การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว
โดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะบนเมชที่เคลื่อนไหวได้

นายปริญญา บุญมาเลิศ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2552

UNSTEADY HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS USING
CHARACTERISTIC-BASED SPLIT ALGORITHM ON MOVING MESHES

Mr. Parinya Boonmalert

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic year 2009

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวโดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะบนเมชที่เคลื่อนไหวได้
โดย	นายปริญญา บุญมาเลิศ
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ชัญญาพันธ์ วิรุฬห์ศรี)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.วรางค์รัตน์ จันทสาโร)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ่มตระการ)

ปริญญา บุญมาเลิศ : การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวโดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะบนเมชที่เคลื่อนไหวได้. (UNSTEADY HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS USING CHARACTERISTIC-BASED SPLIT ALGORITHM ON MOVING MESHES) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ศ. ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 146 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลประดิษฐ์ขึ้นจากการประยุกต์ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะเข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวล กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม และกฎการอนุรักษ์พลังงาน แล้วจึงนำมาประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์

เพื่อให้ผลลัพธ์ของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงได้ทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เข้ากับกระบวนการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในแต่ละช่วงเวลาของการวิเคราะห์

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ กระทำโดยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงจำนวนหลายปัญหา รวมทั้งปัญหาของการเกิดคลื่นช็อกภายในท่อ ซึ่งพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงและสอดคล้องกัน การประเมินสมรรถนะของการรวมกระบวนการที่นำเสนอทั้งสองเข้าด้วยกันได้ใช้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ปริญญา บุญมาเลิศ
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2552

4771859221 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS : FINITE ELEMENT / HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW / CHARACTERISTIC-BASED SPLIT ALGORITHM

PARINYA BOONMALERT: UNSTEADY HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS USING CHARACTERISTIC-BASED SPLIT ALGORITHM ON MOVING MESHES: THESIS ADVISOR PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D., 146 pp.

In this thesis, a finite element method for unsteady high-speed inviscid compressible flow problems is presented. The finite element equations corresponding to these flow problems were derived from the governing Navier-Stokes partial differential equations that consist of the conservation of mass, momentum, and energy using the characteristic-based split algorithm. These derived finite element equations were used in the development of a computer program.

To improve the solution accuracy of unsteady high-speed inviscid compressible flow problems, an adaptive meshing technique was employed in each time step of the finite element analysis. The adaptive meshing provided a closed correlation of optimal element sizes and the flow solution behaviors.

The proposed method was verified by several problems that have exact solutions, including the shock tube problem. Accurate finite element solutions were obtained and compared to the exact solution. The performance of the combined procedure was evaluated by solving more complex unsteady high-speed compressible flow problems.

Department : Mechanical Engineering Student's Signature Parinya Boonmalert
Field of Study : Mechanical Engineering Advisor's Signature Prak Dy
Academic Year : 2009

กิตติกรรมประกาศ

มวลการสรรเสริญเป็นสิทธิของอัลลอฮ์พระผู้อภิบาลแห่งสากลโลก ผู้วิจัยขอสรรเสริญต่อโปรดปรานของอัลลอฮ์ ซุบฮานะฮูวะตะอาลาที่ได้ทรงประทานความสำเร็จให้แก่วิทยานิพนธ์นี้ด้วยดี

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัย นอกจากนี้ท่านยังได้ถ่ายทอดข้อคิดหลายสิ่งหลายอย่างที่มีคุณค่ายิ่งเกี่ยวกับการทำงานและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร.วรางค์รัตน์ จันทสาโร ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ่มตระการ และอาจารย์ ดร.ชัญญาพันธ์ วิรุฬห์ศรี กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณโครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษก (คปก.) สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (The Thailand Research Fund) และ ดร.วัลลภ สุวรรณดี อธิการบดีมหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิตและประธานที่ปรึกษาผู้ว่าราชการกรุงเทพมหานคร ที่ให้การสนับสนุนทางการเงินตลอดระยะเวลาที่ทำงานวิจัยฉบับนี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ และอาจารย์ ดร.สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช ที่ได้ถ่ายทอดความรู้ คอยให้คำปรึกษา และประสบการณ์ในทุก ๆ ด้าน ขอขอบคุณ คุณสุธี ไตรวิวัฒนา คุณอธิพงษ์ มาลาทิพย์ คุณพัชรี ธีระเอก คุณพิชเญนทร์ โพธิคุณ คุณสุทธิคมน์ พันธิมากรกิจ ซึ่งเป็นผู้ร่วมงานในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับความช่วยเหลือและกำลังใจตลอดเวลาทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ บิดา มารดา พี่สาว พี่เขย หลาน ๆ และ คุณวาสนา แสงสุข ที่เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด ขอพระองค์อัลลอฮ์ ซุบฮานะฮูวะตะอาลา ทรงตอบแทนความดีงามแก่ทุกท่าน และขอให้พระองค์ทรงโปรดนำเราท่านทั้งหลายสู่ทางที่เที่ยงตรงด้วยเถิด

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่ของเอลิเมนต์
a_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
a_x	ความเร่งในแนวแกน x
a_y	ความเร่งในแนวแกน y
b_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
c	ความเร็วเสียง
c_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
c_p	ความจุความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
c_v	ความจุความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่
e	พลังงานภายใน
F_x	แรงในแนวแกน x
F_y	แรงในแนวแกน y
h	ขนาดของเอลิเมนต์
k	สัมประสิทธิ์การแพร่
L	ความยาวของขอบเอลิเมนต์
M	ค่ามัคนัมเบอร์
m	มวล
N	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$\hat{n}$	เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบ
n_x	ทิศทางโคซายน์ในแนวแกน x ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบ
n_y	ทิศทางโคซายน์ในแนวแกน y ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบ
p	ความดัน
Q	ปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง
q_x	ฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง x
q_y	ฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง y
R	ค่าคงที่จำเพาะของก๊าซ
S	ขอบของเอลิเมนต์

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

T	อุณหภูมิ
t	เวลา
U	ตัวแปรอนุรักษ์
u	ความเร็วในแนวแกน x
v	ความเร็วในแนวแกน y
x	ระยะในแนวระนาบ
y	ระยะในแนวดิ่ง
β	มุมของคลื่นช็อกเอียง
ε	พลังงานรวม
ϕ	ตัวไม่ทราบค่า
Φ	ตัวแปรสกาลาร์
γ	ค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะของของไหล
θ	น้ำหนักของเวลา
ρ	ความหนาแน่นของของไหล
∂	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

งานวิจัยทางด้านการคำนวณพลศาสตร์ของของไหล (computational fluid dynamics) เป็นอีกสาขาที่ได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน แต่องค์ความรู้ที่สามารถนำมาสู่การแก้ปัญหาของการไหลอย่างถูกต้องแม่นยำ ยังคงประสบปัญหาในหลายอย่างเช่น ปัญหาความไม่เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (nonlinear partial differential equations) ที่ควบคุมการไหล ปัญหาของการไหลที่เกิดปรากฏการณ์ที่มีความซับซ้อนเกิดขึ้นเช่น คลื่นช็อก (shock wave) การไหลในบริเวณขอบชั้นขอบเขต (boundary layer) เป็นต้น

ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (high-speed compressible flow) ที่มีความเร็วสูงกว่าความเร็วเสียง (supersonic flow) เป็นการไหลที่ความหนาแน่นของของไหลนั้นมีค่าไม่คงที่ ลักษณะของปัญหาครอบคลุมตั้งแต่การไหลของของไหลภายนอก (external flow) เช่น การไหลของอากาศผ่านเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูง รวมไปถึงปัญหาการไหลของของไหลภายใน (internal flow) เช่น การไหลของก๊าซในเครื่องยนต์กังหันก๊าซที่มีความเร็วสูง [1] มักจะก่อให้เกิดปรากฏการณ์การไหลที่มีความซับซ้อนเกิดขึ้น เช่น คลื่นช็อก (shock wave) คลื่นการขยายตัว (expansion wave) คลื่นช็อกสะท้อน (reflecting shock wave) และการกระทบกันของคลื่นช็อก (shock-shock interaction) [2,3] ลักษณะเด่นของการไหลประเภทนี้คือ การเปลี่ยนแปลงสภาวะการไหลโดยฉับพลันผ่านคลื่นช็อก การเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันนี้เอง ก่อให้เกิดความยากลำบากในการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ดังนั้นในอดีตการวิเคราะห์ปัญหาการไหลดังกล่าวจึงต้องอาศัยการทดลองเป็นหลักซึ่งทำให้เสียเวลาและค่าใช้จ่ายเป็นจำนวนมาก จึงเป็นแรงผลักดันให้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) เข้ามามีบทบาทเพื่อคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution)

ในอดีตที่ผ่านมาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ก็คือ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ประกอบด้วยขั้นตอนที่ไม่ซับซ้อนและง่ายต่อการทำความเข้าใจ แต่อาจก่อให้เกิดความยากลำบากขึ้นได้หากปัญหาที่ทำการวิเคราะห์มีรูปร่างที่ซับซ้อน (complex geometry) เป็นสาเหตุให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ซึ่งสามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ดีกำลังได้รับความนิยมในปัจจุบัน งานวิจัยทางด้านระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เพื่อแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ได้มีออกมาอย่างต่อเนื่องในช่วง 20 ปี เช่นระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (Taylor-Galerkin method) [4,5,6] ระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered method) [7,8,9] ระเบียบวิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin method) [10] ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน(streamline upwind Petrov-Galerkin method) [11] ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (characteristic-based split method) [12,13]

ในบรรดาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบต่าง ๆ ที่ได้มีผู้เสนอมานั้น ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (characteristic-based split method) เป็นวิธีการที่ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลในหลาย ๆ รูปแบบ เช่น การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (high-speed compressible flow) การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว (viscous incompressible flow) การไหลแบบความหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยรวมอุณหภูมิ (thermal viscous incompressible flow) การไหลของน้ำตื้น (shallow water flow) การไหลในตัวกลางพรุน (porous media flow) การไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) [14,15,16] ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสามารถของในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบต่างๆ ของระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะที่มีเหนือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบอื่น ๆ สำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงด้วยวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะที่ผ่านมาจะมุ่งเน้นเฉพาะการหาคำตอบที่สภาวะคงตัว (steady state) เพียงอย่างเดียวเท่านั้น ยังไม่มีการนำมาใช้ในการแก้ปัญหาการไหลในสภาวะไม่อยู่ตัว (unsteady state) เช่น ปัญหาการไหลคลื่นช็อกในท่อ [17] ปัญหาคลื่นช็อกผ่านพื้นที่หักมุม [18] เป็นต้น ซึ่งจะมีปรากฏการณ์การไหลที่ซับซ้อนไปอีกระดับหนึ่งคือการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อก การเคลื่อนตัวของคลื่นการขยายตัว การศึกษาถึงปรากฏการณ์การไหลดังกล่าวจะทำให้รู้ความเข้าใจในเรื่องการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงได้ดียิ่งขึ้น ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงเลือกระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะในการวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว

โดยทั่วไปปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงมักจะประกอบด้วยคลื่นช็อก ซึ่งค่าของตัวแปร เช่น ความหนาแน่น ความดัน ความเร็ว จะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันผ่านคลื่นช็อกนั้น ทำให้จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กมากๆ วางตัวในแนวคลื่นช็อกเพื่อให้สามารถจับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันได้ และสำหรับการไหลในสภาวะไม่อยู่ตัวจะเกิดการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อก การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมนจะส่งผลโดยตรงต่อเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณ ดังนั้นเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแต่ใช้เวลาและหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ในการคำนวณที่น้อยลง จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาด

เล็กในบริเวณคลื่นช็อกซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอย่างฉับพลันและใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น ๆ ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรค่อนข้างน้อย และในปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่อยู่ตัว จะเกิดการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกดังนั้นเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ดี เอลิเมนต์ขนาดเล็กจะต้องเคลื่อนตัวตามแนวคลื่นช็อกได้ วิธีการหนึ่งที่จะช่วยแก้ปัญหาดังกล่าวได้แก่ เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) โดยวิธีการนี้มีหลักการคือ ใช้การเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ครั้งก่อนหน้าเป็นตัวชี้วัด ในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะใช้ในการคำนวณครั้งต่อไป ทำให้ไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กหมดทั่วทั้งโดเมน เวลาและหน่วยความจำที่ต้องใช้จึงลดลงได้

ดังนั้นงานวิทยานิพนธ์นี้จึงได้ขอนำเสนอ การใช้ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (characteristic-based split method) ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว (unsteady state high-speed compressible flows) พร้อมทั้งนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) มาประยุกต์ใช้เพื่อลดเวลาและหน่วยความจำเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ต้องใช้ในการคำนวณ และเพิ่มความถูกต้องของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในแต่ละช่วงเวลา

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดฉากในสองมิติสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

1.2.2 ศึกษาวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว

1.2.3 ศึกษาและประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการศึกษาที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ข้างต้น มีดังต่อไปนี้

1.3.1 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ด้วยวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ

1.3.2 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูง

1.3.3 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่อยู่ตัว

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 มีความเข้าใจถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเมื่อเกิดการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ผ่านรูปร่างที่ซับซ้อนอันจะเป็นพื้นฐานการสำหรับการวิจัยในระดับสูงต่อไป

1.4.2 สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวผ่านรูปร่างที่ซับซ้อน

1.4.3 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเมื่อใช้ร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถลดเวลาและหน่วยความจำที่ต้องใช้ลงได้

1.4.4 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในอนาคตต่อไป

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

1.5.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีด้านพลศาสตร์ของไหล และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้

1.5.2 ศึกษาและประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่อยู่ตัว

1.5.3 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง

1.5.4 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

1.5.5 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปใช้แก้ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

1.5.6 จัดทำรายงานเพื่อนำเสนอ และสรุปผล

1.6 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.6.1 J. Donea [4] ได้เสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาการพา ของตัวแปรสกาลาร์โดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Tayler series expansion) สร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลาและใช้วิธีบับนอฟ-กาเลอร์คิน สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง

1.6.2 R. Löhner et al. [5] ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืด (high-speed inviscid compressible flow) ในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้วิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน โดยหลักการ

พื้นฐานของวิธีการนี้ก็คือ การใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Tayler series expansion) สร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา และใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) แบบกาเลอร์คินสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง ในงานวิจัยได้เลือกใช้วิธีการแบบชัดแจ้ง (explicit method) ในการแก้ระบบสมการ

1.6.3 R. Löhner [19] ได้นำเสนอเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสำหรับปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่อยู่ตัว โดยในงานวิจัยได้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ FCT (flux corrected transport algorithm) เพื่อหาผลลัพธ์ที่ขึ้นกับเวลาสำหรับปัญหาคลื่นช็อกเคลื่อนที่ในท่อ เป็นต้น

1.6.4 J. Probert et al. [20] ได้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่อยู่ตัว ซึ่งประกอบไปด้วย ปัญหาคลื่นช็อกในท่อ ปัญหาคลื่นช็อกผ่านกรวยทำมุมต่าง ๆ และ ปัญหาการเคลื่อนที่ของคลื่นช็อกผ่านรูปร่างที่ซับซ้อน

1.6.5 F. P. Brueckner and J. C. Heinrich [10] ได้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งแบบรวมความหนืด (viscous) และไร้ความหนืด (inviscid) ในสภาวะอยู่ตัวในสองมิติ โดยได้ใช้วิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin) และเลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดสี่เหลี่ยมสี่จุดต่อ และทำการอินทิเกรตเวลาด้วยวิธีออยเลอร์และรุงเง-คุตตาอันดับสองเพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

1.6.6 P. Dechaumphai and W. Limtrakarn [9] นำเสนอวิธีการวิเคราะห์การไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงโดยไร้ความหนืดในสภาวะอยู่ตัว (steady state high-speed inviscid compressible flows) ในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อัปวินเซลล์เซนเตอร์ (upwind cell-centered finite element) ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive remeshing technique) เพื่อปรับปรุงความถูกต้องของผลลัพธ์ให้เพิ่มมากขึ้น

1.6.7 สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช [8] ทำการศึกษาวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดทั้งในสภาวะอยู่ตัวและไม่อยู่ตัวในระนาบสองมิติด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุด

ต่อ โดยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ เข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์– สโตกส์

1.6.8 G.J.L. Beau et al. [11] ได้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (SUPG algorithm) เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งแบบความเร็วสูงกว่าเสียงและความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียงที่สภาวะอยู่ตัว

1.6.9 O. C. Zienkiewicz et al. [21] ได้เสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลได้อย่างครอบคลุม ตั้งแต่การไหลแบบไม่อัดตัวและการไหลแบบอัดตัวได้ โดยในงานวิจัยได้ใช้วิธีกึ่งโดยปริยาย (semi implicit algorithm) สำหรับการไหลความเร็วต่ำ และวิธีโดยชัดแจ้ง (explicit time algorithm) สำหรับการไหลความเร็วสูง อีกทั้งยังได้เสนอวิธีการแยก (split) สมการนาเวียร์-สโตกส์ออกเป็นสองส่วนจากนั้นอาศัยวิธีของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา และใช้วิธีบับโนฟ-กาเลอร์คินเพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง เป็นผลให้การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้สามารถแก้ปัญหาการสั่นของผลลัพธ์ในบางบริเวณที่การไหลมีความสามารถในการอัดตัว (compressibility) มีค่าต่ำได้

1.6.10 O. C. Zienkiewicz and J. Wu [22] ได้นำเสนอระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบชัดแจ้ง (explicit) และกึ่งชัดแจ้ง (semi explicit) ซึ่งสามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลได้หลากหลาย ทั้งการไหลแบบไม่อัดตัวและการไหลแบบอัดตัวได้ ในงานวิจัยได้เสนอวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน (Characteristic-Galerkin) เพื่อจัดการพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการพา (convective terms) ทำให้สามารถใช้วิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน เพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะทางได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด และได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการที่นำเสนอสามารถแก้ปัญหาการสั่นของผลลัพธ์ในบริเวณใกล้ ๆ กับจุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์ (stagnation point) ได้โดยไม่ต้องทำการเพิ่มความหนืดเทียม (artificial viscosity)

1.6.11 O. C. Zienkiewicz et al. [14] เสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ หลายรูปแบบ เช่น การไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะอยู่ตัวทั้งแบบแบบที่ความเร็วสูงกว่าความเร็วเสียงและเข้าใกล้ความเร็วเสียง การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว การไหลของน้ำตื้น เป็นต้น โดยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะทั้งหมด ผลลัพธ์ที่ได้จาก

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ มีความสามารถที่จะใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ ได้อย่างดี

1.6.12 P. Nithiarasu et al. [23] ได้นำเสนอวิธีการเพิ่มความหนืดเทียมสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหา การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะอยู่ตัว

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล เป็นสมการที่อธิบายความเป็นจริงของการไหลที่ว่าต้องเกิดการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) การอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) อันประกอบไปด้วยสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อยดังนี้

1. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล
2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม
3. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งระบบนี้ถูกเรียกว่า ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับงานวิทยานิพนธ์ที่นำเสนอนี้จะศึกษาเฉพาะการไหลในสองมิติ จึงขอนำเสนอที่มาของแต่ละสมการที่กล่าวข้างต้น เฉพาะในระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate system) ในสองมิติเท่านั้น โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล

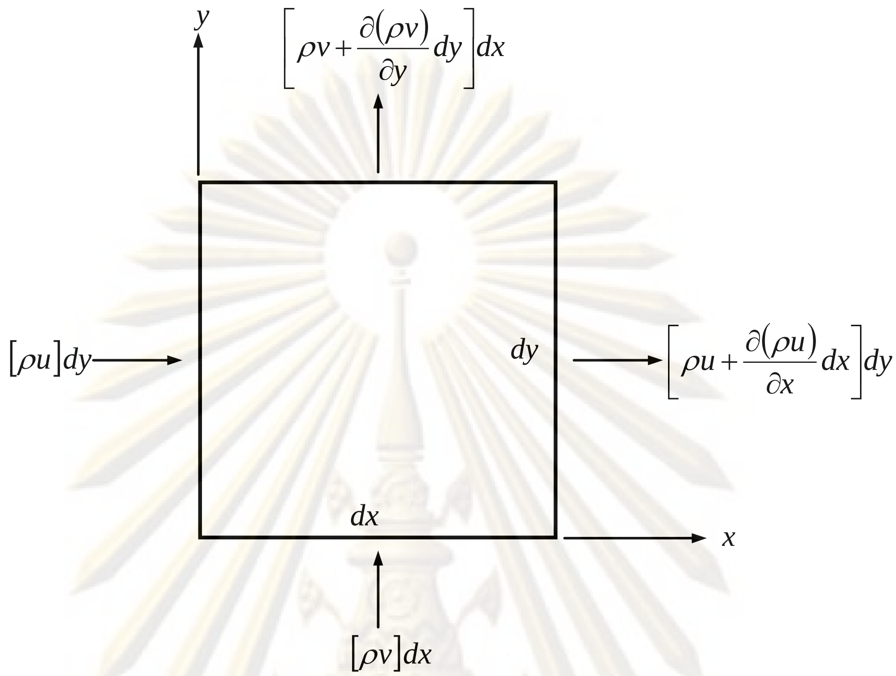
พิจารณาการไหลผ่านเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ที่มีความกว้าง dx และ dy ที่มีความหนาหนึ่งหน่วยวางตัวอยู่กับที่ในโดเมนการไหลดังรูปที่ 2.1 การไหลของมวลในแนวแกน x ไหลเข้าทางขอบด้านซ้ายและไหลออกทางขอบด้านขวา ส่วนการไหลของมวลในแนวแกน y ไหลเข้าทางขอบด้านล่างและไหลออกทางขอบด้านบน ดังนั้นผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน x และ y ดังแสดงในสมการ (2.1) และ (2.2) ตามลำดับ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy - (\rho u)dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdy \tag{2.1}$$

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx - (\rho v)dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdy \tag{2.2}$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกจากเอลิเมนต์ได้จากการรวมสมการ (2.1) และ (2.2) ซึ่งแสดงในสมการ (2.3)

$$\text{net mass outflow} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dxdy \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.1 ฟลักซ์ของมวลผ่านด้านของเอลิเมนต์ขนาดเล็กที่ตรึงอยู่กับที่ในโดเมนการไหล

สำหรับมวลของของไหลในเอลิเมนต์เล็กๆ นั้นมีค่าเท่ากับ $\rho dxdy$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ลดลงเป็นไปตามสมการ (2.4)

$$\text{time rate of mass decrease} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdy \tag{2.4}$$

จากหลักการคงที่ของมวลที่ว่า “ผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ออกจากเอลิเมนต์ที่พิจารณาจะมีค่าเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในเอลิเมนต์นั้น” [24] ซึ่งนิยามดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้ดังแสดงในสมการ (2.5)

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] dxdy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdy \tag{2.5}$$

เมื่อนำ $dxdy$ หารสมการ (2.5) และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังสมการ (2.6)

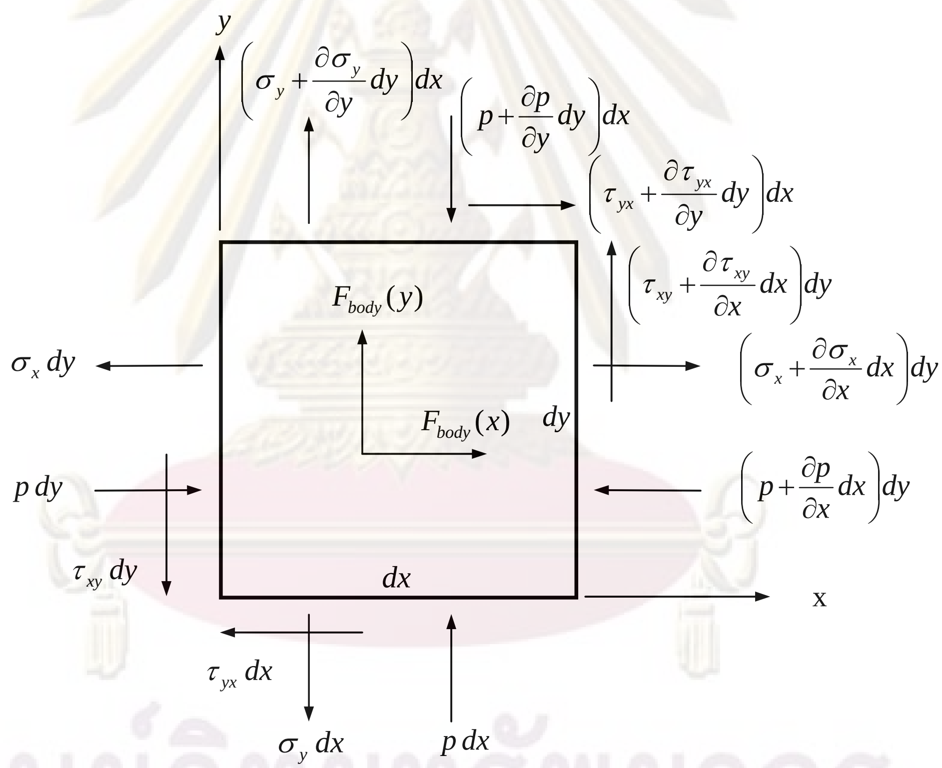
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.6}$$

หรือ $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V} \right) = 0 \tag{2.7}$$

สมการ (2.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลซึ่งเขียนอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม

พิจารณาเอลิเมนต์ขนาดเล็ก ๆ ที่มีขนาด *dx* และ *dy* ที่มีความหนาหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปตามการไหลในโดเมนดังแสดงในรูปที่ 2.2 จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือกฎข้อที่สองของนิวตันมีนิยามว่า “แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้น ” [24] ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังสมการ (2.8)



รูปที่ 2.2 แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ที่เคลื่อนที่ไปตามการไหล

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.8}$$

กฎข้อที่สองของนิวตันในสมการ (2.8) เป็นความสัมพันธ์แบบเวคเตอร์ (vector) ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปของความสัมพันธ์แบบสกาลาร์ (scalar) ในแนวแกนต่างๆ ได้หากพิจารณาในแนวแกน *x* จะได้ดังสมการ (2.9)

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.9}$$

โดยที่ F_x คือ แรงในแนวแกน x

a_x คือ ความเร่งในแนวแกน x

หากพิจารณาพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.9) โดยละเอียดจะพบว่าแรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ดังรูปที่ 2.2 ประกอบด้วยสองส่วนด้วยกัน คือ แรงเนื่องจากน้ำหนัก (body force) และ แรงกระทำที่ผิว (surface force) โดยมีรายละเอียดดังแสดงในสมการ (2.10) และ (2.11)

$$\begin{aligned}\text{surface force}_x = &\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dy + \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right) - \sigma_x\right]dy \\ &+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right) - \tau_{yx}\right]dx\end{aligned} \tag{2.10}$$

และ

$$\text{body force}_x = \rho f_x dxdy \tag{2.11}$$

ดังนั้นแรงรวมทั้งหมดในแนวแกน x จะแสดงในสมการ (2.12)

$$\sum F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right]dxdy + \rho f_x dxdy \tag{2.12}$$

สำหรับพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (2.9) มวลของของไหลในเอลิเมนต์คือ

$$m = \rho dxdy \tag{2.13}$$

ส่วนความเร่งในแนวแกน x คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วในแนวแกน x ดังนั้น

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{2.14}$$

เมื่อนำสมการ (2.12), (2.13) และ (2.14) แทนลงในสมการ (2.9) หารด้วย $dxdy$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ดังแสดงในสมการ (2.15)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{2.15}$$

ในทำนองเดียวกันสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y สามารถหาได้ดังต่อไปนี้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \tag{2.16}$$

โดยพจน์ทางด้านซ้ายของสมการ (2.15) และ (2.16) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) ได้ดังแสดงในสมการ (2.17) และ (2.18) ตามลำดับ

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho u \vec{V} \right) \tag{2.17}$$

และ

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho v \vec{V} \right) \tag{2.18}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) ในทิศทาง x และ y สามารถแสดงได้ดังสมการ (2.19) และ (2.20)

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho u \vec{V} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho v \vec{V} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \tag{2.20}$$

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ มีใจความว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหลจะมีค่าเท่ากับผลรวมของปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ของไหลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนของไหลนั้น" ซึ่งเขียนในรูปสมการได้ดังต่อไปนี้

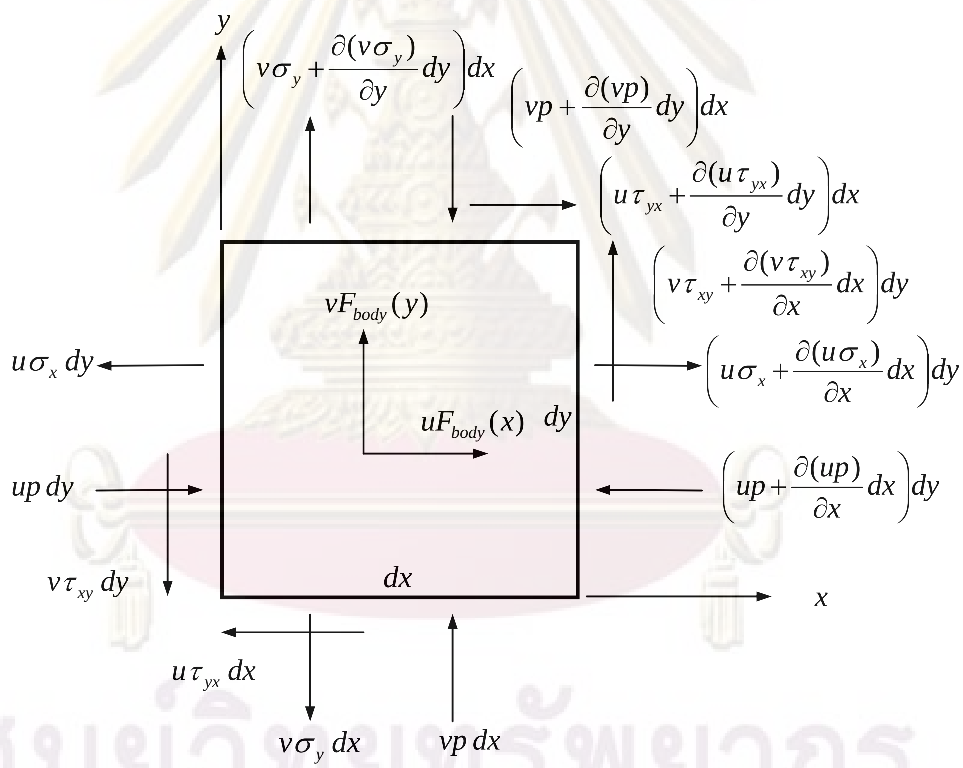
	อัตราการเปลี่ยนแปลง ของพลังงาน ในก้อน ของไหล	=	ปริมาณฟลักซ์ ความร้อนที่ให้แก่ก้อน ของไหล	+	อัตราของงานที่เกิดขึ้น เนื่องจากแรงต่างๆ ที่ กระทำบนก้อนของไหล
หรือ	*A*		*B*	+	*C*

(2.21)

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวข้างต้น อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงประกอบไปด้วยสองส่วนด้วยกันดังแสดงในรูปที่ 2.3 คือ อัตราของงานอันเกิดจากแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหลซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว   ดังแสดงในสมการ (2.22) และ อัตราของงานอันเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวของก้อนของไหลในทิศทาง x และ y ดังแสดงในสมการ (2.23)

$$\text{work done by body force} = \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dxdy \tag{2.22}$$

$$\text{work done by surface force} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial(up)}{\partial x} - \dfrac{\partial(vp)}{\partial y} + \dfrac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} \\ + \dfrac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \dfrac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \dfrac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \end{bmatrix} dxdy \tag{2.23}$$



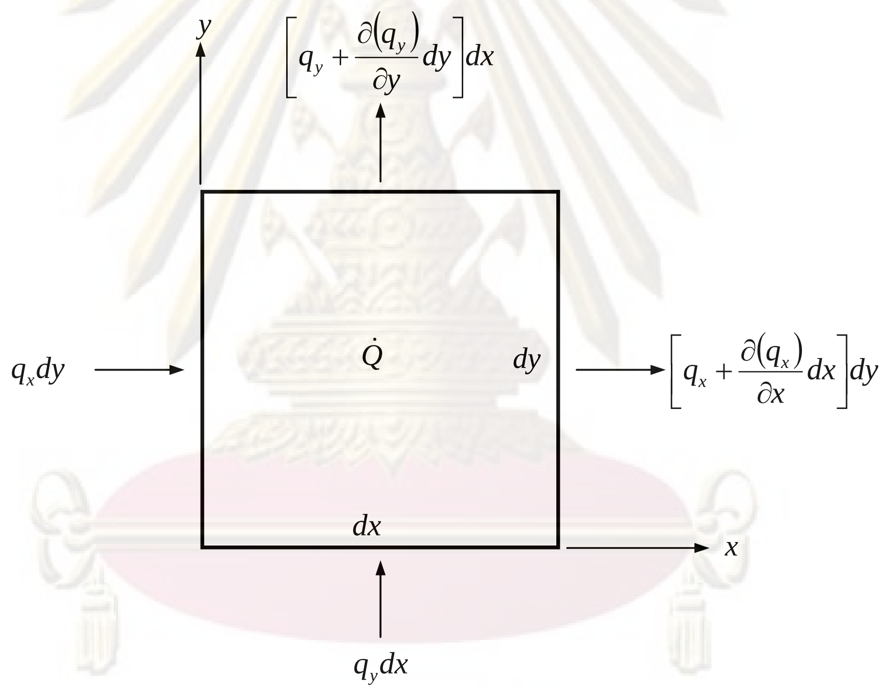
รูปที่ 2.3 งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนเอลิเมนต์ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลในโดเมน

ดังนั้น อัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนของไหล คือ

$$C = \left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right] dxdy \qquad (2.24)$$
$$+ \rho\vec{f} \cdot \vec{V} dxdy$$

สำหรับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนของไหลจะประกอบด้วยสองส่วน ดังแสดงในรูปที่ 2.4 คือ อัตราความร้อนสะสมภายในก้อนของไหล (volumetric heating) ดังแสดงในสมการ (2.25)

$$\text{volumetric heating} = \rho\dot{Q}dxdy \qquad (2.25)$$



รูปที่ 2.4 ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านเอลิเมนต์ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลในโดเมน

และปริมาณฟลักซ์อันเนื่องจากการถ่ายเทความร้อนในทิศทาง x และ y แสดงดังต่อไปนี้

$$\text{heating by thermal conduction} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)dxdy \qquad (2.26)$$

ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ความร้อนสุทธิที่ให้กับก้อนของไหล เป็นผลรวมของสมการ (2.25) และ (2.26) ซึ่งมีค่าดังที่ปรากฏในสมการ (2.27)

$$B=\left[\rho\dot{Q}-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)\right]dxdy \tag{2.27}$$

ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y เป็นไปตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) กล่าวคือ

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.28}$$

$$q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.29}$$

โดยที่ k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหล

ดังนั้นพจน์ *B* ในสมการ (2.27) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ได้เป็นดังสมการ (2.30)

$$B=\left[\rho\dot{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]dxdy \tag{2.30}$$

สำหรับพจน์ *A* ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหลอันเกิดจากสองแหล่งคือ พลังงานภายใน (internal energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของโมเลกุลภายในของไหล และพลังงานจลน์ (kinetic energy) หาก e แทนพลังงานภายในและ $\frac{V^2}{2}$ แทนพลังงานจลน์แล้วพลังงานรวม(total energy) คือ $e+\frac{V^2}{2}$ ซึ่งเป็นพลังงานรวมต่อหนึ่งหน่วยมวล และเนื่องจากมวลของก้อนของไหลนี้คือ $\rho dxdy$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหลสามารถแสดงได้ดังสมการ (2.31)

$$A=\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)dxdy \tag{2.31}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงานจะได้จากการนำสมการ (2.24) , (2.30) และ (2.31) แทนลงในความสัมพันธ์ในสมการ (2.21) และหารตลอดด้วย $dxdy$ ดังแสดงผลลัพธ์ในสมการ (2.32)

$$\begin{aligned}\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\dot{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}\\+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V}\end{aligned} \tag{2.32}$$

พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.32) ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ย่อยได้ดังสมการ (2.33)

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right] \tag{2.33}$$

เมื่อนำสมการ (2.33) แทนลงในสมการ (2.32) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงานซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์โดยแสดงในสมการ (2.34)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right] &= \rho\dot{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ &\quad - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \rho\vec{f}\cdot\vec{V}\end{aligned} \tag{2.34}$$

2.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลในรูปแบบอนุรักษ์

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลทั้งระบบซึ่งประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล (2.7) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x (2.19) และแนวแกน y (2.20) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน (2.34) ได้ถูกเรียกรวมกันว่า ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งต่างอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายในรูปแบบเทนเซอร์ (tensor notation) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial t} + \frac{\partial\{F_i\}}{\partial x_i} + \frac{\partial\{G_i\}}{\partial x_i} + \{Q\} = 0 \tag{2.35}$$

โดยที่ $\{U\}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variable) ซึ่งมีรายละเอียดดังที่แสดงในสมการ (2.36)

$$\{U\} = \begin{Bmatrix}\rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho\varepsilon\end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

สำหรับ $\{F_i\}$ คือ เวคเตอร์ฟลักซ์แบบไม่หนืด ซึ่งหากเป็นระบบแกนพิกัดฉาก $\{F_i\}$ ในแนวแกน *x* และ *y* จะมีรายละเอียดดังแสดงในสมการ (2.37) และ (2.38)

$$\{F_x\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u \varepsilon + u p \end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\{F_y\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \varepsilon + v p \end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

โดยที่ ε คือ พลังงานรวม (total energy) ซึ่งมีเท่ากับ $e + \frac{V^2}{2}$

ส่วน $\{G_i\}$ คือ เวกเตอร์ฟลักซ์แบบหนืด ซึ่งระบบพิกัดฉาก $\{G_i\}$ ในแนวแกน *x* และ *y* มีรายละเอียดดังสมการ (2.39) และ (2.40)

$$\{G_x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \\ -k\frac{\partial T}{\partial x} - u\sigma_x - v\tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

$$\{G_x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \\ -k\frac{\partial T}{\partial x} - u\sigma_x - v\tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

และ $\{Q\}$ คือ เวคเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักในแนวแกน *x* และ *y* และความร้อนสะสมดังแสดงในสมการ (2.41)

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho f_x \\ -\rho f_y \\ -\rho(\vec{f} \cdot \vec{V}) - \rho\dot{Q} \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

เมื่อพิจารณาระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่แสดงถึงที่มาข้างต้นแล้วนั้น จะพบว่าประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า (unknowns) ถึง 6 ตัว คือ ρ, u, v, p, e, T จึงจำเป็นต้องหาสมการเพิ่มอีก 2 สมการ คือ

1.สมการสถานะ (equation of state) โดยตั้งสมมติฐานว่าของไหลเป็น ก๊าซอุดมคติ (ideal gas) ซึ่งเป็นสมการที่ให้ความสัมพันธ์ระหว่างความดัน ความหนาแน่น และอุณหภูมิ ดังต่อไปนี้

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{2.42}$$

โดย R คือ ค่าคงที่จำเพาะของก๊าซ

2. สมการของพลังงานภายใน โดยใช้ความสัมพันธ์ทางเทอร์โมไดนามิกส์ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

$$e = c_v T \tag{2.43}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{2.44}$$

โดย γ คือ ค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะของของไหล

c_p และ c_v คือ ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาตรคงที่ตามลำดับ

จากการตั้งสมมติฐานว่าของไหลเป็นก๊าซในอุดมคติทำให้สามารถแสดงความระหว่างความดันและค่าพลังงานรวมดังนี้

$$p = (\gamma - 1)\rho\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right) \tag{2.45}$$

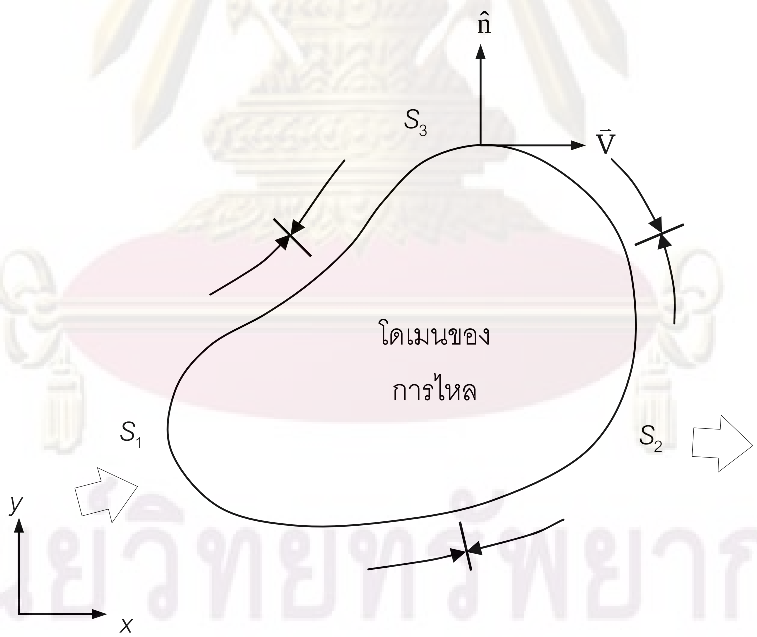
ดังนั้นทำให้จำนวนสมการทั้งหมดเท่ากับจำนวนตัวไม่ทราบค่า จึงสามารถทำการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ได้

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ พิจารณาว่าการไหลเป็นการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยเป็นแบบไร้ความหนืด ดังนั้นจึงไม่นำพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความหนืดและไม่นำพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการนำความร้อนและความร้อนสะสมมาพิจารณา ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์จึงลดรูปเป็นดังสมการ (2.46) และมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า สมการออยเลอร์ (Euler equations) [24]

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial t}+\frac{\partial\{F_x\}}{\partial x}+\frac{\partial\{F_y\}}{\partial y}=0 \tag{2.46}$$

2.5 เงื่อนไขขอบเขต

ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.46) จำเป็นต้องประกอบด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) และเงื่อนขอบเขต (boundary condition) ที่เหมาะสมกับการไหล ในรูปที่ 2.5 แสดงโดเมนและเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ ของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ซึ่งโดยทั่วไปเงื่อนไขขอบเขตสำหรับการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ มักประกอบด้วยเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้



รูปที่ 2.5 เงื่อนไขขอบเขตของการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

1. เงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic inflow) ตลอดขอบ S_1 จะกำหนดให้ค่าตัวแปรปฐมภูมิมีค่าเท่ากับค่าเริ่มต้น (initial values) ดังนี้

$$\rho = \rho_o \tag{2.47}$$

$$u = u_o \tag{2.48}$$

$$v = v_o \tag{2.49}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_o \tag{2.50}$$

2. เงื่อนไขขอบเขตของการไหลออกด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic outflow) ตลอดขอบ S_2 จะไม่มีการกำหนดเงื่อนไขใดๆ

3. เงื่อนไขขอบเขตของผนังที่สมมติให้ไม่มีความหนืดในการวิเคราะห์การไหลแบบไม่หนืด (inviscid flow analysis) ตลอดขอบ S_3 หรืออาจจะเป็นขอบเขตของการไหลที่มีความสมมาตร (symmetry) ซึ่งเงื่อนไขตลอดขอบเช่นนี้คือ

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = 0 \tag{2.51}$$

บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ

เนื้อหาในบทนี้เป็นการกล่าวถึงการนำระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในบทที่ 2 มาประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกัน โดยช่วงแรกจะกล่าวถึงขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ต่อจากนั้นเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equations) จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ควบคุมปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ โดยใช้ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (characteristic-based split algorithm) หรือที่นิยมเรียกกันโดยใช้ชื่อย่อว่าวิธีซีบีเอส (CBS algorithm) ซึ่งจะนำไปสู่ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ (finite element metrices) ที่สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

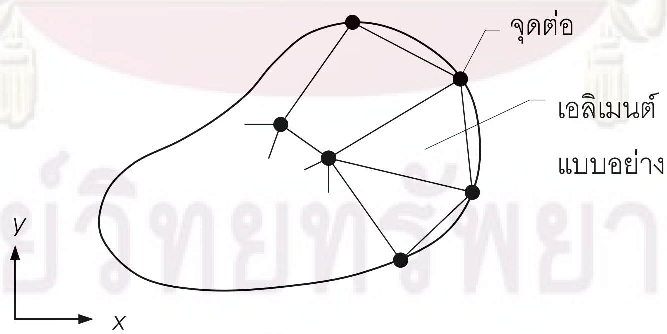
3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 6 ขั้นตอน [1] คือ

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 จากนั้นก็ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$D(\phi') = 0 \tag{3.1}$$

โดยที่ D คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ ϕ' คือตัวแปรตามแม่นตรง



รูปที่ 3.1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ (element interpolation function) ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่ทราบค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 โดยที่ตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้เป็นคุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล ลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อดังแสดงในสมการ (3.2)

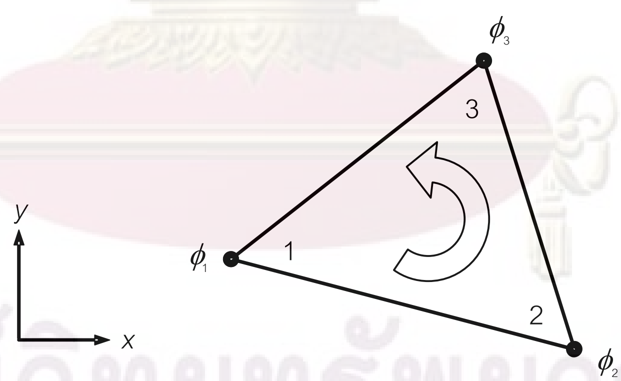
$$\phi(x,y) \quad = \quad N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \qquad (3.2)$$

โดยที่ $N_i(x,y);\ i=1,2,3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ สมการ (3.2) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi \ = \ \phi(x,y) \quad &= \quad \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \quad \underset{(1\times3)}{\lfloor N(x,y) \rfloor} \underset{(3\times1)}{\{\phi\}} \end{aligned} \qquad (3.3)$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ (element equations) ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method weighted residual, MWR) โดยใช้หลักการที่ว่า หากทำการแทนผลเฉลยโดยประมาณดังที่แสดงในสมการ (3.2) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น ซึ่งในที่นี้คือ สมการ (3.1) จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะเท่ากับ *R* ดังแสดงในสมการ (3.4)

$$R = D(\phi) = D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) \tag{3.4}$$

โดยที่ R คือ เศษตกค้าง (residual)

m คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

จากวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin) เป็นวิธีการลดความผิดพลาดให้น้อยที่สุด ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighted function) W จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ ซึ่งคือ

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m \tag{3.5}$$

โดยปกติจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) แต่หากเลือก $W_i \neq N_i$ จะเรียกว่าวิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by part) เพื่อก่อให้เกิดพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ ซึ่งหากแทนสมการ (3.4) ลงในสมการ (3.5) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i R \, d\Omega &= \int_{\Omega^{(e)}} W_i D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Omega}_{\substack{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน} \\ \text{ของเอลิเมนต์ } \Omega^{(e)}}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Gamma}_{\substack{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต} \\ \text{ของเอลิเมนต์ } \Gamma^{(e)}}} = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

ขั้นตอนที่ 6 จากนั้นเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ นั่นคือ

$$\underset{(m\times m)}{[K]} \; \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \tag{3.7}$$

โดยที่ $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix)

$\{\phi\}$ คือ เวคเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์

$\{F\}$ คือ โหลดเวคเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.7) แล้วลำดับขั้นตอนต่อไปก็จะทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขต แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

3.2 ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (characteristic-based split algorithm) หรือวิธีซีบีเอส (CBS algorithm) โดยภาพรวมแล้วประกอบด้วย 2 ขั้นตอน คือ ทำการแบ่งย่อยช่วงเวลา (time discretization) ด้วยระเบียบวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน (characteristic-Galerkin algorithm) และ ทำการแบ่งย่อยระยะทาง (spatial discretization) ด้วยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual)

ขั้นตอนการแบ่งย่อยช่วงเวลาด้วยวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน เริ่มต้นจากการพิจารณาสมการแบบอย่างของการพาและการแพร่ (convection-diffusion equation) ของตัวแปรสกาลาร์ (scalar variable) ดังแสดงในสมการ (3.8)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \phi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q = 0 \tag{3.8}$$

โดยที่ ϕ คือ ตัวแปรสกาลาร์ซึ่งเป็นปริมาณที่ถูกส่งถ่ายโดยการพาและการแพร่

k คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient)

u_i คือ ความเร็วของการพา (convection velocity component)

Q คือ พจน์ของแหล่งกำเนิด (source term)

หากพิจารณาสมการแบบอย่างของการพาและการแพร่ใน 1 มิติแล้วสมการ (3.8) จะลดรูปเป็นดังต่อไปนี้

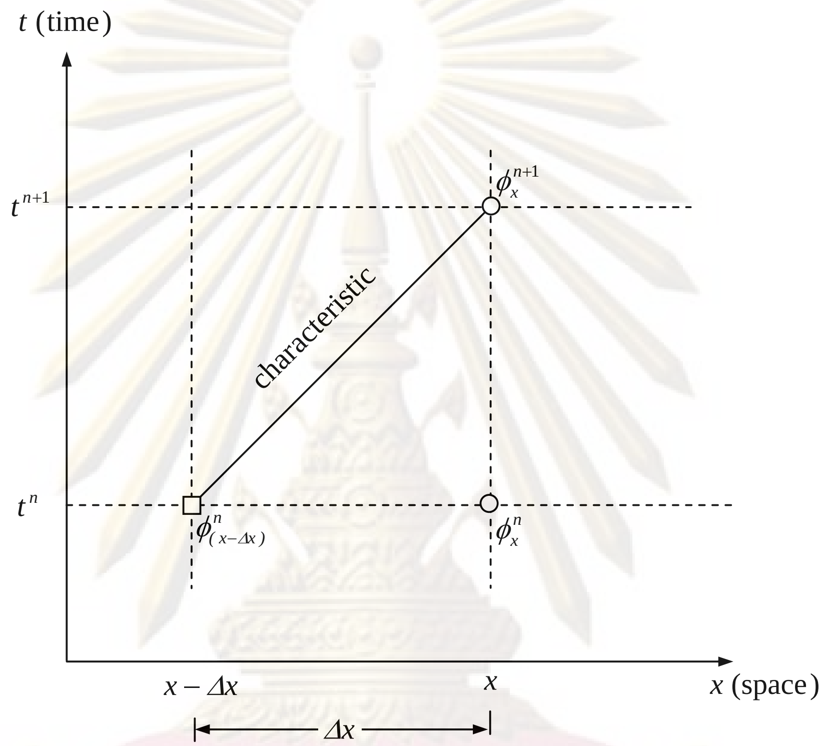
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q = 0 \tag{3.9}$$

ในสมการ (3.9) หากทำการเปลี่ยนแกนอ้างอิงจากแกน x ซึ่งอยู่กับที่บนโดเมนไปเป็นแกน x' ซึ่งแกนอ้างอิงใหม่นี้เป็นแกนที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับอนุภาคของของไหลตามเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหล (path lines) ซึ่งเรียกแกนอ้างอิงใหม่นี้ว่า แกนคุณลักษณะ (characteristic) [15] ซึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่าง แกน x และ แกน x' ดังแสดงในสมการ (3.10)

$$dx' = dx - u\,dt \tag{3.10}$$

จะพบว่าพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการพา (convective term) จะหมดไป จึงทำให้สมการของการพาและการแพร่ของตัวแปรสกาลาร์บนแกน เป็นดังสมการ (3.11)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x'}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) + Q = 0 \tag{3.11}$$



รูปที่ 3.3 แกนคุณลักษณะบนโดเมนของเวลาและระยะทาง

ทำการประยุกต์วิธีของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) [1] เพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลากับสมการ (3.11) บนแกน x' โดยพิจารณาจากรูปที่ 3.3 ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\phi_x^{n+1} - \phi_{x-\Delta x}^{n} \right) = \theta \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \phi \frac{\partial u}{\partial x} - Q \right]_x^{n+1}$$

$$+ (1-\theta)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \phi \frac{\partial u}{\partial x} - Q \right]_{x-\Delta x}^{n} \tag{3.12}$$

โดยพจน์ที่มีตัวห้อย $(x - \Delta x)$ แสดงถึงพจน์ที่อยู่บนแกนคุณลักษณะ ซึ่งในทางปฏิบัติการแก้ปัญหาการไหลบนแกนอ้างอิงที่เคลื่อนที่ไปกับอนุภาคของไหลนั้นมีความซับซ้อนในการเปลี่ยนแกนอ้างอิงและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของการไหล ดังนั้นจึงทำการประมาณค่าของตัวแปร

กลับสู่แกนอ้างอิงเดิมโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) สำหรับ θ จะเลือกใช้เท่ากับ 0.5 ซึ่งเรียกว่าวิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson scheme) เพื่อให้เกิดเป็นการประมาณอันดับสอง (second order approximation) [12] เป็นผลให้สามารถประมาณพจน์ต่างๆ ในสมการ (3.12) ที่อยู่บนแกนคุณลักษณะได้ดังนี้

$$\phi_{x-\Delta x}^{n} = \phi^{n} - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x}^{n} + \frac{\Delta x^{2}}{2}\frac{\partial^{2} \phi}{\partial x^{2}}^{n} - \mathrm{O}\left(\Delta x^{3}\right) \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x-\Delta x}^{n} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{n} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right]^{n} + \mathrm{O}\left(\Delta x^{2}\right) \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{2}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x-\Delta x}^{n} = \frac{1}{2}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n} + \mathrm{O}\left(\Delta x^{2}\right) \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{2}Q_{x-\Delta x}^{n} = \frac{1}{2}Q^{n} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}^{n} + \mathrm{O}\left(\Delta x^{2}\right) \tag{3.16}$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.13)-(3.16) ลงในสมการ (3.12) และทำการจัดรูปใหม่จะได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\left(\phi^{n+1} - \phi^{n} + \Delta x\frac{\partial \phi}{\partial x}^{n} - \frac{\Delta x^{2}}{2}\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}^{n}\right) \;=\; & \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} - Q^{n+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{n}\right] + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n} \\ & + \frac{\delta}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}^{n}\end{aligned} \tag{3.17}$$

โดยที่

$$\frac{\partial}{\partial}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{n}\right] \tag{3.18}$$

$$\left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+1} + \left(\phi\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n}\right] \tag{3.19}$$

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[Q^{n+1} + Q^{n}\right] \tag{3.20}$$

โดยที่ Δx คือ ระยะทางที่อนุภาคของไหลเคลื่อนที่ไปได้ในทิศทาง x ในช่วงเวลา Δt ซึ่งมีค่าเท่ากับความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคของไหลคูณกับช่วงเวลา ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้นี้

$$\Delta x = u\Delta t \tag{3.21}$$

โดยที่ $$u = \frac{u^{n+1} + u^{n}_{x-\Delta x}}{2} \tag{3.22}$$

และ $$u^{n}_{x-\Delta x} = u^{n} - \Delta x \frac{\partial u^{n}}{\partial x} + O\left(\Delta t^{2}\right) \tag{3.23}$$

ดังนั้น $$u = \frac{1}{2}\left(u^{n+1} + u^{n} - \Delta x \frac{\partial u^{n}}{\partial x} \right) \tag{3.24}$$

หรือ $$u = u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} u^{n} \frac{\partial u^{n}}{\partial x} \tag{3.25}$$

ดังนั้นจะได้ $$\Delta x = \Delta t\, u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^{2}}{2} u^{n} \frac{\partial u^{n}}{\partial x} \tag{3.26}$$

เมื่อนำสมการ (3.26) แทนลงในสมการ (3.17) แล้วทำการจัดพจน์ต่าง ๆ ใหม่โดยละทิ้งพจน์ที่มีอันดับสูง (Δt^{3}) ทิ้งไป และหากใช้การเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time step) ด้วยแล้วต้องทำการประมาณค่าต่าง ๆ ที่เวลา $n+\frac{1}{2}$ ด้วยเวลาที่ n จะทำให้สมการใหม่เขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^{n} &= \Delta t \left[-\frac{\partial (u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n} \\ &\quad + \frac{\Delta t^{2}}{2} u \frac{\partial}{\partial x}\left[+ \frac{\partial (u\phi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q \right]^{n} \end{aligned} \tag{3.27}$$

สมการ (3.27) เป็นสมการแบบอย่างของปัญหาการพาและการแพร่ของปริมาณสกาลาร์ใด ๆ ใน 1 มิติ ซึ่งได้ทำการสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับช่วงเวลาด้วยระเบียบวิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการพาและการแพร่ ซึ่งสามารถขยายไปสู่ปัญหาใน 2 มิติได้โดยตรงดังแสดงในสมการ (3.28)

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^{n} &= \Delta t \left[-\frac{\partial (u_{j}\phi)}{\partial x_{j}} + \frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_{i}} \right) - Q \right]^{n} \\ &\quad + \frac{\Delta t^{2}}{2} u_{k} \frac{\partial}{\partial x_{k}}\left[+ \frac{\partial (u_{j}\phi)}{\partial x_{j}} - \frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_{i}} \right) + Q \right]^{n} \end{aligned} \tag{3.28}$$

โดยที่ ตัวห้อย $i\,,\, j\,, k = 1\,,2$

3.3 การแบ่งย่อยช่วงเวลาสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ อันประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน มีลักษณะคล้ายกับสมการของการพาและการแพร่จึงสามารถนำสมการ (3.28) มาประยุกต์ได้โดยตรงเพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา ดังจะได้แสดงรายละเอียดต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \tag{3.29}$$

สมการสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3.30}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} = -\frac{\partial (u_i \rho \varepsilon)}{\partial x_i} - \frac{\partial (u_i p)}{\partial x_i} \tag{3.31}$$

โดยที่ ตัวห้อย i , $j = 1 , 2$ และ U_i คือ ฟลักซ์ของมวล ซึ่งเป็นไปตามสมการ (3.32)

$$U_i = \rho u_i \tag{3.32}$$

เมื่อให้พจน์ $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ ที่พิจารณาเป็นพจน์ที่ทราบค่าที่เวลา $t^{n+\theta_2}$ ซึ่งอยู่ระหว่างช่วงเวลา t^n และ t^{n+1} ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (3.30) กลายเป็น

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+\theta_2} \tag{3.33}$$

หรือ

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} - (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n} - \theta_2 \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} \tag{3.34}$$

และพิจารณาพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความดันให้เป็นพจน์ของแหล่งกำเนิด ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัมที่ได้สร้างความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเวลาโดยการประยุกต์สมการ (3.34) เข้ากับสมการ (3.28) ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta t\left[-\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} - (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right]^n - \Delta t\theta_2 \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1}$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right]^n \qquad (3.35)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลดังแสดงในสมการ (3.29) เมื่อสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\Delta\rho = \left(\rho^{n+1} - \rho^n\right) = -\Delta t\left[\theta_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n+1} + (1-\theta_1)\frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n}\right] \qquad (3.36)$$

หรือ

$$\Delta\rho = \left(\rho^{n+1} - \rho^n\right) = -\Delta t\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i}{\partial x_i}\right] \qquad (3.37)$$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน (3.31) สามารถประยุกต์เข้ากับสมการ (3.28) ได้โดยตรงซึ่งจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\Delta(\rho\varepsilon) = (\rho\varepsilon)^{n+1} - (\rho\varepsilon)^n = \Delta t\left[-\frac{\partial(u_i(\rho\varepsilon + p))}{\partial x_i}\right]^n$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial(u_i(\rho\varepsilon + p))}{\partial x_i}\right]^n \qquad (3.38)$$

ขั้นตอนต่อไปจะทำการแยก (split) พจน์ที่เกี่ยวข้องกับเกรเดียนท์ของความดันในสมการ (3.35) ออกแล้วกำหนดเป็นสมการขึ้นมาใหม่ซึ่งเรียกว่า สมการโมเมนตัมชั้นกลาง (intermediate momentum equations) [12] โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

$$\Delta U_i^* = U_i^* - U_i^n = \Delta t\left[-\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j}\right]^n$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right]^n \qquad (3.39)$$

ดังนั้น

$$\Delta U_i = \Delta U_i^* - \Delta t\left(\theta_2 \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} + (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n}\right) \qquad (3.40)$$

หากนำสมการ (3.40) แทนลงในสมการ (3.37) จะก่อให้เกิดสมการอีกรูปแบบหนึ่งดังนี้

$$\Delta\rho = -\Delta t\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i}^{n} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t\left(\theta_1(1-\theta_2)\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i}\right)\right] \qquad (3.41)$$

ในเอกสารอ้างอิง [15] เสนอให้ใช้ค่า θ_1 ในสมการ (3.40) อยู่ในช่วงระหว่าง 0.5-1.0 และ ค่า θ_2 มีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อให้การคำนวณเป็นแบบชัดแจ้ง (explicit)

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า การคำนวณปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวด้วยวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ มี 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณสมการโมเมนตัมชั้นกลางของทั้งแนวแกน x และ y ในสมการ (3.39) ซึ่งจะได้ ΔU_i^*

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณสมการเชิงอนุรักษ์มวล ในสมการ (3.41) ซึ่งจะได้ $\Delta\rho$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณสมการโมเมนตัมของทั้งแนวแกน x และ y ในสมการ (3.30) ซึ่งจะได้ ΔU_i

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในสมการ (3.38) ซึ่งจะได้ $\Delta(\rho\varepsilon)$ จากนั้นจึงประยุกต์สมการสถานะของก๊าซในอุดมคติคำนวณหาค่าความดันที่ช่วงเวลาถัดไปได้

3.4 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

โดยทั่วไปการแบ่งโดเมนของการไหลออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ อาจประกอบไปด้วยเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมหรือแบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งเอลิเมนต์เหล่านี้ต่อกันด้วยจุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะทำการคำนวณตัวไม่ทราบค่า สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในระนาบสองมิติ ซึ่งประกอบด้วย 4 สมการย่อย ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์จึงประกอบไปด้วย ρ, U_x, U_y และ $\rho\varepsilon$ โดยตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้จะเปลี่ยนแปลงไปตามโคออร์ดิเนต x และ y ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในบนเอลิเมนต์และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\rho(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y)\rfloor\{\rho\} \tag{3.42}$$

$$U_i(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y)\rfloor\{U_i\} \tag{3.43}$$

$$uU_i(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y)\rfloor\{uU_i\} \tag{3.44}$$

$$vU_i(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y)\rfloor\{vU_i\} \tag{3.45}$$

$$\rho\varepsilon(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y)\rfloor\{\rho\varepsilon\} \tag{3.46}$$

$$p(x,y) = \lfloor N_\alpha(x,y)\rfloor\{p\} \tag{3.47}$$

โดยที่ $\lfloor N_\alpha(x,y)\rfloor$ คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ตัวห้อย i คือ x และ y เป็นตัวบ่งชี้ว่าเป็นปริมาณฟลักซ์ในทิศทางใด

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูง ทำได้โดยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบบับโนฟ-กาเลอร์คิน เข้ากับสมการ (3.38) - (3.41) โดยมีรายละเอียดในแต่ละขั้นตอนเป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (3.39) โดยผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้แสดงในสมการ (3.48)

$$\int_A N_\alpha \Delta U_i^* dA = \Delta t\left[\int_A N_\alpha \left(-\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j}\right) dA\right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \left[\int_A N_\alpha \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) dA\right]^n \tag{3.48}$$

โดยที่ A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์

ตัวยก n คือ ค่าต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณที่เวลา t^n

เนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น จำเป็นต้องใช้ได้กับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันได้ จึงทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss theorem) [1] ซึ่งคือ

$$\int_A u(\nabla \cdot \vec{V}) dA = \int_S u(\vec{V} \cdot \hat{n}) dS - \int_A (\nabla u \cdot \vec{V}) dA \tag{3.49}$$

เข้ากับทุกพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.39) โดยในที่นี้ขอยกตัวอย่างสำหรับพจน์ที่หนึ่งทางด้านขวามือโดยให้

$$u = N_\alpha \tag{3.50}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \tag{3.51}$$

$$\vec{V} = uU_x\hat{i} + vU_x\hat{j} \tag{3.52}$$

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{\partial(uU_x)}{\partial x} + \frac{\partial(vU_x)}{\partial y} \tag{3.53}$$

และให้ $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งตั้งฉากกับขอบของเอลิเมนต์ใดๆ ที่กำลังพิจารณาอยู่ดังนั้น

$$\int_A N_\alpha \left(\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j}\right) dA = \int_S N_\alpha (u_j U_i n_j) dS - \int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} u_j U_i\right) dA \tag{3.54}$$

สำหรับพจน์อื่นในสมการ (3.48) สามารถทำการอินทิเกรตได้ในทำนองเดียวกัน โดยผลลัพธ์สุดท้ายหลังจากทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์และทำการจัดพจน์ใหม่ของสมการ (3.48) จะเป็นดังต่อไปนี้

$$\int_A N_\alpha \Delta U_i^* dA = \Delta t\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) dA - \int_S N_\alpha \left(u_j U_i\right) n_j \, dS\right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} u_k \left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k}\left[\frac{\partial\left(u_j U_i\right)}{\partial x_j} + (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right] dA\right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \left[\int_S N_\alpha \left[\frac{\partial\left(u_j U_i\right)}{\partial x_j} + (1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right] n_k dS\right]^n \tag{3.55}$$

เมื่อแทนสมการ (3.42) - (3.47) ลงในสมการ (3.55) จะก่อให้เกิดเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$$[M]\{\Delta U_i^*\} = \Delta t\left[[C]\{u_j U_i\} - \{R_u\}\right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} u_k \left[[K_{us}]\{u_j U_i\} - \{R_{us}\}\right]^n - \frac{\Delta t^2}{2}(1-\theta_2) u_k \left[[K_{ps}]\{p\} - \{R_{ps}\}\right]^n \tag{3.56}$$

ขั้นตอนที่ 2 ประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (3.41) ทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$\int_A N_\alpha \Delta\rho \, dA = -\Delta t\left[\int_A N_\alpha \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right) dA + \theta_1 \int_A N_\alpha \left(\frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i}\right) dA\right] + \Delta t^2 \left[\int_A N_\alpha \left[\theta_1(1-\theta_2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}\right)^n + \theta_2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}\right)^{n+1}\right] dA\right] \tag{3.57}$$

หลังจากนั้นจึงทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์เข้ากับทุกพจน์ในสมการ (3.57) โดยมีวิธีการทำเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 1 ซึ่งจะทำให้ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\int_A N_\alpha \Delta\rho \, dA = \Delta t\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i}\left(U_i + \theta_1 \Delta U_i^*\right) dA - \int_S N_\alpha \left(U_i + \theta_1 \Delta U_i^*\right) n_i \, dS\right]^n - \Delta t^2 \theta_1 (1-\theta_2)\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_i} dA - \int_S N_\alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i \, dS\right]^n$$

$$-\Delta t^2\theta_2\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_i}dA - \int_S N_\alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i\, dS\right]^{n+1} \tag{3.58}$$

เมื่อแทนสมการ (3.42) - (3.47) ลงในสมการ (3.58) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลดังแสดงต่อไปนี้

$$[M]\{\Delta\rho\} = \Delta t\left[[D]\{U_i + \theta_1\Delta U_i^*\} - \{R_D\}\right]^n - \Delta t^2\theta_1(1-\theta_2)\left[[K]\{p\} - \{R_p\}\right]^n$$
$$-\Delta t^2\theta_2\left[[K]\{p\} - \{R_p\}\right]^{n+1} \tag{3.59}$$

ขั้นตอนที่ 3 ในขั้นตอนนี้จะทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง เข้ากับสมการ (3.40) ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้แสดงดังต่อไปนี้

$$\int_A N_\alpha \Delta U_i dA = \int_A N_\alpha \Delta U_i^* dA - \Delta t\left[\int_A N_\alpha\left((1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_i}^n + \theta_2\frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1}\right)dA\right] \tag{3.60}$$

ทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์ เข้ากับพจน์ที่สองทางด้านขวามือของสมการ (3.60) ซึ่งจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\int_A N_\alpha \Delta U_i dA = \int_A N_\alpha \Delta U_i^* dA + \Delta t(1-\theta_2)\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} p dA - \int_S N_\alpha p n_i dS\right]^n$$
$$+\Delta t\theta_2\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} p dA - \int_S N_\alpha p n_i dS\right]^{n+1} \tag{3.61}$$

เมื่อแทน (3.42) - (3.47) ลงในสมการ (3.61) จะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม ที่อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$[M]\{\Delta U_i\} = [M]\{\Delta U_i^*\} + \Delta t(1-\theta_2)\left[[D]\{p\} - \{R_p\}\right]^{n\ n+1}$$
$$+\Delta t\theta_2\left[[D]\{p\} - \{R_p\}\right]^{n+1} \tag{3.62}$$

ดังนั้นเมื่อทำการคำนวณสมการ (3.62) จะทำให้ได้ผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมที่เวลา t^{n+1} ซึ่งก็คือค่า U_x^{n+1} , U_y^{n+1} แต่ผลลัพธ์ดังกล่าวยังอยู่ในรูปแบบของตัวแปรอนุรักษ์ ดังนั้นในการหาค่าความเร็วในแต่ละแนวแกนที่จุดต่อต่างๆ บนโดเมน ทำได้ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

$$u^{n+1} = \frac{U_x^{n+1}}{\rho^{n+1}} = \frac{(\rho u)^{n+1}}{\rho^{n+1}} \tag{3.63}$$

และ
$$v^{n+1} = \frac{U_y^{n+1}}{\rho^{n+1}} = \frac{(\rho v)^{n+1}}{\rho^{n+1}} \tag{3.64}$$

ขั้นตอนที่ 4 ในขั้นตอนนี้จะเป็นการคำนวณหาตัวแปรอนุรักษ์จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน โดยมีขั้นตอนที่คล้ายกับขั้นตอนอื่นๆ ที่กล่าวมา โดยเริ่มจากการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการ (3.38) แล้วทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์ โดยมีรายละเอียดดังนี้

$$\begin{aligned}\int_A N_\alpha \Delta(\rho\varepsilon)dA = &-\Delta t\left[\int_A N_\alpha\left(\frac{\partial\left(u_j(\rho\varepsilon+p)\right)}{\partial x_j}\right)dA\right]^n \\ &+\frac{\Delta t^2}{2}u_k\left[\int_A N_\alpha\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\left(u_j(\rho\varepsilon+p)\right)}{\partial x_j}\right)dA\right]^n\end{aligned} \tag{3.65}$$

หลังจากประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์เข้ากับสมการ (3.65) จะได้

$$\begin{aligned}\int_A N_\alpha \Delta(\rho\varepsilon)dA = &\Delta t\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j}\left(u_j(\rho\varepsilon+p)\right)dA - \int_S N_\alpha\left(u_j(\rho\varepsilon+p)\right)n_j\,dS\right]^n \\ &-\frac{\Delta t^2}{2}u_k\left[\int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\left(u_j(\rho\varepsilon+p)\right)}{\partial x_j}\right)dA\right]^n \\ &+\frac{\Delta t^2}{2}u_k\left[\int_S N_\alpha\left(\frac{\partial u_j(\rho\varepsilon+p)}{\partial x_j}\right)n_k\,dS\right]^n\end{aligned} \tag{3.66}$$

เมื่อแทนสมการ (3.42) - (3.47) ลงในสมการ (3.66) จะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานในรูปแบบของเมทริกซ์ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}[M]\{\Delta\rho\varepsilon\} = &\ \Delta t\left[[C]\left\{u_j(\rho\varepsilon+p)\right\}-\{R_e\}\right]^n \\ &-\frac{\Delta t^2}{2}u_k\left[[K_{us}]\left\{u_j(\rho\varepsilon+p)\right\}-\{R_{es}\}\right]^n\end{aligned} \tag{3.67}$$

รายละเอียดของเมทริกซ์ต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณในแต่ละขั้นตอน ได้เขียนอยู่ในรูปแบบการของอินทิเกรตบนเอลิเมนต์และการอินทิเกรตที่ขอบดังต่อไปนี้

$$[M] = \int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA \tag{3.68}$$

$$[C] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_j}\right\}\lfloor N \rfloor dA \tag{3.69}$$

$$[K_{us}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_k}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rfloor dA \tag{3.70}$$

$$[K_{ps}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_k}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rfloor dA \tag{3.71}$$

$$[D] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\}\lfloor N \rfloor dA \tag{3.72}$$

$$[K] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rfloor dA \tag{3.73}$$

$$\{R_u\} = \int_S N(u_j U_i) n_j \, dS \tag{3.74}$$

$$\{R_{us}\} = \int_S \{N\}\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} n_k dS \tag{3.75}$$

$$\{R_{ps}\} = \int_S \{N\}\frac{\partial p}{\partial x_i} n_k dS \tag{3.76}$$

$$\{R_D\} = \int_S \{N\}(U_i + \theta_1 \Delta U_i^*) n_i dS \tag{3.77}$$

$$\{R_p\} = \int_S \{N\}\frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dS \tag{3.78}$$

$$\{R_e\} = \int_A \{N\}(u_j(\rho\varepsilon + p)) n_j dA \tag{3.79}$$

$$\{R_{es}\} = \int_S \{N\}\frac{\partial(u_j(\rho\varepsilon + p))}{\partial x_j} n_k dS \tag{3.80}$$

ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูง โดยทั่วไปมักประกอบด้วยคลื่นช็อก ซึ่งลักษณะการกระจายตัวของตัวแปร ไม่ว่าจะเป็นความหนาแน่น ความเร็ว หรือ พลังงานรวม จะเกิดการเปลี่ยนแปลงโดยฉับพลัน การใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่เกินไปในบริเวณของแนวคลื่นช็อก จะ

ก่อให้เกิดการสั่น (oscillation) ของผลลัพธ์ในบริเวณนั้น ทั้งนี้เนื่องจากลักษณะการกระจายภายในเอลิเมนต์ไม่สามารถแทนผลลัพธ์ที่เปลี่ยนแปลงโดยฉับพลันได้ ดังนั้นเพื่อลดการสั่นของผลลัพธ์ในเอกสารอ้างอิง [23] ได้เสนอวิธีเพิ่มความหนืดเทียม (artificial viscosity) เข้ากับวิธีซีบีเอสดังนี้โดย

$$\left\{\frac{U_s^{n+1}-U^{n+1}}{\Delta t}\right\}=\left[M\right]^{-1}C_e h^3\frac{|V|+c}{\bar{p}}\left|\nabla^2 p\right|_e\left[K\right]\{U\}^n \tag{3.81}$$

โดยที่ U_s^{n+1} คือ ตัวแปรอนุรักษ์ที่มีการแก้การสั่นด้วยการเพิ่มความหนืดเทียม

U^{n+1} คือ ตัวแปรอนุรักษ์ที่คำนวณได้ในช่วงเวลาที่ $n+1$

U^n คือ ตัวแปรอนุรักษ์ที่เวลา n

h คือ ขนาดของเอลิเมนต์

C_e คือ ค่าคงที่ของปริมาณความหนืดเทียม มีค่าอยู่ระหว่าง 0.0-2.0

$|V|$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์

c คือ ความเร็วเสียง

$\bar{p}$ คือ ความดันเฉลี่ยบนเอลิเมนต์

การคำนวณหาตัวแปรอนุรักษ์ของการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูง ด้วยวิธีซีบีเอสนั้นเป็นการดำเนินก้าวไปกับเวลา (time marching) โดยเป็นการแก้ระบบสมการแบบชัดแจ้ง (explicit) ดังนั้นในระหว่างการคำนวณผลลัพธ์อาจเกิดการลู่ออก (diverged) ได้หากเลือกใช้ช่วงเวลา (time step) Δt ที่สูงเกินไป จึงจำเป็นต้องมีขีดจำกัดของช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยประเมินจาก ช่วงเวลาวิกฤติ (critical time step) [25] ดังต่อไปนี้

$$\Delta t=\sigma\Delta t_{crit}=\frac{\sigma h}{c+|V|} \tag{3.82}$$

โดยที่ σ คือ ค่าตัวเลขเคอแรนท์ (Courant number) มีค่าอยู่ระหว่าง 0.0 ถึง 1.0

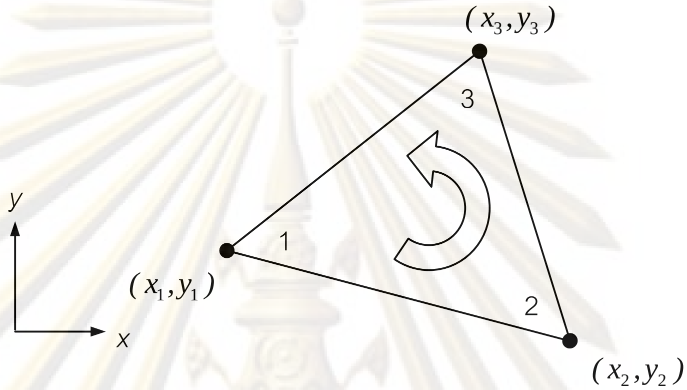
h คือ ขนาดของเอลิเมนต์

$|V|$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์

c คือ ความเร็วเสียง

3.5 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่างๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบปิดได้ ซึ่งจะทำให้สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ต่อเนื่อง โดยเริ่มจากการพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ (flat plane) รูปที่ 3.4 แสดงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อใดๆ ที่วางตัวอยู่ในพิกัด *x-y*



รูปที่ 3.4 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่วางตัวอยู่ในพิกัด *x-y*

ฟังก์ชันการประมาณภายในบนเอลิเมนต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัดได้ดังต่อไปนี้

$$N_\alpha(x,y) = \frac{1}{2A}(a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y) \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.83}$$

เมื่อ A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งคำนวณได้จากพิกัดของจุดต่อทั้งสามได้ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{3.84}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ ในสมการ (3.83) คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{3.85}$$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในจากสมการ (3.83) คือ

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} = \frac{b_\alpha}{2A} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} = \frac{c_\alpha}{2A} \tag{3.86}$$

พิจารณาเมทริกซ์มวล $[M]$ จากสมการ (3.68)

$$[M] = \int_A \{N\} \lfloor N \rfloor dA$$

$$[M] = \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

เมทริกซ์มวล $[M]$ เป็นเมทริกซ์มวลแบบแนบนัย (consistent mass matrix) ดังนั้นจะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยแต่ละสมการย่อยๆ มีความสัมพันธ์กัน ทำให้ต้องแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงดัดแปลงเมทริกซ์มวล $[M]$ ให้อยู่ในรูปแบบรวมตัวที่จุดต่อ (lumped mass matrix) [1] ดังต่อไปนี้

$$[M] = \frac{A}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

พิจารณาเมทริกซ์ $[C]$ จากสมการ (3.69)

$$[C] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_j}\right\} \lfloor N \rfloor dA$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาโดยละเอียดจะพบว่า $[C]$ ประกอบไปด้วย

$$[C_x] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} \lfloor N \rfloor dA \tag{3.89}$$

$$[C_x] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

และ

$$[C_y] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} \lfloor N \rfloor dA \tag{3.91}$$

$$[C_y] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

พิจารณาเมทริกซ์ $[K_{us}]$ จากสมการ (3.70)

$$[K_{us}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_k}\right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rfloor dA$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาโดยละเอียดจะพบว่า $\left[K_{us}\right]$ ประกอบไปด้วย

$$\left[K_{xx}\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA \tag{3.93}$$

$$\left[K_{xx}\right] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

และ

$$\left[K_{xy}\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor dA \tag{3.95}$$

$$\left[K_{xy}\right] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3 \\ b_3c_1 & b_3c_2 & b_3c_3 \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

และ

$$\left[K_{yx}\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA \tag{3.97}$$

$$\left[K_{yx}\right] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} c_1b_1 & c_1b_2 & c_1b_3 \\ c_2b_1 & c_2b_2 & c_2b_3 \\ c_3b_1 & c_3b_2 & c_3b_3 \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

และ

$$\left[K_{yy}\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor dA \tag{3.99}$$

$$\left[\mathrm{K}_{\mathrm{yy}}\right] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

พิจารณาเมทริกซ์ $\left[K_{ps}\right]$ จากสมการ (3.71)

$$\left[K_{ps}\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_k}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rfloor dA$$

ซึ่งเมทริกซ์ $\left[K_{ps}\right]$ จะประกอบไปด้วย $\left[K_{xx}\right]$, $\left[K_{xy}\right]$,$\left[K_{yx}\right]$ และ $\left[K_{yy}\right]$ ซึ่งมีรูปแบบแหมือนกับสมการ (3.94), (3.96), (3.98) และ (3.100)

พิจารณาเมทริกซ์ $[D]$ จากสมการ (3.72)

$$[D] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\}\lfloor N \rfloor dA$$

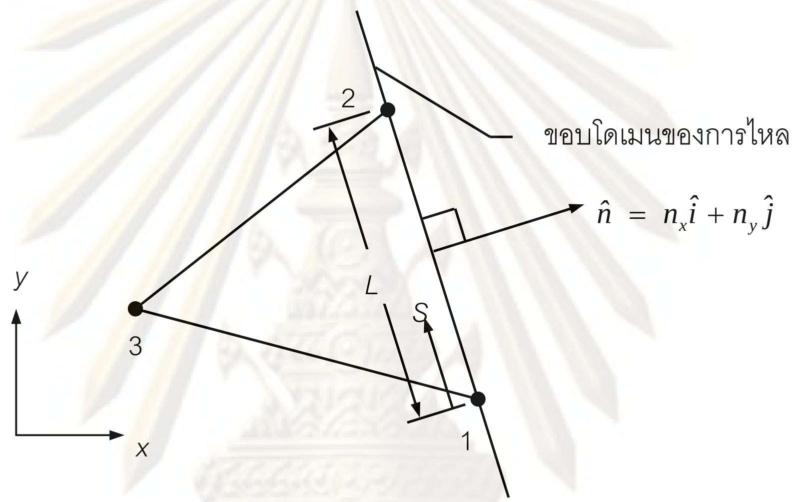
ซึ่งเมทริกซ์ $[D]$ จะประกอบไปด้วย$\left[D_x\right]$ และ $\left[D_y\right]$ ซึ่งมีรูปแบบแหมือนกับสมการ (3.90) และ (3.92)

พิจารณาเมทริกซ์ $\left[K\right]$ จากสมการ (3.73)

$$\left[K\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rfloor dA$$

ซึ่งเมทริกซ์ $\left[K\right]$ จะประกอบไปด้วย $\left[K_{xx}\right]$ และ $\left[K_{yy}\right]$ ซึ่งมีรูปแบบแหมือนกับสมการ (3.94) และ (3.100)

สำหรับเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เป็นการอินทิเกรตที่ขอบ ให้พิจารณาเอลิเมนต์ที่อยู่ขอบของการไหลดังแสดงรายละเอียดในรูปที่ 3.5 โดยขั้นตอนเป็นดังนี้



รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบของโดเมนการไหล

พิจารณาเวกเตอร์ $\left\{R_u\right\}$ จากสมการ (3.74)

$$\left\{R_u\right\} = \int_S N\left(u_j U_i\right)n_j\, dS$$

$$\left\{R_u\right\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix}\left\lfloor \frac{s}{L} \quad 1-\frac{s}{L}\right\rfloor dS \begin{Bmatrix} \left(u_j U_i\right)_1 \\ \left(u_j U_i\right)_2 \end{Bmatrix} n_j \quad (3.101)$$

$$\left\{R_u\right\} = \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \left(u_j U_i\right)_1 \\ \left(u_j U_i\right)_2 \end{Bmatrix} n_j \quad (3.102)$$

พิจารณาเวกเตอร์ $\left\{R_{us}\right\}$ จากสมการ (3.75)

$$\left\{R_{us}\right\} = \int_S \left\{N\right\}\frac{\partial\left(u_j U_i\right)}{\partial x_j} n_k dS \quad (3.103)$$

$$\left\{R_{us}\right\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \dfrac{s}{L} \\ 1-\dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} dS \, \frac{\partial\left(u_j U_i\right)}{\partial x_j} n_k \tag{3.104}$$

$$\left\{R_{us}\right\} = \frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial\left(u_j U_i\right)}{\partial x_j} n_k \tag{3.105}$$

พิจารณาเวกเตอร์ $\left\{R_{ps}\right\}$ จากสมการ (3.76)

$$\left\{R_{ps}\right\} = \int_S \{N\} \frac{\partial p}{\partial x_i} n_k dS \tag{3.106}$$

$$\left\{R_{ps}\right\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \dfrac{s}{L} \\ 1-\dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} dS \, \frac{\partial p}{\partial x_i} n_k \tag{3.107}$$

$$\left\{R_{ps}\right\} = \frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_i} n_k \tag{3.108}$$

พิจารณาเวกเตอร์ $\left\{R_{D}\right\}$ จากสมการ (3.77)

$$\left\{R_{D}\right\} = \int_S \{N\} (U_i + \theta_1 \Delta U_i^*) n_i dS \tag{3.109}$$

$$\left\{R_{D}\right\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \dfrac{s}{L} \\ 1-\dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s}{L} & 1-\dfrac{s}{L} \end{bmatrix} dS \begin{Bmatrix} \left(U_i + \theta_1 \Delta U_i^*\right)_1 \\ \left(U_i + \theta_1 \Delta U_i^*\right)_2 \end{Bmatrix} n_j \tag{3.110}$$

$$\left\{R_{u}\right\} = \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(U_i + \theta_1 \Delta U_i^*\right)_1 \\ \left(U_i + \theta_1 \Delta U_i^*\right)_2 \end{Bmatrix} n_j \tag{3.111}$$

พิจารณาเวกเตอร์ $\left\{R_{p}\right\}$ จากสมการ (3.78)

$$\left\{R_{p}\right\} = \int_S \{N\} \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dS \tag{3.112}$$

$$\left\{R_{p}\right\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \dfrac{s}{L} \\ 1-\dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} dS \, \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i \tag{3.113}$$

$$\left\{R_{p}\right\} = \frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i \tag{3.114}$$

พิจารณาเวกเตอร์ $\{R_e\}$ จากสมการ (3.79)

$$\{R_e\} = \int_A \{N\}\left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)n_j dS \tag{3.115}$$

$$\{R_u\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{L} & 1-\frac{s}{L} \end{bmatrix} dS \begin{Bmatrix} \left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)_1 \\ \left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)_2 \end{Bmatrix} n_j \tag{3.116}$$

$$\{R_u\} = \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)_1 \\ \left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)_2 \end{Bmatrix} n_j \tag{3.117}$$

พิจารณาเวกเตอร์ $\{R_{es}\}$ จากสมการ (3.80)

$$\{R_{es}\} = \int_S \{N\}\frac{\partial\left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)}{\partial x_j} n_k dS \tag{3.118}$$

$$\{R_{ps}\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{s}{L} \\ 1-\frac{s}{L} \end{Bmatrix} dS \frac{\partial\left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)}{\partial x_j} n_k \tag{3.119}$$

$$\{R_{ps}\} = \frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial\left(u_j(\rho\varepsilon + p)\right)}{\partial x_j} n_k \tag{3.120}$$

บทที่ 4

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์

ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

บทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดและขั้นตอนการคำนวณภายในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นให้สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 3 โดยโปรแกรมดังกล่าวได้ถูกเขียนขึ้นมาด้วยภาษาฟอร์แทรน 90 (FORTRAN 90)

4.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และ 6 โปรแกรมย่อย (subroutines) โดยมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

4.1.1 เริ่มต้นการทำงานภายในโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM] โดยจะเรียกโปรแกรมย่อยแรก [INPUT] โดยการอ่านแฟ้มข้อมูลนำเข้าของปัญหาการไหล (input file) ซึ่งประกอบด้วยจำนวนจุดต่อทั้งหมด จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด จำนวนขอบทั้งหมด คุณสมบัติต่างๆ ของของไหล จำนวนรอบในการคำนวณ พิกัดของจุดต่อเงื่อนไขเริ่มต้นของการไหลในแต่ละจุดต่อซึ่งได้แก่ ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็ว u ในแนวแกน x และ ค่าความเร็ว v ในแนวแกน y และค่าพลังงานรวม หมายเลขจุดต่อที่ประกอบกันขึ้นเป็นเอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

4.1.2 เรียกโปรแกรมย่อย [PRELIM] เพื่อทำการคำนวณข้อมูลเบื้องต้นของปัญหา เช่น ความสูงของเอลิเมนต์ คำนวณรูปร่างและเมตริกซ์มวลแบบรวมที่จุดต่อ ทิศทางโคซายน์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับขอบของปัญหา ข้อมูลเกี่ยวกับขอบด้านที่เป็นผนัง เป็นต้น

4.1.3 เรียกโปรแกรมย่อย [TRANSFORM] เพื่อทำให้ตัวแปรที่นำเข้าที่อยู่ในรูปแบบตัวแปรพื้นฐานอยู่ในรูปแบบตัวแปรอนุรักษ์

4.1.4 เริ่มการคำนวณแบบทำซ้ำโดยเรียกโปรแกรมย่อย [ITERATION] ซึ่งภายในจะประกอบด้วยโปรแกรมย่อยที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคำนวณตั้งแต่การคำนวณในขั้นตอนที่ 1 ถึง ขั้นตอนที่ 4 การประยุกต์เงื่อนไข

ขอบเขต การคำนวณความดัน เช่น โปรแกรมย่อย [STEP1], [STEP2], [STEP3] และ [STEP4] เป็นต้น

4.1.5 เรียกโปรแกรมย่อย [BTRANSFORM] เพื่อเปลี่ยนตัวแปรที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์กลับไปสู่ตัวแปรพื้นฐาน

4.1.6 เรียกโปรแกรมย่อย [OUTPUT] เพื่อพิมพ์ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ลงในแฟ้มข้อมูลที่ต้องการเพื่อนำไปใช้แสดงผลต่อไป

4.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรมแสดงไว้ในภาคผนวก ก

4.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ สามารถแบ่งออกเป็น 8 ส่วนย่อยได้ดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป ประโยคต่าง ๆ ที่มีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น:

```
2
FINITE ELEMENT MODEL FOR MACH 2 WALL SHOCK
MODEL WITH 1642 TRIANGULAR ELEMENTS AND 862 NODES
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายถึงจำนวนเอลิเมนต์ จุดต่อ เงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดที่สอง จำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อ จำนวนเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

ตัวอย่างเช่น

```
NELEM    NPOIN    NBOUN
 1642     862      80
```

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติของของไหล

บรรทัดแรก คำอธิบายคุณสมบัติของของไหลและค่าคงที่ของความหนืดเทียม

บรรทัดที่สอง ค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาตรคงที่

ตัวอย่างเช่น

```
GAMMA    CONSTANT
 1.40      0.5
```

<u>**ส่วนที่** 4</u> จำนวนของการทำซ้ำและจำนวนครั้งที่จะแสดงค่าการลู่เข้า

บรรทัดแรก คำอธิบายจำนวนการทำซ้ำ จำนวนครั้งที่แสดงผลการลู่เข้าบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ และช่วงเวลาในการคำนวณ

บรรทัดที่สอง จำนวนการทำซ้ำ จำนวนครั้งที่แสดงผลการลู่เข้าบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ และช่วงเวลาในการคำนวณ

ตัวอย่างเช่น

```
NTIME      IWRITE     DTFIX
5000       100        0.0050
```

<u>**ส่วนที่** 5</u> ข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำอธิบายของข้อมูลจุดต่อ

บรรทัดต่อไป หมายเลขจุดต่อ พิกัดของจุดต่อในแกน *x* และแกน *y*

ตัวอย่างเช่น

```
NODAL COORDINATES ( X AND Y ) [   862]:
   1        0.00000000        0.00000000
   2        0.05000000        0.00000000
   3        0.10000000        0.00000000
```

<u>**ส่วนที่** 6</u> เงื่อนไขเริ่มต้นของค่าตัวแปรที่จุด

บรรทัดแรก คำอธิบายของค่าตัวแปรที่จุดต่อ

บรรทัดต่อไป หมายเลขจุดต่อ ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็ว *u* ในแนวแกน *x* และค่าความเร็ว *v* ในแนวแกน *y* และค่าพลังงานรวม

ตัวอย่างเช่น

```
        ASSUME DENSITY U-VELOCITY V-VELOCITY T-ENER[  862]:
 1   0.100E+01   0.9848E+00   -0.173648E+00   0.946428E+00
 2   0.100E+01   0.9848E+00   -0.173648E+00   0.946428E+00
 3   0.100E+01   0.9848E+00   -0.173648E+00   0.946428E+00
```

<u>**ส่วนที่** 7</u> ข้อมูลของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายข้อมูลหมายเลขของจุดต่อแต่ละเอลิเมนต์

บรรทัดต่อไป หมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่น

```
ELEMENT NODAL CONNECTIONS [  1642]:
  1        19        20       81
  2        81        20      151
  3        19        81      155
```

<u>ส่วนที่ 8</u> ข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์และจุดต่อที่ทางไหลเข้า ไหลออก และผนัง

บรรทัดแรก คำอธิบายข้อมูลหมายเลขของจุดต่อ เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดต่อไป หมายเลขจุดต่อทั้งสองที่ขอบ หมายเลขเอลิเมนต์ของขอบนั้นและหมายเลขเงื่อนไขขอบเขตซึ่งกำหนดให้ 1 คือ ด้านที่มีการไหลเข้า, 2 คือ ด้านที่เป็นผนัง 4 คือ ด้านที่มีการความสมมาตร และ 5 คือ ด้านของการไหลออก

ตัวอย่างเช่น

```
BOUNDARY CONDITIONS(1=IN,2=WALL,4=SYM,5=OUT)[80]:
 42       43       20       1
 43       44       21       1
 41       42       25       1
```

4.4 ลักษณะของแฟ้มข้อมูลผลลัพธ์

หลังจากโปแกรมคอมพิวเตอร์ได้ทำการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะให้พิมพ์ชื่อแฟ้มข้อมูลผลลัพธ์เพื่อบรรจุค่าของความหนาแน่น ความเร็วและพลังงานรวมที่คำนวณได้ โดยแฟ้มข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมมีลักษณะดังต่อไปนี้

บรรทัดแรก คำอธิบายผลลัพธ์

บรรทัดต่อไป หมายเลขจุดต่อ ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็ว *u* ในแนวแกน *x* และ ค่าความเร็ว *v* ในแนวแกน *y* และค่าพลังงานรวม

ตัวอย่างเช่น

```
NODAL VALUES SOLUTIONS [   862]:

NODE      RHO            U              V              E
  1   0.100000E+01   0.984808E+00   -0.138777E-15   0.946428E+00
  2   0.119133E+01   0.938976E+00   -0.582447E-17   0.928602E+00
  3   0.132134E+01   0.921427E+00   -0.262575E-17   0.932206E+00

  .       .              .               .              .

861   0.119133E+01   0.938976E+00   -0.582447E-17   0.928602E+00
862   0.132134E+01   0.921427E+00   -0.262575E-17   0.932206E+00
```

บทที่ 5

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียงโดยทั่วไปมักจะพบคลื่นช็อก (shock wave) ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของของไหลอย่างฉับพลันผ่านแนวของคลื่นช็อก โดยเฉพาะอย่างยิ่งการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่คงตัว จะเกิดการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกนี้ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กวางตัวตามแนวการเคลื่อนตัวคลื่นช็อก แต่โดยทั่วไปแล้วทิศทางและตำแหน่งการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้าทำให้การที่จะให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงได้นั้น จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์มากขึ้นไปด้วย

ดังนั้นหากสามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณที่เหมาะสมได้ และเอลิเมนต์ขนาดเล็กปรับตัวไปตามเวลาเมื่อ คลื่นช็อกมีการเคลื่อนที่ไป ก็จะทำให้เวลาในการคำนวณลดลงและเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ขึ้นด้วย ในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive meshing technique) และขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นต่าง ๆ

5.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คือ การใช้ข้อมูลของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์ที่มีอยู่ เพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์สูง และ เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์ต่ำ โดยหลักการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ อาศัยหลักการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principle stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) คือ เริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของคำตอบที่จะใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ เช่น ความหนาแน่น ความดัน ความเร็ว เป็นต้น สำหรับการไหลในสองมิติค่าอนุพันธ์อันดับสองของผลลัพธ์มี 3 ค่าคือ $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

โดยที่ ϕ คือผลลัพธ์ของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

ค่าอนุพันธ์อันดับสองทั้ง 3 ค่า จะนำมาคำนวณหาค่าในแนวแกนหลักได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2} \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2} \tag{5.2}$$

ดังนั้นจะขอยกตัวอย่างการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้ที่ใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ ซึ่งในที่นี้จะให้ค่าความหนาแน่นที่ได้จากการคำนวณเป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\rho}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\rho}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

โดยที่

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}\right)^2} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}\right)^2} \tag{5.5}$$

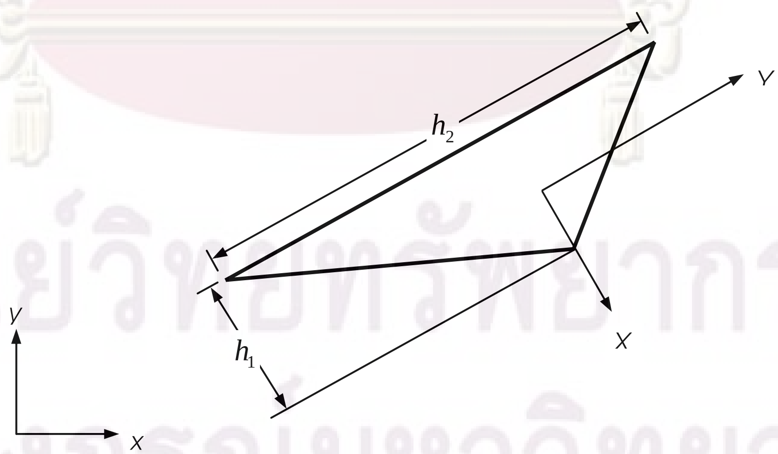
กระบวนการดังกล่าวจะทำการคำนวณสำหรับทุกๆ จุดต่อในจากนั้นจึงนำค่า $\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2}$ และ $\frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2}$ ของทุกๆ จุดต่อมาเปรียบเทียบกันเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่มีค่ามากที่สุดของปัญหาซึ่งแทนด้วย λ_{max} โดยที่

$$\lambda_{max} = max\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2}\right] \tag{5.6}$$

ค่า λ_{max} ที่คำนวณได้จะถูกใช้ในการคำนวณเพื่อหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ดังต่อไปนี้

$$h_1^2\left|\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2}\right| = h_2^2\left|\frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2}\right| = h_{min}^2 \lambda_{max} \tag{5.7}$$

โดยที่ h_1 คือ ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ h_2 คือ ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก Y ดังแสดงในรูปที่ 5.1 ดังนั้นหากกำหนดขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กที่สุด h_{min} และขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด h_{max} ให้แล้ว ค่าความยาว h_1 และ h_2 ที่เหมาะสมของเอลิเมนต์อื่นๆ สำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่จึงสามารถคำนวณได้



รูปที่ 5.1 การวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ Y

จากสมการ (5.7) พบว่าค่า h_{min} มีความสำคัญอย่างยิ่งในการปรับขนาดเอลิเมนต์ กล่าวคือ หากกำหนดค่า h_{min} ที่น้อยเกินไปจะทำให้มีการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีจำนวนมากเกินไป ในทางกลับกันถ้าหากกำหนดค่า h_{min} ที่มากเกินไปก็จะมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนน้อยเกินไป ซึ่งอาจส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณของผลลัพธ์ ดังนั้นการเลือกค่า h_{min} ที่เหมาะสมจึงเป็นสิ่งที่สำคัญมาก ในทางปฏิบัติยังไม่มีวิธีใดที่สามารถบอกได้ว่าค่า h_{min} ที่เหมาะสมควรมีค่าเท่าใด ทั้งนี้ก็ขึ้นกับลักษณะของปัญหาและประสบการณ์

ค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นทั้ง 3 ค่า ซึ่งคือ $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}$ ที่จุดต่อต่างๆ ในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีอยู่แล้วสามารถคำนวณได้โดยใช้ขั้นตอนดังต่อไปนี้ [26,27,28] สมมติต้องการคำนวณหา $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งลักษณะการกระจายของความหนาแน่นบนเอลิเมนต์คือ

$$\rho^{(e)} = \lfloor N \rfloor \{\rho\} \tag{5.8}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{\rho\} \tag{5.9}$$

ซึ่งมีค่าคงที่และรู้ค่าสำหรับเอลิเมนต์นั้น ในขณะเดียวกันหากมองโดเมนของการไหลในภาพรวมแล้วสมมติว่า ค่าความชันของความหนาแน่นบนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความชันของความหนาแน่นที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x} = \lfloor N \rfloor \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} \tag{5.10}$$

จากนั้นนำสมการ (5.10) ลบออกจากสมการ (5.9) แล้วประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะได้

$$\int_A \{N\} \left(\frac{\partial \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} \right) dA = 0 \tag{5.11}$$

แทนค่าสมการ (5.10) ลงในสมการ (5.11) จะได้

$$\int_A \{N\} \lfloor N \rfloor dA \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} \tag{5.12}$$

$$[M] \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} \tag{5.13}$$

โดยที่ $[M]$ คือ เมทริกซ์มวลแบบแนบนัยดังแสดงสมการ (3.87) สำหรับสมการ (5.13) เป็นสมการของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องทำการคำนวณสำหรับทุกๆ เอลิเมนต์แล้วรวมขึ้นเป็นระบบสมการใหญ่เพื่อหาค่าความชันของความหนาแน่นที่จุดต่อ อนึ่งระบบสมการใหญ่สามารถแก้ได้ง่ายขึ้นหากแปลงเมทริกซ์มวลแบบเต็มให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์มวลแบบรวมที่จุดต่อดังสมการ (3.88)

การคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถดำเนินไปในแนวทางเดียวกัน กล่าวคือ หลังจากทราบค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อแล้วสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสองได้จาก

$$\frac{\partial^2 \rho^{(e)}}{\partial x^2} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} \tag{5.14}$$

สมมติอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นบนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบซึ่งขึ้นอยู่กับค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x^2} = \lfloor N \rfloor \left\{ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right\} \tag{5.15}$$

จากนั้นค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นที่จุดต่อจึงคำนวณได้จาก

$$\int_A \{N\} \lfloor N \rfloor dA \left\{ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial^2 \rho^{(e)}}{\partial x^2} \tag{5.16}$$

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial^2 \rho^{(e)}}{\partial x^2} \tag{5.17}$$

สำหรับขั้นตอนในการหาค่า $\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}$ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน

5.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้โปรแกรม FEMESH ซึ่งได้พัฒนาขึ้นโดย อ.ดร.สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช [8] ในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โปรแกรม FEMESH เป็นโปรแกรมที่ทำงานในโหมดกราฟิกสามารถที่จะสร้างรูปแบบของปัญหาและสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมได้ทันทีและยังสามารถส่งต่อข้อมูลให้กับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์อื่น ๆ เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาได้ในหลายรูปแบบ รวมถึงการแสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการคำนวณในรูปแบบกราฟิกได้ โดยประสิทธิภาพและความถูกต้องของโปรแกรม FEMESH ได้รับการตรวจสอบด้วยปัญหาในเอกสารอ้างอิง [29]

ภาพโดยรวมของโครงสร้างการทำงานของโปรแกรม FEMESH สามารถที่จะแบ่งออกได้เป็นสามส่วนหลัก ๆ ดังนี้

1. ส่วนทำงานก่อนการประมวลผล (Pre-processing) เป็นส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการสร้างรูปร่างของปัญหาต่างๆ เช่น การวาดเส้นตรง หรือเส้นโค้ง การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม หรือการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบ (boundary constraint) เป็นต้น งานหลักของส่วนทำงานก่อนการประมวลผล ก็คือ การทำงานด้านคอมพิวเตอร์ช่วยการออกแบบ (CAD) ซึ่งประกอบด้วยคำสั่งต่าง ๆ มากมายที่ช่วยในการสร้างรูปทรงเรขาคณิต

2. ส่วนการประมวลผล (Processing) ซึ่งหมายถึง ส่วนของโปรแกรมที่ทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาต่าง ๆ

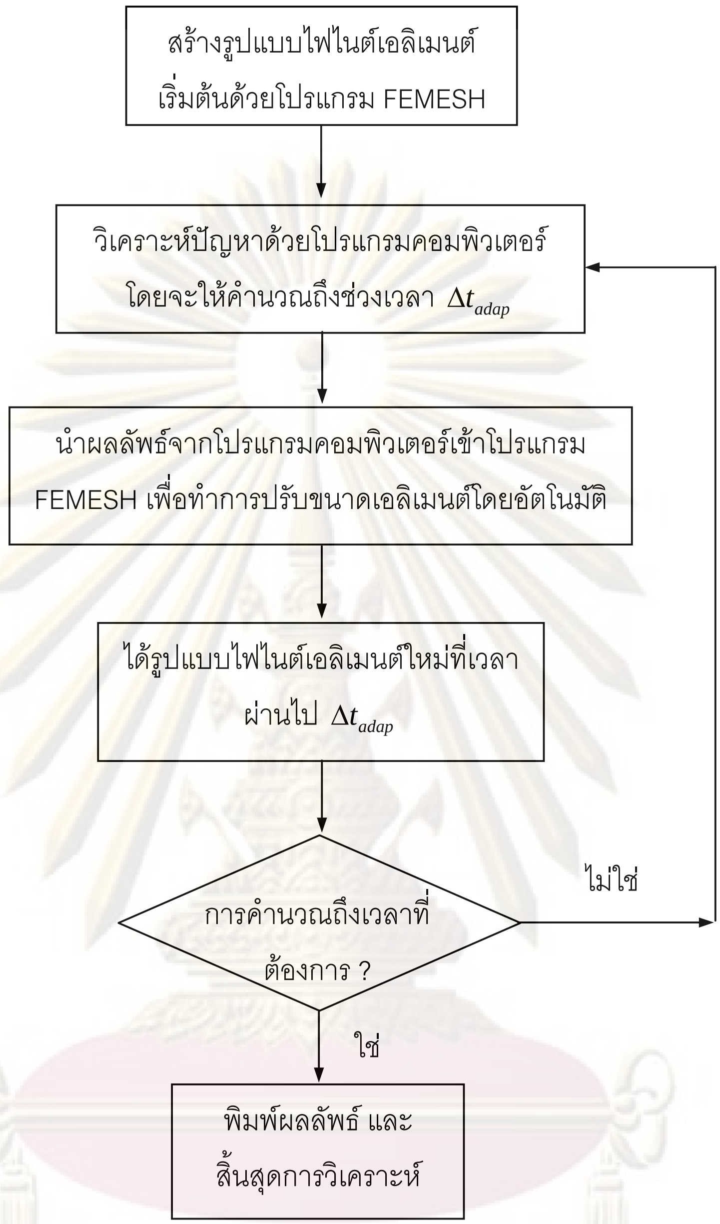
3. ส่วนทำงานหลังการประมวลผล (Post-processing) เป็นส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในรูปแบบกราฟิก เช่น การแสดงเส้นชั้น (contour) หรือการแสดงเวกเตอร์ของความเร็ว (velocity vector) เป็นต้น นอกจากนี้การประยุกต์เทคนิคปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) เข้ากับปัญหาเพื่อต้องการให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น ก็จะเป็นการทำงานในส่วนนี้ด้วยเช่นกัน โดยจะนำผลลัพธ์ที่ได้มาทำการคำนวณขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมและทำการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่อีก

5.3 ประยุกต์โปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ขั้นตอนการประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เข้ากับโปรแกรม FEMESH เพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ สามารถอธิบายได้ด้วยแผนภูมิการทำงานดังแสดงในรูปที่ 5.2 ซึ่งมีรายละเอียดโดยสรุปดังต่อไปนี้

5.3.1 สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นด้วยโปรแกรม FEMESH โดยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น โดยจะมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กวางตัวอยู่ตามแนวของคลื่นช็อกตามแต่ปัญหาที่กำลังพิจารณา

5.3.2 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น มาทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงโดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากข้อ 5.3.1 ซึ่ง โปรแแกรมจะทำการคำนวณจนถึงช่วงเวลาหนึ่ง Δt_{adap} ก็จะหยุดเพื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์



รูปที่ 5.2 แผนผังการทำงานของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

5.3.3 นำผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากข้อ 5.3.2 เข้าโปรแกรม FEMESH เพื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยในขั้นตอนนี้จำเป็นเลือกตัวชี้วัดในการปรับขนาดเอลิเมนต์ซึ่งในที่นี้ใช้ค่าความหนาแน่น หรือค่าความดัน และกำหนดค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่มากที่สุด และค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่น้อยที่สุด ซึ่งจะได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ไปตามการเคลื่อนตัวของผลลัพธ์และผลลัพธ์ที่ได้ก็มีความแม่นยำภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวด้วย

5.3.4 ทำซ้ำขั้นตอนที่ 5.3.2 และ 5.3.3 อีกครั้งจนได้ผลลัพธ์ที่เวลาที่ต้องการจึงหยุดการคำนวณ

5.4 ลักษณะของแฟ้มข้อมูลนำเข้าโปรแกรม FEMESH

ลักษณะของแฟ้มข้อมูลนำเข้าโปรแกรม FEMESH เพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงประกอบด้วย 2 ส่วน ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ส่วนคำสั่ง (command section) ประกอบด้วยข้อมูลต่างๆ เพื่อให้โปรแกรม FEMESH ตรวจสอบแฟ้มข้อมูลที่นำเข้ามามีความสอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้น ตัวอย่างเช่น

```
OUT_FILE_VERSION=1.0
TITLE=FINITE ELEMENT MODEL FOR SHOCK TUBE PROBLEM
SUBTITLE=
DATE=20-JAN-08  12:39:52
SOL=15
PROBLEMID=15822203
SOLVERSTART=20-JAN-08 12:39:52
SOLVEREND=20-JAN-08 12:41:13
REMESH_HMIN=0.001
REMESH_HMAX=0.1
END=CMD
```

ส่วนที่ 2 ส่วนผลลัพธ์ (solution section) ประกอบด้วยค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในแต่ละจุดต่อซึ่งประกอบด้วย หมายเลขจุดต่อ ค่าความหนาแน่น ความเร็ว *u* และ *v* ค่าพลังงานรวม ค่าความดันและขนาดเอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น

```
NODAL VALUES SOLUTIONS [  862]:

NODE     RHO          U          V          E          P         H
1 0.1000E+01  0.9848E+00  0.000E+00  0.9464E+00  0.1785E+00  0.00E+00
2 0.1253E+01  0.9252E+00  0.000E+00  0.9240E+00  0.2486E+00  0.00E+00
3 0.1409E+01  0.9090E+00  0.000E+00  0.9290E+00  0.2908E+00  0.00E+00
```

บทที่ 6

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว

ในบทนี้จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบต่าง ๆ โดยในช่วงแรกของบท จะวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆที่มีผลเฉลยแม่นตรงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม ซึ่งจะใช้เอลิเมนต์ขนาดสม่ำเสมอวางตัวอย่างเป็นระเบียบทั่วทั้งโดเมนของปัญหา โดยจะทำการวิเคราะห์ปัญหาทั้งหมด 3 ปัญหา ซึ่งได้แก่

1. ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ
2. ปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ
3. ปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

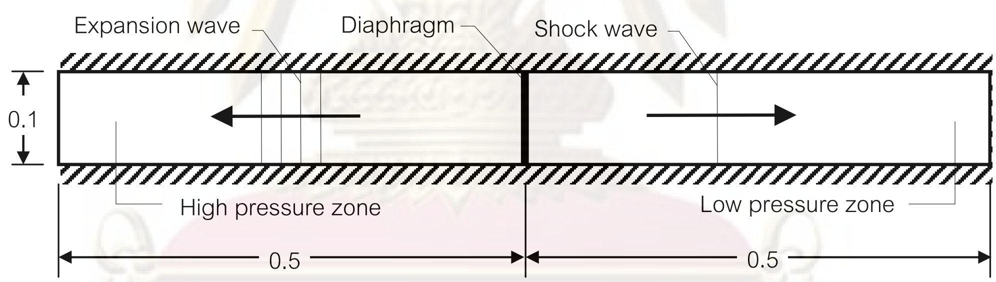
ต่อจากนั้นจะทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวที่มีความซับซ้อนขึ้นโดยประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้าไปด้วย โดยในการวิเคราะห์ปัญหาต่างๆนั้นจะพบว่าเอลิเมนต์ขนาดเล็กจะเคลื่อนตัวไปตามการเคลื่อนที่ของคลื่นช็อกเพื่อจับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันของผลลัพธ์ที่เกิดข้ามคลื่นช็อกนั้น โดยปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวที่วิเคราะห์ร่วมกับประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ได้แก่

1. ปัญหาคลื่นช็อกในท่อ
2. ปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ
3. ปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม
4. ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 ผ่านมุม 90°
5. ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°
6. ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ
7. ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ
8. ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ

6.1 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

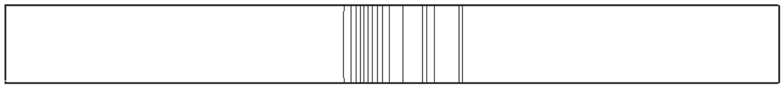
6.1.1 ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ [17] เป็นปัญหาพื้นฐานที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่คำนวณปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว เนื่องจากสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงที่เวลาต่างๆ ได้ นอกจากนี้ยังเป็นปัญหาที่สามารถทำการทดลองในห้องปฏิบัติการได้โดยตรง รูปแบบของปัญหาได้แสดงในรูปที่ 6.1คือ ในขณะที่เวลาเป็นศูนย์จะกำหนดให้ของไหลที่อยู่ภายในท่อถูกแบ่งออกเป็นสองด้านโดยแผ่นกั้น(diaphragm) ตรงกึ่งกลางของท่อ และให้ของไหลทั้งสองด้านมีคุณสมบัติเริ่มต้นที่แตกต่างกัน เช่น ค่าความหนาแน่น ค่าความดัน เป็นต้น โดยในที่นี้จะกำหนดให้ของไหลทางด้านซ้ายมือเป็นด้านที่มีความดันสูงกว่า (high pressure zone) และมีคุณสมบัติเริ่มต้นเป็นดังนี้ $\rho = 1.0$, $u = 0.0$, $v = 0.0$, $\varepsilon = 2.5$ ส่วนคุณสมบัติเริ่มต้นของของไหลทางด้านขวามือซึ่งมีความดันต่ำกว่า (low pressure zone) เป็นดังนี้ $\rho = 0.125$, $u = 0.0$, $v = 0.0$, $\varepsilon = 2.0$ เมื่อมีการยกแผ่นกั้นออกทันทีทันใด ผลของความแตกต่างกันของคุณสมบัติของของไหลทั้งสองด้านจะทำให้เกิดคลื่นช็อกวิ่งไปทางด้านขวามือ และ คลื่นการขยายตัววิ่งไปด้านซ้ายมือ

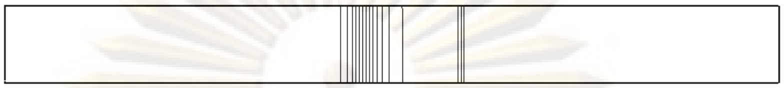


รูปที่ 6.1 ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

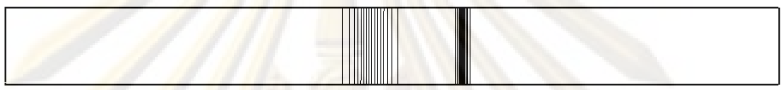
ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์จะเริ่มจากการสร้างเอลิเมนต์สม่ำเสมอขนาด 0.0025 ซึ่งจะทำให้ได้จำนวนจุดต่อจำนวน 16,442 จุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์จำนวน 32,001 เอลิเมนต์ เพื่อแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ในรูปที่ 6.2 – 6.9 เป็นเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และค่าความเร็วในแนวแกน x และกราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขที่เวลา 0.05, 0.10, 0.15 และ 0.20 ตามลำดับ โดยผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับผลเฉลยแม่นตรง แต่ผลลัพธ์ที่ได้ข้ามแนวของช็อกอาจจะได้ผลลัพธ์ที่ไม่แม่นยำมากนั้นทั้งนี้เพราะว่าเอลิเมนต์ที่อยู่ตามแนวช็อกมีขนาดใหญ่



(ก) เส้นชั้นของความหนาแน่น

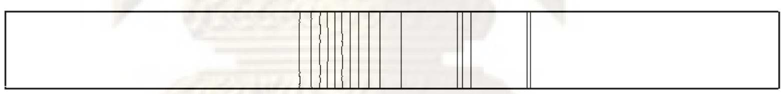


(ข) เส้นชั้นของความดัน

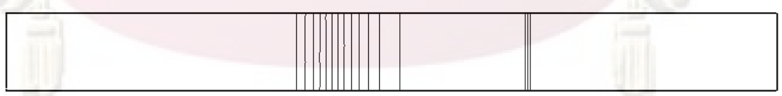


(ค) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

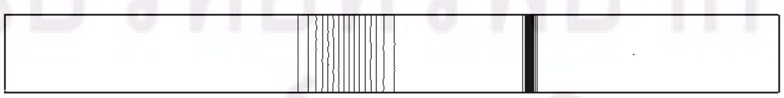
รูปที่ 6.2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วใน แนวแกน x ที่เวลา t = 0.05 ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) เส้นชั้นของความหนาแน่น

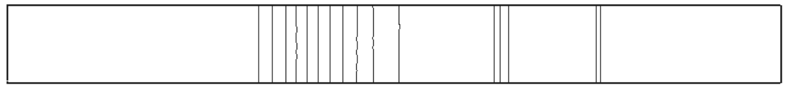


(ข) เส้นชั้นของความดัน



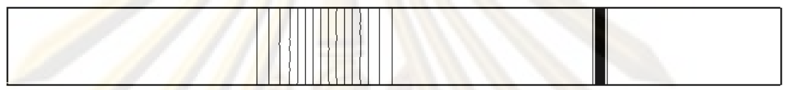
(ค) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

รูปที่ 6.3 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วใน แนวแกน x ที่เวลา t = 0.10 ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



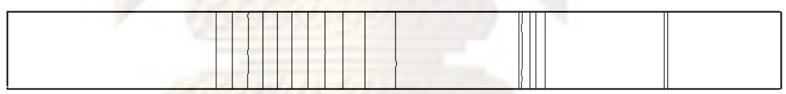
(ก) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ข) เส้นชั้นของความดัน

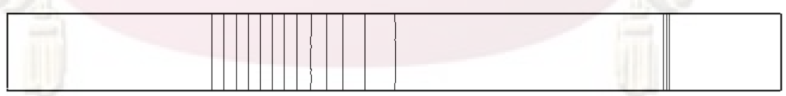


(ค) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

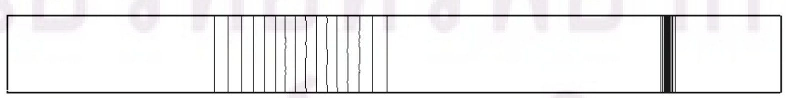
รูปที่ 6.4 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา $t = 0.15$ ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) เส้นชั้นของความหนาแน่น

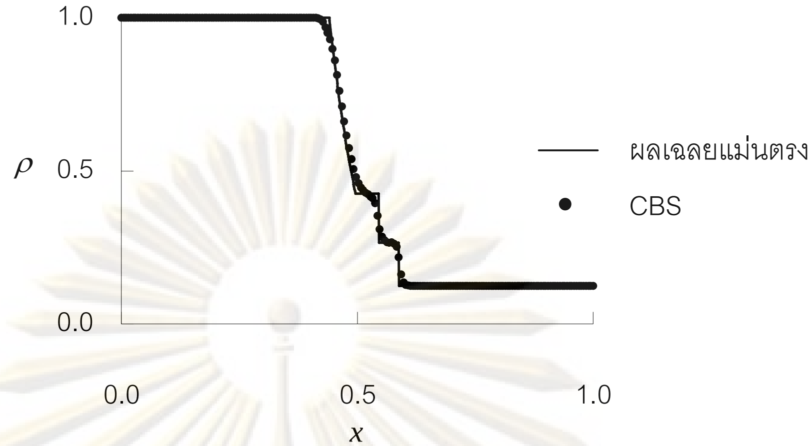


(ข) เส้นชั้นของความดัน

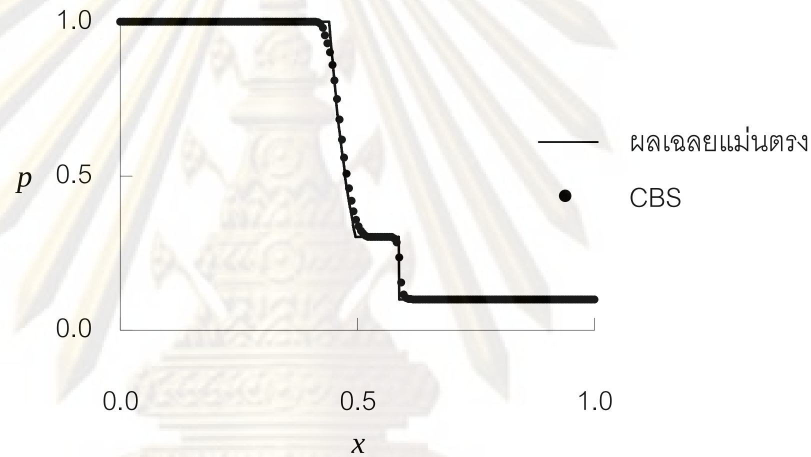


(ค) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

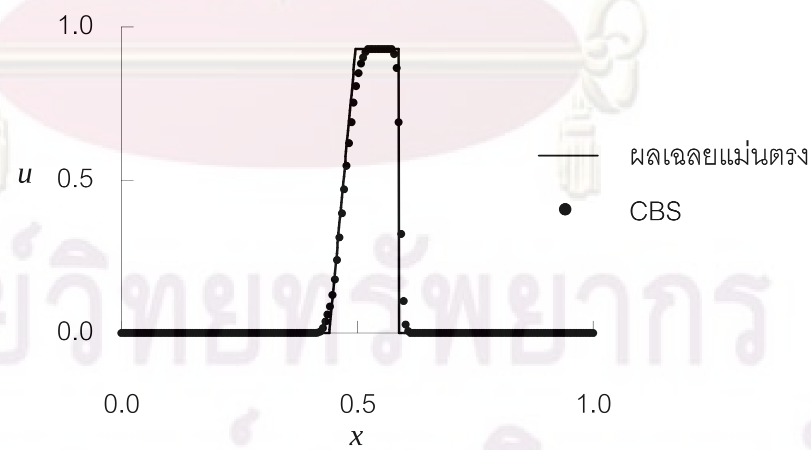
รูปที่ 6.5 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา $t = 0.20$ ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) ความหนาแน่น

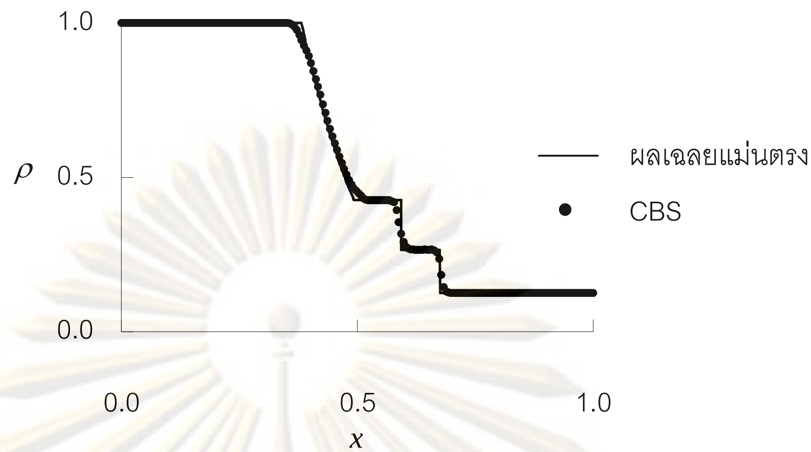


(ข) ความดัน

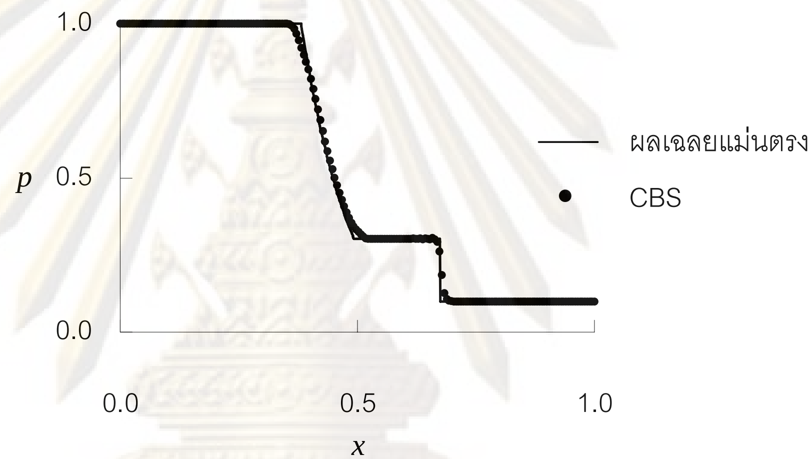


(ค) ความเร็ว

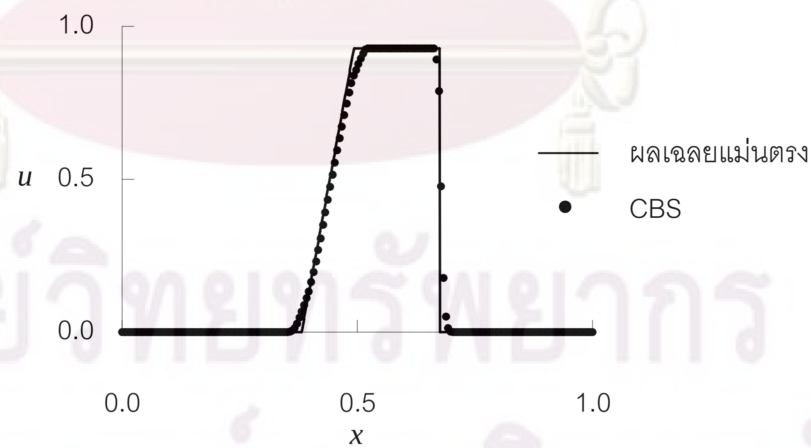
รูปที่ 6.6 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.05 ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) ความหนาแน่น

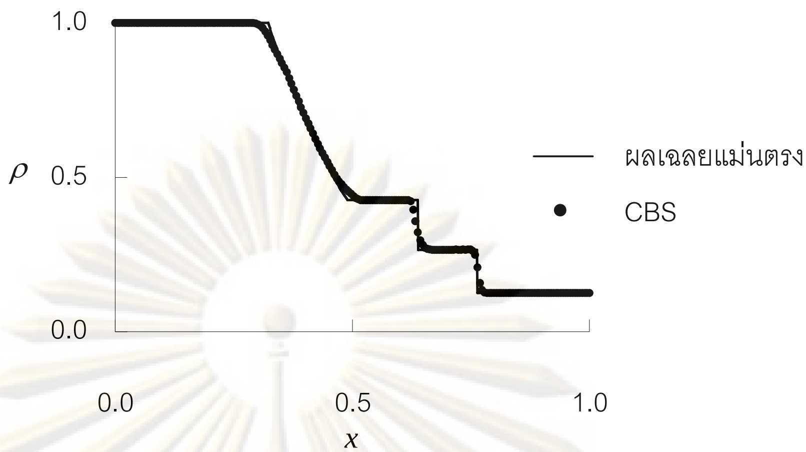


(ข) ความดัน

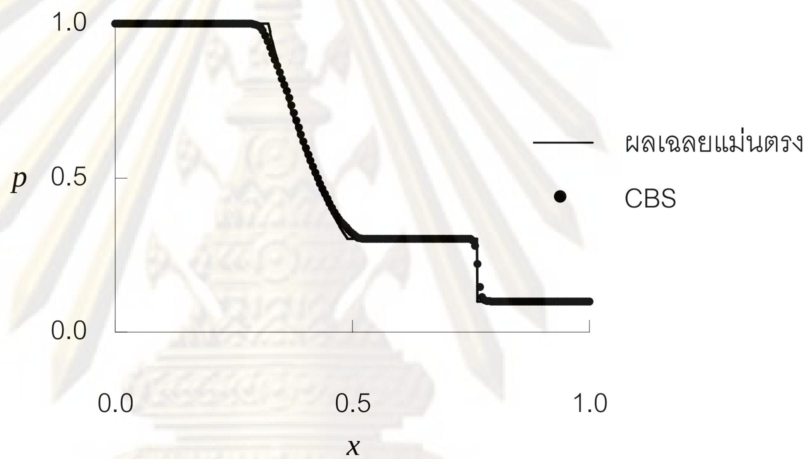


(ค) ความเร็ว

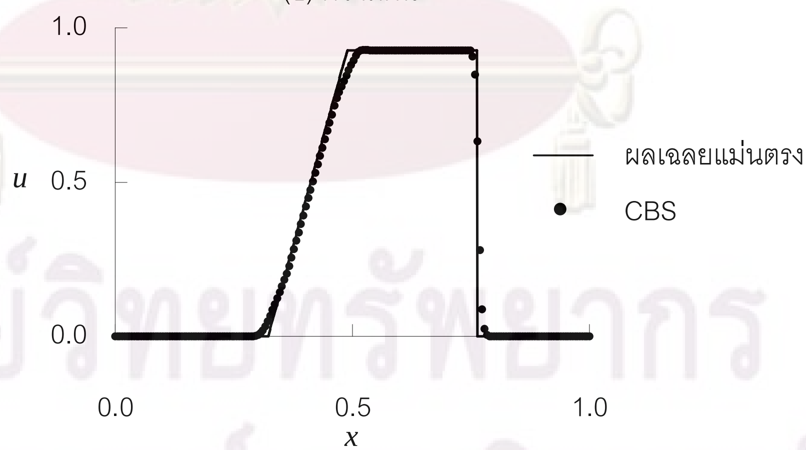
รูปที่ 6.7 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.10 ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) ความหนาแน่น

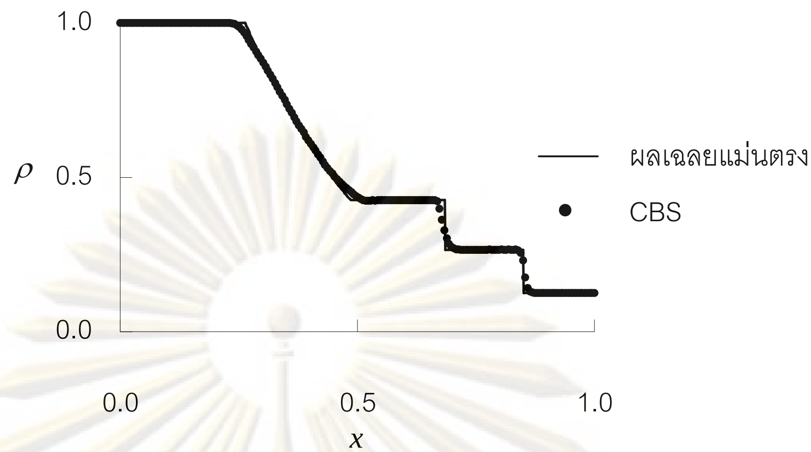


(ข) ความดัน

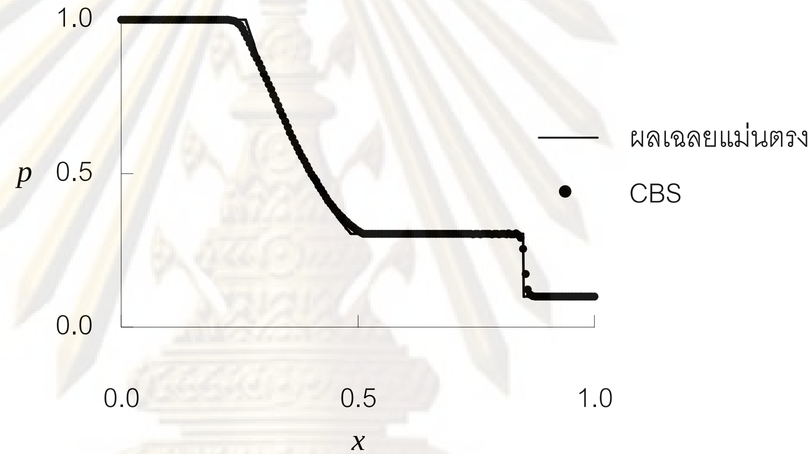


(ค) ความเร็ว

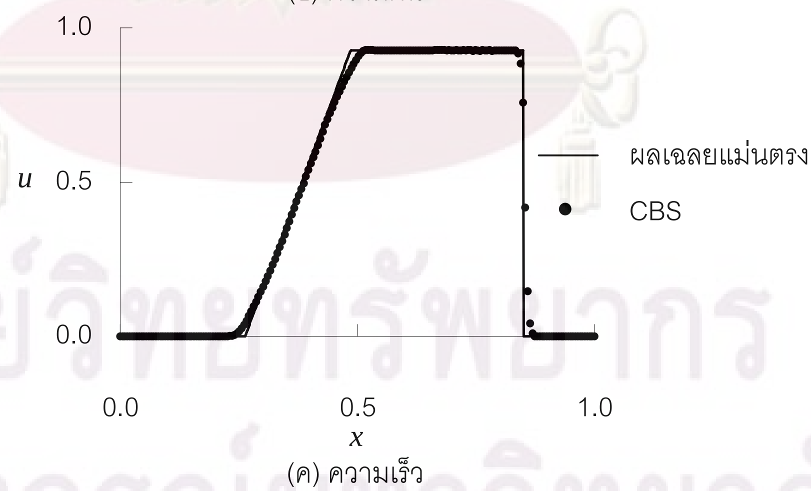
รูปที่ 6.8 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.15 ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) ความหนาแน่น



(ข) ความดัน

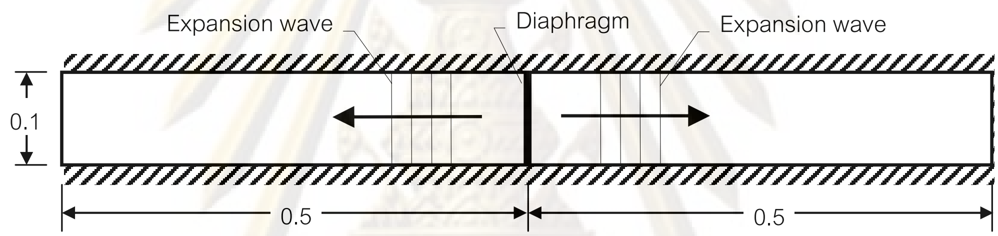


(ค) ความเร็ว

รูปที่ 6.9 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.20 ของปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

6.1.2 ปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

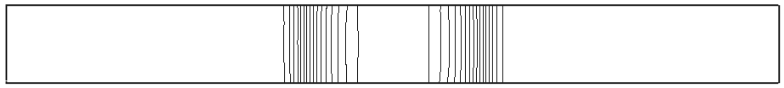
ปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ [18] เป็นปัญหาพื้นฐานอีกปัญหาหนึ่งที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่คำนวณปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว เนื่องการกำหนดสภาวะเริ่มต้นให้กับของไหลทั้งสองข้างที่แตกต่างกันจะก่อให้เกิดความดันบริเวณกึ่งกลางโดเมนมีค่าน้อยมากๆ จึงเป็นปัญหาที่นิยมใช้ในการทดสอบความแข็งแรง (robustness) ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยที่รูปแบบของปัญหานี้ได้แสดงในรูปที่ 6.10 และจะกำหนดให้ของไหลทางด้านซ้ายมือมีคุณสมบัติเริ่มต้นเป็นดังนี้ $\rho = 1.0$, $u =$ -2.0, $v =$ 0.0, $\varepsilon =$ 3.0 ส่วนคุณสมบัติเริ่มต้นของของไหลทางด้านขวามือเป็นดังนี้ $\rho = 1.0$, $u =$ 2.0, $v =$ 0.0, $\varepsilon =$ 3.0 เมื่อมีการยกแผ่นกั้นออกทันทีทันใดจะทำให้เกิดคลื่นการขยายตัววิ่งไปทางด้านซ้ายและขวา และบริเวณกึ่งกลางจะมีสภาวะเป็นสุญญากาศ



รูปที่ 6.10 ปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์จะเริ่มจากการสร้างเอลิเมนต์สม่ำเสมอขนาด 0.0025 ซึ่งจะทำให้ได้จำนวนจุดต่อจำนวน 16,442 จุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์จำนวน 32,001 เอลิเมนต์ เพื่อแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ในรูปที่ 6.11 – 6.13 เป็นเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและค่าความดันที่เวลา 0.05, 0.10, และ 0.15 ตามลำดับ

ในรูปที่ 6.14 - 6.16 เป็นกราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณของค่าความหนาแน่น และค่าความดัน ที่เวลา 0.05, 0.10, และ0.15 กับผลเฉลยแม่นตรงโดยผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีแสดงให้เห็นถึงความมีเสถียรภาพของระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะในการวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว

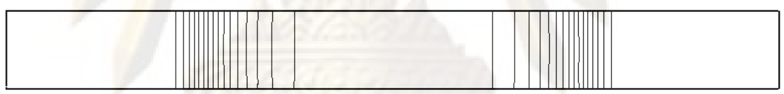


(ก) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ข) เส้นชั้นของความดัน

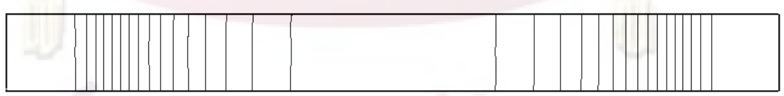
รูปที่ 6.11 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันที่เวลา t = 0.05 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

(ก) เส้นชั้นของความหนาแน่น

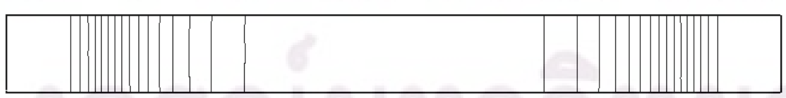


(ข) เส้นชั้นของความดัน

รูปที่ 6.12 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันที่เวลา t = 0.10 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

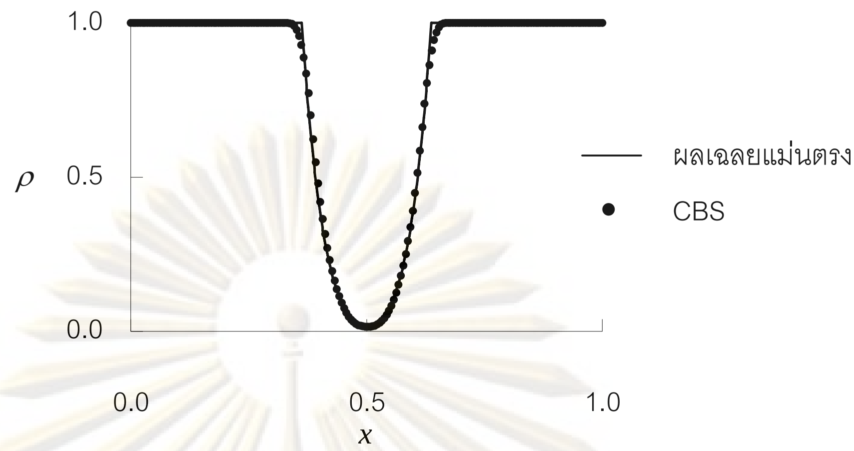


(ก) เส้นชั้นของความหนาแน่น



(ข) เส้นชั้นของความดัน

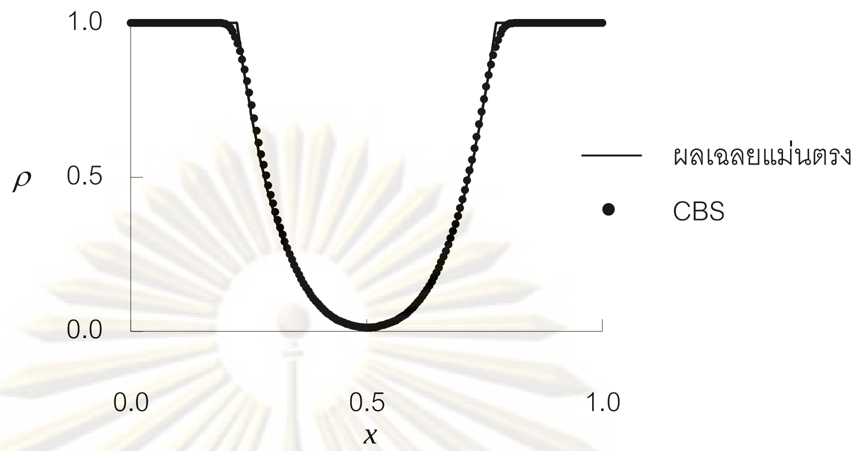
รูปที่ 6.13 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดันที่เวลา t = 0.15 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ



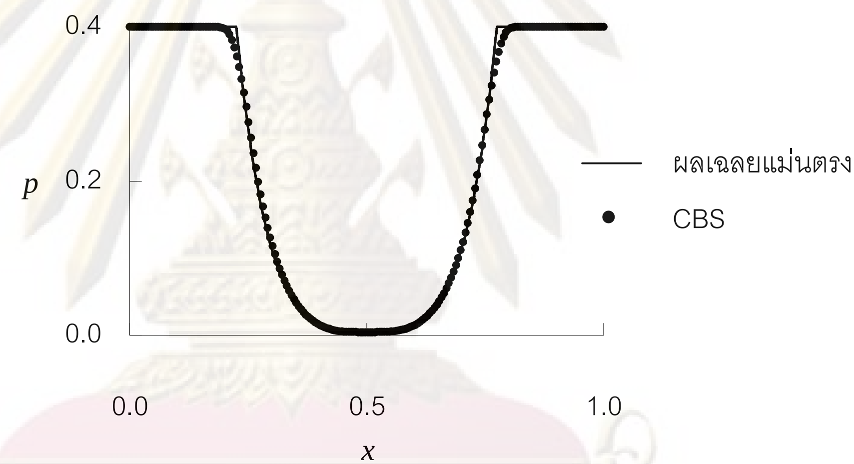
(ก) ความหนาแน่น

(ข) ความดัน

รูปที่ 6.14 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน ที่เวลา t = 0.05 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

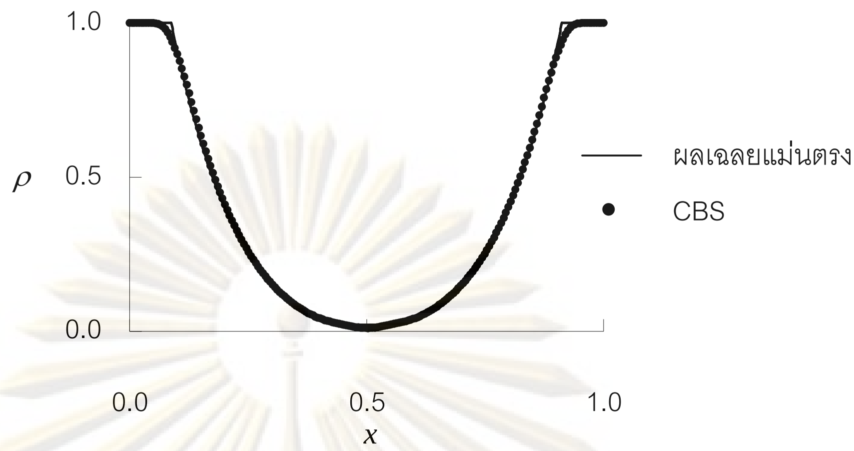


(ก) ความหนาแน่น

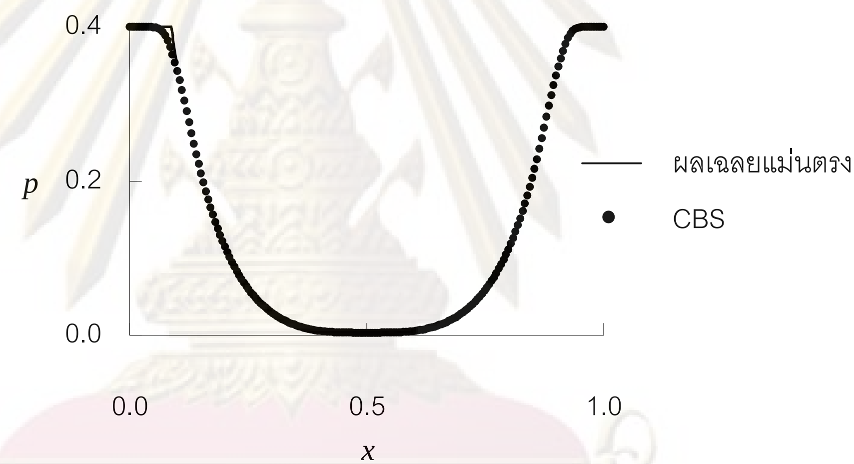


(ข) ความดัน

รูปที่ 6.15 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน ที่เวลา t = 0.10 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ



(ก) ความหนาแน่น



(ข) ความดัน

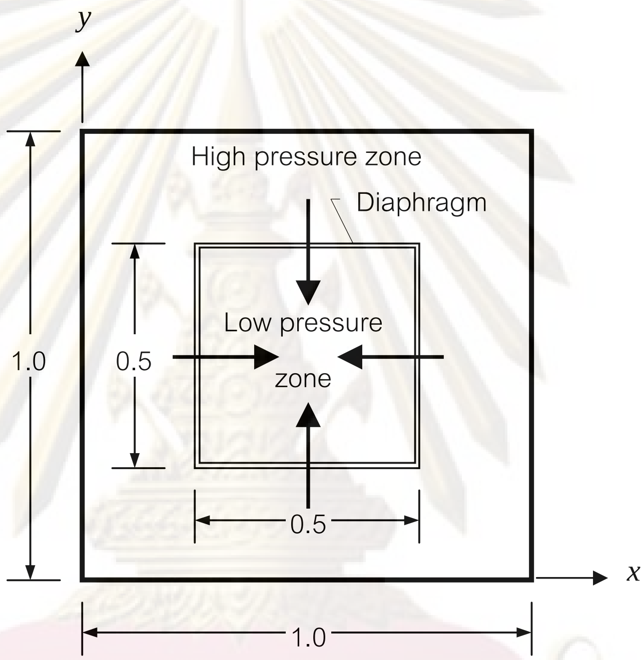
รูปที่ 6.16 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของ

ค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน ที่เวลา t = 0.15

สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

6.1.3 ปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

ปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม [30] เป็นปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกในสองมิติ อันเกิดจากความแตกต่างของการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของของไหลภายในโดนเมน โดยที่จะเกิดคลื่นช็อกจากทั้งสี่ด้านและคลื่นช็อกดังกล่าวก็จะเคลื่อนตัวมากระทบกันเกิดเป็นปรากฏการณ์การกระทบกันของคลื่นช็อก (shock-shock interaction) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่มีความซับซ้อน ในปัญหานี้เป็นอีกปัญหาหนึ่งที่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ในช่วงที่คลื่นช็อกเคลื่อนที่เข้าหากันก่อนที่จะกระทบกัน โดยรูปแบบของปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยมนี้ได้แสดงในรูปที่ 6.17

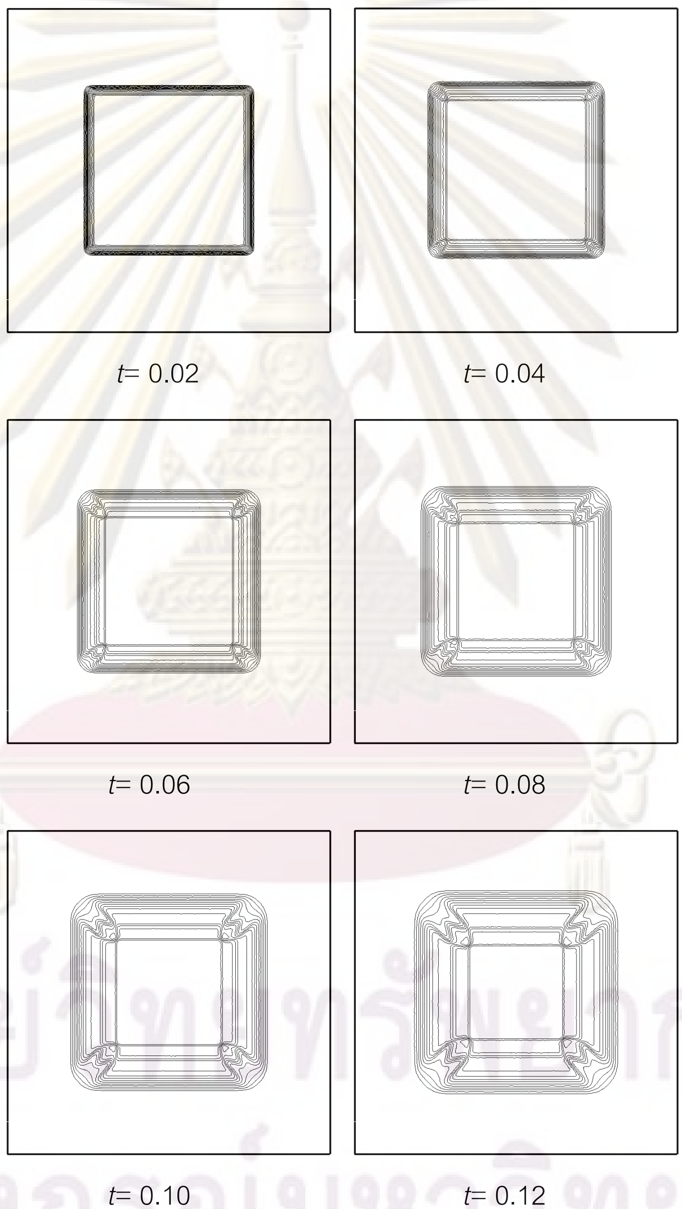


รูปที่ 6.17 ปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

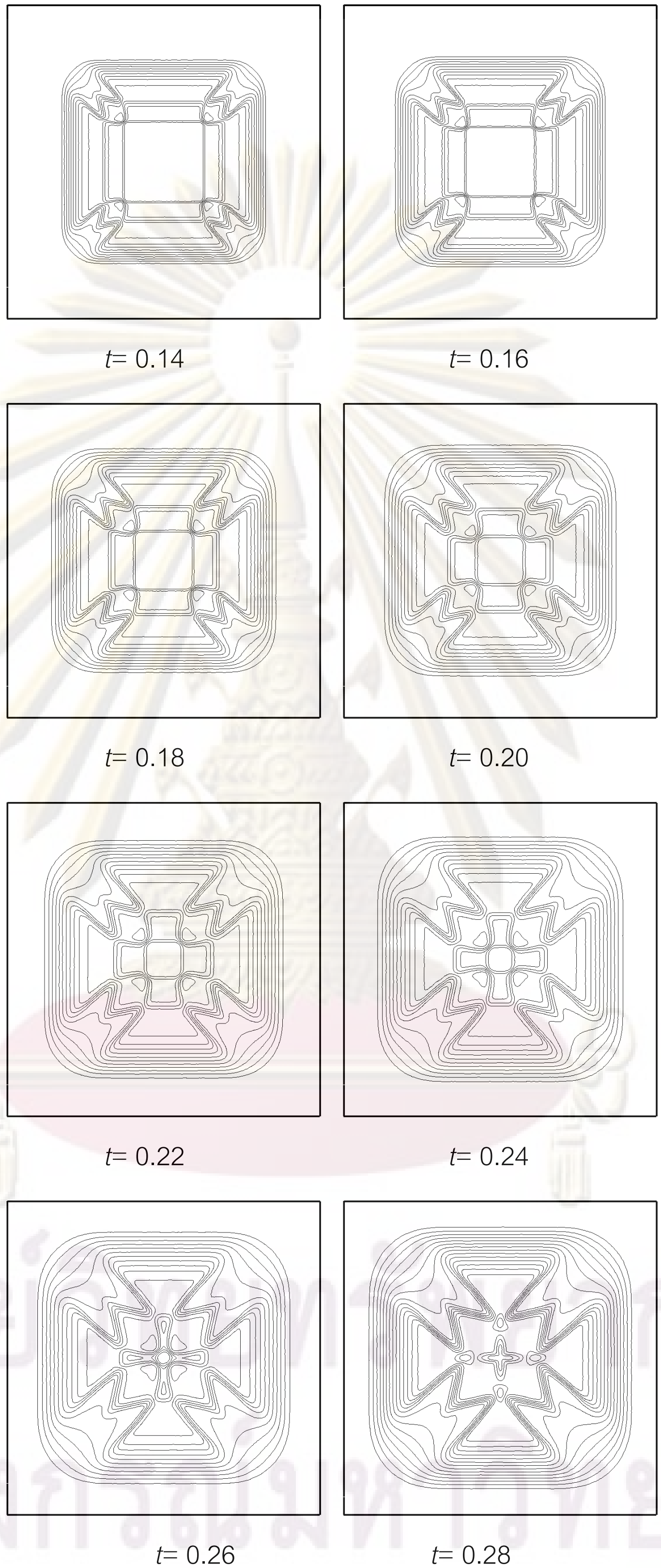
การกำหนดคุณสมบัติเริ่มต้นให้กับของไหลเป็นดังต่อไปนี้ $\rho = 0.125$, $u = 0.0$, $v = 0.0$, $\varepsilon = 0.5$ ที่ตำแหน่ง $0.25 \le x \le 0.75$ และ $0.25 \le y \le 0.75$ สำหรับในบริเวณอื่นๆ กำหนดให้ $\rho = 1.0$, $u = 0.0$, $v = 0.0$, $\varepsilon = 0.625$ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตกำหนดให้ตลอดขอบทั้ง 4 ด้านของโดเมนเป็นขอบของการไหลออกด้วยความเร็วสูงกว่าเสียง

ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์จะเริ่มจากการสร้างเอลิเมนต์สม่ำเสมอขนาด 0.0025 ซึ่งจะทำให้ได้จำนวนจุดต่อจำนวน 160,802 จุดต่อ และจำนวนเอลิเมนต์จำนวน 320,001 เอลิเมนต์ โดยในรูปที่ 6.18 – 6.20 เป็นเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น เพื่อแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ในรูปที่ 6.21 – 6.23 เป็นกราฟเปรียบเทียบผล

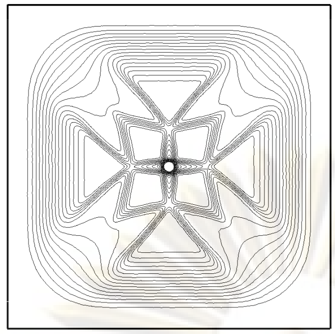
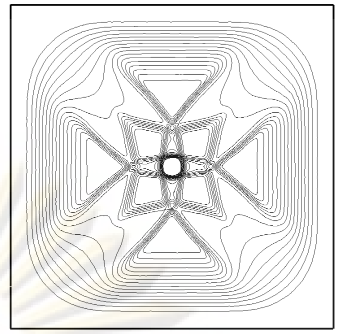
เฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขที่ตำแหน่งความสูง $y = 0.5$ ตลอดแนวแกน x ที่เวลา 0.10 และ 0.20 ตามลำดับ โดยผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง สำหรับเนื้อหาในส่วนต่อไปจะเป็นการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว เพื่อให้เกิดความแม่นยำของผลลัพธ์ทุกๆ ช่วงเวลาที่คำนวณ



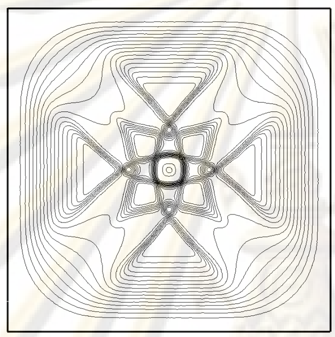
รูปที่ 6.18 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.02-0.12 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม



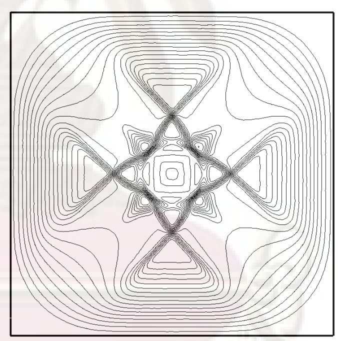
รูปที่ 6.19 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.14-0.28 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

t= 0.30 t= 0.32

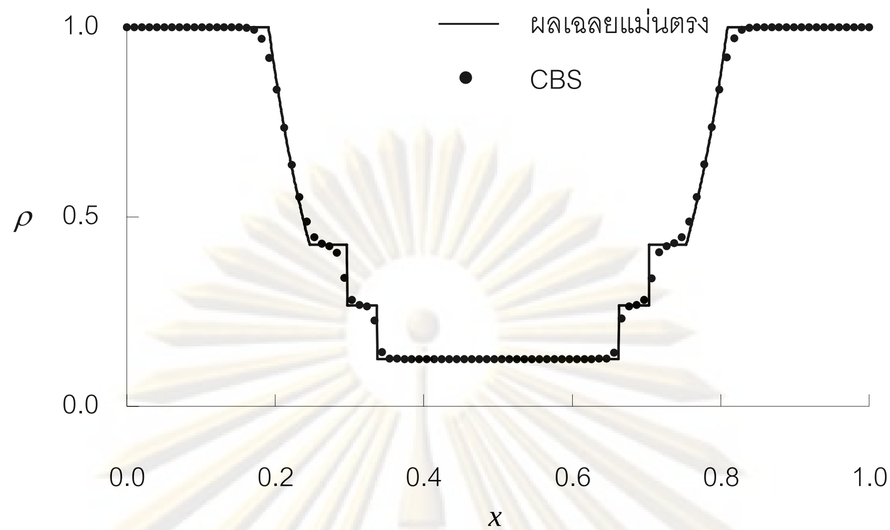
 

t= 0.34 t= 0.36

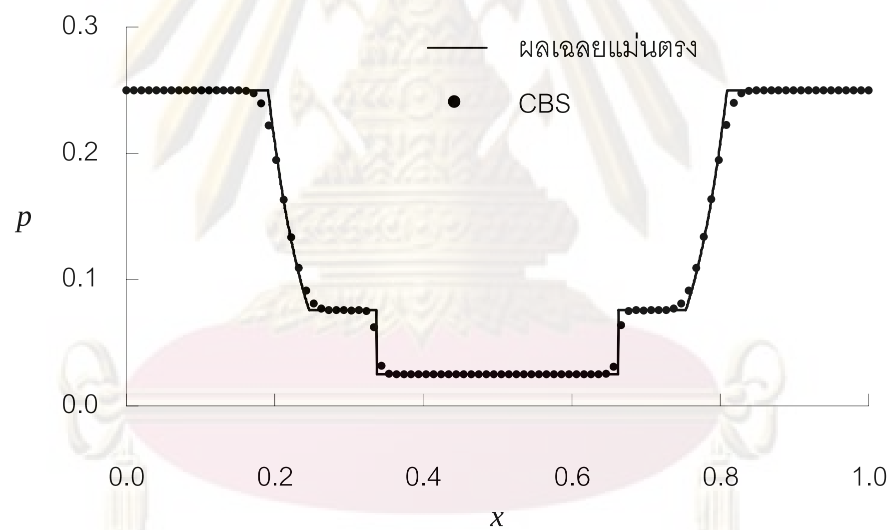
 

t= 0.38 t= 0.40

รูปที่ 6.20 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.30-0.40 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

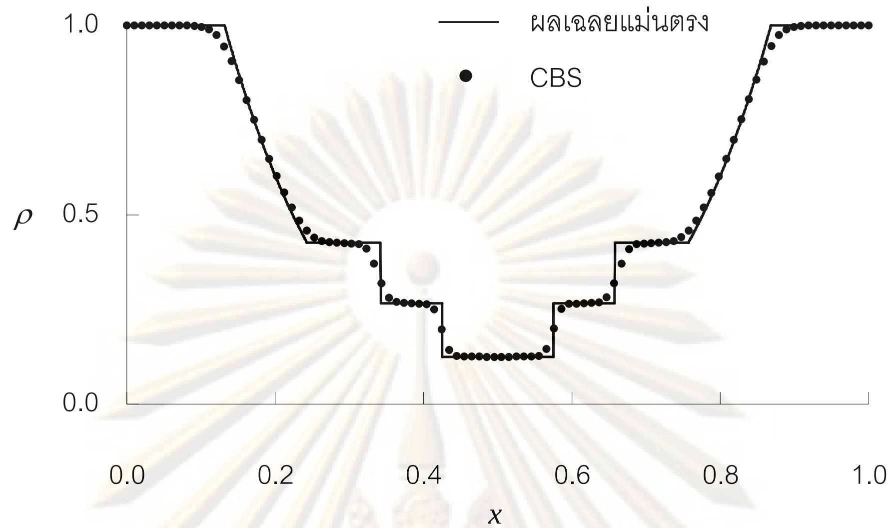


(ก) ความหนาแน่น

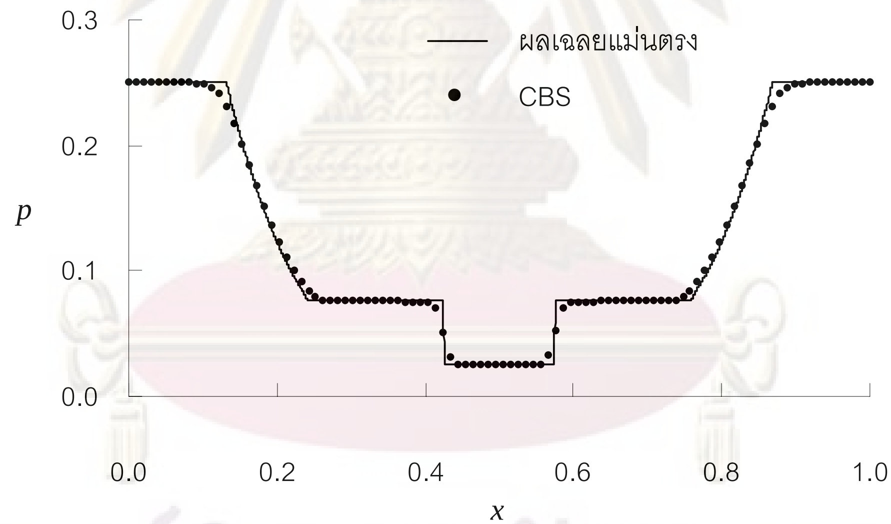


(ข) ความดัน

รูปที่ 6.21 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น ค่าความดันที่ตำแหน่ง y = 0.5 และ ที่เวลา t = 0.10 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม



(ก) ความหนาแน่น



(ข) ความดัน

รูปที่ 6.22 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าความหนาแน่น ค่าความดันที่ตำแหน่ง y = 0.5 และ ที่เวลา t = 0.20 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

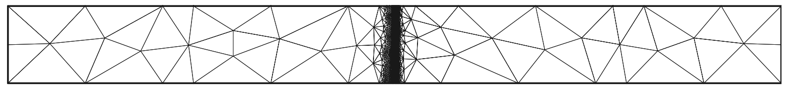
6.2 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลังจากได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจนเกิดความมั่นใจแล้วจะได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้าไปเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวโดยจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำในทุกช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ โดยปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ช่วงแรกจะเป็นปัญหาเดียวกับที่ได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจะแสดงให้เห็นความแม่นยำที่เพิ่มขึ้นในแต่ละช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ ต่อจากนั้นจะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะอยู่ตัวที่มีความซับซ้อนขึ้น

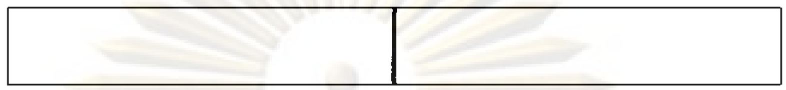
6.2.1 ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

รูปแบบของปัญหานี้จะเหมือนกับที่ได้ทำการวิเคราะห์ไว้ในหัวข้อที่ 6.1.1 แต่จะทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้าไปด้วย [29,31] ในระหว่างการวิเคราะห์การไหลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณทั้ง เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของความดันและเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน *x* ในช่วงเวลาต่าง ๆ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.23 - 6.28 จากรูปดังกล่าวจะพบว่าในขณะที่ทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลจะมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนตัวไปตามการเคลื่อนที่ของคลื่นช็อกและคลื่นการขยายตัว เพื่อจับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในทุก ๆ ช่วงเวลาและก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นในทุกๆช่วงเวลา

ในรูปที่ 6.29 – 6.32 เป็นกราฟที่เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กและวางตัวสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมน ผลลัพธ์ที่ได้พบว่าการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นในทุก ๆ ช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ โดยจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณในช่วงแรก ๆ ของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์จะมีจำนวนที่น้อยกว่าการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน และจะมีจำนวนเพิ่มขึ้นจนมีจำนวนใกล้เคียงกับการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน แต่ขนาดเอลิเมนต์ของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะมีขนาดที่เล็กกว่า

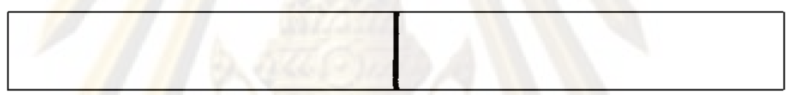


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



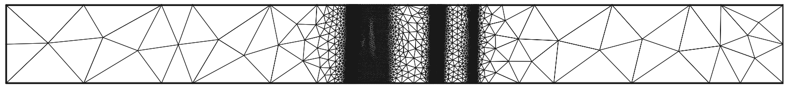
(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ค) เส้นชั้นของความดัน

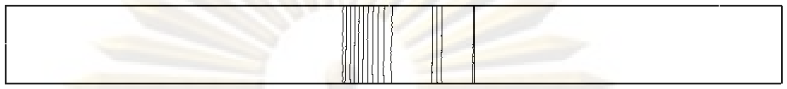


(ง) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

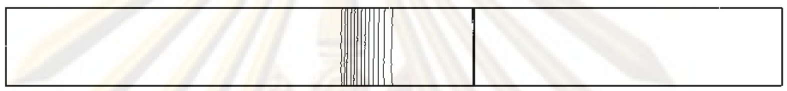
รูปที่ 6.23 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.00 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



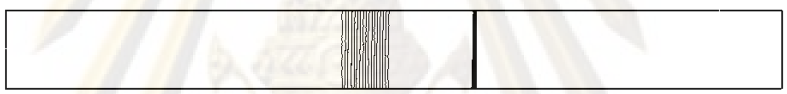
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

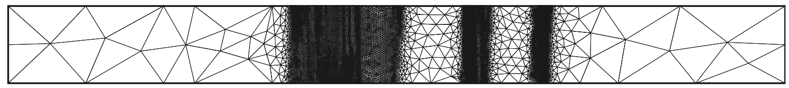


(ค) เส้นชั้นของความดัน

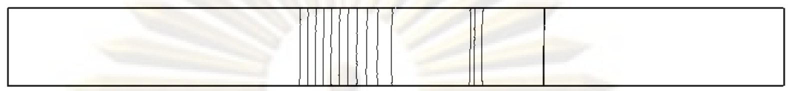


(ง) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

รูปที่ 6.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.05 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

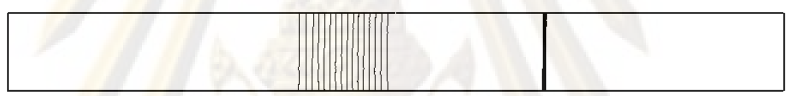


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



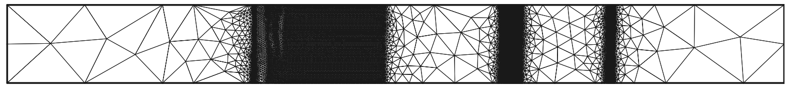
(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ค) เส้นชั้นของความดัน



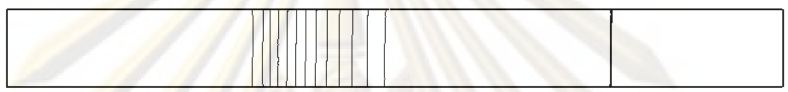
(ง) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

รูปที่ 6.25 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.10 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

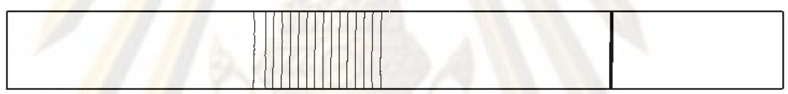


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

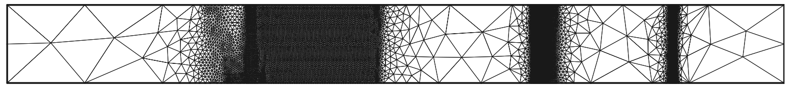


(ค) เส้นชั้นของความดัน



(ง) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

รูปที่ 6.26 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.15 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



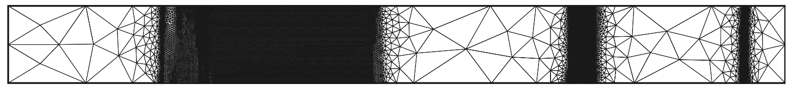
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ค) เส้นชั้นของความดัน

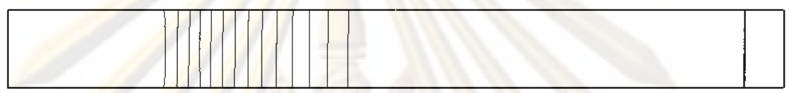
(ง) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

รูปที่ 6.27 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.20 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

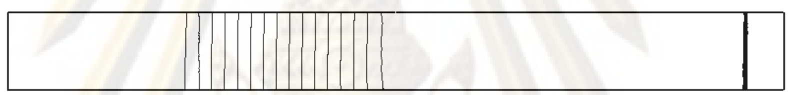


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

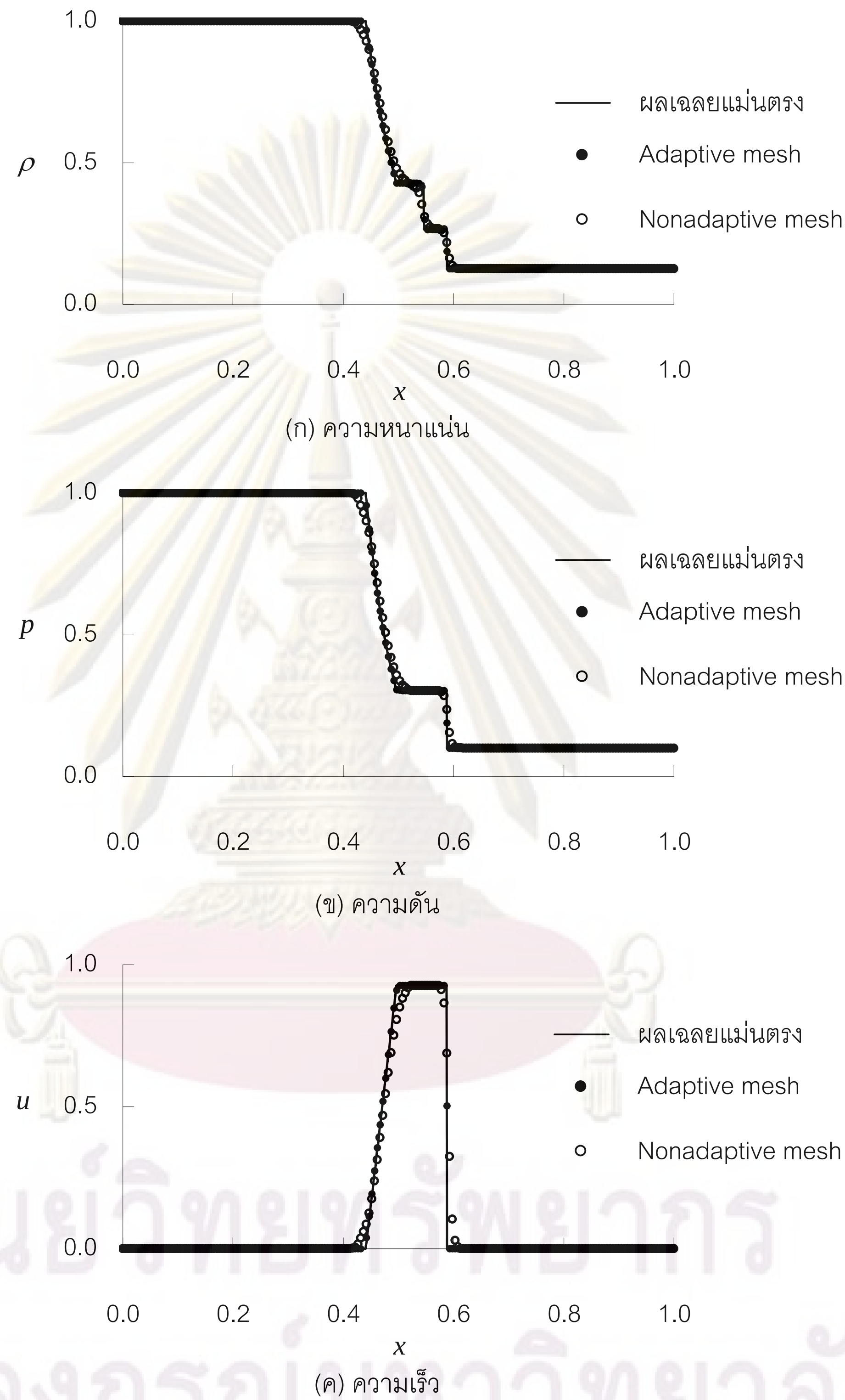


(ค) เส้นชั้นของความดัน

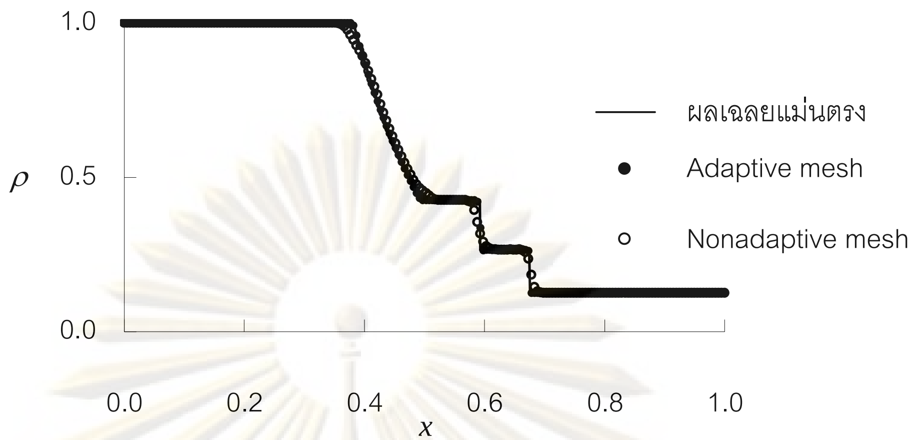


(ง) เส้นชั้นของความเร็วในแนวแกน x

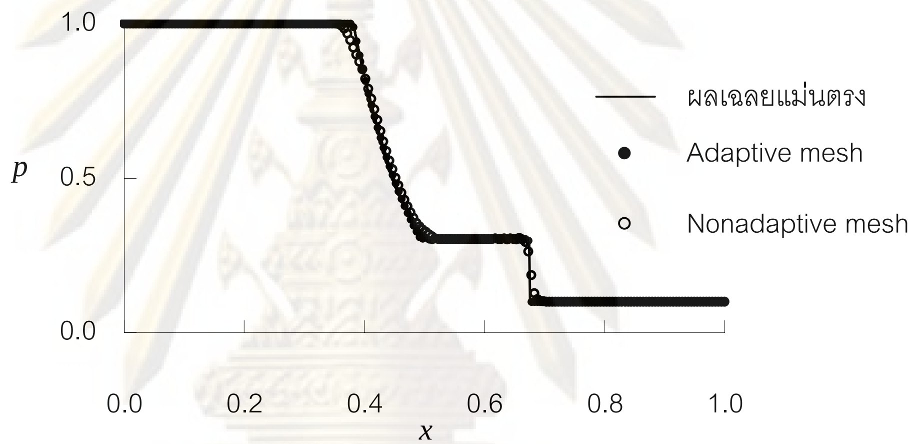
รูปที่ 6.28 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.25 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



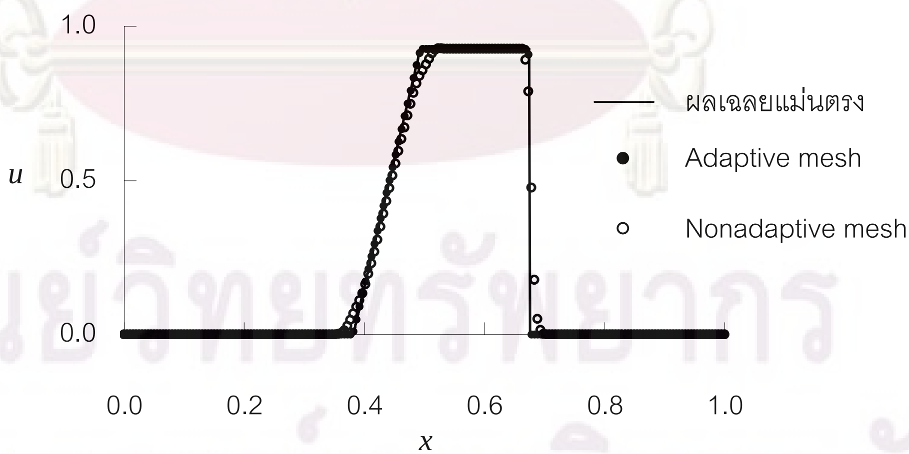
รูปที่ 6.29 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของ ค่าความหนาแน่น ค่าความดันและค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.05 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) ความหนาแน่น

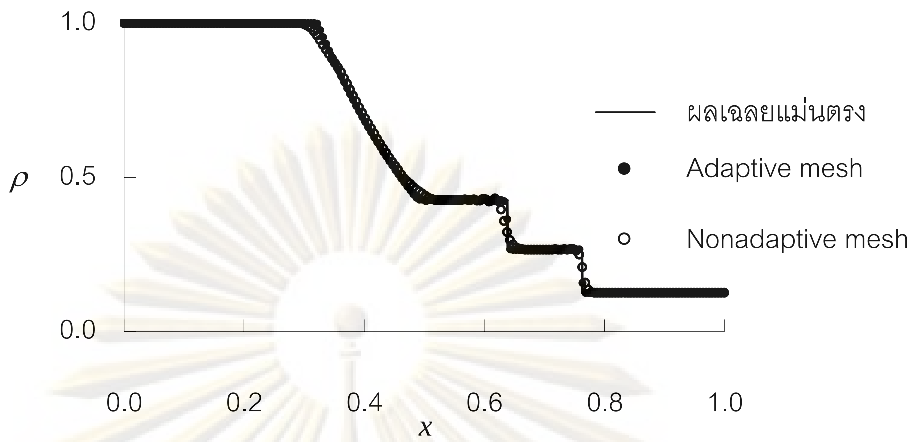


(ข) ความดัน

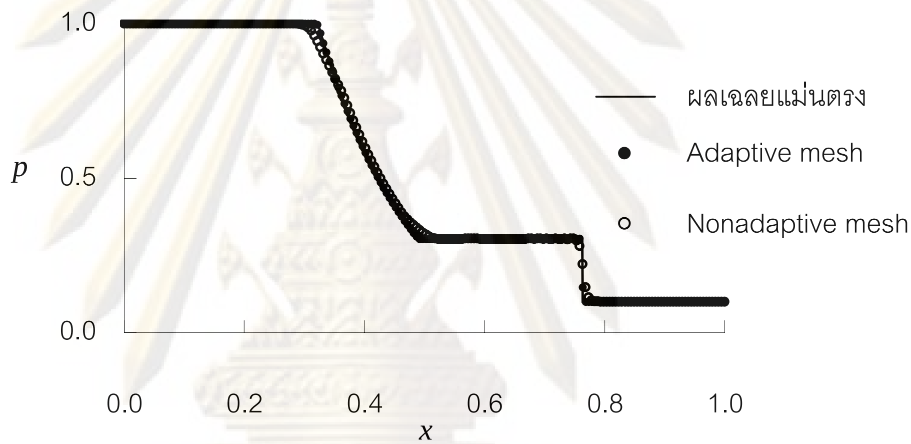


(ค) ความเร็ว

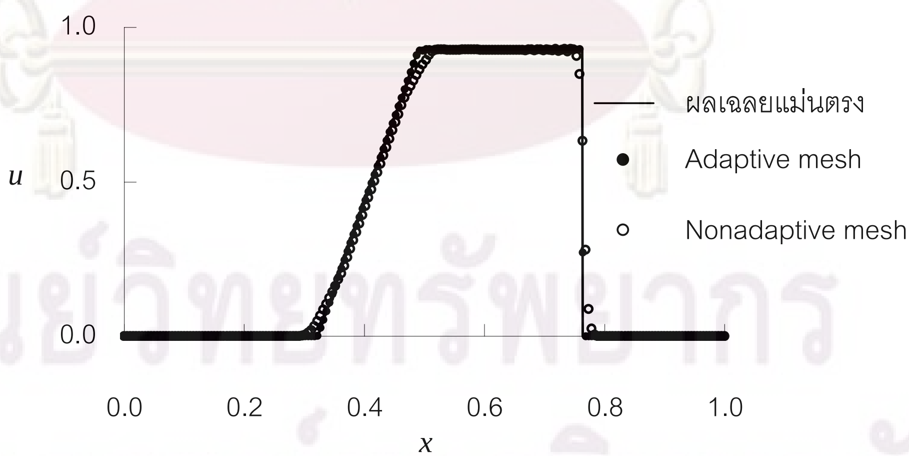
รูปที่ 6.30 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดันและค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.10 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) ความหนาแน่น

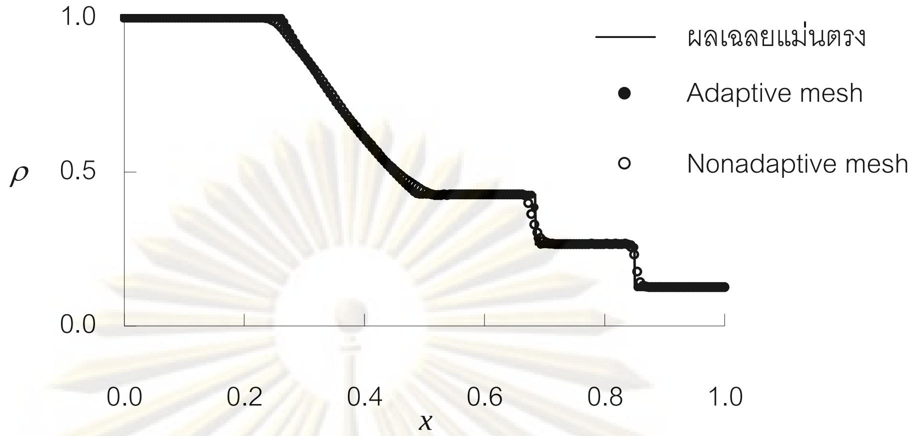


(ข) ความดัน

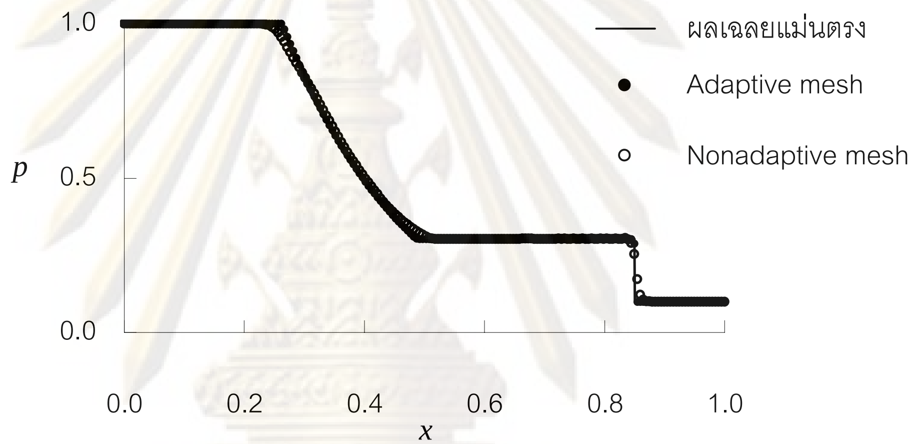


(ค) ความเร็ว

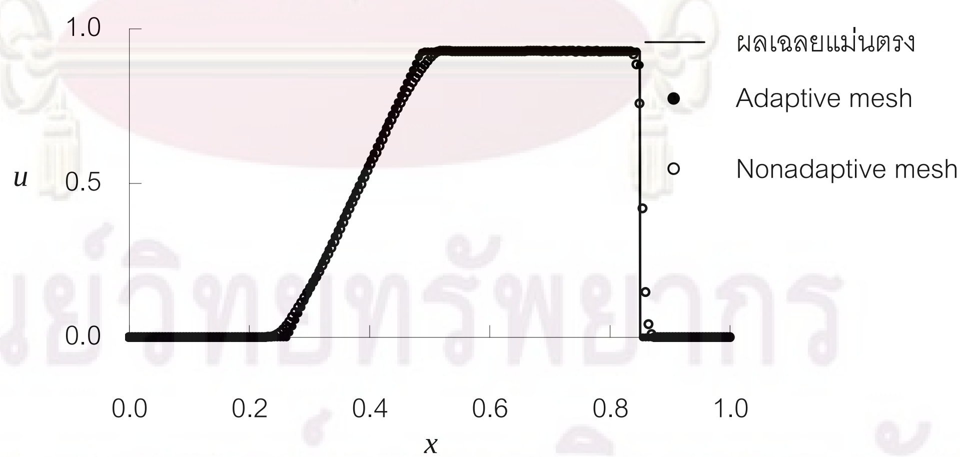
รูปที่ 6.31 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดันและค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.15 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ



(ก) ความหนาแน่น



(ข) ความดัน



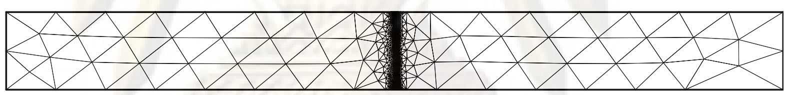
(ค) ความเร็ว

รูปที่ 6.32 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดันและค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.20 สำหรับปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในท่อ

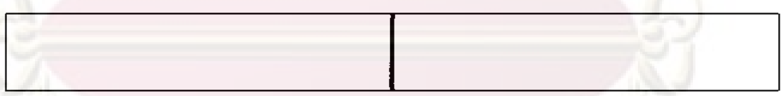
6.2.2 ปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

รูปแบบของปัญหานี้จะเหมือนกับที่ได้ทำการวิเคราะห์ไว้ในหัวข้อที่ 6.1.2 ในรูปที่ 6.33-6.36 ได้แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับเปลี่ยนไปตามเวลาและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณทั้ง เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของความดัน จากรูปดังกล่าวจะพบว่าเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนตัวไปตามการเคลื่อนที่ของคลื่นการขยายตัว เพื่อจับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในทุกๆช่วงเวลาและก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นในทุกๆช่วงเวลา

ในรูปที่ 6.37 – 6.39 เป็นกราฟที่เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กและวางตัวสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมน ผลลัพธ์ที่ได้พบว่าการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นในทุกๆ ช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ โดยจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณในช่วงแรกๆของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์จะมีจำนวนที่น้อยกว่าการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน และจะมีจำนวนเพิ่มขึ้นจนมีจำนวนใกล้เคียงกับการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน แต่ขนาดเอลิเมนต์ของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะมีขนาดที่เล็กกว่า



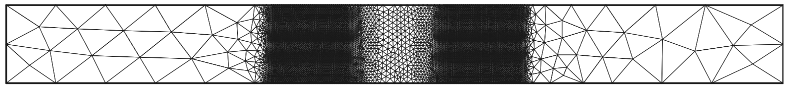
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ค) เส้นชั้นของความดัน

รูปที่ 6.33 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.00 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

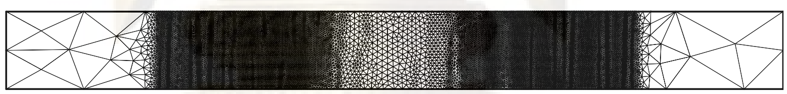


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

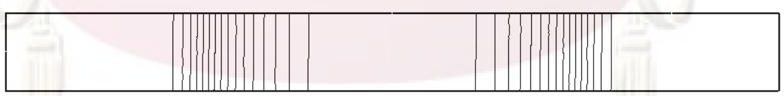
(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ค) เส้นชั้นของความดัน

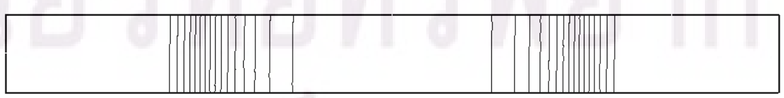
รูปที่ 6.34 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา $t = 0.05$ สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

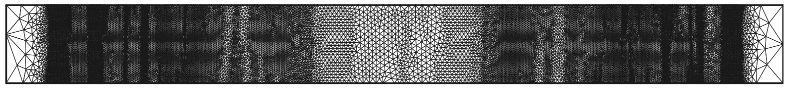


(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น



(ค) เส้นชั้นของความดัน

รูปที่ 6.35 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา $t = 0.10$ สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

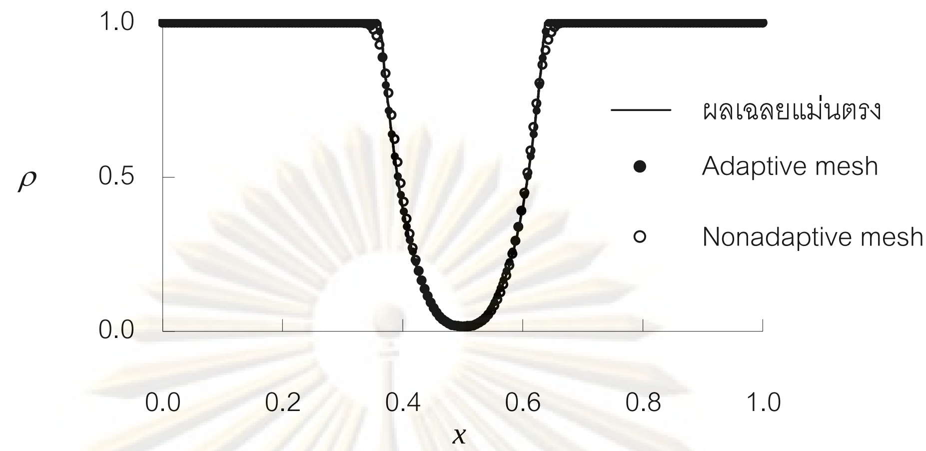


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

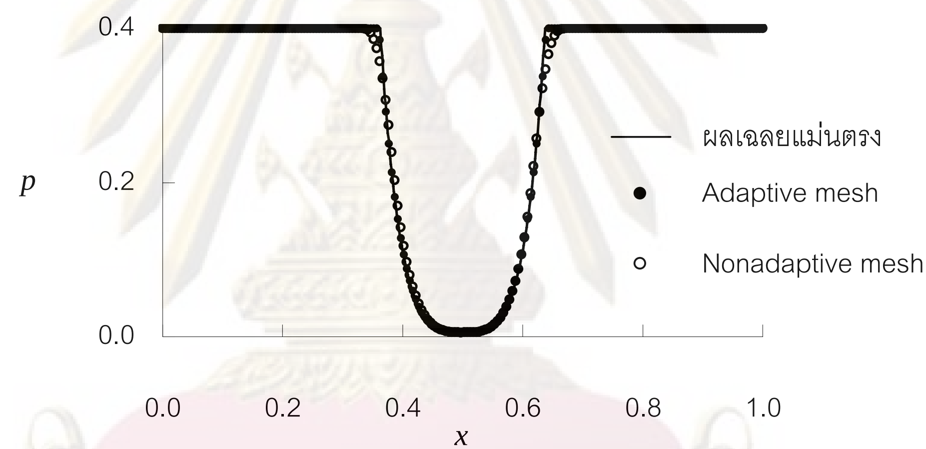
(ข) เส้นชั้นของความหนาแน่น

(ค) เส้นชั้นของความดัน

รูปที่ 6.36 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น เส้นชั้นของค่าความดัน และเส้นชั้นของค่าความเร็วในแนวแกน x ที่เวลา t = 0.15สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

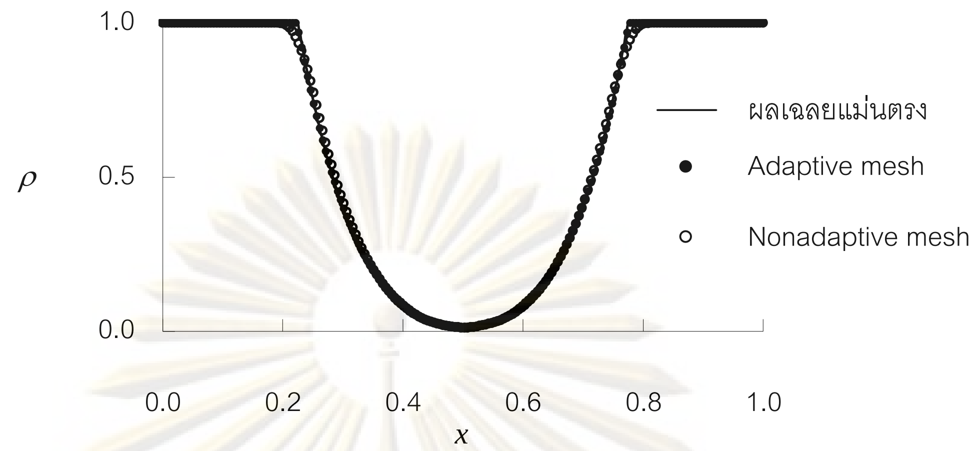


(ก) ความหนาแน่น

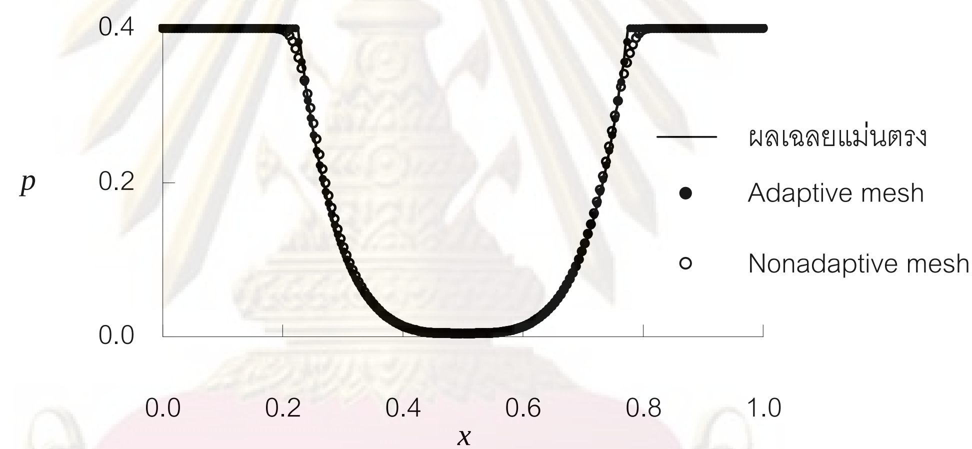


(ข) ความดัน

รูปที่ 6.37 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน ที่เวลา t = 0.05 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

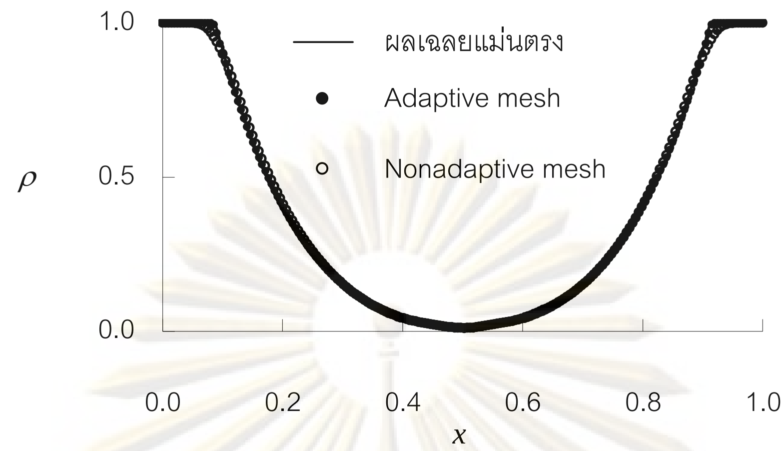


(ก) ความหนาแน่น

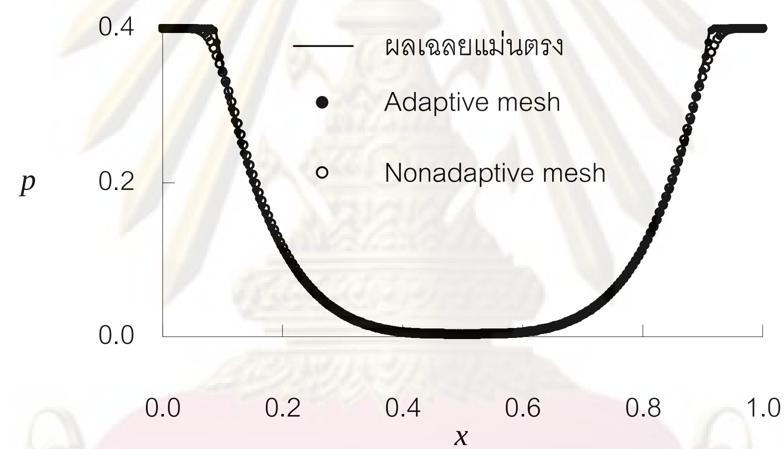


(ข) ความดัน

รูปที่ 6.38 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน ที่เวลา t = 0.10 สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ



(ก) ความหนาแน่น



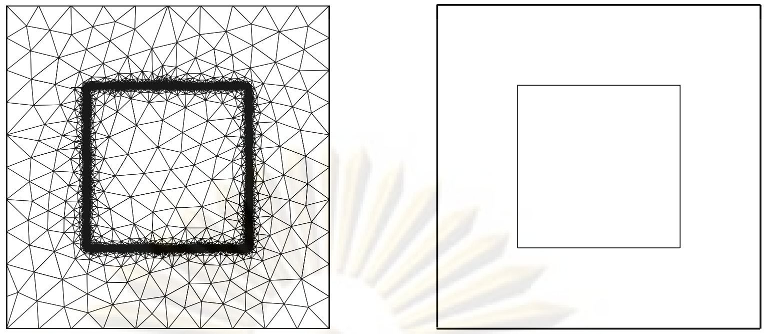
(ข) ความดัน

รูปที่ 6.39กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน ที่เวลา $t = 0.15$ สำหรับปัญหาคลื่นการกระจายแบบสมมาตรในท่อ

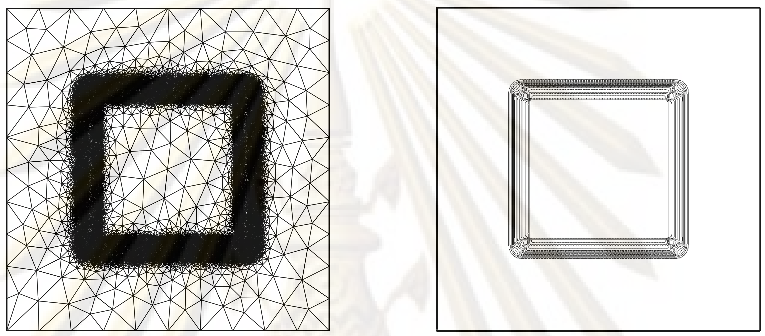
6.2.3 ปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

รูปแบบของปัญหานี้จะเหมือนกับที่ได้ทำการวิเคราะห์ไว้ในหัวข้อที่ 6.1.3 แต่จะประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้าไปด้วย โดยในรูปที่ 6.40-6.43 จะแสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เอลิเมนต์จะเคลื่อนตัวไปตามการเคลื่อนที่ของคลื่นช็อกและเส้นชั้นของความหนาแน่นที่สอดคล้องกัน ที่เวลาต่างๆ จากรูปเส้นชั้นของความหนาแน่นจะพบว่าการวิเคราะห์ปัญหานี้ด้วยการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นจะได้ผลลัพธ์ของคลื่นช็อกที่มีความคมชัดกว่าแต่ใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่น้อยกว่า ซึ่งอาจจะเสียเวลาในการปรับขนาดเอลิเมนต์ในระหว่างการคำนวณไปบ้าง แต่ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นในทุกๆช่วงเวลา

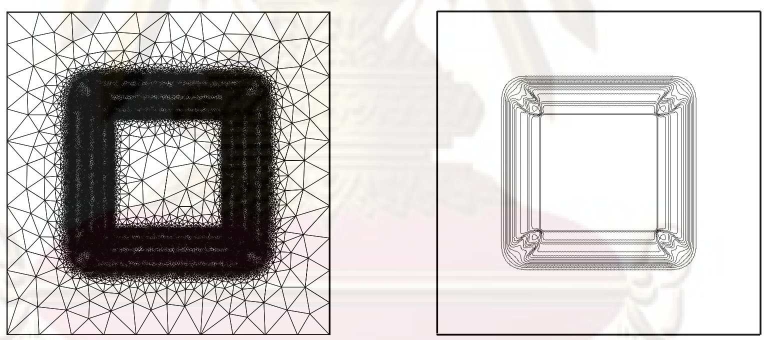
ในรูปที่ 6.44 – 6.45 เป็นกราฟที่เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กและวางตัวสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมน ผลลัพธ์ที่ได้พบว่าการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นในทุกๆ ช่วงเวลาที่ทำการคำนวณ โดยจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณในช่วงแรกๆของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์จะมีจำนวนที่น้อยกว่าการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน และจะมีจำนวนเพิ่มขึ้นจนมีจำนวนใกล้เคียงกับการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน แต่ขนาดเอลิเมนต์ของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะมีขนาดที่เล็กกว่า



t = 0.00

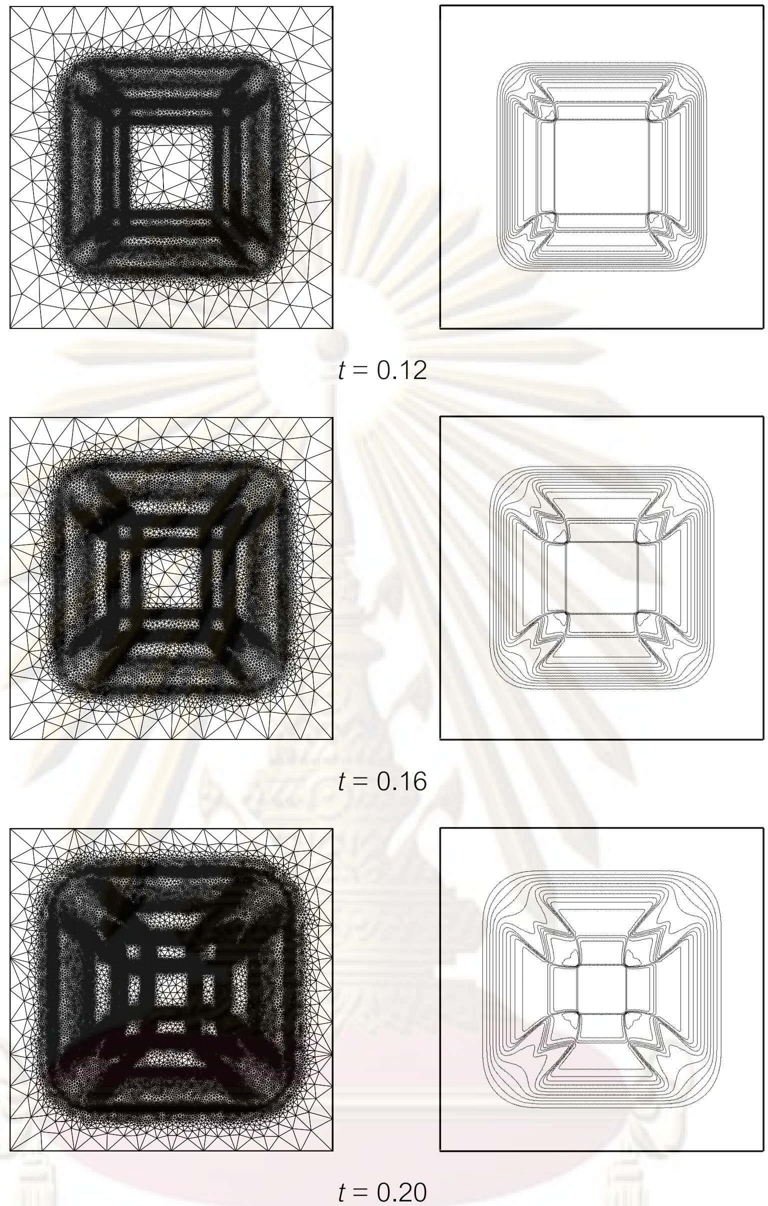


t = 0.04

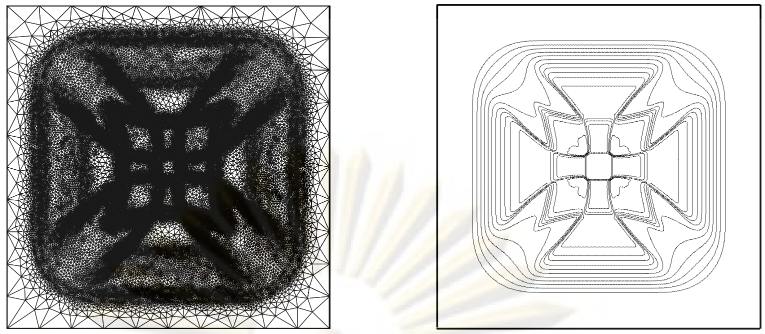


t = 0.08

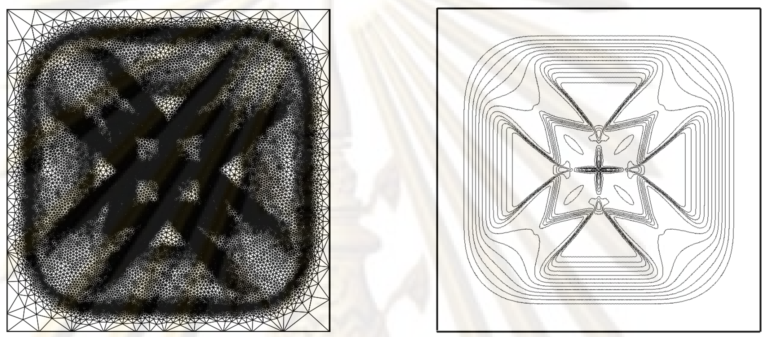
รูปที่ 6.40 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.00-0.08 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม



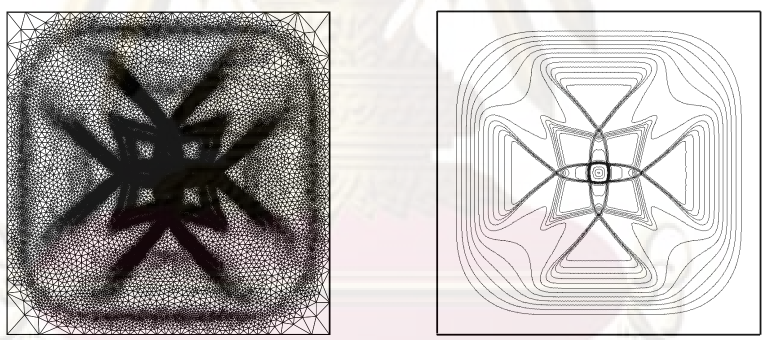
รูปที่ 6.41 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.12-0.20 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม



t = 0.24

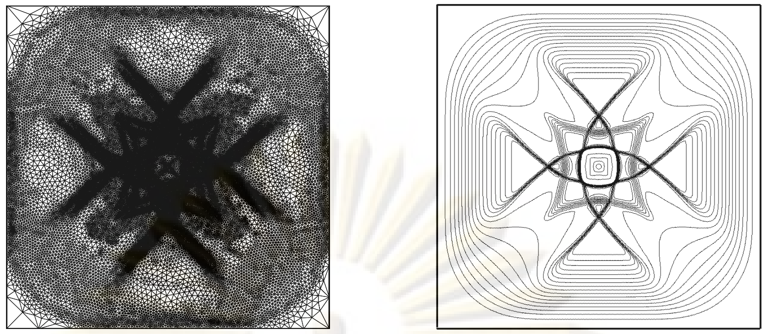


t = 0.28

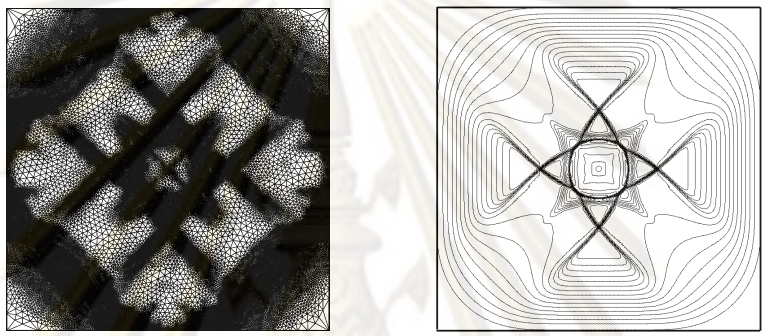


t = 0.32

รูปที่ 6.42 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.24-0.32
สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

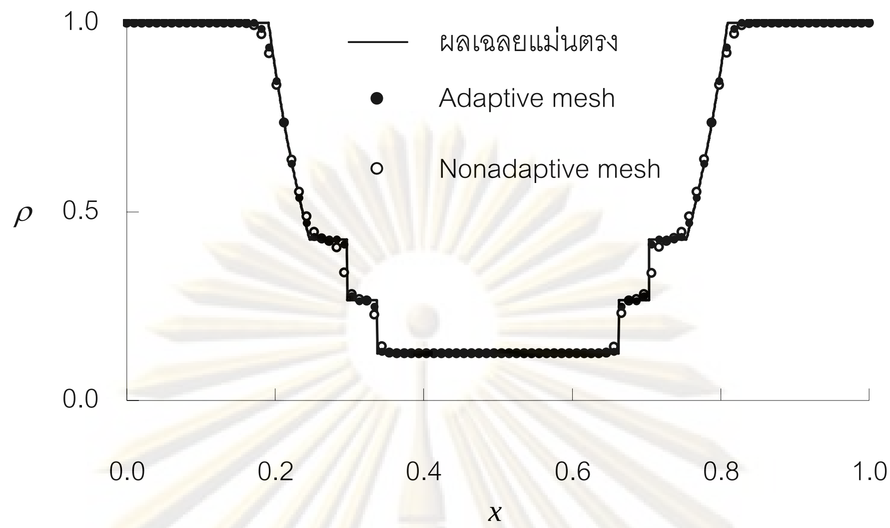


t = 0.36

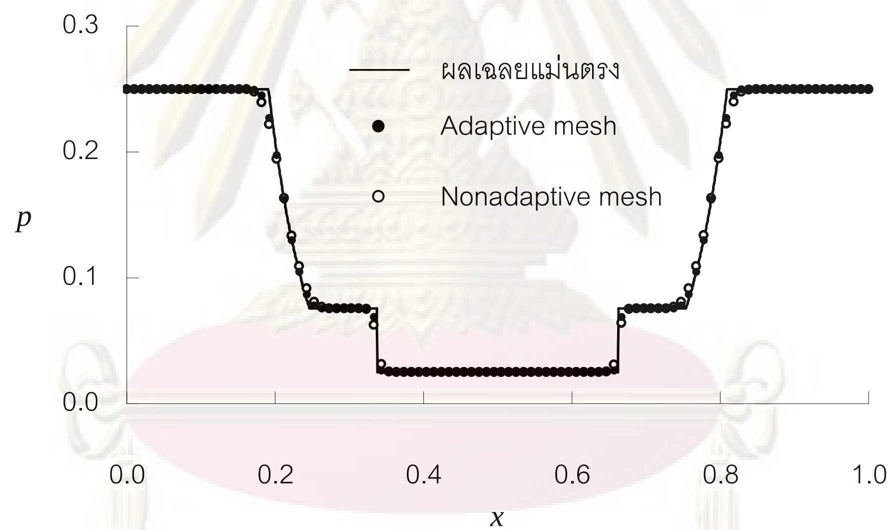


t = 0.40

รูปที่ 6.43 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.36-0.40 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

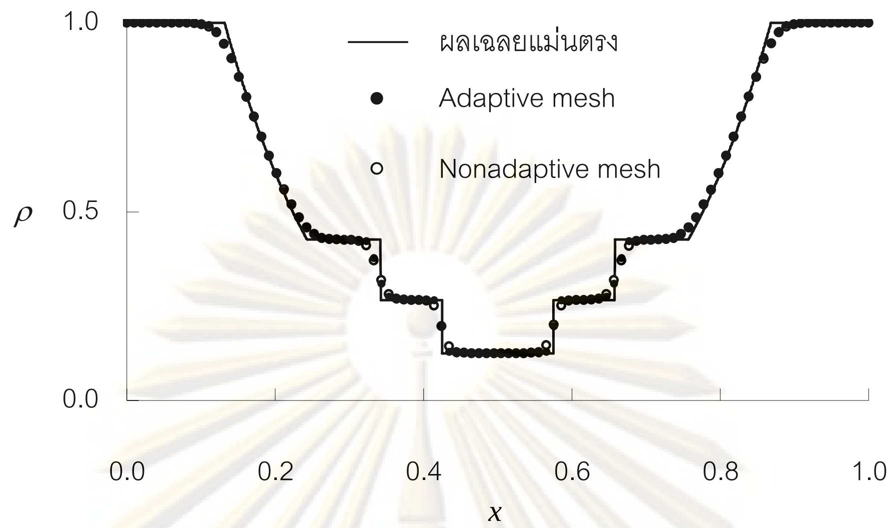


(ก) ความหนาแน่น

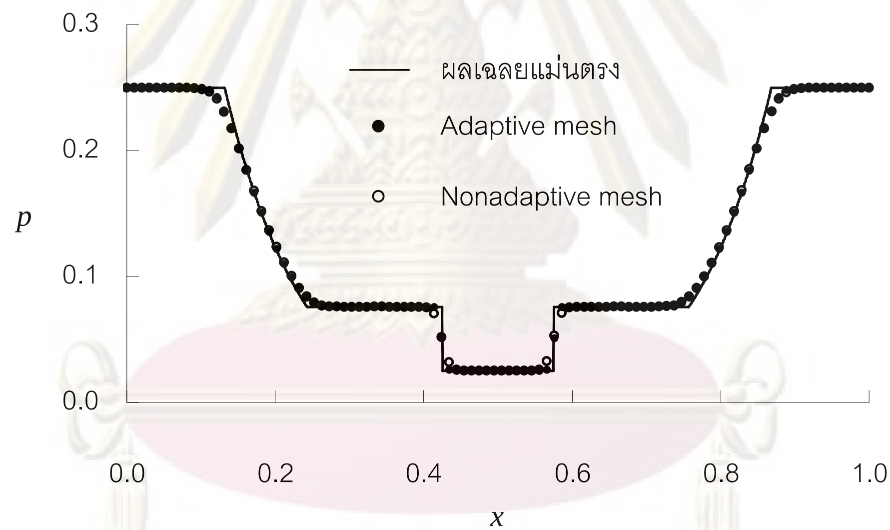


(ข) ความดัน

รูปที่ 6.44 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน ที่เวลา t = 0.10 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม



(ก) ความหนาแน่น

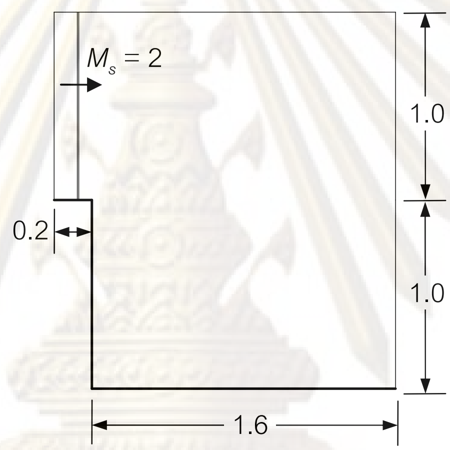


(ข) ความดัน

รูปที่ 6.45 กราฟเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเมื่อมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของ
ค่าความหนาแน่น ค่าความดัน ที่เวลา t = 0.20 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกสี่เหลี่ยม

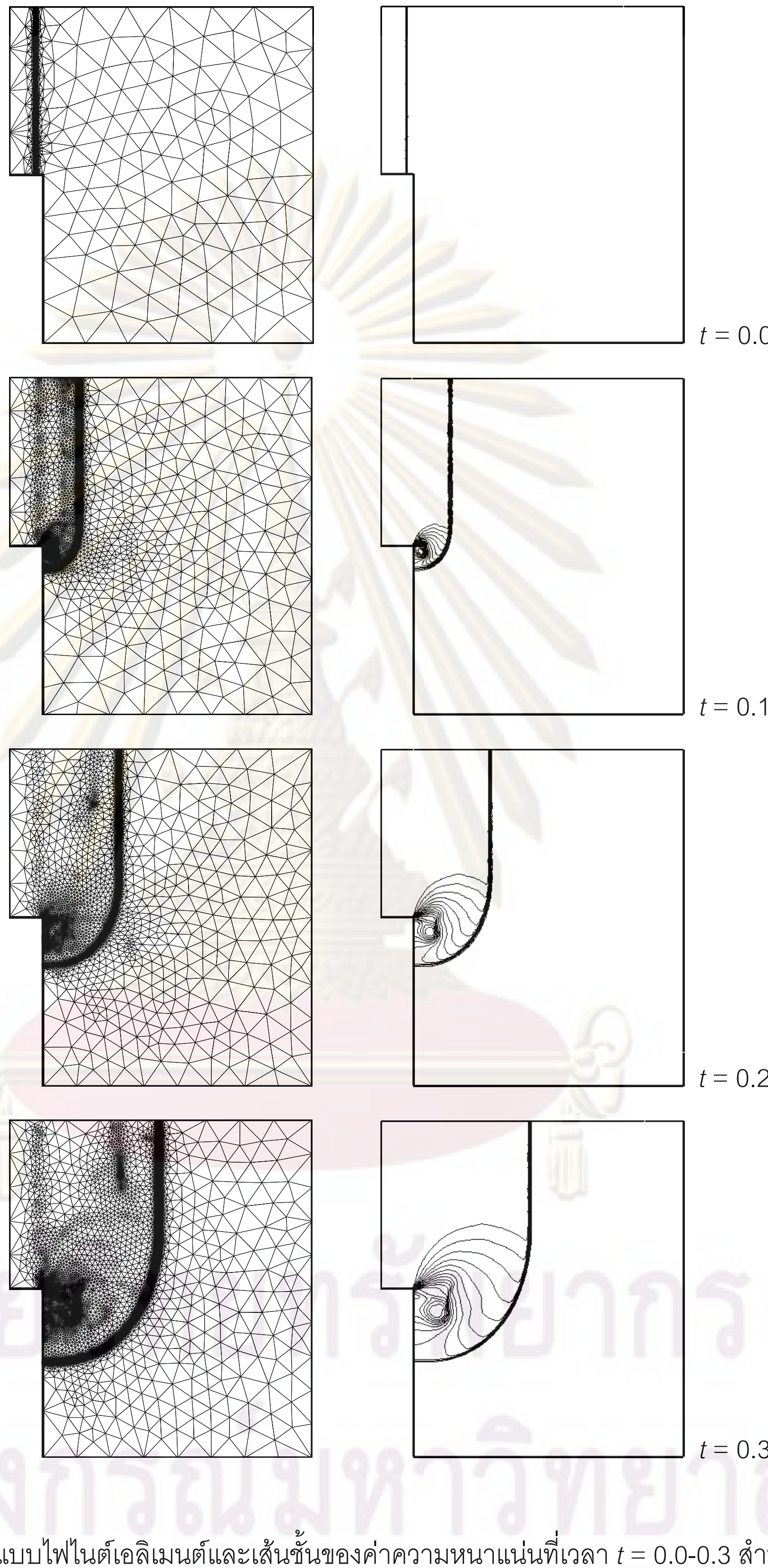
6.2.4 ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 ผ่านมุม 90°

ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 ผ่านมุม 90° (Diffraction of a Mach 2 shock over a 90° corner) [32,33,34] ได้ถูกแสดงในรูปที่ 6.46 โดยกำหนดให้คลื่นช็อกตั้งฉาก (normal shock) หมายเลขมัค 2 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามือ และเมื่อคลื่นช็อกตั้งฉากเคลื่อนที่ผ่านมุมหักลงด้านล่าง 90 องศา ก็จะเกิดการกระจายของคลื่นช็อกตั้งฉากตรงมุมหัก และเกิดการเปลี่ยนรูปของคลื่นช็อกตั้งฉาก เนื่องจากเมื่อคลื่นช็อกเคลื่อนที่ผ่านมุมหักลงด้านล่าง 90 องศา ก็จะเกิดการกระจายของคลื่นช็อกตั้งฉากตรงมุมหัก โดยเกิดการเปลี่ยนรูปของคลื่นช็อกตั้งฉาก ซึ่งก่อให้เกิดคลื่นช็อก คลื่นขยาย ผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องและการหมุนตัวของเส้นสตรีม (streamline) จนเกิดปรากฏการณ์วอเท็กซ์ (vortex)

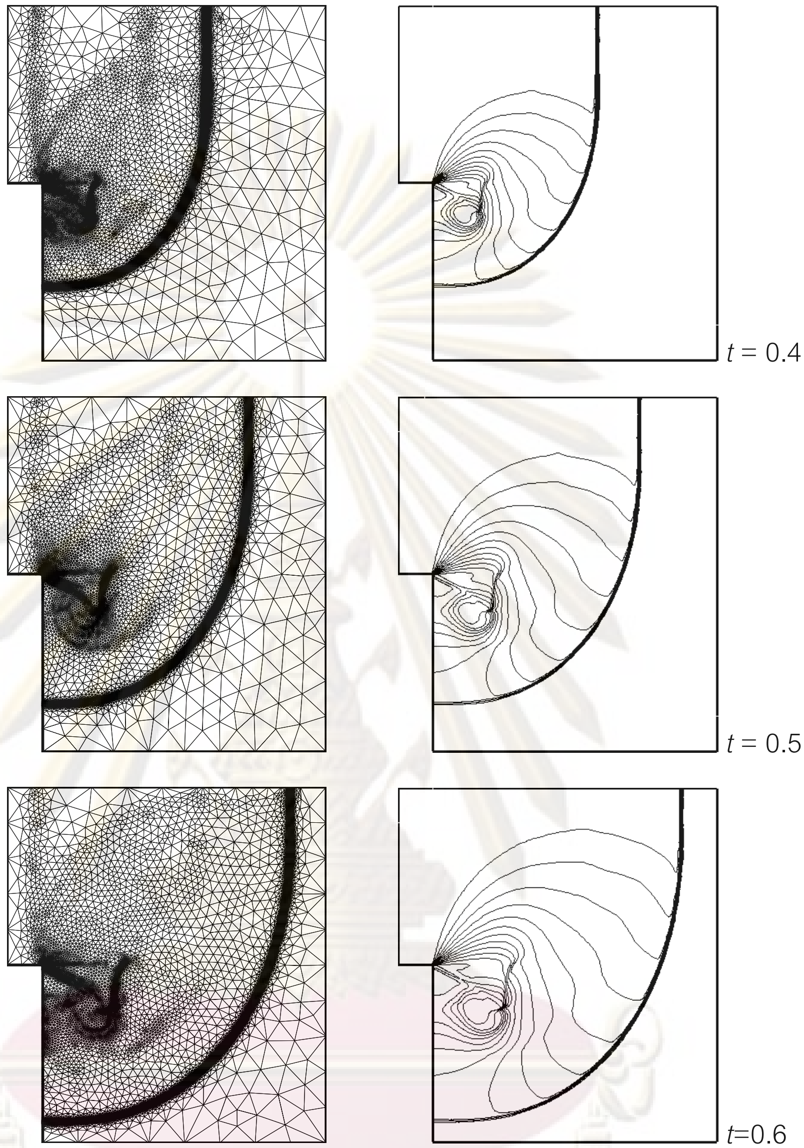


รูปที่ 6.46 ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 ผ่านมุม 90°

ในรูปที่ 6.47-6.48 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของความหนาแน่นที่ได้จากการคำนวณที่เวลาต่าง ๆ กัน เมื่อพิจารณารูปต่าง ๆ จะเห็นว่า การประยุกต์เทคนิคปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว สามารถจับการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกตกกระทบเคลื่อนที่มาจากทางด้านขวาและลงมาทางด้านล่างของโดเมนได้อย่างชัดเจน



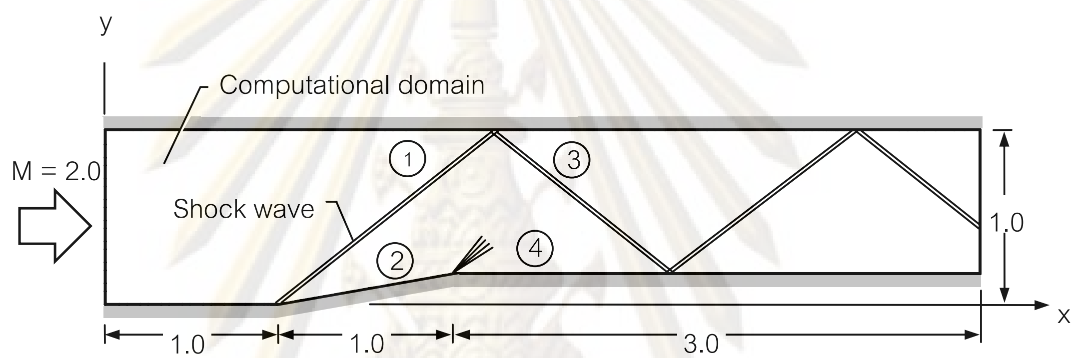
รูปที่ 6.47 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.0-0.3 สำหรับปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 ผ่านมุม 90°



รูปที่ 6.48 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.4-0.6 สำหรับปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 ผ่านมุม 90°

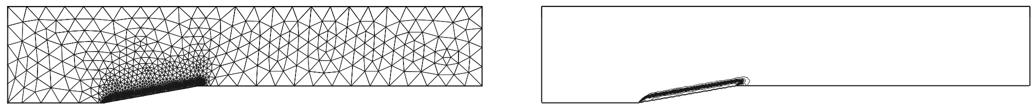
6.2.5 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°

ลักษณะของปัญหาคือมีของไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่า ผ่านเข้ามาทางด้านซ้ายมือ และไหลผ่านช่องที่มีพื้นเอียงทำมุม 10° กับแนวราบ [31] การหักมุมอย่างฉับพลันก่อให้เกิดคลื่นช็อคเอียงพุ่งขึ้นไปกระทบผนังด้านบนและสะท้อนกลับลงมาด้านล่าง คลื่นช็อกที่สะท้อนกลับลงมาจะกระทบผนังด้านล่างอีกครั้งและสะท้อนสู่ผนังด้านบนก่อนที่จะไหลออกทางด้านขวามือของปัญหา บริเวณจุดหักมุมที่สองของปัญหาจะเกิดคลื่นการขยายตัวพุ่งไปกระทบกับคลื่นช็อกที่เกิดจากการสะท้อนทางด้านหลัง ทำให้การไหลด้านหลังจุดหักมุมมีความซับซ้อนขึ้น รูปแบบของปัญหานี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.49

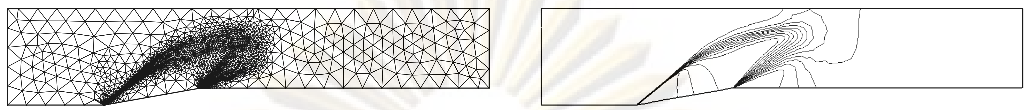


รูปที่ 6.49 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°

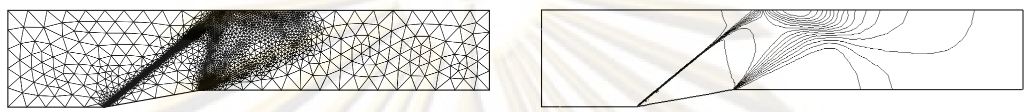
การวิเคราะห์ปัญหาการไหลนี้เริ่มด้วยการสร้างรูปร่างของปัญหาและแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอ แล้วทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาในระหว่างการวิเคราะห์การไหล ในรูปที่ 6.50-6.51 จะพบว่าเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้นในทุกช่วงเวลา โดยสังเกตจากเอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากวางตัวตามแนวคลื่นช็อกทำให้ความหนาของคลื่นช็อกลดลง ในขณะเดียวกันมีการกระจุกตัวของเอลิเมนต์ที่จุดหักมุมที่สองทำให้คลื่นการขยายตัวเป็นเส้นตรงและรวมกันเป็นจุดเดียวที่จุดหักมุมนี้ ในตารางที่ 6.1 เป็นการเปรียบเทียบของผลลัพธ์ที่ได้จากคำนวณในรูปแบบของหมายเลขมัคที่จุดต่างๆ บนโดเมน พบว่ามีผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องผลเฉลยแม่นตรงและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในเอกสารอ้างอิง [35]



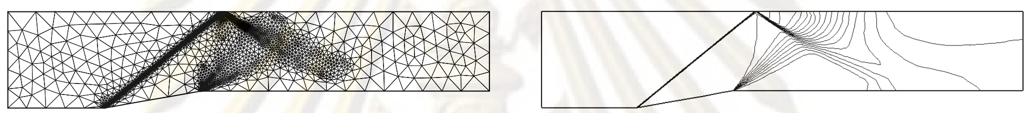
t=0.1



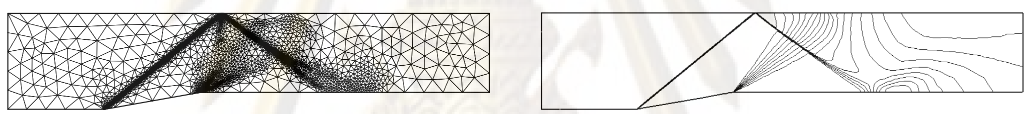
t=1.0



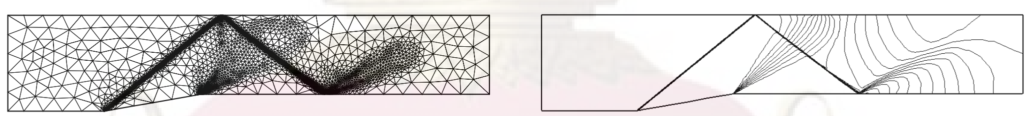
t=2.0



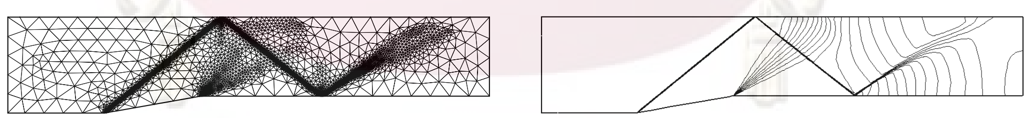
t=3.0



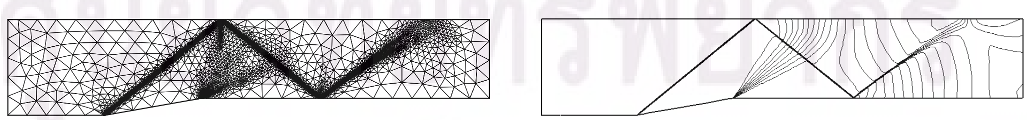
t=4.0



t=5.0

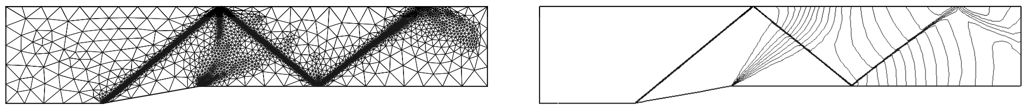


t=6.0

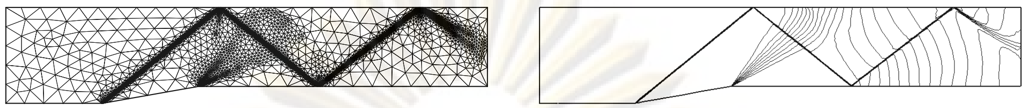


t=7.0

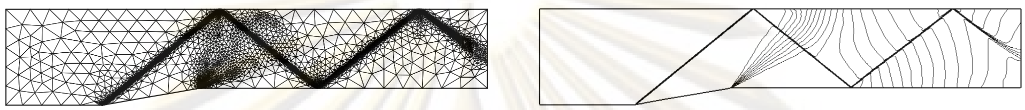
รูปที่ 6.50 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา *t*=0.1-7.0 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°



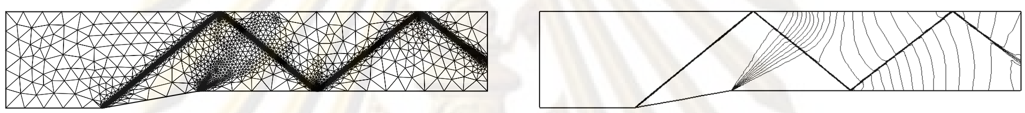
t =8.0



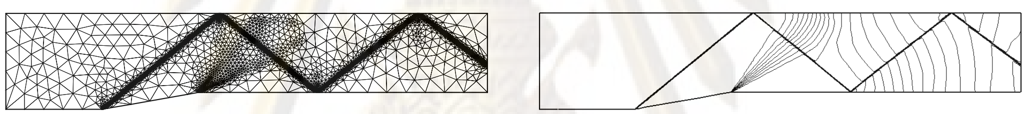
t=9.0



t=10.0



t=11.0



t=12.0

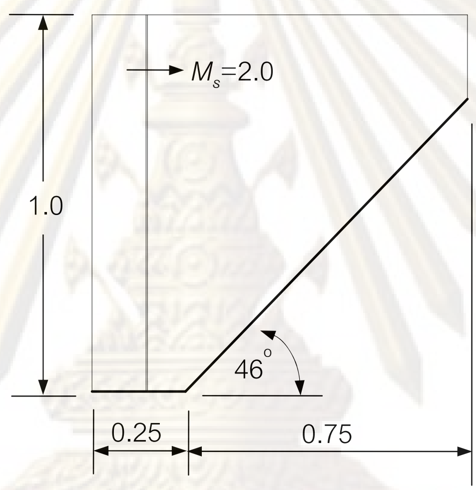
รูปที่ 6.51 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t=8.0 – 12.0 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°

ตารางที่ 6.1 การเปรียบเทียบค่าหมายเลขมัคที่ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.0 เท่าในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 10°

ตำแหน่ง	Analytical Mach number	CBS (% difference)	Ref . [35] (% difference)
1	2.00	2.000 (0.0)	2.000 (0.0)
2	1.65	1.641 (0.5)	1.639 (0.7)
3	1.30	1.310 (0.8)	1.287 (1.0)
4	2.00	1.985 (0.8)	1.985 (0.8)

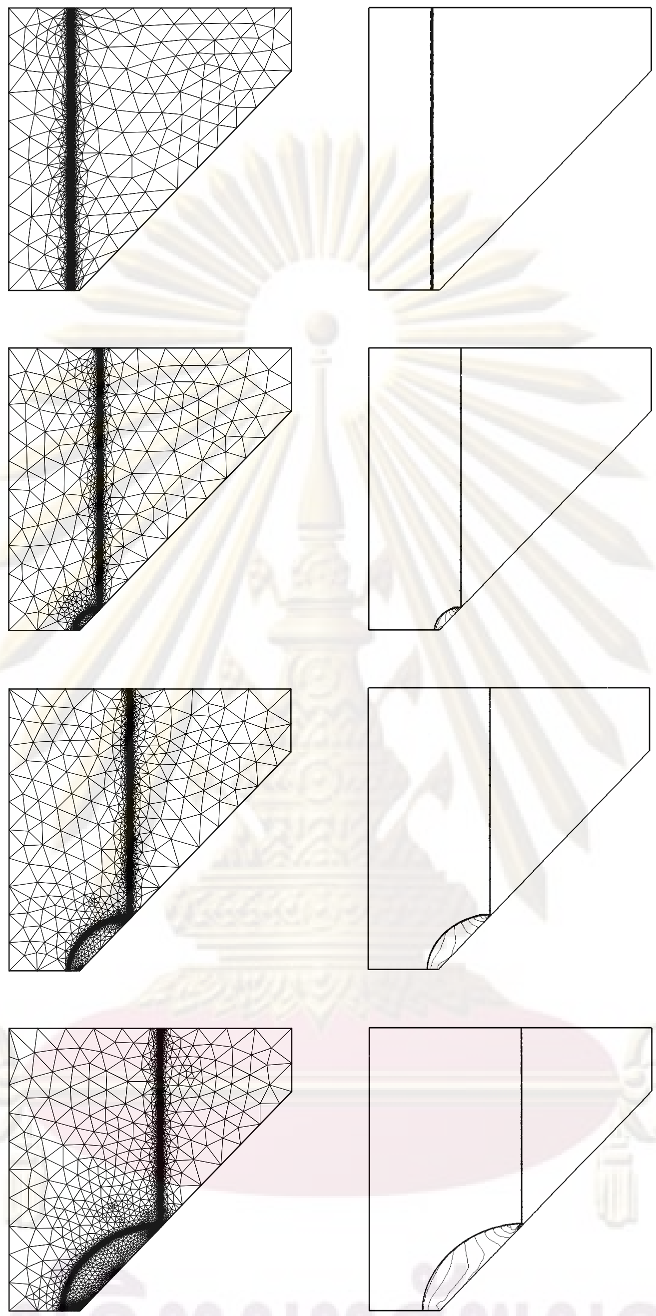
6.2.6 ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ

ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ (Mach 2 shock reflection over a wedge) [34,36] เป็นปัญหาที่กำหนดให้คลื่นช็อกตั้งฉาก (normal shock) หมายเลขมัค 2 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามือดังแสดงในรูปที่ 6.52 ปัญหานี้มักใช้เป็นปัญหาที่ทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบเชิงตัวเลขและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเนื่องจากเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนและเกิดปรากฏการณ์คลื่นช็อกที่มีพฤติกรรมแตกต่างกันมาก และถ้าหากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาไม่มีประสิทธิภาพ ก็จะไม่สามารถจับคลื่นช็อกต่าง ๆ ของปัญหาได้อย่างถูกต้อง



รูปที่ 6.52 ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ

ในรูปที่ 6.53-6.54 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับตัวไปตามเวลาและเส้นชั้นของความหนาแน่นที่ได้จากการคำนวณที่เวลาต่าง ๆ กัน จากรูปจะพบว่าเอลิเมนต์ขนาดเล็กจะเคลื่อนตัวไปตามการเคลื่อนที่ของคลื่นช็อกตกกระทบที่มีลักษณะเป็นเส้นตรงและเอลิเมนต์ขนาดเล็กจะวางตัวตามแนวของคลื่นช็อกสะท้อนกลับที่มีลักษณะเป็นส่วนโค้งขณะเดียวกันตรงจุดที่คลื่นช็อกตกกระทบสัมผัสกับพื้นจะมีเอลิเมนต์วางตัวกันอย่างหนาแน่นตลอดเวลาเพื่อที่จะจับการเปลี่ยนแปลงของการไหลที่มีความซับซ้อนตรงจุดนี้ให้ได้ซึ่งจะปรากฏในรูปแบบของก้านมัคที่จะตั้งฉากกับพื้นตลอดเวลา



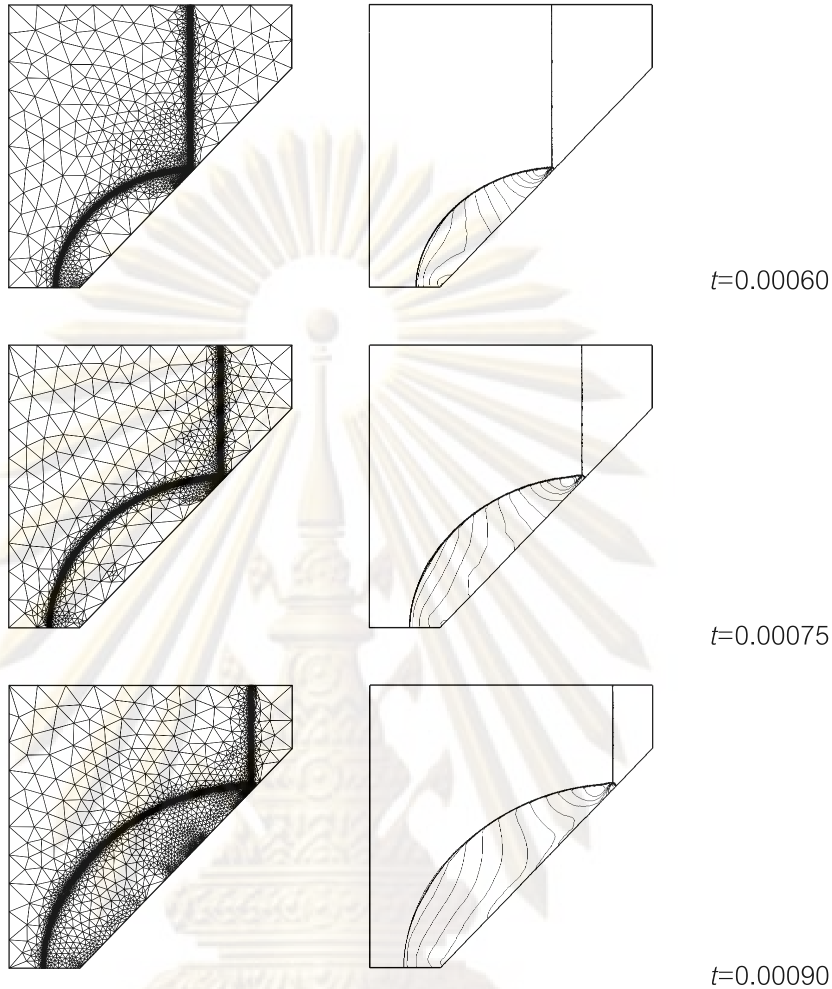
t=0.00000

t=0.00015

t=0.00030

t=0.00045

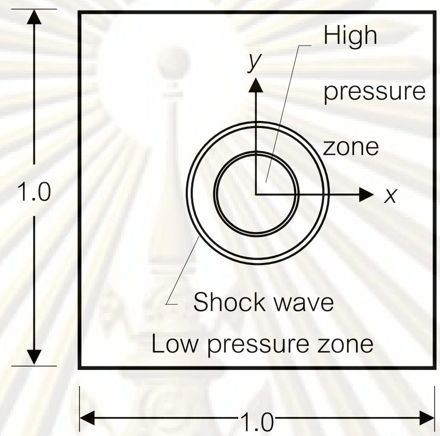
รูปที่ 6.53 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.00000-0.00045 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ



รูปที่ 6.54 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.00060-0.00090 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ

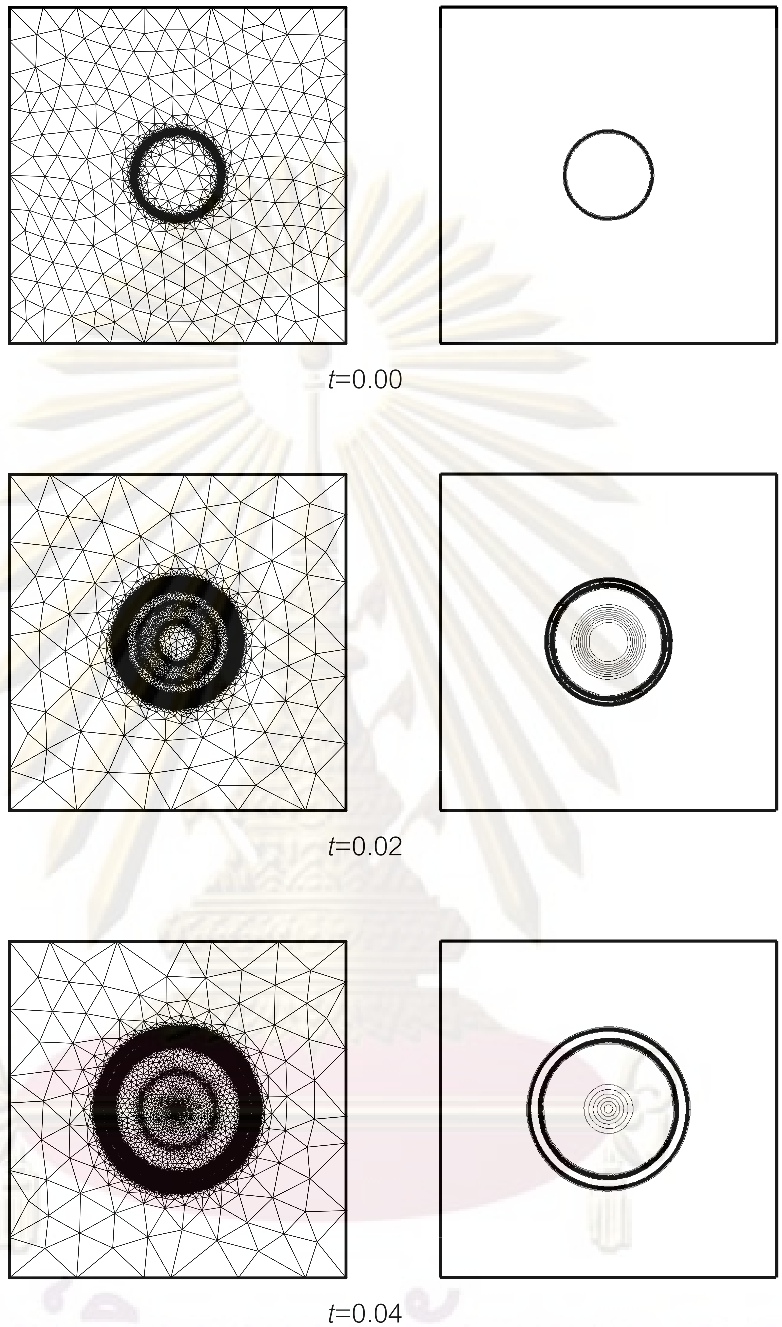
6.2.7 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ

ปัญหาของการระเบิดในอากาศ [8,37,38] เป็นปัญหาที่มีลักษณะเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกแผ่กระจายออกเป็นวงกลมจากการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับของไหลให้มีความแตกต่างกันรูปแบบของปัญหาได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 6.55

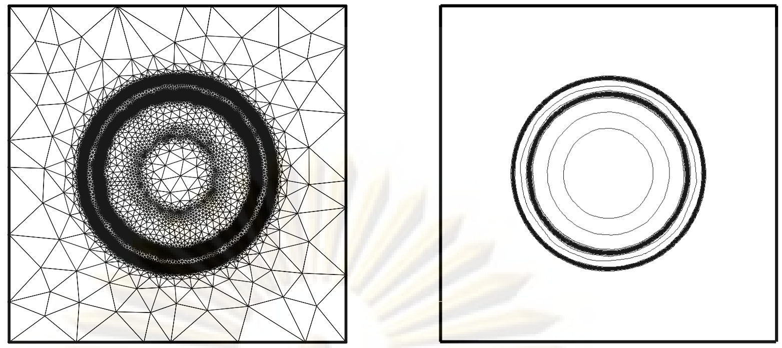


รูปที่ 6.55 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ

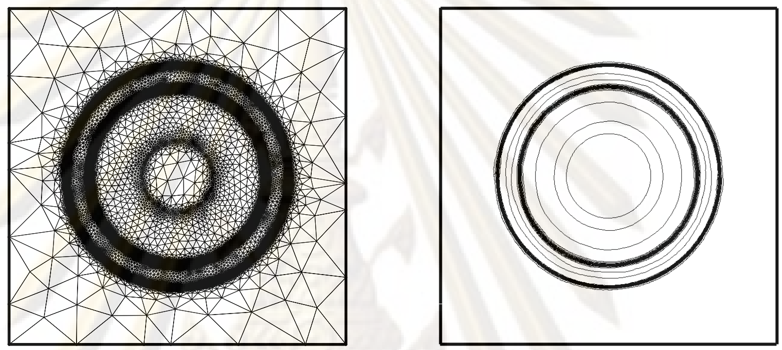
สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ เป็นดังนี้ กำหนดให้ $\rho = 2$, $u = 0$, $v = 0$ และ $\varepsilon = 18.75$ ที่ $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 0.13$ และ กำหนดให้ $\rho = 1$, $u = 0$, $v = 0$ และ $\varepsilon = 2.5$. ที่ตำแหน่งอื่นๆ เมื่อทำการคำนวณจะพบว่าเกิดการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกในรูปแบบของวงกลมออกจากศูนย์กลางการระเบิดส่วนของไหลบริเวณด้านหลังของคลื่นช็อกก็จะมีการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป สำหรับการวิเคราะห์ปัญหานี้ จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน และประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาจนได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำในช่วงเวลาเริ่มต้นเสียก่อน จากนั้นจึงเริ่มวิเคราะห์การไหลและปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติควบคู่กันไปพร้อมๆกัน ในรูปที่ 6.56 – 6.58 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของความหนาแน่นพบจะมีว่าเอลิเมนต์ขนาดเล็กวางตัวตามแนวของคลื่นช็อกเป็นวงกลมอย่างชัดเจนและเอลิเมนต์ขนาดเล็กเหล่านี้จะเคลื่อนตัวออกจากออกจากศูนย์กลางการระเบิด ซึ่งทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำในทุกช่วงเวลาที่คำนวณ ในปัญหานี้ได้ทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่เวลา $t = 0.13$ กับผลการคำนวณเชิงตัวเลขในเอกสารอ้างอิง [38] โดยได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.59 ซึ่งจะพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์รวมกันของระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติควบคู่กันให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าโดยดูจากความชันของคลื่นช็อก



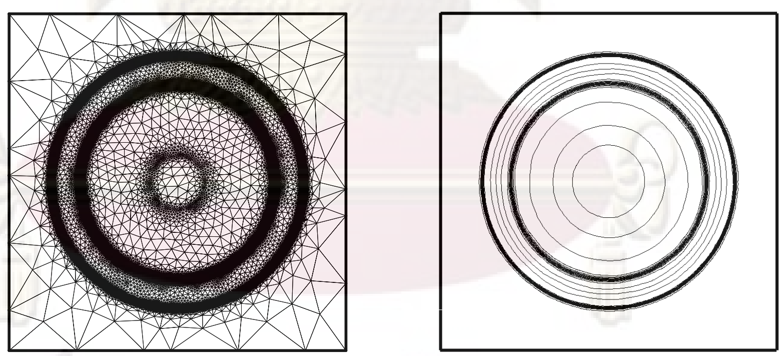
รูปที่ 6.56 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.00-0.04 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ



t=0.06

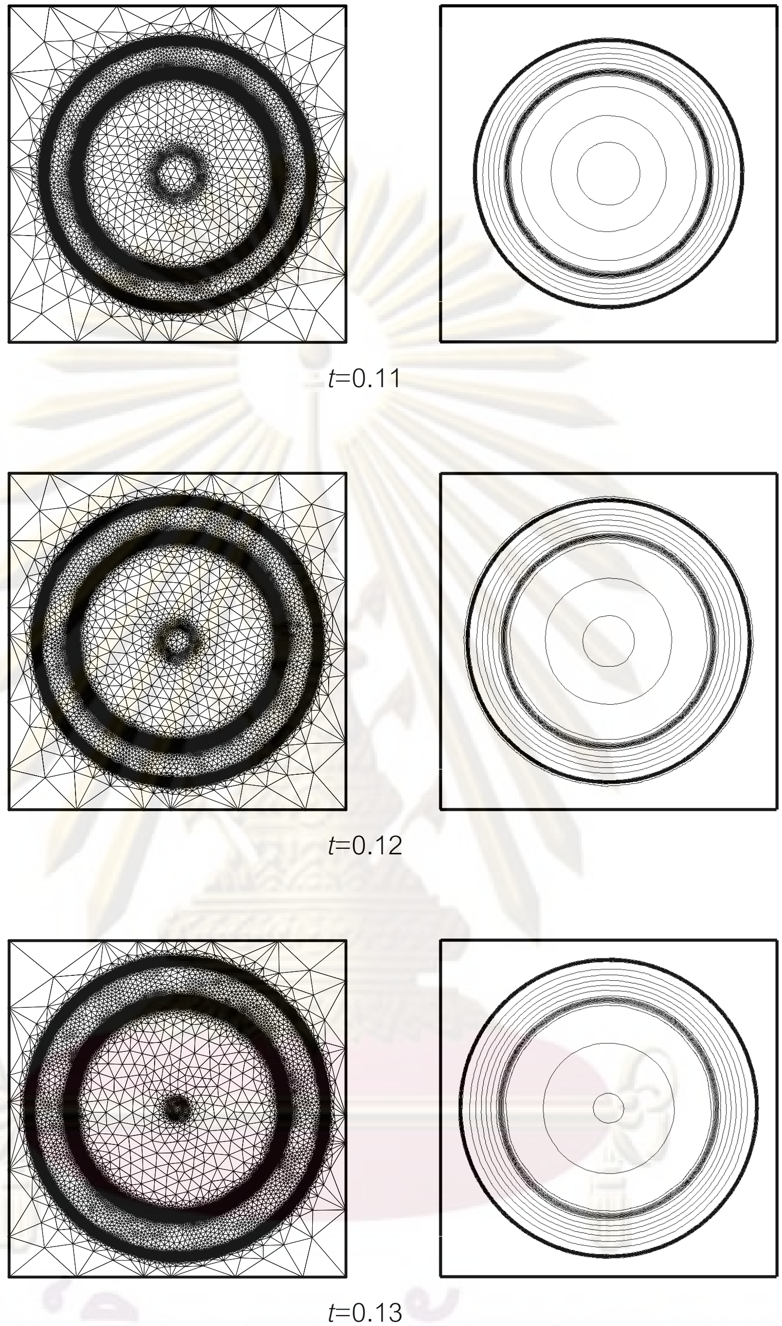


t=0.08

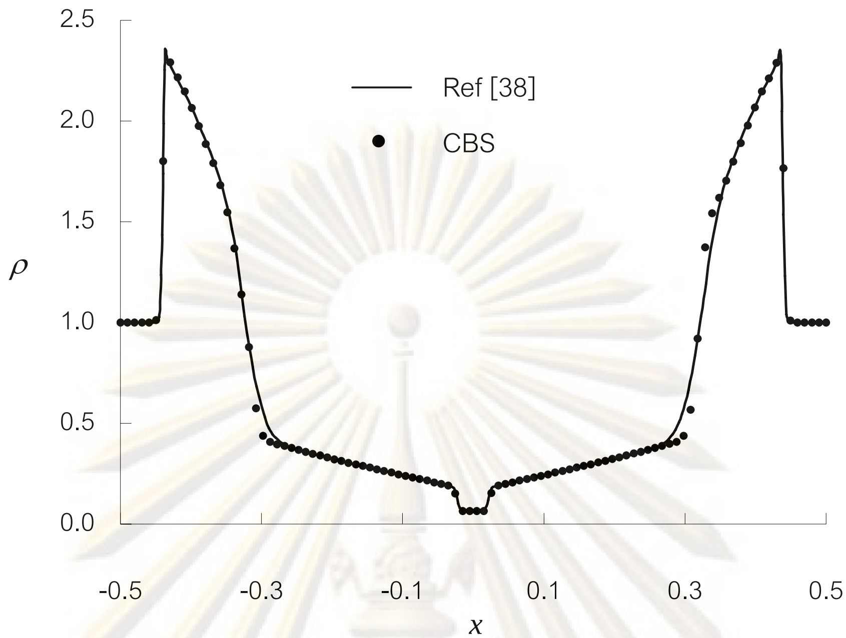


t=0.10

รูปที่ 6.57 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.06-0.10 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ



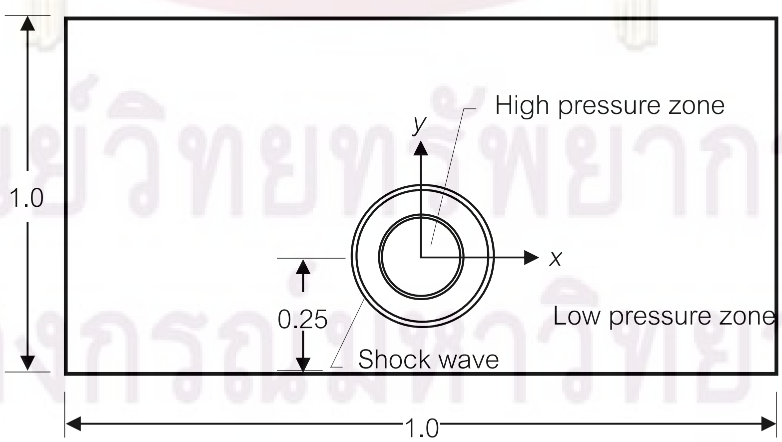
รูปที่ 6.58 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.11-0.13 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ



รูปที่ 6.59 กราฟเปรียบเทียบค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง $y=0$ ที่เวลา t = 0.13 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศ

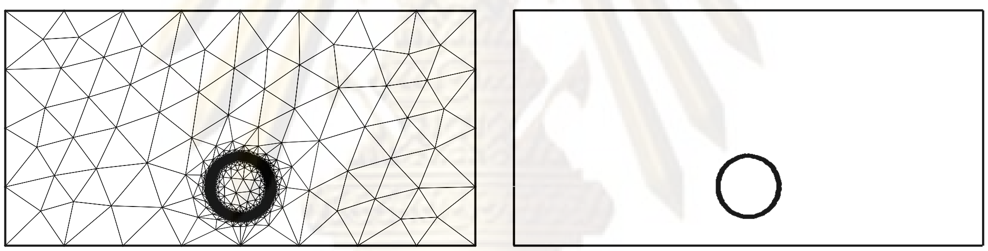
6.2.8 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ

ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ [37] ดังในรูปที่ 6.60 จะมีลักษณะคล้ายกับปัญหาที่ผ่านมาแต่จะกำหนดให้พื้นด้านล่างเป็นผนัง เพื่อศึกษาปรากฏการณ์การตกกระทบของคลื่นช็อก สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหลก็จะเหมือนกับปัญหาที่ผ่านมา คือ

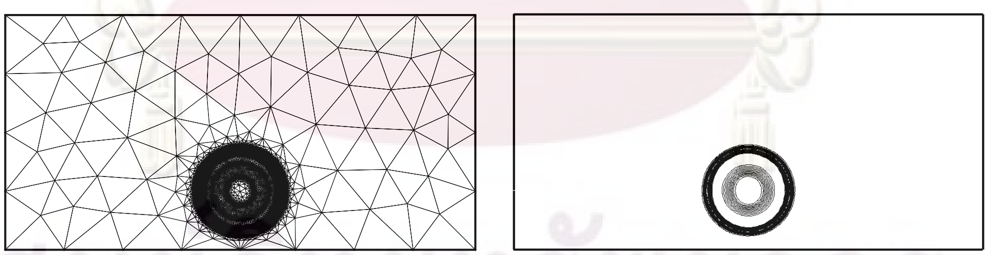


รูปที่ 6.60 ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ

กำหนดให้ $\rho = 2$, $u = 0$, $v = 0$ และ $\varepsilon = 18.75$ ที่ $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 0.13$ และกำหนดให้ $\rho = 1$, $u = 0$, $v = 0$ และ $\varepsilon = 2.5$. ที่ตำแหน่งอื่นๆ การวิเคราะห์จะเริ่มต้นด้วยการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน และประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาเพื่อใช้เกิดความแม่นยำของผลลัพธ์ในช่วงเวลาเริ่มต้น จากนั้นค่อยวิเคราะห์การไหลควบคู่ไปกับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยในรูปที่ 6.61-6.63 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของความหนาแน่นที่สอดคล้องกันที่เวลาต่างๆ จากรูปดังกล่าวจะพบว่าคลื่นช็อกโค้งเคลื่อนตัวออกจากศูนย์กลางการระเบิด และเมื่อตกกระทบกับพื้นราบ ก็จะเกิดการสะท้อนกลับของคลื่นช็อกและการกระทบกันของคลื่นช็อกสะท้อนและคลื่นช็อกโค้งซึ่งก่อให้เกิดเป็นปรากฏการณ์การไหลที่มีความซับซ้อนมาก การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ร่วมไปกับการวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวด้วยโปแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถจับการเปลี่ยนแปลงและจับสภาวะการไหลที่มีความซับซ้อนได้

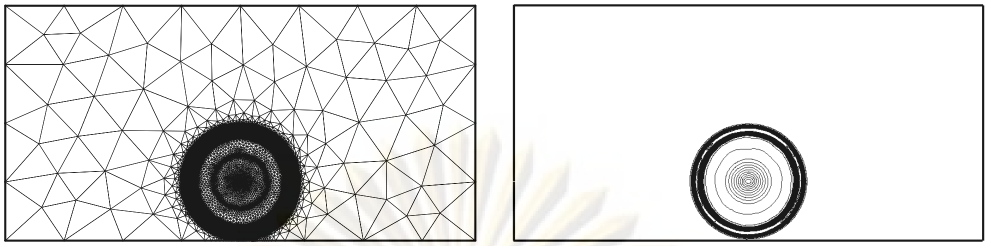


t=0.00

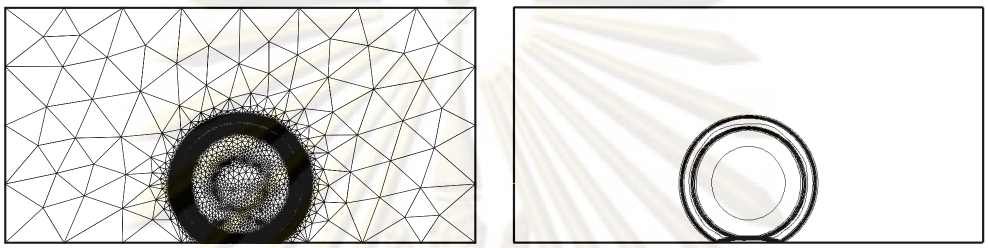


t=0.02

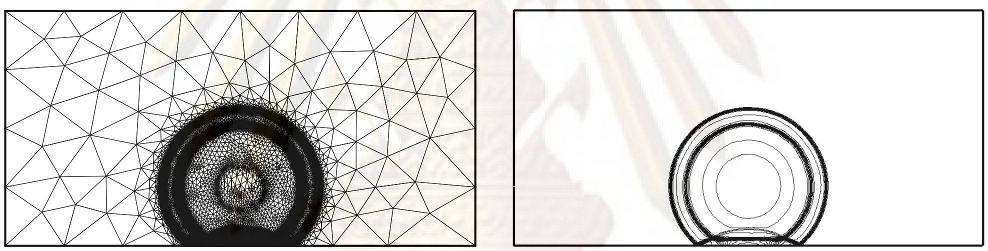
รูปที่ 6.61 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.00-0.02 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ



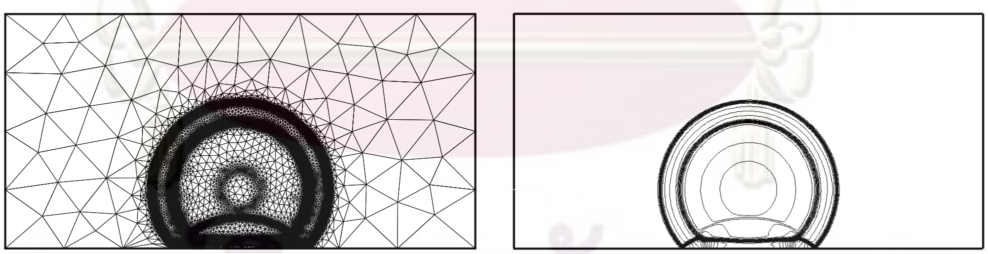
t=0.04



t=0.06

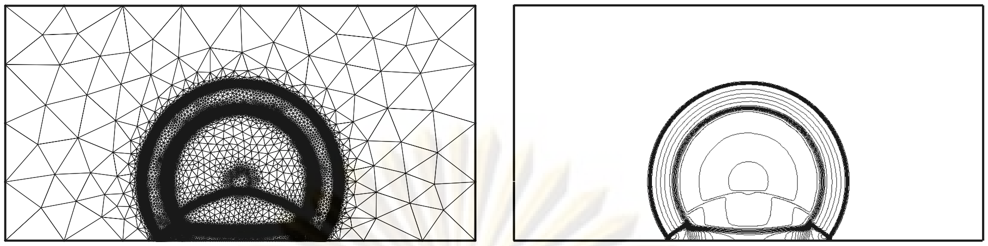


t=0.08

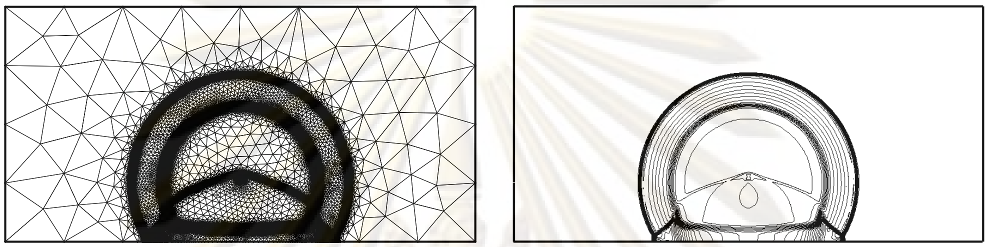


t=0.10

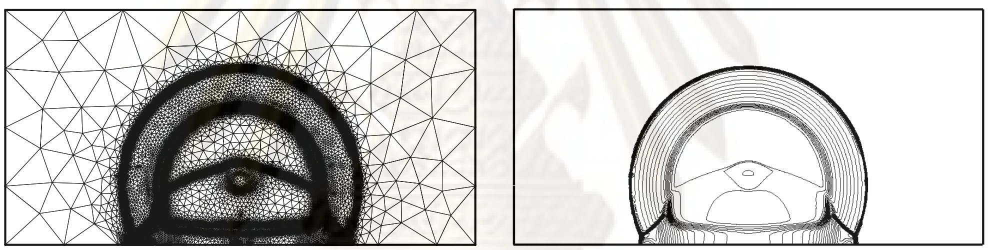
รูปที่ 6.62 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.04-0.10 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ



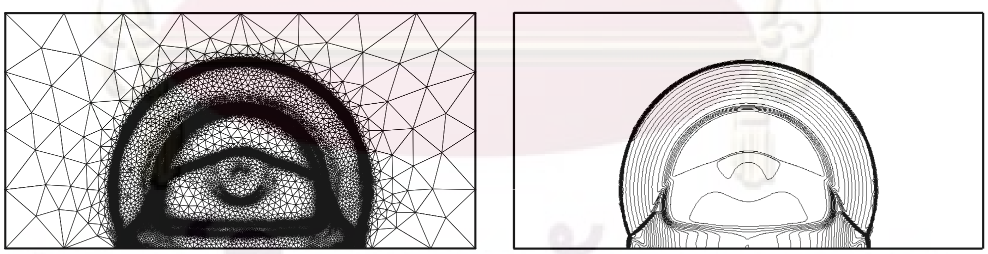
t=0.12



t=0.14

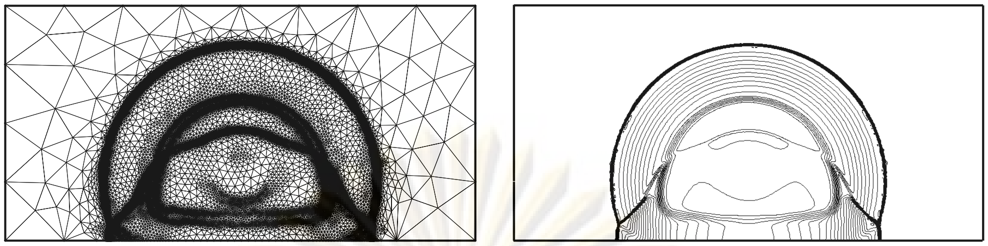


t=0.16

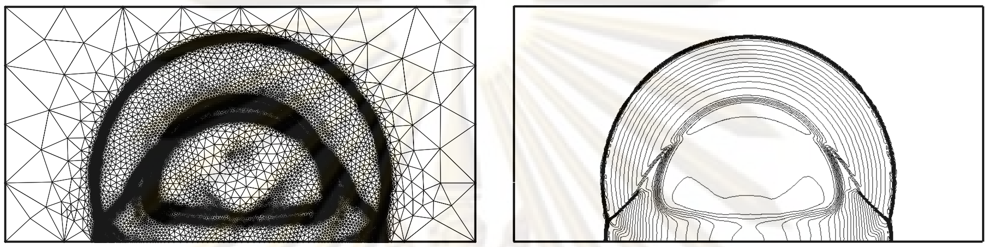


t=0.18

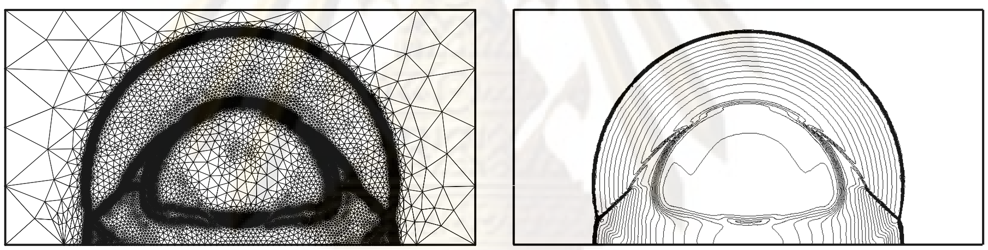
รูปที่ 6.63 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.12-0.18 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ



t=0.20



t=0.22



t=0.24

รูปที่ 6.64 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่เวลา t = 0.20-0.24 สำหรับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ

บทที่ 7

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะและการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ สามารถสรุปประเด็นสำคัญ ตลอดจนปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยในอนาคต ดังต่อไปนี้

7.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการศึกษาปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยไร้ความหนืดใน 2 มิติ ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว ซึ่งถูกควบคุมโดยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ และสมการสถานะของก๊าซในอุดมคติ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้เลือกใช้ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ(Characteristic-Based Split algorithm) หรือที่นิยมเรียกกันโดยย่อว่าวิธีซีบีเอส (CBS algorithm) โดยวิธีซีบีเอสได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลในหลายๆ รูปแบบ วิทยานิพนธ์ได้นำวิธีการนี้มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว และเพื่อปรับปรุงผลลัพธ์ให้มีความถูกต้องมากขึ้นในทุกๆ ช่วงเวลาที่ทำการวิเคราะห์ จึงได้นำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมด้วย เนื้อหาของวิทยานิพนธ์ได้อธิบายการทำงานอย่างเป็นขั้นเป็นตอน เริ่มตั้งแต่การกล่าวถึงที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้ชี้ให้เห็นความจำเป็นในการหาผลลัพธ์โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ตลอดจนงานวิจัยในอดีตที่งานมา ดังแสดงไว้ในบทที่ 1

ในบทที่ 2 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายหลักความจริงของการไหลซึ่งประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์พลังงาน ต่อจากนั้นจึงเป็นการอธิบายเกี่ยวกับเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ในส่วนของบทที่ 3 ได้แสดงถึงขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และอธิบายถึงภาพรวมของวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ แล้วดำเนินการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ หลังจากได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว จึงทำการประดิษฐ์รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ทั้งหมดที่เกี่ยวข้องต่อไป

ต่อจากนั้นจึงเป็นการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยรายละเอียดขั้นตอนการทำงาน ลักษณะแฟ้มข้อมูลนำเข้า และแฟ้มข้อมูลผลลัพธ์ ได้แสดงไว้ในบทที่ 4

ในบทที่ 5 ผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกัน เนื่องจากในปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยส่วนใหญ่จะมีการเปลี่ยนแปลงสภาวะการไหลอย่างฉับพลันผ่านแนวคลื่นช็อก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อปัญหาการไหลอยู่ในสภาวะไม่อยู่ตัวจะเกิดการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกต่างๆ การที่จะให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ วางตัวตามแนวคลื่นช็อกเพื่อจับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันให้ได้ แต่การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมนของปัญหาจะทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ จึงได้นำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ามาประยุกต์ใช้ร่วมด้วย โดยจะประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติควบคู่กันไปกับการวิเคราะห์การไหลซึ่งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นโดยไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากทั่วทั้งโดเมน เนื้อหาในบทที่ 6 เป็นตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงในรูปแบบต่างๆ โดยเริ่มการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง เช่น ปัญหาคลื่นช็อกในท่อจากนั้นจึงประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ควบคู่กับการวิเคราะห์การไหลเพื่อดูความแม่นยำของผลลัพธ์ที่เพิ่มขึ้นมา และนำกระบวนการทั้งสองไปประยุกต์กับปัญหาที่มีความซับซ้อนมายิ่งขึ้นเช่น ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 ผ่านมุม 90° ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัค 2 สะท้อนบนผนังยกระดับปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ เป็นต้น จากผลการคำนวณพบว่าวิธีซีบีเอสสามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว และการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติควบคู่ไปกับการวิเคราะห์การไหลจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นในทุกช่วงเวลา จากตัวอย่างที่ได้แสดงและจากงานวิจัยที่ผ่านมาต่างๆ ได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีซีบีเอสในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในรูปแบบต่างๆ ซึ่งถือเป็นข้อดีของระเบียบวิธีนี้ อย่างไรก็ตามระเบียบวิธีนี้ก็ยังมีข้อด้วยอยู่บ้างในเรื่องของการสั่นของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวนในบริเวณที่มีความเร็วต่ำ ๆ ซึ่งจะต้องศึกษาวิจัยเพื่อแก้ไขกันต่อไป

7.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

สำหรับปัญหาที่พบในขณะดำเนินการวิจัย สามารถสรุปเป็นข้อๆ มีดังนี้

7.2.1 ปัญหาการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จำเป็นต้องมีการกำหนด ค่าพารามิเตอร์บางตัว เช่น การเลือกค่า $h_{\min}$, $h_{\max}$ กล่าวคือ ในช่วงเริ่มต้นของการคำนวณจำเป็นต้องปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีความถูกต้องของผลลัพธ์ก่อนซึ่งหากในตอนเริ่มต้นใช้ค่าดังกล่าวไม่เหมาะสม เช่น $h_{\min}$ น้อยเกินไปแล้ว เมื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลไปได้สักระยะ จะทำให้เกิดจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มขึ้นอย่างมากซึ่งจะส่งผลต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณมากทีเดียว หรือหากเลือก $h_{\min}$ มีค่ามากเกินไปเมื่อทำการคำนวณไปได้สักระยะแล้วจะไม่สามารถจับการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกได้ ซึ่งการเลือก $h_{\min}$, $h_{\max}$ ในตอนเริ่มต้นนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้ทำการวิเคราะห์เป็นหลัก

7.2.2 การเลือกช่วงเวลาที่เหมาะสมในการปรับขนาดเอลิเมนต์ ในงานวิจัยนี้จะมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ควบคู่ไปกับการวิเคราะห์การไหลซึ่งจะทำให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กเคลื่อนตัวไปพร้อมกับการเคลื่อนตัวของผลลัพธ์เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป หากเลือกช่วงเวลาในปรับขนาดเอลิเมนต์ไม่เหมาะสม เช่น เลือกช่วงเวลาดังกล่าวมากไปจะทำให้ไม่สามารถจับการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกได้แต่ถ้าเลือกช่วงเวลาดังกล่าวน้อยไปจะทำให้ต้องเสียเวลาในการปรับขนาดเอลิเมนต์หลายๆครั้งมากขึ้น

7.2.3 ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ มักมีการเปลี่ยนแปลงของสภาวะการไหลอย่างฉับพลันผ่านแนวคลื่นช็อค ซึ่งอาจเกิดการสั่นของผลลัพธ์ในบริเวณใกล้แนวคลื่นช็อคได้ จึงต้องมีการเพิ่มความหนืดเทียมเข้าไปเพื่อลดการสั่น โดยจำเป็นต้องมีการกำหนดค่าคงที่ ซึ่งหมายถึงปริมาณของความหนืดเทียมที่เพิ่มเข้าไปให้กับปัญหา ซึ่งถ้าเลือกไม่เหมาะสมจะทำให้ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ลดลง หรืออาจจะเกิดการลู่ออกได้

7.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในงานวิทยานิพนธ์นี้เป็นการศึกษาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัวแบบไร้ความหนืดเท่านั้น หากทำการเพิ่มพจน์ที่ความหนืดลงไปในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ก็จะทำให้การวิเคราะห์การไหลจะมีความใกล้เคียงกับสภาวะที่เกิดจริงในธรรมชาติมากยิ่งขึ้น และจากปัญหาสุดท้ายของการวิเคราะห์คือ ปัญหาคลื่นช็อกจากการระเบิดในอากาศตกกระทบพื้นราบ ถ้าหากไปทำการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์กับโครงสร้างว่าผลการระเบิดจะก่อให้เกิดผลกระทบอย่างไรต่อโครงสร้างด้วยจะก่อให้เกิดเป็นองค์ความรู้ใหม่ขึ้นมา

รายการอ้างอิง

[1] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550.

[2] Anderson, J. D. Jr. Modern Compressible Flow with Historical Perspective. Third Edition. New York: McGraw-Hill, 2003.

[3] Anderson, J. D. Jr. Fundamentals of Aerodynamics. Third Edition. New York: McGraw-Hill, 2001.

[4] Donea, J. A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering 20 (1984): 101-119.

[5] Löhner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C. An Adaptive Finite Element Procedure for Compressible High Speed Flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 51 (1985): 441-465.

[6] Peraire, J., Peiro, J., Formaggia, L., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C., Finite Element Euler Computations in Three Dimensions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, (1988): 2135-2159.

[7] Dechaumphai, P. and Limtrakarn, W. Adaptive Cell-Centered Finite Element Technique for Compressible Flows. Journal of Energy, Heat and Mass Transfer 21 (1999): 57-65.

[8] สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.

[9] Limtrakarn, W. and Dechaumphai, P. Computations of High-Speed Compressible Flows With Adaptive Cell-Centered Finite Element Method. Journal of the Chinese Institute of Engineers 26 (2003): 553-563

[10] Brueckner, F .P. and Heinrich, J. C. Petrov-Galerkin Finite Element Model for Compressible Flows. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32 (1991): 255-274.

[11] G. J. Le Beau, S. E. Ray, S. K. Aliabadi and T. E. Tezduyar. SUPG Finite Element Computation of Compressible Flows with The Entropy and Conservation Variables Formulations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 104 (1993): 105-121.

[12] Zienkiewicz, O. C. and Codina, R. A General Algorithm for Compressible and Incompressible flow – Part I. The Split, Characteristic-Based Scheme. International Journal for Numerical Methods in Fluids 20 (1995): 869-885.

[13] Zienkiewicz, O. C., Morgan, K., Satya Sai, B. V. K. A General Algorithm for Compressible and Incompressible flow – Part II .Tests On The Explicit Form. International Journal for Numerical Methods in Fluids 20 (1995): 887-913.

[14] Zienkiewicz, O. C., Nithiarasu, P., Codina, R., Vazquez, M. and Ortiz, P. The Characteristic-Based-Split Procedure: An Efficient and Accurate Algorithm for Fluid Problems. International Journal for Numerical Methods in Fluids 31 (1999): 359-392.

[15] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. The Finite Element Method. Fifth Edition, Volume III. Butterworth-Heinemann, 2000.

[16] Massarotti, N., Nithiarasu, P. and Zienkiewicz, O. C. Natural Convection in Porous Medium-Fluid Interface Problems, A Finite Element Analysis by Using The CBS Procedure. International Journal of Numerical Methods for Heat & Flow 11 (2005): 473-490.

[17] Sod, G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 57 (1978): 1-31.

[18] สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช การแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและการปรับตัวได้ของเอลิเมนต์ วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2548.

[19] Löhner, R. Adaptive Remeshing for Transient Problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 75 (1989): 195-214.

[20] Probert, J., Hassan, O., Peraire, J. and Morgan, K. An Adaptive Finite Element Method for Transient Compressible Flows. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32 (1991): 1145-1159.

[21] Zienkiewicz, O. C., Szmelter, J. and Peraire, J. Compressible and Incompressible Flow; An Algorithm for All Seasons. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 78 (1990): 105-121.

[22] Zienkiewicz, O. C. and Wu, J. A General Explicit or Semi-Explicit Algorithm for Compressible and Incompressible Flows. International Journal for Numerical Methods in Engineering 35 (1992): 457-479.

[23] Nithiarasu, P., Zienkiewicz, O. C., Satya Sai, B. V. K., Morgan, K., Codina, R. and Vazquez, M. Shock Capturing Viscosities for The General Fluid Mechanics Algorithm. International Journal for Numerical Methods in Fluids 28 (1998): 1325-1353.

[24] Anderson, J. D. Jr. Computational Fluid Dynamics, The Basics with Applications. International Edition. Singapore: McGraw-Hill, 1995.

[25] Thomas, C.G. and Nithiarasu, P. Influences of Element Size and Variable Smoothing on Inviscid Compressible Flow Solution. International Journal of Numerical Methods for Heat & Flow 15 (2005): 420-428.

[26] วิโรจน์ ลิ่มตระการ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปฏิสัมพันธ์ระหว่างการไหลความเร็วสูงและโครงสร้าง. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

[27] Dechaumphai, P. Adaptive Finite Element Technique for Thermal Stress Analysis of Built-Up Structures. JSME International Journal 39 (1996): 223-230.

[28] Dechaumphai, P. Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems. Journal of Energy, Heat and Mass Transfer 17 (1995): 87-94.

[29] Dechaumphai, P. and Phongthanapanich, S. High-Speed Compressible Flow Solutions by Adaptive Cell-Centered Upwinding Algorithm with Modified H-Correction Entropy Fix. Advances in Engineering Software 34 (2003): 533-538.

[30] Sun, C. and Hsu, A. Multi-Level Lattice Boltzmann Model on Square Lattice for Compressible Flows. Computers & Fluids 33 (2004): 1363-1385.

[31] Boonmarlert, P., Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Combined Characteristic-Based Split Algorithm and Mesh Adaptation Technique for High-Speed Compressible Flow Analysis. Indian Journal of Engineering & Materials Sciences 12 (2005): 376-388.

[32] Sun, M and Takayama, K. Conservative Smoothing on an Adaptive Quadrilateral Grid. Journal of Computational Physics 150 (1999) : 143-180.

[33] Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Flux-difference splitting scheme with modified multidimensional dissipation on unstructured meshes. Journal of the Chinese Institute of Engineers 27 (2004) : 981-992.

[34] Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Modified multidimensional dissipation scheme on unstructured meshes for high-speed compressible flow analysis. International Journal of Computational Fluid Dynamics 18 (2004): 631-640.

[35] Ripley, R. C., Lien, F. S, and, Yovanovich, M. M. Adaptive Unstructured Mesh Refinement of Supersonic Channel Flows. International Journal of Computational Fluid Dynamics 18 (2004) 189-198.

[36] Takayama, K. and Jiang, Z. Shock wave reflection over wedges: A benchmark test for CFD and experiments. Shock Waves 7 (1997) 191-203.

[37] Liang, S. M. Computations and Application of Blast-wave Propagation and Reflection in air and water. presented in Workshop on Experimental and Computational Techniques of Shock Wave Research. Taiwan, National Cheng Kung University, 2001.

[38] Kuzmin, D., Möller, M., Turek, S. High-Resolution FEM–FCT Schemes for Multidimensional Conservation Laws. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193 (2004) 4915-4946.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับวิเคราะห์การไหลความเร็วสูง

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 มีรายละเอียดดังนี้

```
! Bismi Allahi alrrahmani alrraheemi !
! In the name of Allah, Most Gracious, Most Merciful
! Praise be to Allah, the Cherisher and Sustainer of the world;
! Most Gracious, Most Merciful;
! Master of the Day of Judgment.
! Thee do we worship, and Thine aid we seek.
! Show us the straight way,
! The way of those on whom Thou hast bestowed Thy Grace, those whose (portion) is not
wrath,
! and who go not astray.

Program CBS_HIFLOW

       use variable
       implicit none
       open(unit=12, file='femesh_sol.out', status='unknown', action='write')
       open(unit=13, file='error_av.eav'  , status='unknown', action='write')
       open(unit=15, file='error_mx.emx'  , status='unknown', action='write')
       open(unit=16, file='transient.his' , status='unknown', action='write')
       OPEN(UNIT=20, FILE='CHECK1.OUT',STATUS='UNKNOWN',action='write')
       call input
       call prelim
       call transform
       call iteration
       call btransform
       call output

End program CBS_HIFLOW

Module variable

implicit none
       character(len=20)                    :: name1, name2, name3, text
       character(len=1)                     :: hthou, tthou, thou, hun, dec, unit
       integer(2)                           :: stday, stmonth, styear
       integer(2)                           :: sthour, stminute, stsecond, sthund
       integer(2)                           :: enday, enmonth, enyear
       integer(2)                           :: enhour, enminute, ensecond, enhund

! define size by (npoin,x)

       integer(4), allocatable, dimension(:,:)      :: matcon

! define size by (nelem,x)

       integer(4), allocatable, dimension(:,:)      :: intma                !
       integer(4), allocatable, dimension(:,:)      :: ielsi

! define size by (nboun,x)

       integer(4), allocatable, dimension(:,:)      :: iside
       integer(4), allocatable, dimension(:,:)      :: iwpoin

! define size by (npoin)

       integer(4), allocatable, dimension(:)        :: ihelp
       integer(4), allocatable, dimension(:)        :: ncmax, number
```

```
! define size by (x)

        integer(4), dimension(4)        :: icount
        integer(4)                      :: npoin, nelem, nboun, nwall
        integer(4)                      :: ip, ie, ib, ia, ic, iw
        integer(4)                      :: i, j, k, kkk
        integer(4)                      :: na, nb, nc, nd, ne, nf, nz, leng
        integer(4)                      :: ntime, istep, ilots, iwrite
        integer(4)                      :: itime, intime, nstep, niter, nwrite
        integer(4)                      :: iopt, inpt, opvis, index, idum
        integer(4)                      :: ifinal, nsmoo, opshock, num

! define size by (npoin,x)

        real(8), allocatable, dimension(:,:)   :: unkno, unkn1
        real(8), allocatable, dimension(:,:)   :: rhs0, rhs1, rhs2
        real(8), allocatable, dimension(:,:)   :: coord

! define size by (nelem,x)

        real(8), allocatable, dimension(:,:)   :: geome
!       real(8), allocatable, dimension(:,:)   :: fxsec, fysec

! define size by (nboun,x)

        real(8), allocatable, dimension(:,:)   :: rside
        real(8), allocatable, dimension(:,:)   :: wnor

! define size by (npoin)

        real(8), allocatable, dimension(:)     :: dmmat
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: pres, pres1, temp, temp1
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: sound, amach, absv
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: deltp
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: alen
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: pswe, dum1, dum2
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: dpdxp, dpdyp, delun
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: pnew, vnorm, rhonew, vmod, soundnew

! define size by (nelem)

        real(8), allocatable, dimension(:)     :: delte
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: sigxx, sigyy, sigxy
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: dtdx, dtdy, dpdx, dpdy
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: dfx, dfy
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: dfe
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: uav, vav, dudxe, dvdye
        real(8), allocatable, dimension(:)     :: dspdx, dspdy, dspdn

! define size by (x)

        real(8), dimension(5)                  :: cinf1, cinf2
        real(8), dimension(4)                  :: ha, hb, sumer, sumsq
        real(8), dimension(3)                  :: conin
        real(8), dimension(2)                  :: theta
        real(8)                                :: gamma, gamma1
        real(8)                                :: dtfix, timt, rtime
        real(8)                                :: csafe, csmoo
        real(8)                                :: dt, diff, cder
        real(8)                                :: adel1, adel2, adel3, adel4
        real(8)                                :: shockcon, tk, amul
        real(8)                                :: cpoin, ttemp, lines

End module variable

Subroutine input

        use  variable

        implicit none

        call gettim(sthour, stminute, stsecond, sthund)

        write(*,*)"Bismi Allahi Alrrahmani Alrraheemi"
        write(*,*)"In the name of Allah, Most Gracious, Most Merciful"
        write(*,*)"Praise be to Allah, the Cherisher and Sustainer of the world;"
        write(*,*)"Most Gracious, Most Merciful;"
```

```
        write(*,*)"Master of the Day of Judgment."
        write(*,*)"Thee do we worship, and Thine aid we seek."
        write(*,*)"Show us the straight way,"
        write(*,*)"The way of those on whom Thou hast bestowed Thy Grace, those whose
        (portion)"
        write(*,*)"is not wrath, and who go not astray."

        1  write(*,10)
        10 format(//, ' Please enter the input file name:',/)
        read(*, '(A)', err = 1) name1

        open(unit=11, file=name1, status='old', action='read', err = 1)

        read(11,*) lines
        DO  i = 1,lines
                read(11,*) TEXT
        ENDDO !i

        read(11,*) text
        read(11,*) nelem, npoin, nboun

        write(*,20)
    20 format(/,' Enter option for transient calculation :',//,5x,'1.) steady state
',/,5x,'2.) transient')
        read(*,*) index

        IF (index == 2) THEN

                write(*,25)
                25 format(/,' Please enter number of time step for write output files
:')
                read(*,*)nwrite

        ENDIF

        write(*,30)
        30 format(/,' THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :')
        write(*,40)npoin
        40 format('    NUMBER OF NODES        = ', I6)
        write(*,50)nelem
        50 format('    NUMBER OF ELEMENTS     = ', I6)
        write(*,60)nboun
        60 format('    NUMBER OF BOUNDARIES   = ', I6)

!       READING SPECIFIC HEAT RATIO (GAMMA) AND CONSTANT

        READ(11,*) text
        READ(11,*) gamma, shockcon
        gamma1 = gamma - 1.0d+00
        opshock = 1
        csmoo = 0.001
        nsmoo = 1
        theta(1) = 0.5
        theta(2) = 0.5
        ilots    =  -1
        opshock = 1

! *** READING NO.OF STEPS TO BE RUN, NO.OF STEPS RAN SO FAR,
! *** FIXED TIME STEP VALUE

        READ(11,*) text
        READ(11,*) ntime, iwrite, dtfix

! *** allocate size of each array....

! allocate (npoin,x)

        allocate(matcon(npoin,20))
        allocate(unkno(npoin,4), unkn1(npoin,4))
        allocate(rhs0(npoin,4), rhs1(npoin,4), rhs2(npoin,4))
        allocate(coord(npoin,2))

! allocate (nelem,x)

        allocate(intma(nelem,3), ielsi(nelem,2))
        allocate(geome(nelem,7))
        allocate(fxsec(nelem,4), fysec(nelem,4))
```

```
! allocate (nboun,x)

      allocate(iside(nboun,4), rside(nboun,4))
      allocate(iwpoin(nboun,3), wnor(nboun,2))

! allocate (npoin)

      allocate(ihelp(npoin), ncmax(npoin), number(npoin))
      allocate(dmmat(npoin))
      allocate(pres(npoin), pres1(npoin), temp(npoin), temp1(npoin))
      allocate(sound(npoin), amach(npoin), absv(npoin))
      allocate(deltp(npoin), alen(npoin), pswe(npoin), dum1(npoin), dum2(npoin))
      allocate(dpdxp(npoin), dpdyp(npoin), delun(npoin))
      allocate(pnew(npoin), vnorm(npoin), rhonew(npoin), vmod(npoin),soundnew(npoin))

! allocate (nelem)

      allocate(delte(nelem))
      allocate(sigxx(nelem), sigyy(nelem), sigxy(nelem))
      allocate(dtdx(nelem), dtdy(nelem), dpdx(nelem), dpdy(nelem))
      allocate(dfx(nelem), dfy(nelem))
      allocate(dfe(nelem))
      allocate(uav(nelem), vav(nelem), dudxe(nelem), dvdye(nelem))
      allocate(dspdx(nelem), dspdy(nelem), dspdn(nelem))

! *** READING THE COORDINATES OF THE NODAL POINTS

      READ(11,*) text

              DO ip = 1, npoin

                     READ(11,*) i, (coord(ip,j),j = 1,2)
                     IF(i.ne.ip) THEN
                            WRITE(*,70) I
                        70  FORMAT(/,'NODE NO.', I6,' IN DATA FILE IS MISSING')
                            STOP
                     ENDIF
              ENDDO !ip

! *** READING THE UNKNOWNS(RHO,U1,U2 AND E)

      READ(11,*) text

              DO ip = 1, npoin

                     READ(11,*) i, (unkno(ip,j),j = 1,4)
                     IF(i.ne.ip)THEN
                            WRITE(*,80) I
                        80  FORMAT(/,'NODE NO.', I6,' IN DATA FILE IS MISSING')
                            STOP
                     ENDIF
              ENDDO !ip

! *** READING ELEMENT CONNECTIVITY

      READ(11,*) text

              DO ie = 1, nelem
                     READ(11,*) i, (intma(ie,j),j = 1,3)
                     IF(i.ne.ie) THEN
                            WRITE(*,90) I
                        90  FORMAT(/,'ELEMENT NO.', I6,' IN DATA FILE IS MISSING')
                            STOP
                     ENDIF
              ENDDO !ie

! *** READING THE BOUNDARY SIDES INFORMATION

      READ(11,*) text

              DO ib = 1, nboun
                     READ(11,*) i, (iside(ib,j),j = 1,4)
              ENDDO !ib
```

```
! *** CALCULATING PRESSURE, SPEED OF SOUND, TEMPERATURE

               DO ip = 1, npoin

                       pres(ip)  = gamma1*unkno(ip,1)*(unkno(ip,4) -
0.5d+00*(unkno(ip,2)**2 + unkno(ip,3)**2))

                       temp(ip)  = (unkno(ip,4) - 0.5d+00*(unkno(ip,2)**2 +
unkno(ip,3)**2))
               ENDDO !IP

    CLOSE(11)

End subroutine input

! TRANSFORM PRIMATIVE VARIABLES INTO CONSERVATIVE VARIABLES

Subroutine transform

        use variable

        implicit none

        DO ip = 1, npoin
               DO ia = 2,4
                       unkno(ip,ia) = unkno(ip,1)*unkno(ip,ia)
               ENDDO !ia
        ENDDO !ip

END subroutine transform

Subroutine prelim

        use variable

        implicit none

        integer(4), dimension(npoin)                  :: iflag
        integer(4)                                    :: ii, jj, kk
        integer(4)                                    :: ik, ikp, ik1, ik2, ikp1, ikp2
        integer(4)                                    :: ipb1, ipb2, in, nn, mm
        integer(4)                                    :: ib1, ib2, itrail
        real(8)                                       :: x1, x2, x3, y1, y2, y3
        real(8)                                       :: b1, b2, b3, c1, c2, c3
        real(8)                                       :: area, area2, ar2, ar3
        real(8)                                       :: anx, any, height
        real(8)                                       :: dx, dy, rleng
        real(8)                                       :: anx1, any1, ach, anor

! marking the elements with one or two or no boundary sides

        ielsi = 0
        DO ib = 1, nboun
               ie = iside(ib,3)
               IF(ielsi(ie,1).eq.0) ielsi(ie,1) = ib
               IF(ielsi(ie,1).ne.ib) ielsi(ie,2) = ib
    ENDDO !i

! finding points surriund points

        IF(ilots /= -1) then
               DO ip = 1, npoin
                       iflag = 0
                       ncmax(ip) = 0
                       DO ie = 1, nelem
                              DO ik = 1, 3
                                     ikp = intma(ie,ik)
                                     IF(ikp.eq.ip) THEN
                                            ik1 = ik + 1
                                            IF (ik1.gt.3) ik1 = ik1 - 3
                                            ikp1 = intma(ie, ik1)
                                            ik2 = ik1 + 1
                                            IF(ik2.gt.3) ik2 = ik2 - 3
                                            ikp2 = intma(ie,ik2)
```

```
                                        IF(iflag(ikp1).ne.1) THEN
                                                iflag(ikp1) = 1
                                                ncmax(ip) = ncmax(ip) + 1
                                                matcon(ip,ncmax(ip)) = ikp1
                                        ENDIF
                                        IF(iflag(ikp2).ne.1) THEN
                                                iflag(ikp2) = 1
                                                ncmax(ip) = ncmax(ip) + 1
                                                matcon(ip,ncmax(ip)) = ikp2
                                        ENDIF
                                ENDIF
                        ENDDO !ik
                ENDDO !ie
        ENDDO !ip
ENDIF

! computing [dNi/dX] = bi/2A, [dNi/dY] = ci/2A, Area of element

        DO ie = 1, nelem
                ii = intma(ie,1)
                jj = intma(ie,2)
                kk = intma(ie,3)
                x1 = coord(ii,1)
                x2 = coord(jj,1)
                x3 = coord(kk,1)
                y1 = coord(ii,2)
                y2 = coord(jj,2)
                y3 = coord(kk,2)
                b1 = y2 - y3
                b2 = y3 - y1
                b3 = y1 - y2
                c1 = x3 - x2
                c2 = x1 - x3
                c3 = x2 - x1
                area = 0.5d+00*(x2*(y3-y1) + x1*(y2-y3) + x3*(y1-y2))
                area2 = 2.0d+00*area
                geome(ie,1) = b1/area2
                geome(ie,2) = b2/area2
                geome(ie,3) = b3/area2
                geome(ie,4) = c1/area2
                geome(ie,5) = c2/area2
                geome(ie,6) = c3/area2
                geome(ie,7) = area2
        ENDDO !ie

! computing the shortest characteristic height for all nodes

        alen = 1.0d+06
        DO ie = 1, nelem
                DO i = 1, 3
                        ip  = intma(ie,i)
                        anx = geome(ie,i)
                        any = geome(ie,i+3)
                        height = 1.0/dsqrt(anx*anx + any*any)
                        alen(ip) = dmin1( alen(ip),height )
                ENDDO !i
        ENDDO !ie

! computing inverse lumped mass matrix

        dmmat = 0.0d+00
        DO ie = 1, nelem
                ar2 = geome(ie,7)
                ar3 = ar2/6.0d+00
                DO i = 1, 3
                        ip = intma(ie,i)
                        dmmat(ip) = dmmat(ip) + ar3
                ENDDO !i
        ENDDO !ie

        DO ip = 1, npoin
                dmmat(ip) = 1.0d+00/dmmat(ip)
        ENDDO !ip

! computing direction cosine and lenght of boundary
```

```
        rside = 0.0d+00

        DO ib = 1, nboun
               ipb1 = iside(ib,1)
               ipb2 = iside(ib,2)
               dx = coord(ipb2,1) - coord(ipb1,1)
               dy = coord(ipb2,2) - coord(ipb1,2)
               rleng = dsqrt(dx*dx+dy*dy)
               rside(ib,1) = dy/rleng
               rside(ib,2) = -dx/rleng
               rside(ib,3) =  rleng
        ENDDO !ib

! computing normal vector of node on wall boundary

        ihelp = 0
        iwpoin = 0
        DO in = 1, 2
               DO ib = 1, nboun
                      IF(iside(ib,4)==2) THEN
                             nn = iside(ib,in)
                             mm = ihelp(nn)
                             IF(mm == 0) THEN
                                    nwall = nwall + 1
                                    iwpoin(nwall,1) = nn
                                    iwpoin(nwall,2) = ib
                                    ihelp(nn) = nwall
                             ELSE
                                    iwpoin(mm,3) = ib
                             ENDIF
                      ENDIF
               ENDDO !ib
        ENDDO !in

        DO iw = 1, nwall
               ib1 = iwpoin(iw,2)
               ib2 = iwpoin(iw,3)
               anx1 = rside(ib1,3)*rside(ib1,1)
               any1 = rside(ib1,3)*rside(ib1,2)
         IF(ib2 /= 0) THEN
                      anx1 = anx1 + rside(ib2,3)*rside(ib2,1)
                      any1 = any1 + rside(ib2,3)*rside(ib2,2)
                      ach  = rside(ib1,1)*rside(ib2,1) + rside(ib1,2)*rside(ib2,2)
                      IF(ach < -0.2) THEN
                             itrail = IW
                             WRITE(*,*) iwpoin(iw,1),' IS TRAILING EDGE'
                             wnor(iw,1) = 0.0D+00
                             wnor(iw,2) = 0.0D+00
                             GO TO 300
                      ENDIF
         ENDIF
               anor = DSQRT(anx1*anx1 + any1*any1)
               anx1 = anx1/anor
               any1 = any1/anor
               wnor(iw,1) = anx1
               wnor(iw,2) = any1
               300 CONTINUE
        ENDDO !IW

End subroutine prelim


Subroutine iteration

        use variable

        implicit none

        write(*,10)
        write(13,10)
        write(15,10)
        10     format(/,4X,'ITERATION NO.',5X,'DEL-RHO',7X,'DEL RHO-U',5X,'DEL RHO-
V',5X,'DEL RHO-E',/)

        nstep = istep + 1
        istep = ntime + istep
```

```
        DO itime = nstep, istep

               intime = itime - nstep + 1

!       storing variable

               DO ia = 1, 4
                      DO ip = 1, npoin
                             unkn1(ip,ia) = unkno(ip,ia)
                      ENDDO !ip
               ENDDO !ia

!       storing pressure and temperature

               DO ip = 1, npoin
                      pres1(ip) = pres(ip)
                      temp1(ip) = temp(ip)
               ENDDO !ip
               call critime
               call step1
               call step2
               call step3
               call step4

!       apply boundary conditions

               call bound
               call getpres

!       residual smooting technique

               call rsmoo

!       apply boundary conditions

               call bound
               call getpres

!       show error on monitor

               kkk = mod(itime, iwrite)
               IF(kkk.eq.0.or.itime.eq.istep.or.intime.eq.1)THEN
                      cpoin = 1.0d+00/float(npoin)
                      DO ia = 1, 4
                             ha(ia) = 0.0d+00
                             hb(ia) = 0.0d+00
                             icount(ia) = 1
                      ENDDO !IA
                      DO ip = 1, npoin
                             adel1 = unkno(ip,1) - unkn1(ip,1)
                             adel2 = unkno(ip,2) - unkn1(ip,2)
                             adel3 = unkno(ip,3) - unkn1(ip,3)
                             adel4 = unkno(ip,4) - unkn1(ip,4)
                             cder = dabs(adel1)
                             hb(1) = hb(1) + cder
                             IF(cder >=ha(1)) THEN
                                    icount(1) = ip
                                    ha(1) = cder
                             ENDIF
                             cder = dabs(adel2)
                             hb(2) = hb(2) + cder
                             IF(cder >=ha(2)) THEN
                                    icount(2) = ip
                                    ha(2) = cder
                             ENDIF
                             cder = dabs(adel3)
                             hb(3) = hb(3) + cder
                             IF(cder >=ha(3)) THEN
                                    icount(3) = ip
                                    ha(3) = cder
                             ENDIF
                             cder = dabs(adel4)
                             hb(4) = hb(4) + cder
                             IF(cder >=ha(4)) THEN
                                    icount(4) = ip
                                    ha(4) = cder
                             ENDIF
```

```
                    ENDDO !IP

                    hb(1) = hb(1)*cpoin
                    hb(2) = hb(2)*cpoin
                    hb(3) = hb(3)*cpoin
                    hb(4) = hb(4)*cpoin

!       writing average error into error_av.eav

                    write(13,95)  itime, (hb(ia),ia = 1, 4)

!       writing maximum error into error_mx.emx

                    write(15,95)  itime, (ha(ia),ia = 1, 4)
                    write(15,100) (icount(ia),ia = 1, 4)
 95                 format(i6,2x,4e16.8)
100                 format(8x,4i15)
            ENDIF

!       computing summation square of error for first iteration

            IF(itime == nstep) THEN
                    DO ia = 1, 4
                            sumer(ia) = 0.0d+00
                            DO ip = 1, npoin
                                    diff = unkno(ip,ia) - unkn1(ip,ia)
                                    sumer(ia) = sumer(ia) + diff*diff
                            ENDDO !ip
                            sumer(ia) = dsqrt(sumer(ia))
                    ENDDO !ia
            ENDIF

!       computing summation square of error for each iteration

            DO ia = 1, 4
                    sumsq(ia) = 0.0d+00
                            DO ip = 1, npoin
                                    diff = unkno(ip,ia) - unkn1(ip,ia)
                                    sumsq(ia) = sumsq(ia) + diff*diff
                            ENDDO !ip
                    sumsq(ia) = dsqrt(sumsq(ia))
            ENDDO !ia

!       showing summation square of error for each iteration

            kkk = mod(itime,iwrite)
            IF(kkk.eq.0.or.itime.eq.istep.or.intime.eq.1)THEN
                    write(*,105)itime, (sumsq(ia), ia = 1, 4)
                    105 format(4x,i6,10x,e12.6,3(2x,e12.6))
            ENDIF

! *** CHECK ERROR IN EVERY TIME ITERATION WITH FIRST TIME ITERATION

            ifinal = 0
            DO ia = 1, 4
                    IF(sumsq(ia).lt.sumer(ia)*1.0e-8) ifinal = ifinal + 1
            ENDDO !ia
            IF(ifinal == 4) THEN
                    write(*,110)itime, (sumsq(ia),ia = 1, 4)
                    110     format(I8,4(2X,E12.6))
                    GOTO 2000
            ENDIF

! *** WRITING OUTPUT FILES FOR TRANSIENT PROBLEM

            IF(index == 2)THEN
                    idum = mod(itime,nwrite)
                    IF(idum == 0.or.intime == 1)THEN
                            num   = itime
                            na    = int(num/100000)
                            hthou = char(na+48)
                            num   = num - na*100000
                            nb    = int(num/10000)
                            tthou = char(nb+48)
                            num  = num - nb*10000
                            nc   = int(num/1000)
                            thou = char(nc+48)
```

```
                              num  = num - nc*1000
                              nd   = int(num/100)
                              hun  = char(nd+48)
                              num  = num - nd*100
                              ne   = int(num/10)
                              dec  = char(ne+48)
                              nf   = mod(num,10)
                              unit = char(nf+48)
                              leng = len_trim(name1) - 4

       open(unit=17,file=name1(1:leng)//'_'//hthou//tthou//thou//hun//dec//unit//'.plt
',status='unknown')
                              call outtr
       write(16,*)name1(1:leng),'_',hthou,tthou,thou,hun,dec,unit,'   time elapsed '
,rtime, ' sec '
                       ENDIF
               ENDIF

! *** check time elapsed

               ttemp = 1.0d+06
               DO ip = 1, npoin
                       ttemp = min(ttemp, deltp(ip))
               ENDDO !IP
               timt = timt + ttemp
       ENDDO !itime

2000 continue

End subroutine iteration

Subroutine critime
        use variable
        implicit none
        integer(4)                  :: ik, ikk, ip1, ip2, ip3
        real(8)                     :: uvel, vvel, cmax, vmax, tcri, pecl
        real(8)                     :: dtsml, dtbig

! ilots = -1 , transient accurate option

       IF(ilots.le.-1) THEN
               deltp = dtfix
               delte = 2.0d+00*dtfix
               return
       ENDIF

! ilots = 1 , steady state option

       DO ip = 1, npoin
               uvel = unkno(ip,2)/unkno(ip,1)
               vvel = unkno(ip,3)/unkno(ip,1)
               vmod(ip) = dsqrt( uvel*uvel + vvel*vvel )
       ENDDO !ip

! average properties around each nodes

       DO ip = 1, npoin
               deltp(ip)  = 1.0d+06
               vnorm(ip)  = 0.0d+00
               pnew(ip)   = 0.0d+00
               rhonew(ip) = 0.0d+00
               soundnew(ip) = 0.0d+00
        DO ik = 1, ncmax(ip)
               ikk = matcon(ip,ik)
               vnorm(ip) = vnorm(ip) + vmod(ikk)
               pnew(ip) = pnew(ip) + pres(ikk)
               rhonew(ip) = rhonew(ip) + unkno(ikk,1)
        ENDDO !ik
        vnorm(ip) = vnorm(ip)/ncmax(ip)
        pnew(ip) = pnew(ip)/ncmax(ip)
        rhonew(ip) = rhonew(ip)/ncmax(ip)
        soundnew(ip) = dsqrt(gamma*pnew(ip)/rhonew(ip))
       ENDDO !ip

       DO ie = 1, nelem
               ip1 = intma(ie,1)
               ip2 = intma(ie,2)
```

```
                ip3 = intma(ie,3)
                cmax = max(soundnew(ip1),soundnew(ip2),soundnew(ip3) )
                vmax = max(vnorm(ip1),vnorm(ip2),vnorm(ip3) )
                vmax = vmax + cmax
                tcri = (alen(ip1)/vmax)
                deltp(ip1) = min(tcri,deltp(ip1))
                tcri = (alen(ip2)/vmax)
                deltp(ip2) = min(tcri,deltp(ip2))
                tcri = (alen(ip3)/vmax)
                deltp(ip3) = min(tcri,deltp(ip3))
        ENDDO !ie

! calculating external time step (tp) and internal time step (te)

        DO ip = 1, npoin
                deltp(ip) = csafe*deltp(ip)
        ENDDO !ip
        DO ie = 1, nelem
                ip1 = intma(ie,1)
                ip2 = intma(ie,2)
                ip3 = intma(ie,3)
                delte(ie) = (deltp(ip1)+deltp(ip2)+deltp(ip3))/3.0d+00
        ENDDO !ie

End subroutine critime

Subroutine step1

        use variable

        implicit none

        DO ia = 1, 4
                DO ip = 1, npoin
                        rhs0(ip,ia)  = 0.0d+00
                        rhs1(ip,ia)  = 0.0d+00
                        rhs2(ip,ia)  = 0.0d+00
                ENDDO !ip
        ENDDO !ia
        call advect
        call shockcap
! *** update the solution.

        DO ip = 1, npoin
         unkno(ip,2) = unkno(ip,2) + deltp(ip)*dmmat(ip)*( rhs0(ip,2) + rhs1(ip,2) +
rhs2(ip,2) )
         unkno(ip,3) = unkno(ip,3) + deltp(ip)*dmmat(ip)*( rhs0(ip,3) + rhs1(ip,3) +
rhs2(ip,3) )
        ENDDO !ip

End subroutine step1

Subroutine advect

        use variable

        implicit none

        integer(4)              :: ii, jj, kk
        integer(4)              :: ipb1, ipb2, ieb
        real(8)                 :: b1, b2, b3, c1, c2, c3
        real(8)                 :: u1, u2, u3, v1, v2, v3
        real(8)                 :: fxx, fyx, fxy, fyy
        real(8)                 :: dfxx, dfyx, dfxy, dfyy
        real(8)                 :: anx, any, aleng, rnx, rny, rleng
        real(8)                 :: ub1, ub2, vb1, vb2
        real(8)                 :: fxxb1, fxxb2, fyyb1, fyyb2

! advection over element

        DO ie = 1, nelem
                ii = intma(ie,1)
                jj = intma(ie,2)
                kk = intma(ie,3)
                b1 = geome(ie,1)*geome(ie,7)
                b2 = geome(ie,2)*geome(ie,7)
                b3 = geome(ie,3)*geome(ie,7)
```

```
                c1 = geome(ie,4)*geome(ie,7)
                c2 = geome(ie,5)*geome(ie,7)
                c3 = geome(ie,6)*geome(ie,7)
                u1 = unkno(ii,2)/unkno(ii,1)
                u2 = unkno(jj,2)/unkno(jj,1)
                u3 = unkno(kk,2)/unkno(kk,1)
                v1 = unkno(ii,3)/unkno(ii,1)
                v2 = unkno(jj,3)/unkno(jj,1)
                v3 = unkno(kk,3)/unkno(kk,1)
                dpdx(ie) = geome(ie,1)*pres(ii) + geome(ie,2)*pres(jj) +
geome(ie,3)*pres(kk)   !dp/dx
                dpdy(ie) = geome(ie,4)*pres(ii) + geome(ie,5)*pres(jj) +
geome(ie,6)*pres(kk)   !dp/dy
                fxx = u1*unkno(ii,2) + u2*unkno(jj,2) + u3*unkno(kk,2)
                fyx = v1*unkno(ii,2) + v2*unkno(jj,2) + v3*unkno(kk,2)
                fxy = u1*unkno(ii,3) + u2*unkno(jj,3) + u3*unkno(kk,3)
                fyy = v1*unkno(ii,3) + v2*unkno(jj,3) + v3*unkno(kk,3)

                dfxx = geome(ie,1)*u1*unkno(ii,2) + geome(ie,2)*u2*unkno(jj,2) +
geome(ie,3)*u3*unkno(kk,2) !d(uUx)/dx
                dfyx = geome(ie,4)*v1*unkno(ii,2) + geome(ie,5)*v2*unkno(jj,2) +
geome(ie,6)*v3*unkno(kk,2) !d(vUx)/dy
                dfxy = geome(ie,1)*u1*unkno(ii,3) + geome(ie,2)*u2*unkno(jj,3) +
geome(ie,3)*u3*unkno(kk,3) !d(uUy)/dx
                dfyy = geome(ie,4)*v1*unkno(ii,3) + geome(ie,5)*v2*unkno(jj,3) +
geome(ie,6)*v3*unkno(kk,3) !d(vUy)/dy

                dfx(ie) = dfxx + dfyx                ! d(uUx)/dx + d(vUx)/dy
                dfy(ie) = dfxy + dfyy                ! d(uUy)/dx + d(vUy)/dy

                uav(ie) = ((unkno(ii,2) + unkno(jj,2) +
unkno(kk,2))/3.0d+00)/((unkno(ii,1) + unkno(jj,1) + unkno(kk,1))/3.0d+00)
                vav(ie) = ((unkno(ii,3) + unkno(jj,3) +
unkno(kk,3))/3.0d+00)/((unkno(ii,1) + unkno(jj,1) + unkno(kk,1))/3.0d+00)


                rhs2(ii,2) = rhs2(ii,2) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b1*fxx + c1*fyx)
                               -(0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b1*dfx(ie)
                               -(0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c1*dfx(ie)
                               -(0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b1*(1.0d+00 -
                       theta(2))*dpdx(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c1*(1.0d+00 -
                       theta(2))*dpdx(ie)

                rhs2(jj,2) = rhs2(jj,2) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b2*fxx + c2*fyx)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b2*dfx(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c2*dfx(ie)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b2*(1.0d+00 –
                       theta(2))*dpdx(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c2*(1.0d+00 -
                       theta(2))*dpdx(ie)

                rhs2(kk,2) = rhs2(kk,2) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b3*fxx + c3*fyx)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b3*dfx(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c3*dfx(ie)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b3*(1.0d+00 –
                       theta(2))*dpdx(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c3*(1.0d+00 -
                       theta(2))*dpdx(ie)

                rhs2(ii,3) = rhs2(ii,3) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b1*fxy + c1*fyy)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b1*dfy(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c1*dfy(ie)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b1*(1.0d+00 –
                       theta(2))*dpdy(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c1*(1.0d+00 -
                       theta(2))*dpdy(ie)

                rhs2(jj,3) = rhs2(jj,3) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b2*fxy + c2*fyy)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b2*dfy(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c2*dfy(ie)
                               - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b2*(1.0d+00 –
                       theta(2))*dpdy(ie)
                               - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c2*(1.0d+00 -
                       theta(2))*dpdy(ie)
```

```
            rhs2(kk,3) = rhs2(kk,3) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b3*fxy + c3*fyy)
                       - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b3*dfy(ie)
                       - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c3*dfy(ie)
                       - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b3*(1.0d+00 –
                theta(2))*dpdy(ie)
                       - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c3*(1.0d+00 -
                theta(2))*dpdy(ie)
        ENDDO !ie

! advection over boundary

        DO ib = 1, nboun

            ipb1  = iside(ib,1)
            ipb2  = iside(ib,2)
            ieb   = iside(ib,3)

            rnx       = rside(ib,1)
            rny   = rside(ib,2)
            rleng = rside(ib,3)*(1.0d+00/6.0d+00)

            aleng = rside(ib,3)
            anx   = (1.0d+00/6.0d+00)*aleng*rnx
            any   = (1.0d+00/6.0d+00)*aleng*rny

            ub1   = unkno(ipb1,2)/unkno(ipb1,1)
            ub2   = unkno(ipb2,2)/unkno(ipb2,1)
            vb1   = unkno(ipb1,3)/unkno(ipb1,1)
            vb2   = unkno(ipb2,3)/unkno(ipb2,1)

            fxxb1 = unkno(ipb1,2)*(ub1*rnx + vb1*rny)*rleng
            fxxb2 = unkno(ipb2,2)*(ub2*rnx + vb2*rny)*rleng
            fyyb1 = unkno(ipb1,3)*(ub1*rnx + vb1*rny)*rleng
            fyyb2 = unkno(ipb2,3)*(ub2*rnx + vb2*rny)*rleng


            rhs2(ipb1,2) = rhs2(ipb1,2) - 2.0d+00*fxxb1 - fxxb2
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*dfx(ieb)
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*dfx(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ieb)

            rhs2(ipb2,2) = rhs2(ipb2,2) - fxxb1 - 2.0d+00*fxxb2
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*dfx(ieb)
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*dfx(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ieb)

            rhs2(ipb1,3) = rhs2(ipb1,3) - 2.0d+00*fyyb1 - fyyb2
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*dfy(ieb)
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*dfy(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ieb)

            rhs2(ipb2,3) = rhs2(ipb2,3) - fyyb1 - 2.0d+00*fyyb2
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*dfy(ieb)
                + 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*dfy(ieb)
                + 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ieb)
        ENDDO !ib

End subroutine advect

Subroutine shockcap

        use variable

        implicit none

        integer(4)            :: ii, jj, kk, ipb1, ipb2, ieb

        real(8)               :: b1, b2, b3, c1, c2, c3
        real(8)               :: r1, r2, r3, ux1, ux2, ux3, uy1, uy2, uy3, e1, e2, e3
        real(8)               :: u1, u2, u3, v1, v2, v3, vn1, vn2, vn3, p1, p2, p3
        real(8)               :: p11, p22, p33, pb1, pb2, xps, xpd
        real(8)               :: const
        real(8)               :: drdx, drdy, duxdx, duxdy, duydx, duydy, dedx, dedy
```

```
        real(8)              :: cmax, vmax, velmax, pbar, hbar
        real(8)              :: u11,u12,u13,u14,u21,u22,u23,u24,u31,u32
        real(8)              :: u33,u34,u211,u212,u213,u214,u311,u312,u313,u314
        real(8)              :: u231,u232,u233,u234,dxm1,dxm2,dxm3,eix1,eix2
        real(8)              :: eix3,cf12,cf13,cf23,d11,d12,d13,d14,d21,d22
        real(8)              :: d23,d24,d31,d32,d33,d34

!       Pressure switch method #index 1

        IF(opshock ==1) THEN
                DO ip = 1, npoin
                        pswe(ip)  = 0.0d+00
                        delun(ip) = 0.0d+00
                        number(ip)= 0
                ENDDO !ip
                DO ie = 1, nelem
                        ii = intma(ie,1)
                        jj = intma(ie,2)
                        kk = intma(ie,3)
                        p1 = pres(ii)
                        p2 = pres(jj)
                        p3 = pres(kk)
                        pbar = pres(ii) + pres(jj) + pres(kk)
                        p11 = (3.0d+00*p1 - pbar)
                        p22 = (3.0d+00*p2 - pbar)
                        p33 = (3.0d+00*p3 - pbar)
                        pswe(ii) = pswe(ii) + p11
                        pswe(jj) = pswe(jj) + p22
                        pswe(kk) = pswe(kk) + p33
                        delun(ii) = delun(ii) + dabs(p1-p3) + dabs(p1-p2)
                        delun(jj) = delun(jj) + dabs(p2-p3) + dabs(p1-p2)
                        delun(kk) = delun(kk) + dabs(p1-p3) + dabs(p3-p2)
                        number(ii) = number(ii) + 2
                        number(jj) = number(jj) + 2
                        number(kk) = number(kk) + 2
                ENDDO !ie
                DO ib = 1, nboun
                        ipb1 = iside(ib,1)
                        ipb2 = iside(ib,2)
                        ieb  = iside(ib,3)
                        pb1  = pres(ipb1)
                        pb2  = pres(ipb2)
                        xps  = pb1 + pb2
                        xpd  = pb1 - pb2
                        number(ipb1) = number(ipb1) + 1
                        number(ipb2) = number(ipb2) + 1
                        pswe(ipb1) = pswe(ipb1) + xpd
                        pswe(ipb2) = pswe(ipb2) - xpd
                        delun(ipb1) = delun(ipb1) + dabs(pb1-pb2)
                        delun(ipb2) = delun(ipb2) + dabs(pb1-pb2)
                ENDDO !ib
                DO ip = 1, npoin
                        if(delun(ip) <= 0.1*pres(ip)) delun(ip) = pres(ip)
                        ENDDO !ip
                DO ip = 1, npoin
                        pswe(ip) = shockcon*dabs(pswe(ip))/delun(ip)
                ENDDO !ip
                DO ie = 1, nelem
                        ii = intma(ie,1)
                        jj = intma(ie,2)
                        kk = intma(ie,3)
                        u11 = unkno(ii,1)
                        u12 = unkno(ii,2)
                        u13 = unkno(ii,3)
                        u14 = unkno(ii,4) + pres(ii)
                        u21 = unkno(jj,1)
                        u22 = unkno(jj,2)
                        u23 = unkno(jj,3)
                        u24 = unkno(jj,4) + pres(jj)
                        u31 = unkno(kk,1)
                        u32 = unkno(kk,2)
                        u33 = unkno(kk,3)
                        u34 = unkno(kk,4) + pres(kk)
                        u211 = (u21 - u11)
                        u212 = (u22 - u12)
                        u213 = (u23 - u13)
                        u214 = (u24 - u14)
```

```
                u311 = (u31 - u11)
                u312 = (u32 - u12)
                u313 = (u33 - u13)
                u314 = (u34 - u14)
                u231 = (u21 - u31)
                u232 = (u22 - u32)
                u233 = (u23 - u33)
                u234 = (u24 - u34)
                dxm1 = (1.0d+00/24.0d+00)*csafe*geome(ie,7)/delte(ie)
                dxm2 = (1.0d+00/24.0d+00)*csafe*geome(ie,7)/delte(ie)
                dxm3 = (1.0d+00/24.0d+00)*csafe*geome(ie,7)/delte(ie)
                eix1 =  min(dxm1,dxm2)
                eix2 =  min(dxm1,dxm3)
                eix3 =  min(dxm3,dxm2)
                cf12 =  eix1*max(pswe(ii),pswe(jj))
                cf13 =  eix2*max(pswe(ii),pswe(kk))
                cf23 =  eix3*max(pswe(kk),pswe(jj))
                u211 =  cf12*u211
                u212 =  cf12*u212
                u213 =  cf12*u213
                u214 =  cf12*u214
                u311 =  cf13*u311
                u312 =  cf13*u312
                u313 =  cf13*u313
                u314 =  cf13*u314
                u231 =  cf23*u231
                u232 =  cf23*u232
                u233 =  cf23*u233
                u234 =  cf23*u234
                d11  =  (u211+u311)
                d12  =  (u212+u312)
                d13  =  (u213+u313)
                d14  =  (u214+u314)
                d21  = -(u231+u211)
                d22  = -(u232+u212)
                d23  = -(u233+u213)
                d24  = -(u234+u214)
                d31  =  (u231-u311)
                d32  =  (u232-u312)
                d33  =  (u233-u313)
                d34  =  (u234-u314)
                rhs1(ii,1) = rhs1(ii,1) + d11
                rhs1(ii,2) = rhs1(ii,2) + d12
                rhs1(ii,3) = rhs1(ii,3) + d13
                rhs1(ii,4) = rhs1(ii,4) + d14
                rhs1(jj,1) = rhs1(jj,1) + d21
                rhs1(jj,2) = rhs1(jj,2) + d22
                rhs1(jj,3) = rhs1(jj,3) + d23
                rhs1(jj,4) = rhs1(jj,4) + d24
                rhs1(kk,1) = rhs1(kk,1) + d31
                rhs1(kk,2) = rhs1(kk,2) + d32
                rhs1(kk,3) = rhs1(kk,3) + d33
                rhs1(kk,4) = rhs1(kk,4) + d34
        enddo !ie
        ENDIF

!       Second gradient of pressure method #index 3

        IF(opshock == 3) THEN
        do ip = 1, npoin
                dpdxp(ip) = 0.0
                dpdyp(ip) = 0.0
        enddo !ip
        do ie = 1, nelem
                ii = intma(ie,1)
                jj = intma(ie,2)
                kk = intma(ie,3)
                dpdxp(ii) = dpdxp(ii) + (1.0d+00/6.0d+00)*geome(ie,7)*dpdx(ie)
                dpdxp(jj) = dpdxp(jj) + (1.0d+00/6.0d+00)*geome(ie,7)*dpdx(ie)
                dpdxp(kk) = dpdxp(kk) + (1.0d+00/6.0d+00)*geome(ie,7)*dpdx(ie)
                dpdyp(ii) = dpdyp(ii) + (1.0d+00/6.0d+00)*geome(ie,7)*dpdy(ie)
                dpdyp(jj) = dpdyp(jj) + (1.0d+00/6.0d+00)*geome(ie,7)*dpdy(ie)
                dpdyp(kk) = dpdyp(kk) + (1.0d+00/6.0d+00)*geome(ie,7)*dpdy(ie)
        enddo !ie
        do ip = 1, npoin
                dpdxp(ip) = dmmat(ip)*dpdxp(ip)
```

```
                dpdyp(ip) = dmmat(ip)*dpdyp(ip)
        enddo !ip
        do ie = 1, nelem
                ii = intma(ie,1)
                jj = intma(ie,2)
                kk = intma(ie,3)
                dspdx(ie) = geome(ie,1)*dpdxp(ii) + geome(ie,2)*dpdxp(jj) +
geome(ie,3)*dpdxp(kk)
                dspdy(ie) = geome(ie,4)*dpdyp(ii) + geome(ie,5)*dpdyp(jj) +
geome(ie,6)*dpdyp(kk)
                dspdn(ie) = dsqrt(dspdx(ie)**2 + dspdy(ie)**2)
        enddo !ie
        do ie = 1, nelem
                ii = intma(ie,1)
                jj = intma(ie,2)
                kk = intma(ie,3)
                b1 = geome(ie,1)*geome(ie,7)
                b2 = geome(ie,2)*geome(ie,7)
                b3 = geome(ie,3)*geome(ie,7)
                c1 = geome(ie,4)*geome(ie,7)
                c2 = geome(ie,5)*geome(ie,7)
                c3 = geome(ie,6)*geome(ie,7)
                r1 = unkno(ii,1)
                r2 = unkno(jj,1)
                r3 = unkno(kk,1)
                ux1 = unkno(ii,2)
                ux2 = unkno(jj,2)
                ux3 = unkno(kk,2)
                uy1 = unkno(ii,3)
                uy2 = unkno(jj,3)
                uy3 = unkno(kk,3)
                e1 = unkno(ii,4) + pres(ii)
                e2 = unkno(jj,4) + pres(jj)
                e3 = unkno(kk,4) + pres(kk)
                u1 = unkno(ii,2)/unkno(ii,1)
                u2 = unkno(jj,2)/unkno(jj,1)
                u3 = unkno(kk,2)/unkno(kk,1)
                v1 = unkno(ii,3)/unkno(ii,1)
                v2 = unkno(jj,3)/unkno(jj,1)
                v3 = unkno(kk,3)/unkno(kk,1)
                vn1 = dsqrt(u1*u1 + v1*v1)
                vn2 = dsqrt(u2*u2 + v2*v2)
                vn3 = dsqrt(u3*u3 + v3*v3)
                cmax = dmax1(sound(ii), sound(jj), sound(kk))
                vmax = dmax1(vn1, vn2, vn3)
                velmax = vmax + cmax
                pbar = (pres(ii) + pres(jj) + pres(kk))/3.0d+00
                hbar = (alen(ii) + alen(jj) + alen(kk))/3.0d+00
                const = shockcon*(hbar**3)*velmax*dspdn(ie)/pbar
                drdx = geome(ie,1)*r1 + geome(ie,2)*r2 + geome(ie,3)*r3
                drdy = geome(ie,4)*r1 + geome(ie,5)*r2 + geome(ie,6)*r3
                duxdx = geome(ie,1)*ux1 + geome(ie,2)*ux2 + geome(ie,3)*ux3
                duxdy = geome(ie,4)*ux1 + geome(ie,5)*ux2 + geome(ie,6)*ux3
                duydx = geome(ie,1)*uy1 + geome(ie,2)*uy2 + geome(ie,3)*uy3
                duydy = geome(ie,4)*uy1 + geome(ie,5)*uy2 + geome(ie,6)*uy3
                dedx = geome(ie,1)*e1 + geome(ie,2)*e2 + geome(ie,3)*e3
                dedy = geome(ie,4)*e1 + geome(ie,5)*e2 + geome(ie,6)*e3
                rhs1(ii,1) = rhs1(ii,1) - const*(b1*drdx + c1*drdy)
                rhs1(jj,1) = rhs1(jj,1) - const*(b2*drdx + c2*drdy)
                rhs1(kk,1) = rhs1(kk,1) - const*(b3*drdx + c3*drdy)
                rhs1(ii,2) = rhs1(ii,2) - const*(b1*duxdx + c1*duxdy)
                rhs1(jj,2) = rhs1(jj,2) - const*(b2*duxdx + c2*duxdy)
                rhs1(kk,2) = rhs1(kk,2) - const*(b3*duxdx + c3*duxdy)
                rhs1(ii,3) = rhs1(ii,3) - const*(b1*duydx + c1*duydy)
                rhs1(jj,3) = rhs1(jj,3) - const*(b2*duydx + c2*duydy)
                rhs1(kk,3) = rhs1(kk,3) - const*(b3*duydx + c3*duydy)
                rhs1(ii,4) = rhs1(ii,4) - const*(b1*dedx + c1*dedy)
                rhs1(jj,4) = rhs1(jj,4) - const*(b2*dedx + c2*dedy)
                rhs1(kk,4) = rhs1(kk,4) - const*(b3*dedx + c3*dedy)
         ENDDO !ie

    ENDIF

End subroutine shockcap
```

```
Subroutine step2

        use variable

        implicit none

        integer(4)              :: ii, jj, kk
        integer(4)              :: ipb1, ipb2, ieb
        real(8)                 :: b1, b2, b3, c1, c2, c3
        real(8)                 :: uxx, uyy
        real(8)                 :: anx, any, aleng, rnx, rny, rleng
        real(8)                 :: unknob1, unknob2, unkn1b1, unkn1b2, ub1, ub2

!       Continuity equation over element

        DO ia = 1, 4
                DO ip = 1, npoin
                        rhs2(ip,ia)  = 0.0d+00
                ENDDO !ip
        ENDDO !ia
        DO ie = 1, nelem
                ii = intma(ie,1)
                jj = intma(ie,2)
                kk = intma(ie,3)
                b1 = geome(ie,1)*geome(ie,7)
                b2 = geome(ie,2)*geome(ie,7)
                b3 = geome(ie,3)*geome(ie,7)
                c1 = geome(ie,4)*geome(ie,7)
                c2 = geome(ie,5)*geome(ie,7)
                c3 = geome(ie,6)*geome(ie,7)
                uxx = theta(1)*(unkno(ii,2) + unkno(jj,2) + unkno(kk,2))
+ (1.0d+00 - theta(1))*(unkn1(ii,2) + unkn1(jj,2) + unkn1(kk,2))
                uyy = theta(1)*(unkno(ii,3) + unkno(jj,3) + unkno(kk,3))
+ (1.0d+00 - theta(1))*(unkn1(ii,3) + unkn1(jj,3) + unkn1(kk,3))
                rhs2(ii,1) = rhs2(ii,1) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b1*uxx + c1*uyy)
- 0.5d+00*delte(ie)*theta(1)*b1*dpdx(ie) - 0.5d+00*delte(ie)*theta(1)*c1*dpdy(ie)
                rhs2(jj,1) = rhs2(jj,1) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b2*uxx + c2*uyy)
- 0.5d+00*delte(ie)*theta(1)*b2*dpdx(ie) - 0.5d+00*delte(ie)*theta(1)*c2*dpdy(ie)
                rhs2(kk,1) = rhs2(kk,1) + (1.0d+00/6.0d+00)*(b3*uxx + c3*uyy)
- 0.5d+00*delte(ie)*theta(1)*b3*dpdx(ie) - 0.5d+00*delte(ie)*theta(1)*c3*dpdy(ie)
        ENDDO !ie

!       Continuity equation over boundary

        DO ib = 1, nboun
                ipb1  = iside(ib,1)
                ipb2  = iside(ib,2)
                ieb   = iside(ib,3)
                rnx       = rside(ib,1)
                rny   = rside(ib,2)
                rleng = rside(ib,3)*(1.0d+00/6.0d+00)
                aleng = rside(ib,3)
                anx   = (1.0d+00/6.0d+00)*aleng*rnx
                any   = (1.0d+00/6.0d+00)*aleng*rny
                unknob1 = theta(1)*(unkno(ipb1,2)*rnx + unkno(ipb1,3)*rny)
                unknob2 = theta(1)*(unkno(ipb2,2)*rnx + unkno(ipb2,3)*rny)
                unkn1b1 = (1.0d+00 - theta(1))*(unkn1(ipb1,2)*rnx + unkn1(ipb1,3)*rny)
                unkn1b2 = (1.0d+00 - theta(1))*(unkn1(ipb2,2)*rnx + unkn1(ipb2,3)*rny)
                ub1 = 2.0d+00*unkn1b1*rleng
                ub2 = 2.0d+00*unkn1b2*rleng
                rhs2(ipb1,1) = rhs2(ipb1,1) - 2.0d+00*ub1 - ub2
                rhs2(ipb2,1) = rhs2(ipb2,1) - ub1 - 2.0d+00*ub2
        ENDDO !ib

! *** update the solution.

        DO ip = 1, npoin
               unkno(ip,1) = unkno(ip,1) + deltp(ip)*dmmat(ip)*(rhs1(ip,1) +rhs2(ip,1))
         ENDDO !ip

End subroutine step2

Subroutine step3

        use variable

        implicit none
```

```
        integer(4)          :: ii, jj, kk
        integer(4)          :: ipb1, ipb2, ieb
        real(8)             :: b1, b2, b3, c1, c2, c3
        real(8)             :: pelem
        real(8)             :: anx, any, aleng
        real(8)             :: pbx1, pbx2, pby1, pby2

        DO ip = 1, npoin
               rhs2(ip,2)  = 0.0d+00
               rhs2(ip,3)  = 0.0d+00
        ENDDO !ip

!       Correction momentum equations over element

        DO ie = 1, nelem
               ii = intma(ie,1)
               jj = intma(ie,2)
               kk = intma(ie,3)
               b1 = geome(ie,1)*geome(ie,7)
               b2 = geome(ie,2)*geome(ie,7)
               b3 = geome(ie,3)*geome(ie,7)
               c1 = geome(ie,4)*geome(ie,7)
               c2 = geome(ie,5)*geome(ie,7)
               c3 = geome(ie,6)*geome(ie,7)
               pelem = pres(ii) + pres(jj) + pres(kk)
               rhs2(ii,2) = rhs2(ii,2) + (1.0d+00/6.0d+00)*b1*pelem
                      - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b1*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ie)
                      - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c1*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ie)
               rhs2(jj,2) = rhs2(jj,2) + (1.0d+00/6.0d+00)*b2*pelem
                      - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b2*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ie)
                      - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c2*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ie)
               rhs2(kk,2) = rhs2(kk,2) + (1.0d+00/6.0d+00)*b3*pelem
                      - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b3*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ie)
                      - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c3*(1.0d+00 - theta(2))*dpdx(ie)

               rhs2(ii,3) = rhs2(ii,3) + (1.0d+00/6.0d+00)*c1*pelem
                      - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b1*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ie)
                      - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c1*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ie)

               rhs2(jj,3) = rhs2(jj,3) + (1.0d+00/6.0d+00)*c2*pelem
                      - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b2*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ie)
                      - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c2*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ie)

               rhs2(kk,3) = rhs2(kk,3) + (1.0d+00/6.0d+00)*c3*pelem
                      - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b3*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ie)
                      - (0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c3*(1.0d+00 - theta(2))*dpdy(ie)
        ENDDO !ie

!       Correction momentum equations over boundary

        DO ib = 1, nboun
               ipb1  = iside(ib,1)
               ipb2  = iside(ib,2)
               ieb   = iside(ib,3)
               anx   = rside(ib,1)
               any   = rside(ib,2)
               aleng = rside(ib,3)
               pbx1 = (1.0d+00/6.0d+00)*pres(ipb1)*aleng*anx
               pbx2 = (1.0d+00/6.0d+00)*pres(ipb2)*aleng*anx
               pby1 = (1.0d+00/6.0d+00)*pres(ipb1)*aleng*any
               pby2 = (1.0d+00/6.0d+00)*pres(ipb2)*aleng*any
               rhs2(ipb1,2) = rhs2(ipb1,2) - 2.0d+00*pbx1 - pbx2
+ 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00-theta(2))*dpdx(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng
+ 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00-theta(2))*dpdx(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng
               rhs2(ipb2,2) = rhs2(ipb2,2) - pbx1 - 2.0d+00*pbx2&
+ 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00-theta(2))*dpdx(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng
+ 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00-theta(2))*dpdx(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng
               rhs2(ipb1,3) = rhs2(ipb1,3) - 2.0d+00*pby1 - pby2
+ 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00-theta(2))*dpdy(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng
+ 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00-theta(2))*dpdy(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng


               rhs2(ipb2,3) = rhs2(ipb2,3) - pby1 - 2.0d+00*pby2&
+ 1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*(1.0d+00-theta(2))*dpdy(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng
+ 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*(1.0d+00-theta(2))*dpdy(ieb)*(1.0d+00/6.0d+00)*aleng
        ENDDO !ib
```

```
! *** update the solution.

        DO ip = 1, npoin

                unkno(ip,2) = unkno(ip,2) + deltp(ip)*dmmat(ip)*(rhs2(ip,2))
                unkno(ip,3) = unkno(ip,3) + deltp(ip)*dmmat(ip)*(rhs2(ip,3))
        ENDDO !ip

End subroutine step3

Subroutine step4

        use variable

        implicit none

        DO ip = 1, npoin
                rhs0(ip,4)  = 0.0d+00
                rhs2(ip,4)  = 0.0d+00
        ENDDO !ip

        call eneradv

! *** update the solution.

        DO ip = 1, npoin
         unkno(ip,4) = unkno(ip,4) + deltp(ip)*dmmat(ip)*(rhs0(ip,4) + rhs1(ip,4) +
rhs2(ip,4))
        ENDDO !ip

End subroutine step4

Subroutine eneradv

        use variable

        implicit none

        integer(4)          :: ii, jj, kk
        integer(4)          :: ipb1, ipb2, ieb
        real(8)             :: b1, b2, b3, c1, c2, c3
        real(8)             :: u1, u2, u3, v1, v2, v3
        real(8)             :: h1, h2, h3
        real(8)             :: fex, fey, dfex, dfey
        real(8)             :: anx, any, aleng, rnx, rny, rleng
        real(8)             :: ub1, ub2, vb1, vb2
        real(8)             :: hpb1, hpb2
        real(8)             :: feb1, feb2

!       Energy over element

        DO ie = 1, nelem

                ii = intma(ie,1)
                jj = intma(ie,2)
                kk = intma(ie,3)
                b1 = geome(ie,1)*geome(ie,7)
                b2 = geome(ie,2)*geome(ie,7)
                b3 = geome(ie,3)*geome(ie,7)
                c1 = geome(ie,4)*geome(ie,7)
                c2 = geome(ie,5)*geome(ie,7)
                c3 = geome(ie,6)*geome(ie,7)
                u1 = unkn1(ii,2)/unkn1(ii,1)
                u2 = unkn1(jj,2)/unkn1(jj,1)
                u3 = unkn1(kk,2)/unkn1(kk,1)
                v1 = unkn1(ii,3)/unkn1(ii,1)
                v2 = unkn1(jj,3)/unkn1(jj,1)
                v3 = unkn1(kk,3)/unkn1(kk,1)
                h1 = unkno(ii,4) + pres(ii)
                h2 = unkno(jj,4) + pres(jj)
                h3 = unkno(kk,4) + pres(kk)

                fex = u1*h1 + u2*h2 + u3*h3
                fey = v1*h1 + v2*h2 + v3*h3
```

```
                dfex = geome(ie,1)*u1*h1 + geome(ie,2)*u2*h2 + geome(ie,3)*u3*h3
                dfey = geome(ie,4)*v1*h1 + geome(ie,5)*v2*h2 + geome(ie,6)*v3*h3
                dfe(ie) = dfex + dfey
                rhs2(ii,4) =  rhs2(ii,4) + (1.0d+00/6.0d+00)*b1*fex +
(1.0d+00/6.0d+00)*c1*fey - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b1*dfe(ie)  -
(0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c1*dfe(ie)
                rhs2(jj,4) =   rhs2(jj,4) + (1.0d+00/6.0d+00)*b2*fex +
(1.0d+00/6.0d+00)*c2*fey - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b2*dfe(ie)  -
(0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c2*dfe(ie)
                rhs2(kk,4) =   rhs2(kk,4) + (1.0d+00/6.0d+00)*b3*fex +
(1.0d+00/6.0d+00)*c3*fey - (0.25d+00)*uav(ie)*delte(ie)*b3*dfe(ie)  -
(0.25d+00)*vav(ie)*delte(ie)*c3*dfe(ie)
        ENDDO !ie

! Energy over boundary

        DO ib = 1, nboun

                ipb1  = iside(ib,1)
                ipb2  = iside(ib,2)
                ieb   = iside(ib,3)
                rnx       = rside(ib,1)
                rny   = rside(ib,2)
                rleng = rside(ib,3)*(1.0d+00/6.0d+00)
                aleng = rside(ib,3)
                anx   = (1.0d+00/6.0d+00)*aleng*rnx
                any   = (1.0d+00/6.0d+00)*aleng*rny
                ub1   = unkn1(ipb1,2)/unkn1(ipb1,1)
                ub2   = unkn1(ipb2,2)/unkn1(ipb2,1)
                vb1   = unkn1(ipb1,3)/unkn1(ipb1,1)
                vb2   = unkn1(ipb2,3)/unkn1(ipb2,1)
                hpb1  = unkno(ipb1,4) + pres(ipb1)
                hpb2  = unkno(ipb2,4) + pres(ipb2)
                feb1  = (ub1*hpb1*rnx + vb1*hpb1*rny)*rleng
                feb2  = (ub2*hpb2*rnx + vb2*hpb2*rny)*rleng
                rhs2(ipb1,4) = rhs2(ipb1,4) - 2.0d+00*feb1 - feb2    +
1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*dfe(ieb)+ 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*dfe(ieb)
                rhs2(ipb2,4) = rhs2(ipb2,4) - feb1 - 2.0d+00*feb2    +
1.5d+00*uav(ieb)*delte(ieb)*anx*dfe(ieb)+ 1.5d+00*vav(ieb)*delte(ieb)*any*dfe(ieb)
        ENDDO !ib

End subroutine eneradv

Subroutine bound

        use variable

        implicit none

        integer(4)            :: in, rho, u, v, toe, ine

        real(8)               :: anx, any, fn, rn, us

! supersonic inflow # 1
        DO ib = 1, nboun
                DO in = 1, 2
                        ip = iside(ib,in)
                        IF(iside(ib,4) == 1) THEN
                                unkno(ip,1) = unkn1(ip,1)
                                unkno(ip,2) = unkn1(ip,2)
                                unkno(ip,3) = unkn1(ip,3)
                                unkno(ip,4) = unkn1(ip,4)
                        ENDIF
                ENDDO !IN
        ENDDO !IS
! symetry # 4
        DO ib = 1, nboun
                IF(iside(ib,4) == 4) THEN
                        anx = rside(ib,1)
                        any = rside(ib,2)
                        DO in = 1, 2
                                ip = iside(ib,in)
                                us = -unkno(ip,2)*any + unkno(ip,3)*anx
                                unkno(ip,2) = -us*any
                                unkno(ip,3) =  us*anx
                        ENDDO !in
                ENDIF
```

```
        ENDDO !ib

! inviscid wall # 2

                DO iw = 1, nwall
                        ip = iwpoin(iw,1)
                        anx = wnor(iw,1)
                        any = wnor(iw,2)
                        fn = unkn1(ip,2)*anx + unkn1(ip,3)*any
                        rn = unkno(ip,2)*anx + unkno(ip,3)*any
                        rn = rn - fn
                        fn = 0.1d+00*fn
                        unkno(ip,2) = unkno(ip,2) - (rn+fn)*anx
                        unkno(ip,3) = unkno(ip,3) - (rn+fn)*any
                ENDDO !iw

End subroutine bound

Subroutine getpres

        use variable

        implicit none

        real(8)               :: rho, uvel, vvel, te, temp2, aux, aux0

        DO ip = 1, npoin
                pres(ip) = gamma1*( unkno(ip,4) - 0.5d+00*(unkno(ip,2)**2 +
unkno(ip,3)**2 )/unkno(ip,1))
                temp(ip) = gamma*(unkno(ip,4) - 0.5d+00*(unkno(ip,2)**2 +
unkno(ip,3)**2 )/unkno(ip,1) )/unkno(ip,1)

        ENDDO !IP

End subroutine getpres

Subroutine outtr

        use variable

        implicit none

        real(8)               :: rho, u, v, toe, ine, p, absov, asound, temper, ama

        write(*,5) itime
    5   format(/,'writing output file for iteration number :', i6)

        rtime = float(itime)*dtfix

        write(*,6)rtime
    6   format(/,'time  elasped ',f18.10,'  SEC',/)

!       HEADER FILE TECPLOT
        write (17,10)
    10 format('VARIABLES = "X-COOR","Y-
COOR","NODE","RHO","U","V","T_E","P","I_E","MACH","ABSV","TEMP"')
        write (17,15) npoin, nelem
    15 format('ZONE N=',I6,',E=',I6,',F=FEPOINT,ET=TRIANGLE')

!       WRITE OUT FILE FOR TIME ITERATION
         DO  ip = 1, npoin
                rho = unkno(ip,1)
                u   = unkno(ip,2)/rho
                v   = unkno(ip,3)/rho
                toe  = unkno(ip,4)/rho
                p   = pres(ip)
                asound = dsqrt(gamma*p/rho)
                ine  = p/(rho*gamma1)
                absov = dsqrt(u**2 + v**2)
                ama = absov/asound
                temper = ine/cv
!       TECPLOT
                write(17,30)(coord(ip,j), j = 1, 2), ip, rho, u, v, toe, p, ine, ama,
absov, temper
                30 format(2e16.6,I6,9e16.6)
        enddo !ip
```

```
        DO ie = 1, nelem
               write(17,40) (intma(ie,j), j = 1, 3)
               40 format(3i7)
        ENDDO !IE

        END

! TRANSFORM CONSERVATION VARIABLES INTO PRIMATIVE VARIABLES

Subroutine btransform

        use variable

        implicit none

        DO ip = 1, npoin
               DO ia = 2,4
                      unkno(ip,ia) = unkno(ip,ia)/unkno(ip,1)
               ENDDO !ia
        ENDDO !ip

END subroutine btransform

Subroutine output

        use variable

        implicit none

        real(8)              :: hmin
        real(8)              :: rho, u, v, toe, ine, p, absov, asound, temper, ama

        hmin = 0.0d+00
        write(12,1)npoin
    1   format('  NODAL VALUES SOLUTIONS [',I6,']:')
        write(12,2)
    2   format(/,'  NODE     RHO      U       V       E        P         H')
        DO ip = 1,npoin
               write(12,3)ip, unkno(ip,1), unkno(ip,2), unkno(ip,3), unkno(ip,4),
pres(ip), hmin
    3          format(x,i6,7x,6(5x,e16.6))
        ENDDO !IP

!       writing output file for open by tecplot9

    300 write(*,305)
    305 format(/,'Please enter the output file name for plot by tecplot :',/)
        read(*, '(A)', err = 300) name2
        open(unit=17, file=name2, status='unknown', action='write', err = 300)
        write(17,310)
    310 format('VARIABLES = "X-CO","Y-
CO","NODE","RHO","U","V","T_E","P","I_E","MACH","ABSV","TEMP"')
        write(17,315) npoin, nelem
    315 format('ZONE N=',I6,',E=',I6,',F=FEPOINT,ET=TRIANGLE')
        DO ip = 1, npoin
               rho = unkno(ip,1)
               u   = unkno(ip,2)
               v   = unkno(ip,3)
               toe = unkno(ip,4)
               p   = pres(ip)
               asound = dsqrt(gamma*p/rho)
               ine  = p/(rho*gamma1)
               absov = dsqrt(u**2 + v**2)
               ama = absov/asound
               write(17,320) (coord(ip,j),j=1,2), ip, (unkno(ip,k),k=1,4), p, ine,
ama, absov, temper
        320    format(2e16.8,i6,9e16.6)
        ENDDO !ip

        DO ie = 1, nelem

               write(17,325) (intma(ie,j),j=1,3)
        325 format(3i7)

        ENDDO !ie

End subroutine output
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายปริญญา บุญมาเลิศ เกิดเมื่อวันที่ 15 เดือนสิงหาคม พุทธศักราช 2522 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เมื่อปีการศึกษา 2543 และสำเร็จการศึกษาระดับวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2546 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2547