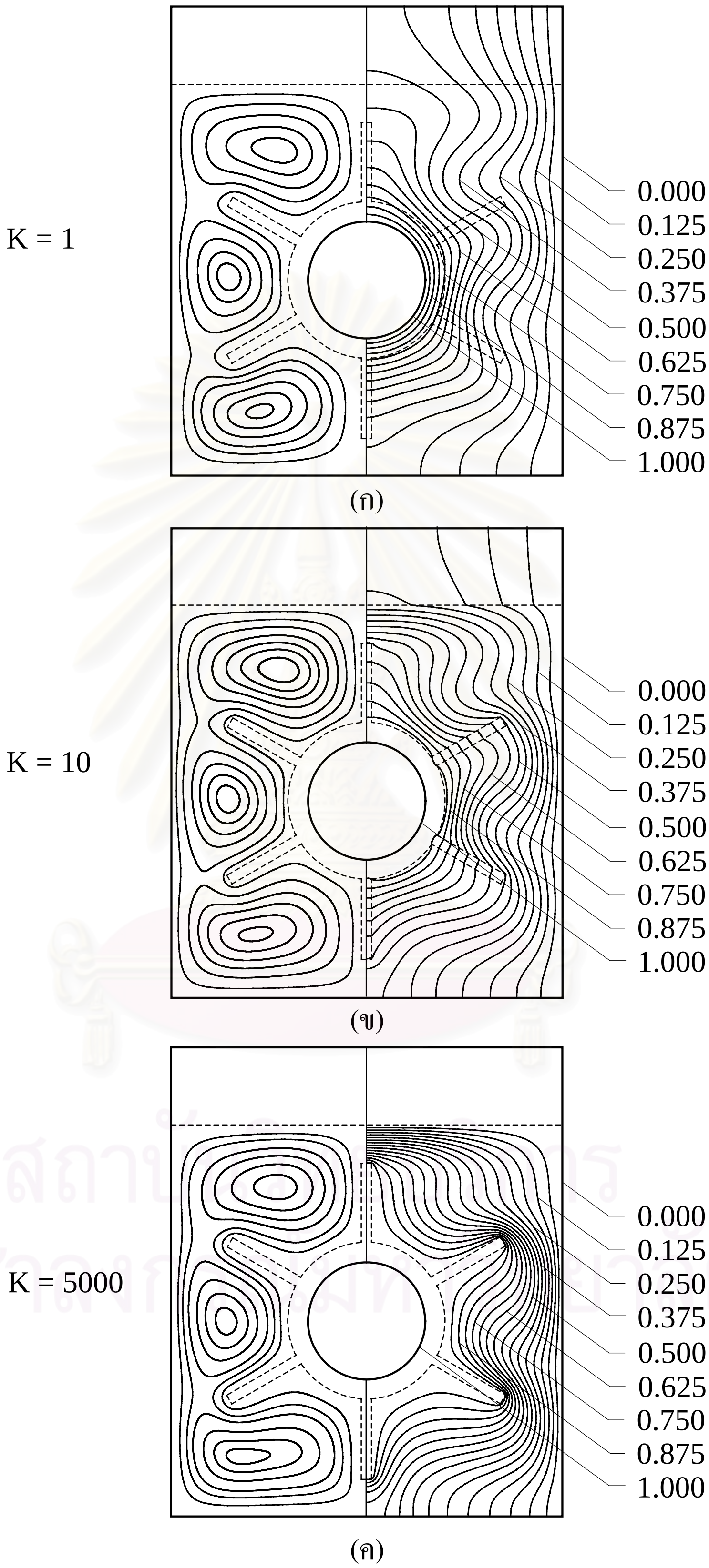
รูปที่ 7.28 – 7.31 แสดงเส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระโดยเพิ่มค่าความสูงของครีบระบายความร้อนเป็น 0.2 โดยที่คำนวณค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3, 10^4,10^5 และ 10^6 ตามลำดับ เมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน K เท่ากับ 0.1, 1, 10 และ 5,000 ตามลำดับ



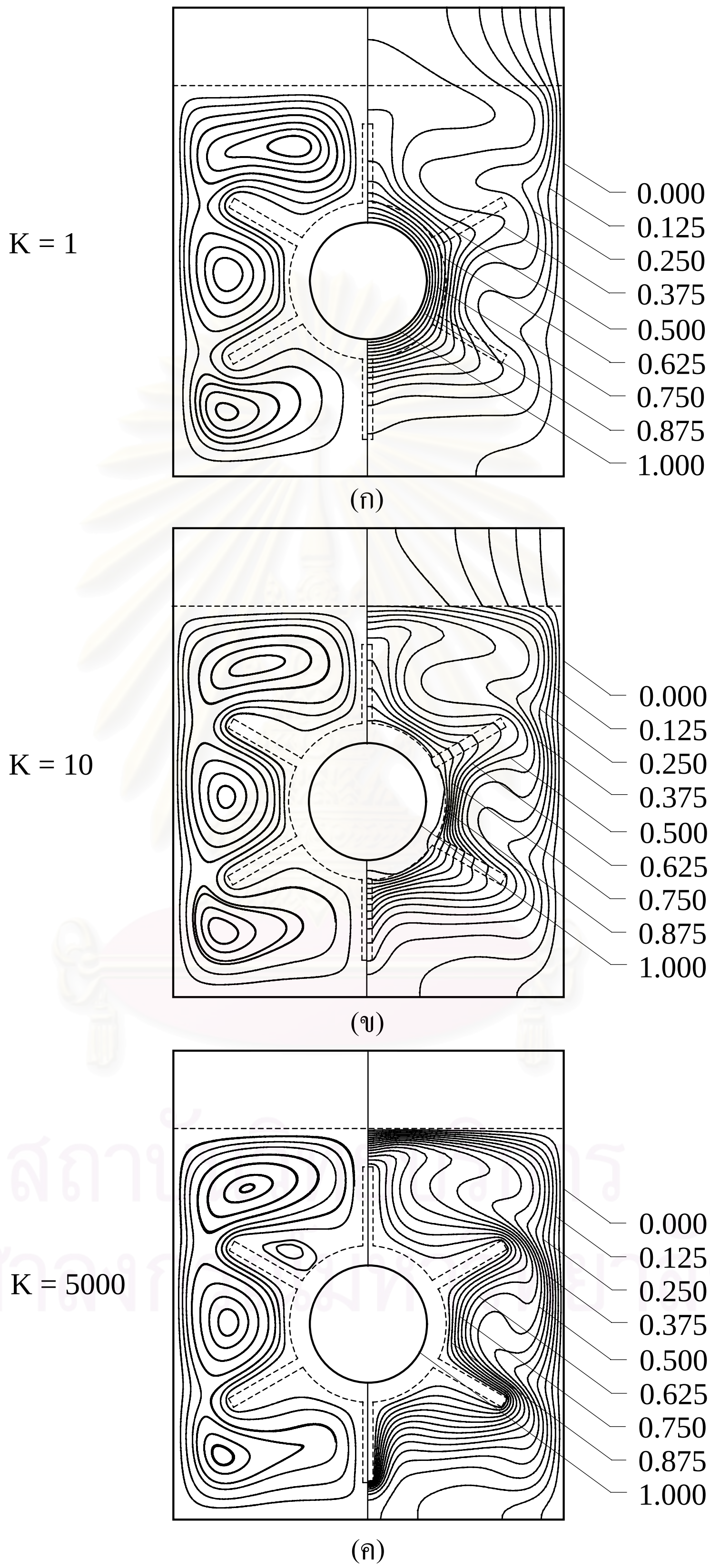
รูปที่ 7.28 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า $Ra = 10^3$ และ H = 0.2



รูปที่ 7.29 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า $Ra = 10^4$ และ H = 0.2



รูปที่ 7.30 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า Ra = 10^5 และ H = 0.2



รูปที่ 7.31 เส้นชั้นการไหลและเส้นชั้นของอุณหภูมิเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระ ที่ค่า K = 1, 10 และ 5000 เมื่อค่า Ra = 10^6 และ H = 0.2

จากรูปที่ 7.28 เมื่อพิจารณาค่าเส้นชั้นของความเร็วจะเกิดการหมุนวนสามบริเวณในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ค่า Ra = 10^3 จากนั้นเมื่อทำการเพิ่มค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล K กับเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เป็น 10^4 และ 10^5 จะเห็นได้ว่าค่าเส้นชั้นความเร็วจะไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก ดังแสดงในรูปที่ 7.29 และ 7.30 ตามลำดับ จากนั้นทำการเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เป็น 10^6 จะเห็นได้ว่าค่าเส้นชั้นความเร็วจะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจน โดยที่ค่า K = 5000 จะเกิดการหมุนวนขนาดเล็กที่ข้างครีบระบายความร้อนในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 7.31 (ค) ในทำนองเดียวกันค่าเส้นชั้นของอุณหภูมิในรูปที่ 7.28 – 7.31 สามารถอธิบายเช่นเดียวกับรูปที่ 7.24 – 7.27

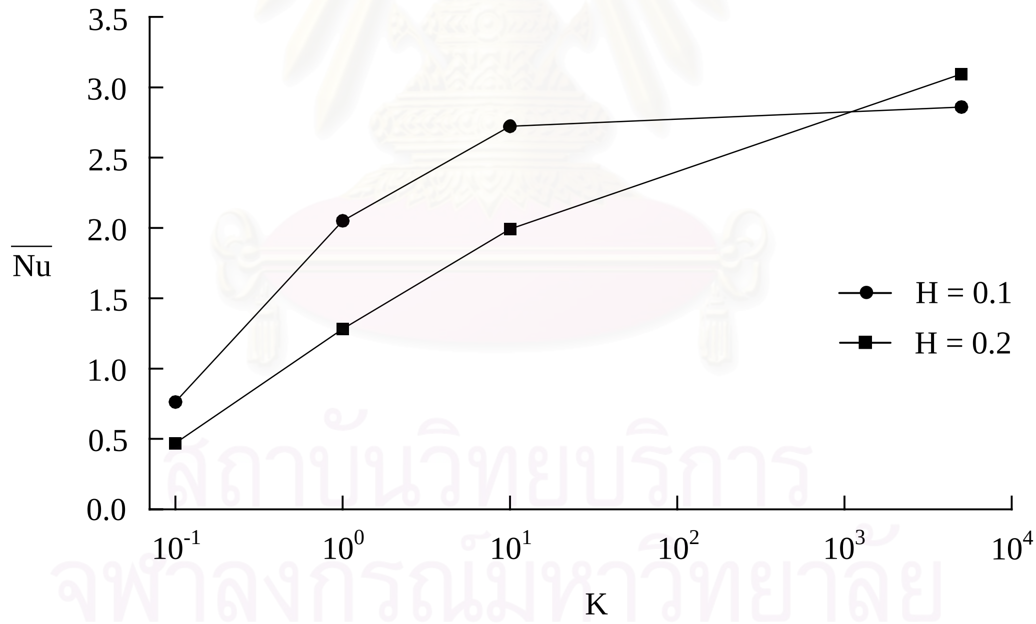
จากตารางที่ 7.3 แสดงค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ย, $\overline{Nu}$ ที่บริเวณผิวของครีบระบายความร้อนที่ค่า H = 0.1 และ 0.2 โดยที่ค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ยสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (7.17) โดยจะแสดงที่ค่า K = 0.1, 1, 10 และ 5000 ที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3, 10^4,10^5 และ 10^6 ตามลำดับ

ตารางที่ 7.3 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่บริเวณผิวของครีบระบายความร้อนเมื่อ ความสูงของครีบระบายความร้อน H มีค่าเท่ากับ 0.1 และ 0.2

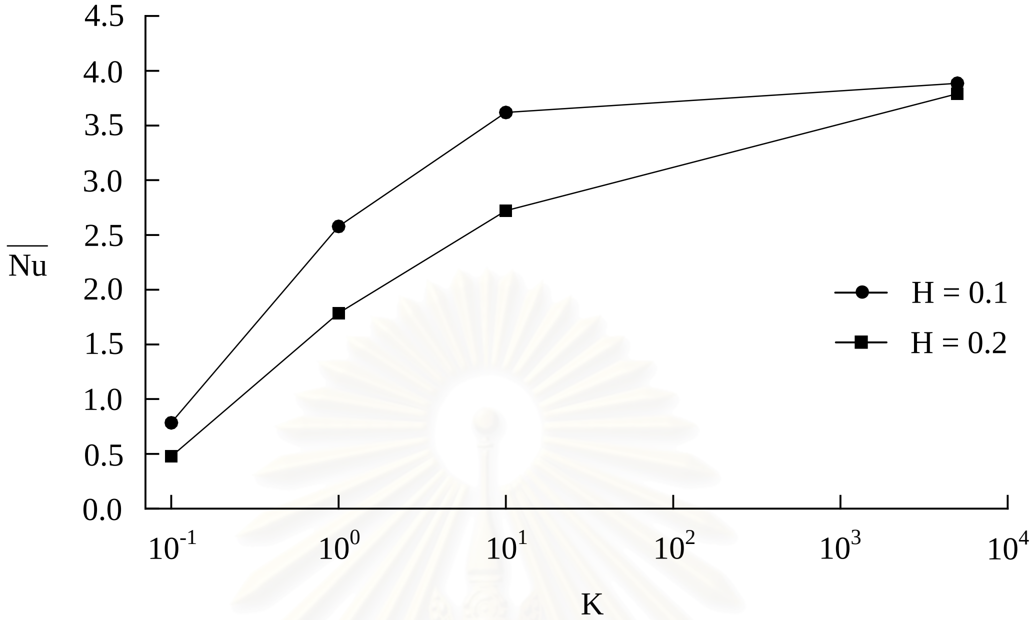
Ra	H	Conductivity Ratio, K = k_s / k_f			
		0.1	1	10	5000
10^3	0.1	0.763	2.051	2.723	2.860
	0.2	0.470	1.281	1.993	3.095
10^4	0.1	0.763	2.063	2.750	2.890
	0.2	0.470	1.286	2.021	3.108
10^5	0.1	0.784	2.578	3.619	3.886
	0.2	0.476	1.785	2.721	3.790
10^6	0.1	0.873	3.792	6.203	8.696
	0.2	0.548	2.484	4.012	5.964

จากตารางเพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้นจะแสดงค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ย $\overline{Nu}$ โดยเปรียบเทียบผลกระทบต่อค่าความสูงของครีบระบายความร้อน H เท่ากับ 0.1 และ 0.2 แล้วทำการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ค่าต่าง ๆ กัน ดังแสดงในรูปที่ 7.32 – 7.34 และรูปที่ 7.35 – 7.37 จะแสดงค่านัสเซิลนัมเบอร์เฉลี่ย โดยทำการเปรียบเทียบผลกระทบต่อค่าความสูงของครีบระบายความร้อนแล้วทำการเปลี่ยนแปลงค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ที่ค่าต่าง ๆ กัน

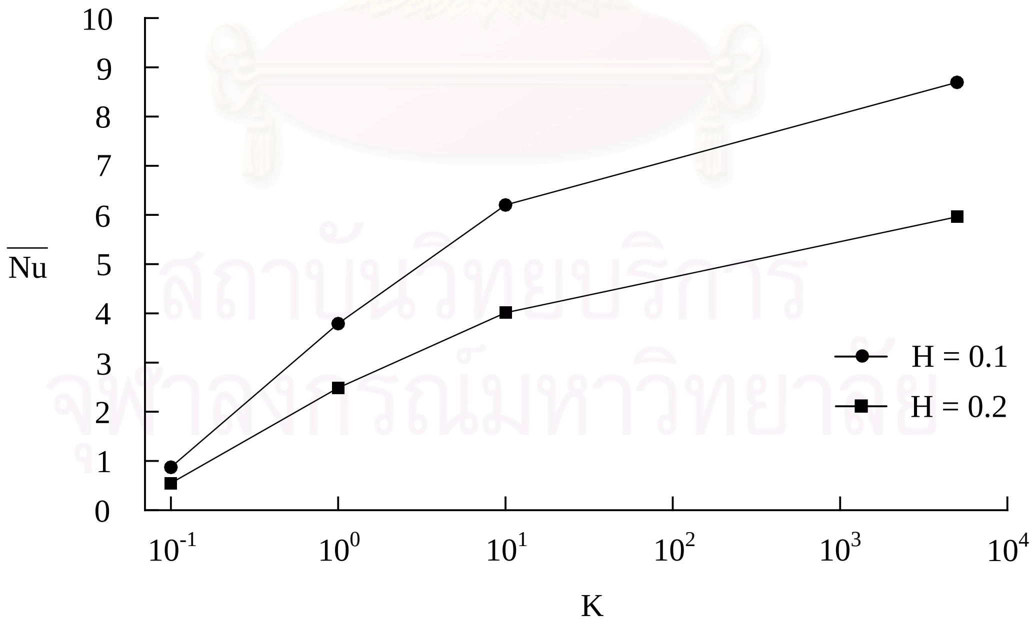
รูปที่ 7.32 – 7.34 จะแสดงให้เห็นว่าเมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าเพิ่มขึ้น ปริมาณความร้อนที่ผิวของครีบระบายความร้อนก็จะมีค่าสูงขึ้นด้วยในทำนองเดียวกัน เมื่อเพิ่มค่าความสูงของครีบระบายความร้อนจาก 0.1 เป็น 0.2 จะเห็นได้ว่าปริมาณความร้อนที่ผิวของครีบระบายความร้อนลดลง ดังนั้นที่ความสูงของครีบระบายความร้อนเท่ากับ 0.1 สามารถระบายความร้อนได้ดีกว่าที่ความสูงเท่ากับ 0.2 ยกเว้นรูปที่ 7.32 ที่ค่า K เท่ากับ 5,000 ซึ่งสามารถอธิบายได้ในรูปที่ 7.37



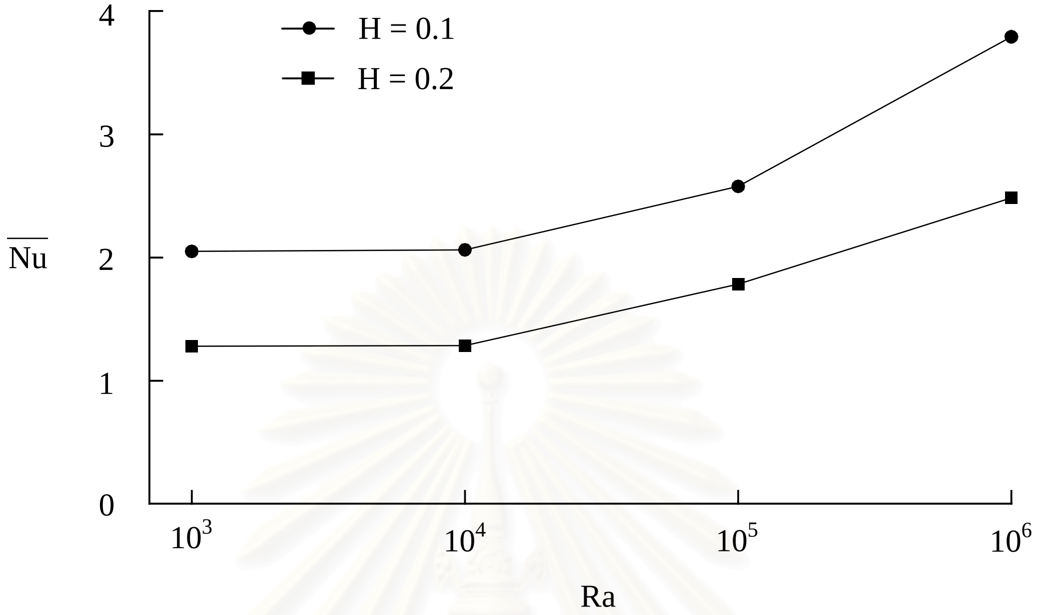
รูปที่ 7.32 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผิวของครีบระบายความร้อนที่ค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ค่าต่าง ๆ และค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3 เมื่อ H = 0.1 และ 0.2



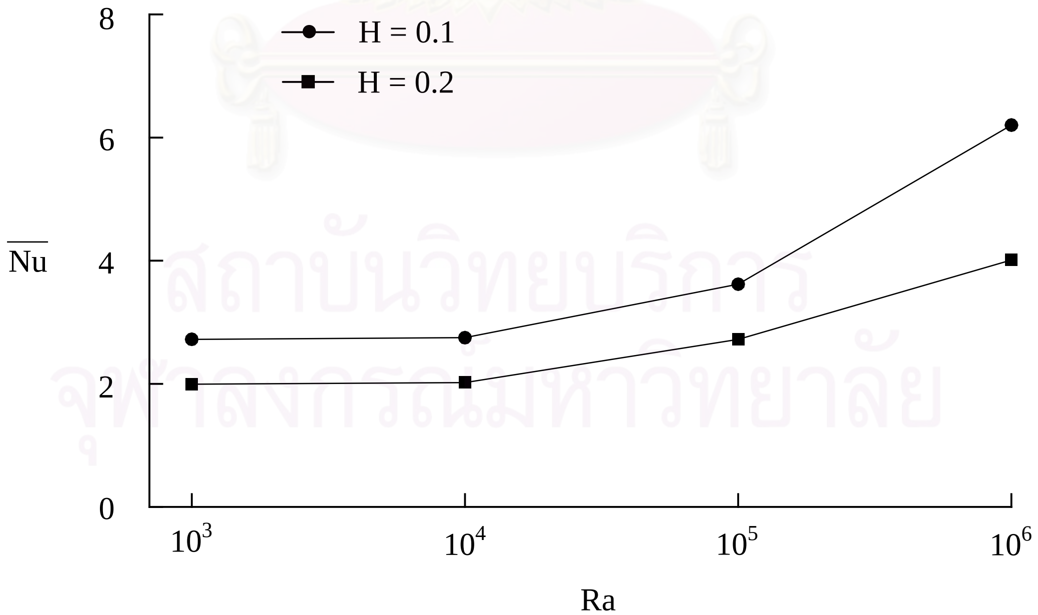
รูปที่ 7.33 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผิวของครีบระบายความร้อนที่ค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ค่าต่าง ๆ และค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^5 เมื่อ H = 0.1 และ 0.2



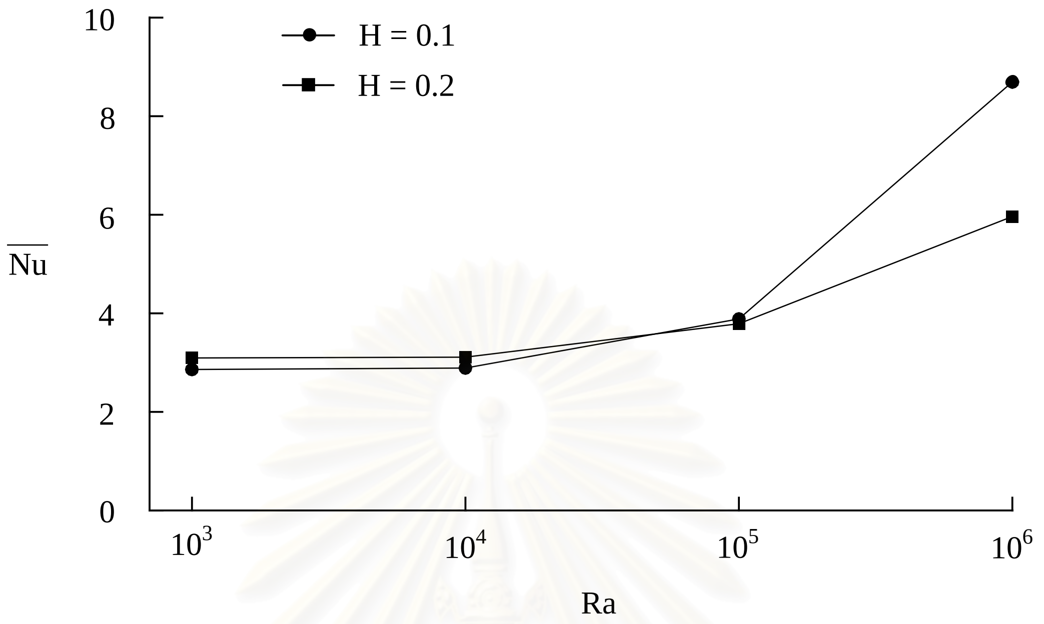
รูปที่ 7.34 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผิวของครีบระบายความร้อนที่ค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ค่าต่าง ๆ และค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^6 เมื่อ H = 0.1 และ 0.2



รูปที่ 7.35 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผิวของครีบระบายความร้อนที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่าง ๆ และค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน K เท่ากับ 1 เมื่อ H = 0.1 และ 0.2



รูปที่ 7.36 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผิวของครีบระบายความร้อนที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่าง ๆ และค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน K เท่ากับ 10 เมื่อ H = 0.1 และ 0.2



รูปที่ 7.37 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ผิวของครีบระบายความร้อนที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่าง ๆ และค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน K เท่ากับ 5,000 เมื่อ H = 0.1 และ 0.2

รูปที่ 7.35 – 7.37 สามารถสรุปได้ว่าเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้นการถ่ายเทความร้อนจะมีค่าสูงขึ้น รูปที่ 7.37 แสดงค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 5,000 จะพบว่าการถ่ายเทความร้อนที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3, 10^4 และ 10^5 ที่ความสูงของครีบระบายความร้อนเท่ากับ 0.1 และ 0.2 ค่าปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นมีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก แต่เมื่อเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^6 จะพบว่าปริมาณความร้อนที่ค่าความสูงของครีบระบายความร้อนเท่ากับ 0.1 สามารถระบายความร้อนได้ดีกว่าที่ความสูงเท่ากับ 0.2

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณทั้งหมดพบว่าเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้นจะเห็นได้ว่าปริมาณความร้อนที่ผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลมีค่าสูงขึ้น ของแข็งสามารถถ่ายเทความร้อนได้ดีและเมื่อพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเมื่อมีค่าสูงขึ้นจะทำให้ความร้อนสามารถถ่ายเทสู่ของไหลได้ดี ดังนั้นในการเลือกวัสดุเพื่อให้อุปกรณ์ระบายความร้อนมีประสิทธิภาพสูงสุดควรจะเลือกใช้วัสดุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนสูงด้วย แต่ในงานทางวิศวกรรมในบางครั้งอาจมีข้อจำกัดบางอย่าง เช่น วัสดุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนสูงมักจะมีราคาแพง ดังนั้นการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งสามารถวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตได้ จะสามารถจำลองปัญหาขึ้นมาแล้วนำผลลัพธ์มาเป็นข้อมูลเพื่อใช้ในการเลือกวัสดุที่มีความเหมาะสมทั้งด้านราคาและสามารถระบายความร้อนได้ตามความต้องการได้

สำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยมสามารถสรุปผลการศึกษาได้ ดังต่อไปนี้

1. เมื่อเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้นจะทำให้การถ่ายเทความร้อนมีปริมาณมากขึ้น
2. อัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล, K จะมีผลต่อปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทระหว่างของแข็งและของไหล โดยเมื่อค่า K มากขึ้น ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทระหว่างของแข็งและของไหลก็จะเพิ่มขึ้น
3. ความสูงของครีบระบายความร้อนมีผลต่อต่อปริมาณการถ่ายเทความร้อนของครีบระบายความร้อน

บทที่ 8

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวในสองมิติโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งวิธีดังกล่าวสามารถที่จะใช้วิเคราะห์ปัญหาในของแข็ง ปัญหาในของไหล และปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งและของไหลได้เป็นที่น่าพอใจ

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน โดยในบทที่ 2 ได้แสดงถึงระบบสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนในสองมิติไว้อย่างละเอียด ซึ่งประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์จำนวน 4 สมการ ได้แก่ สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y และสมการอนุรักษ์พลังงาน รวมทั้งอธิบายผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิซึ่งใช้ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนที่มีการพาความร้อนแบบอิสระด้วย

สำหรับบทที่ 3 เป็นการแสดงขั้นตอนในการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน พร้อมทั้งประยุกต์ใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulation; SUPG) จากนั้นได้ประยุกต์ใช้ขั้นตอนการคำนวณของวิธี SIMPLER ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการคำนวณความเร็วและความดัน เพื่อทำให้ค่า u และ v ที่คำนวณได้จากสมการโมเมนตัมนั้นสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล ซึ่งเป็นขั้นตอนการคำนวณแบบแยกกัน (Segregated Method) เป็นผลทำให้ไม่ต้องทำการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่พร้อม ๆ กัน อีกทั้งระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ยังสามารถที่จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่อันดับเท่ากันได้ (Equal-Order Interpolation Function) ทำให้การประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์และไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถที่จะทำความเข้าใจได้โดยง่าย จึงมีความสะดวกที่จะนำไปพัฒนาในงานวิจัยในระดับสูงต่อไป สำหรับเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ถูกสร้างขึ้นในบทนี้จะอยู่ในรูปแบบที่สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

การแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ในอดีตมีความนิยมที่จะใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination Method) ซึ่งเป็นวิธีการคำนวณแบบตรง (Direct Method) แต่วิธีดังกล่าวต้องใช้เวลาในการคำนวณเป็นจำนวนมาก ทำให้เป็นข้อจำกัดในการวิเคราะห์ปัญหาขนาดใหญ่ ดังนั้นในบทที่ 4 จึงได้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เรียกว่าวิธีเอลิเมนต์โดยเอลิเมนต์ (Element by Element) ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสำหรับการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่เนื่องจากสามารถที่จะลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณลงได้เป็นอย่างมาก เพราะเป็นการหลีกเลี่ยงการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ โดยได้อธิบายอย่างเป็นขั้นเป็นตอนเพื่อให้เกิดความเข้าใจในวิธีดังกล่าว สำหรับในบทที่ 5 จะได้นำเอาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 รวมทั้งการแก้ระบบสมการด้วยระเบียบวิธีเอลิเมนต์โดยเอลิเมนต์ที่ได้อธิบายในบทที่ 4 มาทำการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยจะอธิบายขั้นตอนการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยละเอียด

สำหรับในบทที่ 6 เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยจะทำการตรวจสอบ 2 ส่วนด้วยกัน ส่วนแรกเป็นการวิเคราะห์ปัญหาในของแข็ง โดยทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง 2 ปัญหา ได้แก่ 1) ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม 2) ปัญหาการแพร่กระจายความร้อนโดยที่มีปริมาณความร้อนที่ผิวแตกต่างกัน ส่วนที่สองจะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยทำการตรวจสอบกับผลเฉลยแม่นตรง 2 ปัญหา และทำการตรวจสอบกับผลการคำนวณด้วยวิธีอื่นๆ ของผู้วิจัยที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ 2 ปัญหา ได้แก่ 1) ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานอันเนื่องมาจากความหนืด 2) ปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบริ่ง 3) ปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม 4) ปัญหาการไหลเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

สำหรับในบทที่ 7 โดยจะแบ่งปัญหาในการวิเคราะห์ออกเป็นสองส่วน ในส่วนแรกเพื่อเพิ่มความมั่นใจยิ่งขึ้นในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำมาทดสอบปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ผลจากการทดลองหรือผลการคำนวณด้วยวิธีอื่นๆ ของผู้วิจัยที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ซึ่งประกอบด้วย 3 ปัญหา ได้แก่ 1) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตระหว่างแผ่นคู่ขนาน 2) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน 3) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยที่มีผนังนำความร้อน

สำหรับส่วนที่สองจะเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นและมีความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างที่ซับซ้อน 2 ปัญหา ได้แก่ 1) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิด

สี่เหลี่ยมโดยมีผนังกันความร้อน 2) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกที่มีครีบระบายความร้อนในช่องปิดสี่เหลี่ยม โดยในปัญหานี้จะศึกษาผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล และค่าความยาวของครีบระบายความร้อน

กล่าวโดยสรุปได้ว่าวิทยานิพนธ์นี้สามารถนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งเป็นการคำนวณการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลพร้อมกันได้เป็นอย่างดี และจากวิธีการแก้ระบบสมการด้วยวิธีเอลิเมนต์โดยเอลิเมนต์สามารถลดเวลาในการคำนวณได้เป็นอย่างมาก เมื่อเทียบกับการแก้ระบบสมการด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ และการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ ดังเช่นในอดีต

8.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาสำคัญที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ คือ การทำความเข้าใจกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน เนื่องจากมีความซับซ้อนมากในการแก้ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ต่อมาจะเป็นการค้นหาวิธีในการเชื่อมโยงการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหล ซึ่งเป็นส่วนที่สำคัญในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ปัญหาสำคัญอีกประการหนึ่งที่ต้องกล่าวถึงคือการหาวิธีการแก้ระบบสมการแบบใหม่ที่สามารถลดเวลาในการคำนวณและให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตสามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์จากวิทยานิพนธ์นี้ไปพัฒนาเพิ่มเติมสำหรับการคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีรูปร่างซับซ้อนที่เกิดขึ้นจริงในงานวิศวกรรมได้ ซึ่งควรมีการพัฒนาเพิ่มเติมในส่วนต่อไปนี้

- ปรับปรุงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสภาวะชั่วขณะ (Transient Problem)
- ประยุกต์ใช้วิธีปรับขนาดเอลิเมนต์ เพื่อลดจำนวนเอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาแบบคอนจูเกต
- พัฒนาให้โปรแกรมสามารถคำนวณการไหลในสามมิติได้
- พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสภาวะปั่นป่วน (Turbulent Problem) ได้

รายการอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.
2. Kawahara, M., Yokouchi, Y., Tamano, T., and Ohtsubo, H. Steady and Unsteady Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Fluid. International Journal of Numerical Methods in Engineering 10 (1976): 437-456.
3. Yamada, Y., Ito, K., Yokouchi, Y., Tamano, T., and Ohtsubo, T. Finite Element Analysis of Steady Fluid and Metal Flow. Finite element Methods in Fluids 1 (1975)
4. Chorin, A. J. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. Mathematics of Computation 22 (1986): 745-762.
5. Chorin, A. J. On Convergence of Discrete Approximation to the Navier-Stokes Equations. Mathematics of Computation 23 (1969): 341-353.
6. Patankar, S. V. and Spalding, D. B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. International Journal of Heat and Mass Transfer 15 (1972)
7. Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. New York: Hemisphere, 1980.
8. Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method. London: Longman Scientific & Technical, 1995.
9. Rice, J. G. and Schnipke, R. J. An Equal-Order Velocity-Pressure Formulation that does not Exhibit Spurious Pressure Modes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 58 (1986): 135-149.
10. Spalding, D. B. A Noval Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. International Journal for Numerical Methods in Engineering 4 (1972): 551.
11. Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulation for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32 (1982): 199-259.

12. Zienkiewicz, O. C. and Codina, R. A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flow-Part I. The Split, Characteristic-Based Scheme. International Journal for Numerical Methods in Fluids 20 (1995): 869-885.
13. นิพนธ์ วรรณโสภาคย์. เทคนิคการปรับเอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมอันดับเท่ากัน. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543.
14. Du Toit, C. G. A Segregated Finite Element Approach to the Solution of the Navier-Stokes Equations for Incompressible Flow. Computational Mechanics (1998).
15. Misra, D. and Sarkar, A. Finite Element Analysis of Conjugate Natural Convection in a Square Enclosure with a Conducting Vertical Wall. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1997): 205-219.
16. Sugavanam, R., Ortega, A. and Choi, C. Y. A Numerical Investigation of Conjugate Heat Transfer from a Flush Heat Source on a Conductive Board in Laminar Channel Flow. International Journal of Heat and Mass Transfer 38 (1995): 2969-2984.
17. Cole, K. D. Conjugate Heat Transfer from a Small Heated Strip. International Journal of Heat and Mass Transfer 40 (1997): 2709-2719.
18. Chen, X. and Han, P. A Note on the Solution of Conjugate Heat Transfer Problems using SIMPLE-Like Algorithms. International Journal of Heat and Fluid Flow 21 (2000): 463-467.
19. ยศกร ประทุมวัลย์. ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.
20. Dong, S. F. and Li, Y. T. Conjugate of Natural Convection and Conduction in a Complicated Enclosure. International Journal of Heat and Mass Transfer 47 (2004): 2233-2239.
21. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.
22. Schlichting, H. Boundary Layer Theory. Seventh Edition. New York: McGraw-Hill, 1979.
23. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. The Finite Element Method. Fifth Edition. Oxford: McGraw-Hill, 2000.

24. Huebner, K. H., Thornton, E. A. and Byrom, T. G. The Finite Element Method for Engineers. Third Edition. New York: John Wiley & Sons, 1995.

25. Chung, T. J. Computational Fluid Dynamic. Cambridge: University Press, 2002.

26. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Evaluation of Combined Delaunay Triangulation and Adaptive Finite Elements for Heat Transfer Problems. Accepted for publication in the Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering 27 (2003).

27. Dechaumphai, P. Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems, Journal of Energy Heat and Mass Transfer 17 (1995): 87-94.

28. Fox, R. W. and McDonald, A. T. Introduction to Fluid Mechanics. Fifth Edition. New York: John Wiley & Sons, 1994.

29. Wansophark, N. and Dechaumphai, P. Enhancement of Streamline Upwinding Finite Element Solution by Adaptive Meshing Technique. JSME International Journal, Series B. 45 (2002).

30. Ramaswamy, B. and Jue, T. C. A Segregated Finite Element Formulation of Navier-Stokes Equations Under Laminar Conditions. Finite Elements in Analysis and Design 9 (1991): 257-270.

31. Sai, B.V.K.S., Seetharamu, K. N. and Narayana P. A. Solution of Transient Laminar Natural Convection in a Square Cavity by an Explicit Finite Element Scheme. Numerical Heat Transfer, Part A. 25 (1994): 593-609.

32. Wansophark, N. and Dechaumphai, P. Combined Adaptive Meshing Technique and Segregated Finite Element Algorithm for Analysis of Free and Forced Convection Heat Transfer. Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004): 645-663.

33. วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

34. Incropera, F. P. and De Witt, D. P. Introduction to Heat Transfer. Second Edition. Singapore: John Wiley & Sons, 1990.

35. Vahl Davis, G. Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution. International Journal Numerical Methods Fluids 3 (1983): 249-264.

36. White, F. M. Viscous Fluid Flow. Second Edition. New York: McGraw-Hill, 1991.

37. Hribersek, M. and Kuhn, G. Conjugate Heat Transfer by Boundary-Domain Integral Method. Engineering Analysis with Boundary Elements 24 (2000): 297-305.

38. Rahnama, M. and Farhadi, M. Effect of Radial Fins on Two-Dimensional Turbulent Natural Convection in a Horizontal Annulus. International Journal of Thermal Sciences 43 (2004): 255-264.

39. Farinas, M. I., Garon, A. and Katia, S. L. Study of Heat Transfer in a Horizontal Cylinder with Fins. Revue Générale de Thermique 36 (1997): 398-410.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ SUPG

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SUPG ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 5 มีรายละเอียดดังนี้

```
!*****************************************************************************!
!                                                                             !
!          A FINITE ELEMENT PROGRAM FOR CONJUGATE HEAT TRANSFER PROBLEMS      !
!           FOR TWO-DIMENSIONAL USE EQUAL-ORDER TRIANGULAR FORMULATION        !
!              BASE ON STREAMLINE UPWIND/PETROV GALERKIN FORMULATION          !
!                                                                             !
!*****************************************************************************!

MODULE SUPG
IMPLICIT NONE

CHARACTER(len=20)     :: name1, name2, name3, name4

INTEGER(2)            :: sthour,stminute,stsecond,sthund      ! Collect Start time
INTEGER(2)            :: enhour, enminute, ensecond, enhund   ! Collect End time

INTEGER(4),ALLOCATABLE,DIMENSION(:,:) :: intmat        ! Node connection on element
INTEGER(4),ALLOCATABLE,DIMENSION(:,:) :: intbou        ! Define boundary inflow
INTEGER(4),ALLOCATABLE,DIMENSION(:,:) :: intbouq       ! Define boundary heat flux
INTEGER(4),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)   :: ibcu,ibcv,ibcp,ibct  !  boundary condition
                                                                 for variable
INTEGER(4),ALLOCATABLE,DIMENSION(:,:) :: ltype
INTEGER(4),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)   :: ibce, nodeid, chke   !  boundary condition
INTEGER(4),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)   :: esup1, esup2, elemq  !  for elements
                                                                 surrounding node
INTEGER(4)                           :: npoi,  nelem,  iter, ierror, istor
INTEGER(4)                           :: i, j, k, ii, jj, kk
INTEGER(4)                           :: ip, ie, ib, jb, kb, st, ed
INTEGER(4)                           :: niter, nlines, nbou, nflux, ipoi1, check
INTEGER(4), DIMENSION(20)            :: text

REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:,:)   :: coord              ! Coordinate of each node
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:,:)   :: sysk
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: u, v, p, t         ! Primitive variable
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: uold,vold,pold,told ! Primitive variable (old)
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: unew, vnew, pnew, tnew
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: EE, PP, EEnew, PPnew, EB
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: ru, rv, areavg, qb
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: uhat, vhat, kp, vsum
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: sysrx, sysry, sysr, bflux
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: tbar, digt, pbar, digp, sysrold, EKP
REAL(8),ALLOCATABLE,DIMENSION(:)     :: sysa, comb
REAL(8),DIMENSION(3,3)               :: aele, atele, qq
REAL(8),DIMENSION(3)                 :: rxele, rxnele, rxwele,  ryele, rele

REAL(8)                              :: sumu, sumv, sump, sumt, sumx, sumy
REAL(8)                              :: sumdu, sumdv, sumdp, sumdt
REAL(8)                              :: erroru, errorv, errorp, errort
REAL(8)                              :: tol, aaa, area,  dd, cross1, cross2, cross3
REAL(8)                              :: cond, conds, condf, spec, expan, tref,den,vis
REAL(8)                              :: xg1, xg2, xg3, yg1, yg2, yg3
REAL(8)                              :: b1, b2, b3, c1, c2, c3
REAL(8)                              :: f1, f2, f3, uj, vj, q
CONTAINS

SUBROUTINE MAIN()

IMPLICIT NONE

CALL READ_INPUT()
```

```
!
! Start calculation
!

DO iter = 1,niter

   CALL SOLVET()              ! Solve for temperature

   CALL SOLVEUV()             ! Solve for u & v - velocities

   CALL SOLVEP()              ! Solve pressure

   CALL UPDATE()              ! Update velocities

   CALL ERROR()               ! Compute relative error

!---------------------------------------------
! Write output file if the solution converge
!---------------------------------------------

   IF(erroru <= tol.OR.errorv <= tol.OR.errorp <= tol.OR.iter == niter) THEN

      CALL GETTIM(enhour,enminute,ensecond,enhund)

      WRITE(6,10) sthour,stminute,stsecond,sthund
      10 FORMAT('  Start time :',3X,I2,':',I2.2,':',I2.2,':',I2.2)

      WRITE(6,20) enhour,enminute,ensecond,enhund
      20 FORMAT('    End time :',3X,I2,':',I2.2,':',I2.2,':',I2.2)

   CALL WRITE_OUTPUT()        ! Write output file if meet criteria

   ENDIF

   IF(erroru <= tol.OR.errorv <= tol.OR.errorp <= tol.OR.iter == niter) STOP

END DO

END SUBROUTINE MAIN

!=====================================================================================!

SUBROUTINE SOLVET()  ! Subroutine for solve Temperature

IMPLICIT NONE

INTEGER(4)                 :: it, nniter
INTEGER(4)                 :: mm, ic, ir, ieq
REAL(8), DIMENSION(3,3)    :: acov, acovn, acovw, adif
REAL(8), DIMENSION(3)      :: ele, bc, tb
REAL(8)                    :: sum, error
REAL(8)                    :: canu, canv, caw1, caw23, caw4
REAL(8)                    :: uba, vba, cqq
REAL(8)                    :: absu, peclet, kba, hele, ds, alp, bb

nniter = 10
told = t

loop : do it = 1,nniter

sysr = 0.
tbar = 0.
digt = 0.

!-----------------------------------
! Loop over the number of elements
!-----------------------------------

element : do ie = 1,nelem
```

```
!---------------------------------
! Find element local coordinates:
!---------------------------------

ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)
yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))

IF(area <= 0.) WRITE(6,5) ie
5 FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,            &
           ' HAS NEGATIVE OR ZERO area ', /,              &
           ' --- check F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES', &
           ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'            )
IF(area <= 0.) STOP

b1 = yg2 - yg3
b2 = yg3 - yg1
b3 = yg1 - yg2

c1 = xg3 - xg2
c2 = xg1 - xg3
c3 = xg2 - xg1

!------------
! Setup kba
!------------

uba    = (u(ii)+u(jj)+u(kk))/3.
vba    = (v(ii)+v(jj)+v(kk))/3.
absu   = SQRT((uba*uba) + (vba*vba))
ds = SQRT((xg1-xg2)*(xg1-xg2) + (yg1-yg2)*(yg1-yg2))
hele = 2.*area/ds
peclet = absu*hele*den*spec/(2.*condf)
alp = 1./(DTANH(peclet)) - 1./peclet
kba = alp*hele/(2.*absu)
if(peclet == 0.) kba = 0.

!------------------------------------
! Setup [A] matrix: (Diffusion term)
!------------------------------------

adif(1,1) =  ((b1*b1)+(c1*c1))/(4.*area)
adif(1,2) =  ((b1*b2)+(c1*c2))/(4.*area)
adif(1,3) =  ((b1*b3)+(c1*c3))/(4.*area)
adif(2,2) =  ((b2*b2)+(c2*c2))/(4.*area)
adif(2,3) =  ((b2*b3)+(c2*c3))/(4.*area)
adif(3,3) =  ((b3*b3)+(c3*c3))/(4.*area)
adif(2,1) =  adif(1,2)
adif(3,1) =  adif(1,3)
adif(3,2) =  adif(2,3)

!======================================
! Setup [A] matrix: (Convection term)
!======================================

!--------------------
! Setup  [An] matrix
!--------------------

canu = den*uba/6.
canv = den*vba/6.

acovn(1,1) = canu*b1 + canv*c1
acovn(1,2) = canu*b2 + canv*c2
acovn(1,3) = canu*b3 + canv*c3
```

```
acovn(2,1) = acovn(1,1)
acovn(2,2) = acovn(1,2)
acovn(2,3) = acovn(1,3)
acovn(3,1) = acovn(1,1)
acovn(3,2) = acovn(1,2)
acovn(3,3) = acovn(1,3)

!---------------------
! Setup  [Aw] matrix
!---------------------

caw1  = uba*uba/(4.*area)
caw23 = uba*vba/(4.*area)
caw4  = vba*vba/(4.*area)

acovw(1,1) = caw1*b1*b1 + caw23*(b1*c1 + b1*c1) + caw4*c1*c1
acovw(1,2) = caw1*b1*b2 + caw23*(b1*c2 + b2*c1) + caw4*c1*c2
acovw(1,3) = caw1*b1*b3 + caw23*(b1*c3 + b3*c1) + caw4*c1*c3

acovw(2,1) = acovw(1,2)
acovw(2,2) = caw1*b2*b2 + caw23*(b2*c2 + b2*c2) + caw4*c2*c2
acovw(2,3) = caw1*b2*b3 + caw23*(b2*c3 + b3*c2) + caw4*c2*c3

acovw(3,1) = acovw(1,3)
acovw(3,2) = acovw(2,3)
acovw(3,3) = caw1*b3*b3 + caw23*(b3*c3 + b3*c3) + caw4*c3*c3

!------------------------------------
! Setup  [Aconv] matrix : [An] + [Aw]
!------------------------------------

acov = acovn + kba*acovw

!-------------------------------------
! Setup [aele] matrix : [adif]+[acov]
!-------------------------------------

IF(ltype(ie,1) == 1) then

cond = conds
qq = 0.

!---------------------------
! Setup [RQ] matrix:(solid)
!---------------------------

       If(ltype(ie,2) == 1) then
              cqq = q*area/3.
              qq(1) = cqq*1.
              qq(2) = cqq*1.
              qq(3) = cqq*1.
       END If

END If

IF(ltype(ie,1) == 0) then

cond = condf
qq = 0.

!----------------------------
! Setup [RQ] matrix: (fluid)
!----------------------------

       If(ltype(ie,2) == 1) then
              cqq = q*area/3.
              qq(1) = den*cqq*1.
              qq(2) = den*cqq*1.
              qq(3) = den*cqq*1.
       END If

END If
```

```
!---------------------
! Setup [r] matrix:
!---------------------

rele = 0. + qq

aele = spec*acov + cond*adif

!----------
! Solve T
!----------

bc = 0.

ele(1) = t(ii)
ele(2) = t(jj)
ele(3) = t(kk)

if (ibct(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibct(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibct(kk) == 1) bc(3) = 1

!----------------------
! Apply BC on element
!----------------------

outer1: do ieq = 1,3

   if(bc(ieq) == 0) cycle outer1

      inner1: do ir = 1,3
         if(ir == ieq) cycle inner1
         rele(ir) = rele(ir) - aele(ir,ieq)*ele(ieq)
         aele(ir,ieq) = 0.
      enddo inner1

      do ic = 1,3
         aele(ieq,ic) = 0.
      enddo

   aele(ieq,ieq) = 1.
   rele(ieq) = ele(ieq)

enddo outer1

!--------------------------------
!  Element by element solutions
!--------------------------------

do i = 1,3
   sum = 0.
   do j = 1,3
      sum = sum + aele(i,j)*t(intmat(ie,j))
   enddo
   tb(i) = sum
enddo

!-----------
! assemble
!-----------

do i = 1,3
   mm = intmat(ie,i)
   sysr(mm) =  sysr(mm) + rele(i)
   tbar(mm) =  tbar(mm) + tb(i)
   digt(mm) =  digt(mm) + aele(i,i)
enddo

!------------------------------------------------------------------

end do element
```

```
do i = 1,npoi
!   tnew(i) = 0.9*(t(i) - ((tbar(i)-sysr(i))/digt(i))) + 0.1*t(i)
    tnew(i) = t(i) - ((tbar(i)-sysr(i))/digt(i))
enddo

t = tnew

end do loop

END SUBROUTINE SOLVET

!======================================================================================!

SUBROUTINE SOLVEUV()  ! Subroutine for solve u & v -velocities

IMPLICIT NONE

INTEGER(4)                :: ll, mm, nn, ieq, ic, ir
REAL(8)                   :: sum, coefn, coefw, canu, canv, caw1, caw23, caw4
REAL(8)                   :: uba, vba, absu, peclet, kba, hele, ds, alp, bb
REAL(8), DIMENSION(3)     :: rpy, rpny, rpwy, rgy, rgny, rgwy
REAL(8), DIMENSION(3)     :: bc, ele, fbx, fby, rpx
REAL(8), DIMENSION(3,3)   :: acov, acovn, acovw, adif
REAL(8), DIMENSION(3,3)   :: axele, ayele
REAL(8), DIMENSION(npoi) :: rpsys, fbarx, fbary, fx, fy, digx, digy, rxsys

rpsys = 0.
 sysa = 0.
   kp = 0.
 uold = u
 vold = v

loop1: do nn = 1,2

fbarx = 0.
fbary = 0.
   fx = 0.
   fy = 0.
 digx = 0.
 digy = 0.

!
! Loop over the number of elements
!

loop2: DO ie = 1,nelem

!---------------------------------
! Find element local coordinates:
!---------------------------------

ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)
yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))

IF(area <= 0.) WRITE(6,5) ie
5 FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,            &
           ' HAS NEGATIVE OR ZERO area ', /,              &
           ' --- check F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES', &
           ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'           )
IF(area <= 0.) STOP

b1 = yg2 - yg3
b2 = yg3 - yg1
b3 = yg1 - yg2
```

```
c1 = xg3 - xg2
c2 = xg1 - xg3
c3 = xg2 - xg1

!------------
! Setup kba
!------------

uba    = (u(ii)+u(jj)+u(kk))/3.
Vba    = (v(ii)+v(jj)+v(kk))/3.
absu   = SQRT((uba*uba) + (vba*vba))
ds     = SQRT((xg1-xg2)*(xg1-xg2) + (yg1-yg2)*(yg1-yg2))
hele   = 2.*area/ds
peclet = absu*hele*den*spec/(2.*condf)
alp    = 1./(DTANH(peclet)) - 1./peclet
kba    = alp*hele/(2.*absu)

if(peclet == 0.) kba = 0.



!========================================
! Setup [A] matrix: (Convection term)
!========================================

!---------------------
! Setup  [An] matrix
!---------------------

canu = den*uba/6.
canv = den*vba/6.

acovn(1,1) = canu*b1 + canv*c1
acovn(1,2) = canu*b2 + canv*c2
acovn(1,3) = canu*b3 + canv*c3

acovn(2,1) = acovn(1,1)
acovn(2,2) = acovn(1,2)
acovn(2,3) = acovn(1,3)

acovn(3,1) = acovn(1,1)
acovn(3,2) = acovn(1,2)
acovn(3,3) = acovn(1,3)

!---------------------
! Setup  [Aw] matrix
!---------------------

caw1  = uba*uba/(4.*area)
caw23 = uba*vba/(4.*area)
caw4  = vba*vba/(4.*area)

acovw(1,1) = caw1*b1*b1 + caw23*(b1*c1 + b1*c1) + caw4*c1*c1
acovw(1,2) = caw1*b1*b2 + caw23*(b1*c2 + b2*c1) + caw4*c1*c2
acovw(1,3) = caw1*b1*b3 + caw23*(b1*c3 + b3*c1) + caw4*c1*c3

acovw(2,1) = acovw(1,2)
acovw(2,2) = caw1*b2*b2 + caw23*(b2*c2 + b2*c2) + caw4*c2*c2
acovw(2,3) = caw1*b2*b3 + caw23*(b2*c3 + b3*c2) + caw4*c2*c3

acovw(3,1) = acovw(1,3)
acovw(3,2) = acovw(2,3)
acovw(3,3) = caw1*b3*b3 + caw23*(b3*c3 + b3*c3) + caw4*c3*c3

!-------------------------------------
! Setup  [Aconv] matrix : [An] + [Aw]
!-------------------------------------

acov = acovn + kba*acovw
```

```
!========================================
! Setup [A] matrix: (Diffusion term)
!========================================

adif(1,1) = ((b1*b1)+(c1*c1))/(4.*area)
adif(1,2) = ((b1*b2)+(c1*c2))/(4.*area)
adif(1,3) = ((b1*b3)+(c1*c3))/(4.*area)

adif(2,2) = ((b2*b2)+(c2*c2))/(4.*area)
adif(2,3) = ((b2*b3)+(c2*c3))/(4.*area)
adif(3,3) = ((b3*b3)+(c3*c3))/(4.*area)

adif(2,1) = adif(1,2)
adif(3,1) = adif(1,3)
adif(3,2) = adif(2,3)

!========================
! Setup [rp] matrix:
!========================

!--------------------
! Setup [rpx] matrix:
!--------------------

rxnele(1) = -(b1*p(ii)+b2*p(jj)+b3*p(kk))/6.
rxnele(2) = rxnele(1)
rxnele(3) = rxnele(1)

rxwele(1) = -(b1*uba + c1*vba)*(b1*p(ii)+b2*p(jj)+b3*p(kk))/(4.*area)
rxwele(2) = -(b2*uba + c2*vba)*(b1*p(ii)+b2*p(jj)+b3*p(kk))/(4.*area)
rxwele(3) = -(b3*uba + c3*vba)*(b1*p(ii)+b2*p(jj)+b3*p(kk))/(4.*area)

rxele = rxnele + kba*rxwele

!--------------------
! Setup [rpy] matrix:
!--------------------

rpny(1) = -(c1*p(ii)+c2*p(jj)+c3*p(kk))/6.
rpny(2) = rpny(1)
rpny(3) = rpny(1)

rpwy(1) = -(b1*uba + c1*vba)*(c1*p(ii)+c2*p(jj)+c3*p(kk))/(4.*area)
rpwy(2) = -(b1*uba + c1*vba)*(c1*p(ii)+c2*p(jj)+c3*p(kk))/(4.*area)
rpwy(3) = -(b1*uba + c1*vba)*(c1*p(ii)+c2*p(jj)+c3*p(kk))/(4.*area)

rpy = rpny + kba*rpwy

!========================
! Setup [rg] matrix:
!========================

coefn  = den*10.*area/12.
Coefw  = den*10.*(expan*(t(ii) + t(jj) + t(kk)) - 3.*(1. + expan*tref))/6.

!coefn = 0.
!coefw = 0.

rgny(1)= coefn*(expan*( 2.*t(ii) +    t(jj) +    t(kk) ) - 4.*(1. + (expan*tref)))
rgny(2)= coefn*(expan*(    t(ii) + 2.*t(jj) +    t(kk) ) - 4.*(1. + (expan*tref)))
rgny(3)= coefn*(expan*(    t(ii) +    t(jj) + 2.*t(kk) ) - 4.*(1. + (expan*tref)))
rgwy(1) = coefw*(b1*uba + c1*vba)
rgwy(2) = coefw*(b2*uba + c2*vba)
rgwy(3) = coefw*(b3*uba + c3*vba)

rgy = rgny + kba*rgwy

!---------------
! Sum term in y:
!---------------

ryele = rpy + rgy
```

```
!-------------------------------------
! Setup [aele] matrix : [adif]+[acov]
!-------------------------------------

axele = acov + vis*adif
ayele = axele


if(nn == 1) then

aele = axele

!----------
! Solve U
!----------

bc = 0.

ele(1) = u(ii)
ele(2) = u(jj)
ele(3) = u(kk)

if (ibcu(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibcu(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibcu(kk) == 1) bc(3) = 1

!----------------------
! Apply BC on element
!----------------------

outer1: DO ieq = 1,3


   IF(bc(ieq) == 0) CYCLE outer1

      inner1: DO ir = 1,3
         IF(ir == ieq) CYCLE inner1
         rxele(ir) = rxele(ir) - axele(ir,ieq)*ele(ieq)
         axele(ir,ieq) = 0.
      END DO inner1

      DO ic = 1,3
         axele(ieq,ic) = 0.
      END DO

   axele(ieq,ieq) = 1.
   rxele(ieq) = ele(ieq)

END DO outer1

!----------
! Solve V
!----------

bc = 0.

ele(1) = v(ii)
ele(2) = v(jj)
ele(3) = v(kk)

if (ibcv(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibcv(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibcv(kk) == 1) bc(3) = 1

!----------------------
! Apply BC on element
!----------------------

outer2: DO ieq = 1,3

   IF(bc(ieq) == 0) CYCLE outer2
```

```
      inner2: DO ir = 1,3
         IF(ir == ieq) CYCLE inner2
         ryele(ir) = ryele(ir) - ayele(ir,ieq)*ele(ieq)
         ayele(ir,ieq) = 0.
      END DO inner2

      DO ic = 1,3
         ayele(ieq,ic) = 0.
      END DO

   ayele(ieq,ieq) = 1.
   ryele(ieq) = ele(ieq)


END DO outer2

endif

!--------------------------------
!  Element by element solutions
!--------------------------------

do i = 1,3
   sumx = 0.
   sumy = 0.
   do j = 1,3
      sumx = sumx + axele(i,j)*u(intmat(ie,j))
          sumy = sumy + ayele(i,j)*v(intmat(ie,j))
   enddo
   fbx(i) = sumx
   fby(i) = sumy
enddo

!-----------
! assemble
!-----------

DO i = 1,3
   mm = intmat(ie,i)

       fx(mm) =    fx(mm) + rxele(i)
    fbarx(mm) = fbarx(mm) + fbx(i)
     digx(mm) =  digx(mm) + axele(i,i)

       fy(mm) =    fy(mm) + ryele(i)
    fbary(mm) = fbary(mm) + fby(i)
     digy(mm) =  digy(mm) + ayele(i,i)

   if(nn == 1) then
        sysa(mm) =  sysa(mm) + aele(i,i)
    rpsys(mm) = rpsys(mm) + rpy(i)
   endif

END DO

!----------------------------------------------------

if(nn == 2) then
kp(ii) = kp(ii) + (area/(3.*sysa(ii)))   !
kp(jj) = kp(jj) + (area/(3.*sysa(jj)))   ! Setup kp
kp(kk) = kp(kk) + (area/(3.*sysa(kk)))   !
endif

END DO loop2

!-----------------------------------------------------
if(nn == 1 ) then
do i = 1,npoi
   unew(i) = 0.8*(u(i) - ((fbarx(i)-fx(i))/digx(i))) + 0.2*u(i)
   vnew(i) = 0.8*(v(i) - ((fbary(i)-fy(i))/digy(i))) + 0.2*v(i)

!   unew(i) = u(i) - ((fbarx(i)-fx(i))/digx(i))
!   vnew(i) = v(i) - ((fbary(i)-fy(i))/digy(i))
enddo
```

```
u = unew
v = vnew
endif

!-----------------------------------------------------------------

ru = fbarx - fx
rv = fbary - rpsys

do i = 1,npoi
   uhat(i) = (-(fbarx(i) - u(i)*sysa(i)) + ru(i))/sysa(i)
   vhat(i) = (-(fbary(i) - v(i)*sysa(i)) + rv(i))/sysa(i)
enddo

enddo loop1

END SUBROUTINE SOLVEUV

!=====================================================================================!

SUBROUTINE SOLVEP()  ! Subroutine for solve Temperature

implicit none

REAL(8)           :: sum, sumup, sumdw, error, a, b
integer(4)        :: it, nniter

pold = p
nniter = 100
check = 1

! Step 2
call pele()
EE = sysr - pbar

! Step 3
PP = EE

loop : do it = 1,nniter

! Step 4
check = 0
call pele()

! Step 5
sumup = 0.
sumdw = 0.
do i = 1,npoi
   sumup = sumup + EE(i)*PP(i)
   sumdw = sumdw + EB(i)*PP(i)
enddo

a = sumup/sumdw

! Step 6
pnew = p + a*PP

! Step 7
EEnew = EE - a*EB

! Step 8
sumup = 0.
sumdw = 0.
do i = 1,npoi
   sumup = sumup + EEnew(i)*EEnew(i)
   sumdw = sumdw + EE(i)*EE(i)
enddo

b = sumup/sumdw

! Step 9
PPnew = EEnew + b*PP
```

```
! Step 10
PP = PPnew
EE = EEnew

!-----------------------------------------

sum = 0.

do j = 1,npoi
   sum = sum + abs(p(j)-pnew(j))
enddo

error = sum/npoi

p = pnew

if(error <= 1.e-6) exit

!-----------------------------------------

end do loop

END SUBROUTINE SOLVEP

!=====================================================================================!

subroutine pele()

implicit none

REAL(8)                  :: cru, crv, xb1,   xb2,  yb1,  yb2
REAL(8)                  :: unx, uny, coefp
REAL(8), DIMENSION(3,3)  :: adif
REAL(8), DIMENSION(3)    :: rpu, rpv, rb
REAL(8)                  :: sum
REAL(8), DIMENSION(3)    :: ele, bc, pb, kpele
INTEGER(4)               :: mm, ic, ir, ieq

sysr = 0.
pold = p
pbar = 0.
digp = 0.
  EB = 0.

DO ie = 1,nelem     ! Loop over the number of elements:

 rb = 0.
 ii = intmat(ie,1)
 jj = intmat(ie,2)
 kk = intmat(ie,3)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

area = 0.5*(xg2*(yg3-yg1)+xg1*(yg2-yg3)+xg3*(yg1-yg2))



IF(area <= 0.) WRITE(6,5) ie
5 FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,            &
           ' HAS NEGATIVE OR ZERO area ', /,              &
           ' --- check F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES', &
           ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---'           )

IF(area <= 0.) STOP
```

```
b1 = yg2 - yg3
b2 = yg3 - yg1
b3 = yg1 - yg2

c1 = xg3 - xg2
c2 = xg1 - xg3
c3 = xg2 - xg1

!--------------------------
! Setup diffusion matrices
!--------------------------

adif(1,1) = ((b1*b1)+(c1*c1))/(4.*area)
adif(1,2) = ((b1*b2)+(c1*c2))/(4.*area)
adif(1,3) = ((b1*b3)+(c1*c3))/(4.*area)
adif(2,2) = ((b2*b2)+(c2*c2))/(4.*area)
adif(2,3) = ((b2*b3)+(c2*c3))/(4.*area)
adif(3,3) = ((b3*b3)+(c3*c3))/(4.*area)

adif(2,1) = adif(1,2)
adif(3,1) = adif(1,3)
adif(3,2) = adif(2,3)

!-------------------
! Setup [ru] matrix
!-------------------

cru    = (uhat(ii)+uhat(jj)+uhat(kk))/6.
rpu(1) = cru*b1
rpu(2) = cru*b2
rpu(3) = cru*b3

!-------------------
! Setup [rv] matrix
!-------------------

crv    = (vhat(ii)+vhat(jj)+vhat(kk))/6.
rpv(1) = crv*c1
rpv(2) = crv*c2
rpv(3) = crv*c3

!-------------------
! Setup [rb] matrix
!-------------------

IF(ibce(ie) == 1) THEN
    ib = intbou(ie,1)
    jb = intbou(ie,2)

   xb1 = coord(ib,1)
   xb2 = coord(jb,1)

   yb1 = coord(ib,2)
   yb2 = coord(jb,2)

   unx = yb2 - yb1
   uny = xb1 - xb2

   IF(ib == ii) THEN
      rb(1) = ((u(ib)/3.)+(u(jb)/6.))*unx + ((v(ib)/3.)+(v(jb)/6.))*uny
      rb(2) = ((u(ib)/6.)+(u(jb)/3.))*unx + ((v(ib)/6.)+(v(jb)/3.))*uny
      rb(3) = 0.
   ENDIF



   IF(ib == jj) THEN
      rb(1) = 0.
      rb(2) = ((u(ib)/3.)+(u(jb)/6.))*unx + ((v(ib)/3.)+(v(jb)/6.))*uny
      rb(3) = ((u(ib)/6.)+(u(jb)/3.))*unx + ((v(ib)/6.)+(v(jb)/3.))*uny
   ENDIF
```

```
   IF(ib == kk) THEN
      rb(1) = ((u(ib)/6.)+(u(jb)/3.))*unx + ((v(ib)/6.)+(v(jb)/3.))*uny
      rb(2) = 0.
      rb(3) = ((u(ib)/3.)+(u(jb)/6.))*unx + ((v(ib)/3.)+(v(jb)/6.))*uny
   ENDIF

ENDIF

coefp = (kp(ii)+kp(jj)+kp(kk))/3.

aele = coefp*adif

rele = rpu + rpv - rb

!----------
! Solve P
!----------

bc = 0.

ele(1) = p(ii)
ele(2) = p(jj)
ele(3) = p(kk)

if (ibcp(ii) == 1) bc(1) = 1
if (ibcp(jj) == 1) bc(2) = 1
if (ibcp(kk) == 1) bc(3) = 1

!---------------------
! Apply BC on element
!---------------------

outer1: do ieq = 1,3

   if(bc(ieq) == 0) cycle outer1

      inner1: do ir = 1,3
         if(ir == ieq) cycle inner1
         rele(ir) = rele(ir) - aele(ir,ieq)*ele(ieq)
         aele(ir,ieq) = 0.
      enddo inner1

      do ic = 1,3
         aele(ieq,ic) = 0.
      enddo

   aele(ieq,ieq) = 1.
   rele(ieq) = ele(ieq)

enddo outer1

!-------------------------------
!  Element by element solutions
!-------------------------------

if(check == 1) then

   do i = 1,3
      sum = 0.
      do j = 1,3
         sum = sum + aele(i,j)*p(intmat(ie,j))
      enddo
      pb(i) = sum
   enddo

   do i = 1,3
      mm = intmat(ie,i)
      sysr(mm) = sysr(mm) + rele(i)
      pbar(mm) = pbar(mm) + pb(i)
      digp(mm) = digp(mm) + aele(i,i)
   end do

else
```

```
   do i = 1,3
      sum = 0.
      do j = 1,3
         mm = intmat(ie,j)
         sum = sum + aele(i,j)*pp(mm)
      enddo
      kpele(i) = sum
   enddo

   do i = 1,3
      mm = intmat(ie,i)
      EB(mm) = EB(mm) + kpele(i)
   end do

endif
end do

end subroutine pele

!====================================================================================!

SUBROUTINE UPDATE()  ! Subroutine for update velocities

IMPLICIT NONE

sysrx = 0.        ! Reset the system of equation
sysry = 0.        ! Reset the system of equation

DO ie = 1,nelem   ! Loop over the number of elements

ii = intmat(ie,1)
jj = intmat(ie,2)
kk = intmat(ie,3)

xg1 = coord(ii,1)
xg2 = coord(jj,1)
xg3 = coord(kk,1)

yg1 = coord(ii,2)
yg2 = coord(jj,2)
yg3 = coord(kk,2)

b1 = yg2 - yg3
b2 = yg3 - yg1
b3 = yg1 - yg2

c1 = xg3 - xg2
c2 = xg1 - xg3
c3 = xg2 - xg1

!---------------------
! Setup [rpx] matrix:
!---------------------

rxele(1) = -(b1*p(ii)+b2*p(jj)+b3*p(kk))/6.
rxele(2) = rxele(1)
rxele(3) = rxele(1)
!---------------------
! Setup [rpy] matrix:
!---------------------


ryele(1) = -(c1*p(ii)+c2*p(jj)+c3*p(kk))/6.
ryele(2) = ryele(1)
ryele(3) = ryele(1)

CALL ASSMUP()    ! Assemble element eq to form system eq

END DO
```

```
!-----------------------------
! Calculate the matrix sysr(i)
!-----------------------------

DO i =1,npoi
   sysrx(i) = sysrx(i)/sysa(i)
   sysry(i) = sysry(i)/sysa(i)
END DO

!-------------------------------------
! Evaluate the new value of velocities
!-------------------------------------

DO i = 1,npoi

   IF(ibcu(i) == 1) THEN
        u(i) = uold(i)
      ELSE
        u(i) = uhat(i) + sysrx(i)
   ENDIF

   IF(ABS(u(i)) <= 1.E-10)  u(i) = 0.

   IF(ibcv(i) == 1) THEN
        v(i) = vold(i)
      ELSE
        v(i) = vhat(i) + sysry(i)
   ENDIF

   IF(ABS(v(i)) <= 1.E-10)  v(i) = 0.

END DO

END SUBROUTINE UPDATE

!=====================================================================================!

SUBROUTINE ASSMUP() ! Subroutine for assembling in update

IMPLICIT NONE

DO i = 1,3
   ii = intmat(ie,i)
   sysrx(ii) = sysrx(ii) + rxele(i)
   sysry(ii) = sysry(ii) + ryele(i)
END DO

END SUBROUTINE ASSMUP

!=====================================================================================!

SUBROUTINE READ_INPUT()

IMPLICIT NONE

REAL(8) :: x, y

!
! Enter input file name
!
WRITE(6,10)
10 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER INPUT FILE NAME:',/)
READ(5,*) name1

OPEN(UNIT=7, FILE=name1, STATUS='OLD', ACTION='READ', IOSTAT=ierror)

CALL GETTIM(sthour,stminute,stsecond,sthund)

!
! Read input data
!
```

```
READ(7,*) nlines

DO i = 1,nlines
   READ(7,1) text
   1 FORMAT(20A4)
DO

READ(7,1) text
READ(7,*) npoi, nelem, nbou, nflux, niter, tol

ALLOCATE(intmat(nelem,3), intbou(nelem,2) , coord(npoi,2)               )
ALLOCATE(sysk(npoi,npoi), intbouq(nflux,3), nodeid(nflux)               )
ALLOCATE( ibcu(npoi)    , ibcv(npoi)      , ibcp(npoi)  , ibce(nelem)   )
ALLOCATE(    u(npoi)    , v(npoi)         , p(npoi)     , t(npoi)       )
ALLOCATE( uold(npoi)    , vold(npoi)      , pold(npoi)  , told(npoi)    )
ALLOCATE(   ru(npoi)    , rv(npoi)        , uhat(npoi)  , vhat(npoi)    )
ALLOCATE(   kp(npoi)    , vsum(npoi)      , areavg(npoi), qb(npoi)      )
ALLOCATE(sysrx(npoi)    , sysry(npoi)     , sysr(npoi)  , ibct(npoi)    )
ALLOCATE(bflux(nflux)   , esup2(npoi+1)   , chke(nelem) , elemq(nflux)  )
ALLOCATE(ltype(nelem,2)                                                 )
ALLOCATE(tbar(npoi), digt(npoi), pbar(npoi), digp(npoi), sysa(npoi)     )
ALLOCATE(unew(npoi),  vnew(npoi),   pnew(npoi),  tnew(npoi)             )
ALLOCATE(EE(npoi), PP(npoi), EEnew(npoi), PPnew(npoi), EB(npoi)         )
ALLOCATE(sysrold(npoi), EKP(npoi), comb(nelem)                          )

!
! Read Fluid-Solid properties
!

READ(7,1) text
READ(7,*) den, vis, expan, spec, conds, condf, tref, q

!
! Read nodal coordinates, boundary conditions, their values
!

READ(7,1) text

DO ip = 1,npoi
   READ(7,*) i,ibcu(i),ibcv(i),ibcp(i),ibct(i),(coord(i,k),k=1,2),u(i),v(i),p(i),t(i)
   IF(i /= ip) WRITE(6,40) ip
   40 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5,' IN DATA FILE IS MISSING')
   IF(i /= ip) STOP
END DO

!
! Read element nodal connection
!

READ(7,1) text

DO ie = 1,nelem
   READ(7,*)  i,(intmat(i,j),j=1,3),(ltype(i,k),k=1,2)
   ibce(i) = 0
   IF(i /= ie) WRITE(6,50) ie
   50 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
   IF(i /= ie) STOP
END DO

!
! Read inflow boundary element
!

READ(7,1) text

IF(nbou /= 0.) THEN
   DO ie = 1,nbou
      READ(7,*)  i, (intbou(i,j),j=1,2)
      IF(i /= 0) ibce(i) = 1
   END DO
END IF
```

```
!----------------------------------
! Read boundary for compute flux
!----------------------------------

READ(7,1) text

IF(nflux /= 0.) THEN
   DO ie = 1,nflux
      READ(7,*)  elemq(ie), (intbouq(ie,j),j=1,3)
   END DO
END IF

CLOSE(UNIT=7, STATUS='keep')

!
! Print out title
!
WRITE(6,60) npoi, nelem, NITER, tol
60 FORMAT(/,'   THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :',/,    &
            '      NUMBER OF NODES              =', I6, /,    &
            '      NUMBER OF ELEMENTS           =', I6, /,    &
            '      NUMBER OF MAX. ITERATION     =', I6, /,    &
            '      SPECIFIED STOPPING TOLERANCE =', E10.5 ,/)

!----------------------------------
! Find elements surrounding node
!----------------------------------

esup2 = 0

do ie = 1,nelem
 do ip = 1,3
    ipoi1 = intmat(ie,ip)+1
       esup2(ipoi1) = esup2(ipoi1)+1
 enddo
enddo

do ip = 2,npoi+1
   esup2(ip) = esup2(ip)+esup2(ip-1)
enddo

ALLOCATE(esup1(esup2(npoi+1)))

do ie = 1,nelem
 do ip = 1,3
    ipoi1 = intmat(ie,ip)
    istor = esup2(ipoi1)+1
    esup2(ipoi1) = istor
    esup1(istor) = ie
 enddo
enddo

do ipoi1 = npoi+1,2,-1
   esup2(ipoi1) = esup2(ipoi1-1)
enddo

esup2(1) = 0

END SUBROUTINE READ_INPUT

!=====================================================================================!

SUBROUTINE ERROR()

IMPLICIT NONE

!----------------------
! check for convergence
!----------------------

sumu = 0.
sumv = 0.
sump = 0.
sumt = 0.
```

```
sumdu = 0.
sumdv = 0.
sumdp = 0.
sumdt = 0.

DO i = 1,npoi
   sumdu = sumdu + ABS(uold(i)-u(i))
   sumu  = sumu  + ABS(u(i))

   sumdv = sumdv + ABS(vold(i)-v(i))
   sumv  = sumv  + ABS(v(i))

   sumdp = sumdp + ABS(pold(i)-p(i))
   sump  = sump  + ABS(p(i))

   sumdt = sumdt + ABS(told(i)-t(i))
   sumt  = sumt  + ABS(t(i))
END DO

if(sumv == 0.) then
    sumv = 1.e-6
   sumdv = 1.e-6
endif

if(sump == 0.) then
    sump = 1.e-6
   sumdp = 1.e-6
endif

erroru = sumdu/sumu
errorv = sumdv/sumv
errorp = sumdp/sump
errort = sumdt/sumt

OPEN(UNIT=11, FILE='Error', STATUS='UNKNOWN')

WRITE(6,70)  iter, erroru, errorv, errorp, errort
WRITE(11,70) iter, erroru, errorv, errorp, errort
70 FORMAT('iter = ', I4, 2X, E15.9, 2X, &
          E15.9, 2X, E15.9, 2X, E15.9)

END SUBROUTINE ERROR

!=====================================================================================!

SUBROUTINE WRITE_OUTPUT()

IMPLICIT NONE

WRITE(6,150)
150 FORMAT(/, ' ENTER THE OUTPUT FILE NAME',/)
READ(5,'(A)') name2

OPEN(UNIT=8, FILE=name2 , STATUS='NEW', IOSTAT=ierror)

   WRITE(8,160)
   160 FORMAT(/,2x,'node',8X,'u(i)',10X,'v(i)',10X,'p(i)',10X't(i)')

DO i = 1,npoi
   WRITE(8,190) i, u(i), v(i), p(i), t(i)
   190 FORMAT(I6,2X, 6E14.5)
END DO
END SUBROUTINE WRITE_OUTPUT

!=====================================================================================!
END MODULE SUPG
!*************************************************************************************'

PROGRAM CONJUGATE_HEAT_TRANSFER_3NODES
USE SUPG
IMPLICIT NONE
CALL MAIN()
END PROGRAM CONJUGATE_HEAT_TRANSFER_3NODES

!*************************************************************************************!
```

Proceeding of the 18th ME-NETT Conference
18-20 October 2004, Khon Kaen

Evaluation of Two Finite Element Schemes for Conjugate Heat Transfer Problems

Atipong Malatip Niphon Wansophark
Pramote Dechaumphai*
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University,
Bangkok, 10330, Thailand

Abstract

This paper presents two finite element schemes for solving conjugate heat transfer problems, where heat conduction in a solid is coupled with heat convection in viscous fluid flow. For solving viscous incompressible thermal flow in fluid region, the Streamline Upwind Finite Element method and the Streamline Upwind Petrov-Galerkin method are selected, while heat conduction in solid region is solved using the standard Galerkin method. The methods use the three-node triangular element with equal-order interpolation functions for all the variables of the velocity components, the pressure and the temperature. The main advantage of the presented approach is to consistently couple heat transfer along the solid-fluid interface. Three test cases, conjugate Couette flow problem in parallel plate channel, counter-flow in heat exchanger, and conjugate natural convection in a square cavity with a conducting wall, are selected to evaluate the presented algorithms.

1. Introduction

Conjugate heat transfer problems are encountered in many practical applications, where heat conduction in solid region is closely coupled with heat convection in an adjacent fluid. There are many engineering areas where conjugate heat transfer should be considered such as heat transfer enhancement with a finned surface, design of thermal insulation, cooling of nuclear reactor, design of solar collector, etc. Most of the computational studies in this research area, however, are based on finite difference and finite volume methods [1]. Numerous publications with computational results show that these methods can perform very well on the problems of interest, but some assumptions on heat transfer coefficients are needed to compute the temperatures along the solid-fluid interface. Furthermore, the determination of unknown temperatures and heat fluxes at the solid-fluid interface is done in an iterative way, usually through the use of the artificial heat transfer coefficient.

For the finite element method, some researchers proposed computational procedure for conjugate heat transfer problems. Misra and Sarkar [2] use the standard Galerkin formulation and solve the continuity, momentum and energy equations simultaneously. Cesini and Paroncini [3] use the streamfunction-vorticity formulation with segregated solution algorithm.

In this paper, two finite element schemes known as the Streamline Upwind Finite Element method [4] and Streamline Upwind Petrov-Galerkin method [5-6] are selected for the analysis of conjugate heat transfer problems. Both methods use equal-order interpolation functions for the velocity components, the pressure and the temperature, and then solved them separately for further improving the computational efficiency. The method also calculates the temperatures and the heat fluxes along the solid-fluid interface directly without the use of the assumed heat transfer coefficient.

2. Theoretical formulation and solution procedure

2.1 Governing equations

The governing equations for conjugate heat transfer problems consist of the conservation of mass or the continuity

* Corresponding author. Tel.: 02-218-6621; Fax: 02-218-6621.
E-mail address: fmepdc@eng.chula.ac.th (P. Dechaumphai)

equation, the conservation of momentums in x and y directions and the conservation of energy.

Continuity equation,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1a}$$

Momentum equations,

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1b}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\rho f_y \tag{1c}$$

where $f_y=-g_y\left[1-\beta\left(T-T_0\right)\right]$.

Energy equation,

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\rho Q \tag{1d}$$

where u and v are the velocity components in the x and y direction, respectively; ρ is the density, p is the pressure, μ is the viscosity, g_y is the gravitational acceleration constant, β is the volumetric coefficient of thermal expansion, T_o is the reference temperature for which buoyant force in the *y*-direction vanishes, c is specific heat, k is the coefficient of thermal conductivity and Q is the internal heat generation rate per unit volume. Equation (1d) can also be used for solving heat conduction in solid by setting both the velocity components, u and v, as zero.

2.2 Finite element formulations

2.2.1 Streamline Upwind Finite Element method

For the Streamline Upwinding Finite Element formulation, a special treatment for the convection terms is incorporated. These terms are approximated by a monotone streamline upwinding formulation to be used with the triangular element [4]. In this approach, the convection term is first written in the streamline coordinates as,

$$U_s\frac{\partial\phi}{\partial s} \tag{2}$$

where U_s and $\partial/\partial s$ are the velocity and the gradient along the streamline direction, respectively. These terms are evaluated by a streamline tracing method, which keeps track of the direction of the flow within the element.

2.2.2 Streamline Upwind Petrov-Galerkin method

In Streamline Upwind Petrov-Galerkin method, a modified weighting function, W_i, is applied to the convection terms for suppressing the non-physical spatial oscillation in the numerical solution. The modified weighting function is given by Zienkiewicz [6],

$$W_i=N_i+\frac{\alpha h}{2}\frac{\left[u\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\right]}{|U|} \tag{3}$$

where α is calculated for each element from,

$$\alpha=\alpha_{opt}=\coth Pe-\frac{1}{Pe} \tag{4a}$$

with

$$Pe=\frac{|U|h}{2k}\text{ and }|U|=\sqrt{u^2+v^2} \tag{4b}$$

where Pe is the Peclet numbers and h is the element size.

The basic idea of both the solution algorithms presented in this paper is to use the two momentum equations for solving the velocity components, use the continuity equation for solving the pressure, and use the energy equation for solving the temperature in solid and fluid regions.

2.2.3 Discretization of momentum and energy equations

The three-nodes triangular element is used in this study. The element assumes linear interpolation functions for the velocity components, the pressure, and the temperature as

$$\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{3}N_i(x,y)\phi_i \tag{5}$$

where ϕ is transport property (u, v, p and T) and N_i are the element interpolation functions.

To derive the momentum and the energy equations that correspond to the Streamline Upwind Finite Element scheme and the Streamline Upwind Petrov-Galerkin scheme, the Galerkin method of weighted residuals is employed by multiplying Eqs. (1b-d) with the weighting function, N_i, except for the convection terms which the special treatment as described in the above sections is used. Integration by parts are then performed using the Gauss theorem to yield the element equations in the form,

Momentum equations,

$$[A]\{u\}=\{R_{px}\}+\{R_u\} \tag{6a}$$

$$[A]\{v\}=\{R_{py}\}+\{R_v\}+\{R_{gy}\} \tag{6b}$$

Energy equation,

$$\left[A^T\right]\{T\} = \{R^T\} + \{R_Q^T\} \tag{7}$$

where the coefficient matrices $[A]$ and $\left[A^T\right]$ contain the known contributions from the convection and diffusion terms. Details of these matrices can be found in ref [4].

2.2.4 Discretization of pressure equation

To derive the pressure equation, the method of weighted residuals is applied to the continuity equation, Eq. (1a). Because the pressure term does not appear in the continuity equation, the relation between velocity components and pressure are thus required. Such relations can be derived from the momentum equations, Eqs. (6a-b) as,

$$A_{ii}u_i = -\sum_{j\neq i} A_{ij}u_j + f_i^u - \int_\Omega N_i \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \tag{8a}$$

$$A_{ii}v_i = -\sum_{j\neq i} A_{ij}v_j + f_i^v - \int_\Omega N_i \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega \tag{8b}$$

where f_i^u and f_i^v are the surface integral terms and the source term due to the buoyancy.

By applying Eqs. (8a-b) into the continuity equations, the pressure equations can be written in matrix form with unknowns of the nodal pressure as

$$[K]\{p\} = \{F_u\} + \{F_v\} + \{F_b\} \tag{9}$$

where the details for these element matrices can also found in ref [4].

The above element equations are assembled to yield the global equations for the velocity components, the temperature and the pressure equations. Appropriated boundary conditions are then applied prior to solving for the new velocity components, temperature and pressure values.

2.2.5 Computational procedure

The computational procedure starts from assuming initial nodal velocity components, pressures, and temperatures. The new nodal temperatures are computed using Eq. (7). The new nodal velocity components and pressures are then computed using Eqs. (6a-b) and (9), respectively. The nodal velocity components are then updated using Eqs. (8a-b) with the computed nodal pressures. This process is continued until the specified convergence criterion is met. Such segregated solution procedure helps reducing the computer storage because the equations for the velocity components, the pressure, and the temperature are solved separately.

3. Results

In this section, three example problems are presented. The first example, conjugate Couette flow problem in parallel plate channel, is chosen to evaluate the finite element formulations and to validate the developed computer programs. The second and the third examples, counter-flow in heat exchanger and conjugate natural convection in a square cavity with a conducting wall, are used to illustrate the capability of the presented schemes in the analysis of conjugate heat transfer problems.

3.1 Conjugate Couette flow problem in parallel plate channel

The first example for evaluating the finite element formulations and validating the developed computer programs is the problem of conjugate Couette flow problem in parallel plate channel. As shown in Fig. 1, the upper wall moves at a constant velocity and the other wall is stationary conducting solid. The other surface of the conducting solid is maintained at a constant temperature that is higher than the constant temperature of the

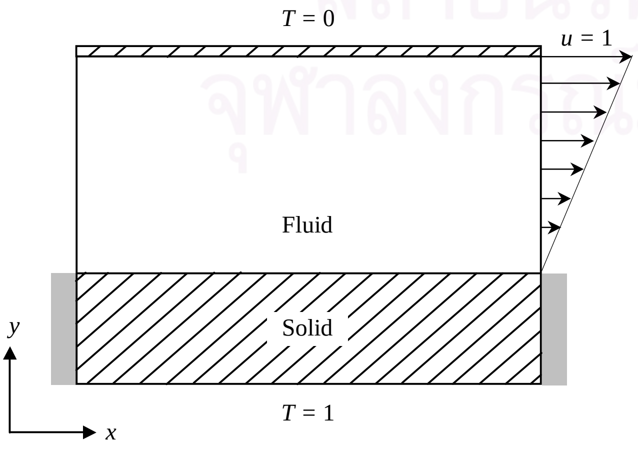


Fig. 1. A conjugate Couette flow problem in parallel plate channel.

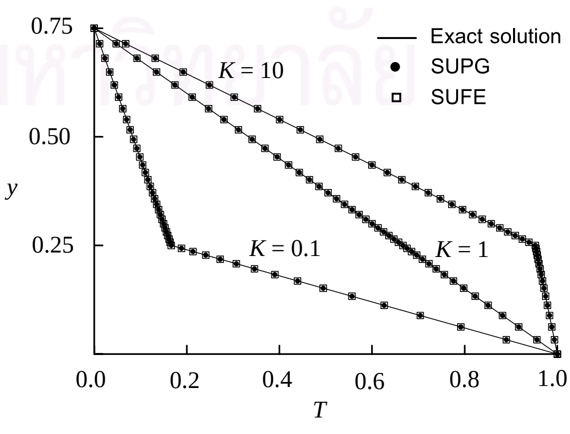


Fig. 2. Comparison of conjugate benchmark solutions for Couette flow problem.

opposing channel wall. The numerical results are compared with the analytical solution as shown in Ref. [7]. Fig. 2 shows that the computational results from both finite element schemes demonstrate excellent agreement with the analytical solution for varying conductivity ratios, $K = k_s / k_f$, where k_s and k_f are solid and fluid heat conduction coefficient respectively. The numerical results of the temperatures from the Streamline Upwind Petrov-Galerkin method and the Streamline Upwind Finite Element method are compared within 0.04% of the analytical solutions.

3.2 Conjugate counter flow heat exchanger

To validate the numerical schemes with the second test example, a conjugate counter flow heat exchanger problem is selected. This heat exchanger consists of two parallel flow passages with widths a_1 and a_3 separated by a solid plate with thickness of a_2 as shown in Fig. 3. The outer walls of the flow passages are assumed to be adiabatic. The same properties and uniform inlet velocity and temperature profiles are assumed for the hot and cold fluids. Parameters adopted in the computation are as follows, geometrical sizes a_1 = a_2 = a_3 = 0.1 and L = 1.0, the flow in upper channel parameters u_1 = 0.2, T_1 = 800, Re = 133.33 and Pr = 0.75, the flow in lower channel parameters u_2 = 0.1, T_2 = 300, Re = 66.67 and Pr = 0.75, conduction ratio, K = 5. The finite element model consisting of 1,763 nodes and 3,360 triangles, as shown in Fig. 4, is used in this study. Fig. 5 shows the predicted temperature contours in entire domain. The predicted temperature distributions at $x = L/2$ from both presented schemes are compared with the results from Chen and Han [8] as shown in Fig. 6. The figure shows good agreement of the solutions.

3.3 Conjugate natural convection in a square cavity with a conducting wall

To further evaluate the effectiveness of the presented schemes, the problem of conjugate natural convection in a square cavity with a conducting wall as shown in Fig. 7, is selected. The cavity is heated at the left side (solid wall) and cooled at the right side, all other boundaries are insulated. Fig. 8 shows the finite element model that consists of 2,009 nodes and 3,840 triangles. Figs. 9 and 10 show the predicted streamline and temperature contours for different thermal conductivity ratios of K = 1 and 10 at Grashof numbers of 10^3 and 10^5, respectively. The temperature and the heat flux distributions along the solid-fluid interface with the variation of conduction ratio, K, are shown in Figs. 11(a) and (b), respectively. Table 1 compares the predicted average Nusselt numbers at interface, $\overline{Nu}_{x=0}$. The computational results are compared with the results from Hribersek [9] which show good agreement of the solutions of average Nusselt numbers for both temperature and heat flux.

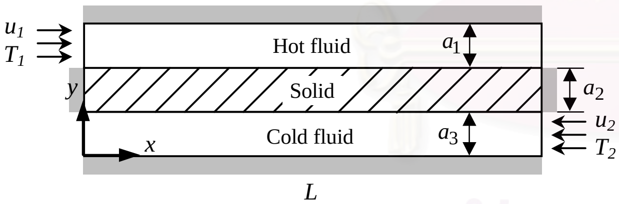


Fig. 3. A conjugate counter flow heat exchanger.

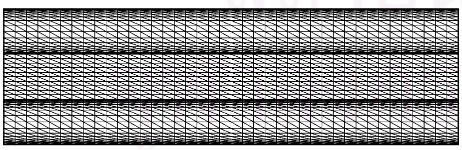


Fig. 4. Finite element model for conjugate counter flow heat exchanger.

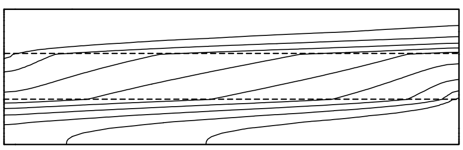


Fig. 5. Predicted temperature contours for a conjugate counter flow heat exchanger.

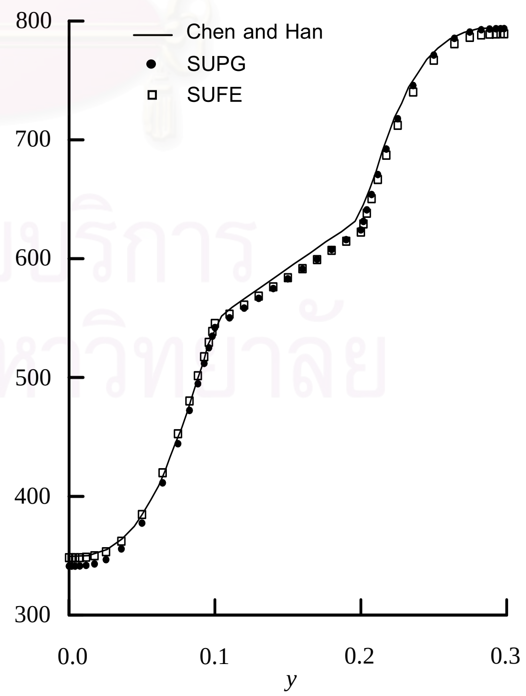


Fig. 6. The temperature profiles at $x = L/2$ for a conjugate counter flow heat exchanger.

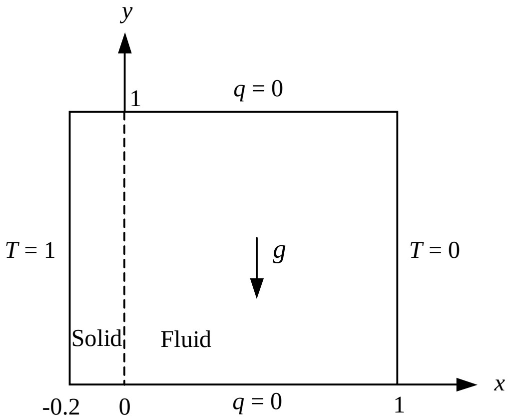


Fig. 7. Conjugate natural convection problem.

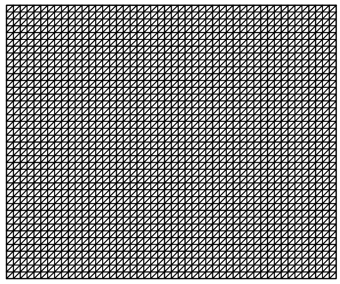
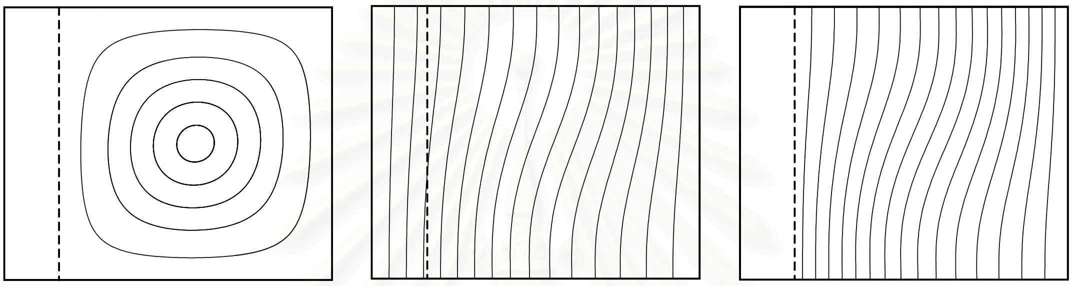
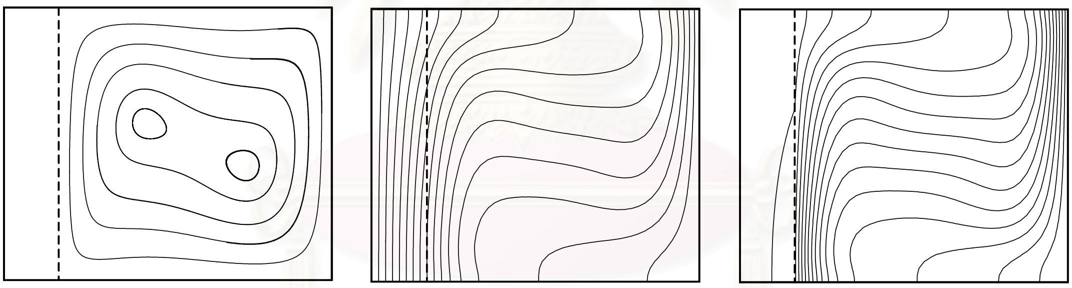


Fig. 8 Finite element model for the conjugate natural convection problem.



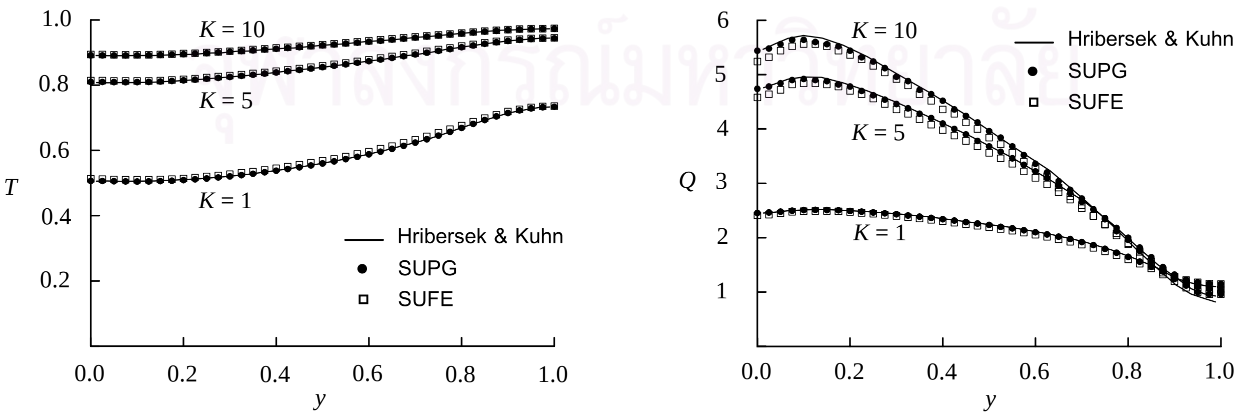
(a) (b) (c)

Fig. 9. (a) Streamline contours for K = 10, (b) Temperature contours for K = 1 and (c) Temperature contours for K = 10, all at $Gr = 10^3$.



(a) (b) (c)

Fig. 10. (a) Streamline contours for K = 10, (b) Temperature contours for K = 1 and (c) Temperature contours for K = 10, all at $Gr = 10^5$.



(a) (b)

Fig 11. (a) Interface temperatures and (b) Interface heat fluxes, all at $Gr = 10^5$.

Table 1 Variation of the overall Nusselt numbers.

Gr		Average Nusselt numbers along interface (% difference from Ref. [9])		
Conductivity ratio $K = k_s / k_f$		1	5	10
10^3	Hribersek [9]	0.87	1.02	1.04
10^3	SUPG	0.87 (0.0%)	1.02 (0.0%)	1.04 (0.0%)
10^3	SUFE	0.85 (2.29%)	1.03 (0.98%)	1.04 (0.0%)
10^5	Hribersek [9]	2.08	3.42	3.72
10^5	SUPG	2.07 (0.48%)	3.39 (0.87%)	3.67 (1.34%)
10^5	SUFE	2.04 (1.92%)	3.30 (3.51%)	3.60 (3.22%)

4. Conclusions

Two finite element methods for conjugate heat transfer problems are presented. The methods use three-node triangular element for the analysis of viscous incompressible thermal flow in the fluid region and heat transfer in the solid region. The convection terms in the momentum and the energy equations are treated by the Streamline Upwind Finite Element method and the Streamline Upwind Petrov-Galerkin method to suppress the non-physical spatial oscillation in the numerical solutions. The corresponding finite element equations are derived and corresponding computer programs have been developed. The test cases highlight the benefit of the finite element method for the analysis of conjugate heat transfer problems that can compute the temperatures along the solid-fluid interface directly.

5. Acknowledgement

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) for supporting this research work.

6. References

[1] Patankar SV. Numerical heat transfer and fluid flow. New York. McGraw-Hill, 1980.

[2] Misra D., Sarkar A. "Finite element analysis of conjugate natural convection in a square enclosure with a conducting vertical wall", Computer methods in applied mechanics and engineering, 1997, Vol. 141, pp. 205-219.

[3] Cesini G., Paroncini M., Cortella G. and Manzan M., "Natural convection from a horizontal cylinder in a rectangular cavity", International Journal of Heat and Mass Transfer, 1999, Vol. 42, pp. 1801-1811.

[4] Wansophark, N., Dechaumphai, P., "Combined Adaptive Meshing Technique and Segregated Finite Element Algorithm for Analysis of Free and Forced Convection Heat Transfer." Finite Elements in Analysis and Design, 2004, Vol. 40, pp. 645-663.

[5] Du Toit C.G., "A Segregated Finite Element Approach to the Solution of the Navier-Stokes Equations for Incompressible Flow", Computational Mechanics, 1998.

[6] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method. (5^{th} ed), 2000, McGraw Hill. International Editions.

[7] White F. M., Viscous Fluid Flow. (2^{nd} ed.), 1991, McGraw Hill, New York.

[8] Chen X. and Han P., "A Note on the Solution of Conjugate Heat Transfer Problems Using SIMPLE-Like Algorithms", International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, Vol. 21, pp. 463-467.

[9] Hribersek, M., Kuhn, G., "Conjugate Heat Transfer by Boundary Domain Integral Method." Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, Vol. 24, pp. 297-305.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายอธิพงษ์ มาลาทิพย์ เกิดเมื่อวันที่ 12 เดือนพฤษภาคม พุทธศักราช 2521 จังหวัดสุพรรณบุรี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เมื่อปีการศึกษา 2544 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2545