

การพัฒนาเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุดสำหรับวิเคราะห์ขอบเขตพลาสติก



นายวุฒินันต์ ประทุม

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

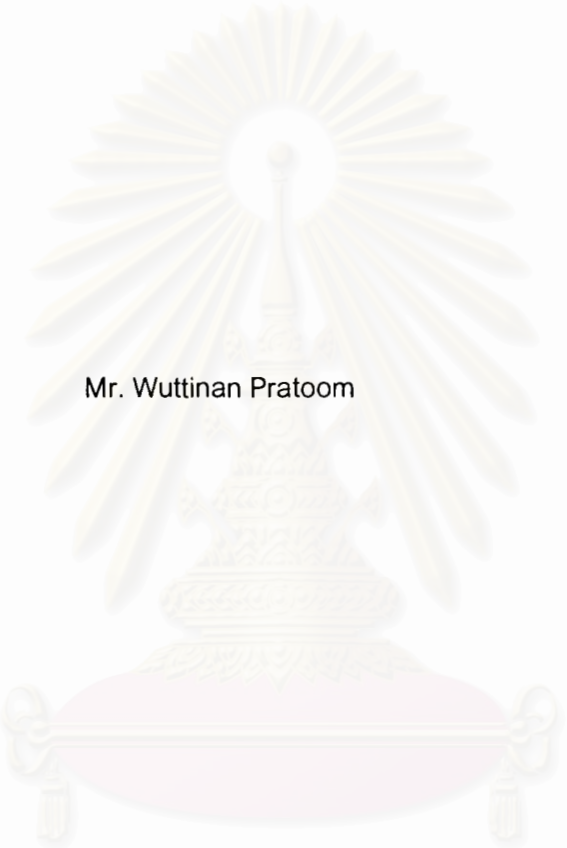
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1740-3

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

DEVELOPMENT OF OPTIMIZATION TECHNIQUE FOR PLASTIC LIMIT ANALYSIS



Mr. Wuttinan Pratoom

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-53-1740-3

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การพัฒนาเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุดสำหรับการวิเคราะห์ขอบเขตพลาสติก

โดย

นายวุฒินันต์ ประทุม

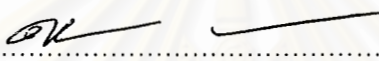
สาขาวิชา

วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษา

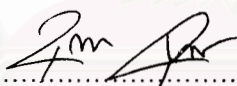
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย อุกฤษฏ์ชน

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้  
เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบัณฑิต

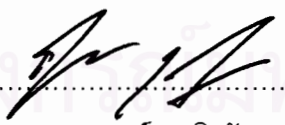
  
..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

  
..... ประธานกรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.วันชัย เทพรักษ์)

  
..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย อุกฤษฏ์ชน)

  
..... กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)

  
..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฐิรวัตร บุญญะฐิติ)

วุฒินันต์ ประทุม : การพัฒนาเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุดสำหรับการวิเคราะห์ขอบเขตพลาสติก.  
(DEVELOPMENT OF OPTIMIZATION TECHNIQUE FOR PLASTIC LIMIT ANALYSIS)  
อ. ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.บุญชัย อุกฤษฏาชน 130 หน้า. ISBN 974-53-1740-3.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง หลักการนี้มีพื้นฐานมาจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกชิ้นส่วนและทฤษฎีขอบเขตพลาสติก รูปแบบของระบบสมการที่ได้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นตรง ตัวแปรไม่ทราบค่าของระบบคือค่าหน่วยแรงภายในมวลดิน สมการข้อจำกัดของระบบประกอบด้วย สมดุลของหน่วยแรงภายในชิ้นส่วน สมดุลของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วน และสมดุลของหน่วยแรงที่ขอบเขตมวลดิน อสมการข้อจำกัดของระบบพิจารณาจากฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติของมวลดิน ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ฟังก์ชันการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของระบบสามารถพิจารณาได้ 2 แบบคือ การวิเคราะห์หาแรงกระทำภายนอกและการวิเคราะห์หาหน่วยน้ำหนักของมวลดิน กระบวนการวิเคราะห์หาผลเฉลยใช้หลักการของคุน-ตัคเกอร์ ออบติโมลิตี คอนดิชัน และวิธีการของนิวตันเป็นพื้นฐาน

ระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นได้นำมาประยุกต์ใช้วิเคราะห์และทดสอบปัญหา 3 แบบคือ ปัญหาความสามารถในการรับแรงแบกทานของฐานรากต่อเนื่อง ปัญหาเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้ง และปัญหาเสถียรภาพของอุโมงค์ในชั้นดินเหนียว สำหรับปัญหาฐานรากต่อเนื่องผลเฉลยที่ระบบการคำนวณวิเคราะห์ได้มีค่าคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำตรง 3.9% สำหรับดินที่ไม่มีค่ามุมเสียดทานภายในมวลดิน และคลาดเคลื่อน 8.3% สำหรับดินที่มีค่ามุมเสียดทานภายในมวลดิน สำหรับปัญหาอื่นๆ ผลการวิเคราะห์ที่ได้มีความสอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลการวิเคราะห์ที่ผ่านมาในอดีต นอกจากนี้ยังได้ทดสอบระบบการคำนวณกับปัญหาตัวอย่างอื่นๆ ได้แก่ ปัญหาฐานรากต่อเนื่องที่วางบนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก ปัญหาเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง ปัญหาเสถียรภาพของอุโมงค์ในชั้นดินเหนียวที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก โดยผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยของค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบนที่ได้จากงานวิจัยที่ผ่านมาแล้ว และในบางกรณีผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบที่พัฒนาขึ้นให้ค่าขอบเขตล่างที่ดีกว่าผลการวิเคราะห์ในอดีต

ภาควิชา.....วิศวกรรมโยธา.....ลายมือชื่อนิสิต..... วุฒินันต์ ประทุม  
สาขาวิชา.....วิศวกรรมโยธา.....ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....  
ปีการศึกษา 2547

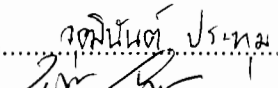

# # 4470552021 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: PLASTIC LIMIT ANALYSIS / OPTIMIZATION

WUTTINAN PRATOOM : DEVELOPMENT OF OPTIMIZATION TECHNIQUE FOR PLASTIC LIMIT ANALYSIS. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. BOONCHAI UKRITCHON, 130 pp. ISBN 974-53-1740-3.

The objective of this thesis is to develop optimization technique for plastic limit analysis, based on lower bound plastic limit analysis. The equation system of stability problem is formed in the optimization problem which is the non-linear function of unknown stress variables. The equality constraints of this problem consist of: 1.) equilibrium in element; 2.) equilibrium on discontinuity plane; and 3.) equilibrium on boundary condition. The inequality constraints of the system are obtained from the failure criterion of the Mohr-Coulomb function. The objective function of the system is to maximize the magnitude of surface traction or the magnitude of soil unit weight. The final formulation is the non-linear programming problem, where the algorithm used to solve this system is based on the Kuhn-Tucker optimality condition and the Newton's method.

The proposed numerical lower bound limit analysis is applied to analyze and to verify three undrained problems in clay, namely bearing capacity of strip footing, stability of vertical cut, and stability of shallow tunnel. For the case of strip footing, whose exact solutions are well-known, the result shows the error of 3.9% for cohesive soil and error of 8.3% for cohesive-frictional soil. For the other problems, the numerical results are in excellent agreement with those of existing numerical solutions. In addition, the proposed program is then applied in predictions of collapse load for shallow footing on non-homogenous clay layer whose undrained shear strength increases with depth, the stability of braced excavation, and the stability of shallow tunnel in non-homogenous clay layer. Those results correspond with those of other solutions and in some cases the results obtained are more accurate.

Department.....Civil..Engineering.....Student's signature.....  
 Field of study.....Civil..Engineering.....Advisor's signature.....  
 Academic year....2004.....

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์สำเร็จลุล่วงลงได้ต้องขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย อุกฤษฏาชน อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาสละเวลาเพื่อให้คำแนะนำ ตรวจสอบ และแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ พร้อมทั้งยังช่วยเหลือในการให้ข้อมูลอันเป็นประโยชน์ในการจัดทำวิทยานิพนธ์

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฐิรวัตถ์ บุญญะฐิติ ที่ให้คำแนะนำในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นระหว่างการพัฒนาระบบการคำนวณ

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วันชัย เทพวิเศษ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และรองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาสละเวลาในการให้คำแนะนำ รวมทั้งข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

และขอแสดงความขอบคุณ ผู้ที่ไม่ได้เอ่ยนามทุกท่านที่ได้ให้คำแนะนำ และให้ความช่วยเหลือในการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สุดท้ายนี้ผู้เขียนขอขอบพระคุณ บิดา-มารดา และครู อาจารย์ ทุกท่านที่ได้ให้การดูแลอบรม สั่งสอน ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ต่างๆ ให้กับผู้เขียนตลอดมา

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญภาพ.....	ฎ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา.....	3
1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
1.4 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	10
1.5 ขอบเขตของงานวิจัย.....	10
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	11
1.7 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย.....	11
บทที่ 2 แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย.....	15
2.1 หลักการงานเสมือน.....	15
2.2 สมมุติฐานสภาพพลาสติกสมบูรณ์.....	17
2.3 ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติและการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก.....	18
2.4 ทฤษฎีวิเคราะห์ขอบเขต.....	21
2.4.1 ทฤษฎีขอบเขตล่าง.....	22
2.4.2 ทฤษฎีขอบเขตบน.....	23
2.5 การพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตบนและทฤษฎีขอบเขตล่าง.....	25
บทที่ 3 ระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง.....	35
3.1 การแบ่งมวลดินออกเป็นชั้นส่วนย่อย.....	35
3.2 การสร้างสมการข้อจำกัดของระบบ.....	37
3.2.1 สมดุลของหน่วยแรงภายในชั้นส่วน.....	37

3.2.2 สมดุลของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชั้นส่วนที่อยู่ติดกัน.....	38
3.2.3 เงื่อนไขของหน่วยแรงที่ขอบเขต.....	39
3.2.4 เงื่อนไขขอบเขตการวิบัติ.....	40
3.2.5 อสมการเพิ่มเติมอื่นๆ.....	40
3.3 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์.....	41
3.4 การจัดรูปให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด.....	41
<b>บทที่ 4 การวิเคราะห์ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรง.....</b>	<b>46</b>
4.1 คุณ – ตัคเกอร์ ออบติมอลลิตี คอนดิชัน.....	46
4.2 วิธีการของนิวตัน.....	47
4.3 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีคุณ – ตัคเกอร์ ออบติมอลลิตี คอนดิชัน และ วิธีการของนิวตันกับระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง.....	47
4.4 กระบวนการหลักในการแก้ปัญหาของระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของ ทฤษฎีขอบเขตล่าง.....	50
4.4.1 กระบวนการหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง.....	50
4.4.2 กระบวนการในการหาค่าทิศทางเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า ของหน่วยแรงเบื้องต้น.....	52
4.4.3 กระบวนการสำหรับการตรวจสอบค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของ หน่วยแรงว่าเป็นค่าที่ดีที่สุดหรือไม่.....	53
4.4.4 กระบวนการในการปรับทิศทางเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า ของหน่วยแรง.....	54
4.4.5 กระบวนการสำหรับการหาขนาดการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า ของหน่วยแรง.....	56
4.5 ขั้นตอนในการคำนวณของระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขต ล่าง.....	56
<b>บทที่ 5 การทดสอบระบบการคำนวณ.....</b>	<b>64</b>
5.1 บทนำ.....	64
5.2 เวลาในการคำนวณ.....	64
5.3 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหา.....	64



ปัญหาตัวอย่างที่ 1 ฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียว.....	64
ปัญหาตัวอย่างที่ 2 ฐานเหลี่ยมต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีมุมเสียดทานภายใน.....	66
ปัญหาตัวอย่างที่ 3 ฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรง เฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก.....	67
ปัญหาตัวอย่างที่ 4 เสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง.....	69
ปัญหาตัวอย่างที่ 5 เสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง.....	70
ปัญหาตัวอย่างที่ 6 เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว.....	71
ปัญหาตัวอย่างที่ 7 เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรง เฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก.....	72
บทที่ 6 สรุป.....	91
6.1 บทนำ.....	91
6.2 หลักการของระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง.....	91
6.3 ขั้นตอนในการวิเคราะห์หาค่าผลเฉลยของปัญหา.....	92
6.4 สรุปผลการทดสอบระบบการคำนวณ.....	92
6.5 ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม.....	94
รายการอ้างอิง.....	95
ภาคผนวก.....	97
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	130

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
1.1 แสดงวิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพของปัญหาทางปฐพีกลศาสตร์.....	13
5.1 แสดงผลการวิเคราะห์ค่า $N_c$ ของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียว.....	65
5.2 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักประลัยของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดิน ที่มีมุมเสียดทานภายใน.....	66
5.3 แสดงคุณสมบัติของมวลดินและขอบเขตของปัญหาสำหรับฐานรากต่อเนื่อง บนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก.....	68
5.4 แสดงผลการวิเคราะห์ค่า bearing capacity factor ของฐานรากต่อเนื่องบน ชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก $p = 200,$ 100, 50, 25, 33.3, 12.5 และ 10.....	68
5.5 แสดงผลการวิเคราะห์ค่า bearing capacity factor ของฐานรากต่อเนื่องบน ชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก $p = 8, 6,$ 4, 2.5, 1.5, 0.75 และ 0.....	68
5.6 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง.....	70
5.7 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียวที่อัตราส่วน $H/B = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 2, 3, 4$ และ 5.....	71
5.8 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีกำลังรับ แรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก $C/D = 1$ .....	73
5.9 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีกำลังรับ แรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก $C/D = 2$ .....	73
5.10 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีกำลังรับ แรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก $C/D = 3$ .....	73

## สารบัญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
1.1 จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าและจำนวนสมการสำหรับวิธี Limit equilibrium.....	14
2.1 กลุ่มหลักของหลักการงานเสมือน.....	29
2.2 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียด.....	30
2.3 ขอบเขตการวิบัติแบบทั่วไป.....	30
2.4 รูปขอบเขตการวิบัติแบบต่างๆ ที่ใช้ในทางปฐพีกลศาสตร์.....	31
2.5 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักที่กระทำต่อวัตถุและการเสียรูปที่เกิดขึ้น.....	32
2.6 การวิเคราะห์ขอบเขตล่างของปัญหาเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มี ค้ำยันด้านข้าง.....	32
2.7 การวิเคราะห์ขอบเขตบนของปัญหาเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มี ค้ำยันด้านข้าง.....	33
2.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ของอัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงความเครียด พลาสติกกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ.....	34
3.1 แสดงขึ้นส่วนย่อยของมวลดินและตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา.....	43
3.2 แสดงขึ้นส่วนย่อยที่อยู่ติดกัน.....	43
3.3 แสดงแกนอ้างอิงแบบคาร์ทีเซียนและทิศทางบวกของเวกเตอร์.....	44
3.4 แสดงความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชั้นส่วนที่อยู่ติดกัน.....	44
3.5 แสดงเงื่อนไขขอบเขตของหน่วยแรง.....	45
4.1 แสดงคุณสมบัติของ Kuhn-Tucker optimality condition (KKT).....	62
4.2 แสดงวิธีการของนิวตัน.....	62
4.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรกับขอบเขต การวิบัติ.....	63
5.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ.....	75
5.2 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียว ( $\phi = 0$ ).....	76
5.3 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีมุมเสียดทาน ภายใน( $\phi \neq 0$ ).....	77
5.4 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ากำลัง รับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก ( $p = 20$ ).....	78

5.5 แสดงการเปรียบเทียบค่า bearing capacity factor สำหรับฐานรากต่อเนื่อง ผิวเรียบบนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก.....	79
5.6 แสดงการเปรียบเทียบค่า bearing capacity factor สำหรับฐานรากต่อเนื่อง ผิวหยาบบนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก.....	79
5.7 แสดงมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง.....	80
5.8 แสดงการวิเคราะห์ขอบเขตล่างของปัญหามวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง.....	80
5.9 แสดงผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง (โครงข่ายแบบที่ 1).....	81
5.10 แสดงผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง (โครงข่ายแบบที่ 2).....	82
5.11 แสดงผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง ( $B/H = 3.0$ ).....	83
5.12 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ตัวเลขเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้ง แบบมีค้ำยันด้านข้าง.....	84
5.13 แสดงปัญหาหระนาบความเครียดของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว.....	84
5.14 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว ( $H/B = 2.0$ ).....	85
5.15 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์ที่ได้กับผลการวิเคราะห์ ของ Assadi และ Sloan(1991) กรณี $0.3 \leq H/B \leq 1.0$ .....	86
5.16 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์ที่ได้กับผลการวิเคราะห์ ของ Assadi และ Sloan(1991) กรณี $1.0 \leq H/B \leq 5.0$ .....	86
5.17 แสดงปัญหาหระนาบความเครียดของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินที่มีกำลังรับแรงเฉือน แบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน.....	87
5.18 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว ( $C/D = 1.0$ ).....	88
5.19 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมใน ชั้นดินเหนียว ( $C/D = 1.0$ ).....	89
5.20 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมใน ชั้นดินเหนียว ( $C/D = 2.0$ ).....	89
5.21 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมใน ชั้นดินเหนียว ( $C/D = 3.0$ ).....	90
ผ1 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่อง (โครงข่ายแบบที่ 1).....	98
ผ2 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่อง (โครงข่ายแบบที่ 2).....	99
ผ3 แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่อง (โครงข่ายแบบที่ 3).....	100



- ผ31 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีกำลังรับ  
แรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก (C/D = 2.0).....128
- ผ32 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีกำลังรับ  
แรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก (C/D = 3.0).....129



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างต่างๆ ในงานวิศวกรรมโยธาจะเกี่ยวข้องกับการประมาณค่าแรงกระทำที่มากที่สุดที่โครงสร้างสามารถต้านทานได้โดยไม่ทำให้โครงสร้างเกิดการพังทลายเสียหาย หรือไม่ทำให้โครงสร้างเกิดการเสียรูปเกินกว่าค่าที่ยอมรับได้ ในขณะเดียวกันก็จะต้องพิจารณาและวิเคราะห์วัสดุที่รองรับโครงสร้างนั้นๆ ว่าสามารถต้านทานแรงกระทำเนื่องจากโครงสร้างที่วางอยู่ด้านบนได้หรือไม่ ซึ่งส่วนใหญ่แล้ววัสดุที่รองรับโครงสร้างต่างๆ ก็คือดิน ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างใดๆ จะต้องพิจารณา 2 ส่วนหลักๆ ได้แก่ ส่วนที่หนึ่งคือการวิเคราะห์และออกแบบทางโครงสร้าง และส่วนที่สองคือการวิเคราะห์และออกแบบทางปฐพีกลศาสตร์ เพื่อป้องกันไม่ให้โครงสร้างที่ออกแบบเกิดการวิบัติเนื่องจากชั้นส่วนโครงสร้างเองและมีความปลอดภัยเพียงพอในทางปฐพีกลศาสตร์

การวิเคราะห์ปัญหาทางปฐพีกลศาสตร์แบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ได้แก่ 1) การวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติของมวลดิน และ 2) การวิเคราะห์ปัญหาการเสียรูปของมวลดิน ปัญหาการวิบัติของมวลดินมีความสำคัญมากในงานวิศวกรรมปฐพี เนื่องจากในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานทางวิศวกรรมปฐพีจะต้องวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติของมวลดินเสมอ เพื่อให้แน่ใจว่ามวลดินที่รองรับฐานราก หรือโครงสร้างต่างๆ ที่ออกแบบมีค่าตัวคูณความปลอดภัย (Factor of Safety, FS) เพียงพอที่จะไม่ทำให้เกิดการวิบัติของมวลดิน เมื่อมีน้ำหนักจากโครงสร้างที่อยู่ด้านบนมากดทับ

มวลดินเมื่อถูกกระทำด้วยแรงเนื่องจากน้ำหนักของโครงสร้างที่กดทับอยู่ด้านบนจะทำให้สถานะของหน่วยแรงภายในมวลดินเกิดการเปลี่ยนแปลง กล่าวคือหน่วยแรงภายในมวลดินมีค่าเพิ่มขึ้น และถ้าหน่วยแรงภายในมวลดินมีค่ามากกว่าความสามารถในการต้านทานแรงเฉือนของมวลดินจะทำให้มวลดินเกิดการวิบัติ และเกิดความเสียหายแก่โครงสร้างที่อยู่ด้านบนหรือโครงสร้างที่อยู่ในบริเวณใกล้เคียง ดังนั้นเพื่อให้มวลดินสามารถรองรับโครงสร้างด้านบนได้อย่างปลอดภัย จึงมีความจำเป็นที่จะต้องวิเคราะห์ความสามารถในการต้านทานแรงเฉือนของมวลดิน ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ได้แก่ การประมาณกำลังรับน้ำหนักสูงสุดของฐานรากตื้น การประมาณค่ากำลังรับน้ำหนักของเสาเข็ม การประมาณความลึกมากที่สุดของ

งานชุดที่จะไม่ทำให้ความลาดด้านข้างเกิดการพังทลาย และการวิเคราะห์แรงดันด้านข้างหลังกำแพงกันดิน เป็นต้น

วิธีการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ เพื่อประมาณค่าแรงกระทำที่มากที่สุดที่มวลดินสามารถต้านทานได้มีอยู่ด้วยกันหลายวิธี ได้แก่ วิธี Plastic limit analysis (PLA), Slip-line method และ Limit equilibrium method (LEM) ซึ่งวิธีที่กล่าวมานี้จะอาศัยหลักการของทฤษฎีพฤติกรรมวัสดุในสภาพพลาสติกสมบูรณ์ (Rigid-perfectly plastic material behavior) วิธี Limit analysis และวิธี Slip-line มีหลักการของทฤษฎีขอบเขตเป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ แต่เนื่องจากสมการที่ใช้ในการวิเคราะห์จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของกลศาสตร์ของแข็งในสภาพพลาสติก (Solid mechanics of plastic state) ทำให้วิธี Limit analysis ไม่เหมาะกับปัญหาที่มีความซับซ้อน ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาที่ดินมีคุณสมบัติไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (Non-homogeneous) ปัญหาที่แรงกระทำมีลักษณะซับซ้อน เป็นต้น ในขณะที่วิธีที่ได้รับการนิยมน้อยกว่าวิธี LEM สามารถใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนได้เมื่อนำไปประยุกต์ใช้ร่วมกับ Method of slice นอกจากนี้กราฟและสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการคำนวณและออกแบบทางปฐพีกลศาสตร์ส่วนใหญ่จะถูกสร้างขึ้นจากวิธี LEM ยกตัวอย่างเช่น สัมประสิทธิ์ของความสามารถในการรับแรงแบกทานที่ใช้ในการออกแบบฐานราก สัมประสิทธิ์ที่เกี่ยวข้องกับแรงดันด้านข้างของมวลดิน เป็นต้น อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ด้วยวิธี LEM จะต้องตั้งสมมติฐานเพิ่มเติมเกี่ยวกับแรงลัดที่กระทำระหว่างชั้นส่วนดิน (Interslice force) เพื่อให้สมการสมดุลของแรงและสมการสมดุลของโมเมนต์มีจำนวนเท่ากับตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา ดังนั้นจึงไม่สามารถบอกได้ว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้มีความถูกต้องมากน้อยเพียงใด เนื่องจากผลการวิเคราะห์ที่ได้จะขึ้นอยู่กับสมมติฐานที่ใช้

ต่อมาเมื่อคอมพิวเตอร์ถูกพัฒนาให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น ทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ามามีบทบาทสำคัญในการวิเคราะห์ปัญหาทางปฐพีกลศาสตร์ เนื่องจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากๆ ได้ และยังสามารถจำลองรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่มีความซับซ้อนได้ ทำให้ได้พฤติกรรมการวิบัติของดินใกล้เคียงกับความเป็นจริง ถึงแม้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะสามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีความสลับซับซ้อนได้เป็นอย่างดี แต่กระบวนการคำนวณจะเกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ และยังต้องการพารามิเตอร์ดินเพิ่มเติมบางอย่างนอกเหนือไปจากพารามิเตอร์ดินพื้นฐาน ซึ่งพารามิเตอร์บางตัวมีความยุ่งยากในการทดสอบ



จากข้อดีของวิธีการวิเคราะห์ปัญหาทางปฐพีกลศาสตร์ที่ใช้กันอยู่ ทำให้เกิดการพัฒนาระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของวิธี Limit analysis ซึ่งเป็นการประยุกต์ใช้หลักการของการคำนวณเชิงตัวเลขเข้ากับทฤษฎีขอบเขตพลาสติกโดยวิธีการนี้ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Lysmer ในปี ค.ศ. 1970 ซึ่งใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกส่วน (Finite element discretization) ในการสร้างตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา และนำหลักการของวิธี PLA มาใช้ในการกำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรไม่ทราบค่า ทำให้ได้ปัญหาในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด (Optimization) และในขั้นตอนสุดท้ายจะต้องทำการแก้ปัญหาด้วยเทคนิควิธี Linear programming เพื่อหาคำตอบของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด จากข้อดีของวิธี Numerical PLA ในเรื่องของความถูกต้องแม่นยำของผลการวิเคราะห์และพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ซึ่งได้แก่ ค่าความเชื่อมแน่น (Cohesion) และค่ามุมเสียดทาน (Friction angle) ทำให้วิธี Numerical PLA มีแนวโน้มที่จะเป็นวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ที่ถูกใช้ในทางปฏิบัติอีกวิธีหนึ่งในอนาคต อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหาด้วยเทคนิค Linear programming จะต้องแปลงสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงของขอบเขตการวิบัติให้เป็นกลุ่มของสมการเชิงเส้นตรงทำให้มีสมการข้อจำกัดเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมาก การแก้ปัญหาด้วยวิธีนี้จึงไม่เหมาะกับปัญหาที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นจำนวนมาก ดังนั้นงานวิจัยนี้จะเป็นการศึกษาการประยุกต์ใช้เทคนิคการแก้ปัญหาแบบ Non-linear programming ในการวิเคราะห์ปัญหาเชิงตัวเลขของวิธี PLA และเป็นการพัฒนางานทางด้าน Numerical plastic limit analysis ให้มีประสิทธิภาพและสามารถใช้งานได้สะดวก

## 1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

ในช่วงหลายทศวรรษที่ผ่านมาได้มีการพัฒนาวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์อย่างต่อเนื่องโดยสามารถสรุปคร่าวๆ ได้ดังนี้

### 1.2.1 วิธี Limit equilibrium (LEM)

วิธี LEM ถูกคิดค้นและนำเสนอครั้งแรกโดย Fellenius ในปี ค.ศ. 1926 เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเสถียรภาพของความลาดบนชั้นดินเหนียวแบบไม่ระบายน้ำ (Undrained) การนำเสนอวิธี LEM ในครั้งนี้มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ปัญหาทางปฐพีกลศาสตร์ โดยเฉพาะปัญหาเสถียรภาพของความลาด ซึ่งมีผู้วิจัยหลายท่านได้นำเสนอวิธีวิเคราะห์เสถียรภาพของความลาดดังสรุปในตารางที่ 1.1 ขั้นตอนที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธี LEM สามารถสรุปเป็นขั้นตอนหลักๆ ได้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

- 1) กำหนดค่าหน่วยน้ำหนัก แรงดันน้ำและกำลังรับแรงเฉือนของมวลดินและชั้นหิน รวมทั้งลักษณะการวางตัวของชั้นดินและชั้นหิน
- 2) กำหนดรูปร่างของพื้นผิวการวิบัติ (Failure surface) ของมวลดิน และแบ่งมวลดินที่อยู่เหนือพื้นผิวการวิบัตินออกเป็นชั้นส่วนย่อยในแนวตั้ง จากนั้นจะทำการแก้ปัญหาของระบบสมการสมดุลทางสถิตศาสตร์
- 3) แก้ปัญหาเพื่อหาค่าตัวคูณความปลอดภัย (Factor of safety) ของรูปร่างพื้นผิวการวิบัติที่กำหนด โดยตัวคูณความปลอดภัยได้มาจากอัตราส่วนระหว่างกำลังรับแรงมากที่สุดของมวลดินต่อแรงที่ต้องการสำหรับสมดุลสถิตศาสตร์
- 4) กำหนดรูปร่างของพื้นผิวการวิบัติใหม่จนกระทั่งได้ค่าตัวคูณความปลอดภัยที่ต่ำที่สุด

ในขั้นตอนที่ 1 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ทางด้านกำลังรับแรงเฉือนของดินจะต้องอาศัยประสบการณ์ในการพิจารณาเลือกค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการทดสอบในห้องปฏิบัติการและข้อมูลดินจากสนาม โดยค่าพารามิเตอร์ของกำลังรับแรงเฉือนแบ่งออกเป็น 2 แบบได้แก่ 1) กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำ (Undrained shear strength) และ 2) กำลังรับแรงเฉือนแบบระบายน้ำ (Drained shear strength) พารามิเตอร์ดินแบบไม่ระบายน้ำจะใช้ในการวิเคราะห์ดินที่ไม่สามารถระบายน้ำได้ทันทีเมื่อน้ำหนักมากกดทับ ทำให้ต้องพิจารณาผลของความดันน้ำส่วนเกิน (Excess pore pressure) ในทางกลับกันพารามิเตอร์ดินแบบระบายน้ำจะใช้กับดินที่สามารถระบายน้ำได้ทันทีทำให้ไม่ต้องพิจารณาผลเนื่องจากความดันน้ำส่วนเกิน

ขั้นตอนที่ 2 จะเป็นการกำหนดรูปร่างของพื้นผิวการวิบัติของมวลดิน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วรูปร่างของพื้นผิวการวิบัติที่กำหนดจะเป็นแบบระนาบต่อเนื่อง แบบวงกลม และแบบเส้นโค้งลอกการิทึม ถ้าหากมวลดินมีพารามิเตอร์ของกำลังรับแรงเฉือนเฉพาะค่าความเชื่อมแน่นระหว่างเม็ดดินเพียงอย่างเดียว (Cohesive soil) รูปร่างของพื้นผิวการวิบัติจะเป็นแบบวงกลม หรือวงกลมและระนาบต่อเนื่อง แต่ถ้าดินที่พิจารณามีทั้งค่าความเชื่อมแน่นระหว่างเม็ดดินและค่ามุมเสียดทานภายใน (Frictional soil) รูปร่างของพื้นผิวการวิบัติจะเป็นแบบระนาบต่อเนื่องและเส้นโค้งลอกการิทึมรวมกัน

สำหรับขั้นตอนที่ 3 เป็นการหาค่าตัวคูณความปลอดภัยของพื้นผิวการวิบัติที่กำหนดขึ้น โดยประยุกต์ใช้หลักการของ Method of slice เพื่อแบ่งมวลดินที่อยู่เหนือพื้นผิวการวิบัตินออกเป็นชั้นส่วนย่อยตามแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 1.1ก โดยสามารถสรุปตัวแปรไม่ทราบค่าและสมการสมดุล

ทางสถิติศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ดังแสดงในรูปที่ 1.1 จะเห็นได้ว่าถ้าเราแบ่งมวลดินออกเป็น  $n$  ชั้น ส่วนย่อยจะมีตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวน  $5n - 2$  ตัว ในขณะที่มีจำนวนสมการสมดุลสถิติศาสตร์เพียง  $3n$  สมการ ดังนั้นเพื่อให้จำนวนสมการสมดุลเท่ากับจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าจึงต้องมีการกำหนดสมมติฐานเพิ่มเติม ซึ่งโดยทั่วไปแล้วสมมติฐานเพิ่มเติมจะกำหนดขึ้นจาก

- 1) การสมมติการกระจายตัวของหน่วยแรงตั้งฉาก (Normal stress) ตามพื้นผิวการวิบัติ
- 2) การสมมติตำแหน่งของแรงลัพธ์ที่กระทำระหว่างชั้นส่วนดิน
- 3) การสมมติทิศทางของแรงลัพธ์ที่กระทำระหว่างชั้นส่วนดิน

โดยทั่วไปแล้วการกระจายตัวของหน่วยแรงตั้งฉากตามพื้นผิวการวิบัติจะถูกกำหนดให้กระทำที่จุดกึ่งกลางที่ฐานของแต่ละชั้นส่วนย่อย (พิจารณาว่าชั้นส่วนย่อยแต่ละชั้นมีขนาดเล็กมาก) ดังนั้นสมมติฐานเพิ่มเติมที่ต้องการจึงเหลือเพียง  $n - 2$  ข้อ ในกรณีที่เลือกตั้งสมมติฐานเพิ่มเติมเกี่ยวกับทิศทางของแรงลัพธ์ที่กระทำระหว่างชั้นส่วนดินจะทำให้ได้สมมติฐานเพิ่มเติมจำนวน  $n - 1$  ข้อ ทำให้จำนวนสมการสมดุลมากกว่าจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจะทำให้ปัญหาสอดคล้องเฉพาะกับสมการสมดุลของโมเมนต์ หรือสมการสมดุลของแรงเพียงอย่างเดียว ยกตัวอย่างเช่น วิธี Ordinary ที่เสนอโดย Fellenius ในปี ค.ศ. 1936 ได้กำหนดสมมติฐานเพิ่มเติมให้ทิศทางของแรงลัพธ์ที่กระทำระหว่างชั้นส่วนดินมีทิศทางขนานกับฐานของชั้นส่วนย่อย และการแก้ระบบสมการสมดุลจะสอดคล้องกับสมดุลของโมเมนต์เพียงอย่างเดียว

ในขั้นตอนสุดท้ายคือการวิเคราะห์หารูปร่างของพื้นผิวการวิบัติที่ให้ค่าตัวคูณความปลอดภัยต่ำที่สุด ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ยุ้งยากที่สุด โดยเฉพาะปัญหาที่มีรูปร่างสลับซับซ้อน ค่าตัวคูณความปลอดภัยที่วิเคราะห์ได้อาจจะไม่ใช่ค่าที่ต่ำที่สุดจริงๆ (Global minimum factor of safety) เนื่องจากผลการวิเคราะห์ของวิธี LEM จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของพื้นผิวการวิบัติที่กำหนด และสมมติฐานที่ตั้งขึ้น ทำให้เป็นการยากที่จะประมาณค่าความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ที่ได้ว่ามีความถูกต้องมากน้อยเพียงใด

### 1.2.2 วิธี Plastic limit analysis (PLA)

วิธี PLA มีหลักการพื้นฐานมาจากทฤษฎีขอบเขต (Bound Theorem) ซึ่งคิดค้นโดย Drucker และคณะ ในปี ค.ศ. 1952 โดยทฤษฎีขอบเขตออกแบ่งเป็น 2 ทฤษฎีได้แก่ 1) ทฤษฎีขอบเขตล่าง (Lower Bound Theorem) ซึ่งกล่าวว่าถ้าทุกๆจุดในวัตถุอยู่ในสภาพสถิติศาสตร์ (Statically Admissible Stress Field) แรงภายนอกที่กระทำจะมีค่าต่ำกว่าแรงวิบัติที่แท้จริง (True

Collapse Load) และ 2) ทฤษฎีขอบเขตบน (Upper Bound Theorem) ซึ่งกล่าวว่า เมื่อทุกๆจุดในวัตถุอยู่ในสภาพจลศาสตร์ (Kinematically Admissible Displacement Field) ถ้าการกระจายของพลังงานภายในที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับพลังงานเนื่องจากแรงภายนอกที่กระทำ ดังนั้นแรงภายนอกที่กระทำจะมีค่ามากกว่าแรงวิบัติที่แท้จริง เมื่อรวมทฤษฎีทั้งสองเข้าด้วยกันจะทำให้ได้ขอบเขตของแรงวิบัติที่แน่นอน ดังนั้นการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ด้วยวิธี PLA จะให้ผลการวิเคราะห์ที่ถูกต้องแม่นยำ และสามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ที่ได้กับทฤษฎีได้ อย่างไรก็ตามการคำนวณด้วยมือโดยวิธี PLA จะไม่เหมาะกับปัญหาที่มีความสลับซับซ้อนเนื่องจากวิธี PLA จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของกลศาสตร์ของแข็งในสภาพพลาสติก (Solid Mechanics of Plastic State) ซึ่งต้องใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงในการหาคำตอบของสมการ

### 1.2.3 วิธี Slip-line field analysis

ในปี ค.ศ. 1903 Kötter ได้ศึกษาปัญหาความเครียดและได้พัฒนาวิธี Slip-line field analysis ขึ้นเป็นครั้งแรก ต่อมาในปี ค.ศ. 1920 Prandtl ได้นำวิธี Slip - line field analysis มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการประมาณค่าแรงกระทำมากที่สุดที่เหล็กสามารถรับได้ หลังจากนั้นวิธีการนี้ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์ปัญหาแรงดันดินด้านข้าง และปัญหาความสามารถในการรับแรงแบกทานของดิน ซึ่งวิจัยโดย Caquot และ Kerisel ในปี ค.ศ. 1949 ต่อมาในปี ค.ศ. 1965 Sokolovskii ได้ประยุกต์ใช้วิธี Slip-line field analysis ในการวิเคราะห์ปัญหาเสถียรภาพแบบต่างๆ สำหรับวัสดุที่มีทั้งค่าความเชื่อมแน่น และค่ามุมเสียดทานภายใน ซึ่งถือว่าเป็นครั้งแรกที่มีการประยุกต์ใช้วิธีการนี้ในทางปฐพีกลศาสตร์

หลักการวิเคราะห์ด้วยวิธี Slip-line field analysis สามารถสรุปคร่าวๆ ได้ดังนี้ สนามของหน่วยแรง (Stress field) จะถูกสร้างบริเวณที่มีน้ำหนักระกระทำ เพื่อกำหนดให้หน่วยแรงในบริเวณนั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขของหน่วยแรงที่ขอบเขต สมการสมดุลสถิตศาสตร์และขอบเขตการวิบัติของมวลดิน วิธีการนี้เรียกว่า a partial plastic stress field ซึ่งได้มาจากการรวมสมการของ quasi - static กับสมการขอบเขตการวิบัติ เพื่อสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ ผลการวิเคราะห์จะถูกแสดงในรูปของกลุ่มเส้นตรง 2 กลุ่มซึ่งแสดงทิศทางของการวิบัติ (ทิศทาง การเคลื่อนตัว) ทำให้ได้เครือข่ายของลักษณะหน่วยแรง (Stress characteristics)

หลังจากนั้นวิธี Slip-line analysis ถูกพัฒนาตามหลักการของทฤษฎีพลาสติกและวิธี Limit analysis โดยสมการสมดุลพลาสติกจะสอดคล้องกับทฤษฎีขอบเขตล่าง ในขณะที่ทฤษฎีขอบเขต

บนจะสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง (Compatibility equation) เงื่อนไขการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก (Flow rule) และเงื่อนไขความเร็วที่ขอบเขต ซึ่งทำให้เกิดกลุ่มของสมการเชิงอนุพันธ์และสามารถแก้ระบบสมการได้ตามวิธีของ Sokoloskii โดยผลการวิเคราะห์ที่ได้จะแสดงลักษณะของความเร็ว (Velocity characteristics)

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธี Slip-line analysis ที่สมบูรณ์จะต้องพิจารณาทั้งลักษณะของหน่วยแรงและลักษณะของความเร็ว (Stress and velocity characteristics) หรืออาจเรียกว่าวิธี Method of characteristics หรือ the method of associated field ซึ่งเสนอโดย Atkinson ในปี ค.ศ. 1981 ซึ่งวิธีนี้จะสอดคล้องทั้งกับทฤษฎีขอบเขตล่างและทฤษฎีขอบเขตบนทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้คือผลการวิเคราะห์แม่นยำ (Exact solutions) สำหรับวัสดุแบบพลาสติกสมบูรณ์

เนื่องจากสนามของหน่วยแรง (Stress field) ถูกกำหนดเฉพาะบริเวณที่มีน้ำหนักกระทำ ดังนั้นจึงไม่สามารถยืนยันได้ว่าทุกจุดในมวลดินจะสอดคล้องกับทฤษฎีขอบเขตล่าง ดังนั้นผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธี Slip-line analysis จึงไม่ใช่ผลการวิเคราะห์ของทฤษฎีขอบเขตล่างที่แท้จริง ในขณะที่สนามความเร็ว (Velocity field) จะสอดคล้องกับความต้องการของทฤษฎีขอบเขตบนในทุกจุดดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้เป็นค่าขอบเขตบนที่แท้จริง

อย่างไรก็ตามวิธี Slip-line analysis มีความยุ่งยากมากในการวิเคราะห์เพื่อหาลักษณะของหน่วยแรงและลักษณะของความเร็ว โดยวิธีทางกราฟิกสามารถใช้ได้เฉพาะกับปัญหาที่ดินมีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกัน (Scott, 1963) ในขณะที่การคำนวณเชิงตัวเลขถูกนำมาประยุกต์ใช้ได้กับชั้นดินแบบธรรมดา (Simple soil profile) และเนื่องจากวิธี Slip-line analysis ไม่สอดคล้องกับทฤษฎีขอบเขตล่างที่ทุกจุดของมวลดินทำให้ไม่สามารถประมาณความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ได้

#### 1.2.4 วิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่กำลังได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวางในปัจจุบันสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ โดยเฉพาะปัญหาที่มีความสลับซับซ้อนมากซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีการปกติได้ ยกตัวอย่างเช่นปัญหาที่ชั้นดินแบ่งออกเป็นหลายๆ ชั้น และคุณสมบัติของชั้นดินแต่ละชั้นมีความแตกต่างกัน เป็นต้น โดยการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะแบ่งวัตถุหรือชั้นส่วนที่พิจารณาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยหลายๆ ชิ้นต่อเนื่องกันไปตามรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของวัตถุหรือชิ้นส่วนนั้นๆ จากนั้นจะทำการ

ประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาโดยการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต ซึ่งผลเฉลยที่ได้รับจะเป็นผลเฉลยที่จุดต่อ (Node) ของแต่ละชิ้นส่วนย่อย การวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะไม่วิเคราะห์ปัญหาที่เดียวทั้งระบบ แต่จะวิเคราะห์หาค่าที่ละชิ้นส่วนย่อยแล้วนำมารวมเข้าด้วยกันเป็นผลเฉลยของระบบรวม ผลการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีความถูกต้องมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับปัจจัยหลักๆ 3 ประการได้แก่ ประการที่หนึ่งคือ การกำหนดรูปร่างของชิ้นส่วนย่อยว่าใกล้เคียงกับรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของปัญหาได้มากน้อยเพียงใด ประการที่สองคือ การจำลองพฤติกรรมของชิ้นส่วนย่อยได้ถูกต้องตามสภาพที่แท้จริงหรือไม่ และประการสุดท้ายคือ ข้อจำกัดทางด้านความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณ อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องใช้พารามิเตอร์ของดินเพิ่มเติมจากวิธี LEM และ LAM ซึ่งมีความยุ่งยากในการทดสอบเพื่อหาค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ นอกจากนี้ยังจำเป็นต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงเพื่อให้ผลเฉลยของปัญหาที่ทำการวิเคราะห์มีความถูกต้องและแม่นยำ

### 1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1970 การวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยทฤษฎีขอบเขตล่างได้ถูกเสนอขึ้นเป็นครั้งแรกโดย Lysmer ปัญหาตัวอย่างที่ถูกนำเสนอคือปัญหาการวิบัติแบบระนาบความเครียด (Plane Strain) ซึ่งอาศัยหลักการของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกส่วน (Finite element discretization) และใช้วิธีการแก้ปัญหาแบบเชิงเส้นตรง (Linear programming) ในการวิเคราะห์ผล สำหรับกระบวนการวิเคราะห์นี้มีวลดินที่พิจารณาจะถูกแบ่งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ (3-Nod Triangular) ต่อเนื่องกันไป โดยแต่ละจุดต่อจะมีหน่วยแรงภายในเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งค่าของหน่วยแรงในมวลดินนี้ถูกสมมติให้มีการแปรเปลี่ยนแบบเชิงเส้นตรง (Linear) ภายในชิ้นส่วนสามเหลี่ยม และยอมให้มีความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuity) ที่อยู่ระหว่างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อยที่ติดกัน และทุกจุดภายในมวลดินจะอยู่ในสถานะสถิตศาสตร์ (Statically admissible stress field) นั่นคือทุกๆ จุดภายในมวลดินต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล เงื่อนไขขอบเขตของหน่วยแรงและค่าของหน่วยแรงจะต้องไม่เกินขอบเขตการวิบัติ ซึ่งสมการขอบเขตการวิบัติที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นตรง (Non-linear) จะถูกแทนที่ด้วยสมการแบบเชิงเส้นตรงหลายๆ สมการในรูปของตัวแปรไม่ทราบค่าที่เกี่ยวข้องกับสมการขอบเขตการวิบัตินั้นๆ ด้วยวิธีการนี้จะทำให้ได้สมการข้อจำกัดและสมการข้อจำกัดเป็นแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด ซึ่งสามารถแก้ปัญหาค่าที่ดีที่สุดได้ด้วยวิธีการแก้ปัญหาแบบเชิงเส้นตรง อย่างไรก็ตามการเปลี่ยนสมการแบบไม่เชิงเส้นตรงให้เป็นแบบเชิงเส้นตรงจะทำให้มีจำนวน

อสมการข้อจำกัดเพิ่มขึ้น ซึ่งจะทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มมากขึ้นและไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ได้ ดังนั้นวิธีการแก้ปัญหาลักษณะเชิงเส้นตรงนี้จึงเหมาะกับปัญหาที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวนไม่มาก

สำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยทฤษฎีขอบเขตบนได้ถูกเสนอโดย Bottero และคณะ ในปี ค.ศ. 1980 ซึ่งมวลดินจะถูกแบ่งเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อยเช่นเดียวกันกับทฤษฎีขอบเขตล่าง แต่ตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อจะเป็นความเร็วของจุดต่อ โดยความเร็วของจุดต่อจะถูกสมมติให้มีการแปรเปลี่ยนแบบเชิงเส้นตรงภายในชิ้นส่วนสามเหลี่ยม นอกจากนี้ในแต่ละชิ้นส่วนสามเหลี่ยมจะมีตัวแปรไม่ทราบค่าเพิ่มเติมคือตัวคูณพลาสติก (Plastic multiplier) ที่ขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วนที่อยู่ติดกันจะยอมให้เกิดความไม่ต่อเนื่องของความเร็วตลอดขอบไม่ต่อเนื่อง และการเสียรูปแบบพลาสติกสามารถเกิดขึ้นได้ทั้งภายในชิ้นส่วนและบนขอบไม่ต่อเนื่อง จากทฤษฎีขอบเขตบนจะทำให้ทุกจุดในมวลดินจะอยู่ในสภาวะจลศาสตร์ (Kinematically admissible velocity field) ซึ่งความเร็วของชิ้นส่วนย่อยจะต้องสอดคล้องกับสมการความเข้ากันได้ (Compatibility) กฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก (Flow rule) เงื่อนไขขอบเขตของความเร็วที่ขอบ และขอบเขตการวิบัติของมวลดิน ซึ่งอสมการขอบเขตการวิบัติแบบไม่เชิงเส้นตรงจะถูกประมาณค่าโดยการสร้างรูปหลายเหลี่ยมต่อเนื่อง ซึ่งจะทำให้ได้สมการและอสมการทั้งหมดเป็นแบบเชิงเส้นตรง และสามารถแก้ปัญหได้ด้วยวิธีการแบบเชิงเส้นตรงได้ โดย Bottero และคณะ ได้ใช้กระบวนการแก้ปัญหที่เรียกว่า Revise simplex algorithm ในการวิเคราะห์ผล ซึ่งกระบวนการนี้ยังคงใช้เวลาค่อนข้างมากในการวิเคราะห์ผล ดังนั้นปัญหาที่สามารถวิเคราะห์ได้จึงยังเป็นปัญหาที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวนไม่มาก

หลังจากนั้นได้มีการพัฒนาระบบการคำนวณเชิงตัวเลขให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น (Bottero et al., 1980; Sloan, 1988a และ 1988b; และ Assadi และ Sloan, 1990) กระบวนการคำนวณที่ถูกพัฒนาขึ้นใหม่คือกระบวนการวิเคราะห์แบบ active set ซึ่งเสนอโดย Sloan ในปี ค.ศ. 1988 เพื่อใช้แก้ปัญหของระบบสมการแบบเชิงเส้นตรง โดยสมาชิกส่วนใหญ่ในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการข้อจำกัดมีค่าเท่ากับศูนย์ Sloan ได้แสดงให้เห็นว่ากระบวนการวิเคราะห์แบบ active set สามารถใช้กับทฤษฎีขอบเขตล่างได้ และสามารถแก้ปัญหที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวนมากได้อย่างมีประสิทธิภาพ ปัญหาที่พบหลังจากนั้นคือ การวิเคราะห์ปัญหาที่มีขอบเขตแบบ infinite half-space โดย Assadi และ Sloan(1990) ได้ปรับปรุงหลักการของอินไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งคิดขึ้นโดย Pastor(1978) และได้ค่าขอบเขตล่างที่เชื่อถือได้สำหรับปัญหาทั่วไป ในปี ค.ศ. 1998 Ukritchon ได้พัฒนาความสามารถของการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธี PLA ให้มีประสิทธิภาพมาก

ขึ้น กล่าวคือ สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนได้ ยกตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์ปัญหาที่ดินมีคุณสมบัติแบบ Anisotropic undrained strength และปัญหาการวิบัติของชั้นส่วนโครงสร้างและดินพร้อมกัน (Structural element) และเมื่อเร็วๆ นี้ในปี ค.ศ. 2002 Lyamin และ Sloan ได้พัฒนาระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของวิธี PLA เพื่อประยุกต์ใช้กับปัญหาฐานรากตื้นแบบ 3 มิติ โดยได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรง (Non-linear) ซึ่งจะให้มีจำนวนสมการข้อจำกัดของขอบเขตการวิบัติน้อยกว่าสมการข้อจำกัดที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นตรง ทำให้เวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาลดลงและสามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวนมากได้

#### 1.4 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) พัฒนาเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุดร่วมกับวิธี Plastic Limit Analysis สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์
- 2) ทดสอบความสามารถของระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้น โดยประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาฐานรากตื้น ปัญหาเสถียรภาพงานขุดในแนวตั้ง และปัญหาเสถียรภาพอุโมงค์ใต้ดิน

#### 1.5 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) ใช้วิธี Plastic Limit Analysis ในการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์และพัฒนางานวิธี Plastic Limit Analysis ไปสู่ระบบการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการวิเคราะห์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติที่มีความสลับซับซ้อนได้
- 2) ใช้เทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุด (Optimization Technique) ร่วมกับวิธี Plastic Limit Analysis ในการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติ โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาแบบ :
  - 2.1) Non-Linear Programming ทำการพัฒนาขึ้นใหม่ตามหลักการของ Sloan (2002) ซึ่งใช้เทคนิค Khun-Tucker Optimality Condition ร่วมกับกระบวนการ Two-Stage Quasi-Newton Algorithm เพื่อหาค่าตอบของปัญหาที่เหมาะสมที่สุด
- 3) พัฒนาระบบการคำนวณสำหรับปัญหาแบบ 2 มิติโดยทำการแบ่งมวลดินเป็นรูปสามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ ซึ่งความสัมพันธ์ของตัวแปรไม่ทราบค่าในสามเหลี่ยมเป็นแบบเชิงเส้นตรงและใช้วิธีการแก้ปัญหา Non-Linear Programming
- 4) ทดสอบระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นกับปัญหาทั่วไปของดินเหนียวที่ทราบผลเฉลยแม่นยำ (Exact Solution) ซึ่งได้แก่



- 8.1) การวิเคราะห์ความสามารถในการรับแรงแบกทานของฐานรากสี่เหลี่ยมแบบต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียวที่มีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกัน
- 8.2) การวิเคราะห์ความสามารถในการรับแรงแบกทานของฐานรากสี่เหลี่ยมแบบต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียวที่มีคุณสมบัติไม่เป็นเนื้อเดียวกัน โดยกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน
- 8.3) การวิเคราะห์เสถียรภาพของดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันทางด้านข้าง
- 8.4) การวิเคราะห์เสถียรภาพของดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันทางด้านข้าง
- 8.5) การวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียวที่มีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกัน
- 8.6) การวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเนื้อเดียวกัน โดยกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน

#### 1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้วิธี Numerical Method of Plastic Limit Analysis สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ที่สามารถนำไปใช้งานได้จริง
- 2) เป็นการพัฒนางานวิจัยทางด้าน Plastic Limit Analysis
- 3) ได้เทคนิคใหม่ในการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ ซึ่งอาศัยหลักการของเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุดร่วมกับวิธี Plastic Limit Analysis
- 4) ทำให้ผลการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์มีความถูกต้องแม่นยำและปลอดภัยมากยิ่งขึ้น

#### 1.7 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

- 1) ศึกษาทฤษฎีขอบเขตบน (Upper Bound Theorem) และทฤษฎีขอบเขตล่าง (Lower Bound Theorem) เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของวิธี Plastic Limit Analysis สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติ
- 2) ศึกษาเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุด (Optimization Technique) และวิธีการแก้ปัญหาแบบ Linear Programming และ Non-Linear Programming รวมทั้งวิธีการประยุกต์ใช้กับปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์

- 3) ใช้โปรแกรมภาษา Fortran ร่วมกับ Subroutine ใน IMSL Library ในการพัฒนาระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของวิธี Plastic Limit Analysis
- 4) ทดสอบระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นกับปัญหาที่ทราบผลเฉลย (Exact Solution) ซึ่งได้แก่ ปัญหาการวิบัติของฐานรากตื้น ปัญหาเสถียรภาพของดินในแนวตั้ง และปัญหาเสถียรภาพของอุโมงค์ในชั้นดินเหนียว
- 5) จัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับสมบูรณ์

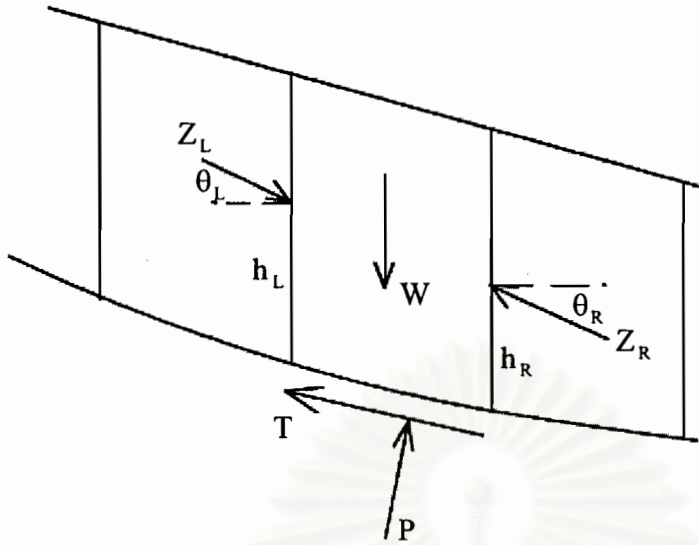


สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อวิธีวิเคราะห์	ระนาบการวิบัติ แบบวงกลม	ระนาบการวิบัติ แบบไม่วงกลม	สอดคล้องกับ สมดุลของโมเมนต์	สอดคล้องกับ สมดุลของแรง	สมมุติฐานของแรงระหว่าง ชิ้นส่วน
Infinite slope		*		*	ขนานกับผิวความลาด
Wedge analysis		*		*	กำหนดแนวเอียง
$\phi_u = 0$	*		*		
Ordinary	*		*		ขนานกับฐานของแต่ละชิ้นส่วน ที่ถูกแบ่ง
Bishop	*	(*)	*		ขนานกับแนวนอน
Janbu simplified	(*)	*		*	ขนานกับแนวนอน
Lowe and Karafiath	*	(*)		*	กำหนดแนวเอียง
Spencer	*	(*)	*	*	ความเอียงคงที่
Morgenstern and Price	*	*	*	*	$X/E = \lambda f(x)$
Janbu rigorous	*	*	*	*	กำหนดตำแหน่งแรงกระทำ ระหว่างชิ้นส่วนที่ถูกแบ่ง
Frelund and Krahn GLE	*	*	*	*	$X/E = \lambda f(x)$

Note : E และ X คือ แรงประกอบตามแนวนอนและแนวตั้งของแรงลัพธ์ระหว่างชิ้นส่วนที่ถูกแบ่ง

ตารางที่ 1.1 วิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพของปัญหาทางปฐพีกลศาสตร์



ก) แรงกระทำต่อชิ้นส่วนย่อย

สำหรับความลาดที่แบ่งดินออกเป็น  $n$  ชิ้นส่วนย่อย

จำนวนสมการสมดุลทั้งหมด	$3n$ (สมดุลแนวตั้ง, สมดุลแนวนอน และสมดุลโมเมนต์)
จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า :	1 (ตัวคูณความปลอดภัย)
	$n$ (แรงตั้งฉากที่ฐานของชิ้นส่วนย่อย)
	$n$ (ตำแหน่งที่แรงตั้งฉากที่ฐานกระทำ)
	$n-1$ (แรงลัพธ์ระหว่างชิ้นส่วนที่อยู่ติดกัน)
	$n-1$ (มุมเอียงของแรงลัพธ์ระหว่างชิ้นส่วนที่อยู่ติดกัน)
	$n-1$ (ตำแหน่งที่แรงลัพธ์ระหว่างชิ้นส่วนกระทำ)
รวม	$5n-2$
ดังนั้นต้องการสมมติฐานเท่ากับ $2n-2$ ข้อเพื่อทำให้จำนวนสมการและตัวแปรไม่ทราบค่าเท่ากัน	
สมมติฐานที่ใช้กันทั่วไป : $n$ ตำแหน่งของแรงตั้งฉากที่ฐาน	
$n-1$ มุมเอียงของแรงลัพธ์ระหว่างชิ้นส่วน หรือตำแหน่งที่แรงลัพธ์กระทำ	
รวม	$2n-1$ แสดงว่ามีสมการเกินความจำเป็น 1 สมการ

ข) จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าและจำนวนสมการที่วิเคราะห์

รูปที่ 1.1 จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าและจำนวนสมการสำหรับวิธีการแบ่งชิ้นส่วนย่อย

## บทที่ 2

### แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย

การวิเคราะห์ปัญหาเพื่อประมาณค่าแรงกระทำที่มากที่สุดที่มวลดินสามารถรับได้ หรือการประมาณค่าความลึกมากที่สุดที่จะไม่ทำให้เกิดการพังทลายของมวลดินทางด้านข้างในงานขุด ซึ่งในทางทฤษฎีแล้วค่าผลเฉลยของปัญหาเหล่านี้จะเป็นผลเฉลยแน่นอนตรง เมื่อสามารถหาค่าของแรงกระทำที่ทำให้สมการสมดุลของแรงภายนอกและหน่วยแรงภายในเป็นจริง ในขณะที่เดียวกันสมการความสอดคล้องของเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นและความเครียดจะต้องเป็นจริงด้วย จะเห็นได้ว่าเป็นการยากมากที่จะหาค่าผลเฉลยแน่นอนตรงของปัญหา ดังนั้นการไม่คำนึงถึงสภาวะสมดุล และสภาวะความสอดคล้องกันของการเคลื่อนตัวและความเครียดพร้อมกัน จะทำให้การวิเคราะห์หาผลเฉลยทำได้ง่ายขึ้น และค่าผลการวิเคราะห์ที่ได้จะเป็นค่าขอบเขตของผลเฉลยแน่นอนตรง โดยถ้าไม่คำนึงถึงสภาวะสมดุลของระบบที่พิจารณา ผลการวิเคราะห์ที่ได้จะเป็นค่าขอบเขตบนของผลเฉลยแน่นอนตรง นั่นคือถ้าแรงกระทำมีค่าเท่ากับค่าที่วิเคราะห์ได้จะทำให้มวลดินเกิดการวิบัติ ในทำนองเดียวกันถ้าเราไม่คำนึงถึงสภาวะความสอดคล้องกันของการเคลื่อนตัวและความเครียดแล้ว ผลการวิเคราะห์ที่ได้จะเป็นค่าขอบเขตล่างของผลเฉลยแน่นอนตรง และถ้าแรงกระทำมีค่าเท่ากับค่าที่วิเคราะห์ได้ แรงกระทำนี้จะไม่ทำให้มวลดินเกิดการวิบัติ เนื่องจากผลเฉลยแน่นอนตรง หรือแรงกระทำที่ทำให้มวลดินเกิดการวิบัติพอดีจะอยู่ภายในขอบเขตบนและขอบเขตล่าง ดังนั้นจึงเป็นการสะดวกกว่าที่จะหาค่าขอบเขตแทนการหาค่าผลเฉลยแน่นอนตรง

ทฤษฎีขอบเขตถูกพัฒนาขึ้นในปี ค.ศ. 1950 เพื่อให้ในงานวิจัยสภาวะพลาสติกในเหล็กซึ่งเสนอโดย Hill ต่อมาในปี ค.ศ. 1952 Drucker และคณะฯ ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีขอบเขตกับงานด้านปฐพีกลศาสตร์ ซึ่งทฤษฎีขอบเขตสำหรับงานด้านปฐพีกลศาสตร์ได้ถูกพัฒนาเรื่อยมาจนกระทั่งปัจจุบัน ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการอธิบายเกี่ยวกับสมมติฐานที่จำเป็นสำหรับทฤษฎีขอบเขต รวมทั้งการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีขอบเขต

#### 2.1 หลักการงานเสมือน (Principle of virtual work)

ทฤษฎีขอบเขตพลาสติกประกอบด้วยทฤษฎีขอบเขตบนและทฤษฎีขอบเขตล่าง ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยหลักการของงานเสมือน หลักการนี้สามารถประยุกต์ใช้ได้กับวัสดุแบบต่างๆ และมักจะถูกอธิบายไว้ในหนังสือกลศาสตร์โครงสร้างต่างๆ ไป เนื่องจากทฤษฎีขอบเขตพลาสติกมีสมมติฐานว่า ในขณะที่วัตถุเกิดการวิบัติ การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับรูปร่างของวัตถุถือว่าน้อยมากและสามารถไม่พิจารณาผลที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างนี้ได้ นั่นคือขณะที่เกิดการวิบัติ

ระบบสมการสมดุลที่ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาจะยังเป็นระบบสมการเดิมที่พิจารณาจากรูปร่างเริ่มต้นของวัตถุ ดังนั้นเมื่อมีสมมติฐานที่กำหนดให้วัตถุไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในขณะที่เกิดการวิบัติ จึงสามารถนำหลักการของงานเสมือนมาประยุกต์ใช้ได้

หลักการของงานเสมือนประกอบด้วย 2 ส่วนหลักๆ ที่แยกจากกันและไม่เกี่ยวข้องกัน ได้แก่ 1) ส่วนของความสมดุล และ 2) ส่วนของความสอดคล้องกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยส่วนของความสมดุลได้จากสภาวะที่แรงกระทำภายนอกและหน่วยแรงภายในอยู่ในสมดุลสถิตศาสตร์ ในขณะที่ส่วนของความสอดคล้องกันได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนตัวของภายนอกและความเครียดที่เกิดขึ้น ซึ่งจะต้องสอดคล้องซึ่งกันและกัน จากหลักการของงานเสมือนแสดงให้เห็นว่าถ้าระบบที่ทำการพิจารณาอยู่ในสมดุลสถิตศาสตร์แล้ว งานที่เกิดจากแรงกระทำภายนอกและการเคลื่อนตัวของวัตถุ จะต้องเท่ากับงานที่เกิดจากหน่วยแรงภายในและความเครียดที่เกิดขึ้น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1)

$$\int_A T_i u_i^* dA + \int_V F_i u_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \quad \dots(1)$$

โดยที่  $T_i, F_i$  = แรงกระทำภายนอกที่กระทำต่อพื้นผิวของวัตถุและแรงกระทำเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุเอง ตามลำดับ

$\sigma_{ij}$  = หน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำภายนอกและแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุเอง ( $T_i, F_i$ ) ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุลสถิตศาสตร์

$u_i^*$  = อัตราการเคลื่อนตัวเสมือนของวัตถุ (ความเร็วในการเคลื่อนที่)

$\dot{\epsilon}_{ij}^*$  = อัตราการเกิดความเครียดเสมือนภายในวัตถุซึ่งสอดคล้องกับอัตราการเคลื่อนตัวเสมือนของวัตถุ

$V, A$  = ปริมาตรและพื้นที่ผิวของวัตถุ ตามลำดับ

เครื่องหมายดอกจัน (\*) แสดงให้เห็นว่าส่วนที่ 1 คือส่วนของสมดุลสถิตศาสตร์ ซึ่งได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำภายนอกและหน่วยแรงภายในวัตถุ และส่วนที่ 2 คืออัตราการเสียรูปเสมือนซึ่งได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่างการเสียรูปที่เกิดขึ้นกับความเครียดภายในวัตถุ ไม่จำเป็นต้องเกี่ยวข้องหรือสอดคล้องกัน และอาจจะแยกพิจารณาออกจากกันได้อย่างอิสระ จากสมการของงานเสมือน (สมการที่ (1)) จะเห็นว่าทางด้านซ้ายของสมการคือ งานที่เกิดจากแรงกระทำ

ภายนอก ในขณะที่อีกด้านหนึ่งของสมการคือ งานที่เกิดจากหน่วยแรงภายในและความเครียดที่เกิดขึ้น

พิจารณารูปที่ 2.1 กลุ่มของสมมูล ( $T_i, F_i, \sigma_{ij}$ ) จะมีความถูกต้องก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับสมการสมมูลดังต่อไปนี้

$$\text{ที่พื้นผิววัตถุ} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \dots(2)$$

$$\text{ที่ภายในเนื้อวัตถุ} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_{ij}} + F_i = 0 \quad \dots(3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \dots(4)$$

โดยที่  $n_j$  = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวของวัตถุ และมีทิศพุ่งออกจากวัตถุ

กลุ่มของความสอดคล้อง ( $u_i^*, \epsilon_{ij}^*$ ) อัตราการเคลื่อนตัวของวัตถุและความเครียดที่เกิดขึ้นจะต้องสอดคล้องกับสมการ

$$2\epsilon_{ij}^* = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \quad \dots(5)$$

## 2.2 สมมุติฐานสภาพพลาสติกสมบูรณ์

โดยทั่วไปแล้วเมื่อมีแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุ จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงและความเครียดภายในวัตถุ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงภายในและความเครียดที่เกิดขึ้นสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2 จากรูปจะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดจะเป็นแบบเชิงเส้นตรงในช่วงแรก และเพิ่มขึ้นจนถึงหน่วยแรงค่าหนึ่ง (หน่วยแรงสูงสุด) หลังจากนั้นหน่วยแรงจะเริ่มลดลงและในช่วงสุดท้ายหน่วยแรงจะมีค่าคงที่เท่ากับหน่วยแรงที่เหลืออยู่ (Residual stress) ในวิธี Limit Analysis จะพิจารณาผลจากการลดลงของหน่วยแรงและจะสมมติให้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดประกอบด้วยเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งถูกแสดงไว้ด้วยเส้นประในรูปที่ 2.2 นั่นคือเมื่อวัตถุเกิดการเคลื่อนตัวแบบพลาสติกหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในขณะนั้นจะมีค่าคงที่ โดยวัตถุหรือวัสดุที่มีคุณสมบัติดังที่กล่าวมานี้ เรียกว่าวัสดุแบบพลาสติกสมบูรณ์

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้นภายในมวลดินเมื่อมีแรงมากระทำค่อนข้างจะซับซ้อน การวิเคราะห์พฤติกรรมของมวลดินเมื่อมีแรงมากระทำต่อมวลดินจึงเป็นสิ่งสำคัญมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพิจารณาหาจุดเปลี่ยนพฤติกรรมของมวลดินจากสภาวะยึดหยุ่นไปสู่สภาวะพลาสติก หรือสภาวะที่มวลดินเกิดการเคลื่อนตัว เมื่อมวลดินมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงสภาวะพลาสติกจะถือว่ามวลดินเกิดการวิบัติ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าสภาวะพลาสติกเป็นขอบเขตการวิบัติของมวลดิน

โดยทั่วไปจะสมมติให้จุดภายในมวลดินที่พิจารณาเกิดการเคลื่อนตัวแบบพลาสติก ก็ต่อเมื่อค่าตัวประกอบของหน่วยแรงภายในมวลดินที่จุดนั้น มีค่าเท่ากับขอบเขตการวิบัติของมวลดิน ซึ่งสามารถแสดงในรูปของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ได้ดังสมการที่ 6 เรียกว่าฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \dots(6)$$

สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบพลาสติกสมบูรณ์ จะไม่มีจุดใดภายในมวลดินที่มีค่าตัวประกอบของหน่วยแรงที่ทำให้  $f(\sigma_{ij}) > 0$  และถ้า  $f(\sigma_{ij}) < 0$  แสดงว่าจุดที่พิจารณาอยู่ในสภาวะยึดหยุ่น

### 2.3 ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติและกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก

การพิจารณาพฤติกรรมของวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบพลาสติกสมบูรณ์สามารถทำได้โดยการพิจารณารูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.3 การเสียรูปหรือการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกของวัสดุเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อสภาวะของหน่วยแรงขณะนั้น ทำให้ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติเป็นจริง ( $f(\sigma_{ij}) = 0$ ) เนื่องจากเมื่อเกิดการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกค่าความเครียดพลาสติก ( $\epsilon_{ij}^P$ ) ที่เกิดขึ้นจะมีค่าไม่สิ้นสุด ทำให้ไม่สามารถพิจารณาความเครียดที่เกิดขึ้นได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด ( $\dot{\epsilon}_{ij}$ ) แทนความเครียดที่เกิดขึ้น ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประกอบด้วย 2 ส่วนคืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดที่เกิดในสภาวะยึดหยุ่นและอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดที่เกิดในสภาวะพลาสติก และสามารถแสดงในรูปของสมการดังนี้

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^E + \dot{\epsilon}_{ij}^P \quad \dots(7)$$

โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดในสภาวะยึดหยุ่นจะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง ( $\dot{\sigma}_{ij}$ ) ที่เกิดขึ้นในสภาวะยึดหยุ่นตามกฎของฮุก



โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดในสภาวะยึดหยุ่นจะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง ( $\sigma_{ij}$ ) ที่เกิดขึ้นในสภาวะยึดหยุ่นตามกฎของฮุก

กฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกจะอธิบายเกี่ยวกับขนาดและทิศทางของอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดในสภาวะพลาสติก สำหรับวัสดุแบบพลาสติกสมบูรณ์เมื่อมีการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกเกิดขึ้น อัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดในสภาวะพลาสติกที่เกิดขึ้นจะมีความสัมพันธ์กับเกรเดียนของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ ซึ่งเกี่ยวข้องกับสภาวะหน่วยแรงในขณะนั้นๆ และสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{เมื่อ } f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \dots(8ก)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = 0 \quad \text{เมื่อ } f(\sigma_{ij}) < 0 \quad \dots(8ข)$$

โดยที่  $\lambda =$  ตัวคูณอัตราพลาสติก ซึ่งเป็นตัวควบคุมขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดในสภาวะพลาสติก ( $\lambda \geq 0$ )

$\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} =$  เกรเดียนของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ ซึ่งเป็นตัวบ่งชี้ถึงทิศทางของอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดในสภาวะพลาสติก

เมื่อพิจารณาสมการที่ (8) จะเห็นว่า การเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกของวัสดุแบบพลาสติกสมบูรณ์จะเกิดขึ้น เมื่อหน่วยแรงขณะนั้นทำให้ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติเป็นจริง โดยสามารถแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดในสภาวะพลาสติกในรูปของเวกเตอร์ ซึ่งมีทิศทางตั้งฉากและพุ่งออกจากพื้นผิวของการวิบัติ ณ จุดที่พิจารณา (จุด A ในรูปที่ 2.3)

ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติของมวลดินมีอยู่หลายฟังก์ชันด้วยกัน ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์ (Mohr-Coulomb) ฟังก์ชันการวิบัติแบบเทรสกา (Tresca) และฟังก์ชันการวิบัติแบบวอนมิสเสส (Von Mises) เป็นต้น โดยสามารถพล็อตรูปของขอบเขตการวิบัติแบบต่างๆ ในแกนของหน่วยแรงได้ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติที่ถูกใช้มากที่สุดในงานด้านปฐพีกลศาสตร์ได้แก่ ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ  $\tau$  และ  $\sigma_n$  ได้ดังสมการ

$$f(\tau, \sigma_n) = \tau - \sigma_n \tan \phi - c = 0 \quad \dots(9)$$

โดยที่  $\sigma_1, \sigma_3 =$  major และ minor stress ในระนาบหลัก

$\tau, \sigma_n =$  หน่วยแรงเฉือนและหน่วยแรงตั้งฉากที่กระทำบนระนาบที่พิจารณา

$c, \phi =$  ค่าความเชื่อมแน่นระหว่างเม็ดดินและมุมเสียดทานภายในมวลดิน

จากสมการที่ (8ก) และสมการที่ (10) จะได้สมการการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์ คือ

$$\dot{\epsilon}_1^P = -\dot{\epsilon}_3^P \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = -\dot{\epsilon}_3^P \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \quad \dots(11)$$

สมการที่ (11) แสดงให้เห็นว่าการเสียรูปในสภาวะพลาสติกของมวลดินที่มีขอบเขตการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์จะทำให้ปริมาตรของมวลดินเพิ่มขึ้น ถ้ามุมเสียดทานภายในมวลดินไม่เท่ากับศูนย์ ( $\phi \neq 0$ ) ซึ่งคุณสมบัตินี้เรียกว่าไดลาเทนซี

ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบเทรסקาเป็นฟังก์ชันรูปแบบเฉพาะที่ได้มาจากฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์กรณีที่มุมเสียดทานภายในเท่ากับศูนย์ ( $\phi = 0$ ) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) - c = 0 \quad \dots(12)$$

ดังนั้นเราจะได้สมการการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบเทรסקาจากการแทนค่า  $\phi = 0$  ในสมการที่ (11) จะได้

$$\dot{\epsilon}_1^P + \dot{\epsilon}_3^P = 0 \quad \dots(13)$$

จากสมการการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบเทรסקาจะเห็นได้ว่าเมื่อวัตถุเกิดการเสียรูปในสภาวะพลาสติกจะไม่ทำให้ปริมาตรของวัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลง (วัตถุมีสภาพอินคอมเพรสซิเบิล)

สำหรับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบวอนมิสเสส จะแตกต่างกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติอื่นๆ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบวอนมิสเสสจะถูกแสดงในรูปของหน่วยแรงหลักทั้งสามแกน ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6k^2 = 0 \quad \dots(14)$$

สำหรับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบวอนมิสเสส จะแตกต่างกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติอื่นๆ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบวอนมิสเสสจะถูกแสดงในรูปของหน่วยแรงหลักทั้งสามแกน ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6k^2 = 0 \quad \dots(14)$$

โดยที่  $k$  = หน่วยแรงกลางของมวลดินในสภาพที่มีเฉพาะแรงเฉือนเพียงอย่างเดียว

และเช่นเดียวกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบเทรסקา ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบวอนมิสเสสจะไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของมวลดิน เมื่อวัตถุเกิดการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก ดังแสดงได้ด้วยสมการ

$$\dot{\epsilon}_1^P = 2\lambda(\sigma_3 - \sigma_2); \dot{\epsilon}_2^P = 2\lambda(\sigma_1 - \sigma_3); \dot{\epsilon}_3^P = 2\lambda(\sigma_2 - \sigma_1) \quad \dots(15)$$

$$\dot{\epsilon}_1^P + \dot{\epsilon}_2^P + \dot{\epsilon}_3^P = 0 \quad \dots(16)$$

#### 2.4 ทฤษฎีวิเคราะห์ขอบเขต (Limit analysis)

รูปที่ 2.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักที่กระทำต่อวัตถุและการเคลื่อนตัวของวัตถุที่เกิดขึ้น ที่ได้จากการทดสอบฐานรากดินที่วางอยู่บนผิวดิน เมื่อพิจารณาเส้นโค้งที่ได้จากการทดสอบจะเห็นว่าสามารถแบ่งเส้นโค้งน้ำหนักกระทำและการเคลื่อนตัวออกได้เป็น 4 ช่วงได้แก่ ช่วงที่ 1 คือ ช่วงยืดหยุ่น ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับกฎของฮุก ช่วงที่ 2 คือ ช่วงที่มวลดินเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมจากพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไปสู่พฤติกรรมแบบพลาสติก ช่วงที่ 3 คือช่วงพลาสติก ในช่วงนี้เมื่อแรงกระทำเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยก็ทำให้มวลดินเกิดการเคลื่อนตัวอย่างมาก และช่วงสุดท้ายคือ ช่วงที่มวลดินเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและเมื่อการจัดเรียงตัวของโครงสร้างภายในมวลดินเกิดการเปลี่ยนแปลงจะทำให้มวลดินสามารถรับแรงกระทำได้เพิ่มขึ้น ในกรณีเช่นนี้จะเห็นได้ว่าความสามารถในการรับน้ำหนักของมวลดินจะเพิ่มขึ้นในช่วงที่ 4 ดังนั้นมวลดินจะไม่เกิดการวิบัติ อย่างไรก็ตามเราสามารถหาค่ากำลังรับน้ำหนักวิบัติได้จากการพิจารณาการเสียรูปที่เกิดขึ้น ด้วยเหตุนี้เองทำให้ต้องมีการกำหนดสมมติฐานให้มวลดินมีคุณสมบัติแบบพลาสติกสมบูรณ์ และไม่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของมวลดินที่เกิดขึ้นเมื่อน้ำหนักมากกระทำ ซึ่งทำให้เส้นโค้งความสัมพันธ์ในรูปที่ 2.5 เหลือเพียง 3 ช่วง โดยในช่วงสุดท้ายการเคลื่อนตัวของมวลดินจะเกิดขึ้นแบบไม่มีที่สิ้นสุด ในขณะที่น้ำหนักกระทำมีค่าคงที่ ซึ่งน้ำหนักกระทำที่ได้นี้คือ น้ำหนักกระทำมากที่สุด หรือน้ำหนักวิบัติที่มวลดิน

สามารถรับได้ ดังแสดงด้วยเส้นตรงที่ขนานกับแกนการเคลื่อนตัวในรูปที่ 2.5 น้ำหนักวิบัติที่ได้จากการวิเคราะห์โดยสมมติให้มวลดินมีสภาวะแบบอุดมคตินี้เรียกว่า น้ำหนักวิบัติแบบพลาสติก (Plastic limit load)

ในการวิเคราะห์ขอบเขตพลาสติก มวลดินที่ถูกกำหนดให้มีพฤติกรรมสอดคล้องกับคุณสมบัติแบบอุดมคติดังนี้

- 1) มวลดินมีคุณสมบัติแบบพลาสติกสมบูรณ์ และหน่วยแรงหลังจากเกิดการวิบัติจะมีค่าคงที่ไม่เพิ่มขึ้นหรือลดลง ซึ่งทำให้ไม่มีค่าของหน่วยแรงที่จุดใดในมวลดินสามารถอยู่นอกขอบเขตการวิบัติได้ ดังนั้นเวกเตอร์อัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง ( $\dot{\sigma}_{ij}$ ) จะสัมพันธ์กับขอบเขตการวิบัติ เมื่อมีอัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติกเกิดขึ้น
- 2) ขอบเขตการวิบัติของมวลดินที่ใช้จะต้องเป็นแบบคอนเวกซ์ (Convex) และสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติกที่เกิดขึ้น สามารถพิสูจน์ได้จากฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติตามกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกของวัสดุ ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับสภาพพลาสติกสมบูรณ์และสมการ  $\dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^P = 0$
- 3) การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของมวลดินที่เกิดขึ้น เนื่องจากน้ำหนักที่กระทำจะถือว่าไม่มีนัยสำคัญในการวิเคราะห์ ดังนั้นการวิเคราะห์จะสามารถประยุกต์ใช้หลักการของงานเสมือนได้

#### 2.4.1 ทฤษฎีขอบเขตล่าง

ทฤษฎีขอบเขตล่างได้จากการไม่พิจารณาสมการความสอดคล้องกันของอัตราการเคลื่อนตัวของมวลดินและความเครียดภายในที่เกิดขึ้น โดยทฤษฎีขอบเขตล่างได้แสดงให้เห็นว่า ถ้าวัตถุที่พิจารณาเกิดสนามการยอมรับได้ทางสถิตศาสตร์ของหน่วยแรง (Statically admissible stress field) ทว่าทั้งวัตถุที่พิจารณา จะทำให้น้ำหนักกระทำที่ได้จากการวิเคราะห์มีค่าน้อยกว่าน้ำหนักที่แท้จริงที่ทำให้วัตถุที่พิจารณาเกิดการวิบัติ โดยสนามการยอมรับได้ทางสถิตศาสตร์ของหน่วยแรงจะเกิดขึ้นเมื่อทุกๆ จุดของวัตถุที่พิจารณาสอดคล้องกับข้อจำกัดดังต่อไปนี้

- 1) สมการสมดุลสถิตศาสตร์ (สมการที่ (3) – สมการที่ (4))
- 2) เงื่อนไขของหน่วยแรงที่ขอบเขต (สมการที่ (2))

### 3) หน่วยแรงที่เกิดขึ้นไม่ทำให้เกิดการวิบัติ ( $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ )

การคำนวณขอบเขตล่างของปัญหาด้านปฐพีกลศาสตร์ สามารถยกตัวอย่างได้เช่นการประมาณค่าความสูงมากที่สุดของมวลดินในแนวตั้งสำหรับงานขุดของดินที่มีกำลังต้านทานแรงเฉือนเฉพาะค่าความเชื่อมแน่นเพียงอย่างเดียว ( $\phi = 0$ ) ดังแสดงในรูปที่ 2.6ก ผลการวิเคราะห์ปัญหาจะเป็นค่าขอบเขตล่างก็ต่อเมื่อ หน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำภายนอกสอดคล้องกับสมการสมดุล นั่นคือ

$$\text{สมดุลในแนวแกน } x \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\text{สมดุลในแนวแกน } y \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma$$

จากรูปที่ 2.6ก จะเห็นได้ว่าหน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับสมการสมดุลของแรงข้างต้น และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาทั้งที่ผิวดินด้านบนและที่ผิวดินด้านข้าง รูปที่ 2.6ข แสดงรูปร่างกลมมอร์สำหรับหน่วยแรงที่จุด A และจุด B ในรูปที่ 2.6ก โดยวงกลมมอร์จะมีขนาดใหญ่ที่สุดเมื่อสัมผัสกับขอบเขตการวิบัติ ซึ่งจะได้

$$\gamma H_1 = 2c_u$$

ดังนั้นจะได้ความสูงมากที่สุดของมวลดินในแนวตั้งที่ไม่ทำให้เกิดการพังทลายทางด้านข้างคือ

$$H_1 = \frac{2c_u}{\gamma}$$

ในรูปที่ 2.6ข เมื่อพิจารณารูปร่างกลมมอร์ที่ได้จากหน่วยแรงของจุด B จะเห็นได้ว่าวงกลมมอร์มีขนาดเล็กกว่าวงกลมมอร์ของหน่วยแรงที่จุด A ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ถ้านำทุกๆ จุดภายในมวลดินมาเขียนรูปร่างกลมมอร์แล้ว จะได้วงกลมมอร์ที่มีขนาดเล็กกว่าหรือเท่ากับวงกลมมอร์ที่จุด A นั่นคือค่า  $H_1$  ที่วิเคราะห์ได้เป็นค่าขอบเขตล่างของปัญหาเสถียรภาพของงานขุดในแนวตั้ง

#### 2.4.2 ทฤษฎีขอบเขตบน

ทฤษฎีขอบเขตบนได้มาจากการไม่พิจารณาสมการสมดุลสถิตศาสตร์ของแรงกระทำภายนอกและหน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้น โดยทฤษฎีขอบเขตบนได้แสดงให้เห็นว่า เมื่ออัตราการกระจายตัวของงานภายในที่เกิดขึ้นในขณะที่เกิดสนามการยอมรับได้ทางจลศาสตร์ของความเร็ว

(Kinematically admissible velocity field) มีค่าเท่ากับอัตราการเกิดขึ้นของงานภายนอก เนื่องจากน้ำหนักกระทำภายนอก ดังนั้นน้ำหนักที่กระทำจะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับน้ำหนักที่แท้จริงที่ทำให้วัตถุเกิดการวิบัติ สนามการยอมรับได้ทางจลศาสตร์ของความเร็วจะเกิดขึ้นเมื่อทุกๆ จุดในวัตถุที่พิจารณาสอดคล้องกับข้อจำกัดดังนี้

- 1) สมการความสอดคล้องกันของหน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้น (สมการที่ (5))
- 2) เงื่อนไขความเร็ว หรืออัตราการเคลื่อนตัวที่ขอบเขต
- 3) สมการการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก (สมการที่ (8))

สำหรับตัวอย่างในการวิเคราะห์หาค่าขอบเขตบนของปัญหาด้านปฐพีกลศาสตร์ จะแสดงตัวอย่างเดียวกันกับการวิเคราะห์ขอบเขตล่างที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น คือการประมาณค่าความสูงมากที่สุดของมวลดินในแนวตั้งสำหรับงานขุดของดินที่มีกำลังต้านทานแรงเฉือนเฉพาะค่าความเชื่อมแน่นเพียงอย่างเดียว ( $\phi = 0$ ) พิจารณารูปที่ 2.7ก กำหนดให้ดินมีค่าน้ำหนักเท่ากับ  $\gamma$  ความสูงมากที่สุดของมวลดินในแนวตั้งคือ ความสูงมากที่สุดที่มวลดินเกิดการวิบัติพอดีเนื่องจากน้ำหนักของมวลดินเอง ในการวิเคราะห์ขอบเขตบนของปัญหาจะต้องสมมติรูปแบบการวิบัติที่เกิดขึ้น ในรูปที่ 2.7ข ได้แสดงรูปแบบการวิบัติอย่างง่ายที่กำหนดขึ้น โดยมีระนาบการวิบัติทำมุม 45 องศากับแนวตั้ง การวิบัติเกิดขึ้นจากการเลื่อนไถลของบล็อกสามเหลี่ยมภายใต้แรงกระทำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโดยมีกำลังรับแรงเฉือนในแนวระนาบการวิบัติเป็นแรงต้าน รูปที่ 2.7ค แสดงไฮโดกราฟ ของรูปแบบการวิบัติที่กำหนด ซึ่งสมมติให้บล็อกสามเหลี่ยมเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสัมพัทธ์  $\delta \dot{w}$  ขนานกับระนาบการวิบัติ โดยงานภายนอกที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับ

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma H^2 \delta \dot{w}$$

ในขณะที่งานภายในที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับ

$$c_u H \sqrt{2\delta \dot{w}}$$

โดย  $c_u$  คือค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำของมวลดิน

จากหลักการของงานเสมือนงานเนื่องจากแรงภายนอกจะเท่ากับงานภายในที่เกิดขึ้น ดังนั้นเราจะได้ค่าขอบเขตบนสำหรับงานขุดในแนวตั้งคือ

$$H_u = \frac{4c_u}{\gamma}$$

จากผลการวิเคราะห์ค่าขอบเขตล่างและค่าขอบเขตบนของปัญหามหาหุคูณในแนวดิ่ง จะได้ว่าความสูงมากที่สุดที่ทำให้มวลดินในแนวดิ่งเกิดการวิบัติจะอยู่ภายในช่วง

$$\frac{2c_u}{\gamma} \leq H_{\text{exact}} \leq \frac{4c_u}{\gamma}$$

## 2.5 การพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

การพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตบนและขอบเขตล่างที่ได้นำเสนอในหัวข้อนี้ได้แปลมาจากวิทยานิพนธ์ของ Ukritchon (1996) ก่อนที่จะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตได้จะต้องพิสูจน์คุณสมบัติแบบคอนเวกซ์ของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ ซึ่งสอดคล้องกับกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกก่อน สมมติให้สภาวะของหน่วยแรง  $\sigma_{ij}^P$  คือสภาวะของหน่วยแรงที่อยู่บนพื้นผิวของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติพอดี และ  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติกเนื่องจากสภาวะหน่วยแรง  $\sigma_{ij}^P$  ในขณะที่สภาวะหน่วยแรง  $\sigma_{ij}^E$  คือสภาวะของหน่วยแรงที่อยู่ในฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติที่กำหนด คุณสมบัติแบบคอนเวกซ์ของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติและกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกจะต้องสอดคล้องกับสมการ

$$\sigma_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P > \sigma_{ij}^E \dot{\epsilon}_{ij}^E \quad \dots(17)$$

กำหนดให้  $f(\sigma_{ij})$  คือฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติที่พิจารณา ดังนั้นจากกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก สามารถแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติกได้ดังสมการ

$$\text{เมื่อ } f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dots(18)$$

โดยที่  $\lambda$  คือ ตัวคูณอัตราพลาสติก

สมการที่ (18) แสดงให้เห็นว่าเวกเตอร์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติกจะตั้งฉากกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ และมีทิศทางพุ่งออกจากฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ ดังแสดงในรูปที่ 2.8 โดยระนาบสัมผัสไฮเปอร์เพลนที่สภาวะหน่วยแรง  $\sigma_{ij}^P$  ซึ่งสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติก  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  สามารถหาได้จากสมการ

$$\sigma_{ij}^P \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P = b \quad \dots(19)$$

โดยที่  $b$  คือผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณเวกเตอร์แบบสเกลาร์ ระหว่างเวกเตอร์  $\sigma_{ij}^P$  และ  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$

เนื่องจากฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติเป็นแบบคอนเวกซ์ ทำให้ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติจะต้องอยู่ทางซ้ายมือของระนาบสัมผัสไฮเปอร์เพลน ซึ่งสัมพันธ์กับทิศทางลบของเวกเตอร์ตั้งฉาก  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  และสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\text{เมื่อ } f(\sigma_{ij}) < 0 \quad \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}^P < b \quad \dots(20)$$

จากสมมติฐานของวัตถุแบบพลาสติกสมบูรณ์สภาวะหน่วยแรงที่  $\sigma_{ij}^E$  จะต้องอยู่ภายในฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ ดังนั้นสภาวะหน่วยแรงที่  $\sigma_{ij}^E$  จะสอดคล้องกับ  $f(\sigma_{ij}^E) < 0$  และสอดคล้องกับสมการที่ (20) นั่นคือ

$$\sigma_{ij}^E \cdot \epsilon_{ij}^P < b \quad \dots(21)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (19) และสมการ (21) ร่วมกันจะได้

$$\sigma_{ij}^P \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P > \sigma_{ij}^E \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P$$

ในส่วนต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตบน ซึ่งทฤษฎีขอบเขตบนได้แสดงว่า ถ้าเกิดสนามการยอมรับได้ทางจลศาสตร์ของความเร็ว แรงกระทำภายนอกที่วิเคราะห์ได้จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าแรงวิบัติที่แท้จริง หรือค่าแรงกระทำที่วิเคราะห์ได้คือค่าขอบเขตบนนั่นเอง ในการพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตบนนี้จะเป็นการพิสูจน์แบบแสดงความขัดแย้ง ดังนั้นจะเริ่มต้นจากการสมมติให้ค่าของแรงที่วิเคราะห์ได้ขัดแย้งกับทฤษฎีขอบเขตบน

สมมติว่าเกิดสนามการยอมรับได้ทางจลศาสตร์ของความเร็วและเกิดการเคลื่อนตัว  $u_i^P$  แต่ไม่มีการวิบัติเกิดขึ้นกับวัตถุเนื่องจากแรงกระทำที่ผิว  $T_i$  และแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุเอง  $F_i$  ดังนั้นการกระจายของหน่วยแรงภายในวัตถุที่จุดต่างๆ จะต้องสอดคล้องกับสมการ  $f(\sigma_{ij}^E) < 0$  และจะได้  $T_i, F_i$  และ  $\sigma_{ij}^E$  สอดคล้องกับสมการสมดุลของแรง ในขณะที่  $u_i^P$  และ  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  จะสอดคล้องกันกับกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติก

จากหลักการของงานเสมือน เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างทั้งสองกลุ่มข้างต้นได้ดังนี้

$$\int_A T_i u_i^P \cdot dA + \int_V F_i u_i^P \cdot dV = \int_V \sigma_{ij}^E \dot{\epsilon}_{ij}^P \cdot dV \quad \dots(22)$$



เทอมทางซ้ายมือของสมการงานเสมือน แสดงงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำภายนอก และมีค่าเท่ากับงานภายในเนื่องจากหน่วยแรงที่เกิดขึ้น นั่นคือ  $\int_V \sigma_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P dV$  แทนค่าในสมการที่ (22)

$$\int_V \sigma_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P dV = \int_V \sigma_{ij}^E \dot{\epsilon}_{ij}^P dV \quad \dots(23)$$

โดยที่  $\sigma_{ij}^P$  คือหน่วยแรงในสภาวะพลาสติกที่สอดคล้องกับ  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$

แต่จากคุณสมบัติแบบคอนเวกซ์ของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ และกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกที่ได้พิสูจน์มาแล้วข้างต้น ได้แสดงไว้ว่า เมื่อ  $f(\sigma_{ij}^E) < 0$  จะได้  $\sigma_{ij}^P \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P > \sigma_{ij}^E \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P$  ดังนั้นจะเห็นได้ว่าสมการที่ (23) ไม่เป็นจริง และสามารถพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตบนได้

สำหรับทฤษฎีขอบเขตล่างนั้นได้แสดงไว้ว่า ถ้าเกิดสนามการยอมรับได้ทางสถิตศาสตร์ของหน่วยแรงทั่วทุกจุดที่พิจารณาแล้ว แรงกระทำที่วิเคราะห์ได้จะมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับแรงวิบัติที่แท้จริง และเช่นเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตบน โดยสมมติให้ค่าของแรงกระทำที่วิเคราะห์ได้ขัดแย้งกับทฤษฎีขอบเขตล่าง

สมมติว่าทุกจุดที่พิจารณาเกิดสนามการยอมรับได้ทางสถิตศาสตร์ของหน่วยแรง และสภาวะของหน่วยแรงขณะนั้นคือ  $\sigma_{ij}^E$  แต่มีการวิบัติเกิดขึ้นภายในวัตถุ ถ้าวัตถุเกิดการวิบัติเนื่องจากแรงกระทำที่ผิว  $T_i^c$  และแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุเอง  $F_i^c$  ซึ่งทำให้เกิดหน่วยแรง  $\sigma_{ij}^c$  ซึ่งสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติก  $\dot{\epsilon}_{ij}^c$  และความเร็ว  $u_i^c$  โดยที่หน่วยแรง  $\sigma_{ij}^c$ ,  $T_i^c$  และ  $F_i^c$  จะต้องสอดคล้องกันสมการสมดุลของแรง ในขณะที่อัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแบบพลาสติก  $\dot{\epsilon}_{ij}^c$  จะสอดคล้องกับความเร็วในการวิบัติ  $u_i^c$  ซึ่งทำให้ได้ระบบสมดุล 2 ระบบดังนี้

$$\text{ระบบที่ 1 : } \sigma_{ij}^E, T_i^c, F_i^c \quad \dots(24)$$

$$\text{ระบบที่ 2 : } \sigma_{ij}^c, T_i^c, F_i^c \quad \dots(25)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ (24) และสมการ (25) แทนลงในสมการของงานเสมือน จะได้สมการงานเสมือนของระบบทั้ง 2 ดังนี้

$$\text{ระบบที่ 1 : } \int_A T_i^c u_i^c dA + \int_V F_i^c u_i^c dV = \int_V \sigma_{ij}^E \dot{\epsilon}_{ij}^c dV \quad \dots(26)$$

$$\text{ระบบที่ 2: } \int_A T_i^c u_i^c dA + \int_V F_i^c u_i^c dV = \int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c dV \quad \dots(27)$$

ดังนั้นจะได้

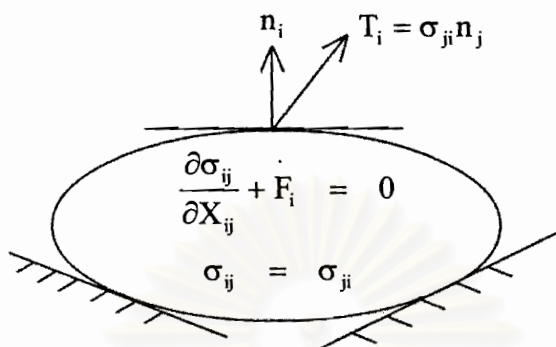
$$\int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c dV = \int_V \sigma_{ij}^E \dot{\epsilon}_{ij}^c dV \quad \dots(28)$$

เนื่องจากที่สภาวะการวิบัติ การเสียรูปที่เกิดขึ้นจะอยู่ในสภาพพลาสติก นั่นคือ  $\dot{\epsilon}_{ij}^c = \dot{\epsilon}_{ij}^P$  เมื่อแทนค่าลงในสมการ (28) จะได้

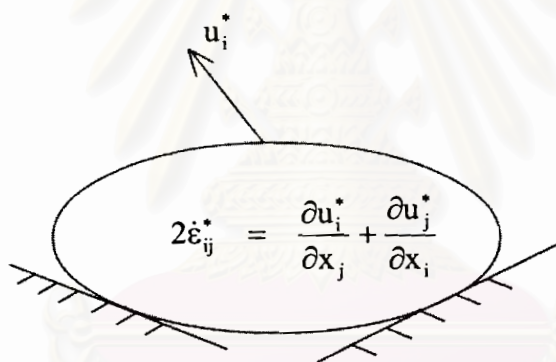
$$\int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^P dV = \int_V \sigma_{ij}^E \dot{\epsilon}_{ij}^P dV \quad \dots(29)$$

และจากคุณสมบัติแบบคอนเวกซ์ของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ และกฎการเคลื่อนตัวในสภาพพลาสติกที่ได้พิสูจน์มาแล้วข้างต้น ได้แสดงไว้ว่า เมื่อ  $f(\sigma_{ij}^E) < 0$  จะได้  $\sigma_{ij}^P \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P > \sigma_{ij}^E \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^P$  ดังนั้นจะเห็นได้ว่าสมการที่ (29) ไม่เป็นจริง และสามารถพิสูจน์ทฤษฎีขอบเขตล่างได้

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



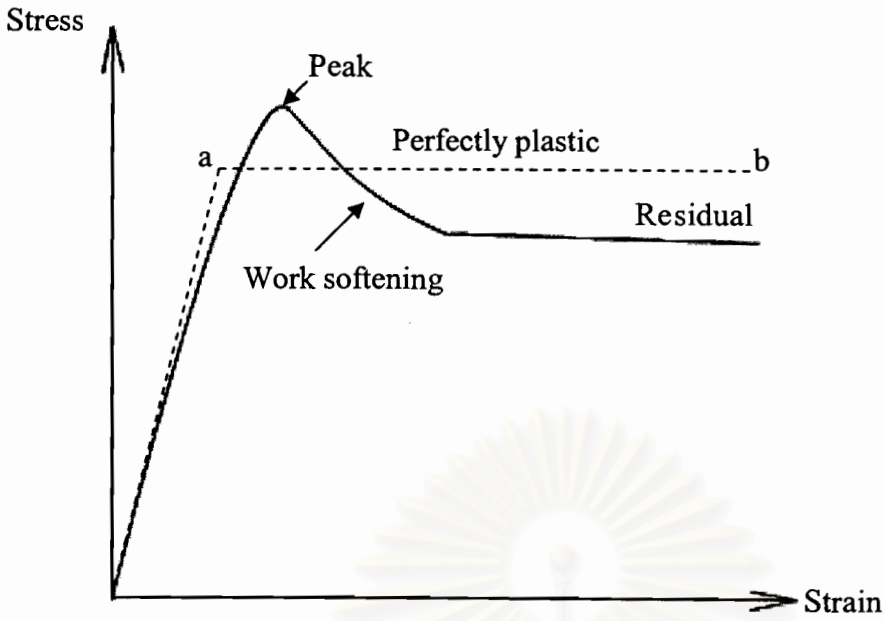
ก) ส่วนของความสมดุล



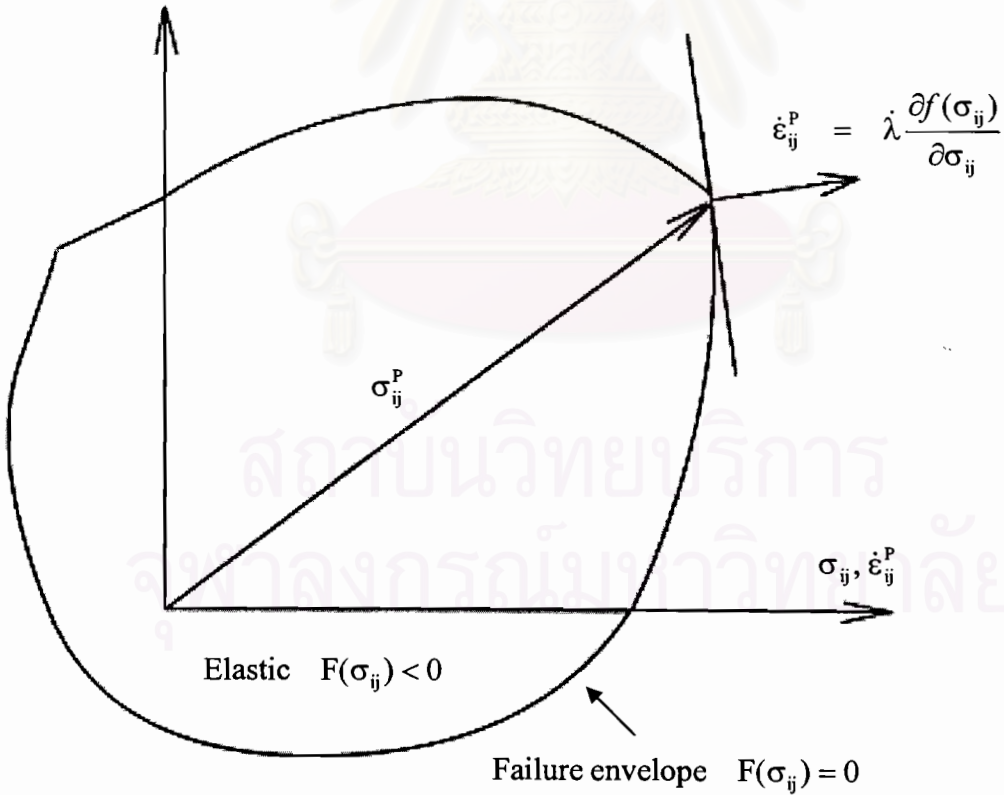
ข) ส่วนของความสอดคล้องกัน

รูปที่ 2.1 ส่วนหลัก 2 ส่วนของหลักการทำงานเสมือน

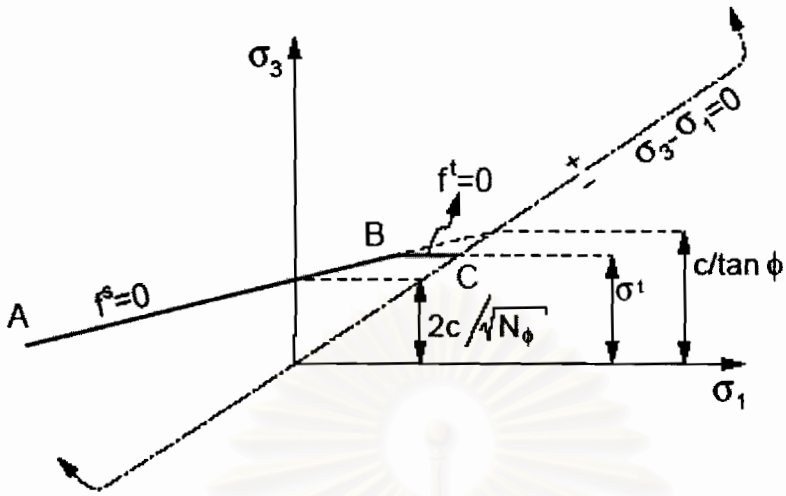
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



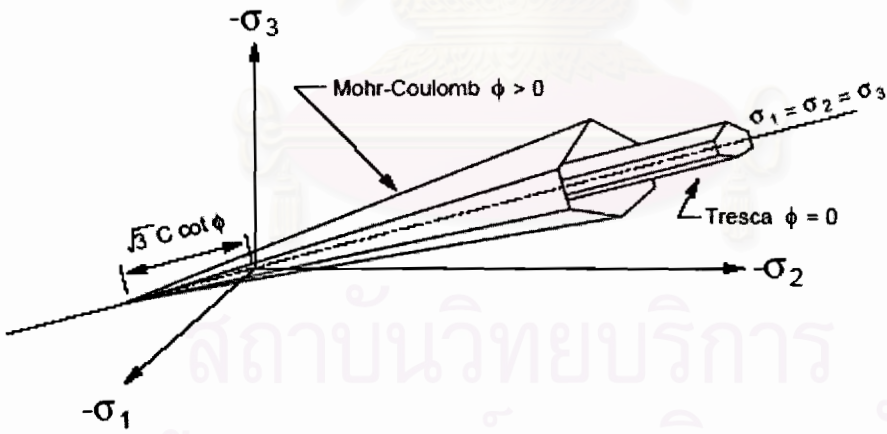
รูปที่ 2.2 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียด



รูปที่ 2.3 ขอบเขตการวิบัติแบบทั่วไป

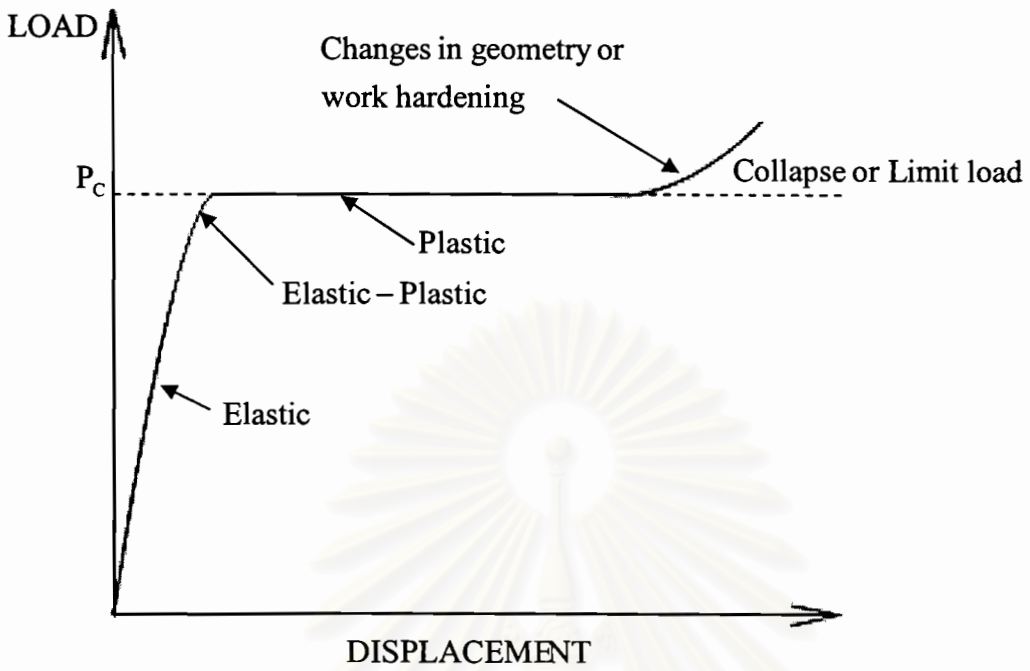


ก) มอร์-คูลอมบ์

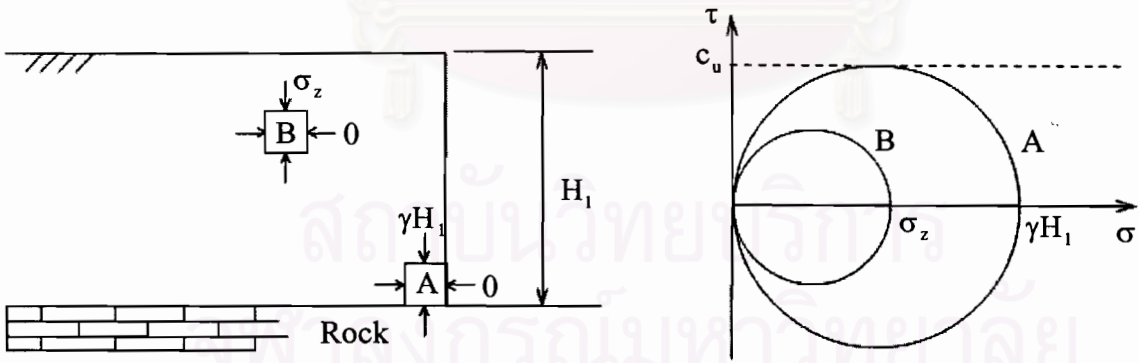


ข) เทรสกา

รูปที่ 2.4 รูปขอบเขตการวิบัติแบบต่างๆ ที่ใช้ในทางปฐพีกลศาสตร์



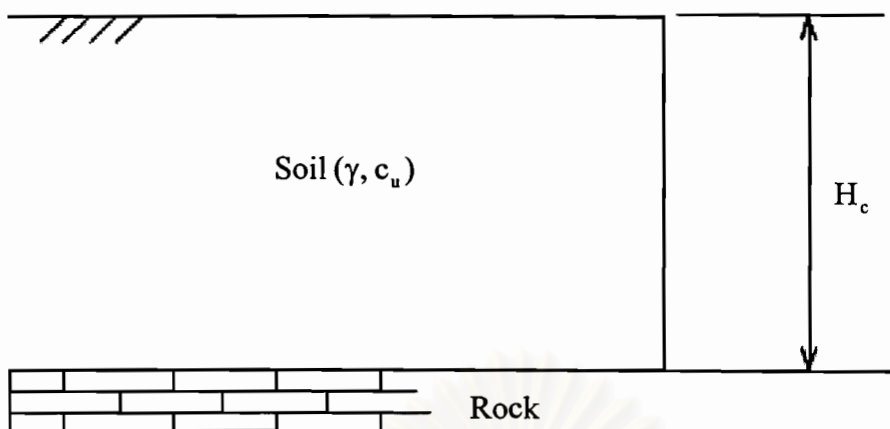
รูปที่ 2.5 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักที่กระทำต่อวัตถุและการเสียรูปของวัตถุที่เกิดขึ้น



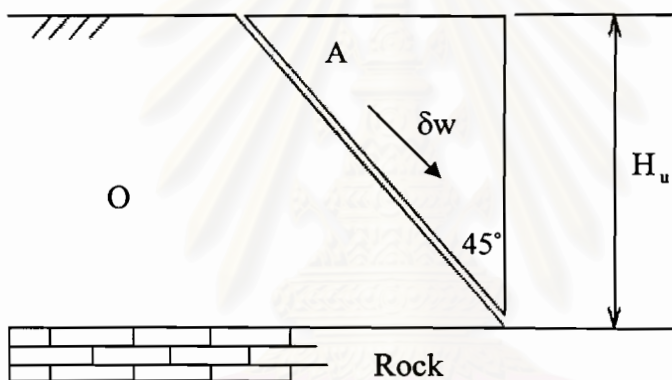
ก) มวลดินในแนวตั้งและหน่วยแรงที่เกิดขึ้น

ข) วงกลมมอร์

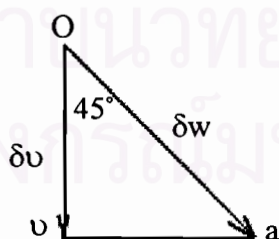
รูปที่ 2.6 การวิเคราะห์ค่าขอบเขตล่างของปัญหาเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันทางด้านข้าง



ก) มวลดินในแนวตั้ง

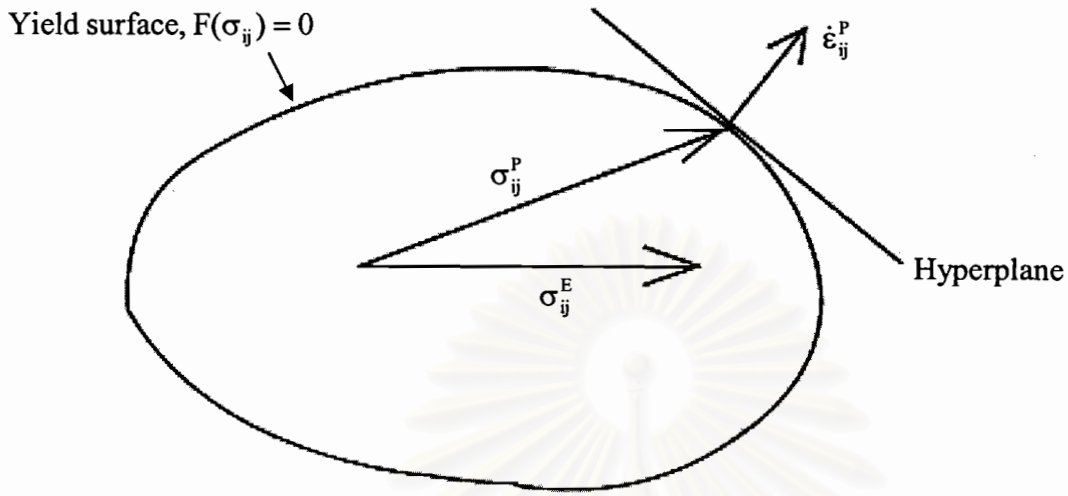


ข) ระนาบการวิบัติที่สมมุติ



ค) กราฟเวกเตอร์ความเร็ว (ไฮโดกราฟ)

รูปที่ 2.7 การวิเคราะห์ค่าขอบเขตบนของปัญหาเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันทางด้านข้าง



รูปที่ 2.8 ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ของอัตราการผลิตความเครียดพลาสติกกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 3

### ระบบคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง

ในบทนี้จะกล่าวถึงระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่างของปัญหาแบบ ระบายความเครียด ตามหลักการที่นำเสนอโดย Lyamin และ Sloan ในปี ค.ศ. 2002 โดยสามารถสรุปได้เป็น 4 ขั้นตอนหลักๆ ดังนี้

- 1) การแบ่งมวลดินออกเป็นชิ้นส่วนย่อยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกชิ้นส่วน โดยจะแบ่งมวลดินออกเป็นสามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ โดยแต่ละจุดต่อจะมีค่าน้อยแรง ( $\sigma_{ij}$ ) ที่จุดต่อเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า และกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงภายในชิ้นส่วนเป็นแบบเชิงเส้นตรง
- 2) การสร้างสมการข้อจำกัดจากความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงที่จุดต่อ ให้สอดคล้องกับสนามการยอมรับได้ทางสถิตศาสตร์ของหน่วยแรง นั่นคือตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงต้องสอดคล้องกับ 1) สมดุลสถิตศาสตร์ของหน่วยแรงภายในชิ้นส่วน 2) เงื่อนไขของหน่วยแรงที่ขอบเขตของมวลดิน และ 3) ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติของมวลดินที่ใช้
- 3) การกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของระบบ และการจัดให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด
- 4) การแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง ที่สอดคล้องกับสมการและอสมการข้อจำกัดทั้งหมด และให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มากที่สุดหรือต่ำที่สุด

#### 3.1 การแบ่งมวลดินออกเป็นชิ้นส่วนย่อย

มวลดินที่พิจารณาจะถูกแบ่งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยแบบสามเหลี่ยม ซึ่งมี 3 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยที่แต่ละจุดต่อจะมีค่าของหน่วยแรงที่จุดต่อนั้นๆ เป็นตัวแปรไม่ทราบค่าของระบบ ถ้าพิจารณาปัญหาในแกนอ้างอิงแบบคาร์ทีเซียน (x-y) จะได้ตัวแปรไม่ทราบค่าของระบบคือ หน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกน x ( $\sigma_x$ ) หน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกน y ( $\sigma_y$ ) และหน่วยแรงเฉือน ( $\tau_{xy}$ ) และเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงภายในชิ้นส่วนย่อยถูกกำหนดให้มีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นตรง ดังนั้นตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงต้องสอดคล้องกับสมการ

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{xi} \quad \dots(1n)$$

$$\sigma_y = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{yi} \quad \dots(1ข)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^3 N_i \tau_{xy} \quad \dots(1ค)$$

โดยที่  $\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \tau_{xy}$  ;  $i = 1, 2, 3$  คือ หน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกน  $x$  หน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกน  $y$  และ หน่วยแรงเฉือน ที่จุดต่อทั้ง 3 จุดของชิ้นส่วนย่อย ตามลำดับ และ  $N_i$  คือเซพฟังก์ชันแบบเชิงเส้นตรง ซึ่งได้จากสมการ

$$N_1 = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + y_{23} x + x_{32} y}{2A} \quad \dots (2ก)$$

$$N_2 = \frac{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + y_{31} x + x_{13} y}{2A} \quad \dots (2ข)$$

$$N_3 = \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + y_{12} x + x_{21} y}{2A} \quad \dots (2ค)$$

$$\text{โดยที่ } x_{32} = x_3 - x_2 ; y_{23} = y_2 - y_3$$

$$x_{13} = x_1 - x_3 ; y_{31} = y_3 - y_1$$

$$x_{21} = x_2 - x_1 ; y_{12} = y_1 - y_2$$

$$2A = |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)|$$

เนื่องจากการแบ่งชิ้นส่วนย่อยด้วยวิธีการนี้จะแตกต่างจากการแบ่งชิ้นส่วนย่อยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปอย่างสิ้นเชิง เพราะการแบ่งชิ้นส่วนด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปจุดที่มีพิกัดเดียวกันจะถือว่าเป็นจุดเดียวกัน แต่การแบ่งชิ้นส่วนย่อยด้วยวิธีการนี้จะถือว่าจุดที่มีพิกัดเดียวกันแต่อยู่ในชิ้นส่วนที่ต่างกันไม่ใช่จุดจุดเดียวกัน ดังนั้นจะเกิดความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงที่ขอบระหว่างชิ้นส่วนที่อยู่ติดกัน และเรียกขอบที่อยู่ระหว่างชิ้นส่วนที่อยู่ติดกันว่า ขอบไม่ต่อเนื่อง ดังแสดงในรูปที่ 3.2

### 3.2 การสร้างสมการข้อจำกัดของระบบ

เนื่องจากมวลดินถูกแบ่งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยหลายๆ ชิ้นส่วนต่อเนื่องกันไป เพื่อให้ทั่วทั้งมวลดินที่พิจารณาสอดคล้องกับสมการสมดุลทางสถิตศาสตร์ ดังนั้นหน่วยแรงภายในชิ้นส่วนย่อยและหน่วยแรงที่อยู่บนขอบไม่ต่อเนื่องจะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล สามารถแสดงได้ดังนี้

#### 3.2.1 สมดุลของหน่วยแรงภายในชิ้นส่วนย่อย

จากหลักการของทฤษฎีขอบเขตล่าง ทำให้ทุกๆ จุดภายในชิ้นส่วนย่อยจะต้องสอดคล้องกับสมดุลสถิตศาสตร์ ดังนี้

$$\text{สมดุลในแนวแกน } x; \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \dots(3)$$

$$\text{สมดุลในแนวแกน } y; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \quad \dots(4)$$

โดยที่  $\gamma =$  หน่วยน้ำหนักของมวลดิน

รูปที่ 3.3 แสดงแกนอ้างอิงแบบคาร์ทีเซียน ทิศทางบวกและทิศทางลบของเวกเตอร์ โดยเวกเตอร์จะมีทิศทางเป็นบวกเมื่อมีทิศทางเดียวกันกับทิศทางของหน่วยแรงดึง

เมื่อแทนค่าหน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกน  $x$  หน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกน  $y$  และหน่วยแรงเฉือน ที่ได้จากสมการที่ (1ก) – สมการที่ (1ค) ลงในสมการที่ (3) และสมการที่ (4) และหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งสมการที่ได้ จะได้สมการข้อจำกัดของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงที่จุดต่อสำหรับสมดุลภายในชิ้นส่วน ซึ่งสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ได้คือ

$$\mathbf{A}_{ele} \boldsymbol{\sigma}_{ele} = \mathbf{b}_{ele} \quad \dots(5)$$

$$\text{โดยที่ } \mathbf{A}_{ele} = \frac{1}{2A^c} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} & y_{31} & 0 & x_{13} & y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{32} & y_{23} & 0 & x_{13} & y_{31} & 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ele}^T = [\sigma_{x1}^c \quad \sigma_{y1}^c \quad \tau_{xy1}^c \quad \sigma_{x2}^c \quad \sigma_{y2}^c \quad \tau_{xy2}^c \quad \sigma_{x3}^c \quad \sigma_{y3}^c \quad \tau_{xy3}^c]$$

$$\mathbf{b}_{ele}^T = [0 \quad \gamma]$$

$A^c =$  พื้นที่ของชิ้นส่วนย่อยที่พิจารณา

### 3.2.2 สมดุลของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชั้นส่วนที่อยู่ติดกัน

รูปที่ 3.4 แสดงความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่องที่อยู่ระหว่างชั้นส่วนย่อยที่อยู่ติดกันโดยบนขอบไม่ต่อเนื่องหนึ่งๆ จะมีจุดต่อที่อยู่ในตำแหน่งพิกัดเดียวกันอยู่ 2 คู่ ในรูปที่ 3.4 คู่แรกคือจุดที่ 1 และจุดที่ 2 คู่ที่สองคือ จุดที่ 3 และจุดที่ 4 เพื่อให้ทุกๆ จุดบนขอบไม่ต่อเนื่องของชั้นส่วนสอดคล้องกับสมดุลของหน่วยแรง นั่นคือค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชั้นส่วนย่อยที่อยู่ติดกันจะต้องมีค่าเท่ากันที่ทุกจุดบนขอบไม่ต่อเนื่อง และเนื่องจากหน่วยแรงภายในชั้นส่วนมีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นตรง ดังนั้นถ้าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่จุดปลายของขอบไม่ต่อเนื่องมีค่าเท่ากัน จะทำให้หน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนมีค่าเท่ากันตลอดขอบไม่ต่อเนื่อง สมการข้อจำกัดที่ได้คือ

$$\text{ที่จุดต่อที่ 1 และจุดต่อที่ 2} \quad \sigma_{n1} = \sigma_{n2}; \quad \tau_1 = \tau_2 \quad \dots(6ก)$$

$$\text{ที่จุดต่อที่ 3 และจุดต่อที่ 4} \quad \sigma_{n3} = \sigma_{n4}; \quad \tau_3 = \tau_4 \quad \dots(6ข)$$

โดยที่หน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนขอบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเอียงทำมุม  $\theta$  กับแนวแกน  $x$  (มุมมีค่าเป็นบวกเมื่อระนาบที่พิจารณามุทวนเข็มนาฬิกา) สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\sigma_n = \sin^2 \theta \sigma_x + \cos^2 \theta \sigma_y - \sin 2\theta \tau_{xy} \quad \dots(7ก)$$

$$\tau = -\sin \theta \cos \theta \sigma_x + \sin \theta \cos \theta \sigma_y + \cos 2\theta \tau_{xy} \quad \dots(7ข)$$

แทนค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่ได้จากสมการที่ (7) ในสมการที่ (6) จะทำให้ได้สมการข้อจำกัดของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งแสดงในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{A}_{dis} \boldsymbol{\sigma}_{dis} = \mathbf{b}_{dis} \quad \dots(8)$$

โดยที่

$$\mathbf{A}_{dis} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & -\mathbf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T} & -\mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{dis}^T = [\sigma_{x1}^U \ \sigma_{y1}^U \ \tau_{xy1}^U \ \sigma_{x2}^L \ \sigma_{y2}^L \ \tau_{xy2}^L \ \sigma_{x3}^U \ \sigma_{y3}^U \ \tau_{xy3}^U \ \sigma_{x4}^L \ \sigma_{y4}^L \ \tau_{xy4}^L]$$

$$\mathbf{b}_{\text{dis}}^T = [0000]$$

$\theta$  คือมุมเอียงของขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชั้นส่วนย่อยที่อยู่ติดกัน เทียบกับแกน x

### 3.2.3 เงื่อนไขของหน่วยแรงที่ขอบเขต

ในกรณีที่มีแรงภายนอกที่ทราบค่ามากระทำต่อมวลดิน เพื่อให้หน่วยแรงที่ขอบเขตของมวลดินสอดคล้องกับสมการสมดุลของแรง จำเป็นจะต้องสร้างสมการข้อจำกัดสำหรับแรงที่ขอบเขตของปัญหา โดยทั่วไปแล้วหน่วยแรงที่ขอบเขตจะถูกแสดงในรูปของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือน ดังแสดงในสมการ

$$\sigma_n = q = \text{ค่าคงที่} \quad \dots(9ก)$$

$$\tau = t = \text{ค่าคงที่} \quad \dots(9ข)$$

ในรูปที่ 3.5 จุดที่ 1 และจุดที่ 2 คือจุดที่แสดงแนวขอบเขตของปัญหา และมีค่าของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่จุดที่ 1 และจุดที่ 2 เท่ากับ  $(q_1, t_1)$  และ  $(q_2, t_2)$  ตามลำดับ และเช่นเดียวกันกับขอบไม่ต่อเนื่อง หน่วยแรงบนแนวขอบเขตของปัญหามีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นตรง ดังนั้นถ้าหน่วยแรงที่จุดปลายของแนวขอบเขตมีค่าเท่ากัน จะทำให้ทุกๆ จุดบนแนวขอบเขตของปัญหามีค่าหน่วยแรงเท่ากันด้วย และสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\text{ที่จุดต่อที่ 1} \quad \sigma_{n1} = q_1; \quad \tau_1 = t_1 \quad \dots(10ก)$$

$$\text{ที่จุดต่อที่ 2} \quad \sigma_{n2} = q_2; \quad \tau_2 = t_2 \quad \dots(10ข)$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (7) ในสมการที่ (10) จะได้สมการข้อจำกัดของหน่วยแรงที่ขอบเขตของปัญหา และสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{A}_{\text{bound}} \boldsymbol{\sigma}_{\text{bound}} = \mathbf{b}_{\text{bound}} \quad \dots(11)$$

$$\text{โดยที่} \quad \mathbf{A}_{\text{bound}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\text{bound}}^T = [\sigma_{x1}^b \quad \sigma_{y1}^b \quad \tau_{xy1}^b \quad \sigma_{x2}^b \quad \sigma_{y2}^b \quad \tau_{xy2}^b]$$

$$\mathbf{b}_{\text{bound}}^T = [q_1 \quad t_1 \quad q_2 \quad t_2]$$

$\theta$  คือมุมเอียงของขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชั้นส่วนย่อยที่อยู่ติดกัน เทียบกับแกน x

### 3.2.4 เงื่อนไขขอบเขตการวิบัติ

ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติของวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบพลาสติกสมบูรณ์ สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไป ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad \dots(12)$$

โดยที่  $f$  คือฟังก์ชันแบบคอนเวกซ์ที่ได้จากค่าตัวประกอบของหน่วยแรงและ ค่าคงที่ของคุณสมบัติของมวลดิน สำหรับกรณีของปัญหาหระนาบความเครียด เมื่อกำหนดให้หน่วยแรงดึงมีค่าเป็นบวก สามารถแสดงฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์ ได้ดังนี้

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 \quad \dots(13)$$

โดยที่  $c, \phi$  คือ ค่าคงที่ของคุณสมบัติของมวลดินได้แก่ ค่าความเชื่อมแน่นระหว่างเม็ดดิน และ ค่ามุมเสียดทานภายในของเม็ดดิน ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาจากหลักการของทฤษฎีขอบเขตล่างจะได้ว่า ทุกๆ จุดภายในมวลดินที่พิจารณาจะต้องไม่ทำให้มวลดินเกิดการวิบัติ หรือก็คือ  $f(\sigma_{ij}) \leq 0$  นั่นเอง

### 3.2.5 อสมการเพิ่มเติมอื่นๆ

สำหรับปัญหาบางอย่าง อาจมีความจำเป็นต้องมีอสมการเพิ่มเติมสำหรับตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาที่ต้องการหาค่าที่ดีที่สุดของหน่วยน้ำหนักของมวลดิน ซึ่งมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเพิ่มอสมการเพิ่มเติมที่กำหนดให้ตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยน้ำหนักจะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เนื่องจากในความเป็นจริงแล้วค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดินจะต้องมีค่าไม่ติดลบ โดยอสมการเพิ่มเติมอื่นๆ จะถูกรวมไว้หลังจากอสมการของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ

### 3.3 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

จากหลักการของทฤษฎีขอบเขตล่าง ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้าเกิดสมการยอมรับได้ทางสถิติศาสตร์ของหน่วยแรงตลอดขอบเขตที่พิจารณาแล้ว น้ำหนักกระทำที่วิเคราะห์ได้ จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับน้ำหนักกระทำที่แท้จริงซึ่งทำให้มวลดินเกิดการวิบัติ โดยสามารถแสดงในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$Q_{\text{lower}} \leq Q_{\text{exact}} \quad \dots(14)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่าน้ำหนักกระทำที่แท้จริงที่ทำให้มวลดินเกิดการวิบัติ คือค่าที่มากที่สุดของน้ำหนักที่วิเคราะห์ได้จากกรณีที่มีมวลดินเกิดสมการยอมรับได้ทางสถิติศาสตร์ของหน่วยแรง ดังนั้นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาแบบทั่วไปของทฤษฎีขอบเขตล่าง คือการวิเคราะห์หาค่าแรงกระทำที่มากที่สุดในสภาวะที่เกิดสมการยอมรับได้ทางสถิติศาสตร์ของหน่วยแรง ซึ่งสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\text{ค่าที่มากที่สุด } c^T \sigma \quad \dots(15)$$

โดยที่  $c$  คือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$\sigma$  คือ เวกเตอร์ตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง

### 3.4 การจัดรูปให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด

ในขั้นตอนนี้จะเป็นการจัดรูปของสมการและอสมการข้อจำกัดของปัญหาทั้งหมด รวมทั้งฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด โดยจากสมการที่ (5) สมการที่ (8) และ สมการที่ (11) ซึ่งทั้งหมดเป็นสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรง ดังนั้นสามารถรวมและเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์เดียวกัน ได้ดังนี้

$$A_{\text{sys}} \sigma_{\text{sys}} = b_{\text{sys}} \quad \dots(16)$$

$$\text{โดยที่ } A_{\text{sys}} = A_{\text{ele}} + A_{\text{dis}} + A_{\text{bound}}$$

$$\sigma_{\text{sys}}^T = [\sigma_x^e \quad \sigma_y^e \quad \tau_{xy}^e]; \quad e=1 \dots \text{number of element}$$

$$b_{\text{sys}} = b_{\text{ele}} + b_{\text{dis}} + b_{\text{bound}}$$

และสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดในรูปแบบทั่วไป ของปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงได้ดังนี้

$$\text{ค่าที่มากที่สุด } c^T \sigma_{\text{sys}} \quad \dots(17)$$

โดยที่  $A_{\text{sys}} \sigma_{\text{sys}} = b_{\text{sys}}$

$$f_j(\sigma) \leq 0, \quad j=1 \dots \text{number of inequality equation}$$

$$\sigma_{\text{sys}} \in R^n$$

โดย  $c$  คือ เวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$\sigma_{\text{sys}}$  คือ เวกเตอร์ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงของระบบการคำนวณ

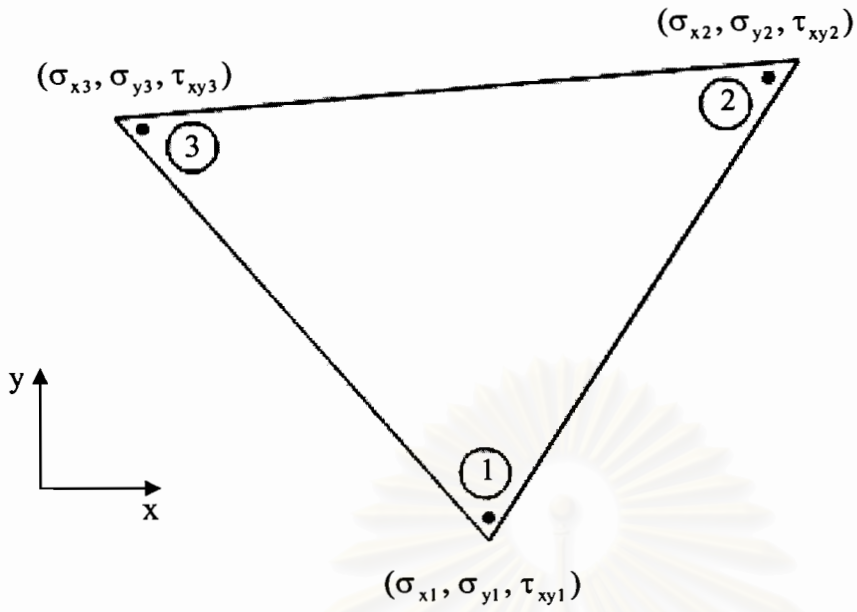
$A_{\text{sys}}$  คือ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการข้อจำกัดของระบบการคำนวณ

$b_{\text{sys}}$  คือ เวกเตอร์ทางขวามือของสมการเชิงเส้นของระบบการคำนวณ

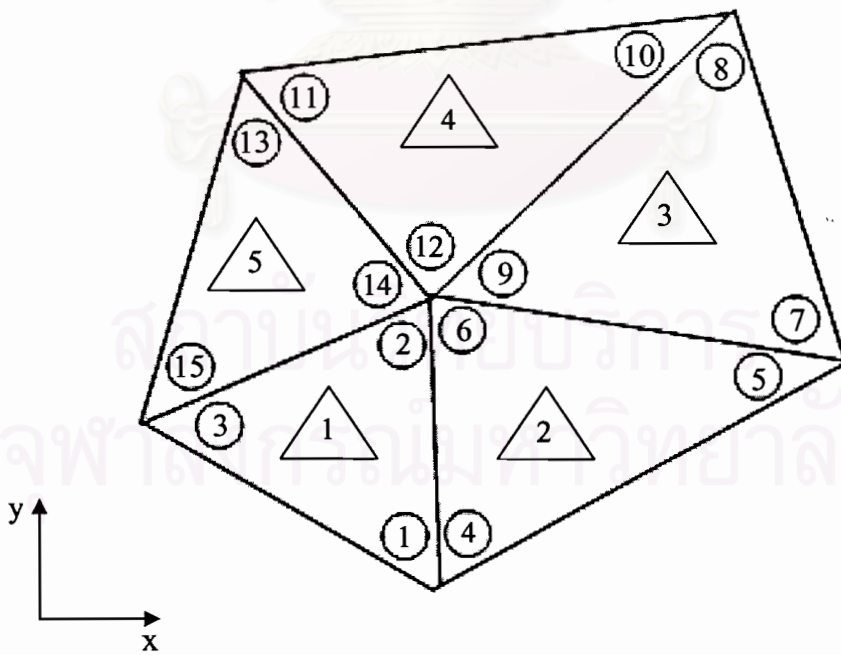
$f(\sigma)$  คือ ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ และอสมการเพิ่มเติมอื่นๆ

จะเห็นได้ว่าปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดที่ได้เป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรง เนื่องจากอสมการข้อจำกัดของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติเป็นแบบไม่เชิงเส้นตรง โดยการแก้ปัญหาของระบบสามารถทำได้ 2 แบบ คือ การแก้ปัญหาแบบเชิงเส้นตรง และการแก้ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรง สำหรับการแก้ปัญหาแบบเชิงเส้นตรงนั้น จะต้องทำการแปลงอสมการข้อจำกัดของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติให้เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้นตรง โดยการแทนเส้นโค้งของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติด้วยรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งจะทำให้ได้อสมการแบบเชิงเส้นตรงหลายชุดด้วยกัน ซึ่งวิธีการแก้ปัญหานี้ได้ถูกนำเสนอโดย Sloan(1988) อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหาด้วยวิธีแบบเชิงเส้นตรงจะทำให้จำนวนอสมการข้อจำกัดเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมากจึงทำให้ไม่เหมาะกับปัญหาที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวนมากๆ ในทางกลับกันการแก้ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงจะสามารถใช้กับปัญหาที่มีตัวแปรมากๆ ได้ เนื่องจากไม่ต้องมีการแปลงอสมการของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติให้เป็นแบบเชิงเส้นตรง สำหรับรายละเอียดของวิธีการแก้ปัญหานี้จะได้นำเสนอในบทต่อไป

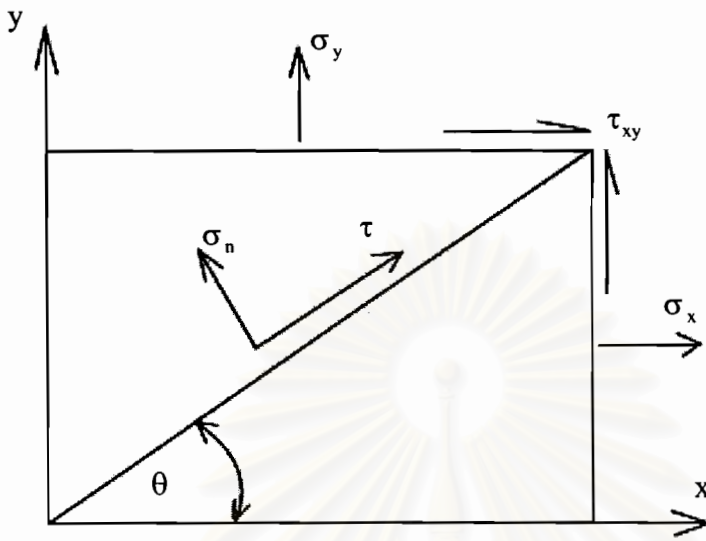




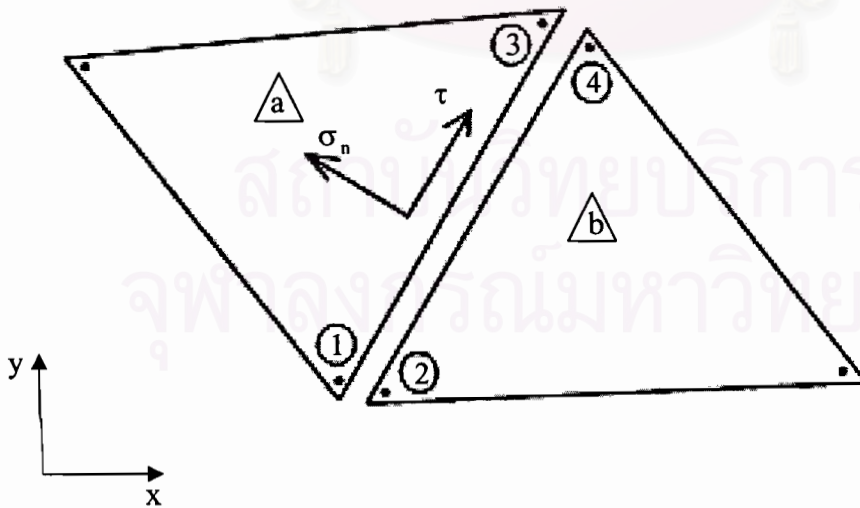
รูปที่ 3.1 ชิ้นส่วนย่อยของมวลดินและตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา



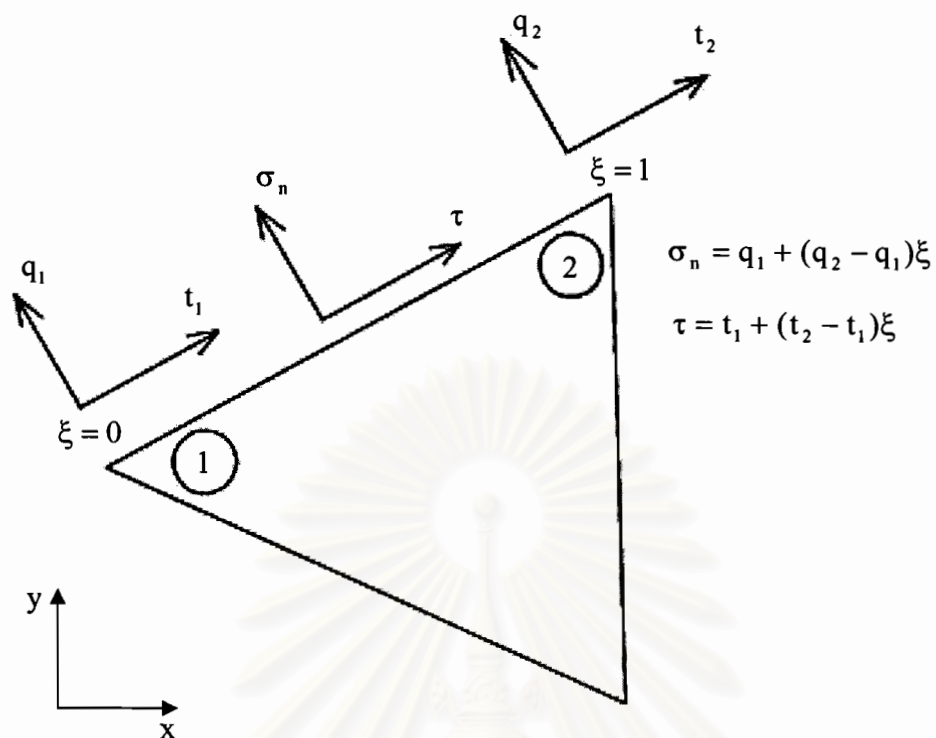
รูปที่ 3.2 ชิ้นส่วนย่อยที่อยู่ติดกัน



รูปที่ 3.3 แกนอ้างอิงแบบคาร์ทีเซียนและทิศทางบวกของเวกเตอร์



รูปที่ 3.4 ความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงบนขอบไม่ต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วนที่อยู่ติดกัน



รูปที่ 3.5 เส้นไขว้ขอบเขตของหน่วยแรง

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 4

### การวิเคราะห์ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรง

จากบทที่ผ่านมาเราจะได้รูปของปัญหาการวิบัติทางปรูฟิกลศาสตร์ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดในรูปแบบไม่เชิงเส้นตรง Lyamin และ Sloan (2002) ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงซึ่งจำเป็นจะต้องอาศัยทฤษฎีที่สำคัญ 2 ทฤษฎีได้แก่ ทฤษฎีของคูน-ตักเกอร์ ออบติ มอลลิตี คอนดิชัน และวิธีการของนิวตันโดยรายละเอียดของทฤษฎีและการประยุกต์ใช้จะได้กล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

#### 4.1 คูน-ตักเกอร์ ออบติ มอลลิตี คอนดิชัน (Kuhn – Tucker optimality condition, KKT)

ทฤษฎี KKT ได้แสดงไว้ว่าที่จุดที่เหมาะสมที่สุด (ค่าที่ดีที่สุด,  $x^*$ ) เวกเตอร์เกรเดียนของฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเท่ากับ ผลรวมแบบเชิงเส้นของเกรเดียนของสมการข้อจำกัด และเกรเดียนของอสมการข้อจำกัด ที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ( $f(x) = 0$ ) ดังแสดงในรูปที่ 4.1 หรือสามารถแสดงในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

สำหรับปัญหา                      ค่าที่น้อยที่สุด     $f(x)$

โดยที่                                     $h_i(x) = 0; \quad i=1..m$

$g_j(x) \leq 0; \quad j=1..p$

จะมี  $\mu^* \in R^m$  และ  $\lambda^* \in R^p$  ที่สอดคล้องกับ

$$\lambda^* \geq 0 \quad \dots(1)$$

$$\nabla f(x^*) + \mu^{*T} \nabla h(x^*) + \lambda^{*T} \nabla g(x^*) = 0^T \quad \dots(2)$$

$$\lambda^{*T} g(x^*) = 0 \quad \dots(3)$$

เมื่อ  $\mu^*$  คือ เวกเตอร์ของตัวคูณลากรางจ์

$\lambda^*$  คือ เวกเตอร์ของตัวคูณคูน – ตักเกอร์

#### 4.2 วิธีการของนิวตัน (Newton's method)

วิธีการของนิวตันเป็นกระบวนการคำนวณเพื่อหาค่าประมาณของผลเฉลยของปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงที่เท่ากับศูนย์ (รูปที่ 4.2) ดังแสดงได้ดังสมการ

$$f_j(x_i) = 0; \quad i=1..n \text{ และ } j=1..J \quad \dots(4)$$

โดยที่  $n$  = จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า

$J$  = จำนวนสมการแบบไม่เชิงเส้น

จากอนุกรมเทเลอร์ สามารถเขียนสมการสำหรับประมาณค่าของฟังก์ชันในสมการที่ (4) ได้คือ

$$f(x_k + p) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p \quad \dots(5)$$

โดยที่  $\nabla f(x)$  คือ เมตริกซ์ที่มีค่าสมาชิกในแนวคอลัมน์ที่  $i = \nabla f_i(x)$

กำหนดให้ เวกเตอร์ของตัวแปรไม่ทราบค่า  $[x_k]$  คือ เวกเตอร์ผลเฉลยที่ทำให้สมการสำหรับประมาณค่าของฟังก์ชันมีค่าเท่ากับศูนย์ หรือ สามารถแสดงในรูปของสมการได้ดังนี้

$$f(x_k) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p = 0$$

หรือ

$$p = -\nabla f(x_k)^{-T} f(x_k) \quad \dots(6)$$

ดังนั้นเราสามารถหาจุดต่อไปที่ใช้ในการหาค่าประมาณของฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นตรงได้จากสมการ

$$x_{k+1} = x_k + p = x_k - \nabla f(x_k)^{-T} f(x_k) \quad \dots(7)$$

#### 4.3 การประยุกต์ใช้ทฤษฎี KKT และวิธีการของนิวตันกับระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง

ระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่างสำหรับปัญหาปฐพีกลศาสตร์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปของปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงได้ดังนี้

$$\text{ค่าที่มากที่สุด} \quad c^T \sigma_{\text{sys}} \quad \dots(8)$$

โดยที่  $\mathbf{A}_{\text{sys}} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sys}} = \mathbf{b}_{\text{sys}}$

$$f_j(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad j=1..J$$

โดย J คือจำนวนอสมการข้อจำกัดของระบบ

เนื่องจากฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของระบบและสมการข้อจำกัดของระบบเป็นแบบเชิงเส้นตรง ในขณะที่ข้อสมการข้อจำกัดของระบบเป็นฟังก์ชันแบบคอนเวกซ์ ดังนั้นสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีของ KKT กับระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่างได้ หลังจากประยุกต์ใช้ทฤษฎี KKT กับระบบการคำนวณ จะได้สมการและอสมการใหม่ดังนี้

$$-\mathbf{c} + \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu} + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}^*) = \mathbf{0} \quad \dots(9.1)$$

$$\mathbf{A}_{\text{sys}} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{b}_{\text{sys}} \quad \dots(9.2)$$

$$\lambda_j f_j(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0, \quad j=1..J \quad \dots(9.3)$$

$$f_j(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq 0, \quad j=1..J \quad \dots(9.4)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1..J \quad \dots(9.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathbb{R}^n$$

การประยุกต์ใช้ทฤษฎีของ KKT กับระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่างจะได้ระบบปัญหาใหม่ประกอบด้วยระบบของสมการ 3 ชุด และระบบของอสมการ 2 ชุด สมมติว่า  $\boldsymbol{\sigma}^k$  คือ ค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงที่จุดปัจจุบัน (k) เราจะสามารถหาค่าของจุดต่อไป (k+1) ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง  $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$  ได้โดยการประยุกต์ใช้วิธีของนิวตันกับระบบสมการทั้งสามชุด (สมการที่ (9.1), (9.2) และ (9.3)) และสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}^2 f(\boldsymbol{\sigma}^k)(\boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k) + \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}^{k+1} + \sum_{j \in J} \lambda_j^{k+1} \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) = \mathbf{c}^T \quad \dots(10)$$

$$\mathbf{A}_{\text{sys}}(\boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k) = \mathbf{0} \quad \dots(11)$$

$$\lambda_j \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)(\boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k) + \lambda_j^{k+1} f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) = 0, \quad j=1..J \quad \dots(12)$$

โดยสมมติให้ค่าของ  $\lambda_j^k$  มีค่าเป็นบวกสำหรับทุกอสมการข้อจำกัดของระบบ สมการที่ (10) ถึง สมการที่ (12) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างย่อได้ดังนี้

$$\mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}^T \quad \dots(13)$$

$$\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \dots(14)$$

$$\mathbf{G}\mathbf{d} + \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \dots(15)$$

โดยที่  $\mathbf{H} = \nabla_{\sigma}^2 f(\sigma^k)$

$$\mathbf{G}^T = [\nabla f_1(\sigma^k) \dots \nabla f_j(\sigma^k)]$$

$$\mathbf{F} = \text{diag} \left[ \frac{f_j(\sigma^k)}{\lambda_j^k} \right]$$

$$\mathbf{d} = \sigma^{k+1} - \sigma^k$$

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{k+1}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{k+1}$$

สมการที่ (13) ถึงสมการที่ (15) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{v} \quad \dots(16)$$

โดยที่  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{A}_{\text{sys}}^T & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{A}_{\text{sys}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ถึงแม้ว่าสมการที่ (16) จะสามารถแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบของตัวแปรไม่ทราบค่า  $d, \mu, \lambda$  ได้โดยตรง แต่เนื่องจากขนาดของเมตริกซ์  $T$  มีขนาดใหญ่มากทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากด้วยเช่นกัน ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงลำดับขั้นตอนในการทำงานของระบบการคำนวณที่ได้พัฒนาขึ้นรวมทั้ง วิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการที่ (16) ซึ่งใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการหาผลเฉลยแบบโดยตรง

#### 4.4 กระบวนการหลักในการแก้ปัญหาของระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของวิธีขอบเขตล่าง

ในระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่างสามารถสรุปกระบวนการทำงานที่สำคัญออกได้เป็น 5 กระบวนการ ได้แก่

- 1) การหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง
- 2) การหาทิศทางเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงเบื้องต้น
- 3) การตรวจสอบค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงว่าเป็นค่าที่ดีที่สุดหรือไม่
- 4) การปรับทิศทางเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง
- 5) การหาค่าขนาดการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง

##### 4.4.1 กระบวนการในการหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง

เนื่องจากระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้น ในแต่ละขั้นตอนของการคำนวณตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง  $\sigma^k$  จะต้องสอดคล้องกับสมการข้อจำกัด และสมการข้อจำกัด ดังนั้นในขั้นตอนนี้จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 ขั้นตอนย่อย โดยเริ่มต้นจากการคำนวณหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง  $\sigma^0$  ที่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัด จากนั้นจะพิจารณาว่าตัวแปรไม่ทราบค่าเริ่มต้นที่ได้สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดด้วยหรือไม่ ถ้าไม่จะต้องคำนวณเพื่อหาค่าเริ่มต้นที่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดด้วย ดังจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

ค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าจะต้องสอดคล้องกับสมการข้อจำกัด ดังนั้นสามารถแสดงในรูปของสมการได้คือ

$$\mathbf{A}_{\text{sys}} \sigma^0 = \mathbf{b}_{\text{sys}} \quad \dots(17)$$



แต่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์  $\mathbf{A}_{\text{sys}}$  มีขนาดเท่ากับ  $m \times n$  ( $m =$  จำนวนสมการ และ  $n =$  จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า) ดังนั้นเพื่อให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวและคอลัมน์เท่ากัน จะต้องสมมติตัวแปรดัมมี  $\mu$  ซึ่งมีความสัมพันธ์คือ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \\ \mathbf{A}_{\text{sys}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^0 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{\text{sys}} \end{bmatrix}$$

หรือสามารถแสดงในรูปของระบบสมการได้ดังนี้

$$\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu} = -\mathbf{b}_{\text{sys}} \quad \dots(18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = -\mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu} \quad \dots(19)$$

เมื่อหาผลเฉลยของระบบสมการที่ (18) จะได้ค่า  $\mu$  ทำให้สามารถหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงที่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดได้ โดยการแทนค่า  $\mu$  ในสมการที่ (19)

อย่างไรก็ตามในการหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงด้วยเทคนิคนี้จะต้องทำการแฟคเตอร์เมตริกซ์  $\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{A}_{\text{sys}}^T$  ดังนั้นเราจำเป็นต้องตัดสมการที่ไม่จำเป็นออกก่อน โดยสามารถตรวจสอบได้จากค่าสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้จากการแฟคเตอร์รอบแรก ถ้ามีให้ตัดสมการในแถวนั้นทิ้งแล้วทำการแฟคเตอร์ใหม่

เมื่อได้ค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงที่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดแล้ว จะต้องตรวจสอบว่าค่าเริ่มต้นที่ได้สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดด้วยหรือไม่ โดยการหาค่าของสมการ

$$\alpha = \max_{j \in J} f_j(\boldsymbol{\sigma}^0) \quad \dots(20)$$

ถ้าค่า  $\alpha \leq 0$  แสดงว่าค่าเริ่มต้นสอดคล้องกับทั้งสมการข้อจำกัดและสมการข้อจำกัดด้วย และสามารถหาค่าทิศทางเคลื่อนที่เริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงได้จากระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \\ \mathbf{A}_{\text{sys}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^0 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

โดย  $\mu$  คือตัวแปรดัมมี สำหรับหาค่าทิศทางเคลื่อนที่เริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง และสามารถหาค่าได้ในทำนองเดียวกันกับสมการที่ (18) และสมการที่ (19)

ในกรณีที่  $\alpha > 0$  แสดงว่าค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงไม่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดทุกสมการ ดังนั้นเราจำเป็นต้องสร้างระบบสมการเพื่อหาค่าเริ่มต้นที่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดทุกสมการ โดยเรียกกระบวนการนี้ว่า เฟส 1 โดยระบบสมการที่ต้องหาค่าตอบคือ

$$\text{ค่าที่น้อยที่สุด } \alpha_{j+1} \quad \dots(21)$$

$$\text{โดยที่ } \mathbf{A}_\alpha \mathbf{x}_\alpha = \mathbf{b}$$

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = 0, \quad j=1..J$$

$$f_j(\mathbf{x}_\alpha) - \alpha_j \leq 0, \quad j=1..J$$

$$-\alpha_{j+1} \leq 0$$

$$\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^{n+J+1}$$

โดยที่  $\mathbf{x}_\alpha^T = [\boldsymbol{\sigma}^{0T}, \alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}]$  และ  $\mathbf{A}_\alpha$  คือเมตริกซ์  $\mathbf{A}_{\text{sys}}$  ที่เพิ่มจำนวนคอลัมน์เท่ากับ  $J+1$  จะเห็นว่าระบบสมการที่ (21) จะคล้ายกับระบบสมการที่ (8) ดังนั้นจะสามารถใช้ระบบการคำนวณแบบเดียวกันในการหาค่าผลเฉลยของระบบสมการได้ โดยผลเฉลยของระบบสมการที่ (21) จะทำให้ได้ค่า  $\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}$  เท่ากับศูนย์ และค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง  $\boldsymbol{\sigma}^0$  จะได้จากการตัดค่า  $J+1$  ตัวของ  $\mathbf{x}_\alpha$  จากตำแหน่งท้ายสุดทิ้ง ถ้าค่า  $\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}$  ที่ได้ไม่เท่ากับศูนย์ แสดงว่าระบบสมการของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดที่วิเคราะห์อยู่ไม่สามารถหาค่าที่สอดคล้องกับสมการและสมการข้อจำกัดได้

#### 4.4.2 กระบวนการในการหาค่าทิศทางเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงเบื้องต้น

ในขั้นตอนนี้จะเป็นการหาค่าประมาณของตัวแปรไม่ทราบค่าของระบบสมการที่ (16) นั่นคือ  $\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}$  ถ้าพิจารณาสมการที่ (13) จะได้ว่า

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}_0 - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_0) \quad \dots(22)$$

โดย ตัวห้อย 0 หมายความว่า เป็นค่าเบื้องต้นที่ได้จากการคำนวณในขั้นตอนนี้ แทนค่าสมการที่ (22) ในสมการที่ (15) จะได้สมการ

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}^T (\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}_0) \quad \dots(23)$$

โดยที่ เมตริกซ์  $\mathbf{W}$  และ เมตริกซ์  $\mathbf{Q}$  สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\mathbf{W} = \mathbf{G}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}^T - \mathbf{F} \quad \dots(24)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}^T \quad \dots(25)$$

จากสมการที่ (22) และสมการที่ (23) จะสามารถลดรูปตัวแปร  $\lambda_0$  ได้ ซึ่งจะได้

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{D}(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}_0) \quad \dots(26)$$

โดยที่  $\mathbf{D} = \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}^T$

คูณสมการที่ (26) ด้วยเมตริกซ์  $\mathbf{A}_{\text{sys}}$  จะได้สมการที่อยู่ในรูปของสมการที่ (14) คือ

$$\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{d}_0 = \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{D}(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}_0) = 0 \quad \text{หรือ}$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{D}\mathbf{c} \quad \dots(27)$$

โดยที่  $\mathbf{K} = \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{D}\mathbf{A}_{\text{sys}}^T$

การคำนวณในกระบวนการนี้จะเริ่มต้นจากการคำนวณหาค่า  $\boldsymbol{\mu}_0$  จากสมการที่ (27) เมื่อได้ค่า  $\boldsymbol{\mu}_0$  แล้วจะสามารถหาค่าของ  $\mathbf{d}_0$  และ  $\lambda_0$  ได้จากสมการที่ (26) และ (23) ตามลำดับ

#### 4.4.3 กระบวนการสำหรับการตรวจสอบค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงว่าเป็นค่าที่ดีที่สุดหรือไม่

การตรวจสอบค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงว่าสู่เข้าหาค่าที่ดีที่สุดหรือไม่ จะทำการตรวจสอบทั้งหมด 3 ขั้นตอนดังนี้

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}_0 - \mathbf{G}^T \lambda_0\| \leq \varepsilon_c \|\mathbf{c}\| \quad \dots(28)$$

$$\lambda_{0j} \geq -\varepsilon_\lambda \lambda_{\max}, \quad j=1\dots J \quad \dots(29)$$

$$\lambda_{0j} \leq \varepsilon_\lambda \lambda_{\max} \quad \text{if } f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) < -\varepsilon_f, \quad j=1\dots J \quad \dots(30)$$

โดย  $\lambda_{\max} = \max_{j \in J} \lambda_{0j} | \lambda_{0j} > 0$  และ  $\varepsilon_c, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_f \in [10^{-3}, 10^{-2}]$  ซึ่งค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงจะสู่เข้าหาค่าที่ดีที่สุด เมื่อสมการทั้งสามข้างต้นเป็นจริงทั้งหมด

#### 4.4.4 กระบวนการในการปรับทิศทางเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง

พิจารณาสมการที่ (15) จะเห็นได้ว่าถ้ามวลดินเกิดการวิบัติ ( $F = 0$ ) จะทำให้ทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง  $\mathbf{d}_0$  มีทิศทางขนานกับระนาบสัมผัสฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ ดังแสดงในรูปที่ 4.3 ดังนั้นเพื่อให้ทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงสอดคล้องกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติจึงจำเป็นต้องปรับแก้ทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งสามารถทำได้โดยการกำหนดให้ค่าทางด้านขวามือของสมการที่ (15) เป็นค่าติดลบ โดยจะเรียกค่าติดลบนี้ว่าแฟคเตอร์การเบี่ยงเบน

จากสมการที่ (15) ถ้าเราพิจารณาเฉพาะฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติที่  $j$  และกำหนดให้  $\mathbf{d}_j$  คือเวกเตอร์ของทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติ  $f_j$  และใช้สัญลักษณ์  $\bar{\lambda}_j$  แทน  $\lambda_j^k$  ดังนั้นสมการที่ (15) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\nabla f_j^T \mathbf{d}_j + \left(\frac{f_j}{\lambda_j}\right) \lambda_j = 0 \quad \dots(31)$$

จากรูปที่ 4.3 เราสามารถเขียนสมการที่ (31) ในรูปของผลคูณเวกเตอร์แบบสเกลาร์ได้ และสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_j\| \cos \phi_j + \left(\frac{f_j}{\lambda_j}\right) \lambda_j = 0$$

โดยที่  $\phi_j$  คือมุมระหว่างเวกเตอร์  $\nabla f_j$  และเวกเตอร์  $\mathbf{d}_j$

กำหนดให้แฟคเตอร์การเบี่ยงเบนมีค่าเท่ากับ  $\|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_j\| \theta_d$  และเนื่องจากฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติบางชนิดค่าการเปลี่ยนแปลงความโค้งจะขึ้นอยู่กับทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า ดังนั้นค่าการเปลี่ยนแปลงความโค้งของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติจะส่งผลต่อค่าแฟคเตอร์ของการเบี่ยงเบนด้วย จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดสมการที่ (15) จะถูกแทนด้วยสมการ

$$\|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_j\| \cos \phi_j + \left(\frac{f_j}{\lambda_j}\right) \lambda_j = -\theta_d \|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_{0j}\| \chi_j \quad \dots(32)$$

โดยที่  $\theta_d \in (0,1)$

$$\chi_j = \max\left(\frac{\chi_j}{\chi_{\max}}, \chi_{\min}\right)$$

$$\chi_j^0 = \frac{\|\nabla^2 f_j(\sigma^k) \mathbf{d}_{oj}\| R_j}{\|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_{oj}\|}$$

$$\chi_{\max} = \max_{j \in J} \chi_j^0$$

$$\chi_{\min} \in (0,1)$$

$R_j$  คือระยะทางจากหน่วยแรงในรอบปัจจุบันถึงแกนหลักของฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติในระนาบแบบออกคตะฮีดรอน

หรือสามารถแสดงสมการที่ (32) ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{G}\mathbf{d} + \mathbf{F}\lambda = -\theta_d \mathbf{u} \quad \dots(33)$$

โดยที่  $\mathbf{u}$  คือเวกเตอร์ขนาด  $J$  ที่มีสมาชิกคือ

$$u_j = \|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_{oj}\| \chi_j$$

แทนสมการที่ (15) ด้วยสมการที่ (33) และหาทิศทางเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงอีกครั้งตามขั้นตอนที่ 2 จะได้

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{G}^T \lambda) \quad \dots(34)$$

$$\lambda = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}^T (\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}) + \theta_d \mathbf{W}^{-1} \mathbf{u} \quad \dots(35)$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{D}\mathbf{c} - \theta_d \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{u}$$

โดยสามารถหาค่า  $\theta_d$  ได้ด้วยการแทนค่าสมการที่ (35) ลงในสมการที่ (34) จะได้

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}) - \theta_d \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{u} \quad \dots(36)$$

คุณทั้งสองข้างของสมการที่ (36) ด้วย  $(\mathbf{c}^T - \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{A}_{\text{sys}})$  และจัดรูปใหม่โดยอาศัยสมการที่ (14), สมการที่ (22) และสมการที่ (23) จะได้

$$\theta_d = \frac{(\mathbf{c}^T \mathbf{d}_0 - \mathbf{c}^T \mathbf{d})}{\boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{u}}$$

ถ้าสมมติให้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\mathbf{c}^T \mathbf{d}$  และ  $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_0$  คือ  $\mathbf{c}^T \mathbf{d} = \beta \mathbf{c}^T \mathbf{d}_0$  ดังนั้นเราสามารถคำนวณค่า  $\theta_d$  ได้จากสมการ

$$\theta_d = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{d}_0 (1 - \beta)}{\lambda_0^T \mathbf{u}} \quad \dots(37)$$

โดยค่า  $\beta \in (0, 1)$

#### 4.4.5 กระบวนการสำหรับการหาขนาดการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง

เนื่องจากทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 จะสอดคล้องกับสมการข้อจำกัดทั้งหมด ดังนั้นเพื่อให้ตัวแปรไม่ทราบค่าในจุดต่อไปสอดคล้องกับสมการข้อจำกัดทั้งหมดของระบบ จึงจำเป็นต้องหาค่าขนาดการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าจากสมการข้อจำกัดของระบบ โดยสามารถหาได้จากสมการ

$$s = \min_{j \in J} s_j \mid f_j(\boldsymbol{\sigma} + s_j \mathbf{d}) = \delta_f f_j(\boldsymbol{\sigma}) \quad \dots(38)$$

$$\text{โดยที่ } \delta_f = \min \left[ \delta_f^0, \frac{\|\mathbf{c}^T \mathbf{d}_0\|}{\|\mathbf{c}^T \boldsymbol{\sigma}\|} \right]$$

$$\delta_f^0 \in (0, 1)$$

$\delta_f$  คือพารามิเตอร์สำหรับป้องกันไม่ให้อสมการข้อจำกัดลู่เข้าหาค่าศูนย์ภายในการคำนวณเพียงรอบเดียว

#### 4.5 ขั้นตอนในการคำนวณของระบบการคำนวณเชิงเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง

ในการวิเคราะห์หาค่าที่เหมาะสมที่สุด (ดีที่สุด) สำหรับปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์สามารถสรุปเป็นขั้นตอนคร่าวๆ ได้ดังนี้

- 1) สร้างโครงข่ายสามเหลี่ยมสำหรับปัญหาที่ต้องการพิจารณา
- 2) กำหนดค่าคุณสมบัติของมวลดินที่พิจารณา (ค่าความเชื่อมแน่นระหว่างเม็ดดิน ค่ามุมเสียดทานภายในมวลดิน และค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน)

- 3) สร้างสมการข้อจำกัดของปัญหา (สมดุลภายในชิ้นส่วน สมดุลบนขอบไม่ต่อเนื่อง และ สมดุลที่ขอบเขตของปัญหา)
- 4) หาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง
- 5) หาค่าของสมการข้อจำกัด เกรเดียนของสมการข้อจำกัด และเฮสเซียนของสมการข้อจำกัด
- 6) ตรวจสอบว่าค่าปัจจุบันของตัวแปรไม่ทราบค่า เป็นค่าที่ดีที่สุดหรือไม่
- 7) หาขนาดและทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง
- 8) ปรับปรุงค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าใหม่

ขั้นตอนต่างๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของโค้ดเทียมได้ดังนี้

## 1. การหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง

1.1 แคลคตอไรซ์เมตริกซ์  $\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{A}_{\text{sys}}^T$

1.2 ตรวจสอบค่าสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ที่ได้จากการแคลคเตอร์

1.2.1 ถ้าค่าสมาชิกเท่ากับ 0 ลบแถวออก แคลคตอไรซ์  $\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{A}_{\text{sys}}^T$  ใหม่

1.3 หาค่า  $\boldsymbol{\mu}$  จากสมการ  $\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu} = -\mathbf{b}$

1.4 ได้ค่า  $\boldsymbol{\sigma}^0$  จากสมการ  $\boldsymbol{\sigma}^0 = -\mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}$

1.5 หาค่า  $\boldsymbol{\mu}$  จากสมการ  $\mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{c}$

1.6 ได้ค่า  $\mathbf{d}^0$  จากสมการ  $\mathbf{d}^0 = \mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\mu}$

## 2. ตรวจสอบความสอดคล้องของสมการข้อจำกัด

2.1 คำนวณ  $\alpha_{\text{max}} = \max_{j \in J} f_j(\boldsymbol{\sigma}^0)$

2.1.1 ถ้า  $\alpha_{\text{max}} \leq 0$  ไปที่ 7 (ค่าเริ่มต้นสอดคล้องกับสมการข้อจำกัด)

### 3. สร้างระบบปัญหาใหม่ (เพื่อหาค่าที่สอดคล้องกับอสมการข้อจำกัด)

3.1 กำหนดตัวแปรไม่ทราบค่าใหม่  $\mathbf{x}$  โดยที่  $\mathbf{x}^T = [\sigma^{0T}, \alpha_1, \dots, \alpha_{J+1}]$

3.2 เพิ่มสมการ  $\alpha_{j+1} - \alpha_j = 0, \quad j \in J$

3.3 เปลี่ยนอสมการข้อจำกัดเป็น  $f_j(\mathbf{x}) - \alpha_j \leq 0, \quad j \in J$

3.4 เพิ่มสมการ  $-\alpha_{J+1} \leq 0$

3.5 กำหนด  $d_{\alpha_i}^0 = 0$  สำหรับ  $i = 1, \dots, n$  ( $n =$  จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง)

3.6 กำหนด  $d_{\alpha_i}^0 = 1$  สำหรับ  $i = n + 1, \dots, n + J + 1$  ( $J =$  จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าเพิ่มเติม)

3.7 กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่

3.7.1  $c_{\alpha_i} = 0$  สำหรับ  $i = 1, \dots, n + J$

3.7.2  $c_{\alpha_{n+J+1}} = -1$

3.8 ไปที่ 4

3.9 ตรวจสอบค่าที่ดีที่สุดของปัญหาใหม่

3.9.1 ถ้า  $x_{n+J+1}^* \neq 0$

3.9.1.1 แสดงว่าไม่สามารถหาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าที่สอดคล้องกับอสมการข้อจำกัดได้

3.9.2 ถ้า  $x_{n+J+1}^* = 0$

3.9.2.1 เปลี่ยนสมการและอสมการข้อจำกัดกลับเป็นแบบเริ่มต้น

3.9.2.2 กำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าเดิม  $\sigma_i^0 = x_i, \quad i = 1, \dots, n$

3.9.2.3 กำหนดค่าเริ่มต้นของทิศทางการเปลี่ยนแปลงค่า  $d_i^0 = d_{\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n$

3.10 ไปที่ 4



#### 4. กำหนดค่าเริ่มต้นที่จำเป็นในการคำนวณ

4.1 กำหนดค่า  $\beta, \epsilon_c, \epsilon_\lambda, \epsilon_f, \delta_f^0, \delta_\lambda^0, \chi_{\min}$

4.2 กำหนด  $\sigma = \sigma^0$  และ  $d = d^0$

4.3 หาขนาดการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า,  $s$

$$s = \min_{j \in J} s_j \mid f_j(\sigma + s_j d) = \delta_f^0 f_j(\sigma)$$

4.4 ปรับปรุงค่า  $\sigma = \sigma + sd$

4.5 กำหนด  $\bar{\lambda}_j = 1$  สำหรับทุกอสมการ ( $j = 1, \dots, J$ )

#### 5. หาทิศทางเคลื่อนที่เบื้องต้น

5.1 สำหรับทุกๆ อสมการ ( $j = 1, \dots, J$ )

5.1.1 คำนวณ  $\nabla f_j(\sigma)$  และ  $Z_j = \nabla^2 f_j(\sigma)$

5.1.2 หาค่า  $H_j^{-1} = [\bar{\lambda}_j(\epsilon_j I + Z_j)]^{-1}$

5.1.3 หาค่า  $Z_j = R_j Z_j$

5.1.4 คำนวณ  $f_j(\sigma) / \bar{\lambda}_j$  และเก็บค่าไว้ในแนวทแยงของ  $F$

5.1.5 สร้างเมตริกซ์หลัก  $H^{-1}$  จาก  $H_j^{-1}$  และ  $G$  จาก  $\nabla f_j(\sigma)$

5.2 คำนวณหาเมตริกซ์ที่เกี่ยวข้อง

5.2.1  $Q = H^{-1} G^T$

5.2.2  $W = GQ - F$

5.2.3  $D = H^{-1} - QW^{-1}Q^T$

5.2.4  $K = A_{\text{sys}} D A_{\text{sys}}^T$

5.3 ตรวจสอบเมตริกซ์  $K$

5.3.1 ถ้าดีเทอร์มิแนนต์ของ  $\mathbf{K} = 0$  ไปที่ 6

5.4 แก้มการหาค่า  $\mu_0$

5.4.1  $\mathbf{K}\mu_0 = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{c}$

5.5 คำนวณหา  $\lambda_0 = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}^T(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T\mu_0)$

5.6 คำนวณหา  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{D}(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T\mu_0)$

6. ตรวจสอบการลู่เข้าหาค่าที่เหมาะสม (ค่าที่ดีที่สุด)

6.1 หาค่า  $\lambda_{\max} = \max_{j \in J} \lambda_{0j} | \lambda_{0j} > 0$

6.2 ถ้า  $\|\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T\mu_0 - \mathbf{G}^T\lambda_0\| > \varepsilon_c \|\mathbf{c}\|$  ไปที่ 7

6.3 สำหรับทุกๆ อสมการ  $j=1, \dots, J$

6.3.1 ถ้า  $\lambda_{0j} < -\varepsilon_\lambda \lambda_{\max}$  ไปที่ 7

6.3.2 ถ้า  $\lambda_{0j} > \varepsilon_\lambda \lambda_{\max}$  และ  $f_j(\sigma) < -\varepsilon_j$  ไปที่ 7

6.4 จบการทำงานและ  $\sigma^*$  คือค่าที่ดีที่สุด

7. เบี่ยงเบนทิศทางการเคลื่อนที่เบื้องต้น

7.1 สำหรับทุกๆ อสมการ  $j=1, \dots, J$  คำนวณหาค่า

7.1.1  $\chi_j^0 = \|\mathbf{Z}_j \mathbf{d}_{0j}\| / (\|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_{0j}\|)$

7.2 คำนวณ  $\chi_{\max} = \max_{j \in J} \chi_j^0$

7.3 สำหรับทุกๆ อสมการ  $j=1, \dots, J$

7.3.1 คำนวณ  $\chi_j = \max[\chi_j^0 / \chi_{\max}, \chi_{\min}]$

7.3.2 คำนวณ  $\mathbf{u}_j = \|\nabla f_j\| \|\mathbf{d}_{0j}\| \chi_j$

$$7.4 \text{ คำนวณ } \theta_d = \min[(1 - \beta)\mathbf{c}^T \mathbf{d}_0 / |\lambda_0^T \mathbf{u}|, 1]$$

7.5 แก้ระบบสมการหาค่า  $\mu$

$$\mathbf{K}\mu = \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{D}\mathbf{c} - \theta_d \mathbf{A}_{\text{sys}} \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{u}$$

$$7.6 \text{ หาค่า } \mathbf{d} = \mathbf{D}(\mathbf{c} - \mathbf{A}_{\text{sys}}^T \mu) - \theta_d \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{u}$$

8. หาขนาดการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า

$$8.1 \text{ กำหนด } \delta_f = \min[\delta_f^0, |\mathbf{c}^T \mathbf{d}_0| / |\mathbf{c}^T \boldsymbol{\sigma}|]$$

8.2 หาขนาดการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่า

$$s = \min_{j \in J} |f_j(\boldsymbol{\sigma} + s_j \mathbf{d}) - \delta_f f_j(\boldsymbol{\sigma})|$$

9. การปรับปรุงค่า

$$9.1 \text{ ปรับปรุงค่า } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} + s\mathbf{d}$$

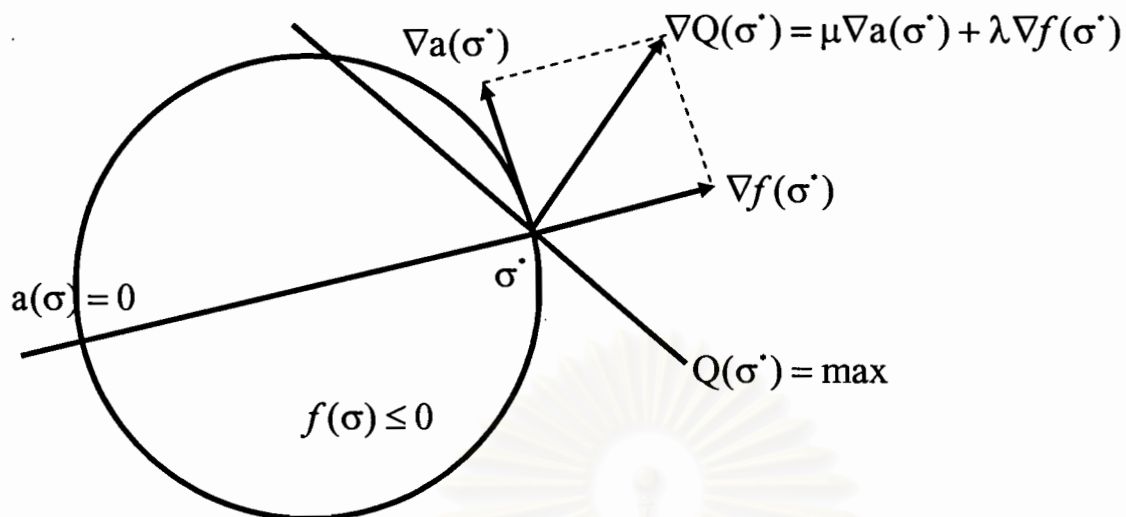
9.2 กำหนดค่า  $\delta_\lambda$  ใหม่

$$\delta_\lambda = \min[\delta_\lambda^0, \|\mathbf{d}\| / \|\boldsymbol{\sigma}\|]$$

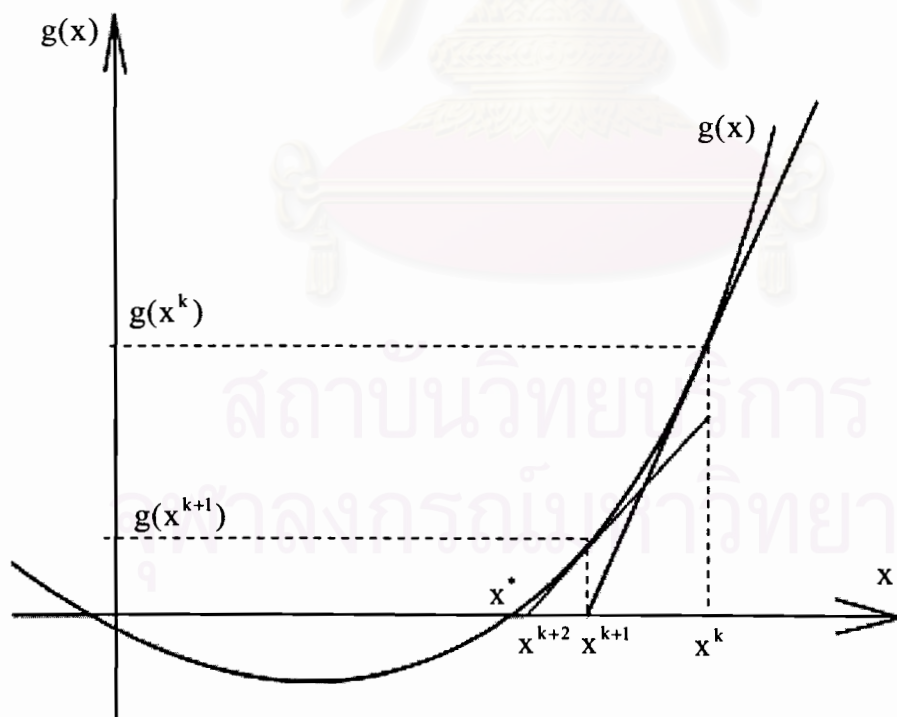
9.3 สำหรับทุกๆ อสมการ  $j = 1, \dots, J$

$$\bar{\lambda}_j = \max[\lambda_{0j}, \delta_\lambda \lambda_{\max}]$$

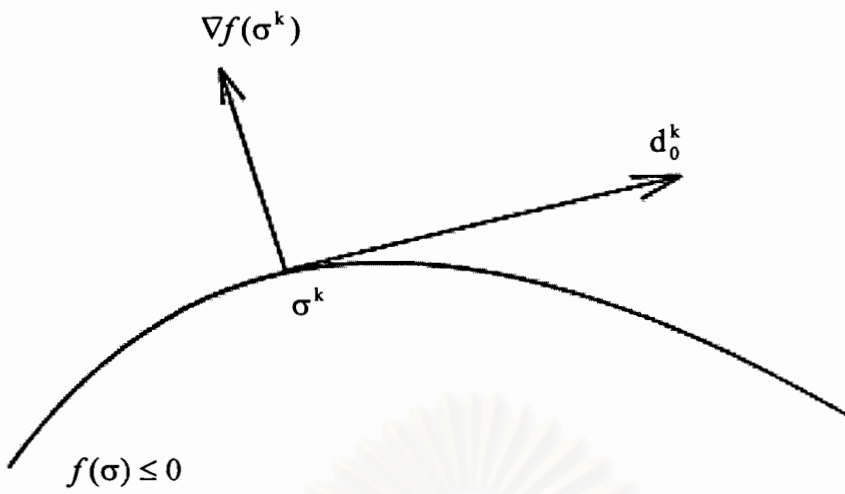
9.4 กลับไปที่ 5



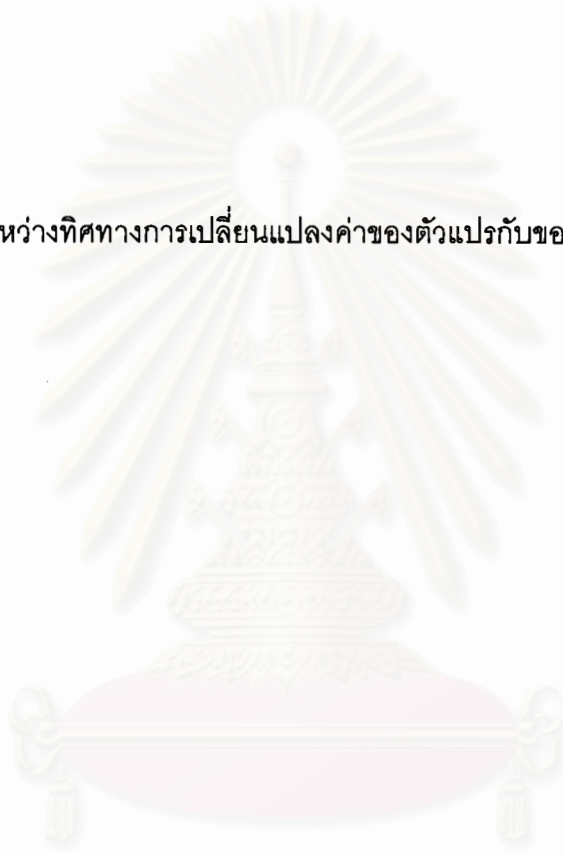
รูปที่ 4.1 คุณสมบัติของ Kuhn-Tucker optimality condition (KKT)



รูปที่ 4.2 วิธีการของนิวตัน



รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างทิศทาง การเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปร กับขอบเขตการวิบัติ



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 5

### การทดสอบระบบการคำนวณ

#### 5.1 บทนำ

ระบบการคำนวณเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้นมีพื้นฐานมาจากทฤษฎีขอบเขตล่างร่วมกับหลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกชิ้นส่วน และอาศัยหลักการของเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุดมาใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาที่สร้างขึ้น เพื่อตรวจสอบความสามารถและความถูกต้องของระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้น ในบทนี้จะเป็นการทดสอบประสิทธิภาพของระบบการคำนวณ โดยการให้ระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหาตัวอย่าง และเปรียบเทียบค่าที่วิเคราะห์ได้กับผลเฉลยแม่นยำ หรืองานวิจัยที่ผ่านมา โดยเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ผลมีความเร็ว cpu เท่ากับ 2.4 GHz, ram 384 MB และใช้ระบบปฏิบัติการ Windows XP (pro.)

#### 5.2 เวลาในการคำนวณ

รูปที่ 5.1 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหากับจำนวนเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (เวลา/จำนวนรอบในการคำนวณ) โดยเปรียบเทียบระหว่างเวลาที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมด กับเวลาที่ใช้เฉพาะในส่วนของการวนการ 2-stage algorithm จากกราฟของเวลาที่ใช้ทั้งหมดเห็นได้ว่าเวลาที่ใช้ในการคำนวณแปรผันเพิ่มขึ้นแบบยกกำลัง 3 กับจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา ในขณะที่กราฟของเวลาที่ใช้เฉพาะในส่วนของการวนการ 2-stage algorithm แปรผันเพิ่มขึ้นแบบยกกำลัง 2 โดยผลต่างของเวลาทั้งสองคือจำนวนเวลาที่ใช้ในการหาสมการที่เกินความจำเป็น เห็นได้ว่าเวลาที่ใช้ในการหาสมการที่เกินจำเป็นมีผลต่อเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาค่อนข้างมาก ดังนั้นถ้าสามารถหากระบวนการในการหาสมการที่เกินจำเป็นซึ่งใช้เวลาน้อยลง จะทำให้ระบบการคำนวณใช้เวลาในการคำนวณน้อยลงตามไปด้วย

#### 5.3 ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหา

ปัญหาที่ทราบผลเฉลยแม่นยำ หรือปัญหาที่เคยมีผู้วิจัยมาแล้วได้ถูกนำมาทดสอบระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้น และเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลเฉลยแม่นยำหรืองานวิจัยที่ผ่านมา เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของระบบการคำนวณที่พัฒนา โดยสามารถสรุปเป็นปัญหาต่างๆ ได้ดังนี้

**ปัญหาตัวอย่างที่ 1** การวิเคราะห์ปัญหาฐานรากสี่เหลี่ยมแบบต่อเนื่องบนดินเหนียวที่มีคุณสมบัติแบบเนื้อเดียวกัน

Terzaghi (1943) ได้เสนอสมการสำหรับประมาณค่าความสามารถในการรับน้ำหนักประลัย สำหรับฐานรากต่อเนื่องแบบหยึดหยุ่น แสดงได้ดังนี้

$$q_{ult} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma \quad (1)$$

โดยที่  $N_c, N_q, N_\gamma$  คือค่าแฟคเตอร์สำหรับคำนวณค่าความสามารถในการรับน้ำหนักประลัยของฐานรากต่อเนื่อง ซึ่งแสดงผลของค่าความเชื่อมแน่นระหว่างเม็ดดิน ( $c$ ) ผลเนื่องจากแรงกระทำภายนอก ( $q$ ) และผลเนื่องจากหน่วยน้ำหนักของมวลดิน ( $\gamma$ ) โดยค่าแฟคเตอร์ทั้งหมดเป็นฟังก์ชันของค่ามุมเสียดทานภายในระหว่างเม็ดดิน

สำหรับปัญหาที่ไม่มีแรงกระทำภายนอกและสมมุติให้หน่วยน้ำหนักของมวลดินมีค่าเท่ากับศูนย์ สามารถแสดงสมการที่ (1)ให้อยู่ในรูปของสมการ

$$q_{ult} = cN_c \quad (2)$$

ในการทดสอบระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้น จะใช้โครงข่ายสามเหลี่ยมแบบต่างๆ ในการวิเคราะห์ โดยรูปโครงข่ายสามเหลี่ยมและผลการวิเคราะห์ได้แสดงไว้ในภาคผนวก รูปที่ 5.2 แสดงตัวอย่างโครงข่ายสามเหลี่ยมและผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่อง ปัญหาตัวอย่างที่ใช้ทดสอบมีขอบเขต คุณสมบัติของมวลดิน และผลการวิเคราะห์ซึ่งสามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

**ตารางที่ 5.1** แสดงผลการวิเคราะห์ค่า  $N_c$  ของฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียว

โครงข่ายสามเหลี่ยมแบบที่	1	2	3
ลักษณะโครงข่าย	หยาบ	ปานกลาง	ละเอียด
ความกว้างของฐานราก (B)	1.0	2.0	3.0
ความกว้างของขอบเขตมวลดิน	7(B/2)	5(B/2)	5(B/2)
ความลึกของขอบเขตมวลดิน	5(B/2)	4(B/2)	3(B/2)
ค่าความเชื่อมแน่นของมวลดิน, ตัน/ตร.ม.	1.0	1.0	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายใน, องศา	0.0	0.0	0.0

ค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0	0.0	0.0
น้ำหนักกระทำมากที่สุด, ตัน	4.6907	9.7313	14.8273
$N_{c,exact}$	5.1414		
$N_c$	4.6907	4.8656	4.9424
(%error)	(-8.7)	(-5.4)	(-3.9)

โดยค่าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า  $N_c$  สำหรับฐานรากสี่เหลี่ยมแบบต่อเนื่องกรณีที่ดินไม่มีค่ามุมเสียดทานภายในมีค่าเท่ากับ 5.1414 เห็นได้ว่าค่าขอบเขตล่างที่ดีที่สุดที่วิเคราะห์ได้มีค่าต่ำกว่าค่าผลเฉลยแม่นยำตรงเท่ากับ 3.9%

**ปัญหาตัวอย่างที่ 2** การวิเคราะห์ปัญหาฐานรากสี่เหลี่ยมแบบต่อเนื่องบนดินที่มีทั้งค่าความเชื่อมั่นแน่นและค่ามุมเสียดทานภายใน

สำหรับฐานรากสี่เหลี่ยมแบบต่อเนื่องที่วางอยู่บนดินที่มีทั้งค่าความเชื่อมั่นแน่นและมุมเสียดทาน Prandtl ได้เสนอสมการสำหรับคำนวณค่าผลเฉลยแม่นยำตรงดังนี้

$$q/c' = (\exp(\pi \tan \phi') \tan^2(45 + \phi'/2) - 1) \cot \phi' \quad (3)$$

โดย  $c'$  คือ ค่าความเชื่อมั่นแน่นประสิทธิผลระหว่างเม็ดดิน

$\phi'$  คือ ค่ามุมเสียดทานภายในประสิทธิผล

รูปที่ 5.3 แสดงตัวอย่างโครงข่ายสามเหลี่ยมและผลการวิเคราะห์ปัญหาฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ามุมเสียดทานภายใน สำหรับรูปแสดงโครงข่ายสามเหลี่ยมอื่นๆที่ใช้ในการวิเคราะห์และผลการวิเคราะห์ก็ได้แสดงไว้ในภาคผนวก โดยปัญหาตัวอย่างมีขอบเขต คุณสมบัติและผลการวิเคราะห์ดังแสดงในตาราง

**ตารางที่ 5.2** แสดงผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักประลัยของฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ามุมเสียดทานภายใน

โครงข่ายสามเหลี่ยมแบบที่	1	2	3
ลักษณะโครงข่าย	หยาบ	ปานกลาง	ละเอียด
ความกว้างของฐานราก (B)	1.0	2.0	3.0
ความกว้างของขอบเขตมวลดิน	5(B/2)	5(B/2)	5(B/2)
ความลึกของขอบเขตมวลดิน	4(B/2)	4(B/2)	3(B/2)



ค่าความเชื่อมั่นของมวลดิน, ตัน/ตร.ม.	1.0	1.0	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายใน, องศา	35.0	35.0	35.0
ค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0	0.0	0.0
น้ำหนักกระทำมากที่สุด, ตัน	33.7671	79.8350	126.8424
$q/c_{u,exact}$	46.14		
$q/c_u$	33.7671	39.9175	42.2808
(%error)	(-26.8)	(-13.5)	(-8.3)

สำหรับดินที่มีค่ามุมเสียดทานภายในเท่ากับ 35 องศา จากสมการที่ (3) จะได้ค่าผลเฉลยแม่นยำตรงของ  $q/c'$  เท่ากับ 46.14 เห็นได้ว่าค่าขอบเขตล่างที่วิเคราะห์ได้จะมีค่าต่ำกว่าผลเฉลยแม่นยำอยู่ประมาณ 8.3%

**ปัญหาตัวอย่างที่ 3** การวิเคราะห์ฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องที่วางอยู่บนดินเหนียวที่มีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเนื้อเดียวกันโดยค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาฐานรากสี่เหลี่ยมแบบต่อเนื่องที่วางบนดินที่มีคุณสมบัติไม่เป็นเนื้อเดียวกันโดยค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน Davis และ Booker (1973) ได้เสนอค่า bearing capacity factor ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$F = \frac{Q/(Bc_{u0})}{(2 + \pi) + (\rho B / c_{u0}) / 4} \quad (4)$$

โดยที่  $Q$  = แรงกระทำที่ทำให้มวลดินเกิดการวิบัติ

$B$  = ความกว้างของฐานราก

$c_{u0}$  = กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำที่ผิวดิน

$\rho$  = อัตราการเปลี่ยนแปลงค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำ

ในปีค.ศ. 1996 Ukritchon ได้เสนอสมการสำหรับประมาณค่าผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับค่า bearing capacity factor สำหรับฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องแบบผิวเรียบและฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องแบบผิวหยาบตามลำดับ

bearing capacity factor สำหรับกรณีฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องผิวเรียบ

$$F = \frac{2 + \pi + (\rho B / c_{u0}) / 4 + 0.7106(\rho B / c_{u0})^{0.6132}}{(2 + \pi) + (\rho B / c_{u0}) / 4} \quad (5)$$

bearing capacity factor สำหรับกรณีฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องผิวหยาบ

$$F = \frac{2 + \pi + (\rho B / c_{u0}) / 4 + 1.2856(\rho B / c_{u0})^{0.5898}}{(2 + \pi) + (\rho B / c_{u0}) / 4} \quad (6)$$

รูปที่ 5.4 แสดงตัวอย่างโครงข่ายสามเหลี่ยมและผลการวิเคราะห์ที่ได้ สำหรับรูปโครงข่ายสามเหลี่ยมและผลการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างอื่นๆ ได้แสดงไว้ในภาคผนวก โดยสามารถสรุปขอบเขต คุณสมบัติของมวลดิน และผลการวิเคราะห์ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 5.3 แสดงคุณสมบัติของมวลดินและขอบเขตของปัญหาฐานรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียวที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก

ความกว้างของฐานราก (B)	2.0
ความกว้างของขอบเขตมวลดิน	7(B/2)
ความลึกของขอบเขตมวลดิน	6(B/2)
ค่าความเชื่อมั่นแน่นของมวลดินที่ผิวดิน, ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายใน, องศา	0.0
ค่าน้ำหนักหน่วยของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

ตารางที่ 5.4 แสดงผลการวิเคราะห์ค่า bearing capacity factor ของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก  $p = 200, 100, 50, 25, 33, 12.5$  และ 10

$C_{u0}/(\rho B)$	$F_{smooth}(\%error)$	$F_{s,exact}$	$F_{rough}(\%error)$	$F_{r,exact}$
0.0025	1.052 (-13.6)	1.218	1.061 (-19.5)	1.318
0.005	1.096 (-16.3)	1.310	1.107 (-23.2)	1.442
0.01	1.166 (-15.6)	1.382	1.240 (-24.4)	1.642
0.02	1.267 (-11.7)	1.435	1.317 (-23.6)	1.726
0.03	1.315 (-9.5)	1.453	1.404 (-19.9)	1.752
0.04	1.290 (-11.2)	1.453	1.414 (-19.5)	1.758
0.05	1.339 (-7.5)	1.447	1.409 (-18.9)	1.738

ตารางที่ 5.5 แสดงผลการวิเคราะห์ค่า bearing capacity factor ของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก  $p = 8, 6, 4, 2.5, 1.5, 0.75$  และ 0

$(pB)/C_{u0}$	$F_{smooth}(\%error)$	$F_{s,exact}$	$F_{rough}(\%error)$	$F_{r,exact}$
16	1.333 (-7.1)	1.435	1.394 (-19.3)	1.729
12	1.285 (-9.0)	1.412	1.361 (-19.4)	1.688
8	1.280 (-6.4)	1.368	1.330 (-17.8)	1.618
5	1.219 (-6.6)	1.305	1.260 (-20.7)	1.529
3	1.155 (-5.2)	1.218	1.179 (-16.8)	1.418
1.5	1.079 (-4.7)	1.132	1.094 (-13.8)	1.270
0	0.942 (-5.8)	1.000	0.956 (-4.4)	1.000

รูปที่ 5.5 และรูปที่ 5.6 แสดงกราฟเปรียบเทียบค่า bearing capacity factor ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตพลาสติกกับค่าผลเฉลยแม่นยำตรง เห็นได้ว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณจะมีค่าต่ำกว่าค่าผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นคือ ผลการวิเคราะห์ที่ได้เป็นค่าขอบเขตล่างของค่า bearing capacity factor อย่างไรก็ตามผลการวิเคราะห์ที่ได้มีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนค่อนข้างสูง ซึ่งอาจจะเป็นผลจากลักษณะของโครงข่ายที่ใช้ในการวิเคราะห์

ปัญหาตัวอย่างที่ 4 การวิเคราะห์ปัญหามวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยัน (Unsupported Vertical Cut)

รูปที่ 5.7 แสดงรูปมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้างของดินเหนียวที่มีคุณสมบัติแบบเนื้อเดียวกัน ซึ่งสามารถแสดงตัวเลขเสถียรภาพแบบไม่ระบายน้ำได้ในรูปของสมการคณิตศาสตร์ดังนี้

$$N = \frac{\gamma H}{S_u} \quad (7)$$

โดย  $\gamma$  = หน่วยน้ำหนักรวมของดินเหนียว

$H$  = ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง

$S_u$  = กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำของดินเหนียว

รูปที่ 5.8 แสดงการวิเคราะห์ค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างอย่างง่ายของตัวเลขเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้างของดินเหนียว ซึ่งนำเสนอโดย Atkinson ในปี ค.ศ. 1961 โดยการวิเคราะห์ขอบเขตบนจะสมมุติให้กลไกการวิบัติประกอบด้วยระนาบการเคลื่อนตัวของมวลดิน 1 ระนาบ (ทำมุม 45 องศากับแนวตั้ง) โดยให้ค่าขอบเขตบนของตัวเลขเสถียรภาพ  $\gamma H/S_u = 4$  ในขณะที่ค่าขอบเขตล่างของตัวเลขเสถียรภาพมีค่า  $\gamma H/S_u = 2$  ดังนั้นจะเห็นได้ว่าค่าตัวเลขเสถียรภาพที่แท้จริงอยู่ในช่วง  $2 \leq \gamma H/S_u \leq 4$  ต่อมาในปี ค.ศ. 1975 Chen ได้สมมุติกลไกการวิบัติแบบเส้นโค้งลอคการรึทิม และสามารถวิเคราะห์หาค่าขอบเขตบนของตัวเลขเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันได้ค่า  $\gamma H/S_u = 3.83$  และสามารถวิเคราะห์ค่าขอบเขตล่างได้  $\gamma H/S_u = 2.83$  ดังนั้นจะได้ขอบเขตของตัวเลขเสถียรภาพคือ  $2.83 \leq \gamma H/S_u \leq 3.83$  ต่อมาในปี ค.ศ. 1980 Ukritchon ได้วิเคราะห์หาค่าขอบเขตล่างด้วยวิธีการประยุกต์หลักการหาค่าที่ดีที่สุด ร่วมกับวิธีขอบเขตพลาสติกและใช้เทคนิคการแก้ปัญหาแบบเชิงเส้นตรงในการวิเคราะห์ตัวเลขเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง ซึ่งได้ค่าขอบเขตอยู่ภายในช่วง  $\pm 3.5\%$  คือ  $3.634 \leq \gamma H/S_u \leq 3.902$

รูปที่ 5.9 และรูปที่ 5.10 แสดงโครงข่ายสามเหลี่ยมที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าขอบเขตล่างของตัวเลขเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง ด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตพลาสติก และใช้วิธีการแก้ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรง โดยกำหนดให้มวลดินในแนวตั้งมีความสูง 1.0 เมตร กว้าง 7.0 เมตร และลึก 2.5 เมตร และมีคุณสมบัติในการรับแรงเฉือนคือ มีค่าความเชื่อมแน่นเท่ากับ 1.0 ตัน/ตร.ม. และค่ามุมเสียดทานภายในเท่ากับ 0.0 องศา ซึ่งให้ผลการวิเคราะห์ขอบเขตล่างของตัวเลขเสถียรภาพเท่ากับ  $\gamma H/S_u = 3.448$  และ  $\gamma H/S_u = 3.541$  ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับค่าที่วิเคราะห์ได้โดย Ukritchon

ปัญหาตัวอย่างที่ 5 การวิเคราะห์ปัญหามวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง (Braced Vertical Cut)

ในตัวอย่างนี้เป็นการทดสอบระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นกับปัญหามวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้างสำหรับดินเหนียวที่มีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกัน รูปที่ 5.11 แสดงตัวอย่างโครงข่ายสามเหลี่ยมและผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันทางด้านข้าง สำหรับรูปโครงข่ายสามเหลี่ยมและผลการวิเคราะห์อื่นๆ ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ตารางที่ 5.6 แสดงผลการวิเคราะห์ตัวเลขเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งที่มีค้ำยันด้านข้างที่อัตราส่วน  $B/H$  เท่ากับ 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 และอัตราส่วน  $H/B$  เท่ากับ 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 และ 3.0 ตามลำดับ

ตารางที่ 5.6 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันทางด้านข้าง

B/H	N	Ukritchon (1998)	H/B	N	Ukritchon (1998)
1.0	6.261	6.353	1.0	6.261	6.353
1.5	6.099	-	1.5	6.806	6.640
2.0	6.044	5.993	2.0	6.908	6.908
3.0	6.023	5.833	2.5	7.062	7.103
4.0	5.805	5.689	3.0	7.207	7.263
5.0	5.797	5.591	-	-	-

และสามารถแสดงกราฟของผลการวิเคราะห์ที่ได้ดังรูปที่ 5.12 จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขเสถียรภาพและอัตราส่วนความกว้างต่อความสูง เห็นได้ว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณอยู่ต่ำกว่าค่าขอบเขตบนและมีค่าใกล้เคียงกับค่าขอบเขตล่างของผลการวิเคราะห์ของ Ukritchon (1998) ซึ่งแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีแบบเชิงเส้นตรง และเมื่อเปรียบเทียบกับตัวเลขเสถียรภาพที่เสนอโดย Terzaghi (1943) ซึ่งอาศัยหลักการของวิธี limit equilibrium ในการวิเคราะห์ และสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$N = \frac{\gamma H}{S_u} = 5.7 + \sqrt{2} \left( \frac{H}{B} \right) \quad (8)$$

จากกราฟเห็นได้ว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณจะมีค่าต่ำกว่าค่าที่ได้จากสมการของ Terzaghi แสดงให้เห็นว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้เป็นค่าขอบเขตล่างของตัวเลขเสถียรภาพ

#### ปัญหาตัวอย่างที่ 6 การวิเคราะห์ปัญหาอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว

ตัวอย่างปัญหาอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียวสามารถแสดงในรูปของปัญหาหระนาบความเครียดได้ดังรูปที่ 5.13 โดยอุโมงค์กว้าง B และอยู่ลึกจากผิวดินเท่ากับ H และสมมติให้ดินมีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกัน ซึ่งแรงที่กระทำต่ออุโมงค์ประกอบด้วยหน่วยแรงภายในอุโมงค์ หน่วยแรงที่ผิวดิน และหน่วยน้ำหนักของมวลดินโดยรอบอุโมงค์ โดยหน่วยแรงที่ผิวดินและหน่วยน้ำหนักของมวลดินจะเป็นแรงพยายามทำให้อุโมงค์เกิดการวิบัติ ในขณะที่หน่วยแรงภายในอุโมงค์จะพยายามต้านทานไม่ให้อุโมงค์เกิดการวิบัติ เพื่อให้สะดวกในการพิจารณาเราสามารถพิจารณา

เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมจากพารามิเตอร์ 3 ค่าได้แก่  $H/B$ ,  $\gamma B/c_u$  และ  $(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$  เห็นได้ว่าพารามิเตอร์ 2 ค่าแรกจะพิจารณาผลเนื่องจากความลึกจากผิวดินและผลของหน่วยน้ำหนักของมวลดินที่มีผลต่อเสถียรภาพของอุโมงค์ตามลำดับ

ตารางที่ 5.7 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียวที่อัตราส่วน  $H/B = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$  และ 5.0

H/B	$\gamma B/c_u$		H/B	$\gamma B/c_u$	
	0	1		0	1
0.3	0.420	0.120	0.9	1.609	0.700
0.4	0.630	0.231	1.0	1.821	0.768
0.5	0.795	0.294	2.0	2.865	0.538
0.6	1.009	0.409	3.0	3.478	0.127
0.7	1.243	0.541	4.0	3.930	-0.396
0.8	1.433	0.633	5.0	4.301	-1.034

รูปที่ 5.14 แสดงตัวอย่างโครงข่ายสามเหลี่ยมที่ใช้ในการวิเคราะห์ค่าขอบเขตล่างของพารามิเตอร์  $(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$  โดยสามารถสรุปผลการวิเคราะห์หาค่า  $(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$  ที่ค่าพารามิเตอร์  $H/B$  เท่ากับ 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 และ 5.0 ได้ดังตารางที่ 5.7 และเมื่อนำค่าผลการวิเคราะห์ที่ได้มาพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง  $H/B$  และ  $(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$  ดังแสดงในรูปที่ 5.15 และรูปที่ 5.16 โดยเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นกับผลการวิเคราะห์ของ Assadi และ Sloan (1991) ซึ่งวิเคราะห์ด้วยวิธีการแบบเชิงเส้นตรง จากกราฟเห็นได้ว่าในช่วงอัตราส่วน  $H/B < 1$  ผลการวิเคราะห์ที่ได้จะมีค่าต่ำกว่าผลการวิเคราะห์ของ Assadi เล็กน้อย ในขณะที่เมื่ออัตราส่วน  $H/B \geq 1$  ผลการวิเคราะห์ที่ได้จะมีค่ามากกว่าผลการวิเคราะห์ของ Assadi หรือก็คือได้ค่าขอบเขตล่างที่ดีกว่า

**ปัญหาตัวอย่างที่ 7** การวิเคราะห์ปัญหาอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเนื้อเดียวกัน โดยกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน

สำหรับตัวอย่างนี้เป็นการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเนื้อเดียวกัน โดยกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำแปรผันเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้นตรงตามความลึกจากผิวดิน อุโมงค์วงกลมมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ  $D$  และผิวนบนสุด

ของอุโมงค์อยู่ลึกจากผิวดินเท่ากับ  $C$  โดยการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์จะสมมติให้เป็นปัญหาแบบระนาบความเครียดดังแสดงในรูปที่ 5.17 ซึ่งกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำของมวลดินแปรผันแบบเชิงเส้นตรงตามสมการ

$$c_u(z) = c_{u0} + pz \quad (9)$$

โดยที่  $c_{u0}$  = กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำที่ผิวดิน

$$p = dc_u / dz = \text{อัตราการเปลี่ยนแปลงกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำตามความลึก}$$

เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมสามารถแสดงในรูปของพารามิเตอร์ 2 ค่าได้แก่  $(\sigma_s - \sigma_t) / c_{u0}$  และ  $\gamma D / c_{u0}$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันของอัตราส่วน  $pD / c_{u0}$  และ  $C/D$  รูปที่ 5.18 แสดงตัวอย่างโครงข่ายสามเหลี่ยมที่ใช้ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน และสามารถสรุปผลการวิเคราะห์ที่อัตราส่วน  $C/D$  เท่ากับ 1.0, 2.0 และ 3.0 ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 5.8 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นเหนียวที่กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก ( $C/D = 1.0$ )

$pD/c_{u0}$	$\gamma D/c_{u0}$			
	0	1	2	3
0.00	2.317	1.134	0.097	-1.422
0.25	2.785	1.647	0.473	-0.740
0.50	3.235	2.108	0.975	-0.192
0.75	3.686	2.563	1.437	0.302
1.00	4.130	3.011	1.888	0.760

ตารางที่ 5.9 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นเหนียวที่กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก ( $C/D = 2.0$ )

$pD/c_{u0}$	$\gamma D/c_{u0}$			
	0	1	2	3
0.00	3.346	1.061	-1.291	-3.726
0.25	4.716	2.501	-0.253	-2.035

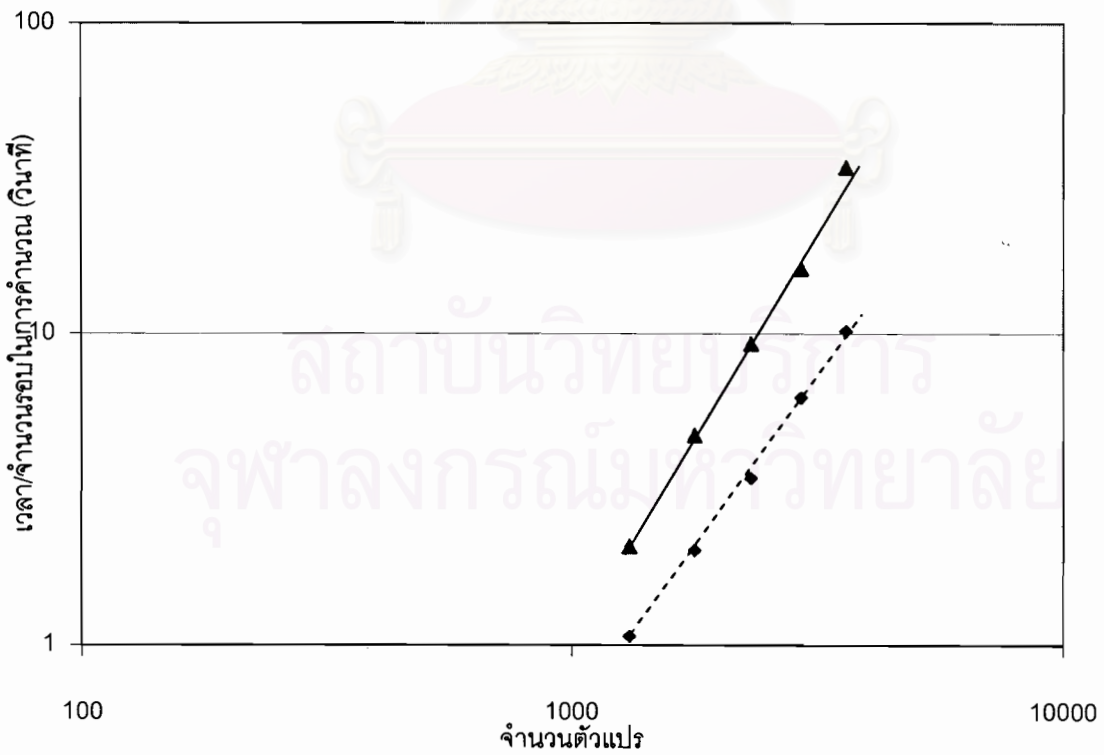
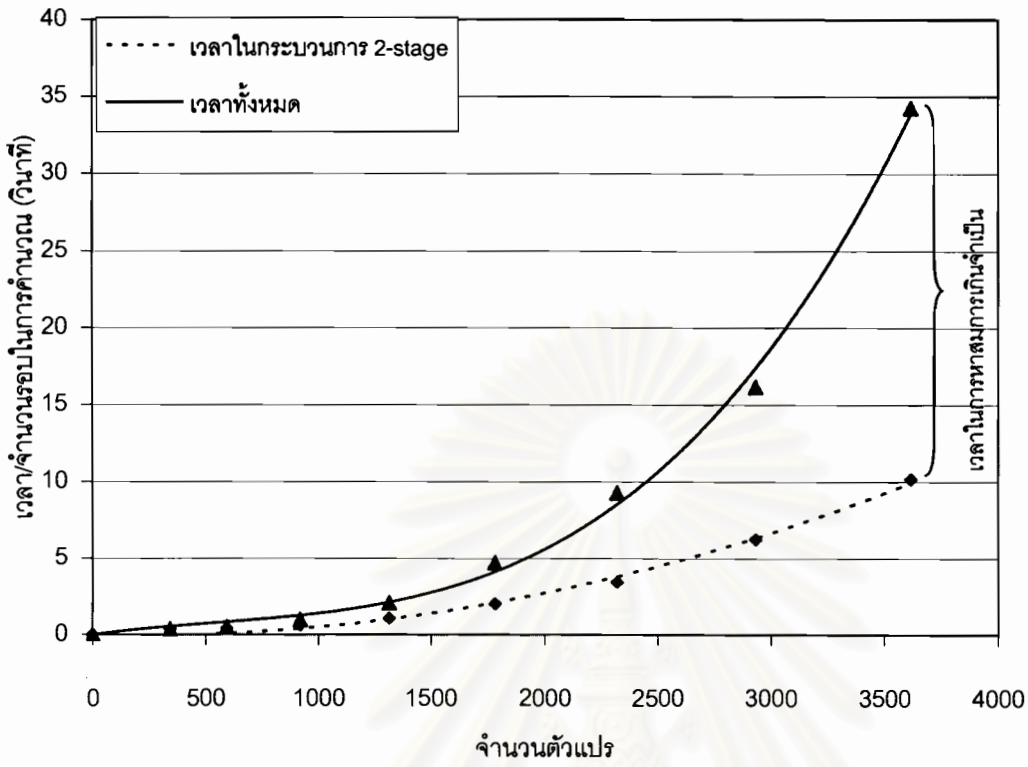
0.50	6.026	3.839	1.629	-0.601
0.75	7.319	5.141	2.954	0.747
1.00	8.606	6.435	4.253	2.064

ตารางที่ 5.10 แสดงผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอิมบดวงกลมในชั้นเหนียวที่กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึก ( $C/D = 3.0$ )

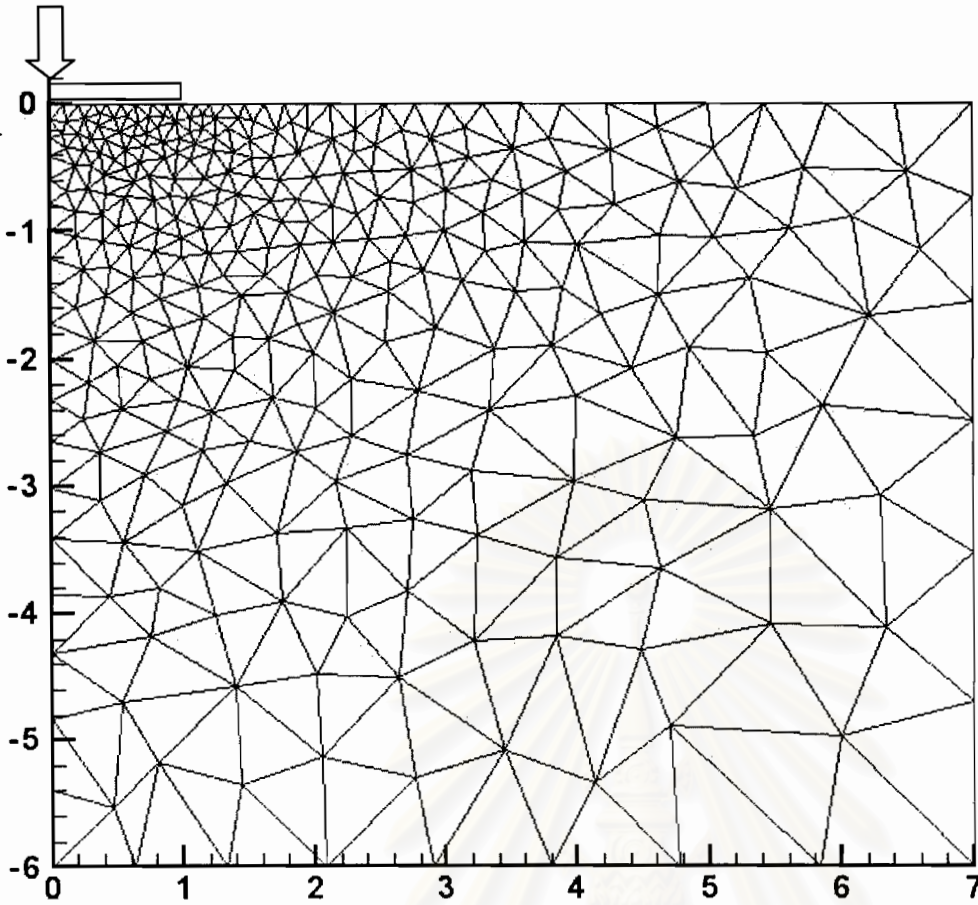
$\rho D/c_{u0}$	$\gamma D/c_{u0}$			
	0	1	2	3
0.00	4.001	0.667	-2.741	-6.293
0.25	6.439	3.191	-0.086	-3.412
0.50	8.813	5.582	2.336	-0.925
0.75	11.162	7.944	4.716	1.472
1.00	13.494	10.291	7.073	3.841

รูปที่ 5.19 - รูปที่ 5.21 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นกับผลการวิเคราะห์ของ Assadi และ Sloan (1993) ที่อัตราส่วน  $C/D$  เท่ากับ 1.0, 2.0 และ 3.0 ตามลำดับ จากกราฟเห็นได้ว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้,  $(\sigma_s - \sigma_r)/c_{u0}$  อยู่ภายในค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของผลการวิเคราะห์ที่ได้จาก Assadi ซึ่งแสดงว่าระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นให้ค่าขอบเขตล่างที่ดีกว่าผลการวิเคราะห์ของ Assadi และทำให้ขอบเขตของผลเฉลยแม่นยำตรงมีค่าแคบลง





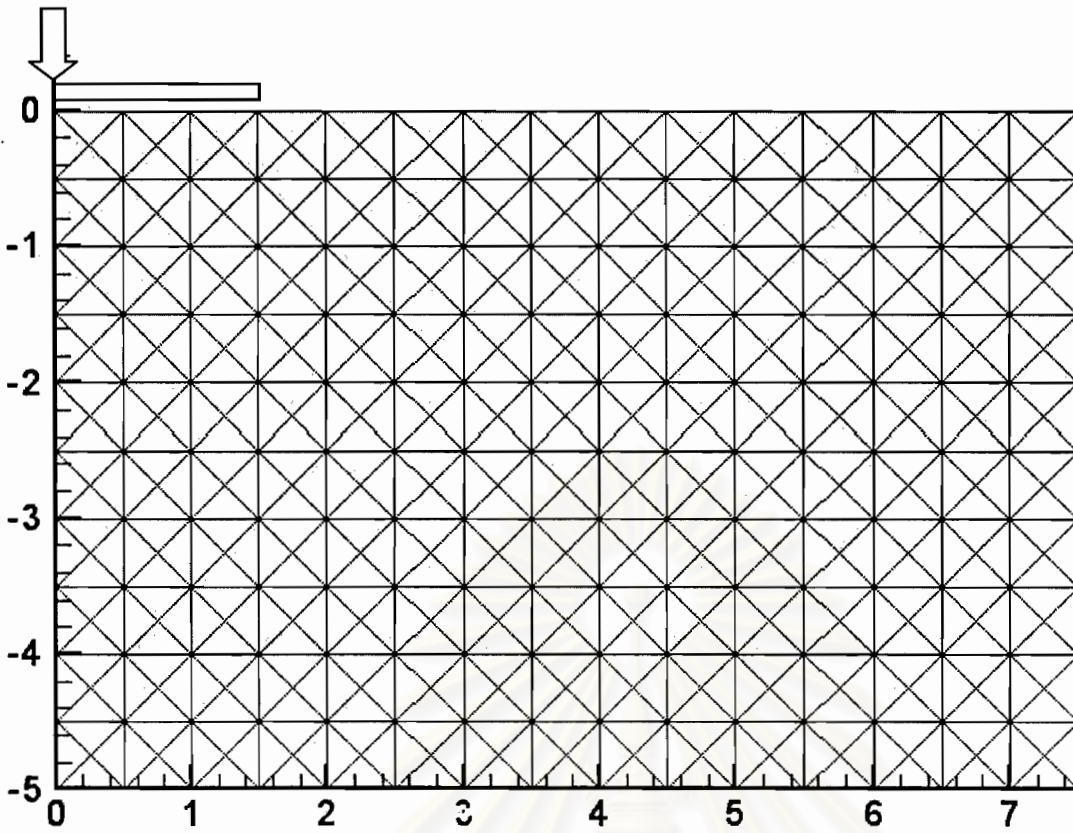
รูปที่ 5.1 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	556
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,126
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,587
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,668
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	2.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
ค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

รูปแบบฐานราก	ผิวเรียบ
ผลการวิเคราะห์ (แรงกระทำ)	9.84005325651508
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	16
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,238
tolerance of equality equation	4.8384e-3
tolerance of inequality equation	-1.4321e-6

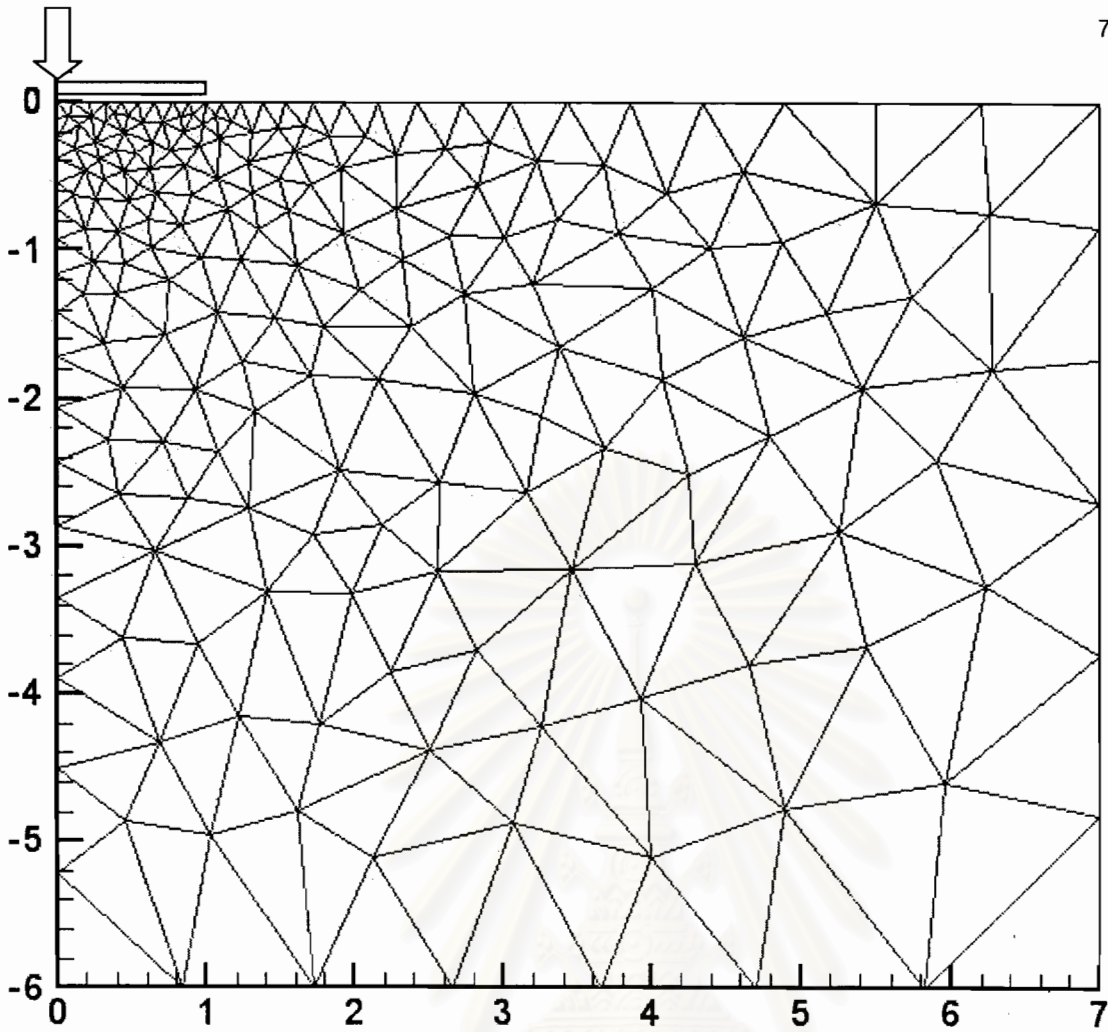
รูปที่ 5.2 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียว ( $\phi=0$ )



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	600
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,444
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,819
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,800
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	3.0
ค่าความเหนียวแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	35.0
ค่าน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

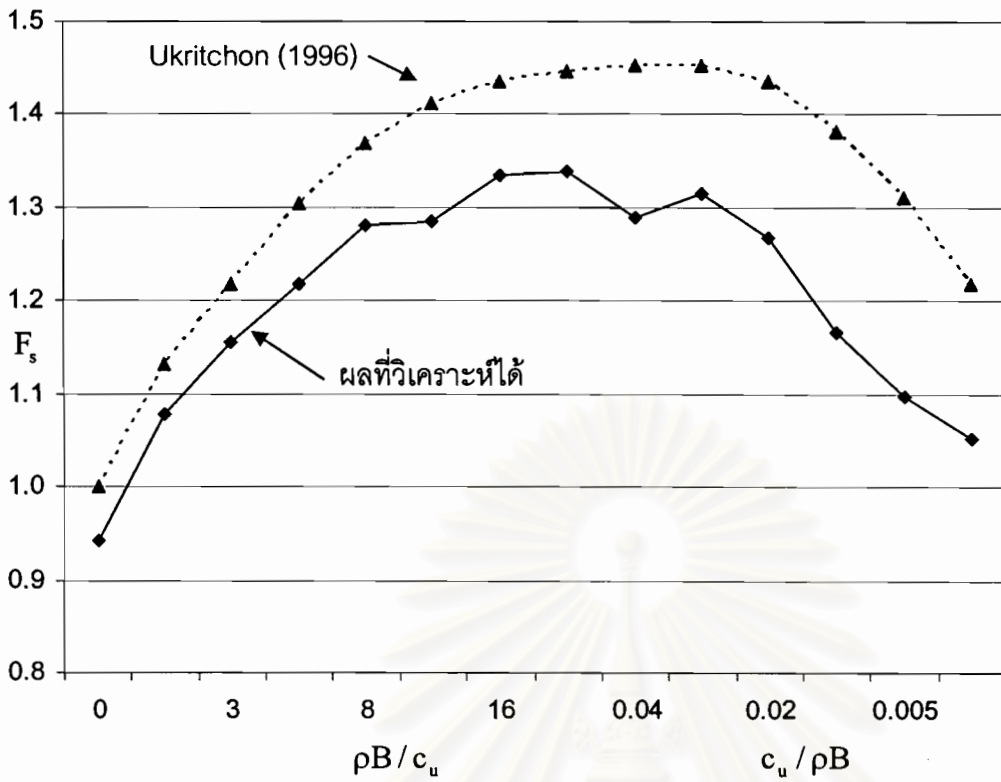
รูปแบบฐานราก	ผิวเรียบ
ผลการวิเคราะห์ (แรงกระทำ)	126.842383162759
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	24
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,929
tolerance of equality equation	1.4251e-3
tolerance of inequality equation	-5.5133e-8

รูปที่ 5.3 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ามุมเสียดทานภายในระหว่างเม็ดดิน ( $\phi \neq 0$ )

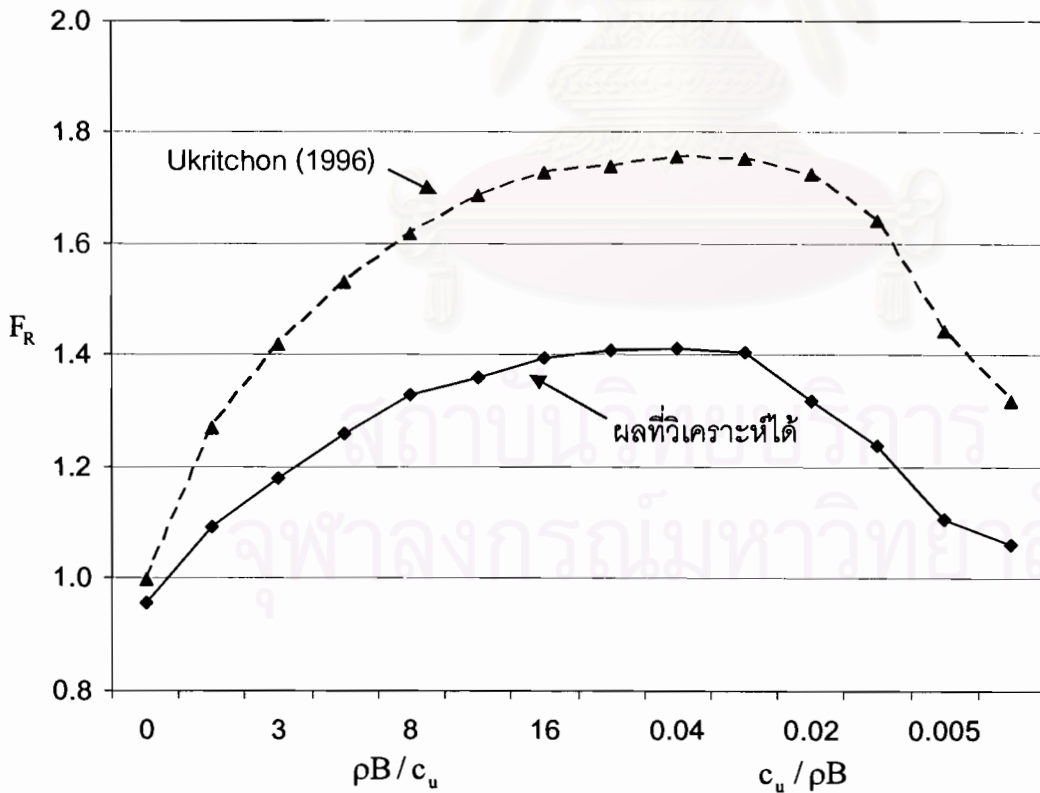


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	354
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	3,308
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,963
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,062
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	2.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดินที่ผิวดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
อัตราการเพิ่มขึ้นของค่าความเชื่อมแน่น ( $p$ )	20
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
ค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0
ค่ากำลังรับน้ำหนักประลัย, ตัน	27.16
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ, วินาที	62
tolerance of equality equation	4.2038e-4
tolerance of inequality equation	-5.5042e-6

รูปที่ 5.4 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน ( $p = 20$ )

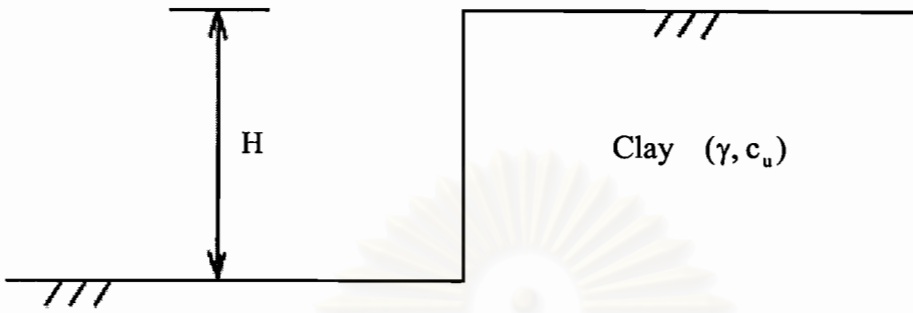


รูปที่ 5.5 การเปรียบเทียบค่า bearing capacity factor สำหรับฐานรากต่อเนื้อผิวยเรียบบนชั้นดินที่มีกำลังรับแรงเฉือนเพิ่มขึ้นตามความลึก

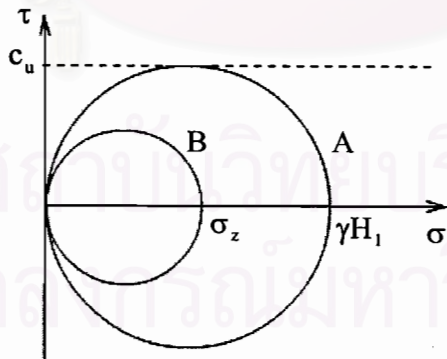
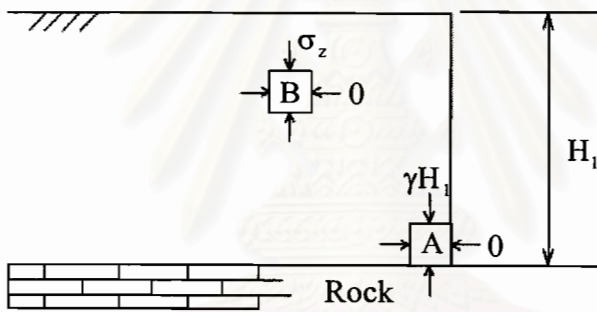


รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบค่า bearing capacity factor สำหรับฐานรากต่อเนื้อผิวยเรียบบนชั้นดินที่มีกำลังรับแรงเฉือนเพิ่มขึ้นตามความลึก

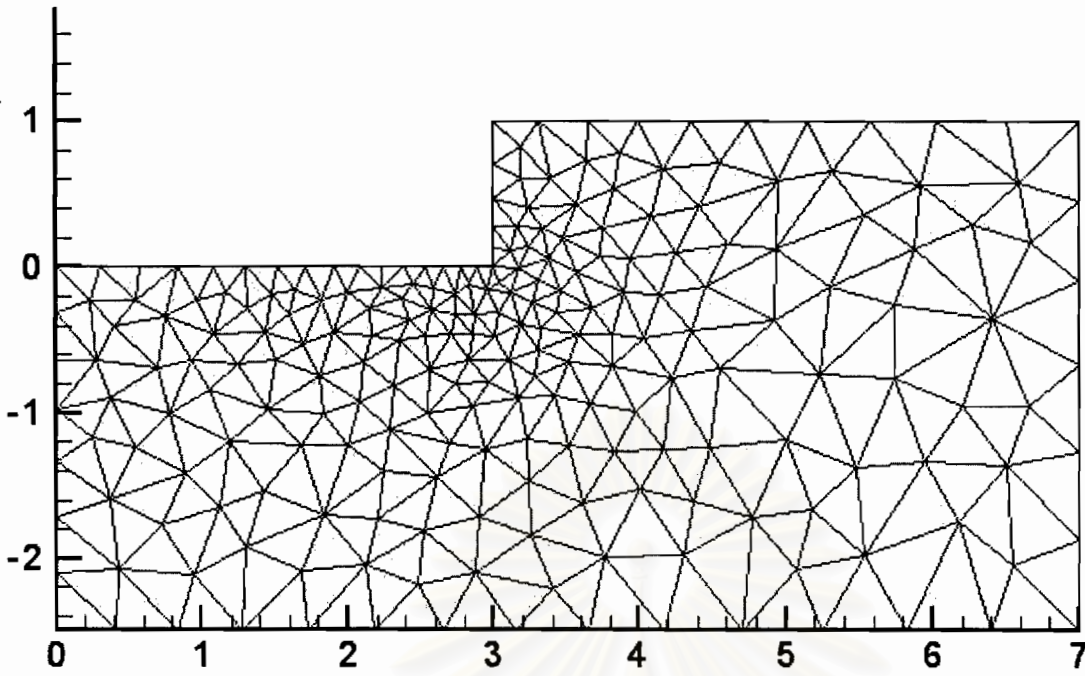
$$\text{stability number, } N = \frac{\gamma H}{c_u}$$



รูปที่ 5.7 มวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง



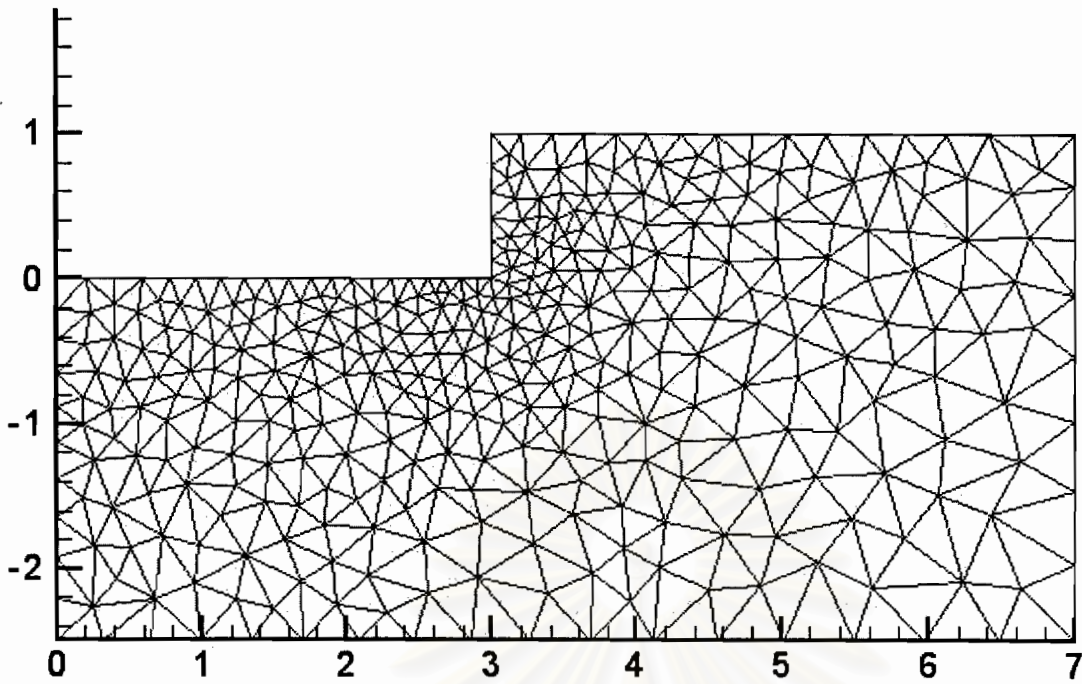
รูปที่ 5.8 การวิเคราะห์ขอบเขตล่างของปัญหามวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง  
(Atkinson, 1961)



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	402
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	3,620
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	3,225
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,206
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	3.44838062984894
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	15
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	413
tolerance of equality equation	2.212e-5
tolerance of inequality equation	-9.383e-6

รูปที่ 5.9 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง (โครงข่ายแบบที่ 1)

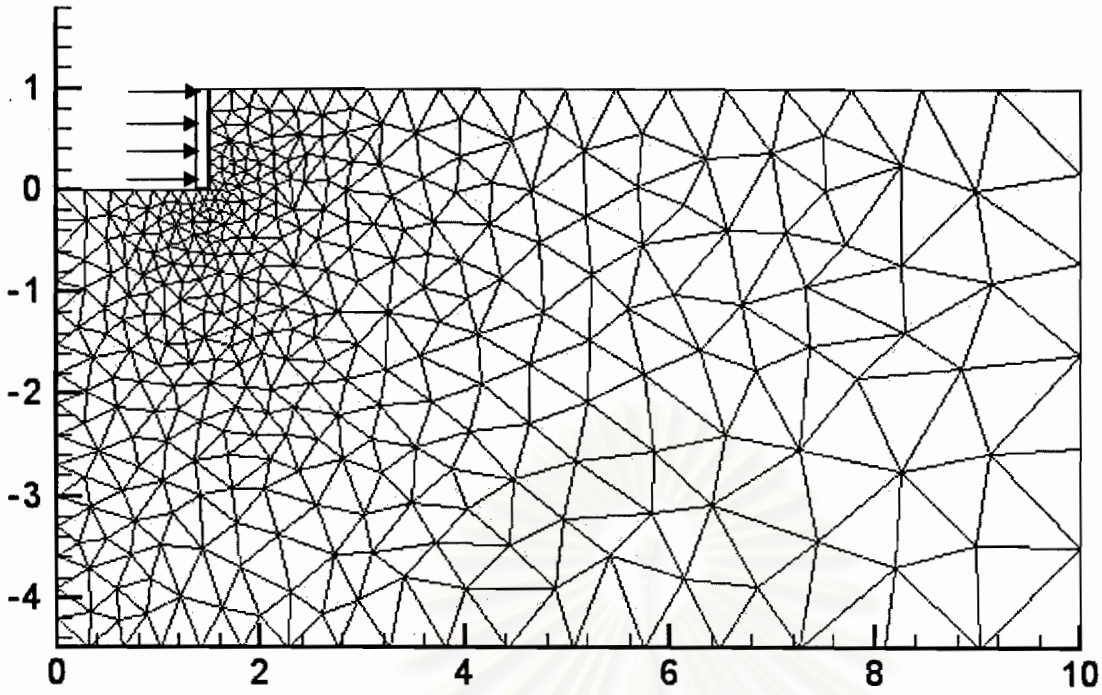


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	681
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,131
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,463
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,043
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	3.5409526822868
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	18
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,999
tolerance of equality equation	9.877e-6
tolerance of inequality equation	-3.944e-6

รูปที่ 5.10 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง (โครงข่ายแบบที่ 2)

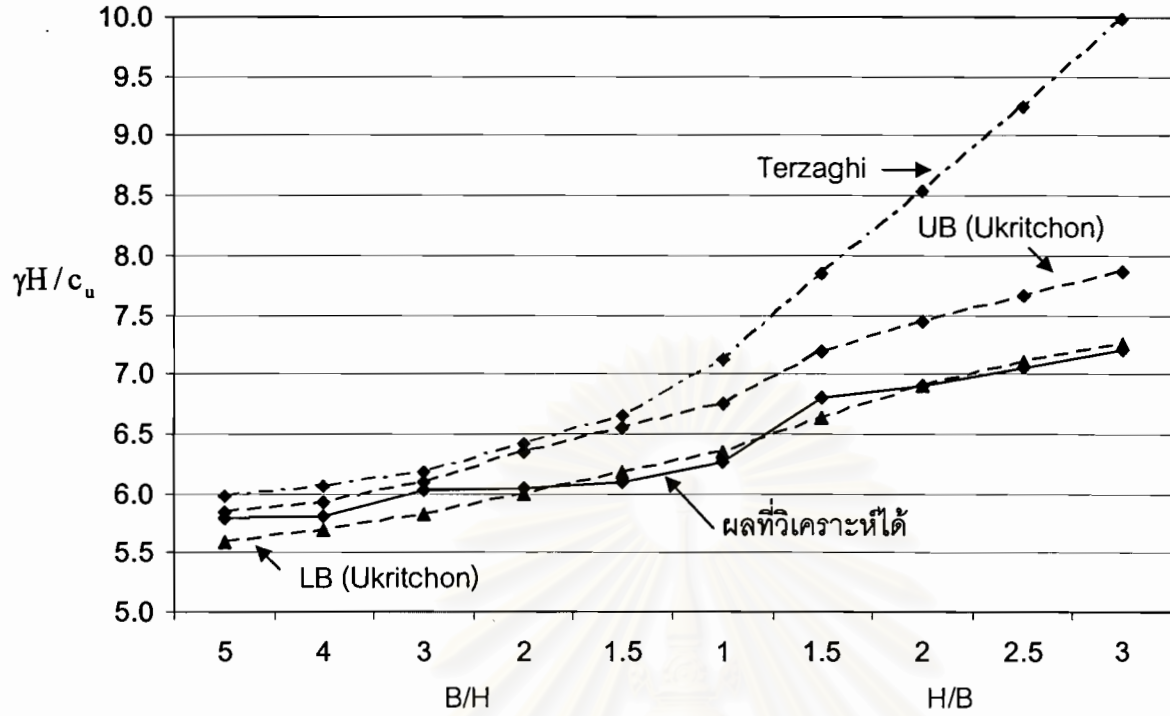




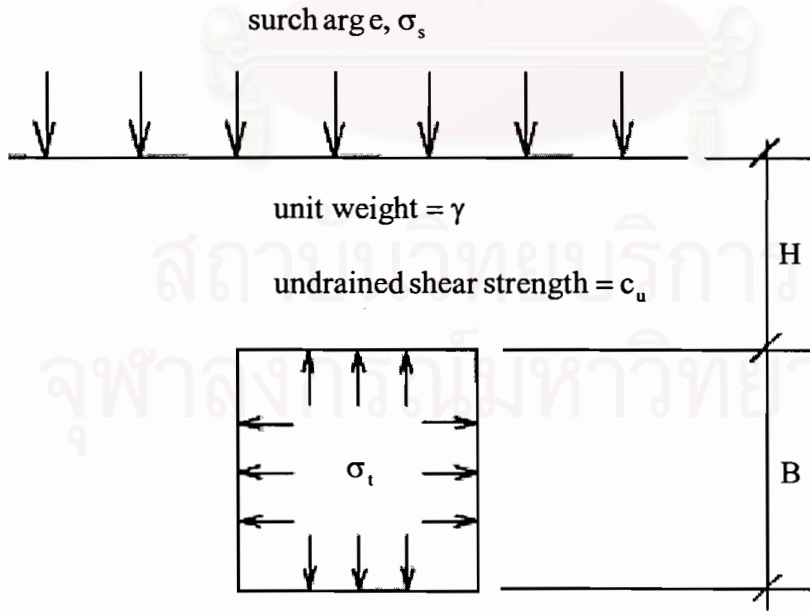
จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	693
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,320
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,584
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,079
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานขุด (B), ม.	3.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	6.02274835568479
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	31
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	3,035
tolerance of equality equation	3.746e-4
tolerance of inequality equation	-7.955e-9

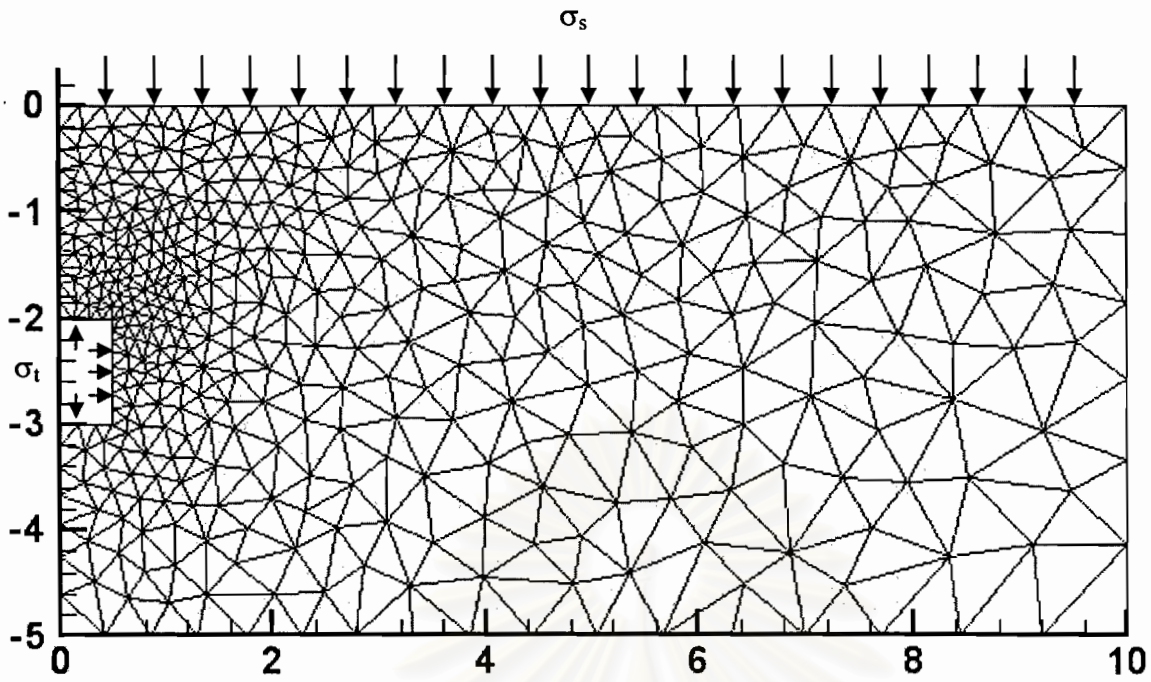
รูปที่ 5.11 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง, B/H = 3.0



รูปที่ 5.12 กราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ตัวเลขเสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง



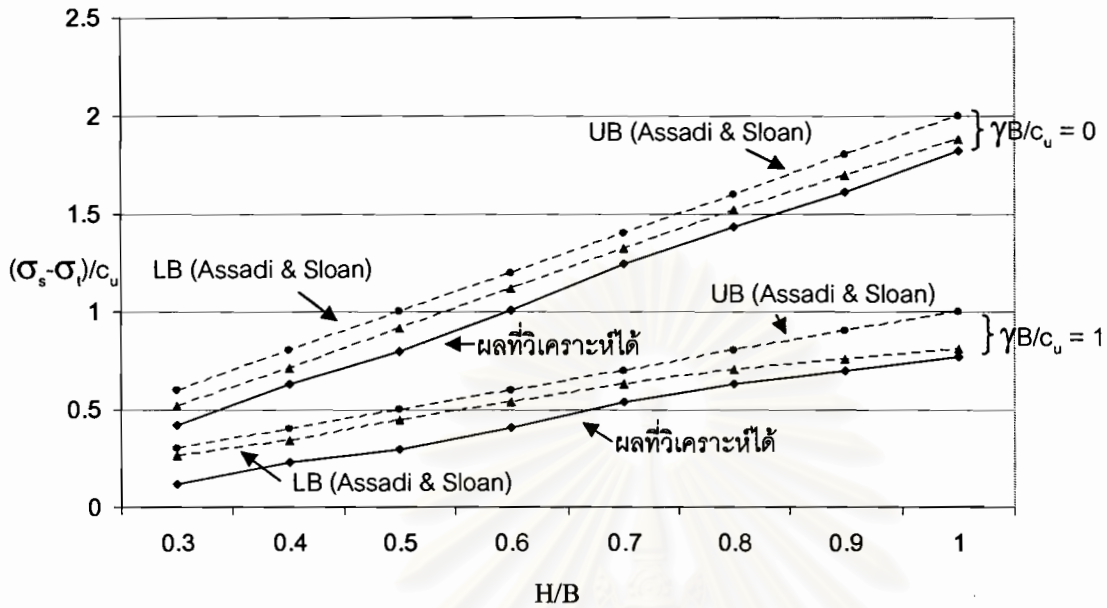
รูปที่ 5.13 ปัญหาขนาดความเครียดของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว



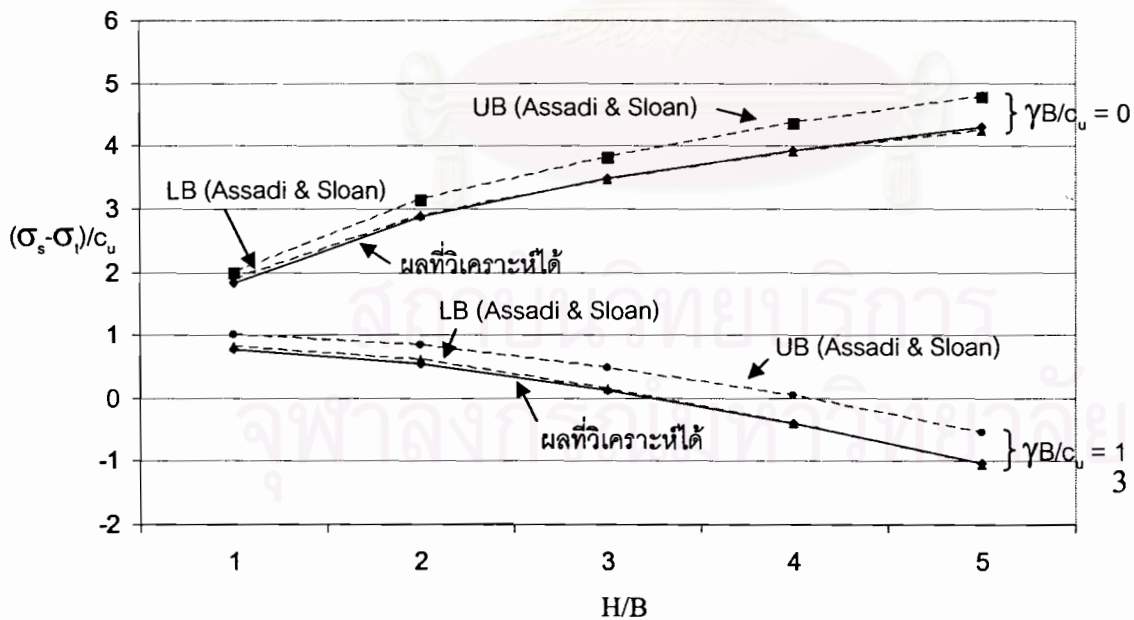
จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	817
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	7,354
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,578
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,451
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	2.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_v)/c_u$	2.86470447416459	0.537955899686015

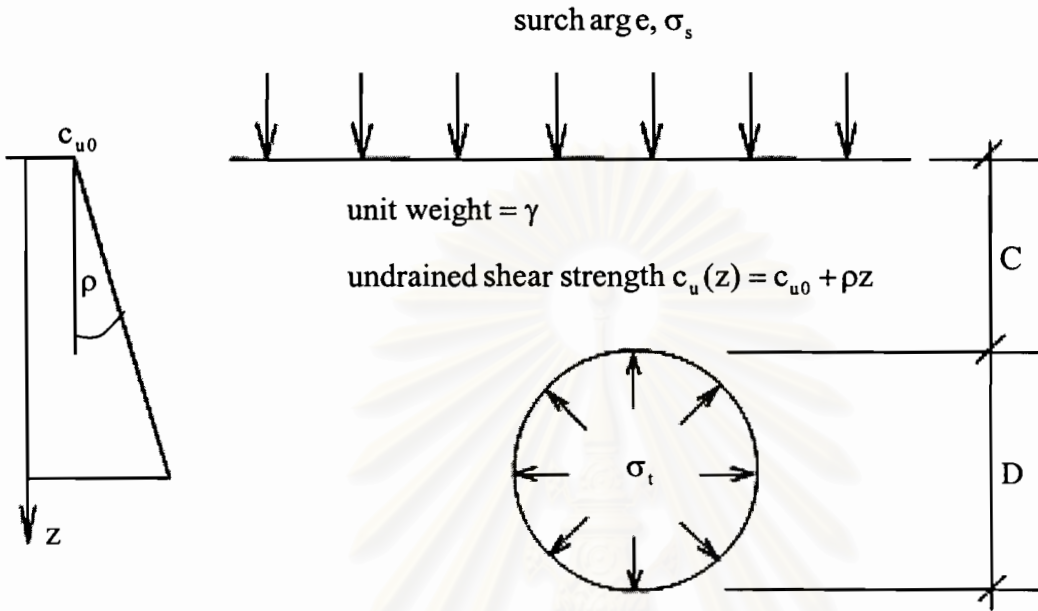
รูปที่ 5.14 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 2.0$



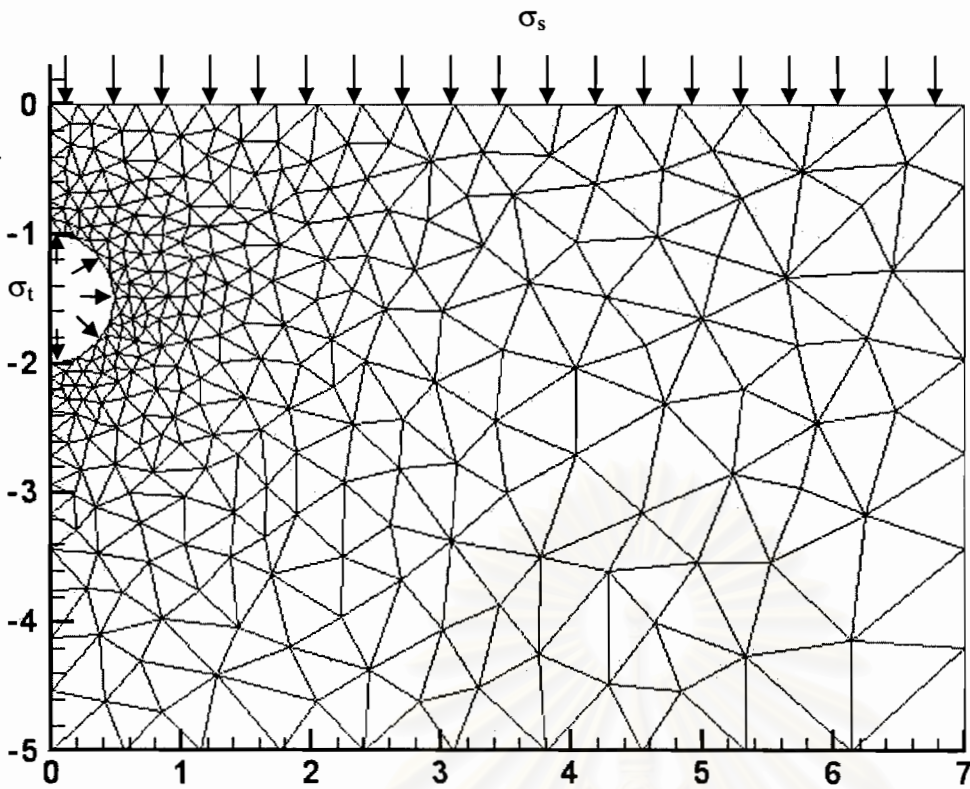
รูปที่ 5.15 กราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์ที่ตรงกับผลการวิเคราะห์ของ Assadi และ Sloan (1991) กรณี  $0.3 \leq H/B \leq 1.0$



รูปที่ 5.16 กราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์ที่ตรงกับผลการวิเคราะห์ของ Assadi และ Sloan (1991) กรณี  $1.0 \leq H/B \leq 5.0$



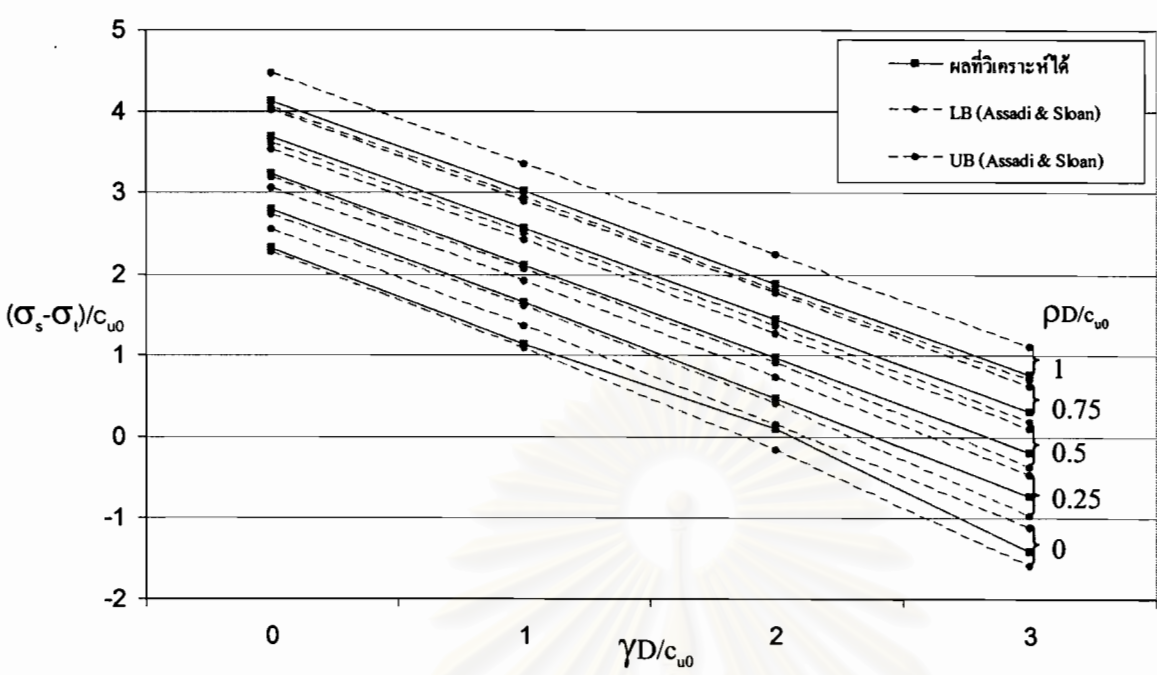
รูปที่ 5.17 ปัญหาระนาบความเครียดของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินที่มีกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน



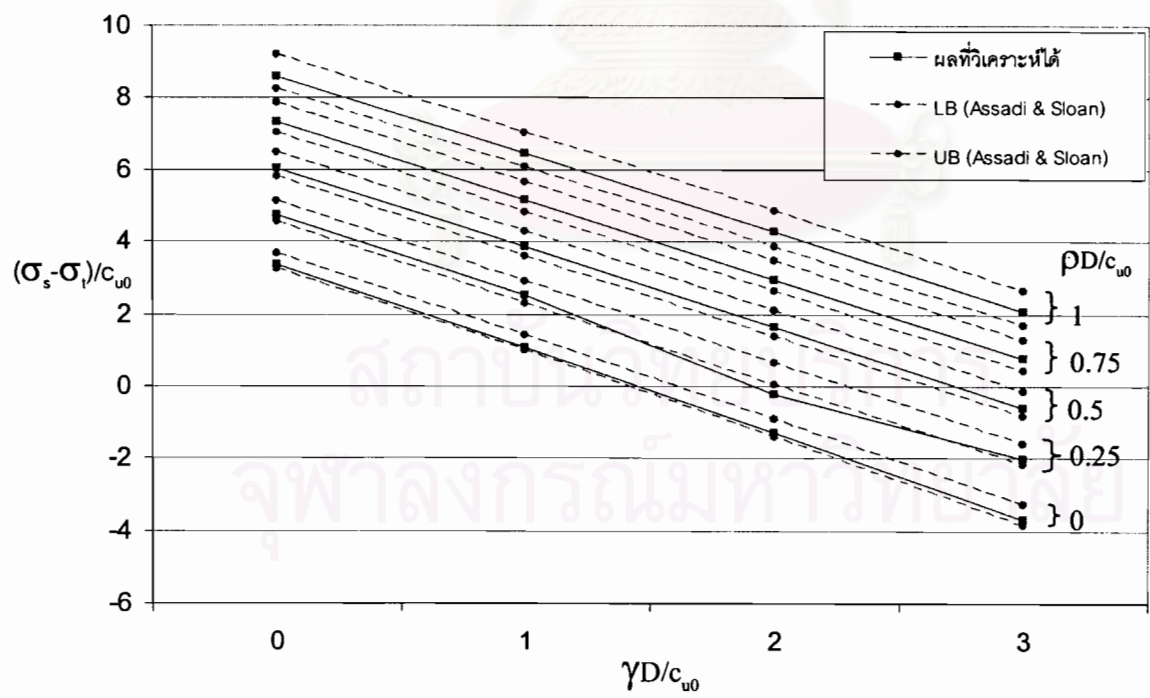
จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	560
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,041
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,500
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,680
ความลึกจากผิวดิน (C), ม.	1.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (D), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
หน่วยน้ำหนักของดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

pd/cu	$(\sigma_s - \sigma_t)/cu$			
	$\gamma d/cu$			
	0	1	2	3
0	2.3170	1.1340	0.0967	-1.4218
0.25	2.7847	1.6470	0.4730	-0.7396
0.5	3.2351	2.1076	0.9753	-0.1923
0.75	3.6858	2.5631	1.4374	0.3016
1.0	4.1304	3.0112	1.8882	0.7597

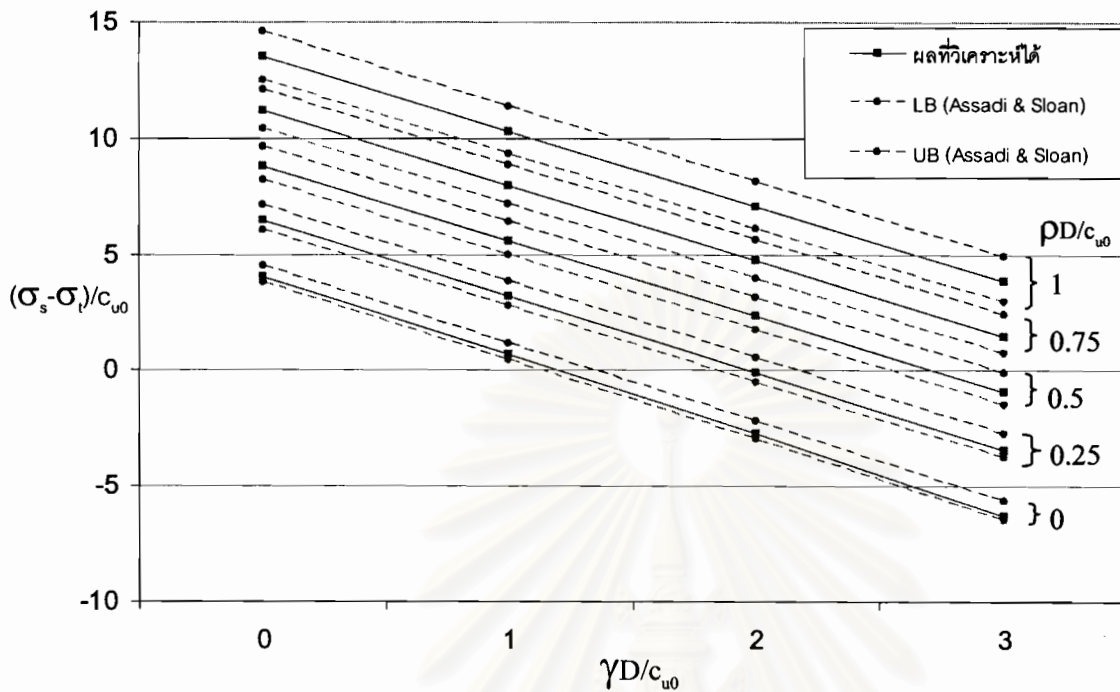
รูปที่ 5.18 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว, C/D = 1.0



รูปที่ 5.19 กราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว,  $C/D = 1.0$



รูปที่ 5.20 กราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว,  $C/D = 2.0$



รูปที่ 5.21 แสดงกราฟเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว,  $C/D = 3.0$



## บทที่ 6

### สรุป

#### 6.1 บทนำ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการพัฒนาระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของวิธีขอบเขตพลาสติก เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ โดยประยุกต์ใช้หลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกส่วนเข้ากับวิธีขอบเขตพลาสติก และจัดปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดแบบไม่เชิงเส้นตรง จากนั้นใช้หลักการของคอน-ตัคเกอร์ออบติโมลิตี และวิธีการของนิวตันในการแก้หาผลเฉลยของปัญหา

#### 6.2 หลักการของระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่าง

ระบบการคำนวณเชิงตัวเลขของทฤษฎีขอบเขตล่างพัฒนาขึ้น โดยอาศัยหลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกส่วน และหลักการของทฤษฎีขอบเขต โดยมีหลักการสำคัญดังนี้

- 1) การแบ่งมวลดินออกเป็นชิ้นส่วนย่อยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแยกชิ้นส่วน โดยจะแบ่งมวลดินออกเป็นสามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ โดยแต่ละจุดต่อจะมีค่าหน่วยแรง ( $\sigma_{ij}$ ) ที่จุดต่อเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า และกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงภายในชิ้นส่วนเป็นแบบเชิงเส้นตรง
- 2) การสร้างสมการข้อจำกัดจากความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงที่จุดต่อ ให้สอดคล้องกับสนามการยอมรับได้ทางสถิติศาสตร์ของหน่วยแรง นั่นคือตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรงต้องสอดคล้องกับ 1) สมดุลสถิตศาสตร์ของหน่วยแรงภายในชิ้นส่วน 2) เงื่อนไขของหน่วยแรงที่ขอบเขตของมวลดิน และ 3) ฟังก์ชันขอบเขตการวิบัติของมวลดินที่ใช้ (มอร์-คูลอมบ์)
- 3) การกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของระบบ และการจัดให้อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุด
- 4) การแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง ที่สอดคล้องกับสมการและอสมการข้อจำกัดทั้งหมด และให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มากที่สุดหรือต่ำที่สุด

### 6.3 ขั้นตอนในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหา

ในการวิเคราะห์หาค่าที่เหมาะสมที่สุด (ดีที่สุด) สำหรับปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์สามารถสรุปเป็นขั้นตอนคร่าวๆ ได้ดังนี้

- 1) สร้างโครงข่ายสามเหลี่ยมสำหรับปัญหาที่ต้องการพิจารณา
- 2) กำหนดค่าคุณสมบัติของมวลดินที่พิจารณา (ค่าความเชื่อมั่นแน่นระหว่างเม็ดดิน ค่ามุมเสียดทานภายในมวลดิน และค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน)
- 3) สร้างสมการข้อจำกัดของปัญหา (สมดุลภายในชิ้นส่วน สมดุลบนขอบไม่ต่อเนื่อง และสมดุลที่ขอบเขตของปัญหา)
- 4) หาค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง
- 5) หาค่าของอสมการข้อจำกัด เกรเดียนของอสมการข้อจำกัด และเฮสเซียนของอสมการข้อจำกัด
- 6) ตรวจสอบว่าค่าปัจจุบันของตัวแปรไม่ทราบค่า เป็นค่าที่ดีที่สุดหรือไม่
- 7) หาขนาดและทิศทางการเคลื่อนที่ของตัวแปรไม่ทราบค่าของหน่วยแรง
- 8) ปรับปรุงค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าใหม่ จนกระทั่งได้ค่าที่ดีที่สุด

### 6.4 สรุปผลการทดสอบระบบการคำนวณ

ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ที่ทราบผลเฉลยแน่นอนตรง ถูกนำมาทดสอบระบบการคำนวณเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้น เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของระบบการคำนวณโดยสามารถสรุปได้ดังนี้

- 1) การวิเคราะห์ปัญหารูปร่างรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียวกรณี  $\phi = 0$  เพื่อหาค่า  $N_c$  ของกำลังรับน้ำหนักมากที่สุดตามสมการ  $q_u = cN_c$  ได้ค่าขอบเขตล่างน้อยกว่าค่าผลเฉลยแน่นอนตรง 3.9%
- 2) การวิเคราะห์ปัญหารูปร่างรากสี่เหลี่ยมต่อเนื่องบนชั้นดินที่มีค่ามุมเสียดทานภายใน ( $\phi \neq 0$ ) เพื่อหาค่ากำลังรับน้ำหนักสูงสุด โดยผลการวิเคราะห์ที่ได้มีค่าต่ำกว่าผลเฉลยแน่นอนตรงที่เสนอโดย Prandtl เท่ากับ 8.3%

- 3) การวิเคราะห์ปัญหาฐานรากที่เสื่อมต่อเนื่องบนชั้นดินเหนียวที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน เมื่อนำผลการวิเคราะห์ที่ได้มาพล็อตกราฟเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงพบว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้มีค่าต่ำกว่าผลเฉลยแม่นยำตรงประมาณ 20% และมีแนวโน้มสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรง
- 4) การวิเคราะห์เสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันทางด้านข้างของชั้นดินเหนียว ระบบการคำนวณให้ค่าขอบเขตล่างเท่ากับ  $\gamma H/S_u = 3.541$  ซึ่งมีค่าสอดคล้องกับค่าขอบเขตล่างที่วิเคราะห์โดย Ukritchon (1998)
- 5) การวิเคราะห์เสถียรภาพของมวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันทางด้านข้างของชั้นดินเหนียว ผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นให้ค่าขอบเขตล่างที่อยู่ต่ำกว่าขอบเขตบนที่เสนอโดย Ukritchon (1998) และมีค่ามากกว่าและใกล้เคียงกับค่าขอบเขตล่างที่เสนอโดย Ukritchon (1998) ทำให้ขอบเขตของผลเฉลยแม่นยำตรงมีค่าแคบลง
- 6) การวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว เมื่อนำผลการวิเคราะห์ที่ได้มาพล็อตกราฟเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ที่เสนอโดย Assadi และ Sloan (1990) พบว่ากราฟผลการวิเคราะห์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน และมีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน
- 7) การวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียวที่มีค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำเพิ่มขึ้นตามความลึกจากผิวดิน โดยนำผลการวิเคราะห์ที่ได้จากระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นมาพล็อตกราฟเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ของ Assadi และ Sloan (1993) พบว่าค่าขอบเขตล่างที่วิเคราะห์ได้จะอยู่ในช่วงค่าขอบเขตบนและค่าขอบเขตล่างที่เสนอโดย Assadi และ Sloan (1993) ซึ่งทำให้ได้ขอบเขตของผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหามีค่าแคบลง

เมื่อพิจารณาจากปัญหาตัวอย่างทั้งหมดเห็นได้ว่า ระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นให้ผลการวิเคราะห์ที่ต่ำกว่าค่าผลเฉลยแม่นยำตรงในทุกตัวอย่างปัญหา ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าเทคนิคการหาค่าที่ดีที่สุดสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการวิบัติทางปฐพีกลศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และการแก้ปัญหาแบบไม่เชิงเส้นตรงมีจำนวนสมการข้อจำกัดน้อยกว่าการแก้ปัญหาแบบเชิงเส้นตรงทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวนมากได้ อย่างไรก็ตามผลการวิเคราะห์ที่ได้ยังขึ้นอยู่กับลักษณะของโครงข่ายสามเหลี่ยมที่ใช้ในการวิเคราะห์

## 6.5 ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

- 1) ระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นสามารถวิเคราะห์ได้เฉพาะปัญหาที่มวลดินมีความสามารถในการรับแรงเฉือนแบบเท่ากันทุกทิศทาง (isotropic strength) เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ครอบคลุมขึ้นควรพัฒนาให้สามารถวิเคราะห์ห้มวลดินที่มีความสามารถในการรับแรงแบบไม่เท่ากันทุกทิศทางได้ (anisotropic strength)
- 2) ระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นได้มีการรวมชิ้นส่วนทางโครงสร้างเข้าไปด้วย แต่ยังไม่สามารถทำให้ชิ้นส่วนโครงสร้างเกิดการวิบัติพร้อมๆ กับมวลดินได้ ดังนั้นเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพให้กับระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นจำเป็นต้องสร้างสมการข้อจำกัดเพิ่มเติมเพื่อให้ชิ้นส่วนโครงสร้างสามารถวิบัติพร้อมกับมวลดินได้
- 3) ระบบการคำนวณที่พัฒนาขึ้นยังไม่มีกรรวมค่าแรงดันน้ำภายในมวลดินเข้าในการคำนวณด้วย ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีแรงดันน้ำเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยได้
- 4) กระบวนการในการหาสมการที่เกินความจำเป็นยังใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมากทำให้เวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหามีค่ามาก ดังนั้นเพื่อให้ระบบการคำนวณทำงานได้เร็วขึ้นจำเป็นต้องพัฒนาวิธีการหาสมการที่เกินความจำเป็นที่เร็วขึ้น

## รายการอ้างอิง

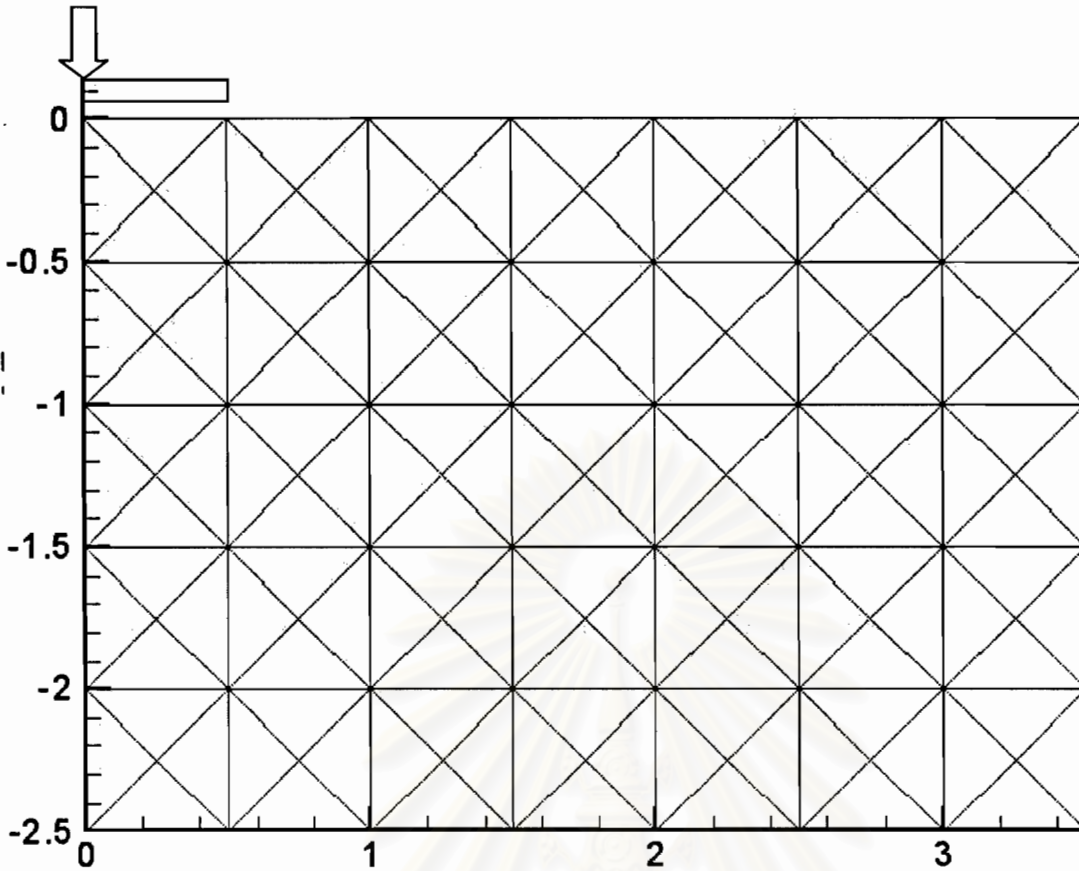
- Abbo A. J., Sloan S. W. (1995). "A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion." Computers and Structures., 54, 427-441.
- Assadi, Ali, and Sloan, S. W. (1990). "Undrained stability of shallow square tunnel." J. Geotech. Eng., ASCE., 117(8), 1152-1173.
- Atkinson, J. H. (1981). Foundations and Slopes., Mcgraw-Hill.
- Augarde C. E., Lyamin A. V., and Sloan S. W. (2003). "Prediction of undrained sinkhole collapse." J. Geotech. Eng., ASCE., 129(3), 197-205.
- Bathe, K. J. (1982). Finite elements procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Chen, W. F. (1975). Limit Analysis and Soil Plasticity, Amsterdam: Elsevier.
- Chen, W. F., Liu, X. L. (1990). Limit analysis in soil mechanics, Elsevier, Amsterdam.
- Chong E. K. P., Zak S. H. An introduction to optimization, New York, NY: Wiley.
- Lyamin A. V., Sloan S. W. (2002). "Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming." Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech., 26, 181-216.
- Lyamin A. V., Sloan S. W. (2002). "Lower bound limit analysis using non-linear programming." Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech., 55, 573-611.
- Nash S. G., Sofer A. Linear and Nonlinear Programming., Mcgraw-Hill.
- Prandtl, L. (1920). Uber die Harte plastischer Korper, Nachr. K. Ges. Wiss. Gott., Math-Phys. Kl., 74-85.
- Sloan S. W. (1988a). "Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming." Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech., 12(1), 61-77.

- Sloan S. W. (1989). "Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming." Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech., 13, 263-282.
- Sloan S. W., Assadi, A., and Purushothaman, N. (1990). "Undrained stability of a trap door" Geotechnique, 40(1), 45-65.
- Sloan S. W., Assadi, A. (1991). "Undrained stability of a square tunnel whose strength increases linearly with depth." Comp. Geotechn., 12, 321-346.
- Ukritchon, B. (1996) "Evaluation of numerical limit analyses by finite elements and linear programming." MS Thesis, Department of Civil & Environmental Engineering, MIT, Cambridge, MA.
- Ukritchon, B. (1998) "Application of numerical limit analyses for undrained stability problems in clay." ScD thesis, Dept. of Civil and Environmental Engineering, MIT, Cambridge, MA.
- Ukritchon B., Whittle A. J., and Klangvijit C. (2003). "Calculations of bearing capacity factor  $N_\gamma$  using numerical limit analyses." J. Geotech. Eng., ASCE., 129(6), 468-474.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

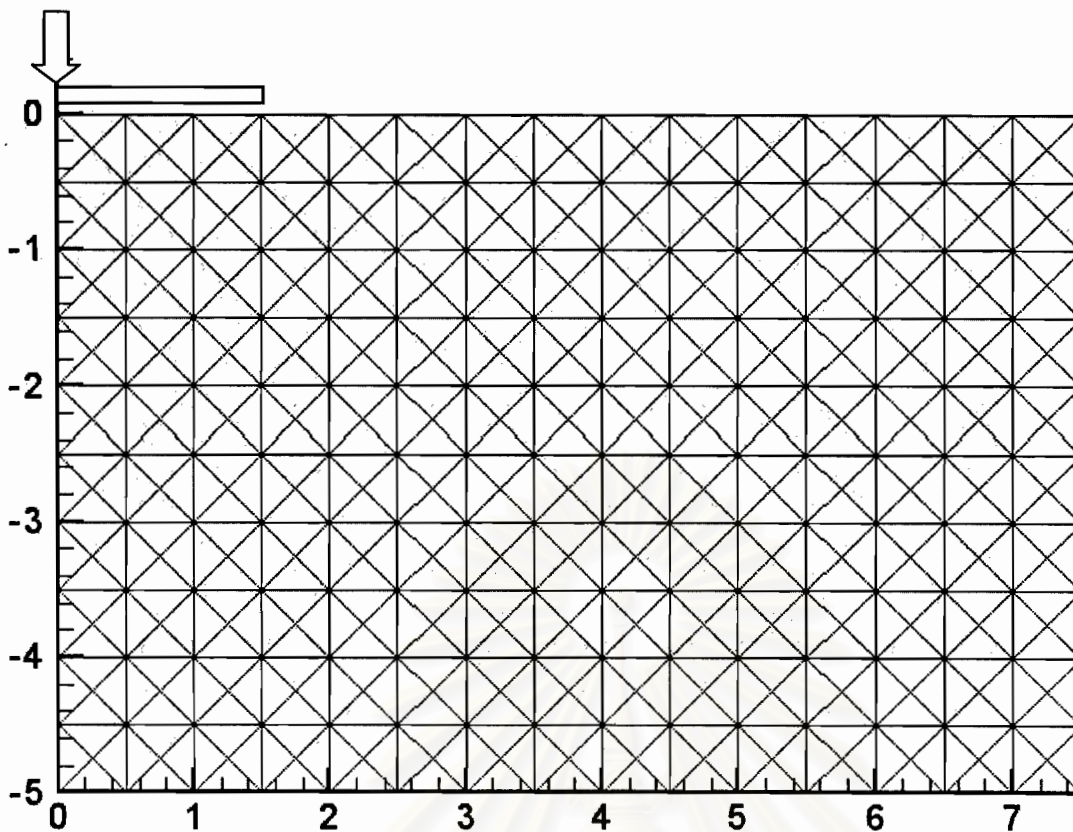


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	140
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	1,278
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,127
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	420
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
ค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

รูปแบบฐานราก	ผิวเรียบ	ผิวหยาบ
ผลการวิเคราะห์ (แรงกระทำ)	4.69073858325945	4.69157017296772
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	13	12
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	24	24
tolerance of equality equation	1.1277e-7	1.1069e-6
tolerance of inequality equation	-2.1640e-6	-2.3174e-7

รูปที่ ๘1 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่อง (โครงข่ายแบบที่ 1)

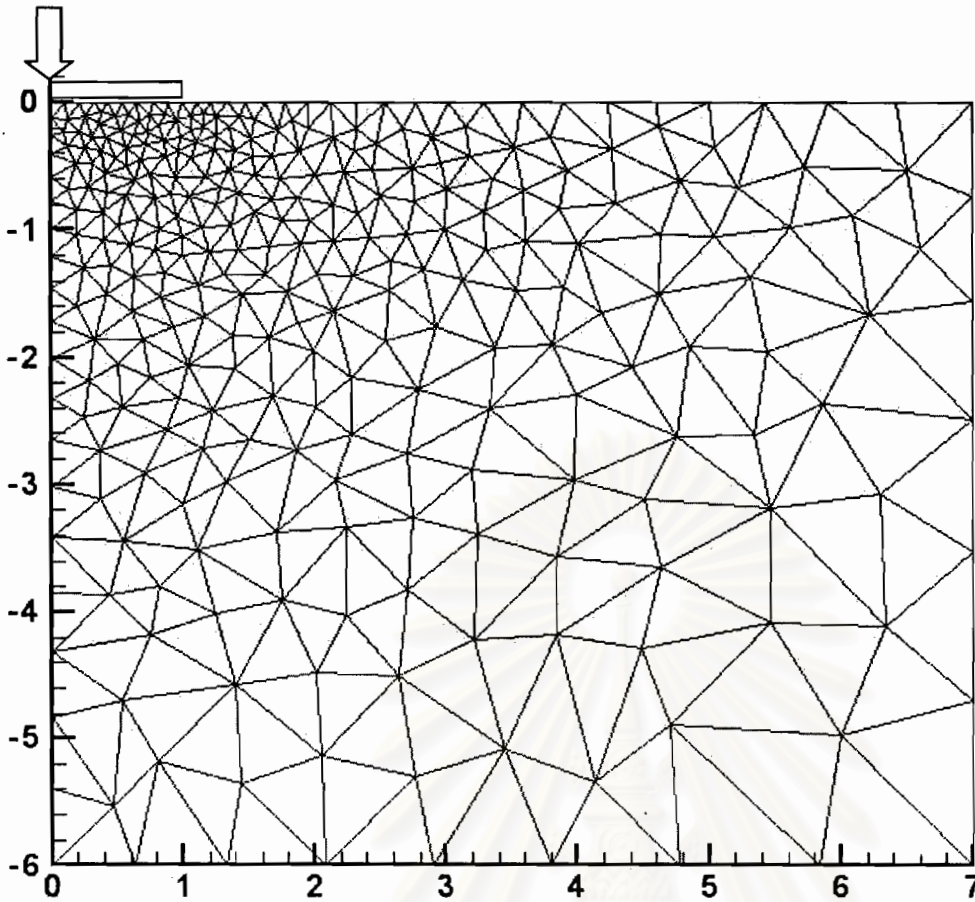




จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	600
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,444
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,819
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,800
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	3.0
ค่าความเหนียวแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
ค่าหน่วยน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

รูปแบบฐานราก	ผิวเรียบ	ผิวหยาบ
ผลการวิเคราะห์ (แรงกระทำ)	14.8272740188139	14.8511998149596
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	14	17
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,315	1,651
tolerance of equality equation	2.5667e-6	2.6567e-7
tolerance of inequality equation	-6.1823e-6	-4.5967e-8

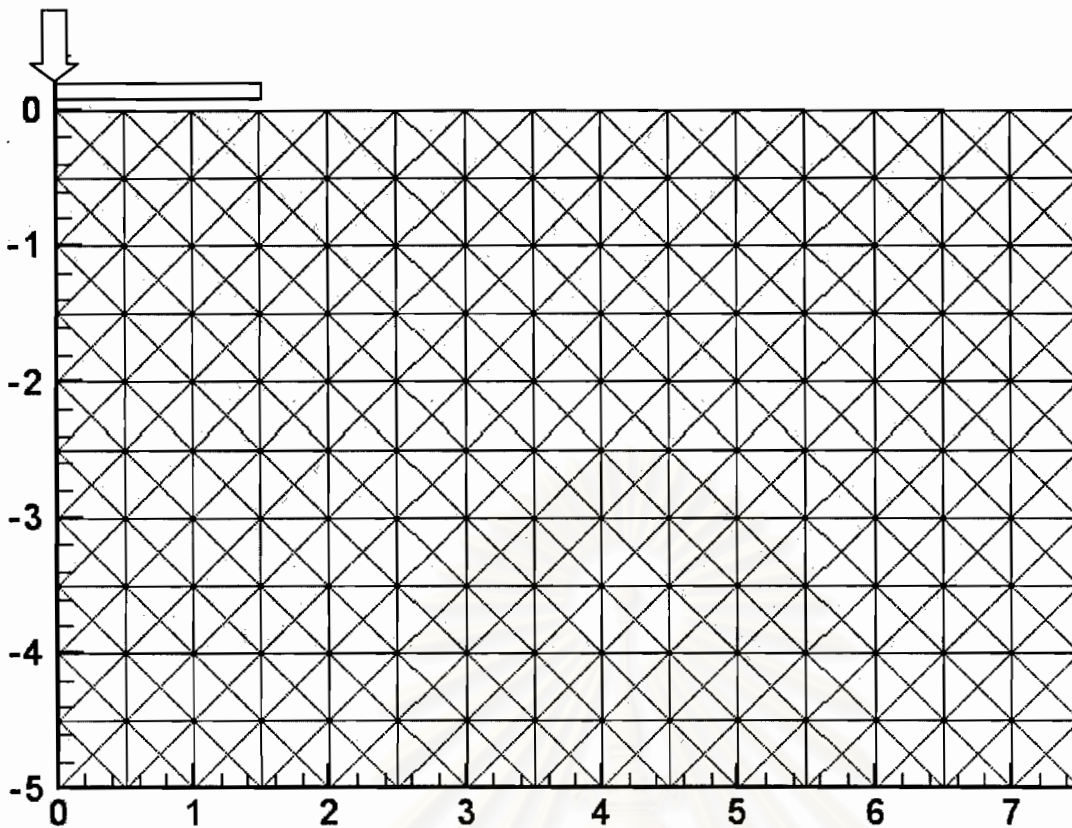
รูปที่ ๘2 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่อง (โครงข่ายแบบที่ 2)



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	556
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,126
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,587
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,668
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	2.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
ค่าน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

รูปแบบฐานราก	ผิวเรียบ	ผิวหยาบ
ผลการวิเคราะห์ (แรงกระทำ)	9.84005325651508	-
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	16	-
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,238	-
tolerance of equality equation	4.8384e-3	-
tolerance of inequality equation	-1.4321e-6	-

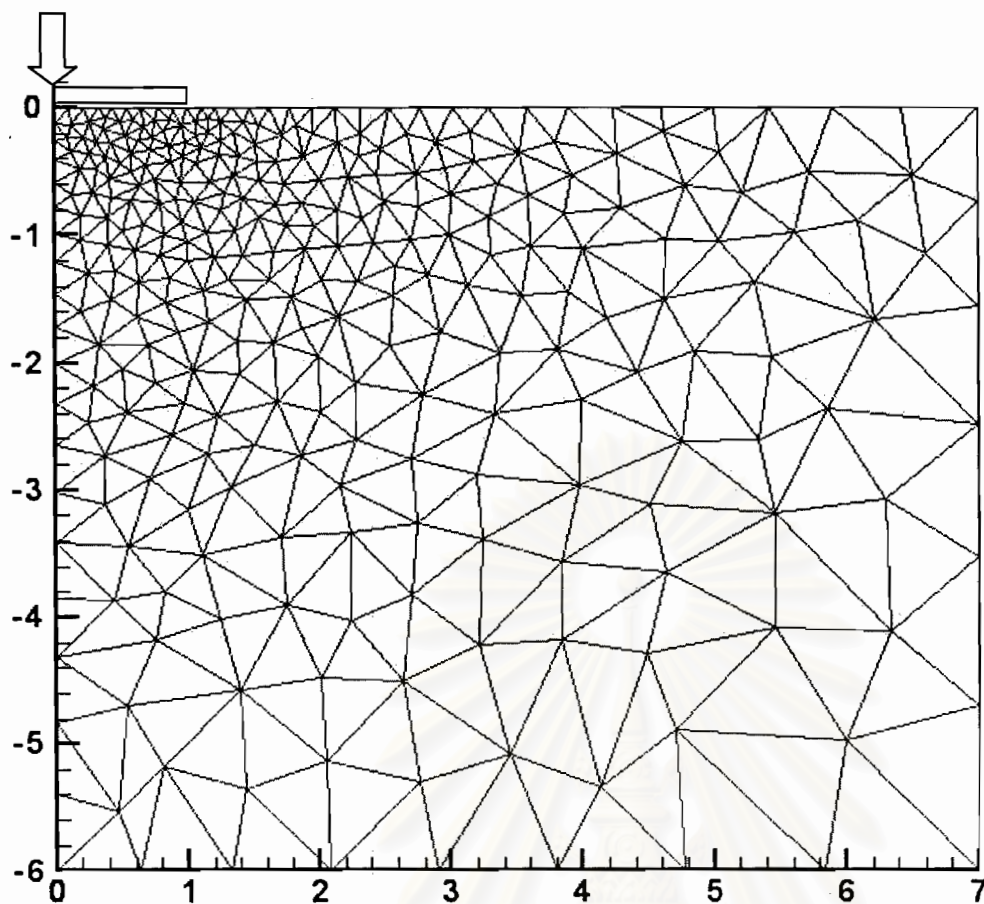
รูปที่ ๘3 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่อง (โครงข่ายแบบที่ 3)



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	600
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,444
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,819
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,800
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	3.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	35.0
ค่าน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

รูปแบบฐานราก	ผิวเรียบ
ผลการวิเคราะห์ (แรงกระทำ)	126.842383162759
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	24
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,929
tolerance of equality equation	1.4251e-3
tolerance of inequality equation	-5.5133e-8

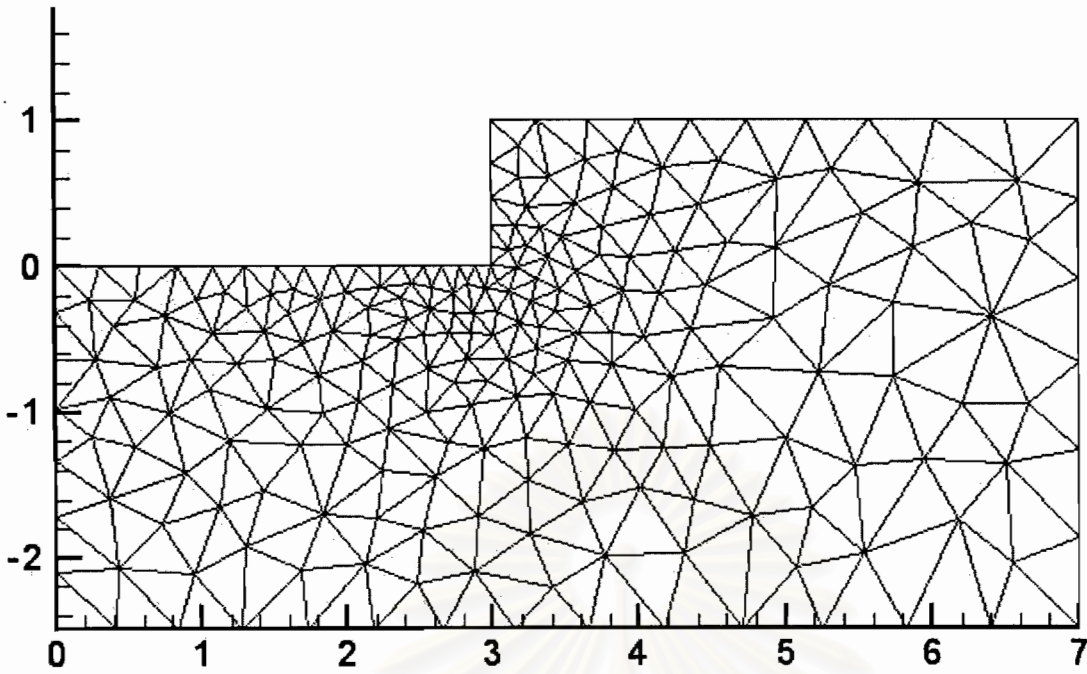
รูปที่ ๘4 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื่องกรณี  $\phi \neq 0$  (โครงข่ายแบบที่ 1)



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	556
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,126
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,587
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,668
ความกว้างของฐานราก (B), ม.	2.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	35.0
ค่าน้ำหนักหน่วยน้ำหนักของมวลดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

รูปแบบฐานราก	ผิวเรียบ
ผลการวิเคราะห์ (แรงกระทำ)	80.030477295842
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	21
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	2,181
tolerance of equality equation	2.4105e-3
tolerance of inequality equation	-3.3788e-7

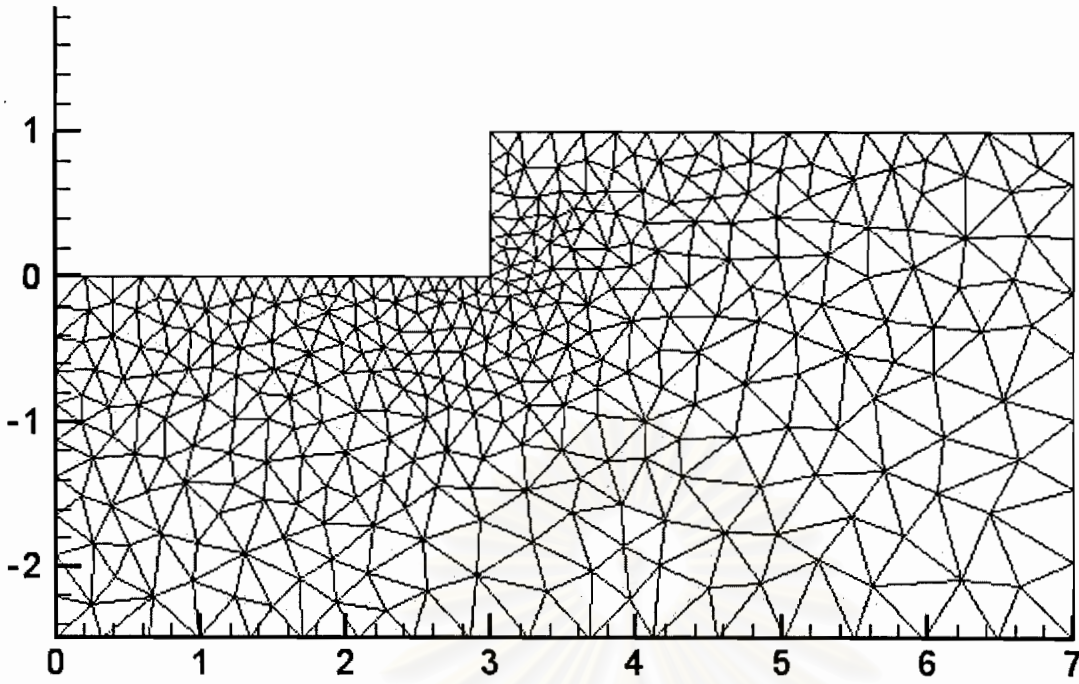
รูปที่ ๗5 ผลการวิเคราะห์กำลังรับน้ำหนักของฐานรากต่อเนื้อกรณี  $\phi \neq 0$  (โครงข่ายแบบที่ 2)



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	402
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	3,620
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	3,225
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,206
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	3.44838062984894
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	15
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	413
tolerance of equality equation	2.212e-5
tolerance of inequality equation	-9.383e-6

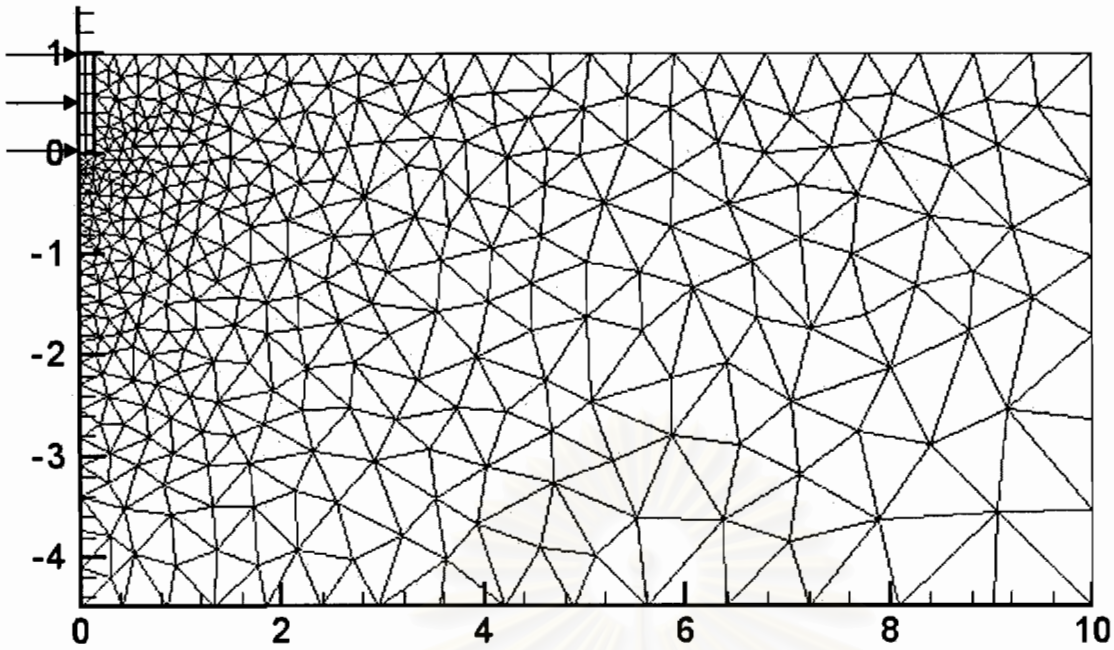
รูปที่ ๘6 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง (โครงข่ายแบบที่ 1)



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	681
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,131
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,463
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,043
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	3.5409526822868
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	18
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,999
tolerance of equality equation	9.877e-6
tolerance of inequality equation	-3.944e-6

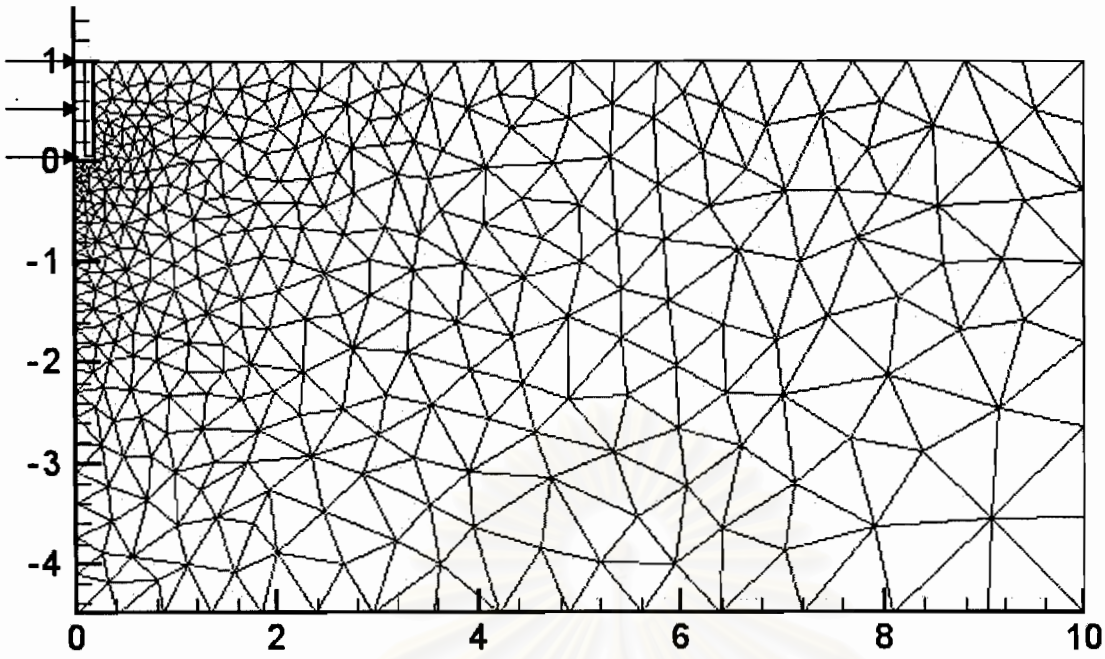
รูปที่ ๗7 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบไม่มีค้ำยันด้านข้าง (โครงข่ายแบบที่ 2)



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	693
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,320
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,584
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,079
ความสูงของมวลดินในแนวดิ่ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานชุด (B), ม.	0.33
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	7.20722239536988
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	33
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	3,091
tolerance of equality equation	8.734e-6
tolerance of inequality equation	-1.062e-6

รูปที่ ๘8 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวดิ่งแบบมีค้ำยันด้านข้าง,  $H/B = 3.0$

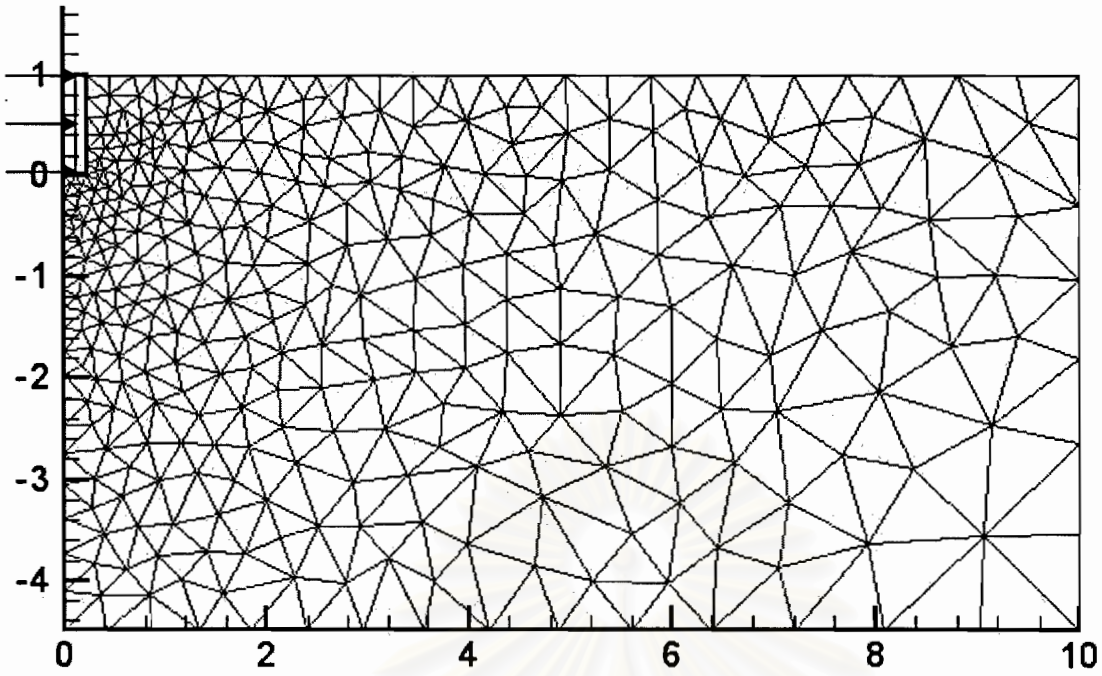


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	696
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,347
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,606
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,088
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานชุด (B), ม.	0.4
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	7.06188511035055
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	31
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	3,170
tolerance of equality equation	2.555e-4
tolerance of inequality equation	-5.296e-6

รูปที่ ๘9 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง,  $H/B = 2.5$

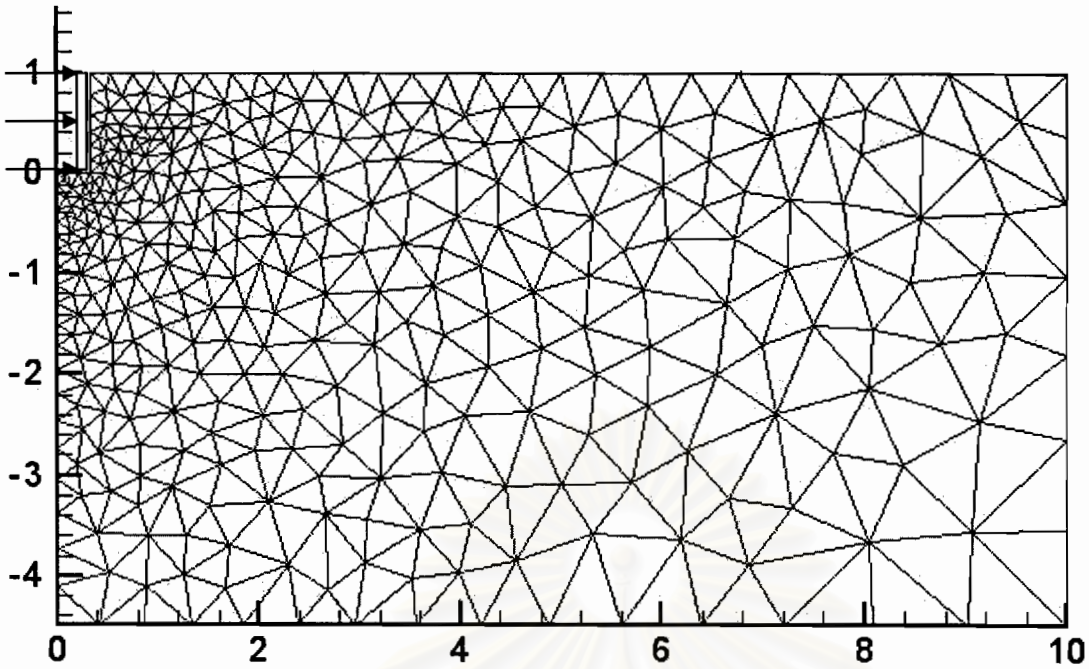




จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	640
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,843
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,170
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,920
ความสูงของมวลดินในแนวดิ่ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานขุด (B), ม.	0.5
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	6.9078365445394
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	29
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	2,110
tolerance of equality equation	8.323e-6
tolerance of inequality equation	-1.313e-6

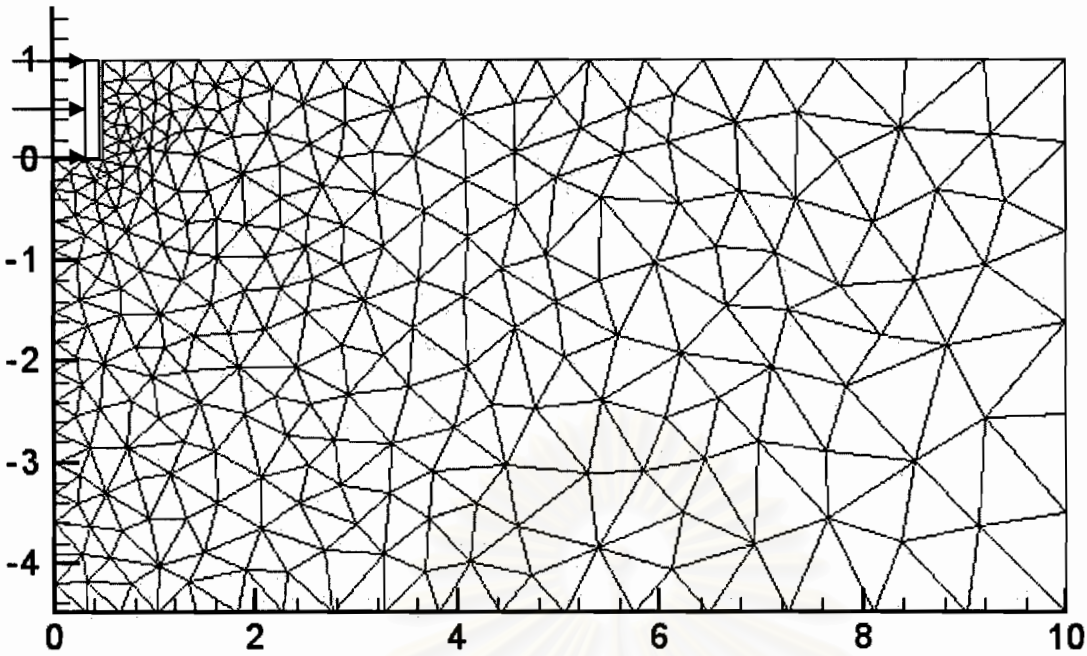
รูปที่ ๘10 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวดิ่งแบบมีค้ำยันด้านข้าง,  $H/B = 2.0$



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	655
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,978
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,292
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,965
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานชุด (B), ม.	0.66
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	6.8059971158791
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	30
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	2,964
tolerance of equality equation	1.019e-3
tolerance of inequality equation	-4.769e-6

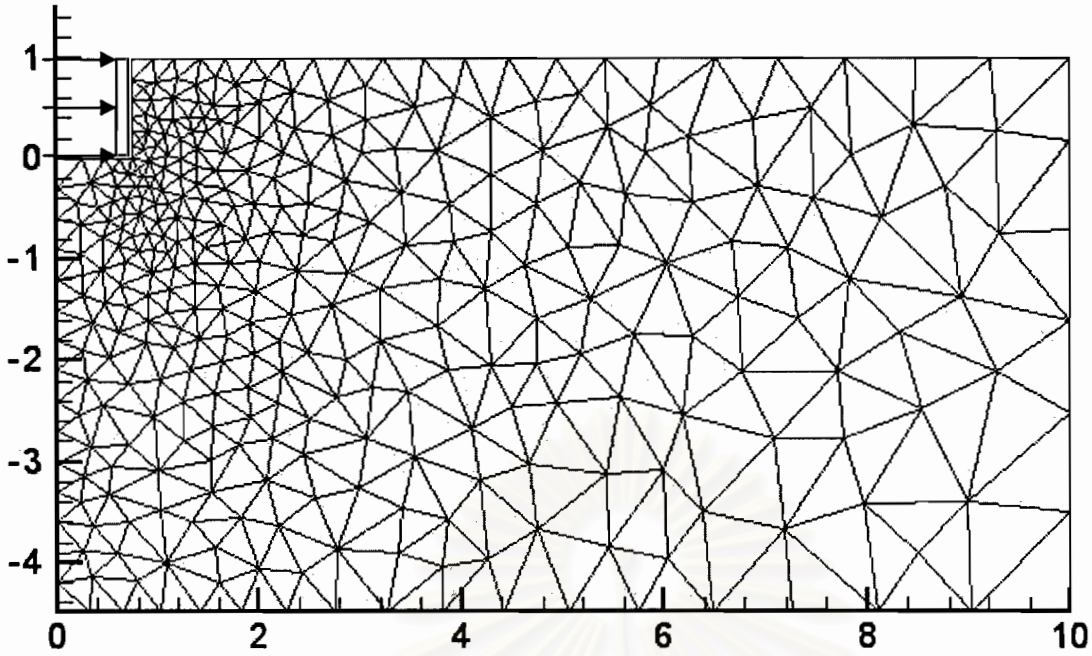
รูปที่ ๑๑ ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง,  $H/B = 1.5$



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	529
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	4,844
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,280
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,587
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานชุด (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	6.26049871915152
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	30
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	1,214
tolerance of equality equation	4.770e-4
tolerance of inequality equation	-2.302e-6

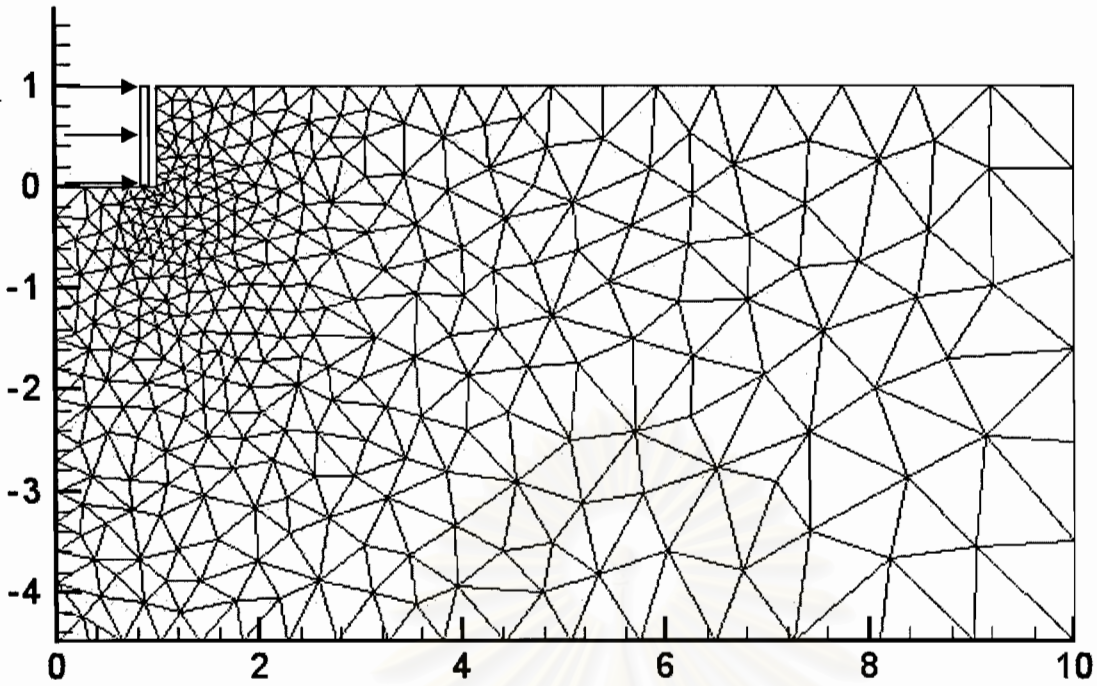
รูปที่ ๘12 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง,  $H/B = 1.0$



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	627
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,726
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,068
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,881
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานขุด (B), ม.	1.5
ค่าความเหนียวแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	6.09873074806180
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	34
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	2,324
tolerance of equality equation	3.882e-3
tolerance of inequality equation	-3.273e-8

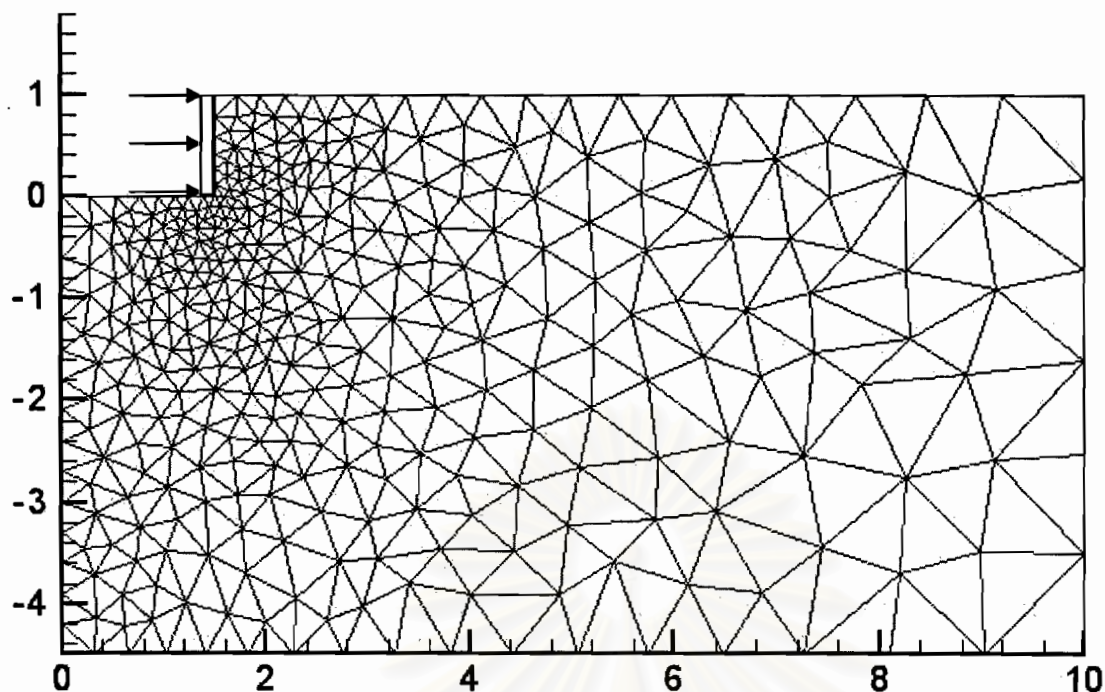
รูปที่ ๘13 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง, B/H = 1.5



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	673
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,140
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,436
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,019
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานขุด (B), ม.	2.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	6.04362183006556
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	27
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	2,505
tolerance of equality equation	1.004e-3
tolerance of inequality equation	-1.363e-6

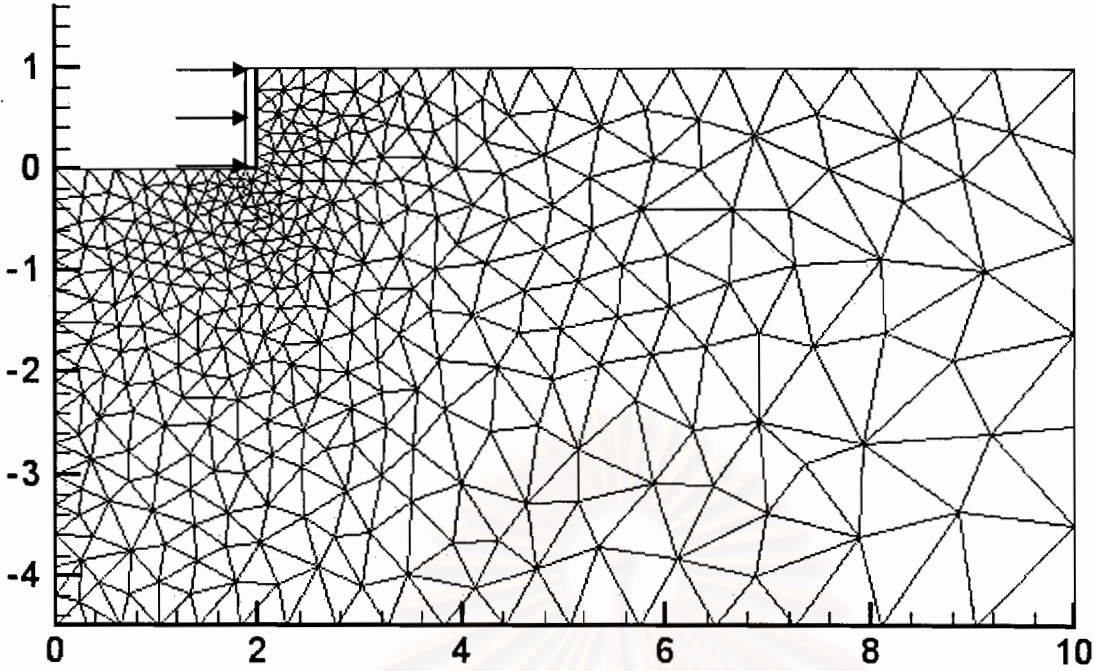
รูปที่ ๘14 ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง, B/H = 2.0



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	693
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,320
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,584
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,079
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานขุด (B), ม.	3.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	6.02274835568479
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	31
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	3,035
tolerance of equality equation	3.746e-4
tolerance of inequality equation	-7.955e-9

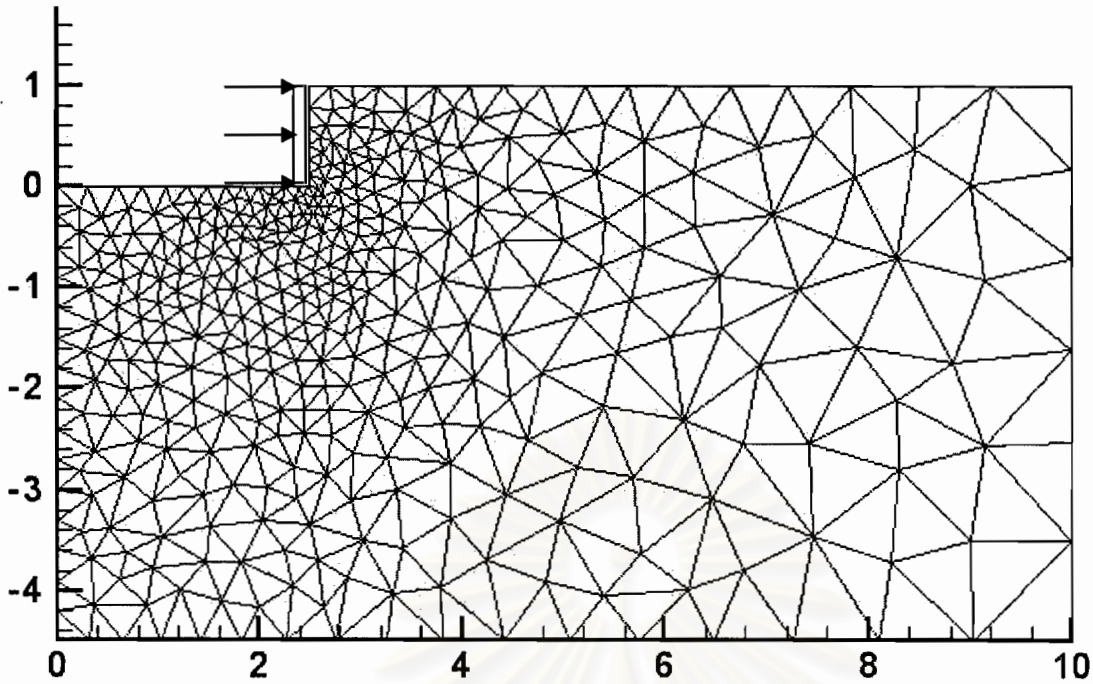
รูปที่ ๑๕ ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง, B/H = 3.0



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	740
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,743
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,978
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,220
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานขุด (B), ม.	4.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	5.80518254764666
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	32
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	3,573
tolerance of equality equation	2.162e-4
tolerance of inequality equation	-2.908e-6

รูปที่ ๑๖ ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง, B/H = 4.0

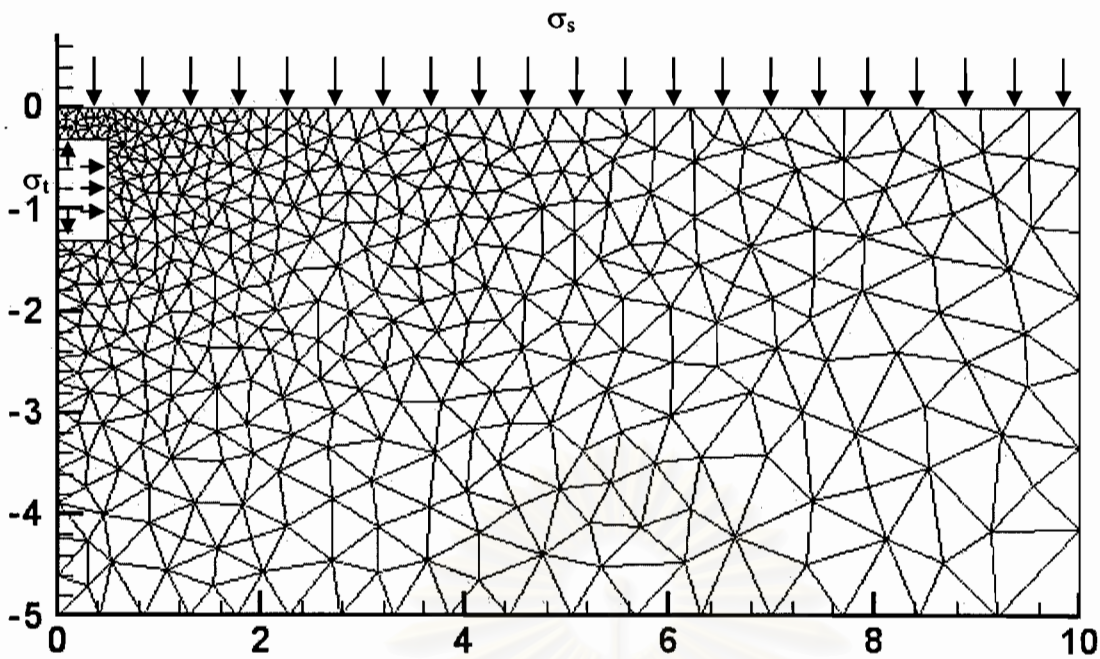


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	734
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,689
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,934
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,202
ความสูงของมวลดินในแนวตั้ง (H), ม.	1.0
ความกว้างของงานขุด (B), ม.	5.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

ผลการวิเคราะห์ (หน่วยน้ำหนัก)	5.79733030001163
จำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณ	30
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)	3,481
tolerance of equality equation	1.265e-4
tolerance of inequality equation	-5.678e-10

รูปที่ ๑๗ ผลการวิเคราะห์มวลดินในแนวตั้งแบบมีค้ำยันด้านข้าง, B/H = 5.0

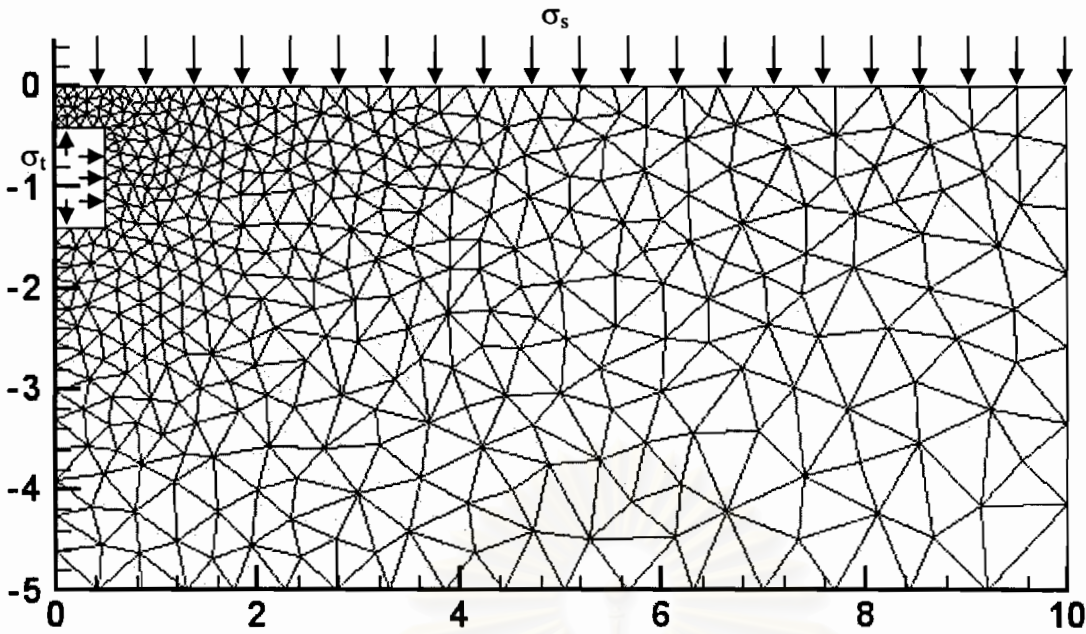




จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	-
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	-
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	-
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	-
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	0.3
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	0.420008758701774	0.120062693590739

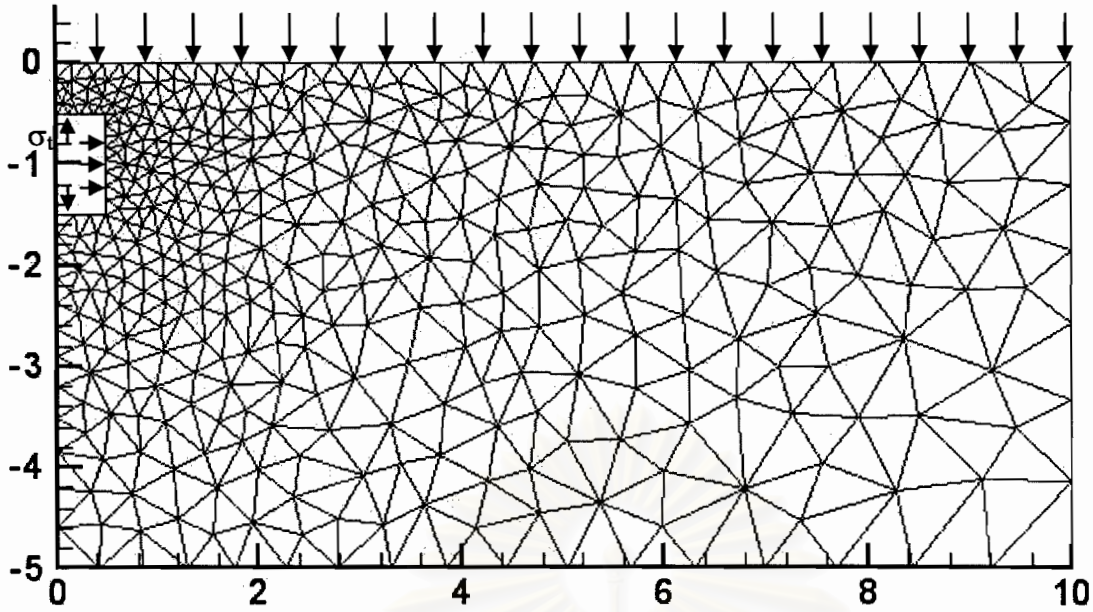
รูปที่ ๑๘ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 0.3$



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	790
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	7,111
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,380
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,370
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	0.4
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	0.630579915726329	0.230800376047688

รูปที่ ๑๙ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 0.4$

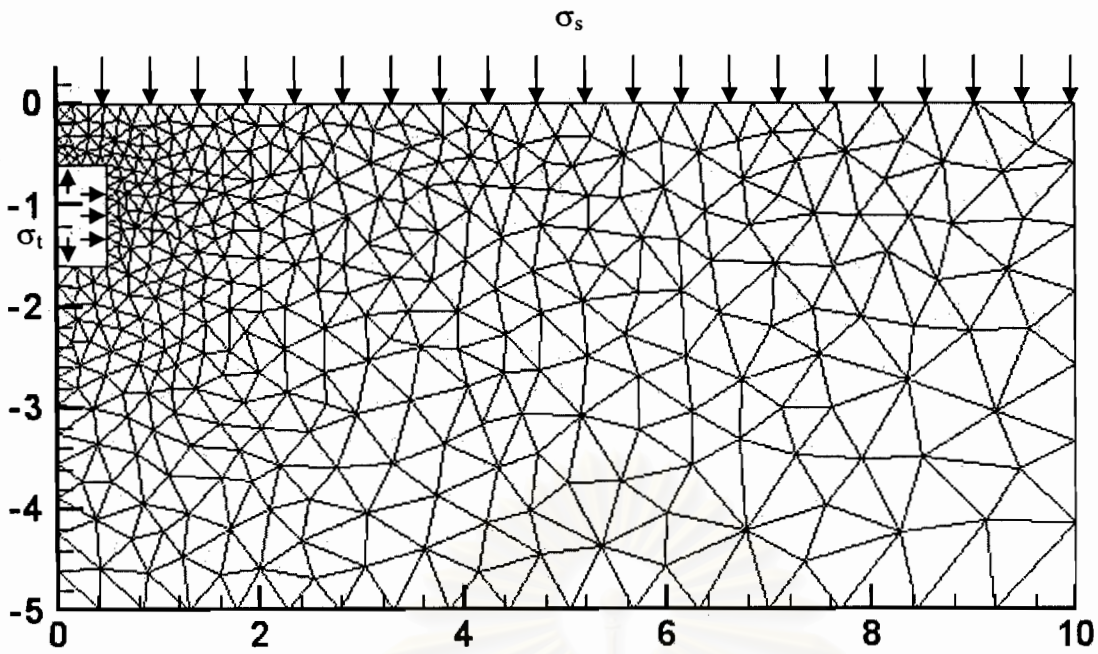


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	751
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,760
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,058
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,253
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	0.5
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_v)/c_u$	0.794629211297644	0.29426766010635

รูปที่ ๘20 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 0.5$

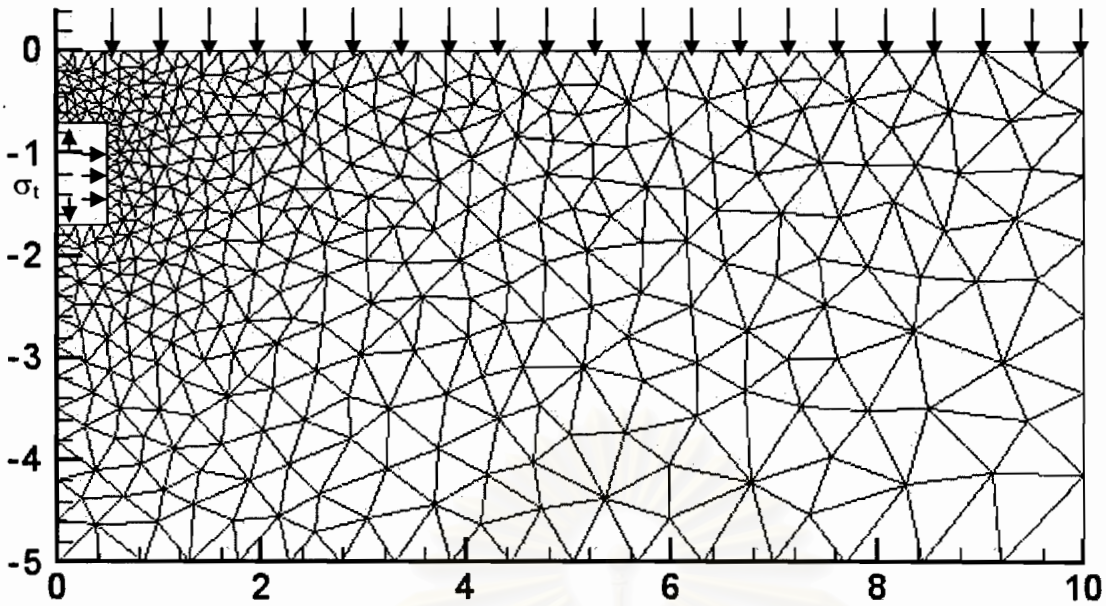
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	755
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,796
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,090
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,265
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	0.6
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	1.00896038958473	0.408523178325892

รูปที่ ๒๒๑ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 0.6$

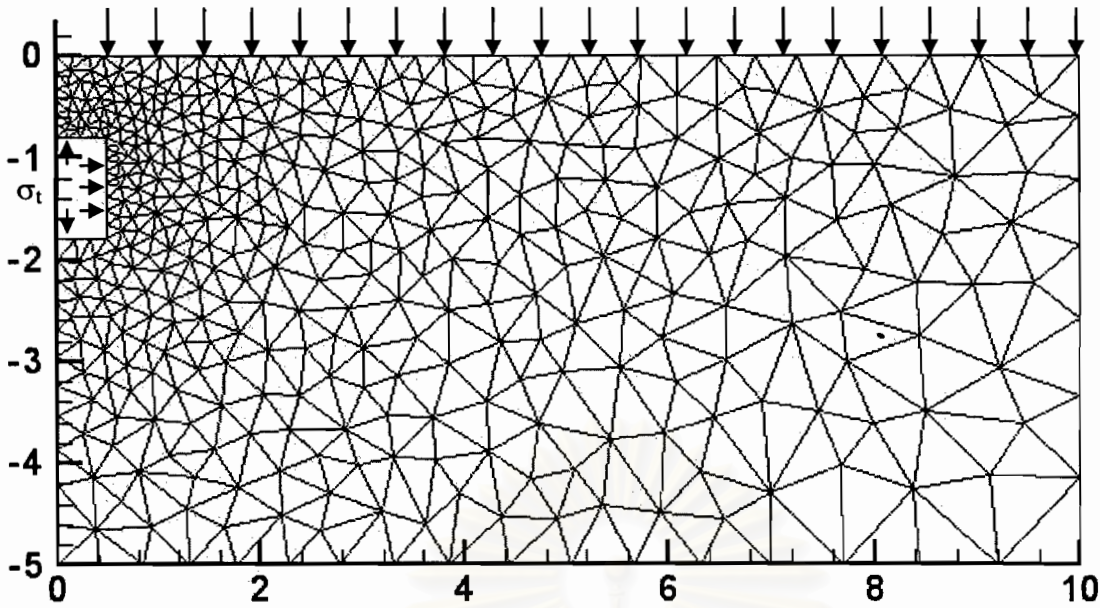


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	783
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	7,048
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,314
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,349
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	0.7
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_v)/c_u$	1.24337764230728	0.541478730808566

รูปที่ ๘22 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 0.7$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

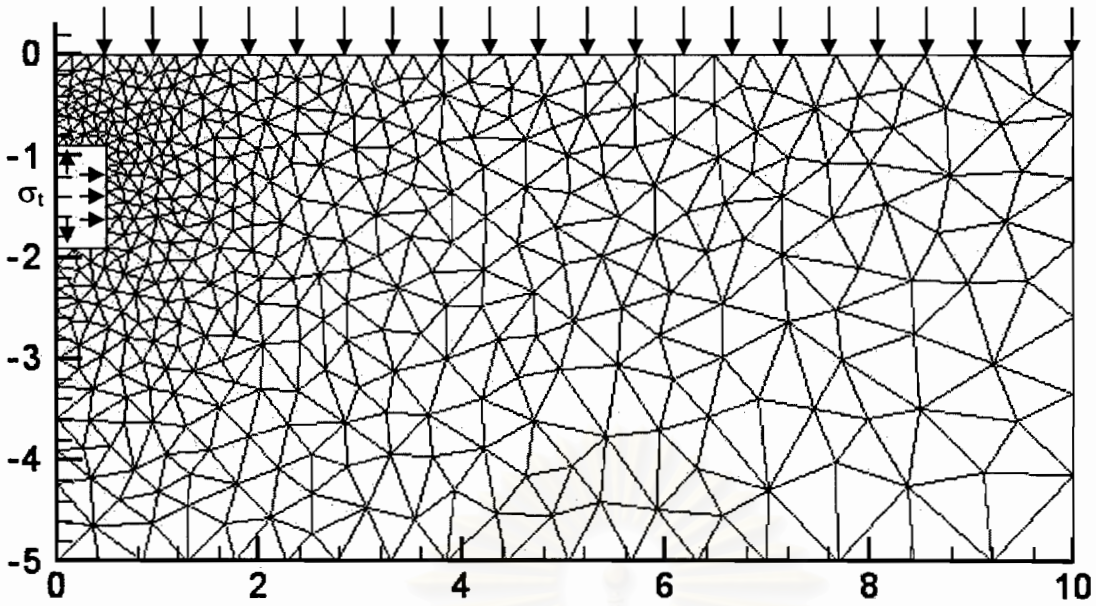


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	794
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	7,147
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,402
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,382
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	0.8
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	1.43351933802629	0.633415410503344

รูปที่ ๒๓ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 0.8$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

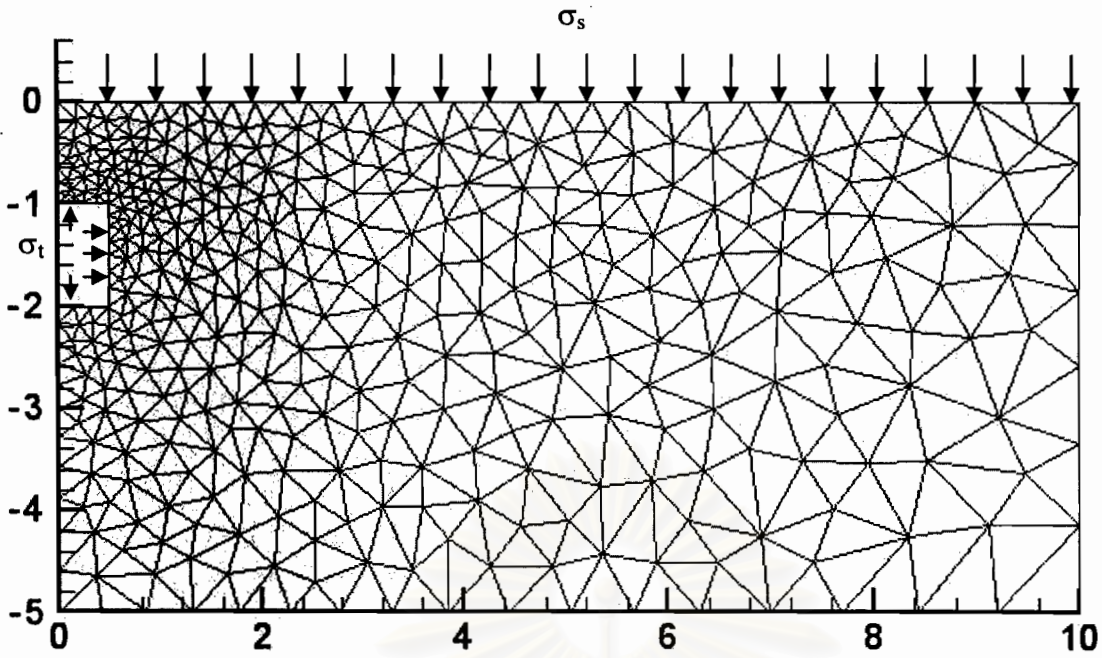


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	821
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	7,390
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,618
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,463
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	0.9
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_v)/c_u$	1.6088279207176	0.700367814616918

รูปที่ ๘24 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 0.9$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



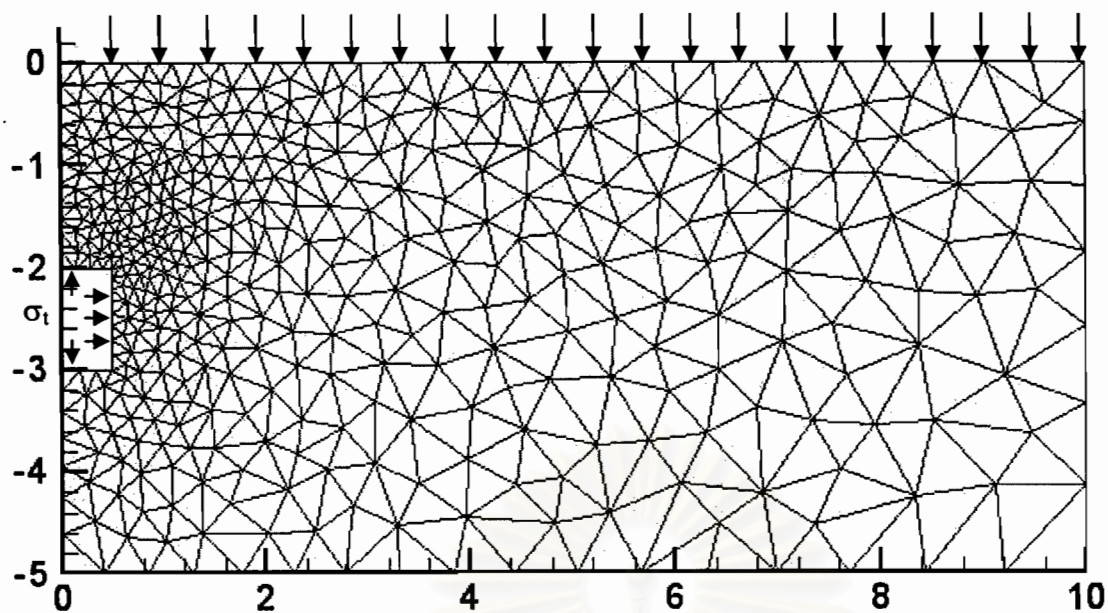
จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	-
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	-
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	-
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	-
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	1.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	1.82070025255039	0.768446800637106

รูปที่ ๘25 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 1.0$

สถาบันวิศวกรรม  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



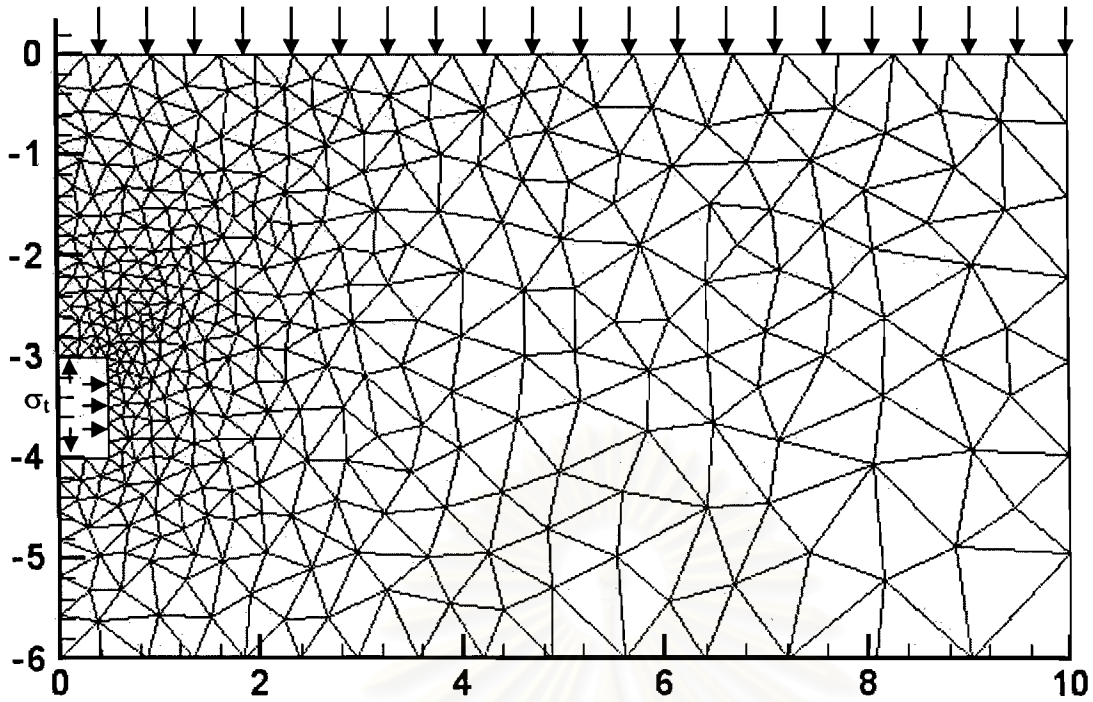


จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	817
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	7,354
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,578
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,451
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	2.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	2.86470447416459	0.537955899686015

รูปที่ ๒๒๖ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 2.0$

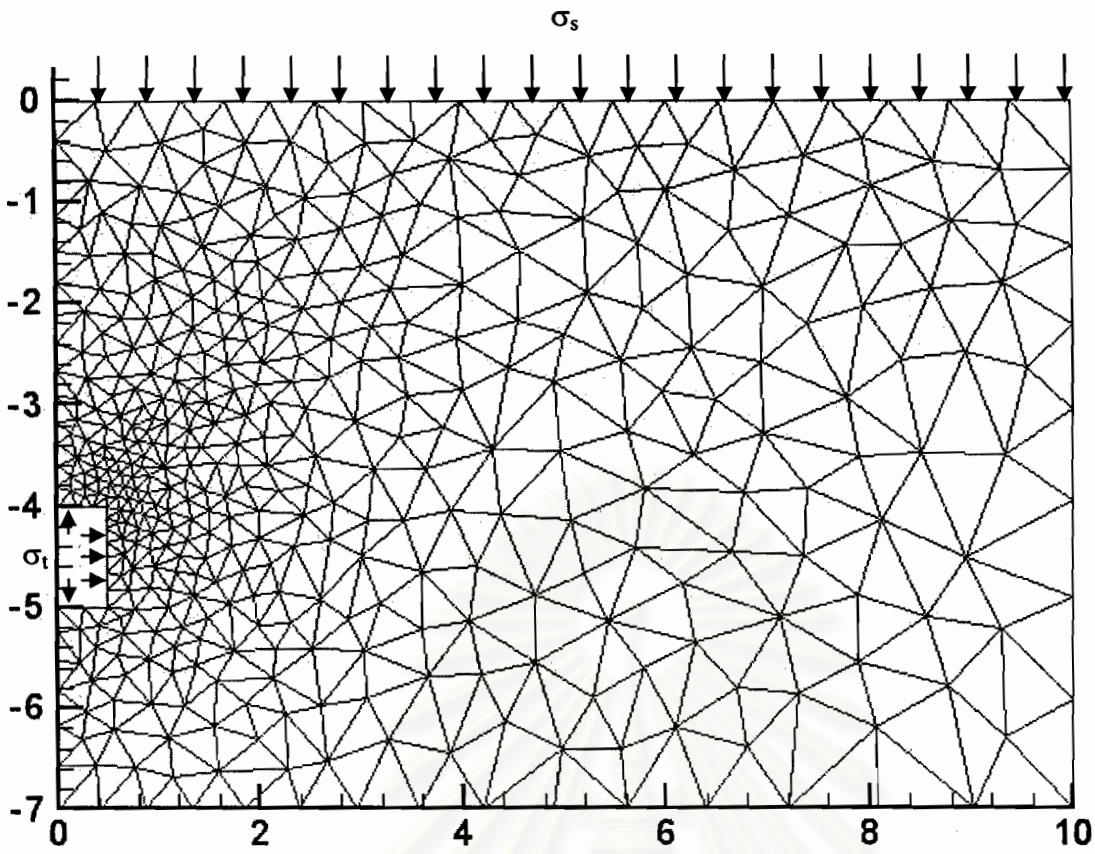
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	747
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,724
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,002
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,241
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	3.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมั่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	3.47841968014255	0.126910206589265

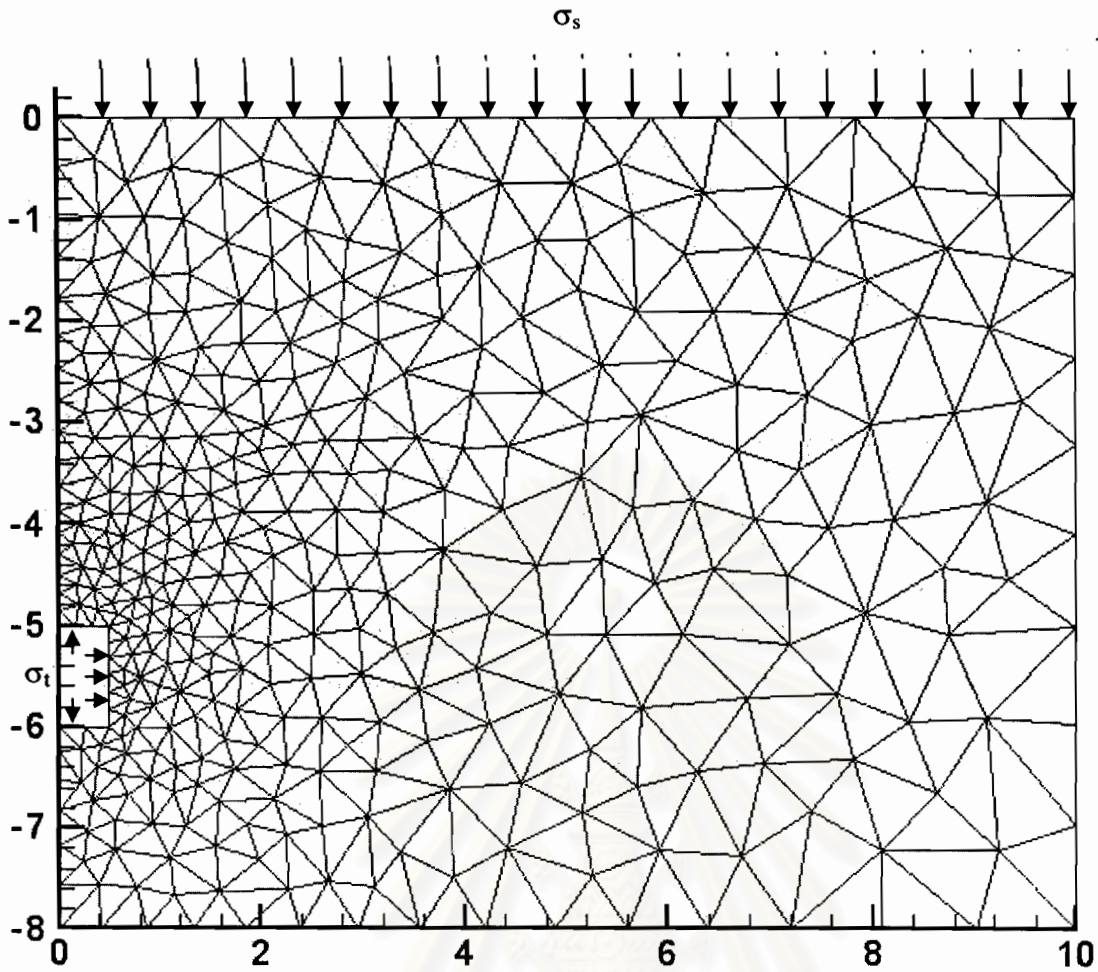
รูปที่ ๒๗ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 3.0$



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	803
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	7,228
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	6,442
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,409
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	4.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_l)/c_u$	3.9296268213246	-0.396265545018261

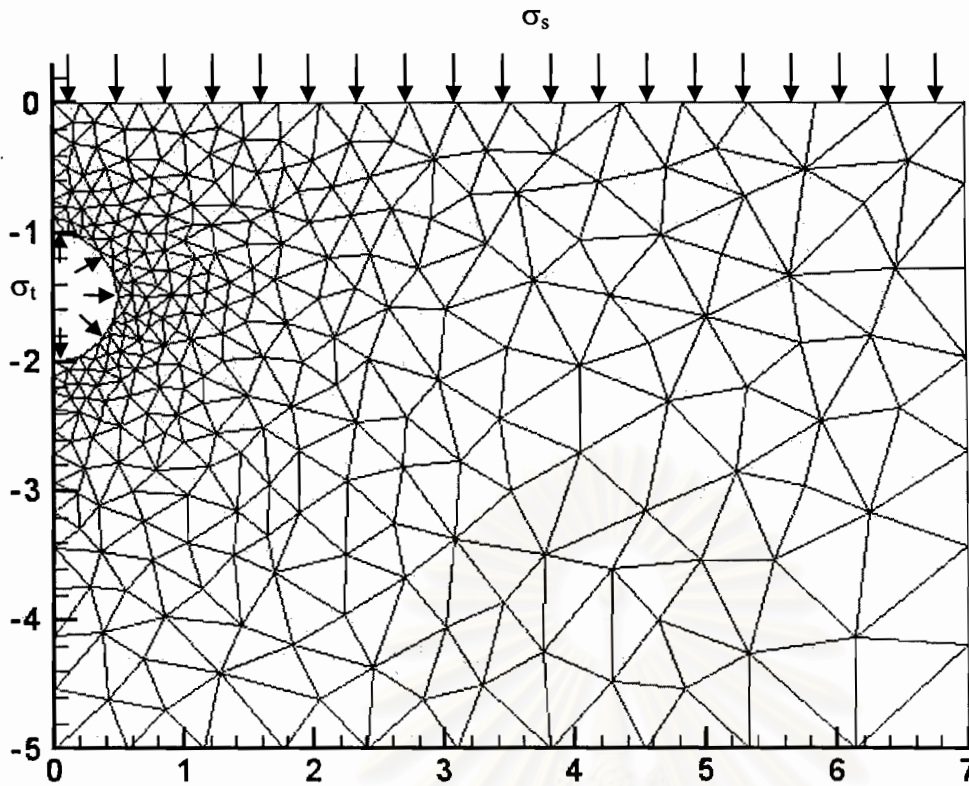
รูปที่ ๒๒๘ ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว,  $H/B = 4.0$



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	702
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,319
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,622
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,106
ความลึกจากผิวดิน (H), ม.	5.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (B), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0

	$\gamma B/c_u$	
	0	1
$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$	4.30138952531	-1.03418782460673

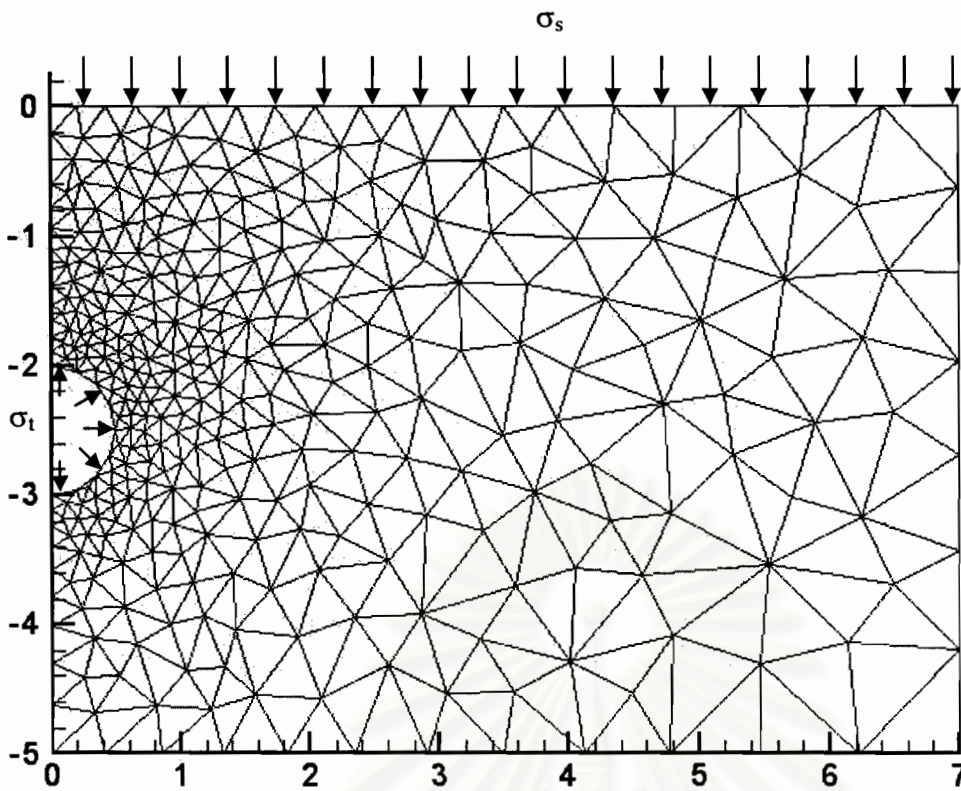
รูปที่ ๘29 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์สี่เหลี่ยมในชั้นดินเหนียว, H/B = 5.0



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	560
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,041
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	4,500
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,680
ความลึกจากผิวดิน (C), ม.	1.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (D), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
หน่วยน้ำหนักของดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

$\rho D/c_u$	$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$			
	$\gamma D/c_u$			
	0	1	2	3
0	2.3170	1.1340	0.0967	-1.4218
0.25	2.7847	1.6470	0.4730	-0.7396
0.5	3.2351	2.1076	0.9753	-0.1923
0.75	3.6858	2.5631	1.4374	0.3016
1.0	4.1304	3.0112	1.8882	0.7597

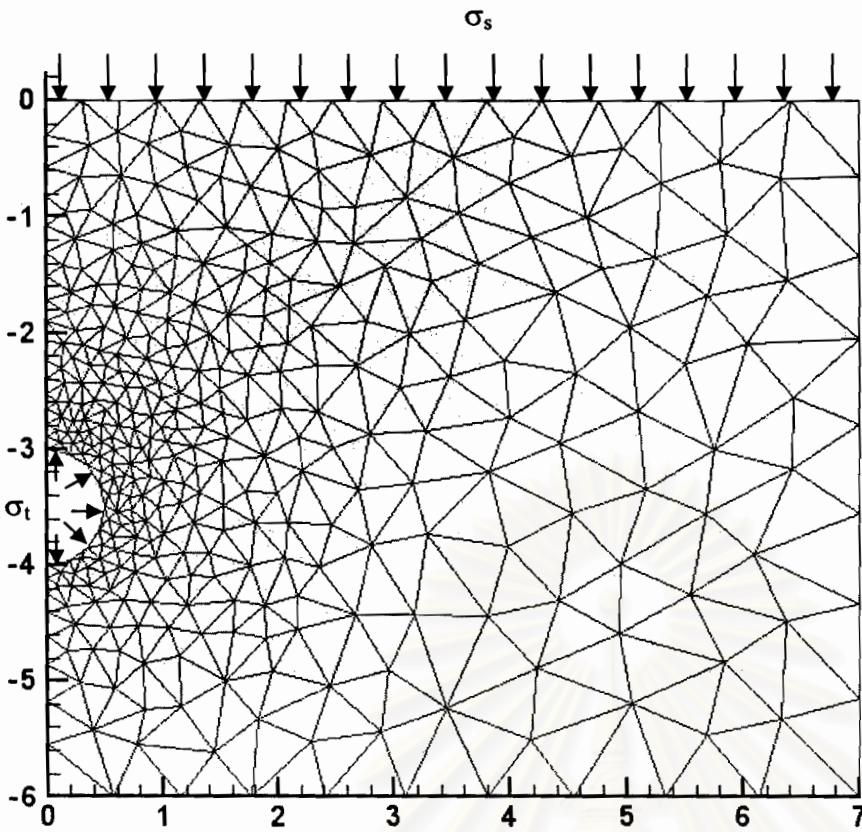
รูปที่ ๓30 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว,  $C/D = 1.0$



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	650
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	5,851
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,216
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	1,950
ความลึกจากผิวดิน (C), ม.	2.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (D), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
หน่วยน้ำหนักของดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

$\rho D/c_u$	$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$			
	$\gamma D/c_u$			
	0	1	2	3
0	3.3456	1.0614	-1.2911	-3.7265
0.25	4.7166	2.5008	-0.2525	-2.0354
0.5	6.0261	3.8394	1.6288	-0.6012
0.75	7.3194	5.1410	2.9539	0.7472
1.0	8.6060	6.4352	4.2530	2.0641

รูปที่ ๘31 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว, C/D = 2.0



จำนวนชิ้นส่วนสามเหลี่ยมทั้งหมด	676
จำนวนตัวแปรไม่ทราบทั้งหมด	6,085
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบเชิงเส้นตรงทั้งหมด	5,420
จำนวนสมการข้อจำกัดแบบไม่เชิงเส้นตรงทั้งหมด	2,028
ความลึกจากผิวดิน (C), ม.	3.0
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (D), ม.	1.0
ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion), ตัน/ตร.ม.	1.0
ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน (Friction angle), องศา	0.0
หน่วยน้ำหนักของดิน, ตัน/ลบ.ม.	0.0

$\rho D/c_u$	$(\sigma_s - \sigma_t)/c_u$			
	$\gamma D/c_u$			
	0	1	2	3
0	4.0015	0.6670	-2.7414	-6.2929
0.25	6.4389	3.1912	-0.0855	-3.4124
0.5	8.8126	5.5819	2.3355	-0.9248
0.75	11.1619	7.9445	4.7164	1.4723
1.0	13.4937	10.2915	7.0734	3.8415

รูปที่ ๘32 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพของอุโมงค์วงกลมในชั้นดินเหนียว,  $C/D = 3.0$

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายวุฒินันต์ ประทุม เกิดวันที่ 12 เมษายน พ.ศ. 2523 ที่จังหวัดอุดรธานี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น ในปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธาจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2544



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย