การปรับปรุงความแม่นยำของการควบคุมหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทาง
โดยใช้ไจโรสโกปและมาตรความเร่ง

นาย ศิริชัย พรสรายุทธ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

ACCURACY IMPROVEMENT OF OMNI-DIRECTIONAL
MOBILE ROBOT CONTROL USING GYROSCOPE
AND ACCELEROMETERS

Mr. Sirichai Pornsarayouth

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การปรับปรุงความแม่นยำของการควบคุมหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทาง โดยใช้ไจโรสโกปและมาตรความเร่ง
โดย	นาย ศิริชัย พรสรายุทธ
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. ชาญชัย ปลื้มปิติวิริยะเวช)

ศิริชัย พรสรายุทธ : การปรับปรุงความแม่นยำของการควบคุมหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทางโดยใช้ไจโรสโกปและมาตรความเร่ง (ACCURACY IMPROVEMENT OF OMNI-DIRECTIONAL MOBILE ROBOT CONTROL USING GYROSCOPE AND ACCELEROMETERS). อ.ที่ปรึกษา : ผศ.ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ, 88 หน้า.

สำหรับการควบคุมหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทางการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์เป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่ผิดพลาดไปจากคำสั่งที่ต้องการ เนื่องจากการควบคุมตำแหน่งของมอเตอร์โดยอาศัยการป้อนกลับจากตัวเข้ารหัสมอเตอร์เพียงอย่างเดียว ไม่สามารถตรวจจับการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์ได้ การลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์นั้นเกิดจากหลายสาเหตุ อาทิเช่น ความไม่สม่ำเสมอของพื้นสนาม ความไม่ต่อเนื่องของล้อชนิดเคลื่อนที่ทุกทิศทาง และการเร่งความเร็วของหุ่นยนต์ที่มากเกินไป เป็นต้น ตัวรับรู้ที่รับรู้การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ได้โดยไม่ได้รับผลกระทบจากการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์นั้นมีหลายชนิด ได้แก่ ไจโรสโกป มาตรความเร่ง ตำแหน่งและมุมจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ ดังนั้นเพื่อปรับปรุงสัญญาณป้อนกลับให้แม่นยำมากขึ้น งานวิจัยนำเสนอวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยตัวกรองคาลมานเพื่อแก้ปัญหาความผิดพลาดสะสมจากสัญญาณรบกวนกระแสตรง และปัญหาการประวิงเวลาระหว่างสัญญาณตัวรับรู้ต่างชนิด ตัวกรองคาลมานแบบขยายและตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดถูกใช้สำหรับการรวมสัญญาณตัวรับรู้ของสัญญาณที่มีการประวิงเวลา และเปรียบเทียบการจำลองระบบระหว่างการใช้วิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้สองชนิดคือ การรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบกรองซ้ำและแบบรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลา แบบจำลองคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์ที่ใช้สำหรับตัวกรองคาลมานนั้นเป็นแบบจำลองแบบรวมแรงเสียดทานแนวรัศมีซึ่งได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์นี้เช่นกัน ผลการจำลองการประมาณตัวแปรสถานะแสดงให้เห็นว่า วิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลาที่ใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายใช้รวมสัญญาณตัวรับรู้ที่มีการประวิงเวลาได้เป็นอย่างดี โดยมีความซับซ้อนของการคำนวณน้อยกว่าวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบกรองซ้ำ

ภาควิชา . . วิศวกรรมไฟฟ้า . . ลายมือชื่อนิสิต . . ศิริชัย พรสรายุทธ . . . .
สาขาวิชา . . วิศวกรรมไฟฟ้า . . ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา มานพ วงศ์สายสุวรรณ .
ปีการศึกษา . . . . 2550 . . . .

##4870486721 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING
KEYWORDS : OMNI-DIRECTIONAL MOBILE ROBOT / GYROSCOPE / ACCELEROMETER / MODELING / KALMAN FILTER / SENSOR FUSION

SIRICHAI PORNSARAYOUTH : ACCURACY IMPROVEMENT OF OMNI-DIRECTIONAL MOBILE ROBOT CONTROL USING GYROSCOPE AND ACCELEROMETERS. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. MANOP WONGSAISUWAN, 88 pp.

For an omni-directional mobile robot, a movement of the robot is deflected by a slippage of its wheels, since a control using a signal from motor encoder cannot detect its slippage. A bumping field, wheel discontinuity, and over-accelerating command cause wheel slippage. Hence, a gyroscope, two accelerometers and a computer vision system are used to sense the robot movement including the effect of robot slippage. In this work, we use a sensor-fusion technique which is applied to combine these sensors together. We also include a method to handle an accumulated error of the inertial sensors and a delay of data from the computer vision system. A kalman filter is a fusing tool being used to estimate both position and velocity which are the states of the robot. An extended kalman filter (EKF) and an unscented kalman filter (UKF) together with two sensor-fusion techniques were applied to a robotic system which has an effect of time-delay. The simulation results show that a different-time fusion using an extended kalman filter can fuse the delay signal effectively while requiring less computational complexity than a backward-fusion and re-filtering method. Also, we present an effective mathematical model which is applied in the kalman filter. This model includes a radial friction and damper effect.

Department . Electrical Engineering . Student's signature สิริชัย พรสรายุทธ
Field of study . Electrical Engineering . Advisor's signature มานพ วงศ์สายสุวรรณ
Academic year ...... 2007 ......

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยแรงบันดาลใจและความช่วยเหลือจากท่านอาจารย์ทุกท่าน ขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาที่ให้คำปรึกษาและคำแนะนำและเป็นแรงบันดาลใจในเรื่องวิทยานิพนธ์ การเรียนและการทำงานมาโดยตลอด ขอกราบขอบพระคุณ รศ.ดร.วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ และ อาจารย์ ดร.ชาญชัย ปลื้มปิติวิริยะเวช ที่ท่านสละเวลาอันมีค่าเพื่อตรวจสอบวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้มีความสมบูรณ์อย่างยิ่ง ขอกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์ในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุมและท่านอาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าทุกท่านที่อบรมสั่งสอนให้ข้าพเจ้ามีความรู้และความคิดที่กว้างไกลจนสามารถเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ชมรมนักประดิษฐ์วิศวกรรมเป็นอีกหน่วยงานที่เอื้ออำนวยความรู้ อุปกรณ์และสถานที่สำหรับการทดลองและทำวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ ขอขอบคุณพี่ช้าง มหิศร ว่องผาติ ที่ให้โอกาสและความรู้เกี่ยวกับหุ่นยนต์และระบบวงจรฝังตัวให้ข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาสี่ปี

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานเขียนที่ดีและเสร็จตามกำหนดได้ด้วยความช่วยเหลือจากหลายฝ่าย ขอขอบคุณ นายพสุ บุญวิสุทธิ์ ที่ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการเขียนวิทยานิพนธ์และความรู้ LaTeX ในหลายด้าน ขอบคุณทีมงาน MiKTeX ที่พัฒนา XeLaTeX ให้สามารถใช้ MiKTeX กับภาษาไทยได้อย่างง่ายดาย ขอบคุณ นายสราวุฒิ เดชจรัสโยธิน นายสรณ์ สีมาตรัง และนายชนินทร์ จันมา รุ่นพี่และรุ่นน้องชมรมนักประดิษฐ์วิศวกรรมอีกหลายท่านที่ช่วยแบ่งเบาภาระการทำงานและการเรียนของข้าพเจ้าจนกระทั่งเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เสร็จสมบูรณ์ สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจและให้การสนับสนุนข้าพเจ้าในทุกด้านมาโดยตลอด

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง **หน้า**

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ **หน้า**

ภาพประกอบ **หน้า**

ภาพประกอบ **หน้า**

คำอธิบายสัญลักษณ์

สัญลักษณ์		หน้า
θ_{z}	มุมของหุ่นยนต์ในแกนการหมุน z	5
V_{C}	เวกเตอร์ 4×1 ของแรงดันขาเข้า V_{nc} ของมอเตอร์ทั้งสี่ตัว	5
E_{C}	เวกเตอร์ 4×1 ของแรงเคลื่อนไฟฟ้าย้อนกลับ E_{nc} ของมอเตอร์ทั้งสี่ตัว	5
R_{C}	ความต้านทานของขดลวดในมอเตอร์	5
L_{C}	ความเหนี่ยวนำของขดลวดในมอเตอร์	5
i_n	กระแสภายในขดลวดของมอเตอร์ตัวที่ n	5
G_{r}	อัตราทดรอบของมอเตอร์	7
G_{eff}	ประสิทธิภาพของระบบเฟืองทด	7
K_{t}	ค่าคงตัวแรงบิดของมอเตอร์	7
$\mathcal{T}_{\mathrm{w}}$	เวกเตอร์ 4×1 ของแรงบิด $\tau_{n\mathrm{w}}$ ที่กระทำกับล้อหุ่นยนต์ทั้งสี่หลังผ่านระบบเฟืองทด	7
$\tau_{n\mathrm{r}}$	แรงบิดของแกนมอเตอร์ตัวที่ n โดยยังไม่ผ่านระบบเฟืองทด	7
m_{w}	มวลของล้อหุ่นยนต์	7
r_{w}	รัศมีของล้อหุ่นยนต์	7
j_{w}	โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อหุ่นยนต์	7
f_n	แรงเสียดทานระหว่างล้อที่ n ของหุ่นยนต์และพื้นสนาม	7
$v_{n\mathrm{w}}$	ความเร็วการหมุนของล้อที่ n วัดที่ขอบล้อ	7
V_{R}	เวกเตอร์ 4×1 ของความเร็วการเคลื่อนที่เชิงเส้น $v_{n\mathrm{R}}$ ของล้อที่ n ของหุ่นยนต์	7
F_{w}	เวกเตอร์ 4×1 ของแรงกิริยา–ปฏิกิริยา F_n ระหว่างล้อที่ n และตัวหุ่นยนต์	7
F_{B}	เวกเตอร์ 3×1 ของแรงรวม $F_{\mathrm{xB}}, F_{\mathrm{yB}}$ และแรงบิด $\mathcal{T}_{\mathrm{z}}$ ที่กระทำกับตัวหุ่นยนต์ในกรอบหุ่นยนต์	7
$\mathbb{T}$	เมทริกซ์ค่าคงตัวใช้กระจายและรวมเวกเตอร์ระหว่างเวกเตอร์ตามทิศของล้อทั้งสี่และเวกเตอร์บนกรอบหุ่นยนต์ B	7
$\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})$	เมทริกซ์การหมุนเวกเตอร์ใด ๆ จากกรอบหุ่นยนต์ B ไปเป็นเวกเตอร์บนกรอบความเฉื่อย N	7
β_n	มุมของแกนมอเตอร์ที่กระทำกับแกน x และ y ดังรูป 2.1(ข)	8
F_{N}	เวกเตอร์ 3×1 ของแรงรวม $F_{\mathrm{xN}}, F_{\mathrm{yN}}$ และแรงบิด $\mathcal{T}_{\mathrm{z}}$ ที่กระทำหุ่นยนต์ในกรอบความเฉื่อย	8
$\mathbb{M}$	เมทริกซ์ทแยงมุมของมวลและโมเมนต์ความเฉื่อยของหุ่นยนต์ในแกน z	8
V_{N}	เวกเตอร์ 3×1 ของความเร็วรวม $V_{\mathrm{xN}}, V_{\mathrm{yN}}$ และความเร็วเชิงมุม ω_{z} ของหุ่นยนต์ในกรอบความเฉื่อย	8
V_{B}	เวกเตอร์ 3×1 ของความเร็วรวม $V_{\mathrm{xB}}, V_{\mathrm{yB}}$ และความเร็วเชิงมุม ω_{z} ของหุ่นยนต์ในกรอบหุ่นยนต์	8
$\omega_{n\mathrm{r}}$	ความเร็วเชิงมุมของแกนมอเตอร์ตัวที่ n โดยยังไม่ผ่านระบบเฟืองทด	9
$\mathbb{D}(\omega_{\mathrm{z}})$	เมทริกซ์ที่มีสมาชิก ω_{z} และ $-\omega_{\mathrm{z}}$ เพียงสองตัว เกิดจาก $\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{\mathbb{R}}(\theta_{\mathrm{z}})$	9
K_1, K_2, K_3	ค่าคงตัวรวมที่กำหนดขึ้นเพื่อลดความซับซ้อนของการเขียนแบบจำลองคณิตศาสตร์	10
F_{L}	เวกเตอร์ 4×1 ของแรงเสียดทานส่วนข้าง $F_{n\mathrm{L}}$ จากล้อทั้งสี่ของหุ่นยนต์	10

สัญลักษณ์		หน้า
K_{fL}	แรงเสียดทานเฉลี่ยคงตัวภายในกลไกของล้อและมอเตอร์	10
K_{bL}	สัมประสิทธิ์ความหนืดเฉลี่ยภายในกลไกของล้อและมอเตอร์	10
V_{w}	เวกเตอร์ 4×1 ของความเร็วการหมุน $v_{n\mathrm{w}}$ ของล้อที่ n ของหุ่นยนต์วัดที่ขอบล้อ	10
$\mathrm{sgn}(\cdot)$	ฟังก์ชันซิกนัม	10
F_{p}	เวกเตอร์ 4×1 ของแรงเสียดทานแนวรัศมี $F_{n\mathrm{p}}$ จากล้อทั้งสี่ของหุ่นยนต์	11
V_{p}	เวกเตอร์ 4×1 ของความเร็วตามแนวรัศมีของหุ่นยนต์ $v_{n\mathrm{p}}$ จากล้อทั้งสี่	11
K_{fp}	แรงเสียดทานเฉลี่ยคงตัวตามแนวรัศมีของแกนล้อแบบเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง	11
K_{bp}	สัมประสิทธิ์ความหนืดเฉลี่ยตามแนวรัศมีของแกนล้อแบบเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง	11
$\mathbb{T}_{\mathrm{p}}$	เมทริกซ์ค่าคงตัวใช้กระจายและรวมเวกเตอร์ระหว่างเวกเตอร์ตามแนวแกนของล้อทั้งสี่และเวกเตอร์บนกรอบหุ่นยนต์ B	11
P_{N}	เวกเตอร์ 3×1 ของตำแหน่ง P_{xN}, P_{yN} ในกรอบความเฉื่อยและมุม θ_{z} ของหุ่นยนต์	12
$\hat{\Diamond}$	ค่าประมาณของตัวแปร $\Diamond$ ใด ๆ	12
$\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}})$	เมทริกซ์ที่ขึ้นกับตัวแปรสถานะ ω_{z} เป็นตัวคูณตัวแปรสถานะในสมการเชิงอนุพันธ์ของแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มี V_{B} เป็นตัวแปรสถานะ	15
$\mathbb{B}$	เมทริกซ์คงตัว เป็นตัวคูณสัญญาณขาเข้าซึ่งเป็นแรงดัน V_{C} ในสมการเชิงอนุพันธ์ของแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มี V_{B} เป็นตัวแปรสถานะ	15
Z	เวกเตอร์ 6×1 ของสัญญาณขาออกทั้งหมดของระบบหุ่นยนต์โดยสังเขปประกอบด้วย $\dot{v}_{\mathrm{xB}}$, $\dot{v}_{\mathrm{yB}}$, ω_{z}, P_{xN}, P_{yN} และ θ_{z}	16
X	เวกเตอร์ 6×1 ของตัวแปรสถานะรวมระหว่าง V_{B} และ P_{N}	16
$\mathbb{F}$	เมทริกซ์ที่ขึ้นกับตัวแปรสถานะ ω_{z} และ θ_{z} เป็นตัวคูณตัวแปรสถานะในสมการเชิงอนุ-พันธ์ของแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มี V_{B} และ P_{N} เป็นตัวแปรสถานะ	16
$\mathbb{G}$	เมทริกซ์คงตัว เป็นตัวคูณของแรงดันขาเข้าในสมการเชิงอนุพันธ์ของแบบจำลองคณิต-ศาสตร์ที่มี V_{B} และ P_{N} เป็นตัวแปรสถานะ	16
$\mathcal{F}(X, V_{\mathrm{C}})$	ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นในสมการเชิงอนุพันธ์ของแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มี V_{B} และ P_{N} เป็นตัวแปรสถานะ	16
U	เวกเตอร์ 6×1 ของสัญญาณรบกวนกระบวนการ	16
p_{ax}, p_{ax}	ตำแหน่งในแกน x และ y ที่เบี่ยงเบนไปจากจุดศูนย์กลางหุ่นยนต์ของมาตรความเร่ง	16
r_{a}, β_{A}	ระยะห่างและมุมระหว่างจุดศูนย์กลางหุ่นยนต์และมาตรความเร่ง	16
β_{dA}	มุมเอียงที่เกิดจากการติดตั้งมาตรความเร่งที่ไม่อยู่กลางหุ่นยนต์	16
Z_{IV}	เวกเตอร์ 6×1 ของสัญญาณขาออกของระบบที่รวมผลการติดตั้งมาตรความเร่งที่ไม่กลางหุ่นยนต์แล้ว	16
$\mathbb{H}_{\mathrm{IV}}$	เมทริกซ์ที่ขึ้นกับ ω_{z} เป็นตัวคูณตัวแปรสถานะในแบบจำลองคณิตศาสตร์ขาออกที่มี V_{B} และ P_{N} เป็นตัวแปรสถานะ	16
$\mathbb{C}$	เมทริกซ์คงตัว เป็นตัวคูณแรงดันขาเข้าในแบบจำลองคณิตศาสตร์ขาออกที่มี V_{B} และ P_{N} เป็นตัวแปรสถานะ	16
$\mathcal{H}_{\mathrm{IV}}(X, V_{\mathrm{C}})$	ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นของแบบจำลองคณิตศาสตร์ขาออกที่มี V_{B} และ P_{N} เป็นตัวแปรสถานะ	16

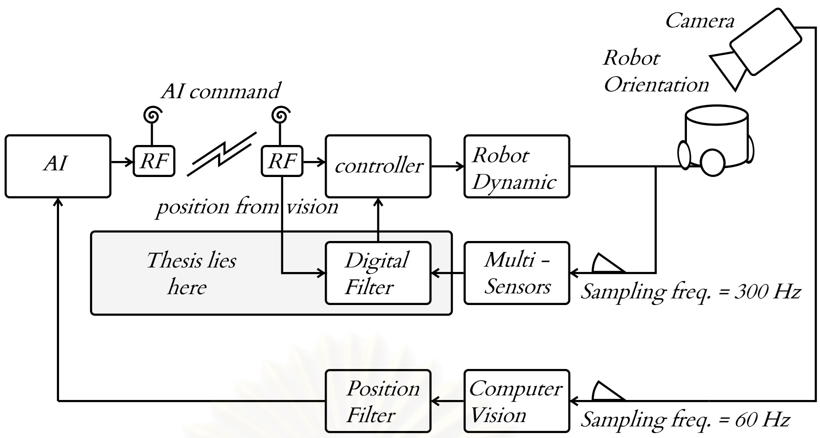
สัญลักษณ์		หน้า
$e^{1,2}_{(k)}$	ความผิดพลาดจากการประมาณตัวแปรสถานะ X โดยใช้ตัวรับรู้ชุดที่ 1,2 ที่เวลา k	42
$P^{1,2}_{\mathrm{ee}(k)}$	ความแปรปรวนของความผิดพลาดจากการประมาณตัวแปรสถานะ X โดยใช้ตัวรับรู้ชุดที่ 1,2 ที่เวลา k	42
$K^{1,2}_{(k)}$	ตัวคูณการปรับปรุง $\hat{X}^-_{(k)}$ ให้เป็น $\hat{X}^{1,2}_{(k)}$ ด้วยสัญญาณตัวรับรู้ $Z^{1,2}_{(k)}$	42
$P^{12}_{\mathrm{ee}(k)}$	ความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาดจากการประมาณตัวแปรสถานะ X โดยใช้ตัวรับรู้ชุดที่ 1 และ 2 ที่เวลา k	42
$P^{12}_{\mathrm{zz}(k)}$	ความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาดของการประมาณสัญญาณขาออก Z^1 และ Z^2 ที่เวลา k	42
$\Upsilon_{1,2}$	เมทริกซ์จาโคเบียนของแบบจำลองคณิตศาสตร์ขาออกของตัวรับรู้ชุดที่ 1,2	42
t_{d}	เวลาประวิง	43
$P_{\mathrm{e}^1_{(k)}(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)_{(k-t_\mathrm{d})}}$	ความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาดของการประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{X}^1_{(k)}$ และผลต่างความผิดพลาดของการประมาณ $\hat{X}^1_{(k-t_\mathrm{d})}$ กับ $\hat{X}^2_{(k-t_\mathrm{d})}$	50
$P_{(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)_{(k-t_\mathrm{d})}}$	ความแปรปรวนของผลต่างความผิดพลาดของการประมาณ $\hat{X}^1_{(k-t_\mathrm{d})}$ กับ $\hat{X}^2_{(k-t_\mathrm{d})}$	50
$P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^{1,2}_{(k-t_\mathrm{d})}}$	ความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาดของการประมาณ $\hat{X}^1_{(k)}$ และความผิดพลาดของการประมาณ $\hat{X}^{1,2}_{(k-t_\mathrm{d})}$	50
$K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)}$	ตัวคูณการปรับปรุง $\hat{X}^1_{(k)}$ ให้เป็น $\hat{X}_{(k)}$ ที่สมบูรณ์ด้วยข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ที่มีการประวิงเวลา $Z^2_{(k-t_\mathrm{d})}$	50
$P_{\mathrm{ee}^{12t_\mathrm{d}}(k)}$	ความแปรปรวนของความผิดพลาดจากการประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{X}_{(k)}$ หลังได้รับการปรับปรุงด้วย $Z^2_{(k-t_\mathrm{d})}$ ในอดีต	50
$P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(k-t_\mathrm{d})}}$	ความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาดของการประมาณ $\hat{X}^1_{(k)}$ และความผิดพลาดของการทำนาย $\hat{X}^-_{(k-t_\mathrm{d})}$	50
$\mathcal{A}^1_{(k)}$	เมทริกซ์ซึ่งปรับ $P_{\mathrm{e}^1_{(k-1)}\mathrm{e}^-_{(j)}}$ ให้เป็น $P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(j)}}$ จากการประมาณตัวแปรสถานะที่เวลา k ด้วย $Z^1_{(k)}$	51
$e^{12_i}_{(k)}$	ความผิดพลาดของค่าประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{X}_{(k)}$ ที่ได้รับการปรับปรุงด้วย Z^2_i ในอดีตแล้ว	51
$P_{\mathrm{e}^{12_i}_{(k)}\mathrm{e}^-_{(j)}}$	ความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาดของค่าประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{X}_{(k)}$ ที่ได้รับการปรับปรุงจากข้อมูลคอมพิวเตอร์วิทัศน์ในอดีตแล้ว และความผิดพลาดจากการทำนายตัวแปรสถานะที่เวลาใดเวลาหนึ่งระหว่าง i และ k	51

บทที่ 1
บทนำ

การแข่งขันหุ่นยนต์โรโบคัพถูกจัดอย่างเป็นทางการครั้งแรกในปี 1997 ณ เมืองนาโกยา ประเทศญี่ปุ่น การแข่งขันในครั้งนั้นเป็นการแข่งขันที่มีหุ่นยนต์เคลื่อนที่แบบไร้สายเข้าร่วมมากที่สุดในประวัติศาสตร์ มีทั้งการแข่งขันทั้งแบบจำลอง (simulation) และแบบใช้หุ่นยนต์จริง กระทั่งปัจจุบันการแข่งขันได้ขยายตัวมากขึ้นและครอบคลุมถึงงานวิจัยหลายด้าน ประกอบด้วยการแข่งขันหุ่นยนต์เตะฟุตบอล (RoboCupSoccer) การแข่งขันหุ่นยนต์กู้ภัย (RoboCupRescue) และการแข่งขันหุ่นยนต์ระดับเยาวชน (RoboCupJunior) เพื่อเพิ่มทักษะด้านการประดิษฐ์และควบคุมหุ่นยนต์ของนิสิต คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ได้สนับสนุนให้นิสิตจำนวนหนึ่งเข้าร่วมการแข่งขันหุ่นยนต์เตะฟุตบอลขนาดเล็ก (Small Size Robot League) ซึ่งเป็นการแข่งขันรายการหนึ่งในการแข่งขันหุ่นยนต์เตะฟุตบอล (*http://www.robocup.org*) หุ่นยนต์เคลื่อนที่แบบไร้สายชนิดเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง (omni-directional mobile robot) เป็นหุ่นยนต์ที่ใช้อย่างแพร่หลายในการแข่งขันหุ่นยนต์เตะฟุตบอลขนาดเล็ก และเป็นตัวอย่างที่เหมาะสมของหุ่นยนต์เคลื่อนที่แบบไร้สาย ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงศึกษาหุ่นยนต์เคลื่อนที่แบบไร้สายชนิดเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทางเป็นสำคัญ โดยจากนี้ไปคำว่าหุ่นยนต์ในวิทยานิพนธ์จะหมายถึงหุ่นยนต์เคลื่อนที่แบบไร้สายชนิดเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง

ลักษณะของหุ่นยนต์มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางไม่เกิน 18 เซนติเมตร ความสูงไม่เกิน 15 เซนติเมตร ขับเคลื่อนด้วยล้อแบบเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง (omni-directional wheel) ทำให้หุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระทั้งในแนวแกน x แกน y และแกนการหมุน z ของหุ่นยนต์ ตัวอย่างของล้อแบบเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทางได้แสดงไว้ดังรูป ก.1 ในการแข่งขันระหว่างสองทีมที่เข้าร่วมการแข่งขัน แต่ละทีมจะใช้หุ่นยนต์ทีมละ 5 ตัวแข่งขัน โดยจะแบ่งเป็นผู้เล่น 4 ตัวและผู้รักษาประตู 1 ตัว สนามที่ใช้แข่งขันมีขนาดกว้าง 3.4 เมตร ยาว 4.9 เมตร กติกาการแข่งขันคล้ายการแข่งขันฟุตบอลจริง แต่ถูกปรับเปลี่ยนเพื่อให้ใช้กับหุ่นยนต์ได้ เป้าหมายของแต่ละทีมคือยิงลูกบอลที่เป็นลูกกอล์ฟเข้าประตูของฝ่ายตรงข้ามให้ได้มากกว่าภายในเวลาที่กำหนด ทั้งความแม่นยำและความรวดเร็วของหุ่นยนต์จึงเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการแข่งขัน ตำแหน่งของหุ่นยนต์ทั้งสองทีมและลูกกอล์ฟซึ่งใช้แทนลูกฟุตบอลจะวัดได้จากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ (computer vision) ซึ่งรับภาพจากกล้องจับภาพที่ติดอยู่ด้านบนของสนามแข่งขัน คอมพิวเตอร์วิทัศน์จะส่งข้อมูลทางตำแหน่งที่ประมวลผลแล้วไปยังระบบปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence หรือ AI) ซึ่งทำหน้าที่วางแผนการเล่นและกำหนดเส้นทางการวิ่งของหุ่นยนต์ทั้ง 5 ตัว คำสั่งที่เป็นตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ทุกตัวจะถูกส่งผ่านทางความถี่วิทยุ (Radio Frequency หรือ RF) เพื่อเป็นความเร็วอ้างอิงสำหรับหุ่นยนต์นั้น ๆ ระบบทั้งหมดของหุ่นยนต์เป็นระบบอัตโนมัติ แผนภาพบล็อกของระบบได้แสดงไว้ดังรูป 1.1

การลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์เป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่ผิดพลาดไปจากคำสั่งของระบบ AI เนื่องจากการควบคุมตำแหน่งของมอเตอร์โดยอาศัยการป้อนกลับจากตัวเข้ารหัสมอเตอร์ (motor encoder) เพียงอย่างเดียวไม่สามารถตรวจจับการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์ได้ การลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์นั้นเกิดจากสาเหตุหลายประการ เช่น ความไม่สม่ำเสมอของพื้นสนาม ความไม่ต่อเนื่องของล้อหุ่นยนต์แบบเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง ดังรูป ก.1 และการเร่งความเร็วของหุ่นยนต์ที่มากเกินไป [1] เป็นต้น อุปกรณ์รับรู้ความเฉื่อย (inertial sensor) ได้แก่ ไจโรสโกป (gyroscope) และ มาตรความเร่ง (accelerometer) เป็นอุปกรณ์ที่สามารถวัดการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ได้โดยไม่ต้องสัมผัสกับพื้น ดังนั้นการควบคุมโดยใช้สัญญาณป้อนกลับจากอุปกรณ์เหล่านี้จึงชดเชยการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์ได้ ไจโรสโกปเป็นอุปกรณ์ที่ใช้วัดความเร็วเชิงมุมของหุ่นยนต์ และมาตรความเร่งเป็นอุปกรณ์ที่ใช้วัดความเร่งในแนวระนาบของหุ่นยนต์ ดังนั้นค่าที่วัดได้จากไจโรสโกปและมาตรความเร่งจะต้องนำ



รูปที่ 1.1: ระบบทำงานโดยรวมของหุ่นยนต์

ไปหาปริพันธ์เพื่อให้ได้มุมและตำแหน่งของมอเตอร์ก่อนจะนำไปใช้ป้อนกลับให้ระบบควบคุมตำแหน่งของหุ่นยนต์

โดยทั่วไปไจโรสโกปและมาตรความเร่งจะให้สัญญาณขาออกเป็นสัญญาณแอนะล็อก (analog signal) ซึ่งเป็นสัญญาณที่ถูกรบกวนได้ง่าย โดยเฉพาะการรบกวนจากสัญญาณรบกวนที่มีค่าคาดหมาย (expectation) ไม่เป็นศูนย์หรือสัญญาณเกิดความเพี้ยนกระแสตรง (DC distortion) เมื่อนำมาหาปริพันธ์จะทำให้เกิดความผิดพลาดสะสม (accumulated error) ของตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการกรอง (filtering) สัญญาณก่อนจะนำค่าที่วัดได้ไปใช้เป็นสัญญาณป้อนกลับในระบบควบคุม อนึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์เป็นระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและข้อมูลที่ได้จากตัวรับรู้มีลักษณะไม่ต่อเนื่อง (discrete) ดังนั้นตัวกรองที่เหมาะสมจึงจำเป็นต้องเป็นแบบไม่ต่อเนื่องและรองรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้

อุปกรณ์อีกชนิดซึ่งสามารถอ่านค่าตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์โดยตรงโดยไม่ต้องสัมผัสกับพื้นคือระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ที่คำนวณค่าตำแหน่งของหุ่นยนต์จากกล้องจับภาพที่ติดตั้งอยู่ด้านบนของสนาม ค่าตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์นั้นสามารถส่งมาพร้อมกับคำสั่งที่ส่งมาให้หุ่นยนต์ได้ โดยปกติแล้วกล้องจับภาพที่ใช้มีอัตรากรอบภาพ (frame rate) เท่ากับ 60 เฮิรตซ์ นั่นคือระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์จะให้ตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ได้ที่ความถี่ 60 เฮิรตซ์ ต่างจากไจโรสโกปและมาตรความเร่งซึ่งสามารถให้ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงเส้นของหุ่นยนต์ได้ที่ความถี่ 600 เฮิรตซ์หรือมากกว่า อัตรากรอบภาพของกล้องจับภาพที่น้อยนี้เป็นข้อเสียเปรียบของข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ ยกตัวอย่างเช่น ถ้าหากหุ่นยนต์เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 5 เมตร/วินาที แล้วค่าตำแหน่งที่เปลี่ยนไประหว่างที่ไม่มีข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์มีค่าประมาณ $5/60$ เมตร ≈ 8.33 เซนติเมตร ซึ่งเป็นค่าที่มากเมื่อเทียบกับขนาดของหุ่นยนต์ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 18 เซนติเมตร นอกจากอัตรากรอบภาพที่ต่ำแล้วการประวิงเวลา (time delay) ของข้อมูลที่เกิดจากการประมวลผลภาพ (image processing) ในระบบคอม พิวเตอร์วิทัศน์ยังเป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้ตำแหน่งและมุมที่วัดได้ของหุ่นยนต์ไม่สามารถตอบสนองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ได้ทัน

แม้ว่าข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์จะไม่สามารถตอบสนองต่อความเร็วของหุ่นยนต์ได้ แต่ตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์นั้นเป็นค่าที่วัดตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์โดยตรง ไม่มีการหาปริพันธ์ ดังนั้นข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์จึงเป็นข้อมูลที่ไม่มีความผิดพลาดสะสมตามเวลา แนวคิดการนำค่าตำแหน่งที่ได้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์และอุปกรณ์รับรู้ความเฉื่อยมาคำนวณหาตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์นี้เรียกว่า การรวมสัญญาณตัวรับรู้ (sensor fusion) ด้วยการใช้ข้อได้เปรียบของอุปกรณ์แต่ละชนิดมาชดเชยข้อเสียเปรียบของอุปกรณ์ชนิดอื่นจะช่วยให้ได้ค่าตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ที่แม่นยำเพื่อใช้เป็นสัญญาณป้อนกลับที่ดีได้

1.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การหาตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์เพื่อชดเชยความผิดพลาดสะสมที่เกิดจากความเพี้ยนกระแสตรงของอุปกรณ์รับรู้ความเฉื่อยนั้นได้ถูกนำเสนอมาหลายวิธี ดังเช่นในปี 1996 [2] ได้เสนอวิธีการนำเอาสัญญาณจากไจโรสโกปและออโดมิทรี (odometry) มาหาตำแหน่งที่แม่นยำของหุ่นยนต์ วิธีนี้เรียกว่าไจโรโดมิทรี (gyrodometry) ซึ่งเป็นการประมาณว่าล้อเกิดการลื่นไถลขึ้นในขณะนั้นหรือไม่ โดยใช้ข้อมูลจากออโดมิทรีกับไจโรสโกปเพื่อคำนวณค่ามุมของหุ่นยนต์ในขณะที่ระบบรับรู้ว่าเกิดการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์ขึ้นเท่านั้น และใช้ค่าจากออโดมิทรีเพื่อคำนวณมุมของหุ่นยนต์ในขณะที่รับรู้ว่าไม่เกิดการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์ ในปีเดียวกัน [3] ได้เสนอให้มีการประมาณความเพี้ยนกระแสตรงของสัญญาณไจโรสโกปเพิ่มเติม โดยใช้แบบจำลองความผิดพลาดตามที่ได้เสนอไว้ในงานวิจัย [4] นอกจากนั้นในปี 2001 [5] ใช้ตัวกรองคาลมานเพื่อรวมสัญญาณจากตัวรับรู้ ได้แก่มุมและตำแหน่งที่อ่านได้จากระบบ ABS และอุปกรณ์รับรู้ความเฉื่อยเข้าด้วยกัน ในขณะที่ประมาณค่าความเพี้ยนกระแสตรงของสัญญาณจากไจโรสโกปพร้อมกันไปด้วย

ด้านการศึกษาการลื่นไถลของล้อนั้น ในปี 1997 [6] ได้อธิบายแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์เมื่อมีการลื่นไถลของล้อไว้ และในปี 2002 [7] เสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการลื่นไถลของหุ่นยนต์ที่ขับเคลื่อนโดยล้อชนิดเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง นอกจากนั้นในปี 2006 ยังมีการใช้หลักการของปัญหาเสาค้ำ (pillar problem) อธิบายแรงเสียดทานและสาเหตุของการลื่นไถลของล้อหุ่นยนต์ซึ่งสัมพันธ์กับค่าความเร่งของหุ่นยนต์ในแนวแกนต่าง ๆ [1]

การรวมสัญญาณตัวรับรู้ไม่ได้ถูกใช้ในการระบุตำแหน่งของหุ่นยนต์เท่านั้น ในการทำความเป็นจริงเสริม (Augmented Reality หรือ AR) การรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างข้อมูลจากการประมวลผลภาพ และข้อมูลจากอุปกรณ์รับรู้ความเฉื่อยถูกใช้อย่างแพร่หลาย [8, 9] ในปี 2001 [8] หามุมของกล้องจับภาพที่เปลี่ยนแปลงไปโดยใช้ตัวสังเกต (observer) รวมข้อมูลจากอุปกรณ์รับรู้ที่ให้ข้อมูลที่ความถี่ต่างกัน ในขณะที่ [10] ใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย (extended Kalman Filter หรือ EKF) เป็นวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ นอกจาก EKF แล้วในปี 2004 [9] ใช้วิธีที่เรียกว่า SIR (sampling importance resampling) ซึ่งถูกนำเสนอโดย [11] แทนการใช้ EKF ตัวกรองชนิดนี้เรียกว่า particle filtering จากการทดลองกับระบบตัวอย่างในงานวิจัยระบุว่ารากที่สองของค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (root mean square error หรือ RMSE) ของสัญญาณที่ได้จากการทำ SIR น้อยกว่าของสัญญาณที่ได้จากการทำ EKF นอกจาก EKF ที่ใช้สำหรับกรองสัญญาณในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นแล้วนอกจาก EKF และ UKF แล้วในปี 1997 [12] ได้เสนอตัวกรองคาลมานสำหรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งคือตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด (unscented Kalman filter, sigma-point kalman filter หรือ UKF) ซึ่งใช้การแปลงแบบอันเซนท์ (unscent transformation) ทำนายตัวแปรระบบแทนการทำนายตัวแปรระบบแบบเดิมที่ใช้ใน EKF เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากในการหาเมทริกซ์จาโคเบียนสำหรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น ต่อมา UKF ได้ถูกนำไปใช้ในการรวมสัญญาณตัวรับรู้ยกตัวอย่างเช่น ในปี 2004 [13] ได้นำ UKF ไปใช้รวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างตำแหน่งจากอุปกรณ์รับรู้ความเฉื่อยและ GPS (global positioning system) ในระบบนำร่องเป็นต้น

ในงานวิจัย [15] ได้อธิบายวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้และจำแนกเป็นสองประเภทคือ แบบรวมค่าที่วัดได้จากอุปกรณ์รับรู้โดยตรง และแบบรวมค่าที่ผ่านการกรองมาแล้ว และยังเสนอวิธีการใหม่ไว้อีกสองวิธี วิธีหนึ่งที่ถูกนำมาวิเคราะห์ต่อในงานวิจัยฉบับนี้คือการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบแยกกรองตัวรับรู้ที่ใช้การทำนายตัวแปรสถานะร่วมกัน

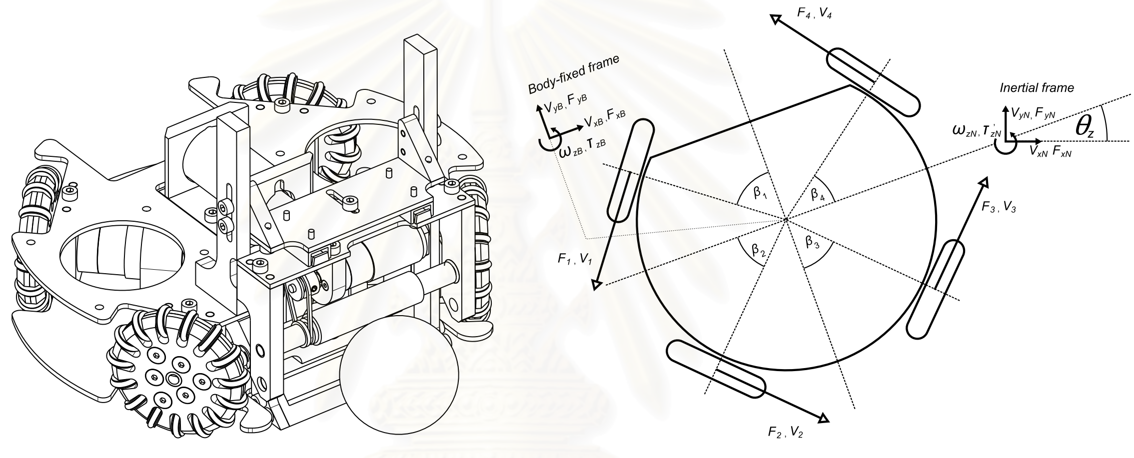
วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถูกแบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท บทแรกเป็นบทนำซึ่งกล่าวถึงความเป็นมา แนวคิด และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการปรับปรุงความแม่นยำของหุ่นยนต์ด้วยตัวกรองชนิดต่าง ๆ ถัดมาในบทที่สองกล่าวถึงการคำนวณหาและวิเคราะห์แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อการออกแบบตัวกรองซึ่งถูกกล่าวไว้ในบทที่สาม

และการรวมสัญญาณตัวรับรู้ซึ่งเป็นการออกแบบตัวกรองที่ซับซ้อนขึ้นจะถูกอธิบายไว้ในบทที่สี่ และในบทที่ 5 เป็นบทสรุปการปรับปรุงความแม่นยำของหุ่นยนต์ด้วยการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างตัวรับรู้ความเฉื่อย และข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ รายละเอียดเรื่องความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มของหุ่นยนต์ และทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจะถูกรวบรวมไว้ในภาคผนวก

บทที่ 2
แบบจำลองคณิตศาสตร์

2.1 การคำนวณหาแบบจำลองคณิตศาสตร์

หุ่นยนต์ที่ใช้ในการแข่งขันหุ่นยนต์เตะฟุตบอลเป็นหุ่นยนต์ขับเคลื่อนสี่ล้อที่มีลักษณะดังรูป 2.1(ก) การวางตัวของล้อเทียบกับแกน x และ y บนกรอบหุ่นยนต์ (body-fixed frame) และมุม θ_{z} ที่กรอบหุ่นยนต์ทำกับกรอบความเฉื่อย (inertial frame) ถูกแสดงไว้ในรูป 2.1(ข) ด้วยคุณสมบัติเฉพาะของล้อชนิดเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทางทำให้หุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในระนาบ $\mathrm{x}-\mathrm{y}$ และแกน z ซึ่งเป็นแกนหมุนของหุ่นยนต์ ในขั้นนี้เราจะหาแบบจำลองคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์ที่ไม่มีการลื่นไถลของล้อเท่านั้น เนื่องจากการลื่นไถลของ



(ก) โครงสร้างเชิงกลของหุ่นยนต์

(ข) การวางตัวของล้อทั้งสี่บนหุ่นยนต์

รูปที่ 2.1: ลักษณะโดยรวมของหุ่นยนต์ (ก) โครงสร้างจริงของหุ่นยนต์ที่ใช้ในการแข่งขัน; (ข) การวางตัวของล้อทั้งสี่บนหุ่นยนต์บนกรอบหุ่นยนต์ที่ทำมุม θ_{z} กับกรอบความเฉื่อย

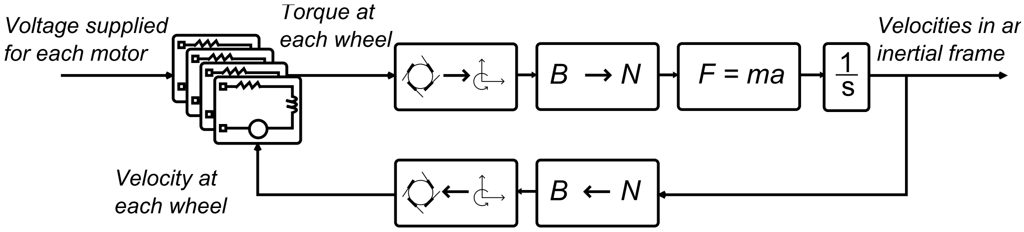
ล้อหุ่นยนต์ขึ้นอยู่กับสภาพของพื้นซึ่งไม่สามารถพยากรณ์ได้ ระบบของหุ่นยนต์ประกอบด้วยมอเตอร์ทั้งหมดสี่ตัว ใช้ขับเคลื่อนล้อทั้งสี่ของหุ่นยนต์ผ่านระบบเฟืองทดที่มีอัตราทดเท่ากัน แรงลัพธ์ของแต่ละล้อที่กระทำกับตัวหุ่นยนต์จะขับเคลื่อนหุ่นยนต์ไปด้วยความเร่งค่าหนึ่ง ส่งผลให้หุ่นยนต์และล้อของหุ่นยนต์เคลื่อนที่ ซึ่งส่งผลต่อความเร็วเชิงมุมของล้อหุ่นยนต์ และจะมีผลย้อนกลับไปเป็นแรงเคลื่อนไฟฟ้าย้อนกลับที่ตกคร่อมขดลวดภายในมอเตอร์ รูป 2.2 แสดงระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์ไว้โดยสังเขป มอเตอร์ดังกล่าวเป็นมอเตอร์กระแสตรง [1] ที่มีค่าคงตัวดังตาราง 2.1 และตัวหุ่นยนต์ที่มีค่าคงตัวดังตาราง 2.2 ให้สัญญาณขาเข้าของระบบ V_{C} เป็นแรงดันที่จ่ายให้มอเตอร์แต่ละตัว เขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$V_{\mathrm{C}}=[V_{1\mathrm{c}},V_{2\mathrm{c}},V_{3\mathrm{c}},V_{4\mathrm{c}}]^{\mathrm{T}} \tag{2.1}$$

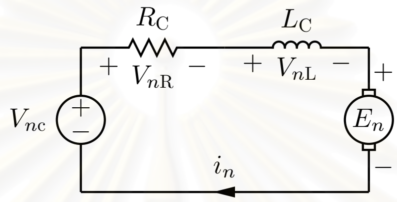
เมื่อพิจารณาแบบจำลองคณิตศาสตร์ของมอเตอร์กระแสตรงในเชิงไฟฟ้าดังรูป 2.3 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $V_{n\mathrm{c}}$ และ i_n ดังสมการ

$$V_{n\mathrm{c}}=i_nR_{\mathrm{C}}+L_{\mathrm{C}}\frac{di_n}{dt}+E_{n\mathrm{c}} \quad ; \qquad n=1,2,3,4 \tag{2.2}$$

[1] มอเตอร์ได้รับสัญญาณขาเข้าเป็นการกล้ำความกว้างพัลส์ (Pulse Width Modulator หรือ PWM) แต่แบบจำลองคณิตศาสตร์ของมอเตอร์สามารถประมาณสัญญาณกล้ำความกว้างพัลส์เป็นระดับแรงดันคงตัวได้



รูปที่ 2.2: แผนภาพแสดงระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์



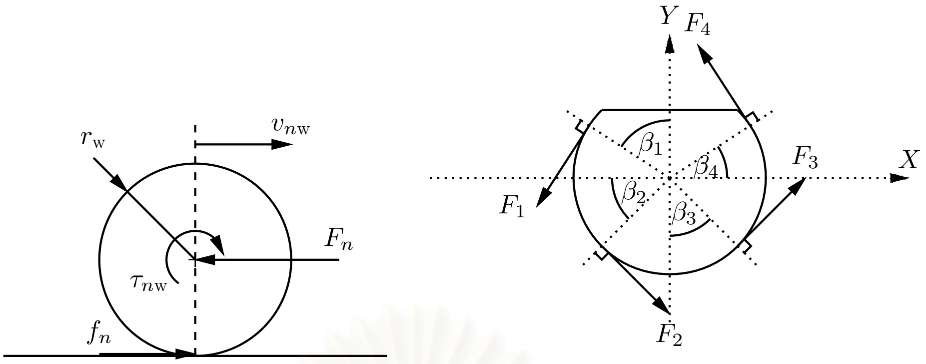
รูปที่ 2.3: วงจรทางไฟฟ้าของมอเตอร์กระแสตรง

สัญลักษณ์	ชื่อของค่าคงตัว	ปริมาณ	หน่วย
$K_{\mathrm{v}}, K_{\mathrm{t}}$	ค่าคงตัวของมอเตอร์	6.92×10^{-3}	$\mathrm{V/rad/s}$, $\mathrm{N{\cdot}m/A}$
R_{C}	ความต้านทานของขดลวดมอเตอร์	1.94	Ω
L_{C}	ความเหนี่ยวนำของขดลวดมอเตอร์	45	$\mu\mathrm{H}$
G_{r}	อัตราทดของมอเตอร์	13.7959 : 1	–
G_{eff}	ประสิทธิภาพของเฟืองทด	80	%

ตารางที่ 2.1: ค่าคงตัวของมอเตอร์ที่ใช้ขับเคลื่อนหุ่นยนต์

สัญลักษณ์	ชื่อของค่าคงตัว	ปริมาณ	หน่วย
M_{R}	มวลของหุ่นยนต์	1.57	kg
R_{R}	รัศมีจากจุดศูนย์กลางถึงล้อของหุ่นยนต์	0.085	m
J_{z}	โมเมนต์ความเฉื่อยของหุ่นยนต์	5.76×10^{-3}	$\mathrm{kg \cdot m^2}$
m_{w}	มวลของล้อหุ่นยนต์	0.06	kg
r_{w}	รัศมีของล้อหุ่นยนต์	0.0263	m
j_{w}	โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อหุ่นยนต์	2.08×10^{-5}	$\mathrm{kg \cdot m^2}$
β_1	มุมของแกนล้อที่ 1 เทียบกับแกน y	57	องศา
β_2	มุมของแกนล้อที่ 2 เทียบกับแกน x	45	องศา
β_3	มุมของแกนล้อที่ 3 เทียบกับแกน y	45	องศา
β_4	มุมของแกนล้อที่ 4 เทียบกับแกน x	33	องศา

ตารางที่ 2.2: ค่าคงตัวของหุ่นยนต์



(ก) แผนภูมิวัตถุอิสระของล้อหุ่นยนต์ (ข) แผนภูมิวัตถุอิสระของหุ่นยนต์

รูปที่ 2.4: แผนภูมิวัตถุอิสระ (ก) แผนภูมิวัตถุอิสระของล้อหุ่นยนต์; (ข) แผนภูมิวัตถุอิสระของหุ่นยนต์

โดย $E_{n\mathrm{c}}$ แทนแรงเคลื่อนไฟฟ้าย้อนกลับของมอเตอร์แต่ละตัว จากตาราง 2.1 L_{C} มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ R_{C} จึงละเลยค่าความเหนี่ยวนำได้ เราจึงนำสมการ (2.2) มาเขียนใหม่เป็น

$$i_n = \frac{V_{n\mathrm{c}} - E_{n\mathrm{c}}}{R_{\mathrm{C}}} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4 \tag{2.3}$$

เราสามารถหาแรงบิดที่มอเตอร์กระทำกับล้อของหุ่นยนต์ $\tau_{n\mathrm{w}}$ จากแรงบิดของแกนหมุนของมอเตอร์ $\tau_{n\mathrm{r}}$ และกระแสของมอเตอร์ i_n ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\tau_{n\mathrm{w}} = G_{\mathrm{eff}} G_{\mathrm{r}} \tau_{n\mathrm{r}} = G_{\mathrm{eff}} G_{\mathrm{r}} K_{\mathrm{t}} i_n \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4 \tag{2.4}$$

ดังนั้น

$$\tau_{n\mathrm{w}} = G_{\mathrm{eff}} G_{\mathrm{r}} \tau_{n\mathrm{r}} = G_{\mathrm{eff}} G_{\mathrm{r}} K_{\mathrm{t}} \frac{V_{n\mathrm{c}} - E_{n\mathrm{c}}}{R_{\mathrm{C}}} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4 \tag{2.5ก}$$

เขียนแทนด้วย $$\mathcal{T}_{\mathrm{w}} = \frac{G_{\mathrm{eff}} G_{\mathrm{r}} K_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{C}}} \left(V_{\mathrm{C}} - E_{\mathrm{c}} \right) \tag{2.5ข}$$

เมื่อพิจารณาจากแผนภูมิวัตถุอิสระ (Free-Body Diagrams หรือ FBD) ในรูป 2.4(ก) จะได้สมการสมดุลของแรงและแรงบิดที่ล้อดังสมการข้างล่างนี้

$$f_n - F_n = m_{\mathrm{w}} \dot{v}_{n\mathrm{R}} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4 \tag{2.6ก}$$

$$\tau_{n\mathrm{w}} - f_n r_{\mathrm{w}} = \frac{j_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}} \dot{v}_{n\mathrm{w}} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4 \tag{2.6ข}$$

โดยการใช้สมมติฐานที่ว่าล้อหุ่นยนต์ไม่มีการลื่นไถลจะได้ว่า f_n มีค่าได้ไม่จำกัด และความเร็วการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในตำแหน่งของล้อที่ n เท่ากับความเร็วที่ขอบล้อที่ n, $v_{n\mathrm{R}} = v_{n\mathrm{w}}$ ดังนั้นจากสมการ (2.6) เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$r_{\mathrm{w}} \begin{bmatrix} \tau_{1\mathrm{w}} \\ \tau_{2\mathrm{w}} \\ \tau_{3\mathrm{w}} \\ \tau_{4\mathrm{w}} \end{bmatrix} = \left(j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}} \right) \begin{bmatrix} \dot{v}_{1\mathrm{R}} \\ \dot{v}_{2\mathrm{R}} \\ \dot{v}_{3\mathrm{R}} \\ \dot{v}_{4\mathrm{R}} \end{bmatrix} + r_{\mathrm{w}}^2 \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \tag{2.7ก}$$

เขียนแทนด้วย $$r_{\mathrm{w}} \mathcal{T}_{\mathrm{w}} = \left(j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}} \right) \dot{V}_{\mathrm{R}} + r_{\mathrm{w}}^2 F_{\mathrm{w}} \tag{2.7ข}$$

และจากแผนภูมิวัตถุอิสระในรูป 2.4(ข) เราสามารถหาแรงลัพธ์ที่กระทำกับหุ่นยนต์ในกรอบหุ่นยนต์ได้ดังนี้

$$\begin{matrix} F_{\mathrm{xB}} \\ F_{\mathrm{yB}} \\ \mathcal{T}_{\mathrm{z}} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta_1) & \sin(\beta_2) & \cos(\beta_3) & -\sin(\beta_4) \\ -\sin(\beta_1) & -\cos(\beta_2) & \sin(\beta_3) & \cos(\beta_4) \\ R_{\mathrm{R}} & R_{\mathrm{R}} & R_{\mathrm{R}} & R_{\mathrm{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \tag{2.8ก}$$

เขียนแทนด้วย $$F_{\mathrm{B}} = \mathbb{T} F_{\mathrm{w}} \tag{2.8ข}$$

แรงในกรอบความเฉื่อยแปลงมาจากแรงในกรอบหุ่นยนต์ตามสมการ

$$\begin{bmatrix} F_{\mathrm{xN}} \\ F_{\mathrm{yN}} \\ \mathcal{T}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\mathrm{z}}) & -\sin(\theta_{\mathrm{z}}) & 0 \\ \sin(\theta_{\mathrm{z}}) & \cos(\theta_{\mathrm{z}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\mathrm{xB}} \\ F_{\mathrm{yB}} \\ \mathcal{T}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \tag{2.9ก}$$

เขียนแทนด้วย $$F_{\mathrm{N}} = \mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}}) F_{\mathrm{B}} \tag{2.9ข}$$

$$F_{\mathrm{B}} = \mathbb{R}^{-1}(\theta_{\mathrm{z}}) F_{\mathrm{N}} \tag{2.9ค}$$

$$F_{\mathrm{B}} = \mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}}) F_{\mathrm{N}} \tag{2.9ง}$$

โดยที่ θ_{z} เป็นมุมของกรอบหุ่นยนต์เทียบกับกรอบความเฉื่อยตามรูป 2.1(ข) และ $\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})$ เป็นการแปลงเวกเตอร์ในกรอบหุ่นยนต์ไปเป็นเวกเตอร์ในกรอบความเฉื่อย จะได้สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในกรอบหุ่นยนต์เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{\mathrm{xN}} \\ \dot{V}_{\mathrm{yN}} \\ \dot{\omega}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/M_{\mathrm{R}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/M_{\mathrm{R}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\mathrm{xN}} \\ F_{\mathrm{yN}} \\ \mathcal{T}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \tag{2.10ก}$$

เขียนแทนด้วย $$\dot{V}_{\mathrm{N}} = \mathbb{M}^{-1} F_{\mathrm{N}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}}) F_{\mathrm{B}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T} F_{\mathrm{w}} \tag{2.10ข}$$

เราพบว่าสามารถเขียน V_{R} เป็นการแปลงของ V_{B} และ V_{N} ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} v_{1\mathrm{R}} \\ v_{2\mathrm{R}} \\ v_{3\mathrm{R}} \\ v_{4\mathrm{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta_1) & -\sin(\beta_1) & R_{\mathrm{R}} \\ \sin(\beta_2) & -\cos(\beta_2) & R_{\mathrm{R}} \\ \cos(\beta_3) & \sin(\beta_3) & R_{\mathrm{R}} \\ -\sin(\beta_4) & \cos(\beta_4) & R_{\mathrm{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\mathrm{xB}} \\ V_{\mathrm{yB}} \\ \omega_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \tag{2.11ก}$$

เขียนแทนด้วย $$V_{\mathrm{R}} = \mathbb{T}^{\mathrm{T}} V_{\mathrm{B}} = \mathbb{T}^{\mathrm{T}}\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}}) V_{\mathrm{N}} \tag{2.11ข}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.7), (2.10) และ (2.11) เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\mathcal{T}_{\mathrm{w}}$ และ V_{N} ได้ดังนี้

$$\dot{V}_{\mathrm{N}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{w}}}\mathcal{T}_{\mathrm{w}} - \left(\frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\right)\dot{V}_{\mathrm{R}}\right) \tag{2.12}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (2.11ข) จะได้

$$\dot{V}_{\mathrm{R}} = \mathbb{T}^{\mathrm{T}}\left(\omega_{\mathrm{z}}\dot{\mathbb{R}}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}}) V_{\mathrm{N}} + \mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{V}_{\mathrm{N}}\right) \tag{2.13}$$

ดังนั้น

$$\dot{V}_{\mathrm{N}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{w}}}\mathcal{T}_{\mathrm{w}} - \left(\frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\right)\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\left(\omega_{\mathrm{z}}\dot{\mathbb{R}}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}}) V_{\mathrm{N}} + \mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{V}_{\mathrm{N}}\right)\right) \tag{2.14ก}$$

หรือ

$$\left(I + \left(\frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\right) \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\right) \dot{V}_{\mathrm{N}}$$
$$= \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{w}}}\mathcal{T}_{\mathrm{w}} - \left(\frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\right)\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\left(\omega_{\mathrm{z}}\dot{\mathbb{R}}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{N}}\right)\right) \quad (2.14ข)$$

อนึ่ง แรงเคลื่อนไฟฟ้าย้อนกลับ E_{nc} มีความสัมพันธ์กับความเร็วเชิงมุมแกนหมุนของมอเตอร์ ω_{nr} ดังนี้

$$E_{nc} = K_{\mathrm{v}}\omega_{nr} = \frac{K_{\mathrm{v}}G_{\mathrm{r}}}{r_{\mathrm{w}}}v_{n\mathrm{R}} \quad (2.15ก)$$

เขียนแทนด้วย $$E_{\mathrm{C}} = \frac{K_{\mathrm{v}}G_{\mathrm{r}}}{r_{\mathrm{w}}}V_{\mathrm{R}} = \frac{K_{\mathrm{v}}G_{\mathrm{r}}}{r_{\mathrm{w}}}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{N}} \quad (2.15ข)$$

เราจึงสามารถหา $\mathcal{T}_{\mathrm{w}}$ ได้จากสมการ (2.5) และ (2.15)

$$\frac{\mathcal{T}_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}} = \frac{G_{\mathrm{eff}}G_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{C}}r_{\mathrm{w}}}\left(V_{\mathrm{C}} - \frac{K_{\mathrm{v}}G_{\mathrm{r}}}{r_{\mathrm{w}}}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{N}}\right) \quad (2.16)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\left(I + \left(\frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\right) \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\right) \dot{V}_{\mathrm{N}} \\
&= \mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\left(\frac{G_{\mathrm{eff}}G_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{C}}r_{\mathrm{w}}}\left(V_{\mathrm{C}} - \frac{K_{\mathrm{v}}G_{\mathrm{r}}}{r_{\mathrm{w}}}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{N}}\right) - \left(\frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\right)\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\left(\omega_{\mathrm{z}}\dot{\mathbb{R}}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{N}}\right)\right) \\
&= \left[\mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\left(\frac{G_{\mathrm{eff}}G_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{C}}r_{\mathrm{w}}}\right)V_{\mathrm{C}}\right] \\
&\quad - \left[\mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\left(\frac{G_{\mathrm{eff}}G_{\mathrm{r}}^2K_{\mathrm{v}}K_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{C}}r_{\mathrm{w}}^2}\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}}) + \frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\omega_{\mathrm{z}}\dot{\mathbb{R}}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\right)V_{\mathrm{N}}\right]
\end{aligned} \quad (2.17)$$

สังเกตได้ว่าสมการ (2.17) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสถานะที่ไม่เชิงเส้นได้ แต่มีพจน์ที่ไม่เชิงเส้นคือ ($\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})$) อยู่มาก ดังนั้นเราจะแปลงสมการ (2.12) ให้เป็นสมการปริภูมิสถานะที่มี V_{B} เป็นตัวแปรสถานะ

$$\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{V}_{\mathrm{N}} = \mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{T}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{w}}}\mathcal{T}_{\mathrm{w}} - \left(\frac{j_{\mathrm{w}} + r_{\mathrm{w}}^2 m_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}}^2}\right)\dot{V}_{\mathrm{R}}\right) \quad (2.18)$$

เนื่องจาก $\mathbb{M}(1,1) = \mathbb{M}(2,2)$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}}) = \mathbb{M}^{-1} \quad (2.19)$$

และเช่นเดียวกับสมการ (2.13)

$$\dot{V}_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{B}}\right) = \dot{\mathbb{R}}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{B}} + \mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{V}_{\mathrm{B}} \quad (2.20ก)$$

$$\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{V}_{\mathrm{N}} = \mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{\mathbb{R}}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{B}} + \mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{V}_{\mathrm{B}} \quad (2.20ข)$$

โดยการพิสูจน์ $$\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{\mathbb{R}}(\theta_{\mathrm{z}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\mathrm{z}} & 0 \\ \omega_{\mathrm{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{D}(\omega_{\mathrm{z}}) \quad (2.20ค)$$

$$\mathbb{R}^{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{z}})\dot{V}_{\mathrm{N}} = \mathbb{D}(\omega_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{B}} + \dot{V}_{\mathrm{B}} \quad (2.20ง)$$

ดังนั้นเราจึงเขียนสมการ (2.18) ได้ใหม่

$$\mathbb{D}(\omega_\mathrm{z})V_\mathrm{B} + \dot{V}_\mathrm{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\left(\frac{G_\mathrm{eff}G_\mathrm{r}K_\mathrm{t}}{R_\mathrm{C}r_\mathrm{w}}\left(V_\mathrm{C} - \frac{K_\mathrm{v}G_\mathrm{r}}{r_\mathrm{w}}\mathbb{T}^\mathrm{T}V_\mathrm{B}\right) - \left(\frac{j_\mathrm{w}+r_\mathrm{w}^2m_\mathrm{w}}{r_\mathrm{w}^2}\right)\mathbb{T}^\mathrm{T}\dot{V}_\mathrm{B}\right) \tag{2.21ก}$$

$$\mathbb{D}(\omega_\mathrm{z})V_\mathrm{B} + \dot{V}_\mathrm{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\frac{G_\mathrm{eff}G_\mathrm{r}K_\mathrm{t}}{R_\mathrm{C}r_\mathrm{w}}V_\mathrm{C} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\frac{G_\mathrm{eff}G_\mathrm{r}^2K_\mathrm{t}K_\mathrm{v}}{R_\mathrm{C}r_\mathrm{w}^2}\mathbb{T}^\mathrm{T}V_\mathrm{B} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\left(\frac{j_\mathrm{w}+r_\mathrm{w}^2m_\mathrm{w}}{r_\mathrm{w}^2}\right)\mathbb{T}^\mathrm{T}\dot{V}_\mathrm{B} \tag{2.21ข}$$

เพื่อลดความซับซ้อนของสมการจึงกำหนดค่าคงตัว K_1, K_2, K_3 ดังนี้

$$K_1 = \frac{G_\mathrm{eff}G_\mathrm{r}^2K_\mathrm{t}K_\mathrm{v}}{R_\mathrm{C}r_\mathrm{w}^2} \tag{2.22ก}$$

$$K_2 = \frac{G_\mathrm{eff}G_\mathrm{r}K_\mathrm{t}}{R_\mathrm{C}r_\mathrm{w}} \tag{2.22ข}$$

$$K_3 = \frac{j_\mathrm{w}+r_\mathrm{w}^2m_\mathrm{w}}{r_\mathrm{w}^2} \tag{2.22ค}$$

จัดรูปแบบของสมการ (2.21) ใหม่ได้เป็น

$$\left(I + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^\mathrm{T}K_3\right)\dot{V}_\mathrm{B} = -\left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^\mathrm{T}K_1 + \mathbb{D}(\omega_\mathrm{z})\right)V_\mathrm{B} + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}K_2V_\mathrm{C} \tag{2.23}$$

ซึ่งเป็นสมการมีความซับซ้อนน้อยกว่าสมการ (2.17)

2.2 แรงเสียดทานส่วนข้างและแรงเสียดทานแนวรัศมี

ในระบบจริงแรงเสียดทานและความหนืดมีผลต่อการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ แรงเสียดทานและความหนืดที่วิเคราะห์ในขั้นแรกเป็นทิศทางแนวข้างของหุ่นยนต์ (lateral friction) ซึ่งเกิดจากความเสียดทานในกลไกของล้อหุ่นยนต์และมอเตอร์ที่ใช้ขับเลื่อนล้อ คิดเป็นแรงรวมตามเส้นขอบล้อ แรงเสียดทานของแต่ละล้อมีค่าดังนี้

$$F_{n\mathrm{L}} = -K_\mathrm{fL}\mathrm{sgn}(v_{n\mathrm{w}}) - K_\mathrm{bL}v_{n\mathrm{w}} \tag{2.24}$$

เขียนแทนด้วย $$F_\mathrm{L} = -K_\mathrm{fL}\mathrm{sgn}(V_\mathrm{w}) - K_\mathrm{bL}V_\mathrm{w} \tag{2.25}$$

เมื่อกำหนดให้ $\mathrm{sgn}(\cdot)$ แทนฟังก์ชันซิกนัม (signum function) ส่วน K_fL และ K_bL แทนแรงเสียดทานเฉลี่ยและสัมประสิทธิ์ความหนืดเฉลี่ยของทั้งสี่ล้อมีค่าเป็นบวกเสมอ จากนั้นแรงในสมการ (2.25) ถูกใช้เพื่อพัฒนาแบบจำลองคณิตศาสตร์ตามสมการ (2.23) ให้เป็นแบบจำลองคณิตศาสตร์รวมแรงเสียดทานส่วนข้างดังนี้

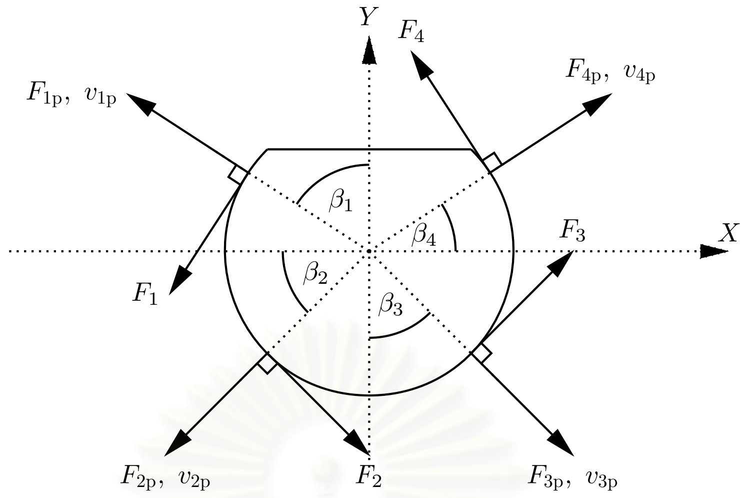
$$\begin{aligned}\left(I + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^\mathrm{T}K_3\right)\dot{V}_\mathrm{B} = &-\left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^\mathrm{T}K_1 + \mathbb{D}(\omega_\mathrm{z}) + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^\mathrm{T}K_\mathrm{bL}\right)V_\mathrm{B} \\ &- \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}K_\mathrm{fL}\mathrm{sgn}(\mathbb{T}^\mathrm{T}V_\mathrm{B}) \\ &+ \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}K_2V_\mathrm{C}\end{aligned} \tag{2.26}$$

จากการจำลองระบบด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์รวมแรงเสียดทานส่วนข้างโดยใช้สมการ (2.26) พบว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์รวมแรงเสียดทานส่วนข้างนั้นไม่เพียงพอสำหรับการจำลองให้ตำแหน่งของหุ่นยนต์ใกล้เคียงกับค่าจริงที่วัดได้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์[2] ผู้เขียนจึงพิจารณาแรงเสียดทานแนวรัศมีเพิ่มเข้าในแบบจำลอง เวกเตอร์ของแรงเสียดทานแนวรัศมีถูกเขียนแทนด้วย $F_{n\mathrm{p}}$ มีตำแหน่งอยู่ที่ล้อทั้งสี่ตามรูป 2.5 และให้ $v_{n\mathrm{p}}$ แทนความเร็วตามแนวแกนล้อทั้งสี่ แรงเสียดทานแนวรัศมีมีค่าดังสมการ (2.28)

$$F_{n\mathrm{p}} = K_\mathrm{fp}\mathrm{sgn}(v_{n\mathrm{p}}) - K_\mathrm{bp}v_{n\mathrm{p}} \tag{2.27}$$

เขียนแทนด้วย $$F_\mathrm{p} = -K_\mathrm{fp}\mathrm{sgn}(V_\mathrm{p}) - K_\mathrm{bp}V_\mathrm{p} \tag{2.28}$$

[2]ดูรายละเอียดและผลการจำลองเปรียบเทียบกับข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ได้ในหัวข้อ 2.3



รูปที่ 2.5: แรงเสียดทานแนวรัศมีบนตัวหุ่นยนต์

โดยที่ K_{fp} และ K_{bp} แทนแรงเสียดทานเฉลี่ยคงตัวและสัมประสิทธิ์ความหนืดในแนวรัศมีเฉลี่ยทั้งสี่ล้อ มีค่าเป็นบวกเสมอดังเช่น K_{fL} และ K_{bL} สำหรับ V_{p} สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ V_{B} ได้ดังนี้

$$V_{\text{p}} = \mathbb{T}_{\text{p}}^{\text{T}} V_{\text{B}} \tag{2.29}$$

และ F_{p} สามารถแปลงให้อยู่ในกรอบหุ่นยนต์ได้ดังนี้

$$F_{\text{pB}} = \mathbb{T}_{\text{p}} F_{\text{p}} \tag{2.30}$$

โดยที่เมทริกซ์ $\mathbb{T}_{\text{p}}$ มีค่าดังนี้

$$\mathbb{T}_{\text{p}} = \begin{bmatrix} -\sin(\beta_1) & -\cos(\beta_2) & \sin(\beta_3) & \cos(\beta_4) \\ \cos(\beta_1) & -\sin(\beta_2) & -\cos(\beta_3) & \sin(\beta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

จากสมการ (2.29), (2.30) และ (2.31) สมการ (2.26) จึงถูกพัฒนาต่อเป็นสมการ (2.32)

$$\begin{aligned} \left(I + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\text{T}}K_3\right)\dot{V}_{\text{B}} = &-\left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\text{T}}K_1 + \mathbb{D}(\omega_{\text{z}}) + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\text{T}}K_{\text{bL}} + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}_{\text{p}}\mathbb{T}_{\text{p}}^{\text{T}}K_{\text{bp}}\right)V_{\text{B}} \\ &- \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}K_{\text{fL}}\text{sgn}(\mathbb{T}^{\text{T}}V_{\text{B}}) - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}_{\text{p}}K_{\text{fp}}\text{sgn}(\mathbb{T}_{\text{p}}^{\text{T}}V_{\text{B}}) \\ &+ \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}K_2V_{\text{C}} \end{aligned} \tag{2.32}$$

สมการ (2.32) ถือเป็นแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์ที่สุดในวิทยานิพนธ์นี้ และมีความไม่เชิงเส้นอย่างเข้ม

2.3 ผลเปรียบเทียบการจำลองโดยใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์ต่าง ๆ

หุ่นยนต์ได้รับคำสั่งให้เคลื่อนที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้วยความเร็วและความเร่งที่ไม่มากเกิน เพื่อหลีกเลี่ยงผลของความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มจากการลื่นไถลของล้อซึ่งกล่าวไว้ในหัวข้อถัดไป ความเร็วของล้อทั้งสี่ของหุ่นยนต์ถูกควบคุมด้วยระบบควบคุมวงปิดด้วยการป้อนกลับจากตัวเข้ารหัสมอเตอร์ เพื่อรักษาการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ให้ใกล้เคียงกับเส้นทางที่ได้รับคำสั่งมา ค่าแรงดันของมอเตอร์ซึ่งถูกควบคุมด้วยระบบควบคุมวงปิดถูกบันทึกไว้พร้อมกับตำแหน่งของหุ่นยนต์จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ สำหรับการเปรียบเทียบในการทดลองนี้ข้อมูลทั้งสองถูกปรับให้ไม่มีการประวิงเวลาระหว่างกัน แรงดันของมอเตอร์ถูกใช้เป็นสัญญาณขาเข้าสำหรับการคาดเดาตำแหน่ง

จากการจำลองด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์ต่าง ๆ อนึ่ง ตำแหน่งของหุ่นยนต์ในกรอบความเฉื่อยซึ่งเป็นสถานะของหุ่นยนต์ที่ต้องการมีความสัมพันธ์กับตัวแปรสถานะ V_{B} ดังนี้

$$\dot{P}_{\mathrm{N}} = \mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})V_{\mathrm{B}} \tag{2.33}$$

$$\dot{\hat{P}}_{\mathrm{N}} = \mathbb{R}(\hat{\theta}_{\mathrm{z}})\hat{V}_{\mathrm{B}} \tag{2.34}$$

สมการดังกล่าวบ่งชี้ว่าตำแหน่งในกรอบความเฉื่อยขึ้นกับทิศทาง θ_{z} ของหุ่นยนต์ และความเร็วของหุ่นยนต์ที่เคลื่อนที่ไปในทิศทางนั้น ถ้าหาก $\hat{\theta}_{\mathrm{z}}$ ที่คาดเดามีความผิดพลาด จะทำให้การคาดเดาทิศทางของหุ่นยนต์เป็นไปในทิศทางที่ผิด แม้ว่าจะสามารถคาดเดาความเร็ว $\hat{V}_{\mathrm{B}}$ ได้อย่างแม่นยำแต่การคาดเดาการเคลื่อนที่ในทิศทางที่ผิดจะส่งผลให้การคาดเดาตำแหน่งของหุ่นยนต์ผิดพลาดอย่างมาก ดังนั้น $\mathbb{R}(\hat{\theta}_{\mathrm{z}})$ สำหรับการจำลองในบทนี้จึงถูกแทนด้วย $\mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})$ ดังสมการ (2.35) โดย θ_{z} เป็นค่าที่วัดได้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ เพื่อให้เห็นแนวโน้มและความแตกต่างระหว่างการจำลองด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์ต่าง ๆ โดยผลการทดลองจะถูกเปรียบเทียบแยกในแกนการเคลื่อนที่ x, y และ z บนกรอบความเฉื่อย

$$\dot{\hat{P}}_{\mathrm{N}} = \mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}})\hat{V}_{\mathrm{B}} \tag{2.35}$$

ผลการเปรียบเทียบถูกแสดงไว้ในรูป 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9 โดยมีเส้นทึบสีน้ำเงินที่ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Vision’ แทนข้อมูลที่วัดได้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ ข้อมูลนี้จะถูกใช้เป็นข้อมูลอ้างอิงสำหรับการจำลองจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

แบบจำลองคณิตศาสตร์เบื้องต้น

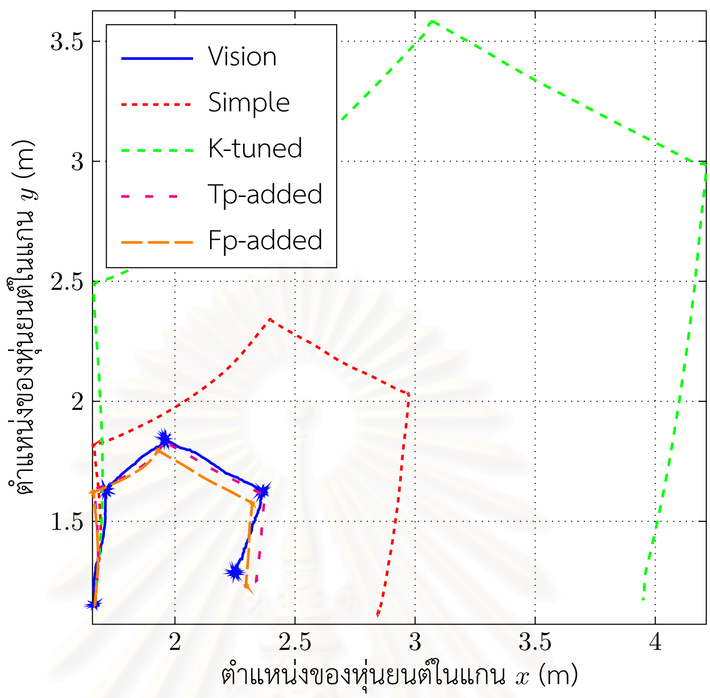
การจำลองนี้ใช้พารามิเตอร์ในตาราง 2.1 และตาราง 2.2 ร่วมกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ตามสมการ (2.23) โดยใช้การประมาณของ Runge-Kutta ดังที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.5 การจำลองนี้ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Simple’ และแทนด้วยเส้นประสีแดง (-------) ในรูป 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9

จากผลการจำลองแบบจำลองคณิตศาสตร์เบื้องต้นพบว่าแนวโน้มของการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์จากการจำลองคล้อยตามการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ที่วัดได้จากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ แต่มีระยะการเคลื่อนที่ของการจำลองระบบต่างออกไปจากการเคลื่อนที่จริง กล่าวคือระยะการเคลื่อนที่ในแกน x และ y ของการจำลองมีค่ามากกว่าความเป็นจริง ในขณะที่การจำลองระยะการหมุนในแกน z มีค่าน้อยกว่าความเป็นจริง

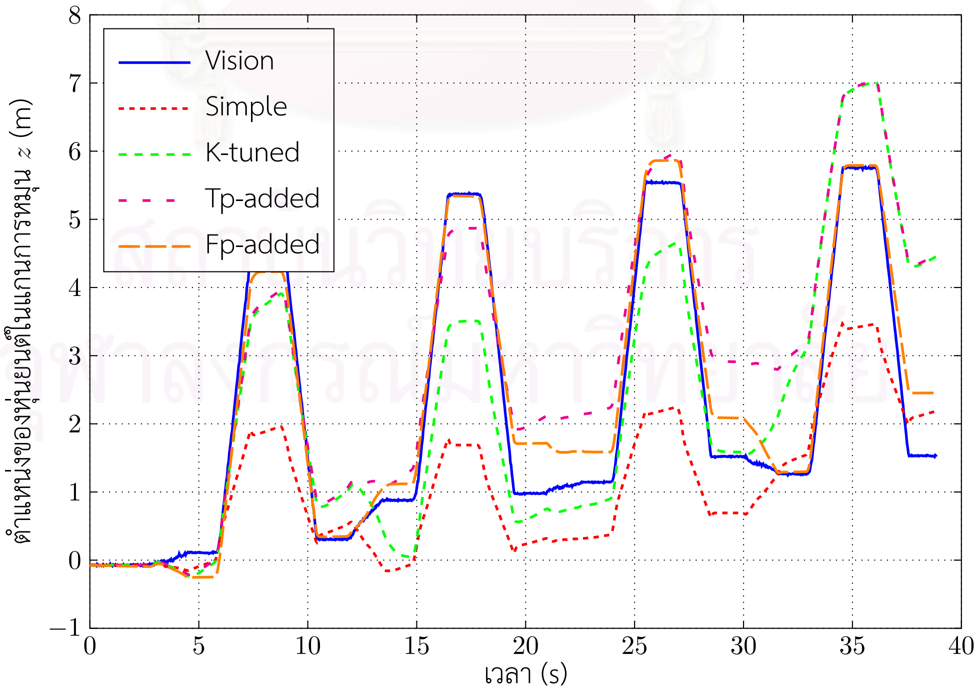
แบบจำลองคณิตศาสตร์รวมแรงเสียดทานส่วนข้าง

จากการจำลองแบบจำลองคณิตศาสตร์เบื้องต้นพบว่าการจำลองการเคลื่อนที่และการหมุนของหุ่นยนต์นั้นไม่สมดุล ผู้เขียนจึงเพิ่มแรงเสียดทานส่วนข้างเข้าในระบบซึ่งมีแบบจำลองตามสมการ (2.26) และปรับระบบจำลองให้มีความหน่วงน้อยลงโดยการปรับลดค่าคงตัวของมอเตอร์ K_{t} และ K_{v} ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองที่อาจเปลี่ยนแปลงได้ตามอายุการใช้งานของมอเตอร์ โดยผู้เขียนคาดหวังให้การปรับลดความหน่วงของระบบทำให้การหมุนในแกน z มีปริมาณมากขึ้น และการเพิ่มแรงเสียดทานส่วนข้างนั้นจะทำให้การเคลื่อนที่ในแกน x และ y น้อยลง ผลการจำลองด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์นี้ปรากฏอยู่ในรูป 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9 ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘K-Tuned’ และแทนด้วยเส้นประสีเขียว (-----)

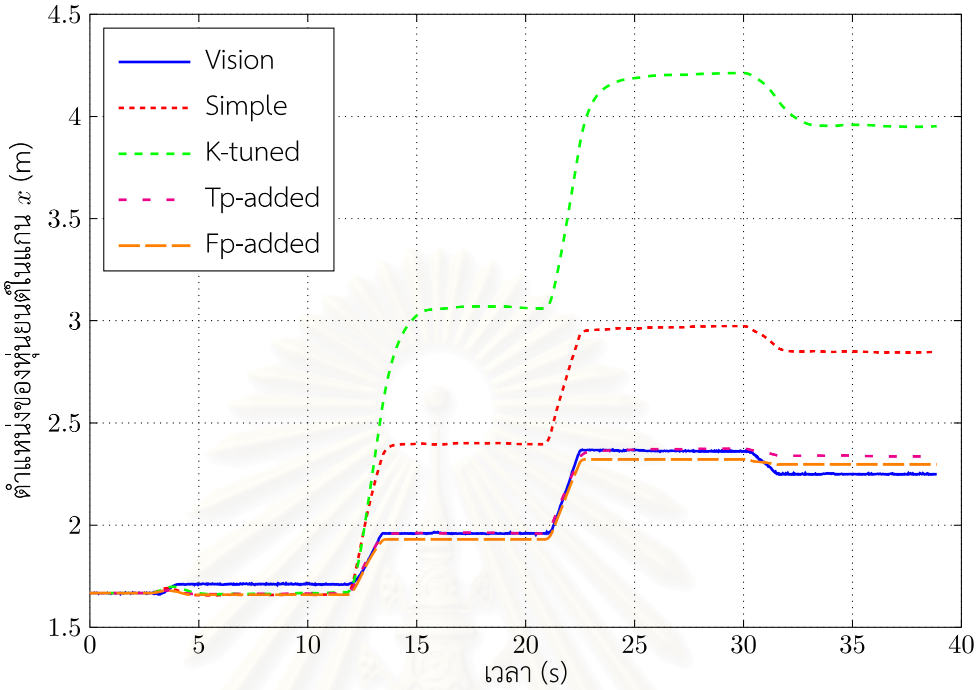
การลดความหน่วงของแบบจำลองนั้นทำให้การจำลองการหมุนในแกน z มีระยะเพิ่มขึ้นจริง แต่ระยะการเคลื่อนที่ในแกน x และ y ก็มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย เพราะการเพิ่มแรงเสียดทานส่วนข้างนั้นส่งผลให้การเคลื่อนที่ในแกน x, y และ z ลดลงเสมอกัน ดังนั้นแบบจำลองคณิตศาสตร์รวมแรงเสียดทานส่วนข้างอย่างเดียวจึงไม่เพียงพอสำหรับการจำลองหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทาง



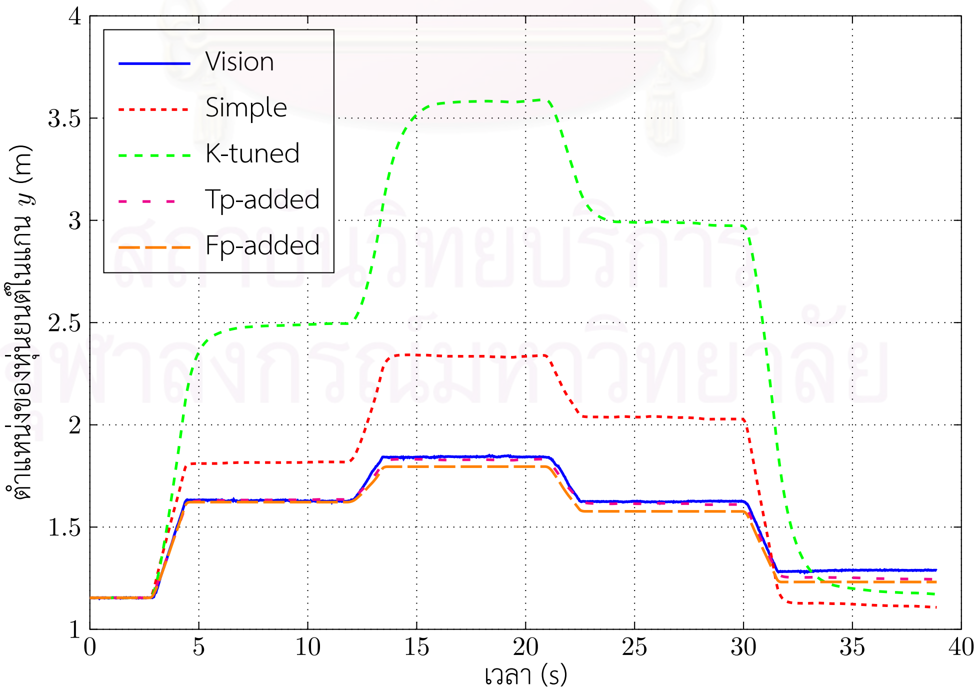
รูปที่ 2.6: ผลการจำลองเส้นทางการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์บนระนาบ $x - y$



รูปที่ 2.7: ผลการจำลองมุมของหุ่นยนต์ θ_z



รูปที่ 2.8: ผลการจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในแกน x



รูปที่ 2.9: ผลการจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในแกน y

ข้อสังเกต การเพิ่มความหน่วงของแบบจำลองคณิตศาสตร์และลดแรงเสียดทานของระบบนั้นเป็นไปไม่ได้ เพราะแบบจำลองคณิตศาสตร์เบื้องต้นนั้นไม่มีแรงเสียดทาน การระบุให้แรงเสียดทานเป็นลบนั้นทำไม่ได้

แบบจำลองคณิตศาสตร์รวมแรงเสียดทานส่วนข้างและแรงเสียดทานแนวรัศมี

ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ล้อแบบเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทางนั้นออกแรงในทิศการหมุนของล้อเท่านั้นและลื่นไถลอย่างอิสระในแนวตั้งฉากกับแนวการหมุนของล้อ (แนวรัศมีของหุ่นยนต์) แม้กระนั้นการลื่นไถลในแนวรัศมีของหุ่นยนต์ยังคงถูกต้านด้วยแรงเสียดทานจากการหมุนของล้อย่อย ซึ่งเป็นส่วนประกอบในล้อแบบเคลื่อนที่ทุกทิศทาง แรงเสียดทานในแนวนี้มีผลกระทบต่อการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในแกน x และ y เท่านั้น ไม่ส่งผลต่อการหมุนในแกน z ดังนั้นแรงเสียดทานแนวรัศมีจึงถูกเพิ่มเข้าในแบบจำลองรวมแรงเสียดทานส่วนข้าง การจำลองใช้แบบจำลองตามสมการ (2.32) ผลการจำลองด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์นี้ปรากฏอยู่ในรูป 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9 ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Fp-added’ และแทนด้วยเส้นประยาวสีส้ม (———)

การเพิ่มแรงเสียดทานแนวรัศมีเข้าในแบบจำลองทำให้การจำลองระบบมีความแม่นยำมากขึ้นอย่างมาก แต่แบบจำลองมีความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มคือ $\mathrm{sgn}(\cdot)$ ค่า K_{bL} และ K_{bp} จึงถูกเพิ่มเพื่อชดเชย K_{fL} และ K_{fp} ตามลำดับ เป็นการลดความความซับซ้อนและขจัดความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มออกจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ หลังการขจัด K_{fL} และ K_{fp} ออกจากแบบจำลอง ผลการจำลองแบบจำลองคณิตศาสตร์นี้ปรากฏอยู่ในรูป 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9 ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Tp-added’ และแทนด้วยเส้นประสีบานเย็น (- - -) ซึ่งให้ผลการจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ที่น่าพึงพอใจ และเป็นแบบจำลองที่มีความซับซ้อนไม่มาก เนื่องจากขจัดความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มออกไปแล้ว ดังนั้นแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ถูกเลือกใช้สำหรับการออกแบบตัวกรองในวิทยานิพนธ์นี้จึงเป็นแบบจำลองตามสมการนี้

$$\begin{aligned}\left(I+\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}K_3\right)\dot{V}_{\mathrm{B}} = &-\left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}K_1+\mathbb{D}(\omega_{\mathrm{z}})+\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}K_{\mathrm{bL}}+\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}_{\mathrm{p}}\mathbb{T}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}K_{\mathrm{bp}}\right)V_{\mathrm{B}}\\ &+\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}K_2V_{\mathrm{C}}\end{aligned} \tag{2.36}$$

สมการ (2.36) คือสมการ (2.32) ที่ตัดผลของแรงเสียดทานและคงไว้เฉพาะผลของแรงหนืดเท่านั้น

นอกจากแรงเสียดทานที่ทำให้ระบบมีความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มแล้ว การใช้สัญญาณกล้ำความกว้างพัลส์ (pulse width modulator หรือ PWM) กับวงจรขับเคลื่อนมอเตอร์ยังเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ทำให้ระบบมีความไม่เชิงเส้น อย่างไรก็ตามรูป 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9 บ่งชี้ว่าสมการ (2.36) เพียงพอสำหรับการประมาณตัวแปรสถานะของระบบในช่วงเวลาหนึ่ง

2.4 สรุปแบบจำลองคณิตศาสตร์

สมการ (2.36) ถูกเขียนแทนด้วยสัญกรณ์คณิตศาสตร์ต่าง ๆ ดังนี้

$$\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}}) = -\left(I+\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}K_3\right)^{-1}\left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}(K_1+K_{\mathrm{bL}})+\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}_{\mathrm{p}}\mathbb{T}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}K_{\mathrm{bp}}+\mathbb{D}(\omega_{\mathrm{z}})\right) \tag{2.37ก}$$

$$\mathbb{B} = \left(I+\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}K_3\right)^{-1}\left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}K_2\right) \tag{2.37ข}$$

โดย $\mathbb{A}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 และ $\mathbb{B}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×4 มีเพียงตัวแปรสถานะ ω_{z} เท่านั้นที่ไม่เป็นค่าคงตัว ค่าอื่นใน $\mathbb{A}$ และ $\mathbb{B}$ เป็นค่าคงตัวทั้งหมด เราจึงเขียน (2.23) ให้อยู่ในรูปของปริภูมิสถานะได้ดังนี้

$$\dot{V}_{\mathrm{B}} = [\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}})]\,V_{\mathrm{B}}+[\mathbb{B}]\,V_{\mathrm{C}} \tag{2.38}$$

สมการ (2.38) นั้นมีตัวแปรสถานะเป็นความเร็ว V_{B} ของหุ่นยนต์ในกรอบหุ่นยนต์ และมีสัญญาณขาเข้าเป็นแรงดัน V_{C} ที่จ่ายให้มอเตอร์ที่ใช้ขับเคลื่อนหุ่นยนต์ทั้งสี่ตัว ต่อไปเป็นการหาแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบที่รวมสัญญาณขาออกไว้ด้วย เราสามารถวัดสัญญาณขาออกของระบบได้จากอุปกรณ์สามชนิด ได้แก่ ความเร่ง

บนระนาบ x−y จากมาตรความเร่งในกรอบหุ่นยนต์ ความเร็วเชิงมุมจากไจโรสโกป และตำแหน่งในกรอบความเฉื่อยจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ สัญญาณขาออกของระบบจึงควรถูกแทนด้วย

$$Z = [\dot{v}_{\mathrm{xB}}, \dot{v}_{\mathrm{yB}}, \omega_{\mathrm{z}}, P_{\mathrm{xN}}, P_{\mathrm{yN}}, \theta_{\mathrm{z}}]^{\mathrm{T}} \tag{2.39}$$

สัญญาณขาออก ω_{z} ได้จากการวัดตัวแปรสถานะโดยตรง $\dot{v}_{\mathrm{xB}}, \dot{v}_{\mathrm{yB}}$ ได้จากสองค่าแรกของ $\dot{V}_{\mathrm{B}}$ ในสมการ (2.38) ตำแหน่งและมุม $P_{\mathrm{xN}}, P_{\mathrm{yN}}, \theta_{\mathrm{z}}$ นั้นมีอนุพันธ์เป็นความเร็วและความเร็วเชิงมุมในกรอบความเฉื่อย ดังนั้นเพื่อให้ตัวแปรสถานะครอบคลุมสัญญาณขาออกทั้งหมดของระบบ เราจึงขยายปริภูมิสถานะให้เป็นไปตามสมการข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{\mathrm{xB}} \\ \dot{V}_{\mathrm{yB}} \\ \dot{\omega}_{\mathrm{z}} \\ \hdashline \dot{P}_{\mathrm{xN}} \\ \dot{P}_{\mathrm{yN}} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{3\times3}(\omega_{\mathrm{z}}) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{R}_{3\times3}(\theta_{\mathrm{z}}) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{\mathrm{xB}} \\ V_{\mathrm{yB}} \\ \omega_{\mathrm{z}} \\ \hdashline P_{\mathrm{xN}} \\ P_{\mathrm{yN}} \\ \theta_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cccc} & & & \\ & \mathbb{B}_{3\times4} & & \\ & & & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{1\mathrm{c}} \\ V_{2\mathrm{c}} \\ V_{3\mathrm{c}} \\ V_{4\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \tag{2.40ก}$$

$$\dot{X} = \mathbb{F}X + \mathbb{G}V_{\mathrm{C}} + U_{6\times1} = \mathcal{F}(X, V_{\mathrm{C}}) + U_{6\times1} \tag{2.40ข}$$

โดย $U_{6\times1}$ เป็นสัญญาณรบกวนกระบวนการ (process noise) ต่อไปเป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาออก Z_{IV} และตัวแปรสถานะ V_{B} ร่วมกับแรงดันขาเข้า V_{C}

ด้วยข้อจำกัดด้านการออกแบบแผ่นวงจรพิมพ์ที่มีขนาดเล็ก พื้นที่สำหรับวางอุปกรณ์อิเลคทรอนิกส์และสายนำสัญญาณจึงมีจำกัด เราจึงไม่สามารถติดตั้งมาตรความเร่งให้อยู่ตรงกลางหุ่นยนต์ได้ ดังนั้นมาตรความเร่งจึงรับรู้ผลการเร่งแกนหมุน z ของหุ่นยนต์ด้วย รูป 2.10 แสดงการวางตัวของมาตรความเร่งและผลของความเร่งเชิงมุมที่มีต่อมาตรความเร่ง ให้ p_{ax} และ p_{ay} แทนตำแหน่งของมาตรความเร่งเทียบกับจุดศูนย์กลางหุ่นยนต์ z_1 และ z_2 ซึ่งเป็นค่าความเร่งในแกน x และ y ที่วัดได้จากมาตรความเร่งจึงมีค่าดังสมการ (2.41)

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{\mathrm{dA}}) & \sin(\beta_{\mathrm{dA}}) \\ -\sin(\beta_{\mathrm{dA}}) & \cos(\beta_{\mathrm{dA}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_{\mathrm{a}}\sin(\beta_{\mathrm{A}}) \\ 0 & 1 & r_{\mathrm{a}}\cos(\beta_{\mathrm{A}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{\mathrm{xB}} \\ \dot{V}_{\mathrm{yB}} \\ \dot{\omega}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

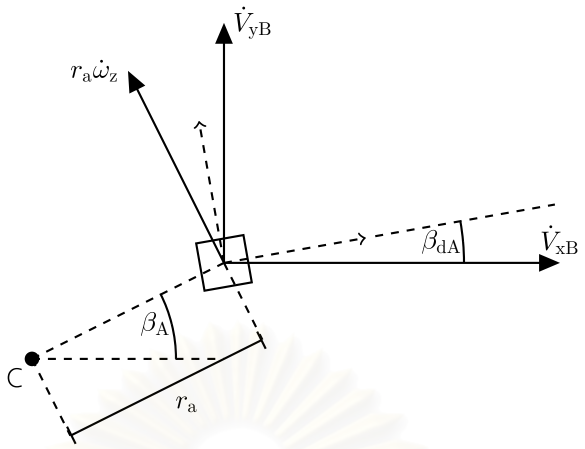
เขียนแทนด้วย

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\dot{V}_{\mathrm{B}} = \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\left[\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}})\right]V_{\mathrm{B}} + \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{B}V_{\mathrm{C}} \tag{2.42}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของสัญญาณขาออกจึงมีลักษณะดังนี้

$$Z_{\mathrm{IV}} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} & & & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}}) & & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{\mathrm{xB}} \\ V_{\mathrm{yB}} \\ \omega_{\mathrm{z}} \\ \hdashline P_{\mathrm{xN}} \\ P_{\mathrm{yN}} \\ \theta_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cccc} & & & \\ & \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{B}_{3\times4} & & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{1\mathrm{c}} \\ V_{2\mathrm{c}} \\ V_{3\mathrm{c}} \\ V_{4\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \tag{2.43ก}$$

$$Z_{\mathrm{IV}} = \mathbb{H}_{\mathrm{IV}}(\omega_{\mathrm{z}})X + \mathbb{C}V_{\mathrm{C}} + W_{6\times1} = \mathcal{H}_{\mathrm{IV}}(X, V_{\mathrm{C}}) + W_{6\times1} \tag{2.43ข}$$



รูปที่ 2.10: ตำแหน่งของมาตรความเร่งเทียบกับจุดศูนย์กลางหุ่นยนต์

โดยสัญญาณขาออกที่วัดได้จากตัวรับรู้ ได้แก่ มาตรความเร่ง ไจโรสโกป และคอมพิวเตอร์วิทัศน์ ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนการวัด $W_{6\times 1}$ (measurement noise) โดยตั้งสมมติฐานให้ U และ W เป็นสัญญาณที่มีลักษณะคงที่แบบกว้าง (wide-sense stationary หรือ WSS) และมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์

2.5 แบบจำลองคณิตศาสตร์วิยุต

เนื่องจากสัญญาณควบคุมและสัญญาณการวัดและการป้อนกลับของหุ่นยนต์เป็นระบบดิจิทัล (digital) ที่มีอัตราสุ่มเป็นค่าคงตัว ระบบควบคุมและระบบตัวกรองที่ถูกเลือกใช้บนหุ่นยนต์จึงเป็นแบบดิจิทัลด้วย แบบจำลองคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์จึงจำเป็นต้องวิเคราะห์ให้เป็นแบบวิยุต (discrete) สมการเชิงอนุพันธ์ (2.40) นั้นเป็นระบบไม่เชิงเส้น การหาแบบจำลองคณิตศาสตร์วิยุตซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงผลต่าง (difference equation) จากผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เชิงเส้นนั้นมีความยุ่งยาก ดังนั้นผู้เขียนจึงหาแบบจำลองคณิตศาสตร์วิยุตจากการประมาณ ต่อไปนี้เป็นวิธีประมาณที่ถูกนำมาวิเคราะห์

วิธีการประมาณไปข้างหน้าของออยเลอร์

สำหรับระบบไม่เชิงเส้นที่มีคาบการสุ่ม h ตัวแปรสถานะ x สัญญาณขาเข้า u ดังสมการ (2.44) วิธีการประมาณไปข้างหน้าของออยเลอร์ (Euler’s forward method) ถูกใช้ประมาณระบบตามสมการ (2.44) ได้ดังสมการ (2.45)

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right) \tag{2.44}$$

$$x(t+h) = x(t) + hf\left(x(t), u(t)\right) + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.45}$$

โดย $\mathcal{O}(h^2)$ ระบุระดับความผิดพลาดของการประมาณเป็นอันดับสอง คือพจน์ที่ไม่ได้ถูกประมาณมีตัวคูณร่วมเป็น h^2 เมื่อนำสมการ (2.45) มาประยุกต์ใช้กับสมการ (2.40) จะได้

$$X_{(k)} = \left[I + h\mathbb{F}(\omega_{(k-1)})\right] X_{(k-1)} + \left[h\mathbb{G}\right] V_{\mathrm{C}(k-1)} \tag{2.46ก}$$

$$\text{เขียนแทนด้วย} \quad X_{(k)} = \Phi_{\mathrm{Eul}}\left(X_{(k-1)}, V_{\mathrm{C}(k-1)}\right) \tag{2.46ข}$$

สมการ (2.46) จะถูกนำไปวิเคราะห์ร่วมกับตัวกรองในภายหลัง

วิธีการประมาณของรุงเงขอ-คุททา

วิธีการประมาณของรุงเงขอ-คุททา (Runge–Kutta’s method) ที่ถูกนำมาวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นวีธีการประมาณอันดับสี่ (Forth-order Runge–Kutta) ที่มีระดับความผิดพลาดเป็นอันดับห้า $\mathcal{O}(h^5)$ การ

ประมาณระบบในสมการ (2.44) ด้วยการประมาณอันดับสี่ของรุงเงขอ-คุททา เป็นไปตามสมการ (2.47)

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}\left(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4\right) + \mathcal{O}(h^5) \tag{2.47}$$

โดยที่

$$s_1 = f\left(x(t), u(t)\right) \tag{2.48ก}$$

$$s_2 = f\left(x(t) + \frac{h}{2}s_1, u\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \tag{2.48ข}$$

$$s_3 = f\left(x(t) + \frac{h}{2}s_2, u\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \tag{2.48ค}$$

$$s_4 = f\left(x(t) + hs_3, u\left(t + h\right)\right) \tag{2.48ง}$$

บทพิสูจน์ของวิธีการประมาณอันดับสี่ของรุงเงขอ-คุททาถูกแสดงไว้ในภาคผนวก ข.1 เมื่อนำสมการ (2.47) มาประยุกต์ใช้กับระบบตามสมการ (2.40) จะได้ว่า

$$s_1 = \mathbb{F}(\omega_{(x_1)})x_1 + \mathbb{G}V_{\mathrm{C}(k-1)} \qquad \text{โดยที่} \qquad x_1 = X_{(k-1)} \tag{2.49ก}$$

$$s_2 = \mathbb{F}(\omega_{(x_2)})x_2 + \mathbb{G}V_{\mathrm{C}(k-1)} \qquad \text{โดยที่} \qquad x_2 = X_{(k-1)} + \frac{h}{2}s_1 \tag{2.49ข}$$

$$s_3 = \mathbb{F}(\omega_{(x_3)})x_3 + \mathbb{G}V_{\mathrm{C}(k-1)} \qquad \text{โดยที่} \qquad x_3 = X_{(k-1)} + \frac{h}{2}s_2 \tag{2.49ค}$$

$$s_4 = \mathbb{F}(\omega_{(x_4)})x_4 + \mathbb{G}V_{\mathrm{C}(k-1)} \qquad \text{โดยที่} \qquad x_4 = X_{(k-1)} + hs_3 \tag{2.49ง}$$

และ

$$X_{(k)} = X_{(k-1)} + \frac{h}{6}\left(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4\right) \tag{2.50ก}$$

$$\text{เขียนแทนด้วย} \qquad X_{(k)} = \Phi_{\mathrm{RK4}}\left(X_{(k-1)}, V_{\mathrm{C}(k-1)}\right) \tag{2.50ข}$$

สมการ (2.50) จะถูกนำไปวิเคราะห์ร่วมกับตัวกรองเปรียบเทียบกับสมการ (2.46) ในภายหลัง

บทที่ 3
ตัวกรองคาลมาน

ตัวกรองคาลมานถูกนำมาใช้เพื่อกรองสัญญาณรบกวนออกจากตัวรับรู้ นอกจากนั้นยังทำหน้าที่เป็นตัวสังเกตสถานะ (state observer) หรือ ตัวประมาณสถานะ (state estimator) ของระบบ อย่างไรก็ตามตัวกรองคาลมานแบบทั่วไปไม่เหมาะสมสำหรับระบบของหุ่นยนต์ชนิดเคลื่อนที่ทุกทิศทาง เพราะหุ่นยนต์ชนิดนี้มีแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นตัวกรองคาลมานแบบขยาย (Extended Kalman filter หรือ EKF) และตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด (Sigma-Point Kalman filter หรือ Unscented Kalman filter หรือ UKF) ซึ่งถูกดัดแปลงเพื่อรองรับระบบไม่เชิงเส้น จึงถูกนำมาวิเคราะห์สำหรับหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทางด้วย ในขั้นต้นของบทนี้เป็นการแนะนำตัวกรองคาลมานแบบทั่วไป จากนั้นหลักการของตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดจะถูกอธิบายเป็นส่วนถัดไป และสุดท้ายตัวกรองคาลมานทั้งสามแบบถูกนำไปวิเคราะห์ร่วมกับแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบต่าง ๆ ดังที่ได้อธิบายในบทที่ผ่านมา

3.1 ตัวกรองคาลมานแบบทั่วไป

ตัวกรองคาลมานใช้หลักการเชิงตั้งฉาก (orthogonal principle) เพื่อหาค่ากลางของตัวแปรสถานะที่มีการกระจายเป็นเกาส์เซียน (Gaussian) หลักการเชิงตั้งฉากถูกแสดงไว้ในภาคผนวก ข.2 รูปแบบทั่วไปของตัวกรองคาลมานประกอบด้วยสองส่วนคือ การทำนายสถานะ (state prediction) และการปรับปรุงด้วยการวัด (measurement prediction) การออกแบบตัวกรองคาลมานสำหรับระบบเชิงเส้นดังสมการ (3.1)

$$x_{(k)} = Ax_{(k-1)} + Bu_{(k-1)} + v_{(k-1)} \tag{3.1ก}$$

$$z_{(k)} = Hx_{(k)} + w_{(k)} \tag{3.1ข}$$

มี $x_{(k)}$ เป็นตัวแปรสถานะ $u_{(k)}$ เป็นสัญญาณควบคุมและ $w_{(k)}, v_{(k)}$ เป็นสัญญาณรบกวนที่เป็นตัวแปรสุ่มที่มีสมบัติคงที่อย่างกว้าง (wide-sense stationary, WSS) กำหนดให้ $\hat{x}$ เป็นค่าประมาณตัวแปรสถานะ $e = x - \hat{x}$ เป็นความผิดพลาดของค่าประมาณตัวแปรสถานะ $P_{\mathrm{ee}(k)}$ เป็นความแปรปรวนของความผิดพลาด และ Q, R เป็นความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $v_{(k)}, w_{(k)}$ ตามลำดับ ต่อไปนี้เป็นสมการการทำนายสถานะ

$$\hat{x}^-_{(k)} = A\hat{x}_{(k-1)} + Bu_{(k-1)} \tag{3.2}$$

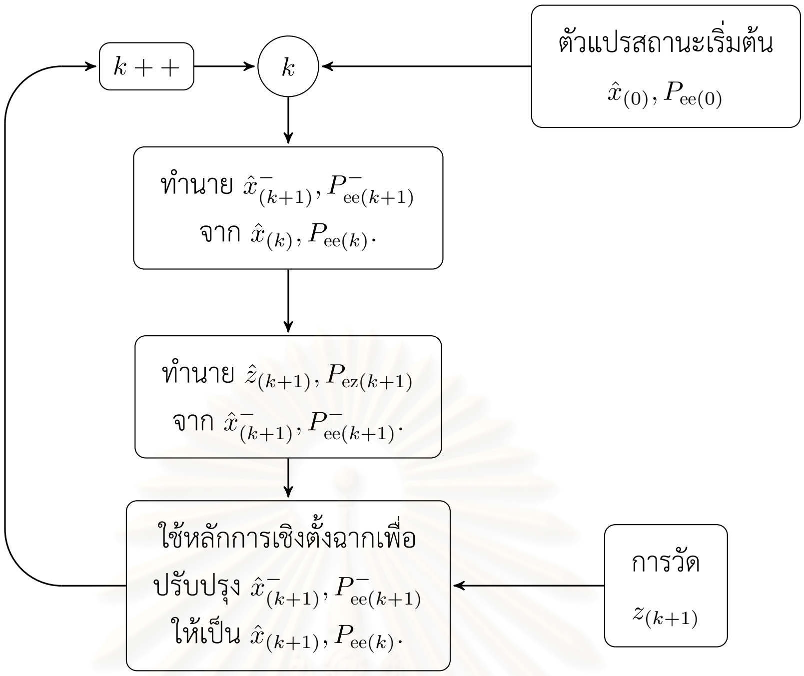
$$P^-_{\mathrm{ee}(k)} = AP_{\mathrm{ee}(k-1)}A^{\mathrm{T}} + Q \tag{3.3}$$

โดยดรรชนีบน $^-$ แสดงถึงค่าประมาณที่ได้จากการทำนายเท่านั้น ยังไม่ได้รับการปรับปรุงด้วยการวัด ในส่วนถัดไป $\hat{x}^-_{(k)}$ และ $P^-_{\mathrm{ee}(k)}$ จะถูกปรับปรุงด้วยการวัด $z_{(k)}$ โดยใช้หลักการเชิงตั้งฉาก ซึ่งจำเป็นต้องหาค่าทำนายการวัด $\hat{z}_{(k)}$ ความแปรปรวนของการวัด $P_{\mathrm{zz}(k)}$ และความแปรปรวนร่วม $P_{\mathrm{ez}(k)}$ ระหว่างความผิดพลาดและการวัด ตัวแปรเหล่านี้มีค่าดังสมการ (3.4)

$$\hat{z}_{(k)} = H\hat{x}^-_{(k)} \tag{3.4ก}$$

$$P_{\mathrm{zz}(k)} = HP^-_{\mathrm{ee}(k)}H^{\mathrm{T}} + R \tag{3.4ข}$$

$$P_{\mathrm{ez}(k)} = P^{\mathrm{T}}_{\mathrm{ze}(k)} = P^-_{\mathrm{ee}(k)}H^{\mathrm{T}} \tag{3.4ค}$$



รูปที่ 3.1: แผนภาพขั้นตอนการประมาณตัวแปรสถานะของตัวกรองคาลมาน

เมื่อใช้หลักการเชิงตั้งฉากจะให้ผลของสมการการปรับปรุงด้วยการวัดดังสมการนี้

$$\hat{x}_{(k)} = \hat{x}^-_{(k)} + P_{\mathrm{ez}(k)} P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)} (z_{(k)} - \hat{z}_{(k)}) \tag{3.5}$$

$$P_{\mathrm{ee}(k)} = P^-_{\mathrm{ee}(k)} - P_{\mathrm{ez}(k)} P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)} P^{\mathrm{T}}_{\mathrm{ez}(k)} \tag{3.6}$$

และนิยามให้ $$K_{(k)} \triangleq P_{\mathrm{ez}(k)} P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)} \tag{3.7}$$

ค่าประมาณตัวแปรสถานะและความแปรปรวนของความผิดพลาดที่เวลา k จากสมการ (3.5) และ (3.6) จะถูกนำไปใช้คำนวณค่าประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{x}_{(k+1)}$ และความแปรปรวนของความผิดพลาด $P_{\mathrm{ee}(k+1)}$ จากตัวกรองที่เวลา $k+1$ เป็นอันดับถัดไป

3.2 ตัวกรองคาลมานแบบขยาย

เนื่องจากสมการเชิงเชิงผลต่าง (2.46) และสมการ (2.50) มีความไม่เชิงเส้นคือ $\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}})$ รวมอยู่ในสมการด้วย ตัวกรองคาลมานแบบขยายถูกออกแบบมาเพื่อใช้กับระบบไม่เชิงเส้นดังสมการ (3.8)

$$x_{(k)} = \Phi\left(x_{(k-1)}, u_{(k-1)}\right) + w_{(k-1)} \tag{3.8ก}$$

$$z_{(k)} = \mathcal{H}\left(x_{(k)}, u_{(k)}\right) + v_{(k)} \tag{3.8ข}$$

การทำนายสถานะดังสมการ (3.2) นั้นทำได้โดยใช้สมการ (3.8ก) โดยตรง แต่การทำนายความแปรปรวนดังสมการ (3.3) นั้นทำไม่ได้ เนื่องจากไม่มีเมทริกซ์ A ในสมการ (3.8ก) ตัวกรองคาลมานแบบขยายใช้วิธีแทนเมทริกซ์ A ในสมการ (3.3) ด้วยเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น Φ เขียนแทนด้วย Φ_{Jac} สมการทำนายสถานะสำหรับตัวกรองคาลมานแบบขยายจึงมีรูปแบบดังนี้

$$\hat{x}^-_{(k)} = \Phi\left(\hat{x}_{(k-1)}, u_{(k-1)}\right) \tag{3.9}$$

$$P^-_{\mathrm{ee}(k)} = \Phi_{(\mathrm{Jac})} P_{\mathrm{ee}(k-1)} \Phi^{\mathrm{T}}_{(\mathrm{Jac})} + Q \tag{3.10}$$

ในลักษณะเดียวกัน Υ ซึ่งเป็นเมทริกซ์จาโคเบียนของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นขาออก $\mathcal{H}$ ถูกใช้แทนเมทริกซ์ H ในสมการ (3.4) ดังนั้นสมการ (3.4) ถูกเขียนใหม่สำหรับตัวกรองคาลมานแบบขยายดังสมการ (3.11)

$$\hat{z}_{(k)} = \mathcal{H}(\hat{x}^{-}_{(k)}, u_{(k)}) \tag{3.11ก}$$

$$P_{\mathrm{zz}(k)} = \Upsilon P^{-}_{\mathrm{ee}(k)} \Upsilon^{\mathrm{T}} + R \tag{3.11ข}$$

$$P_{\mathrm{ez}(k)} = P^{\mathrm{T}}_{\mathrm{ze}(k)} = P^{-}_{\mathrm{ee}(k)} \Upsilon^{\mathrm{T}} \tag{3.11ค}$$

สมการการปรับปรุงด้วยการวัดสำหรับตัวกรองคาลมานแบบขยายยังคงเป็นสมการ (3.5) และ (3.6) ซึ่งใช้หลักการเชิงตั้งฉากเหมือนกรณีตัวกรองคาลมานแบบทั่วไป

เมทริกซ์จาโคเบียนสำหรับแบบจำลอง Φ_{Eul}

เมทริกซ์จาโคเบียนสำหรับสมการเชิงผลต่างที่ได้จากการประมาณแบบจำลองคณิตศาสตร์ (2.40) ด้วยวิธีการประมาณไปข้างหน้าของออยเลอร์ (2.46) คือการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับสมาชิกแต่ละตัวในตัวแปร X ของพจน์ $\left[I + h\mathbb{F}(\omega_{(k-1)})\right] X_{(k-1)}$ เท่านั้น ในขั้นแรกพบว่า

$$\text{Jac of}\left(\left[\begin{array}{c:ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{3\times3}(\omega_{\mathrm{z}}) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} V_{\mathrm{B}} \\ \hdashline P_{\mathrm{N}} \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{c:ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}}) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.12ก}$$

$$\text{โดยที่ } \mathbb{A}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}}) \triangleq -\left(I + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}K_3\right)^{-1}\left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}K_1 + \mathbb{D}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}})\right) \tag{3.12ข}$$

$$\text{และ } \mathbb{D}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\mathrm{z}} & -V_{\mathrm{yB}} \\ \omega_{\mathrm{z}} & 0 & V_{\mathrm{xB}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12ค}$$

เมทริกซ์ $\mathbb{A}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}})$ แตกต่างจาก $\mathbb{A}_{3\times3}(\omega_{\mathrm{z}})$ เพียงเล็กน้อย คือมี $V_{\mathrm{xB}}, V_{\mathrm{xB}}$ เพิ่มมาในเมทริกซ์ $\mathbb{D}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}})$ อนึ่ง

$$\text{Jac of}\left(\left[\begin{array}{c:ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}}) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} V_{\mathrm{B}} \\ \hdashline P_{\mathrm{N}} \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{c:ccc} & 0 & 0 & (-V_{\mathrm{xB}}\sin(\theta_{\mathrm{z}}) - V_{\mathrm{yB}}\cos(\theta_{\mathrm{z}})) \\ \mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}}) & 0 & 0 & (V_{\mathrm{xB}}\cos(\theta_{\mathrm{z}}) - V_{\mathrm{yB}}\sin(\theta_{\mathrm{z}})) \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.13}$$

ดังนั้นสำหรับแบบจำลองที่ใช้การประมาณไปข้างหน้าของออยเลอร์

$$\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}}) \triangleq \left[\begin{array}{c:ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}}) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline & 0 & 0 & (-V_{\mathrm{xB}}\sin(\theta_{\mathrm{z}}) - V_{\mathrm{yB}}\cos(\theta_{\mathrm{z}})) \\ \mathbb{R}(\theta_{\mathrm{z}}) & 0 & 0 & (V_{\mathrm{xB}}\cos(\theta_{\mathrm{z}}) - V_{\mathrm{yB}}\sin(\theta_{\mathrm{z}})) \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.14ก}$$

$$\Phi_{\mathrm{Eul(Jac)}} = \left[I + h\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}(k-1)})\right] \tag{3.14ข}$$

เมทริกซ์จาโคเบียนสำหรับแบบจำลอง Φ_{RK4}

ในกรณีการประมาณระบบด้วยวิธีของรุงเงขอ-คุททานั้นต้องมีการคำนวณอนุพันธ์ของตัวแปรสถานะอย่างต่อเนื่องถึงห้าครั้งในการทำนายตัวแปรสถานะหนึ่งขั้น การหาเมทริกซ์ A_{Jac} ที่เป็นรูปแบบชัดแจ้ง (explicit form)

จึงมีความยุ่งยาก ดังนั้นผู้เขียนจึงเลือกทำนายความแปรปรวน $P_{\mathrm{ee}(k)}$ ไปพร้อมกันระหว่างการหาอนุพันธ์ของตัวแปรสถานะในวิธีของรุงเงขอ-คุททาด้วย โดยใช้เมทริกซ์ $\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}$ จากสมการ (3.14ก) การประมาณระบบวิยุตด้วยวิธีของรุงเงขอ-คุททาทำให้ความแปรปรวนของความผิดพลาดของการประมาณตัวแปรสถานะมีการแพร่-กระจายดังสมการ (3.15)[1]

$$P_{\mathrm{ee}(k)} = \Phi_{\mathrm{RK4(Jac)}} P_{\mathrm{ee}(k-1)} \Phi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{RK4(Jac)}} + Q \tag{3.15}$$

ซึ่งถูกใช้แทนสมการ (3.6) เมื่อระบบวิยุตถูกประมาณด้วยวิธีของรุงเงขอ-คุททาอันดับสี่

เมทริกซ์จาโคเบียนสำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้นขาออก $\mathcal{H}_{\mathrm{IV}}(X, V_{\mathrm{C}})$

สำหรับสมการของฟังก์ชันขาออก (2.43) ที่มี $A(\omega_{\mathrm{z}})$ เป็นส่วนประกอบของฟังก์ชัน $\mathcal{H}_{\mathrm{IV}}$ ดังนั้น $\mathbb{A}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}})$ จากสมการ (3.12) จึงถูกใช้หาเมทริกซ์จาโคเบียนของสมการ (2.43) เทียบกับตัวแปรสถานะ V_{B} เมทริกซ์นี้มีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$\Upsilon_{\mathrm{IV}}(V_{\mathrm{B}}) \triangleq \left[\begin{array}{ccc:ccc} \multicolumn{3}{c:}{\multirow{2}{*}{$\mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{A}_{\mathrm{Jac}}$}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{3.16}$$

เมทริกซ์ $\Upsilon(V_{\mathrm{B}})$ ถูกใช้กับตัวกรองคาลมานแบบขยายในสมการ (3.11)

การทำตัวกรองคาลมานแบบขยายมีข้อจำกัดที่ต้องหาเมทริกซ์จาโคเบียน Φ_{Jac} และ Υ ของระบบ ทำให้ตัวกรองคาลมานแบบขยายไม่สามารถนำมาใช้กับระบบไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่วิเคราะห์ในภาคผนวก ก.1 ดังนั้นตัวกรองคาลมานแบบขยายจึงใช้ได้เฉพาะแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ละเลยผลของความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มแล้ว

วิกฤตของตัวกรองคาลมานแบบขยาย

กระบวนการทำให้เป็นเชิงเส้นของตัวกรองมีข้อเสียอยู่หลายประการ อันดับแรก การประมาณเมทริกซ์ Φ และ $\mathbb{H}$ ด้วย Φ_{Jac} และ Υ ทำให้ตัวกรองคาลมานแบบขยายไม่มีสมบัติเป็นตัวประมาณเหมาะที่สุด (optimal estimator) แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ไม่ตรงกับระบบพลวัตจริงและค่าเริ่มต้นของตัวแปรสถานะที่ไม่ถูกต้องอาจทำให้ตัวกรองตัวแปรสถานะลู่ออก (diverge) ได้ อนึ่งการทำให้เป็นเชิงเส้นมีโอกาสทำให้การประมาณความแปรปรวนของตัวแปรต่าง ๆ ในระบบผิดพลาดไปจากค่าจริงจนเกิดความไม่ต้องกันในเชิงความน่าจะเป็น (inconsistency in probabilistic) อย่างไรก็ตามตัวกรองคาลมานก็ยังแพร่หลายในงานประยุกต์อีกหลายด้าน และจากการทดลองไม่เกิดวิกฤตของตัวกรองคาลมานแบบขยายขึ้นจากการใช้ตัวกรองร่วมกับแบบจำลองของหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทางในงานวิจัยนี้

3.3 ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้ว ตัวกรองคาลมานแบบขยายใช้ประมาณตัวแปรสถานะของระบบไม่เชิงเส้นอย่างเข้มไม่ได้ ในปีค.ศ. 1997 [12] ได้เสนอวิธีนำตัวกรองคาลมานมาใช้กับระบบดังกล่าว โดยอาศัยการแปลงจุดที่เรียกว่าการแปลงอันสเซนต์ (unscent transform) ตัวกรองชนิดนี้เรียกว่าตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด (sigma point kalman filter หรือ unscented kalman filter หรือ UKF)

[1] ดูที่มาของเมทริกซ์ $\Phi_{\mathrm{RK4(Jac)}}$ ในภาคผนวก ข.1

ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดใช้วิธีกระจายตัวแปรสุ่ม X ออกเป็นจุดเรียกว่าจุดซิกมา (sigma point) โดยการกระจายของจุดซิกมานี้ยังมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเหมือนตัวแปรสุ่มเดิม จากนั้นแปลงจุดเหล่านี้ด้วยฟังก์ชันใด ๆ $f(\cdot)$ ตามรูป 3.2 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนที่ได้จากกลุ่มของจุดที่ได้จากการแปลงถือเป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มใหม่ Y ที่ได้จากการแปลง $f(X)$ สำหรับตัวแปรสุ่ม X ที่มีค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ และความแปรปรวน P_{xx} นิยามให้จุดซิกมาเป็นกลุ่มของจุด $\mathcal{X}_{i,i+n}$ ที่มีค่าถ่วงน้ำหนัก $\mathcal{W}_{i,i+n}$ ดังนี้ [2]

$$\mathcal{X}_0 = \bar{x} \qquad \mathcal{W}_0 = \kappa\frac{1}{n+\kappa} \tag{3.17ก}$$

$$\mathcal{X}_i = \bar{x} + \left[\sqrt{(n+\kappa)P_{\mathrm{xx}}}\right]_i \qquad \mathcal{W}_i = \frac{1}{2}\frac{1}{n+\kappa} \tag{3.17ข}$$

$$\mathcal{X}_{i+n} = \bar{x} - \left[\sqrt{(n+\kappa)P_{\mathrm{xx}}}\right]_i \qquad \mathcal{W}_{i+n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n+\kappa} \tag{3.17ค}$$

เมื่อ X_i และ X_{i+n} เป็นคู่ความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของสมาชิกที่ i ของตัวแปรสถานะ X ค่าความเบี่ยงเบนหาได้จาก $\left[\sqrt{(n+\kappa)P_{\mathrm{xx}}}\right]_i$ ซึ่งแทนแถวที่ i ของเมทริกซ์ $\left[\sqrt{(n+\kappa)P_{\mathrm{xx}}}\right]$ ส่วนตัวแปร κ แทนจำนวนจุดถ่วงน้ำหนักของจุดที่เป็นค่าเฉลี่ยเป็นพารามิเตอร์จำนวนเต็มที่ปรับได้ตามความเหมาะสมของระบบ รูป 3.3 แสดงการกระจายจุดซิกมา หลังจากการกระจายจุดซิกมาจะได้จุดซิกมาจำนวน $2n+\kappa$ จุด โดยมีจุดที่เป็นค่าเฉลี่ยซ้ำกัน κ จุด ถือว่ามีจุดที่มีตำแหน่งบนปริภูมิต่างกัน $2n+1$ จุด ดังที่ได้กล่าวมาแล้วค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ $\mathcal{Y}_j$ หลังการแปลง ถือเป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มใหม่ ซึ่งหาได้จากสมการ (3.18) และสมการ (3.19)

$$\bar{y} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \mathcal{Y}_j \tag{3.18}$$

$$P_{yy} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \left(\mathcal{Y}_j - \bar{y}\right)\left(\mathcal{Y}_j - \bar{y}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3.19}$$

รายละเอียดของการแปลงอันสเซนต์ถูกอธิบายไว้ในภาคผนวก ค

สำหรับตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดใช้การแปลงอันสเซนต์แทนสมการ (3.9), (3.10) และ (3.11) ในขั้นตอนการทำนาย $\hat{x}^-_{(k)}$ และ $\hat{z}_{(k)}$ เดิม ดังนั้นการหา $\hat{x}^-_{(k)}, \hat{z}_{(k)}$ และ $P^-_{\mathrm{ee}}, P_{\mathrm{zz}(k)}$ และ $P_{\mathrm{ez}(k)}$ จึงมีขั้นตอนดังนี้

1. กระจายจุดซิกมา $\{\mathcal{X}_{j(k-1)} \mid j = 0, 1, \ldots, 2n\}$ จากสถานะ $\hat{x}_{(k-1)}$ และความแปรปรวน $P_{\mathrm{ee}(k-1)}$

2. แปลงจุดซิกมา $\mathcal{X}_{j(k-1)}$ โดยฟังก์ชัน Φ ได้

$$\mathcal{Y}_{j(k)} = \Phi(\mathcal{X}_{j(k-1)}, u_{(k-1)}) \tag{3.20}$$

3. หา $\hat{x}^-_{(k)}$ และ $P^-_{\mathrm{ee}(k)}$ จากสมการ (3.18) และ (3.19)

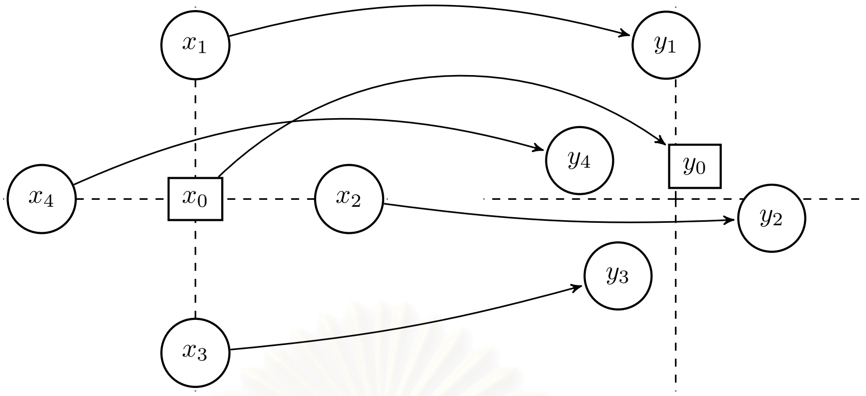
$$\hat{x}^-_{(k)} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \mathcal{Y}_{j(k)} \tag{3.21}$$

$$P_{\mathrm{ee}(k)} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \left(\mathcal{Y}_{j(k)} - \hat{x}^-_{(k)}\right)\left(\mathcal{Y}_{j(k)} - \hat{x}^-_{(k)}\right)^{\mathrm{T}} + Q \tag{3.22}$$

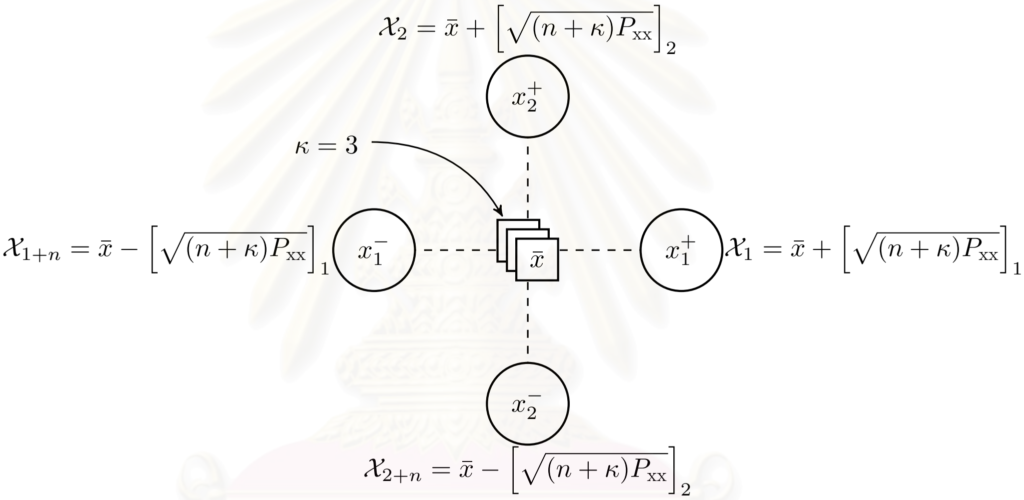
4. แปลงจุดซิกมา $\mathcal{Y}_{j(k)}$ โดยฟังก์ชัน Υ ได้

$$\mathcal{Z}_{j(k)} = \Upsilon(\mathcal{Y}_{j(k)}, u_{(k)}) \tag{3.23}$$

[2] ดูวิธีการกระจายจุดซิกมาด้วยการแยกโชเลสกีในภาคผนวก ค.1



รูปที่ 3.2: ภาพแสดงการแปลงจุดแบบไม่เชิงเส้นจากปริภูมิหนึ่งไปยังอีกปริภูมิหนึ่ง



รูปที่ 3.3: การกระจายจุดซิกมา

ตัวกรอง	EKF & Eul		EKF & RK4		UKF & Eul		UKF & RK4	
กระบวนการ	บวก	คูณ	บวก	คูณ	บวก	คูณ	บวก	คูณ
ทำนาย $\hat{x}^-_{(k+1)}$	30	36	76	90	539	536	1137	1238
ทำนาย $P^-_{\mathrm{ee}(k+1)}$	99	158	431	639	531	745	531	745
ทำนาย $\hat{z}_{(k+1)}$	30	38	30	38	462	506	462	506
ทำนาย $P_{\mathrm{ez}(k+1)}$	48	66	48	66	510	745	510	745
ทำนาย $P_{\mathrm{zz}(k+1)}$	27	9	27	9	531	745	531	745
คำนวณ $K_{\mathrm{k}(k+1)}$	290	419	290	419	290	419	290	419
คำนวณ $\hat{x}_{(k+1)}$	42	36	42	36	42	36	42	36
คำนวณ $P_{\mathrm{ee}(k+1)}$	117	135	117	135	117	135	117	135
หนึ่งรอบการวนซ้ำ	683	897	1061	1432	3022	3867	3620	4569
	1580		2493		6889		8189	

ตารางที่ 3.1: จำนวนครั้งการคำนวณจุดลอยตัวต่อหนึ่งรอบการวนซ้ำของตัวกรอง

5. หา $\hat{z}_{(k)}, P_{\mathrm{zz}(k)}$ และ $P_{\mathrm{ez}(k)}$ จากสมการ (3.18) และ (3.19)

$$\hat{z}_{(k)} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \mathcal{Z}^-_{j(k)} \tag{3.24}$$

$$P^-_{\mathrm{zz}(k)} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \left(\mathcal{Z}_{j(k)} - \hat{z}_{(k)}\right)\left(\mathcal{Z}_{j(k)} - \hat{z}_{(k)}\right)^{\mathrm{T}} + R \tag{3.25}$$

$$P_{\mathrm{ez}(k)} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \left(\mathcal{Y}_{j(k)} - \hat{x}^-_{(k)}\right)\left(\mathcal{Z}_{j(k)} - \hat{z}_{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3.26}$$

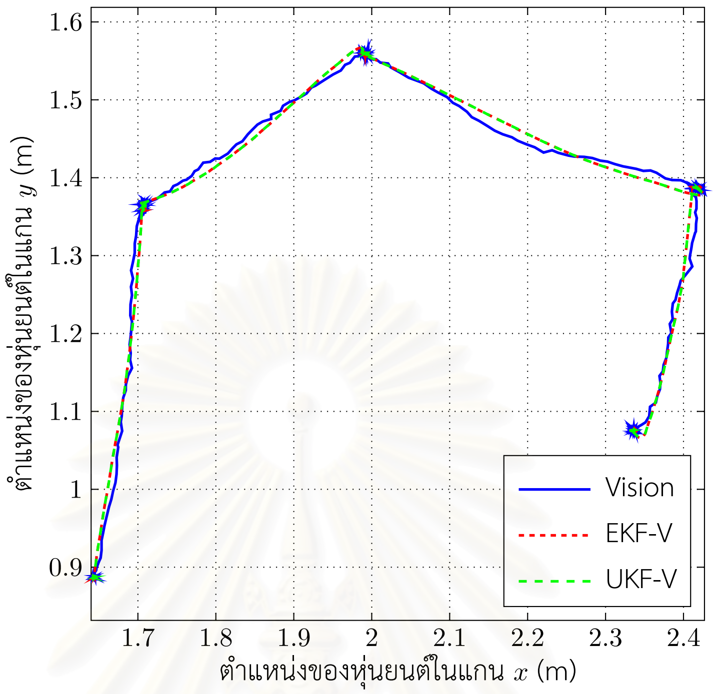
จากนั้นจึงใช้หลักการเชิงตั้งฉากตามสมการ (3.5) และ (3.6) เพื่อปรับปรุงการประมาณตัวแปรสถานะด้วยการวัดต่อไป

3.4 ความซับซ้อนของการคำนวณตัวกรองคาลมานแบบต่าง ๆ ที่ใช้กับหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทาง

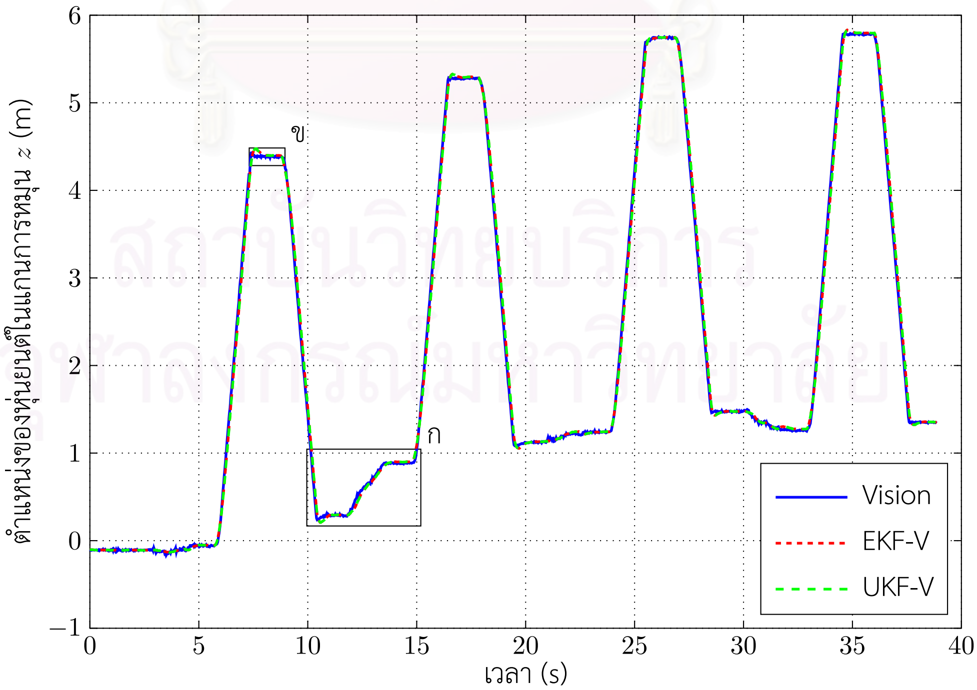
บทนี้ได้แนะนำตัวกรองคาลมานแบบขยาย และตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด ซึ่งใช้สำหรับกรองระบบของหุ่นยนต์ซึ่งไม่เชิงเส้นได้ อีกทั้งแบบจำลองคณิตศาสตร์ยังมีวิธีการประมาณอีกสองแบบคือ วิธีการประมาณไปข้างหน้าของออยเลอร์ และวิธีการประมาณของรุงเงขอ-คุทตา ซึ่งมีความซับซ้อนของการคำนวณ (computational complexity) ไม่เท่ากันและให้ความแม่นยำของตัวกรองต่างกันด้วย ในขั้นแรกความซับซ้อนของการคำนวณถูกวัดด้วยจำนวนครั้งของการบวกและการคูณจุดลอยตัว (floating point) ต่อหนึ่งรอบการวนซ้ำของตัวกรอง ตาราง 3.1 แสดงจำนวนครั้งของการบวกและการคูณจุดลอยตัวต่อหนึ่งรอบการวนซ้ำของวิธีต่าง ๆ

รูป 3.4, 3.5, 3.8 และ 3.10 แสดงผลเปรียบเทียบการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายเปรียบเทียบกับตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด เพื่อเปรียบเทียบผลต่างระหว่างการใช้ตัวกรองทั้งสองชนิด ในขั้นนี้เราจึงใช้การป้อนกลับจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์เท่านั้นและข้อมูลนั้นไม่มีการประวิงเวลา เส้นทึบสีน้ำเงิน (———) แทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Vision’ แทนชุดข้อมูลที่อ่านได้จากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ เส้นประสีแดง (-------) ซึ่งแทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ ‘EKF-V’ แทนชุดข้อมูลที่ได้จากการกรองโดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย และเส้นประสีเขียว (- - - - -) ซึ่งแทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ ‘UKF-V’ แทนชุดข้อมูลที่ได้จากการกรองโดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด

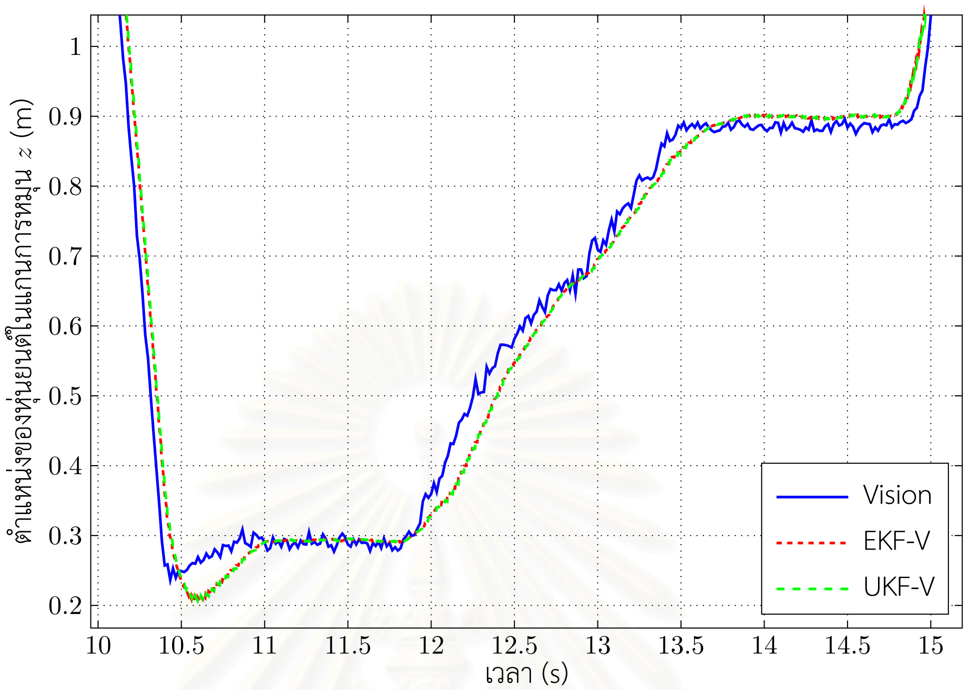
จากภาพขยายในรูป 3.6, 3.7, 3.9 และ 3.11 จะเห็นได้ว่าตัวกรองทั้งสองชนิดให้ผลการประมาณตัวแปรสถานะที่เหมือนกันอย่างมากทั้งตำแหน่งในระนาบ $\mathrm{x}-\mathrm{y}$ และมุมในแกน z เมื่อเปรียบเทียบกับความซับซ้อนของการคำนวณในตาราง 3.1 แล้ว ในขั้นต้นสรุปได้ว่าตัวกรองคาลมานแบบขยายเหมาะสมกับการประมาณตัวแปรสถานะของหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทางมากกว่าการประมาณด้วยตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด อย่างไรก็ตาม การทดลองนี้ยังไม่มีการประวิงเวลาและยังไม่มีการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างคอมพิวเตอร์วิทัศน์และตัวรับรู้ความเฉื่อย



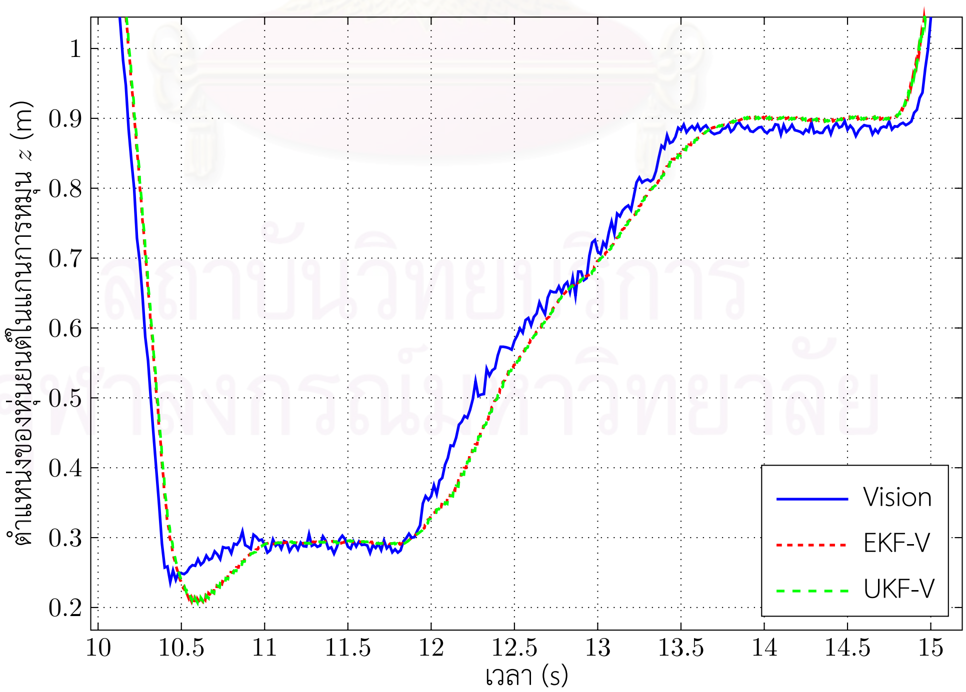
รูปที่ 3.4: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ในระนาบ $x - y$



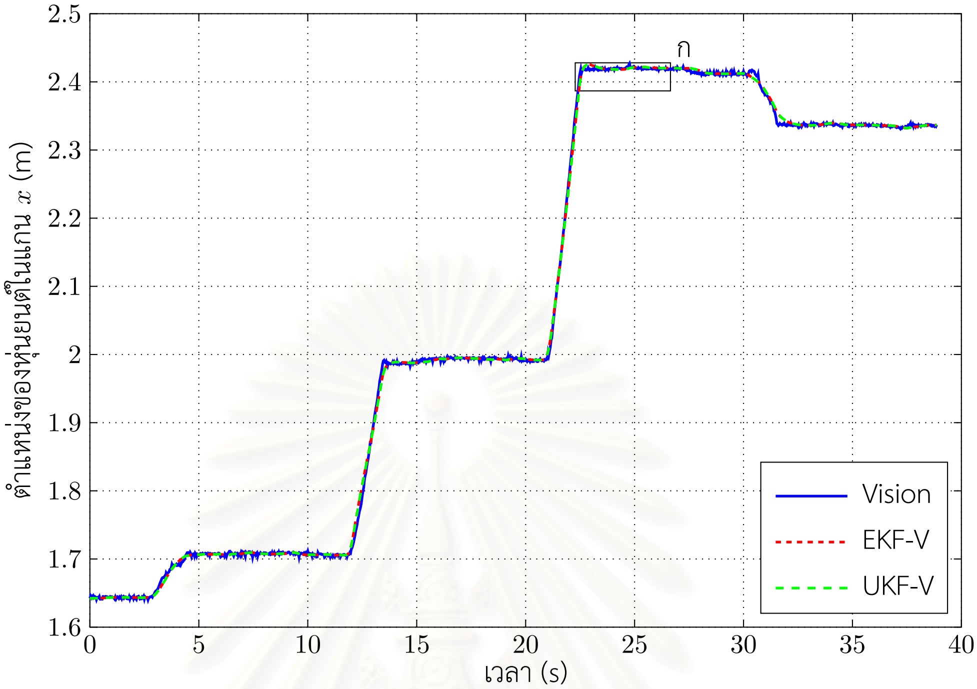
รูปที่ 3.5: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ในแกนการหมุน z



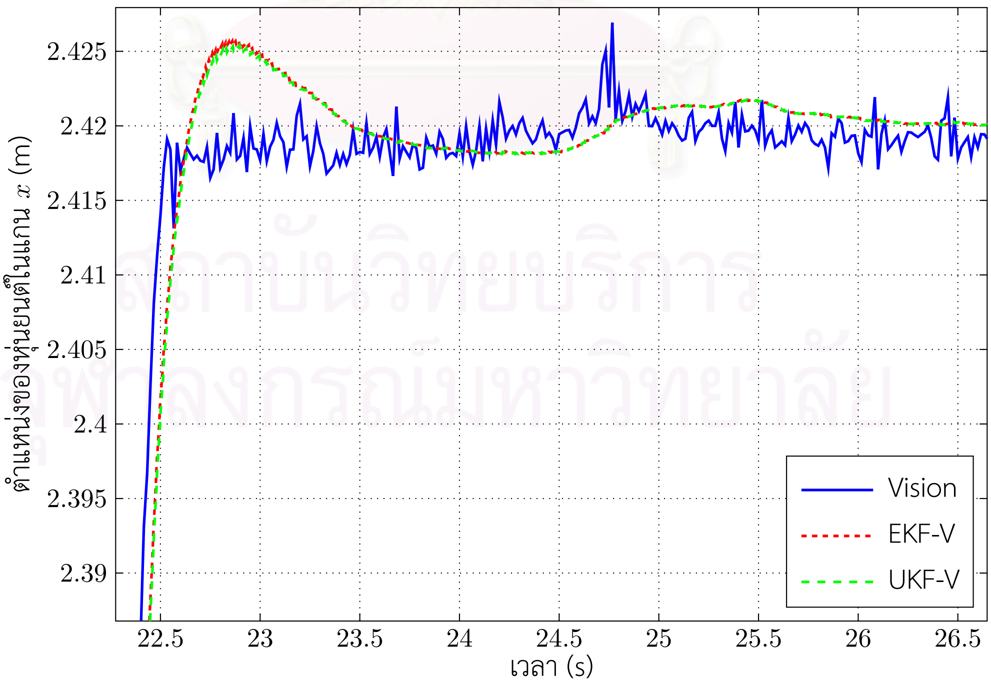
รูปที่ 3.6: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์การใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ในแกนการหมุน z



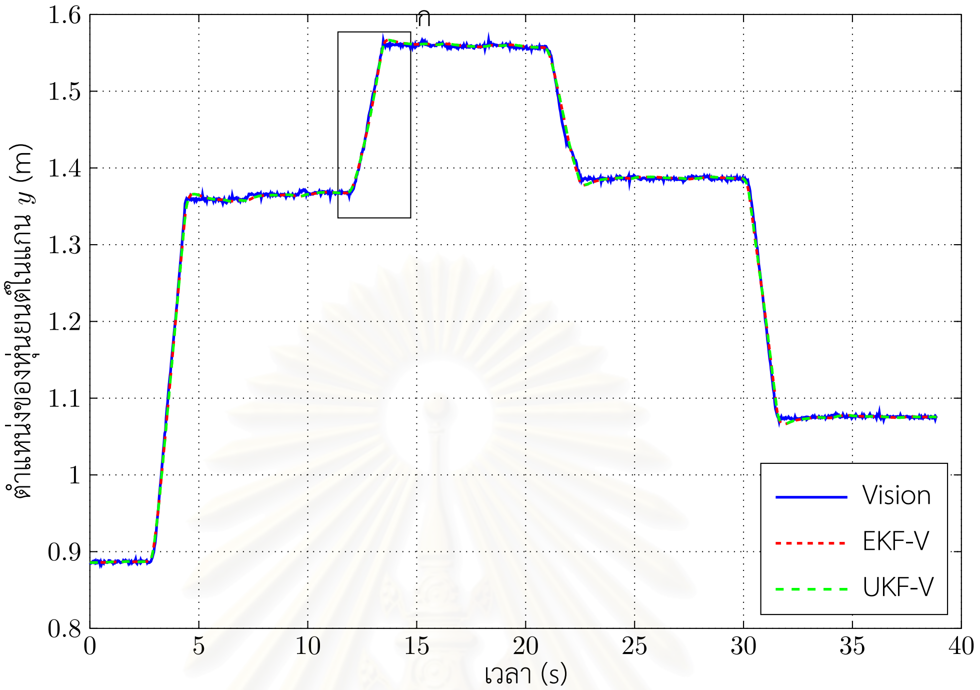
รูปที่ 3.7: ภาพขยาย ข ของผลลัพธ์การใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ในแกนการหมุน z



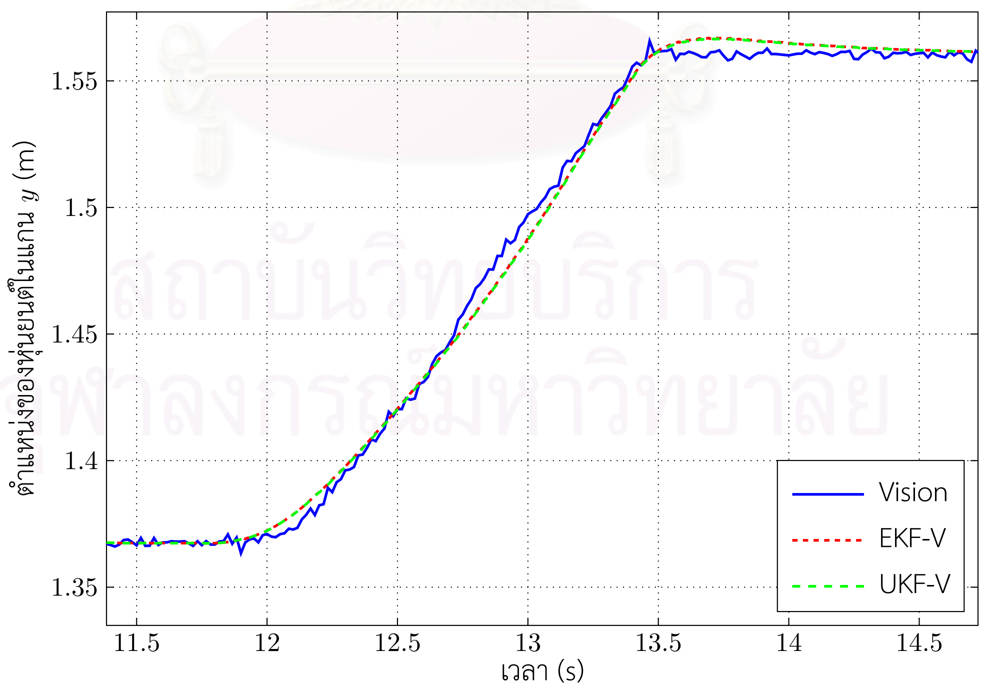
รูปที่ 3.8: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ในแกน x



รูปที่ 3.9: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ใน แกน x



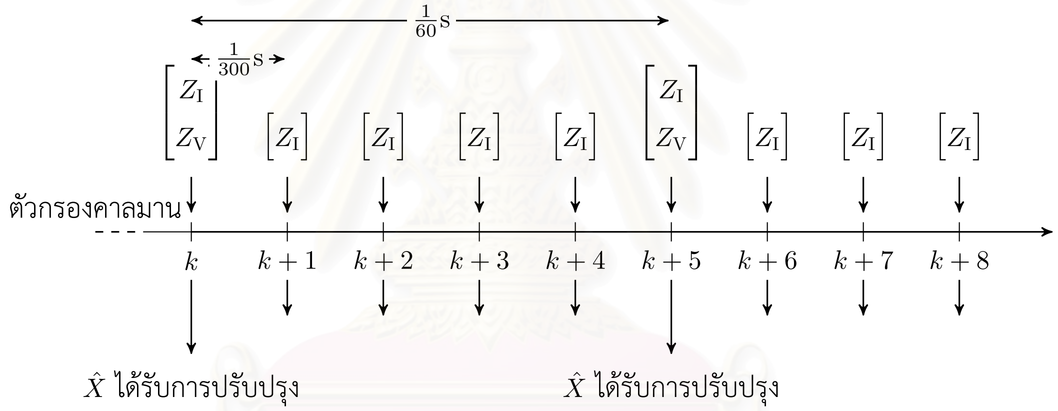
รูปที่ 3.10: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ในแกน y



รูปที่ 3.11: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุดกับหุ่นยนต์ใน แกน y

บทที่ 4
การรวมสัญญาณตัวรับรู้

สัญญาณตัวรับรู้ในหุ่นยนต์แบ่งเป็นสองประเภท ประเภทแรกคือสัญญาณจากตัวรับรู้ความเฉื่อย ได้แก่ มาตรความเร่ง และไจโรสโกป ซึ่งมีอัตราสุ่ม (sampling rate) ของสัญญาณสูงประมาณ 300 เฮิรตซ์ สัญญาณจากตัวรับรู้อีกประเภทคือ ตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ที่วัดได้จากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ ซึ่งมีอัตราสุ่มหรืออัตรากรอบภาพ (frame rate) ประมาณ 60 เฮิรตซ์ ซึ่งต่ำกว่าอัตราสุ่มของตัวรับรู้ความเฉื่อยอยู่ 5 เท่า วิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้สำหรับสัญญาณที่มีอัตราสุ่มต่างกันทำได้โดยการใช้ตัวกรองกับสัญญาณตัวรับรู้ความเฉื่อยด้วยอัตรา 300 เฮิรตซ์ เพื่อประมาณตัวแปรสถานะของระบบ และทุก 5 วงรอบของตัวกรอง สัญญาณตัวรับรู้จากทั้งระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์และสัญญาณตัวรับรู้ความเฉื่อยจะถูกใช้เพื่อประมาณตัวแปรสถานะของระบบ รูป 4.1 แสดงการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างสัญญาณตัวรับรู้ที่มีอัตราสุ่มต่างกัน โดย Z_{I} แทน $[z_1,\ z_2,\ z_3]^{\mathrm{T}}$ ในสมการ (2.43) และ Z_{V} แทน $[P_{\mathrm{xN}},\ P_{\mathrm{yN}},\ \theta_{\mathrm{z}}]^{\mathrm{T}}$ ซึ่งแทนสัญญาณตัวรับรู้จากตัวรับรู้ความเฉื่อย และคอมพิวเตอร์วิทัศน์ตามลำดับ



รูปที่ 4.1: เส้นเวลาแสดงการรวมสัญญาณตัวรับรู้

ตัวกรองคาลมานจะถูกนำมาใช้ทุกครั้งที่มีการสุ่มสัญญาณครั้งใหม่ เมื่อมีสัญญาณตัวรับรู้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์พร้อมกับตัวรับรู้ความเฉื่อย แบบจำลองคณิตศาสตร์ของสัญญาณขาออกเป็นแบบจำลองตามสมการ (2.43) และมีจาโคเบียนของสัญญาณขาออก Υ_{IV} ตามสมการ (3.16) และเมื่อมีสัญญาณสัญญาณจากตัวรับรู้ความเฉื่อยเพียงอย่างเดียว แบบจำลองคณิตศาสตร์ของสัญญาณขาออกเป็นแบบจำลองตามสมการต่อไปนี้

$$Z_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}}) & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_{\mathrm{B}} \\ \hline P_{\mathrm{N}} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cccc} & \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{B}_{3\times 4} & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{1\mathrm{c}} \\ V_{2\mathrm{c}} \\ V_{3\mathrm{c}} \\ V_{4\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \tag{4.1ก}$$

$$Z_{\mathrm{I}} = \mathcal{H}_{\mathrm{I}}(X, V_{\mathrm{C}}) + W_{3\times 1} \tag{4.1ข}$$

และเมทริกซ์จาโคเบียนของฟังก์ชัน $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}(X, V_{\mathrm{C}})$ มีค่าดังนี้

$$\Upsilon_{\mathrm{I}}(V_{\mathrm{B}}) \triangleq \left[\begin{array}{ccc|ccc} & \mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{A}_{\mathrm{Jac}} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.2}$$

รูป 4.2, 4.3, 4.6 และ 4.8 แสดงผลลัพธ์การใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายสำหรับหุ่นยนต์เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ ไม่มีสัญญาณรบกวนกระแสตรงและการประวิงเวลา (time delay) เส้นทึบสีน้ำเงิน (———) แทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ 'Vision' แสดงข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ เส้นประสีเขียว (-------) แทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ 'EKF-V' แสดงผลการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์เพียงอย่างเดียว เส้นประสีบานเย็น (- - - - -) แทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ 'EKF-I' แสดงผลลัพธ์ของตัวกรองคาลมานแบบขยายใช้ข้อมูลจากตัวรับรู้ความเฉื่อยเพียงอย่างเดียว เส้นประสีแดง (- - -) แทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ 'EKF-IV' แสดงผลลัพธ์ของตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยใช้ข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์และตัวรับรู้ความเฉื่อย และเส้นขีดสีเหลือง (—·—·-) แทนด้วยคำอธิบายสัญลักษณ์ 'UKF-IV' แสดงผลการใช้ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดรวมสัญญาณตัวรับรู้สองชนิดเข้าด้วยกัน โดยมีรูปขยายดังรูป 4.4, 4.5, 4.7 และ 4.9 โดยประมาณให้สัญญาณรบกวนกระบวนการ U มีความแปรปรวนดัง (4.3)

$$R_{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 2\times10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\times10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\times10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\times10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times10^{-10} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

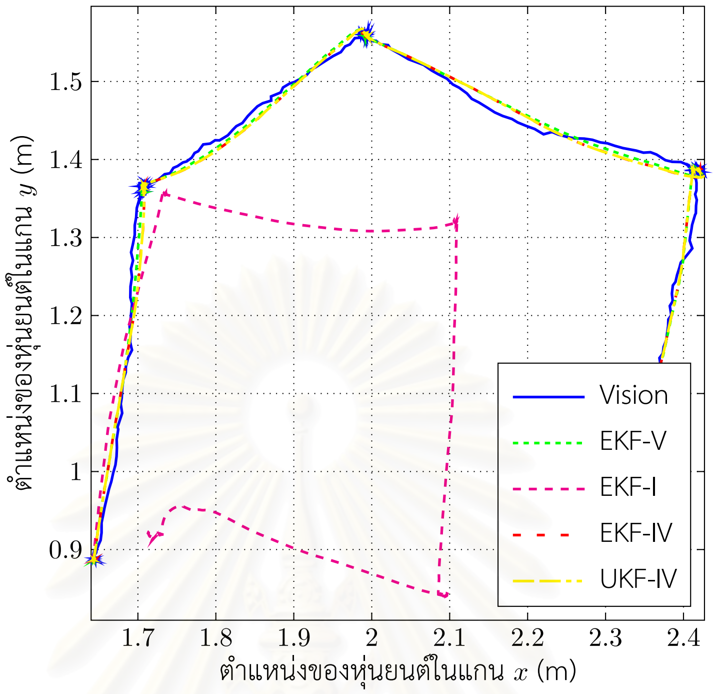
จากผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์นั้นช่วยลดความผิดพลาดสะสมที่เกิดจากการใช้ข้อมูลจากตัวรับรู้ความเฉื่อย โดยข้อมูลจากตัวกรองที่ใช้ทั้งตัวรับรู้ความเฉื่อยและระบบคอมพิว-เตอร์วิทัศน์เป็นข้อมูลที่รักษาระดับข้อมูลที่วัดได้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ และสามารถตามรอยข้อมูลความถี่สูงที่วัดได้จากตัวรับรู้ความเฉื่อย อาทิเช่น การเปลี่ยนแปลงความเร็วอย่างกระทันหันของตำแหน่งหุ่นยนต์ เป็นต้น กล่าวคือจากผลการทดลองจะเห็นได้ว่า ข้อมูลจากการรวมสัญญาณตัวรับรู้สองชนิดจะมีความชันของสัญญาณเหมือนกับข้อมูลจากการกรองโดยอาศัยตัวรับรู้ความเฉื่อยเพียงอย่างเดียว ในขณะเดียวกันก็ลู่เข้าสัญญาณที่ได้จากการกรองโดยอาศัยคอมพิวเตอร์วิทัศน์เพียงอย่างเดียว ซึ่งจัดเป็นข้อได้เปรียบของการรวมสัญญาณตัวรับรู้จากตัวรับรู้ความเฉื่อยและคอมพิวเตอร์วิทัศน์ นอกจากนั้นจะเห็นได้ว่าตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดยังคงให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับตัวกรองคาลมานแบบขยายอยู่ ถัดไปในบทนี้นำเสนอวิธีประมาณสัญญาณรบกวนกระแส-ตรงของข้อมูลที่ได้จากตัวรับรู้ความเฉื่อยด้วยสัญญาณจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ และการปรับปรุงข้อมูลจากคอม-พิวเตอร์วิทัศน์โดยการชดเชยการประวิงเวลาด้วยการทำนายตัวแปรสถานะล่วงหน้า

4.1 การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงของตัวรับรู้ความเฉื่อย

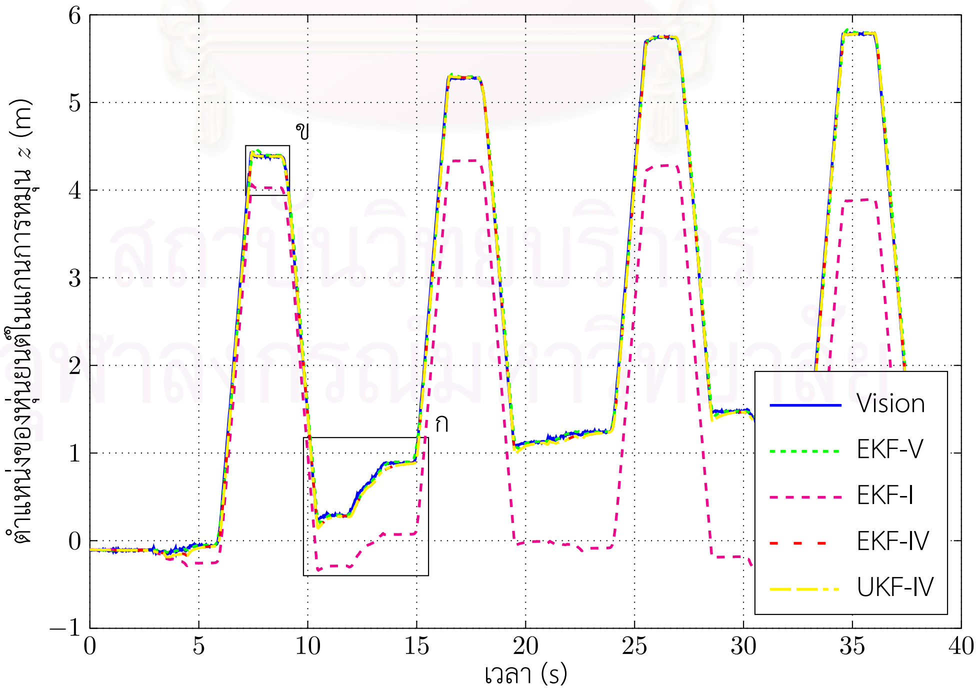
ในระหว่างที่มีสัญญาณจากตัวรับรู้ความเฉื่อยเพียงอย่างเดียวการประมาณตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์จะมีความผิดพลาดสะสม เกิดจากขั้นตอนทำนายตัวแปรสถานะของตัวกรองคาลมานซึ่งเสมือนการหาปริพันธ์ของสัญญาณจากไจโรสโกปและมาตรความเร่ง ดังนั้นเราจึงใช้การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงจากตำ-แหน่งและมุมจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์เพื่อลดความผิดพลาดสะสมนี้ โดยรวมสัญญาณรบกวนกระแสตรงของไจโรสโกปและมาตรความเร่งเข้าในตัวแปรสถานะ X ค่าที่ประมาณได้ถูกใช้ในแบบจำลองของสัญญาณขาออกในตัวกรอง ตัวแปรสถานะ X และเมทริกซ์ $\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}$ จึงถูกเปลี่ยนเป็น

$$X_{\mathrm{dc}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} V_{\mathrm{xB}} & V_{\mathrm{yB}} & \omega_{\mathrm{z}} & P_{\mathrm{xN}} & P_{\mathrm{yN}} & \theta_{\mathrm{z}} & d_{\mathrm{ax}} & d_{\mathrm{ay}} & d_{\mathrm{gz}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.4ก}$$

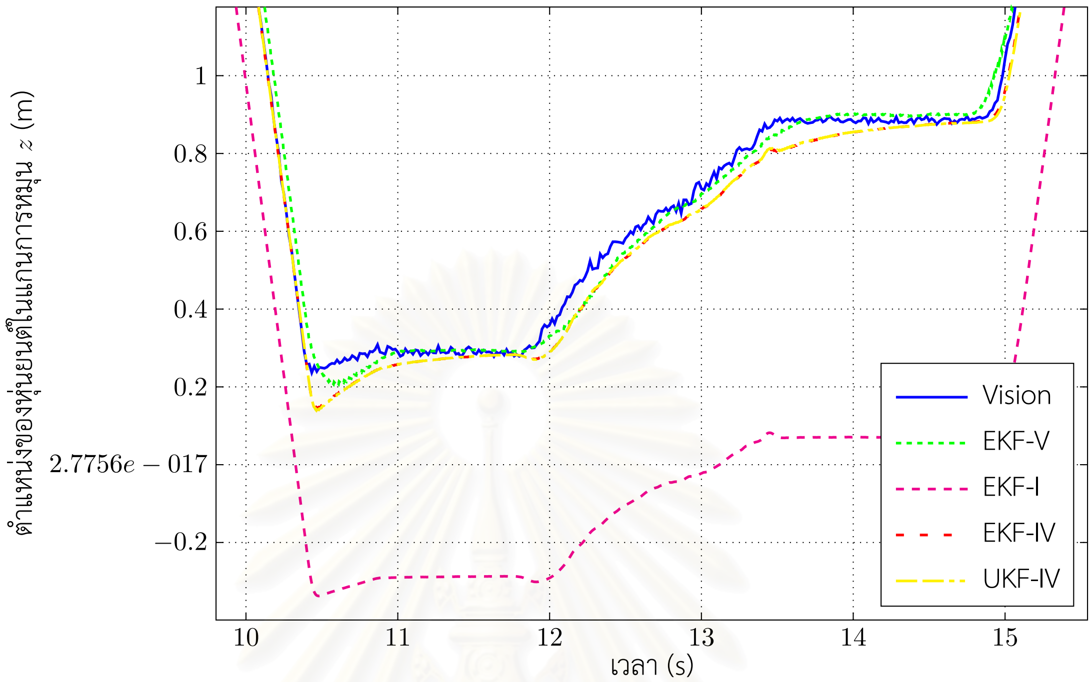
$$\mathbb{F}_{(\mathrm{dc})} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}(V_{\mathrm{B}}) & 0_{6\times3} \\ 0_{3\times6} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_{\mathrm{Jac(dc)}} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}(V_{\mathrm{B}}) & 0_{6\times3} \\ 0_{3\times6} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \tag{4.4ข}$$



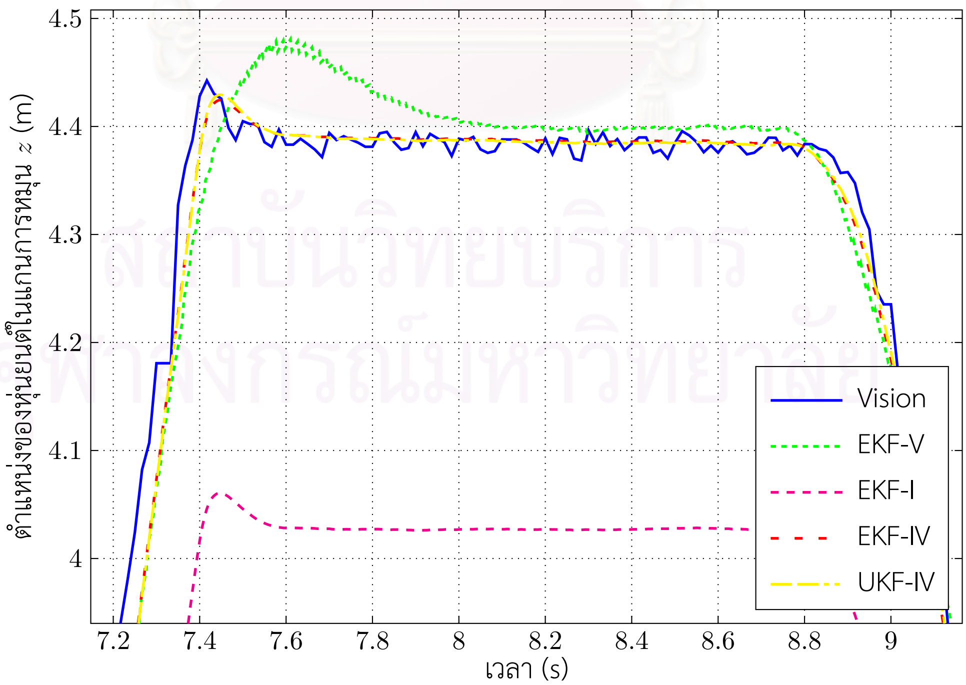
รูปที่ 4.2: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในระนาบ $x-y$



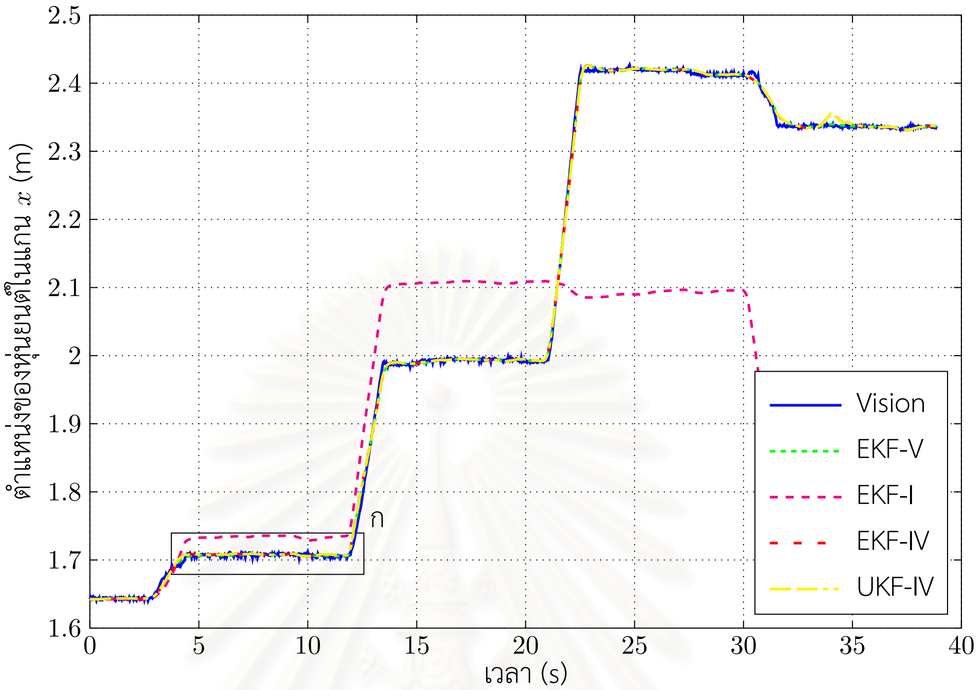
รูปที่ 4.3: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในการหมุน z



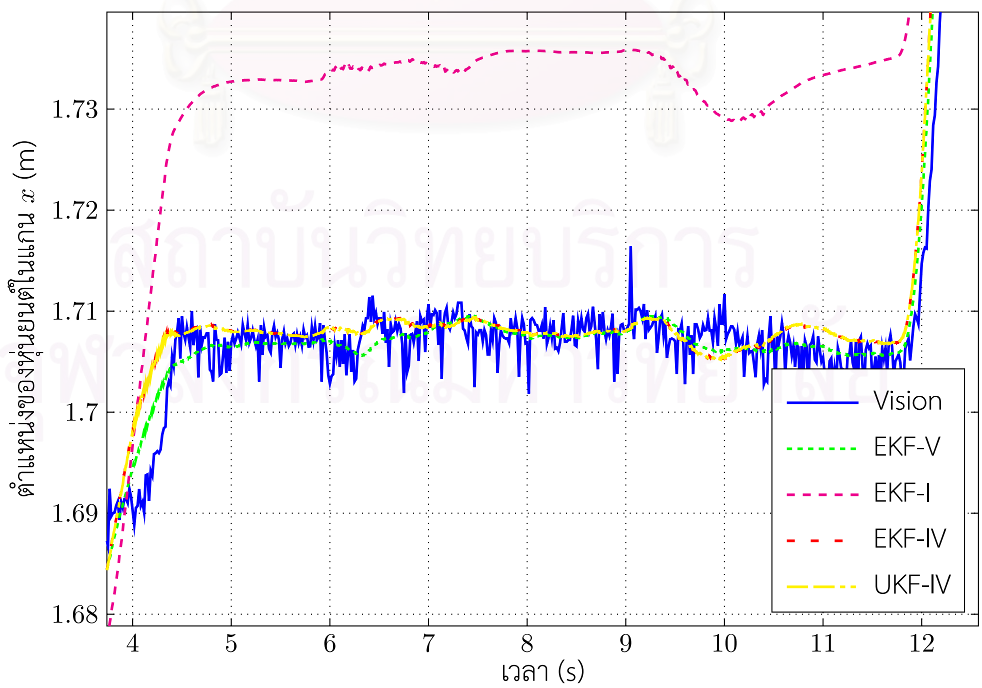
รูปที่ 4.4: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในการหมุน z



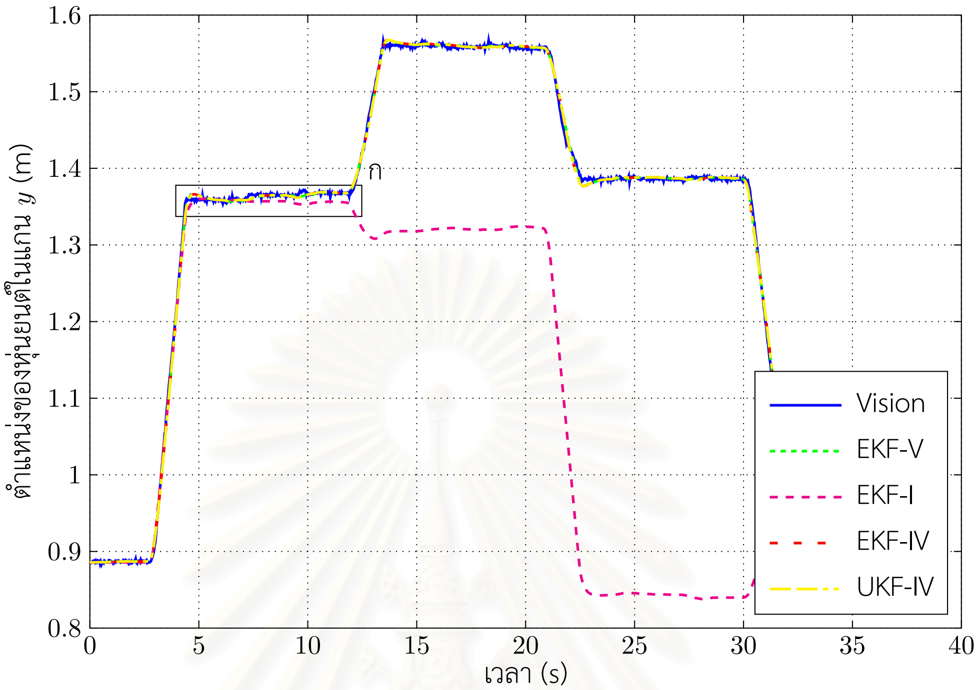
รูปที่ 4.5: ภาพขยาย ข ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในการหมุน z



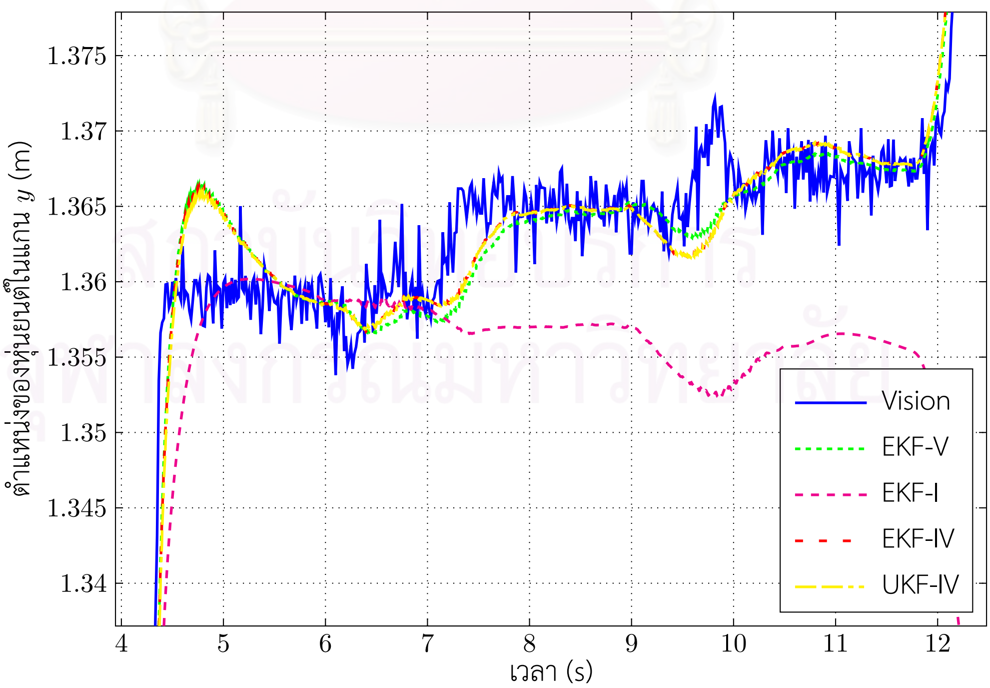
รูปที่ 4.6: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในแกน x



รูปที่ 4.7: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในแกน x



รูปที่ 4.8: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในแกน y



รูปที่ 4.9: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับหุ่นยนต์ในแกน y

โดยที่ $d_{\mathrm{ax}}, d_{\mathrm{ay}}$ แทนสัญญาณรบกวนกระแสตรงของมาตรความเร่งแกน x, y ส่วน d_{gz} แทนสัญญาณรบกวนกระแสตรงของไจโรสโกป ทั้งสามตัวแปรมีแบบจำลองคณิตศาสตร์เป็นสัญญาณคงตัว เมทริกซ์ $\mathbb{H}_{\mathrm{IV}}$ มีผลของสัญญาณรบกวนกระแสตรงเพิ่มดังนี้

$$\mathbb{H}_{\mathrm{IV(dc)}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} \multicolumn{3}{c:}{\multirow{2}{*}{$\mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{A}(\omega_{\mathrm{z}})$}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.5}$$

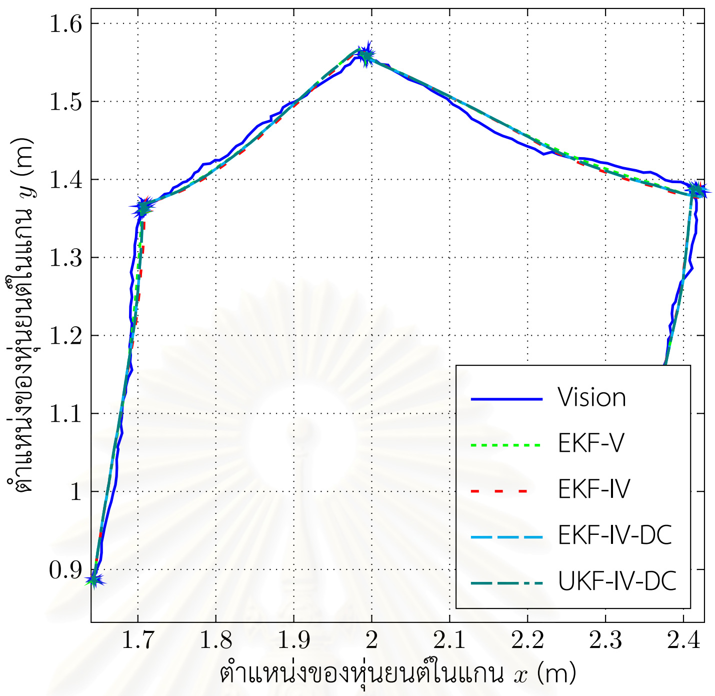
ส่งผลให้เมทริกซ์จาโคเบียนของฟังก์ชัน $\mathcal{H}_{\mathrm{IV(dc)}}(X_{\mathrm{dc}}, V_{\mathrm{C}})$ มีลักษณะดังนี้

$$\Upsilon_{\mathrm{IV(dc)}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} \multicolumn{3}{c:}{\multirow{2}{*}{$\mathbb{R}_{\mathrm{a}}\mathbb{A}_{\mathrm{Jac}}$}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.6}$$

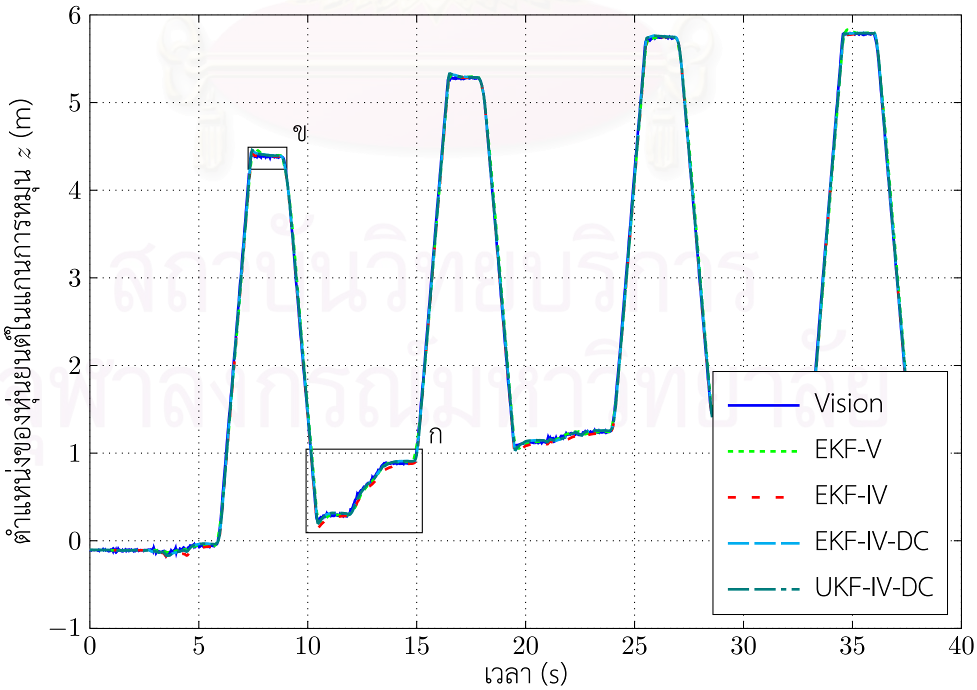
รูป 4.10, 4.11, 4.14 และ 4.16 เป็นกราฟแสดงผลลัพธ์จากการประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงระหว่างการใช้ตัวกรองคาลมานสำหรับประมาณตัวแปรสถานะ โดยใช้ทั้งข้อมูลจากตัวรับรู้ความเฉื่อยและจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ โดยแบบจำลองคณิตศาสตร์ใช้สัญญาณรบกวนกระแสตรง U_{dc} ที่มีความแปรปรวนดัง (4.7) การทดลองเปรียบเทียบระหว่าง การใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ (เส้นประสีเขียว ------- คำอธิบายสัญลักษณ์ 'EKF-V') การใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับสัญญาณจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์และตัวรับรู้ความเฉื่อย (เส้นประสีแดง - - - คำอธิบายสัญลักษณ์ 'EKF-IV') การใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายกับสัญญาณจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์และตัวรับรู้ความเฉื่อยโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรง (เส้นประสีฟ้า ——— คำอธิบายสัญลักษณ์ 'EKF-IV-DC') และการใช้ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดกับข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์และตัวรับรู้ความเฉื่อยโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงด้วย (เส้นประจุดสีเขียวเข้ม ——-- ใช้คำอธิบายสัญญลักษณ์ 'UKF-IV-DC')

$$R = \begin{bmatrix} R_{\mathrm{X}} & 0 \\ 0 & R_{\mathrm{dc}} \end{bmatrix} \qquad R_{\mathrm{dc}} = \begin{bmatrix} 2\times10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 2\times10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 2\times10^{-8} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

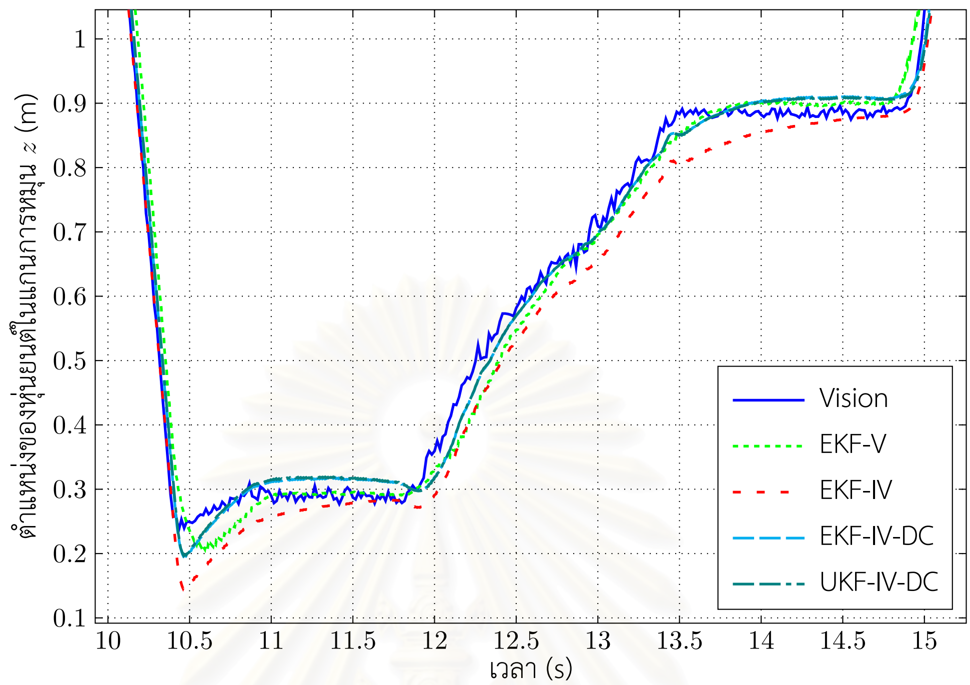
ภาพขยายของการทดลองในรูป 4.12, 4.13, 4.15 และ 4.17 แสดงให้เห็นว่าการประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรง ส่งผลให้แนวโน้มของสัญญาณที่ได้จากการกรองใกล้เคียงกับสัญญาณที่ใช้การประมาณจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์อย่างเดียวมากขึ้น แต่ยังคงมีความชันของสัญญาณเช่นเดียวกับการกรองโดยไม่ใช้การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรง กล่าวคือมีแนวโน้มอยู่ระหว่างการประมาณโดยใช้สัญญาณจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์เพียงอย่างเดียวและการประมาณโดยใช้สัญญาณจากตัวรับรู้ทั้งสองชนิด ซึ่งดีกว่าการประมาณโดยไม่มีการประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงในบางช่วงเวลาและให้ผลที่แย่กว่าในบางช่วงเวลา อย่างไรก็ตาม การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงมีข้อได้เปรียบที่สามารถรับรู้ความผิดพลาดของตัวรับรู้ความเฉื่อยที่อาจ



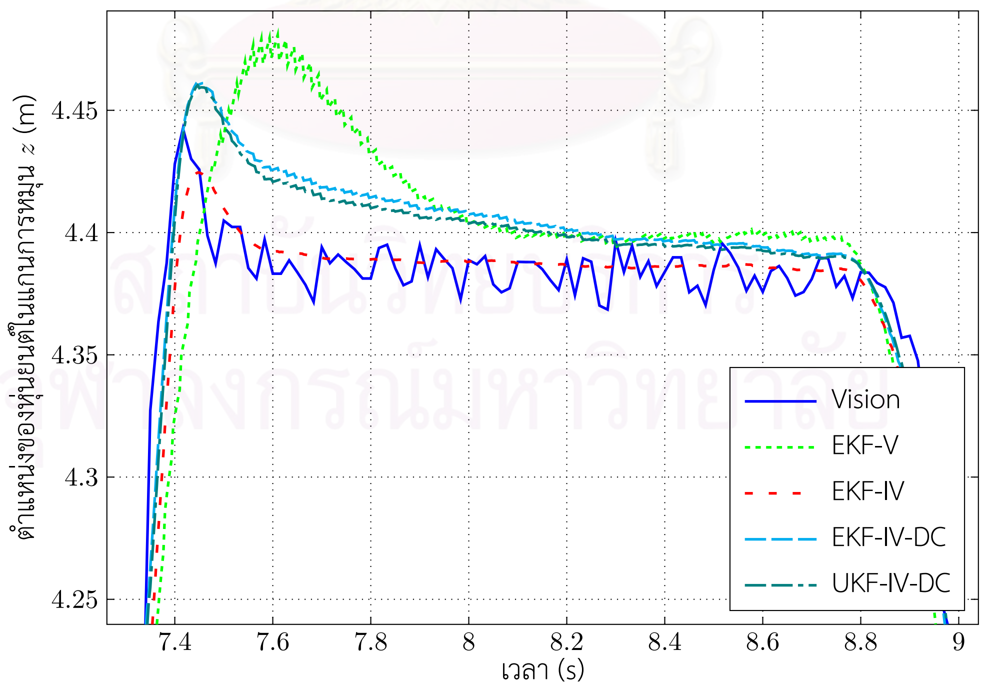
รูปที่ 4.10: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในระนาบ $x-y$



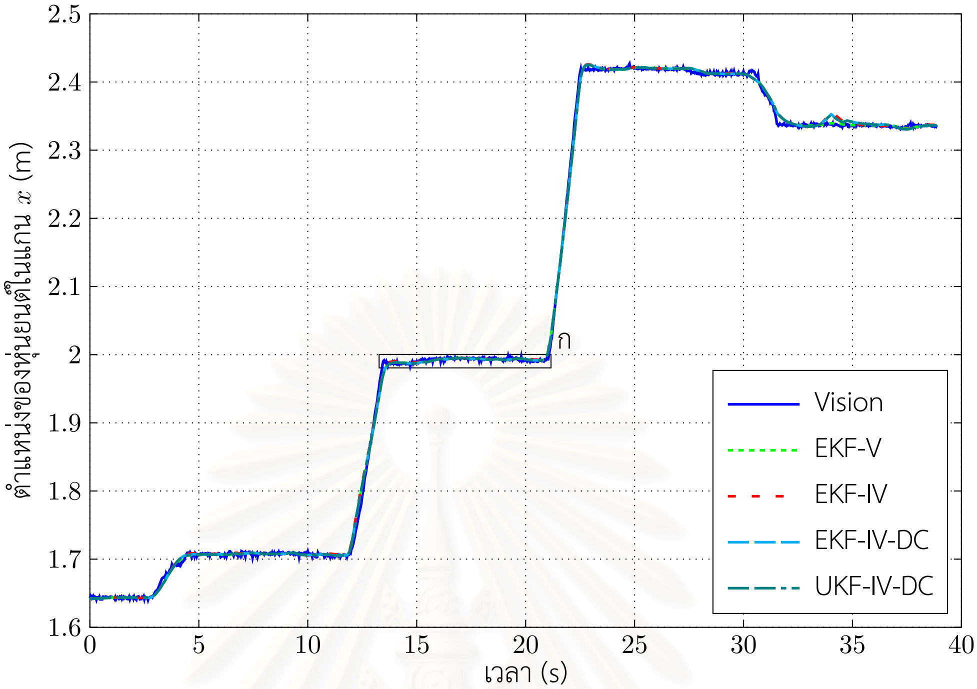
รูปที่ 4.11: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในการหมุน z



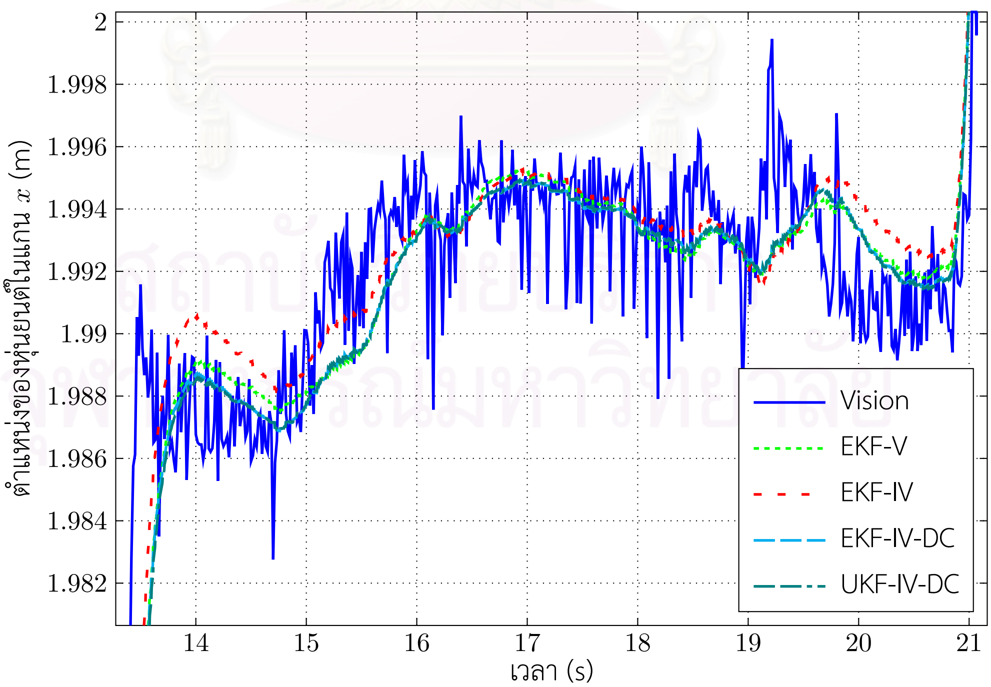
รูปที่ 4.12: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในการหมุน z



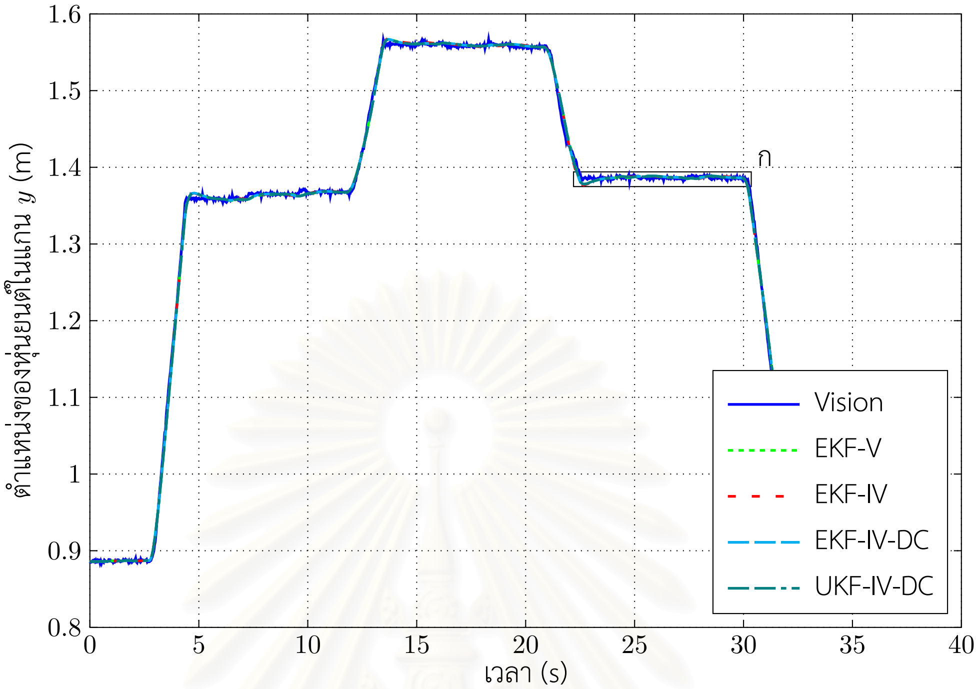
รูปที่ 4.13: ภาพขยาย ข ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในการหมุน z



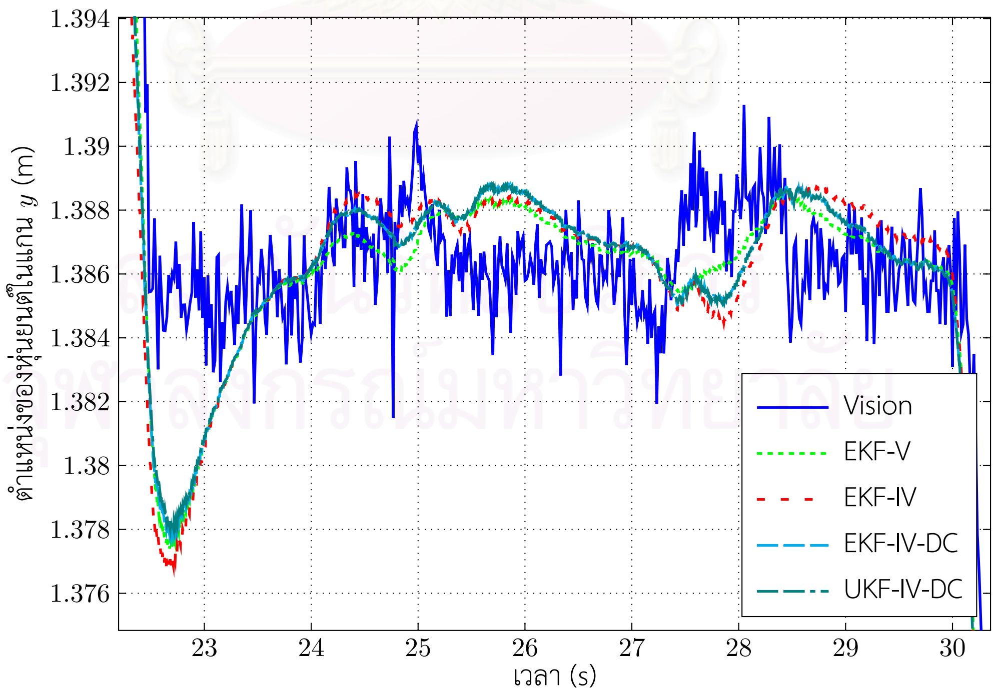
รูปที่ 4.14: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในแกน x



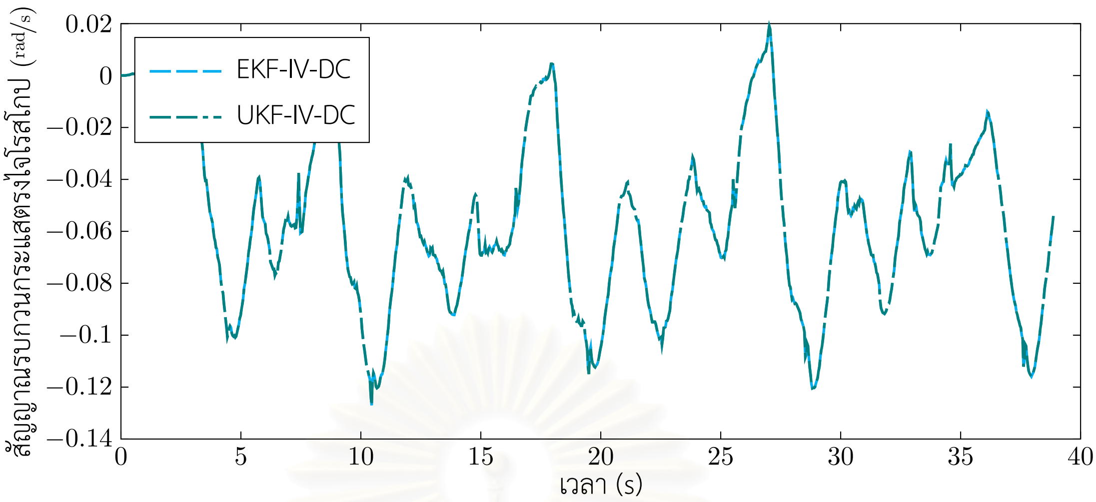
รูปที่ 4.15: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในแกน x



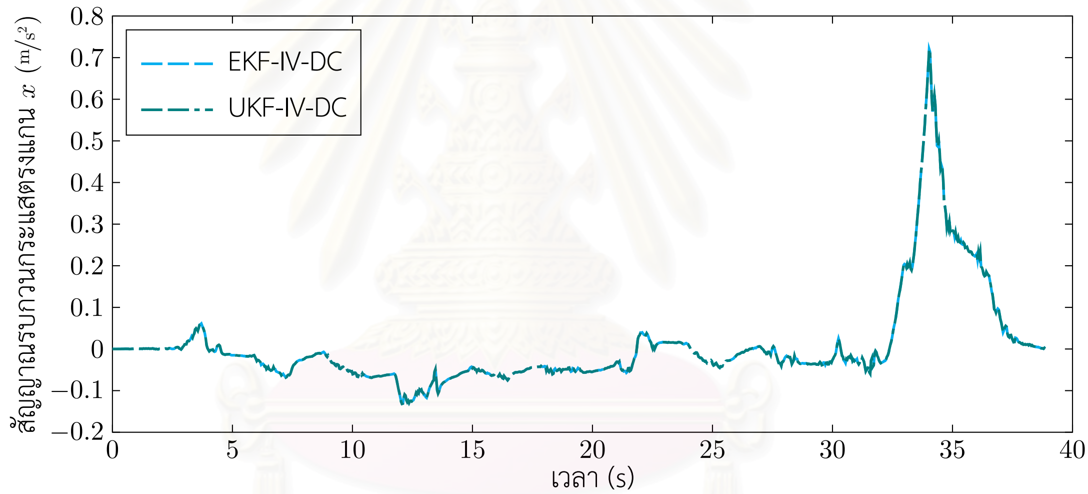
รูปที่ 4.16: ผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในแกน y



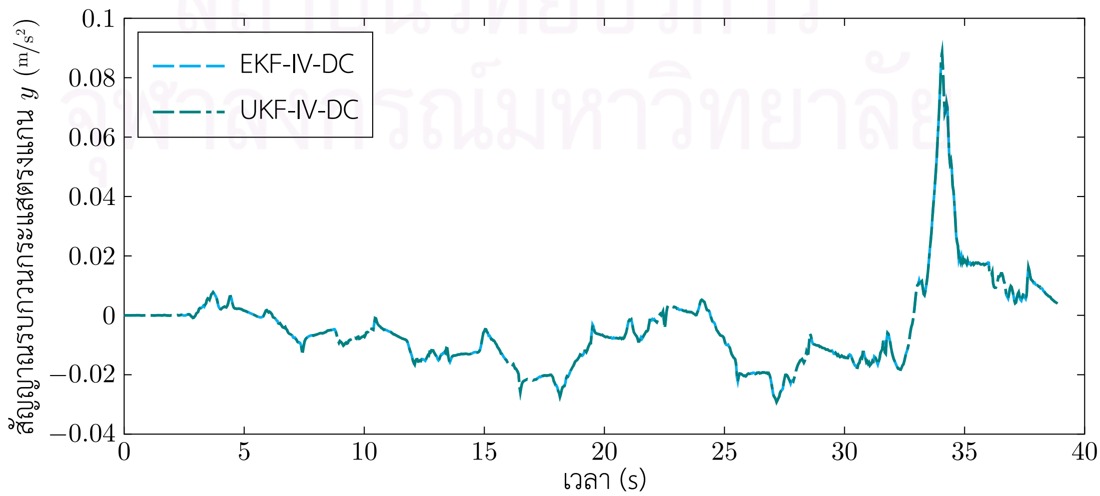
รูปที่ 4.17: ภาพขยาย ก ของผลลัพธ์จากการใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยายโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงกับหุ่นยนต์ในแกน y



รูปที่ 4.18: สัญญาณรบกวนกระแสตรงของไจโรสโกปที่ได้จากการประมาณ



รูปที่ 4.19: สัญญาณรบกวนกระแสตรงของมาตรความเร่งในแกน x ที่ได้จากการประมาณ



รูปที่ 4.20: สัญญาณรบกวนกระแสตรงของมาตรความเร่งในแกน y ที่ได้จากการประมาณ

ได้รับจากการกระทบกันระหว่างหุ่นยนต์กับสิ่งกีดขวาง ดังตัวอย่างที่เวลา 35 วินาที ค่าสัญญาณรบกวนกระแส-ตรงของไจโรสโกปและมาตรความเร่งที่ได้จากการประมาณถูกแสดงไว้ในรูป 4.18, 4.19 และ 4.20 ตามลำดับ นอกจากนั้นการประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงยังใช้สำหรับวิเคราะห์แนวโน้มการรบกวนสัญญาณในตัว-รับรู้ความเฉื่อยเช่น แรงดันของตัวรับรู้ความเฉื่อยที่ลดลงขณะที่หุ่นยนต์มีการใช้พลังงานสูง เป็นต้น ตัวกรองคาล-มานแบบขยายยังคงให้ผลใกล้เคียงกับตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด

4.2 การรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบแยกการรวมสัญญาณตัวรับรู้

การรวมสัญญาณสัญญาณตัวรับรู้วิธีหนึ่งที่กล่าวไว้ต้นบทนี้คือการรวมสัญญาณตัวรับรู้โดยการรวมแบบจำลองคณิตศาสตร์ของสัญญาณขาออกของตัวรับรู้ต่างชนิดเข้าด้วยกัน เป็นแบบจำลองสัญญาณขาออกที่แทนด้วยเมทริกซ์เดียว นอกจากวิธีดังกล่าวยังมีการรวมสัญญาณตัวรับรู้อีกหลายวิธี [15] วิธีที่ถูกเลือกใช้ เป็นการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบแยกการรวมสัญญาณตัวรับรู้ (track-to-track fusion) ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสมเนื่องจากเมื่อประยุกต์ใช้กับการชดเชยการประวิงเวลาแล้วมีความซับซ้อนของการคำนวณน้อยเมื่อเทียบกับการรวมสัญ-ญาณตัวรับรู้ชนิดอื่น การรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบแยกการรวมสัญญาณตัวรับรู้ใช้การรวมสัญญาณจากผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณตัวแปรสถานะโดยใช้ตัวกรองคาลมานจากตัวรับรู้สองชนิด หลักการรวมสัญญาณตัวรับรู้ชนิดนี้แสดงไว้ในรูป 4.21

ในขั้นตอนการทำนายตัวแปรสถานะ $\hat{X}^-_{(k)}, P^-_{\mathrm{ee}(k)}$ นั้นมีขั้นตอนเหมือนการทำตัวกรองคาลมาน จากนั้นใช้หลักการเชิงตั้งฉากเพื่อหา $\hat{X}^1_{(k)}, P^1_{\mathrm{ee}(k)}$ และ $\hat{X}^2_{(k)}, P^2_{\mathrm{ee}(k)}$ แยกส่วนสำหรับตัวรับรู้สองชนิด ในที่นี้คือระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์และตัวรับรู้ความเฉื่อย ผลลัพธ์สองชุดถูกรวมเข้าด้วยกันด้วยสมการ (4.8) และ (4.9)

$$\hat{X}_{(k)} = \hat{X}^1_{(k)} + \left(P^1_{\mathrm{ee}(k)} - P^{12}_{\mathrm{ee}(k)}\right)\left(P^1_{\mathrm{ee}(k)} + P^2_{\mathrm{ee}(k)} - (P^{12}_{\mathrm{ee}(k)} + P^{21}_{\mathrm{ee}(k)})\right)^{-1}\left[\hat{X}^2_{(k)} - \hat{X}^1_{(k)}\right] \tag{4.8}$$

$$P_{(k)} = P^1_{(k)} - \left(P^1_{\mathrm{ee}(k)} - P^{12}_{\mathrm{ee}(k)}\right)\left(P^1_{\mathrm{ee}(k)} + P^2_{\mathrm{ee}(k)} - (P^{12}_{\mathrm{ee}(k)} + P^{21}_{\mathrm{ee}(k)})\right)^{-1}\left(P^1_{\mathrm{ee}(k)} - P^{12}_{\mathrm{ee}(k)}\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.9}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
P^{12}_{\mathrm{ee}(k)} &= \mathrm{E}\left[e^1_{(k)}\right]\left[e^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^1_{(k)}\right]\left[X_{(k)} - \hat{X}^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^-_{(k)} - K^1_{(k)}\left(Z^1_{(k)} - \hat{Z}^1_{(k)}\right)\right]\left[X_{(k)} - \hat{X}^-_{(k)} - K^2_{(k)}\left(Z^2_{(k)} - \hat{Z}^2_{(k)}\right)\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^-_{(k)}\right]\left[X_{(k)} - \hat{X}^-_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} - \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^-_{(k)}\right]\left[Z^2_{(k)} - \hat{Z}^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}}\left[K^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&\quad - K^1_{(k)}\mathrm{E}\left[Z^1_{(k)} - \hat{Z}^1_{(k)}\right]\left[X_{(k)} - \hat{X}^-_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&\quad + K^1_{(k)}\left[Z^1_{(k)} - \hat{Z}^1_{(k)}\right]\left[Z^2_{(k)} - \hat{Z}^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}}\left[K^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= P^-_{\mathrm{ee}} - P^2_{\mathrm{ez}}\left[K^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} - K^1_{(k)}P^1_{\mathrm{ze}} + K^1_{(k)}P^{12}_{\mathrm{zz}}\left[K^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= P^-_{\mathrm{ee}} - P^-_{\mathrm{ee}}\Upsilon^{\mathrm{T}}_2\left[K^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} - K^1_{(k)}\Upsilon_1 P^-_{\mathrm{ee}} + K^1_{(k)}\Upsilon_1 P^-_{\mathrm{ee}}\Upsilon^{\mathrm{T}}_2\left[K^2_{(k)}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

สำหรับตัวกรองคาลมานแบบขยายความแปรปรวน P^{12}_{zz} นั้นหาได้จากสมการ (4.11) และสำหรับตัวกรองคาล-มานแบบแปลงจุดความแปรปรวน P^{12}_{zz} หาได้จากสมการ (4.12)

แบบขยาย $$P^{12}_{\mathrm{zz}} = \Upsilon_1 P^-_{\mathrm{ee}}\Upsilon^{\mathrm{T}}_2 \tag{4.11}$$

แบบแปลงจุด $$P^{12}_{\mathrm{zz}} = \sum_{j=0}^{2n}\mathcal{W}_j\left(\mathcal{Z}^1_{j(k)} - \hat{z}^1_{(k)}\right)\left(\mathcal{Z}^2_{j(k)} - \hat{z}^2_{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.12}$$

สมการ (4.8) นั้นมีที่มาจากการใช้หลักการเชิงตั้งฉากเพื่อประมาณ e^1 ว่าจะเบี่ยงเบนไปเท่าใดเมื่อทราบความต่าง $e^1 - e^2$ จากหลักการเชิงตั้งฉากจะได้ว่า

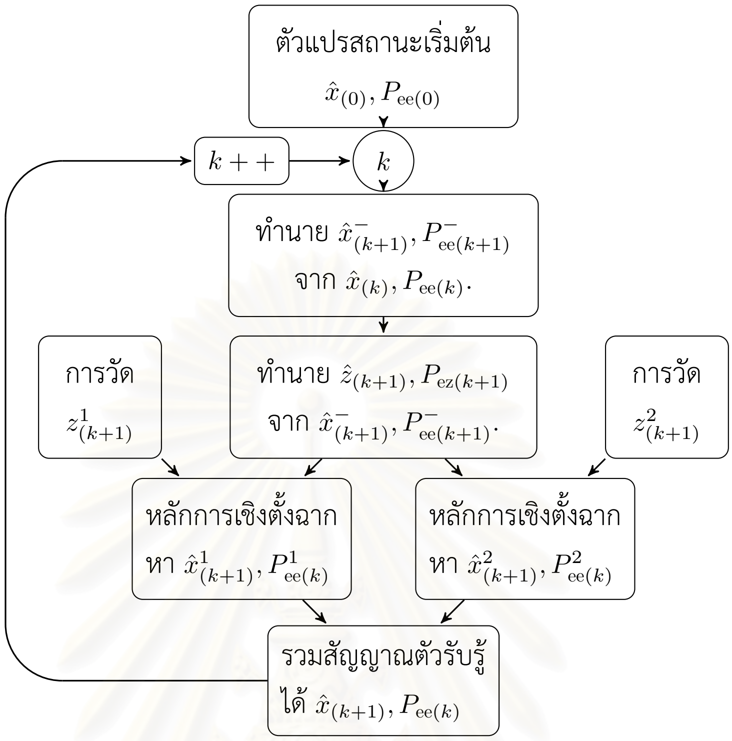
$$\begin{aligned}\hat{X} &= \hat{X}^1 + P_{\mathrm{e}^1(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)} P^{-1}_{(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)} \left[e^1 - e^2\right] \\ &= \hat{X}^1 + P_{\mathrm{e}^1(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)} P^{-1}_{(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)} \left[X - \hat{X}^1 - X + \hat{X}^2\right] \\ &= \hat{X}^1 + \left[P^1_{\mathrm{ee}} - P^{12}_{\mathrm{ee}}\right] \left[P^1_{\mathrm{ee}} + P^2_{\mathrm{ee}} - P^{12}_{\mathrm{ee}} - P^{21}_{\mathrm{ee}}\right]^{-1} \left[\hat{X}^2 - \hat{X}^1\right]\end{aligned} \tag{4.13}$$

การรวมสัญญาณตัวรับรู้นี้ให้ผลการกรองเหมือนกับการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบแรก แต่จำเป็นสำหรับการชดเชยการประวิงเวลาในหัวข้อถัดไป

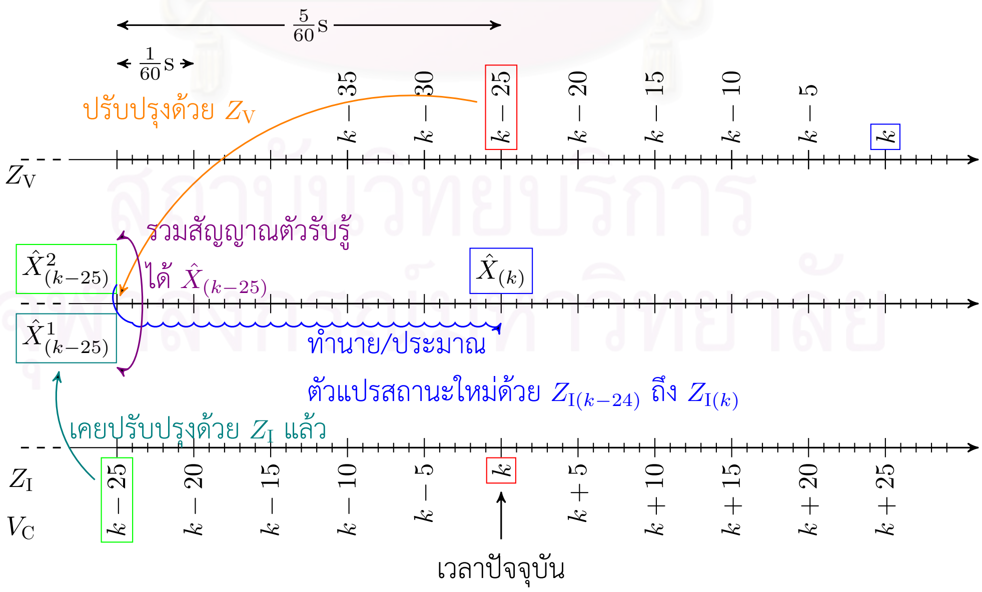
4.3 การชดเชยการประวิงเวลาสำหรับตัวรับรู้ต่างชนิด

สำหรับระบบของหุ่นยนต์ที่ศึกษานี้ ตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์จากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์นั้นมีการประวิงเวลาของข้อมูลอยู่ 5 กรอบภาพ ($t_{\mathrm{d}} = 5/60$ วินาที) ซึ่งเกิดจากความล่าช้าของการประมวลผลภาพและการรับส่งข้อมูลระหว่างคอมพิวเตอร์และหุ่นยนต์ ทำให้ข้อมูลที่หุ่นยนต์ได้รับจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์เป็นตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์เมื่อ 5/60 วินาทีก่อนหน้า ถ้าหากหุ่นยนต์เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 2 เมตร/วินาที ค่าตำแหน่งจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์จะผิดพลาดจากค่าจริงประมาณ 16.7 เซนติเมตร ซึ่งผิดพลาดมากเมื่อเทียบกับขนาดของหุ่นยนต์ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 18 เซนติเมตร ดังนั้นการทำนายตัวแปรสถานะจึงถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อชดเชยการประวิงเวลา การชดเชยวิธีหนึ่งมีหลักการดังแสดงไว้ในรูป 4.22 มีขั้นตอนการทำงานคือ ในขั้นแรกตัวกรองคาลมานย้อนเวลากลับไปที่เวลา $k - t_{\mathrm{d}}$ จากนั้นนำ $Z_{\mathrm{V}(k-t_{\mathrm{d}})}$ ที่วัดได้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ที่เวลาปัจจุบันมารวมสัญญาณตัวรับรู้เพื่อปรับปรุง $\hat{X}^1_{(k-t_{\mathrm{d}})}$ ที่ได้จากตัวรับรู้ความเฉื่อย ได้ผลลัพธ์เป็น $\hat{X}_{(k-t_{\mathrm{d}})}$ ซึ่งถูกนำมาใช้เป็นสถานะตั้งต้นตัวใหม่ จากนั้นจึงใช้การทำนายตัวแปรสถานะตั้งแต่เวลา $k - t_{\mathrm{d}}$ ถึงเวลา k เพื่อทำนาย $\hat{X}^-_{(k)}$ ตัวใหม่ หรือใช้การกรองซ้ำ (re-filtering) ตั้งแต่เวลา $k - t_{\mathrm{d}}$ ถึงเวลา k เพื่อประมาณ $\hat{X}^-_{(k)}$ ตัวใหม่ จากนั้นจึงใช้หลักการเชิงตั้งฉากเพื่อประมาณ $\hat{X}^1_{(k)}$ ร่วมกับ $Z_{\mathrm{I}(k)}$ และในช่วงเวลาที่ไม่มีข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์จะไม่มีการรวมสัญญาณตัวรับรู้เกิดขึ้น ข้อด้อยของวิธีนี้คือทุกครั้งที่มีการรวมสัญญาณตัวรับรู้จะต้องประมาณตัวแปรสถานะใหม่ด้วย Z_{I} เดิมในอดีต ตั้งแต่เวลา $k - t_{\mathrm{d}}$ ถึง k เมื่อมีการประวิงเวลาอยู่ 25 วงรอบของตัวกรอง การคำนวณจะต้องใช้เวลา 25 เท่าทุกครั้งที่มีการรวมสัญญาณตัวรับรู้ ซึ่งโดยเฉลี่ยทั้งกระบวนการแล้วใช้เวลามากกว่าการรวมสัญญาณตัวรับรู้ที่ไม่มีการประวิงเวลาถึง 5 เท่า การรวมสัญญาณตัวรับรู้นั้นทำได้ทั้งการรวมแบบจำลองคณิตศาสตร์ขาออก และแบบแยกการรวมสัญญาณตัวรับรู้ โดยใช้ได้ทั้งตัวกรองคาลมานแบบขยายและแบบแปลงจุด วิธีนี้ถูกเรียกว่าการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำ (backward fusion and re-filtering)

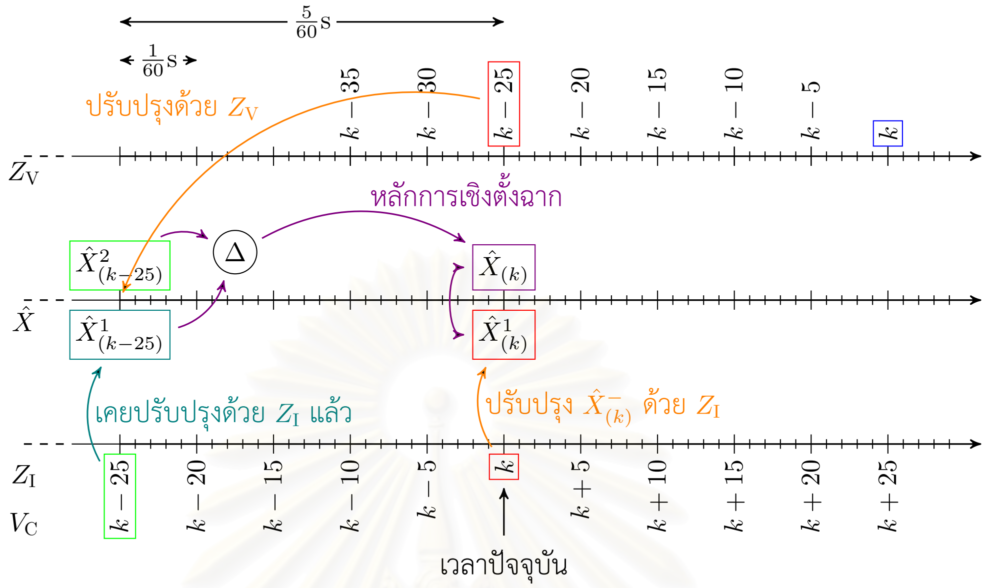
ภาพ 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31 และ 4.32 แสดงการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและภาพขยาย เปรียบเทียบการทำนายตัวแปรสถานะระหว่างการกรองซ้ำ (เส้นประสีเขียว - - - - - คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘EKF-Td-Pre’) การใช้การประมาณตัวแปรสถานะระหว่างการกรองซ้ำ (เส้นประสีเขียวเข้ม - - - คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘EKF-Td-Fus’) การทำนายตัวแปรสถานะระหว่างการกรองซ้ำโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระ-แสตรงด้วย (เส้นประสีแดง ——— คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘EKF-Td-Pre-DC’) และการใช้การประมาณตัวแปรสถานะระหว่างการกรองซ้ำโดยประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรง (เส้นประสีส้ม ——— คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘EKF-Td-Fus-DC’) โดยเปรียบเทียบกับค่าจริงจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ (เส้นทึบสีน้ำเงิน ——— คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Real-Vision’) และค่าจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ที่ป้อนให้หุ่นยนต์โดยมีการประวิงเวลา 5 กรอบภาพ (เส้นประสีฟ้า ------- คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Delay-Vision’) จากการทดลองจะเห็นได้ว่า การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงช่วยให้ตัวกรองตามรอยการเปลี่ยนแปลงของ



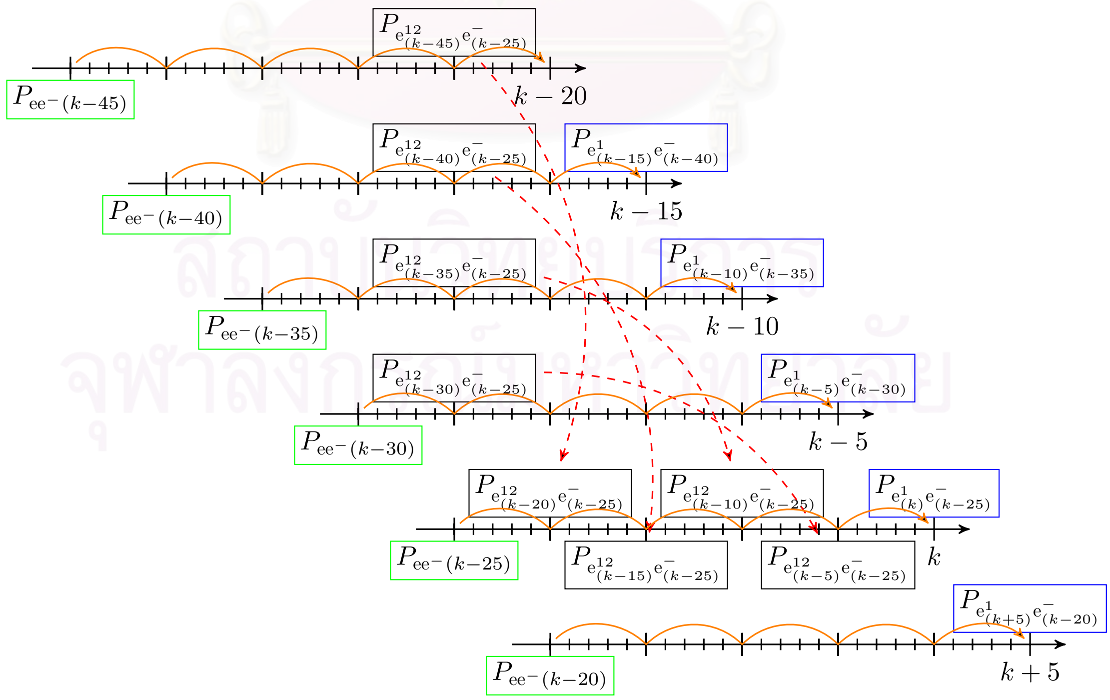
รูปที่ 4.21: แผนภาพการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีแยกการรวมสัญญาณตัวรับรู้ร่วมกับตัวกรองคาลมาน



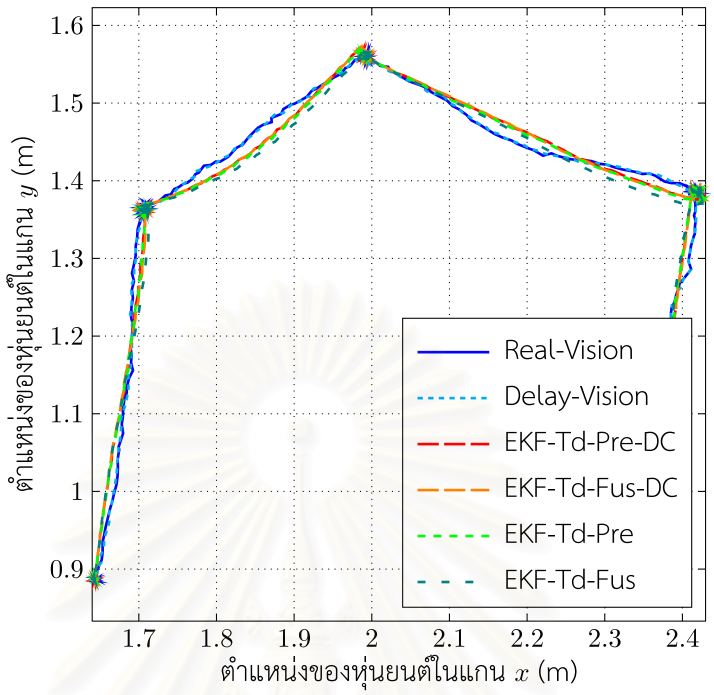
รูปที่ 4.22: เส้นเวลาแสดงการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบแยกการรวมสัญญาณตัวรับรู้เพื่อชดเชยการประวิงเวลาแบบแรก



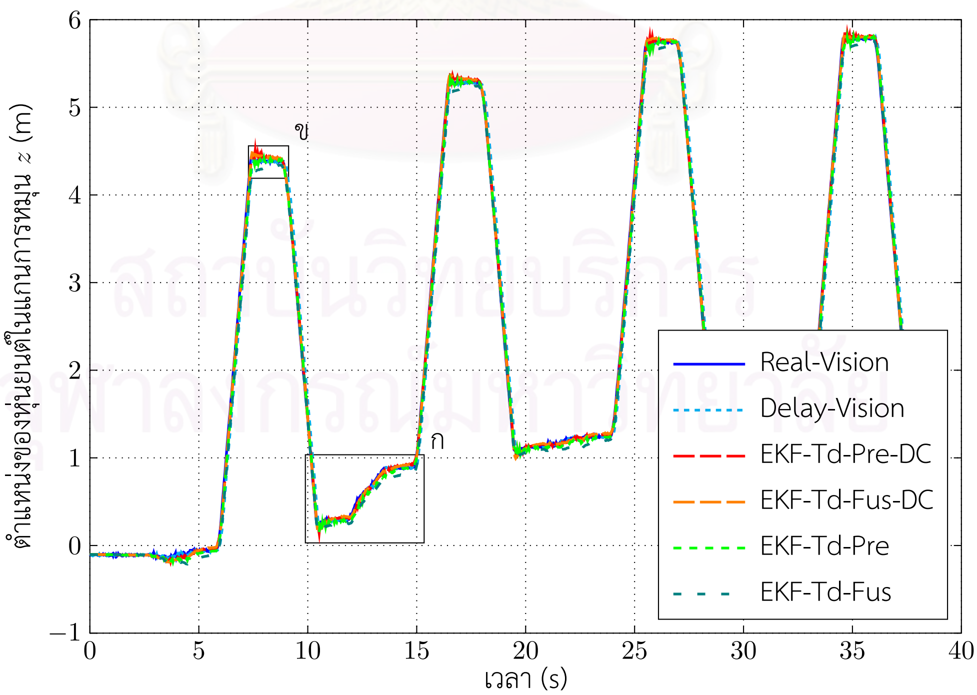
รูปที่ 4.23: เส้นเวลาแสดงการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบแยกการรวมสัญญาณตัวรับรู้เพื่อชดเชยการประวิงเวลาแบบที่สอง



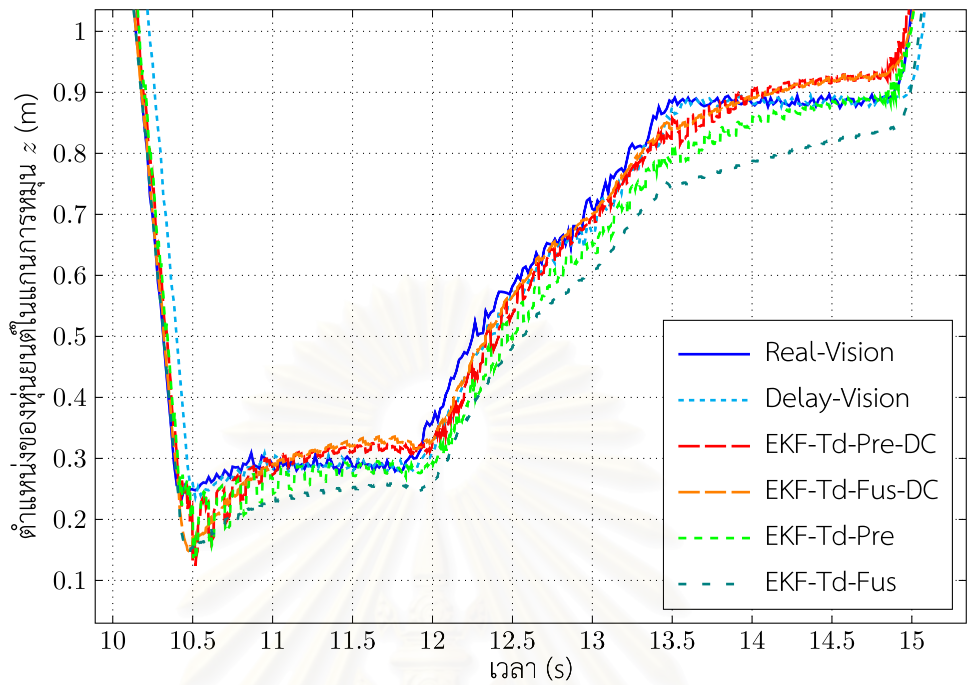
รูปที่ 4.24: แผนภาพแสดงการคำนวณความแปรปรวนที่จำเป็นสำหรับการรวมสัญญาณตัวรับรู้ ณ เวลา k



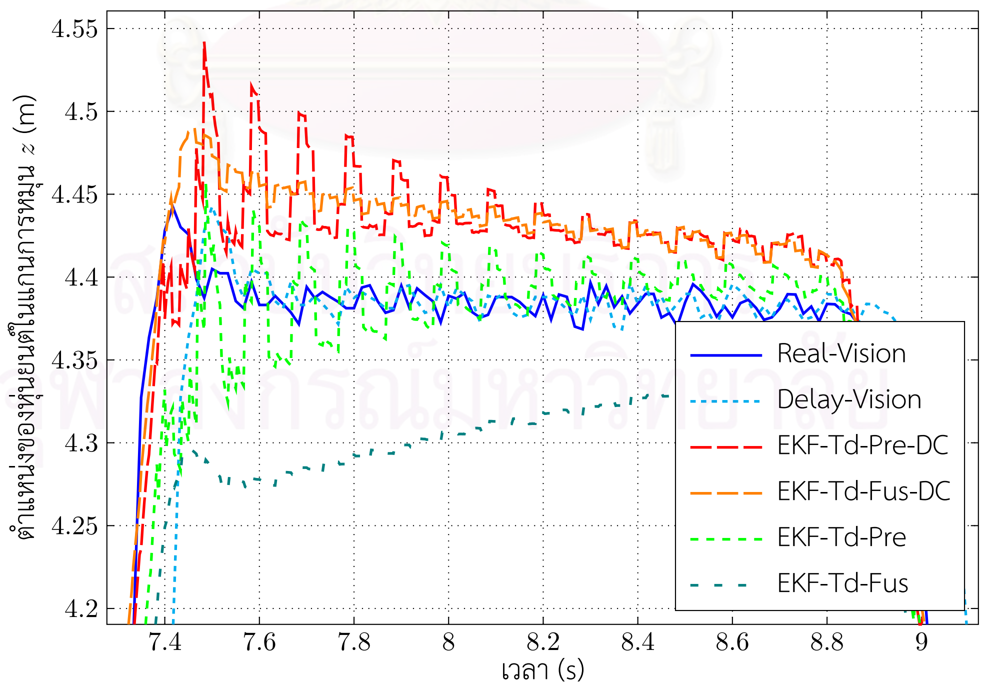
รูปที่ 4.25: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในระนาบ $x-y$



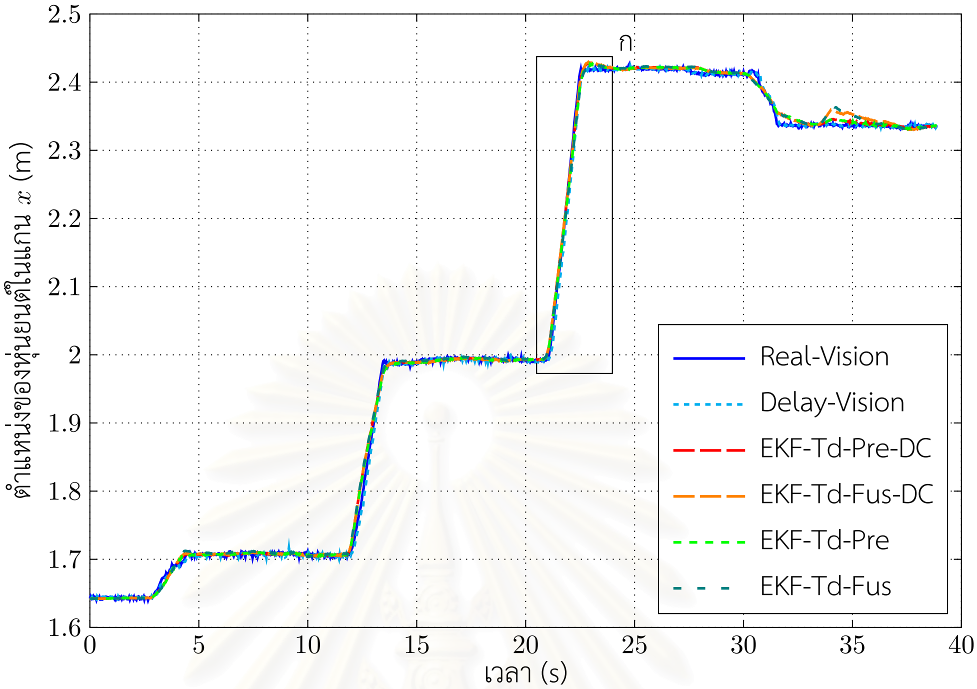
รูปที่ 4.26: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในการหมุน z



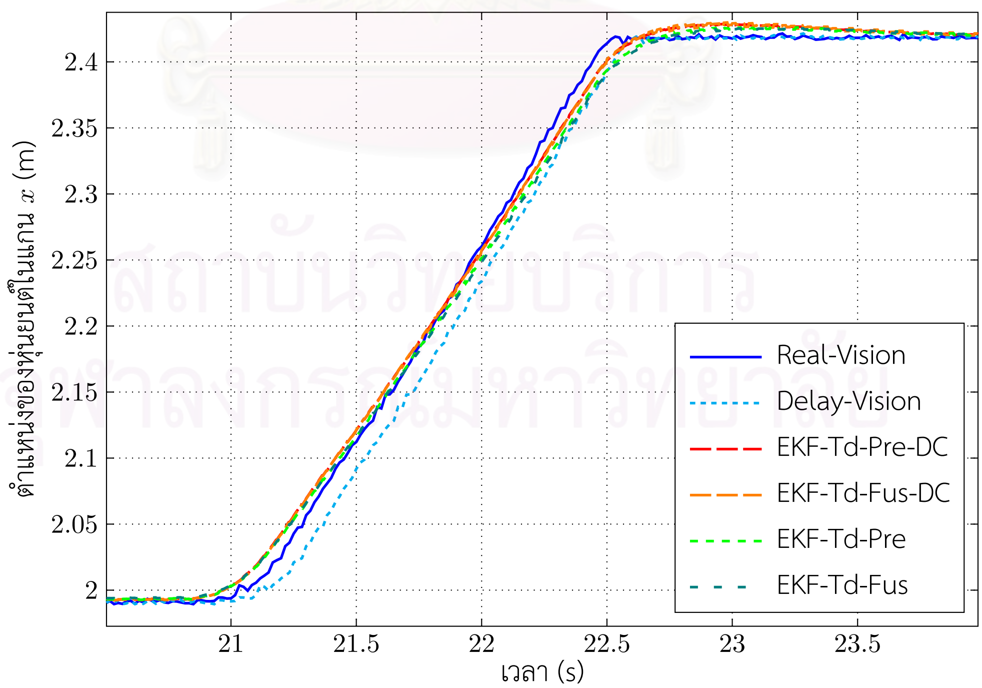
รูปที่ 4.27: ภาพขยาย ก ของผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในการหมุน z



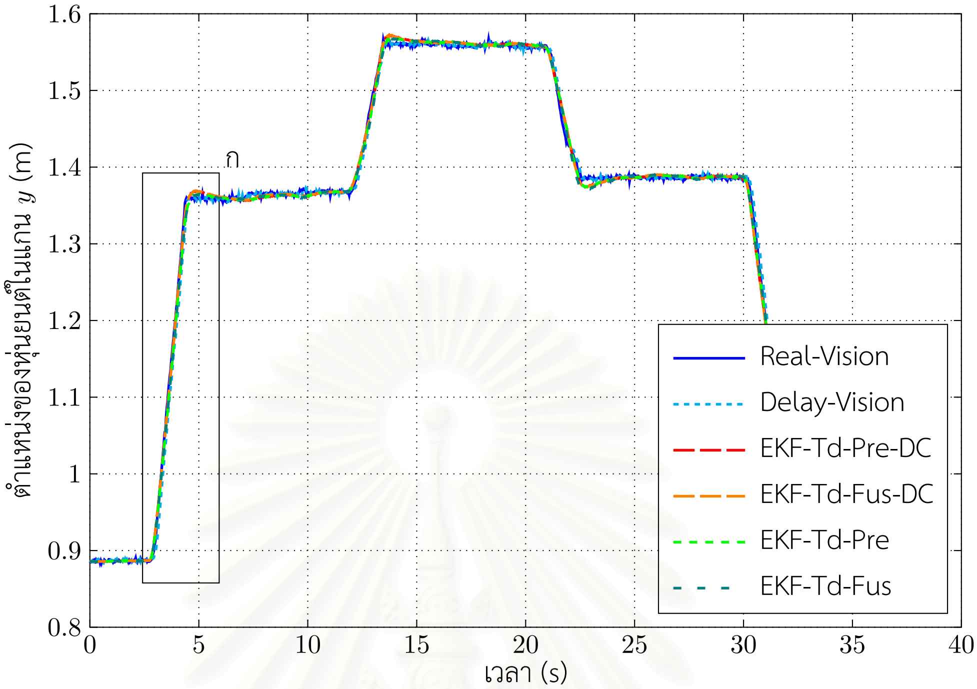
รูปที่ 4.28: ภาพขยาย ข ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในการหมุน z



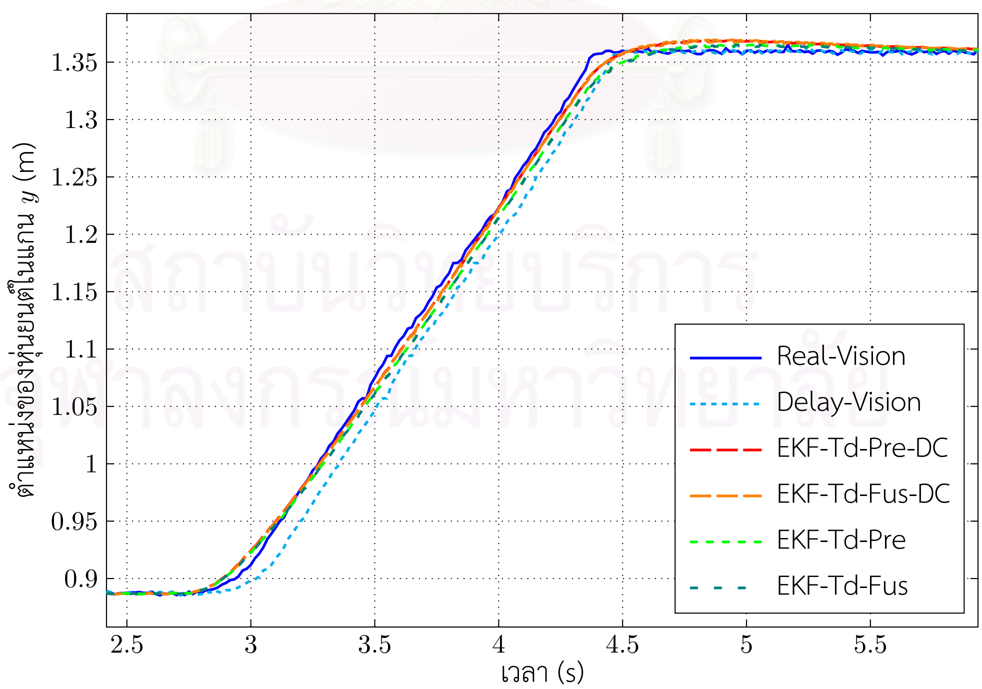
รูปที่ 4.29: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในแกน x



รูปที่ 4.30: ภาพขยาย ก ของผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในแกน x



รูปที่ 4.31: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในแกน y



รูปที่ 4.32: ภาพขยาย ก ของผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ด้วยวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังด้วยวิธีต่าง ๆ ในแกน y

ตำแหน่งจริงได้ดีกว่าและประมาณตัวแปรสถานะระหว่างการกรองซ้ำให้ผลตอบสนองดีกว่าการทำนายตัวแปรสถานะเท่านั้น โดยทั้งหมดนี้ใช้การรวมแบบจำลองคณิตศาสตร์ขาออกร่วมกับตัวกรองคาลมานแบบขยาย

อีกวิธีหนึ่งสำหรับการชดเชยการประวิงเวลาของข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ถูกแสดงไว้ในรูป 4.23 ซึ่งเรียกว่าการรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลา (different-time fusion) มีขั้นตอนการประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{X}_{(k)}$ เมื่อมีข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ดังนี้ ในขั้นแรกใช้ตัวกรองคาลมานเพื่อหา $\hat{X}^1_{(k)}$ และความแปรปรวน $P^1_{\mathrm{ee}(k)}$ จากตัวรับรู้ความเฉื่อย $Z_{\mathrm{I}(k)}$ ในขั้นถัดไปย้อนกลับไปที่เวลา $k-t_\mathrm{d}$ ใช้ตัวกรองคาลมานหา $\hat{X}^2_{(k-t_\mathrm{d})}$ และความแปรปรวน $P^2_{\mathrm{ee}(k)}$ ด้วยข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ $Z_{\mathrm{V}(k-t_\mathrm{d})}$ ที่อ่านได้ ณ เวลาปัจจุบัน ขั้นที่สามประมาณ $\hat{X}_{(k)}$ และความแปรปรวน โดยอาศัยความเปลี่ยนแปลงจาก $\hat{X}^1_{(k-t_\mathrm{d})}$ ที่ได้มาเมื่อเวลา $k-t_\mathrm{d}$ เป็น $\hat{X}^2_{(k-t_\mathrm{d})}$ และหลักการเชิงตั้งฉากในสมการ (4.14ก) เพื่อปรับปรุง $\hat{X}^1_{(k)}$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{(k)} &= \hat{X}^1_{(k)} + P_{\mathrm{e}^1_{(k)}(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)_{(k-t_\mathrm{d})}} P^{-1}_{(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)_{(k-t_\mathrm{d})}} \left[e^1_{(k-t_\mathrm{d})} - e^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right] \\
&= \hat{X}^1_{(k)} + P_{\mathrm{e}^1_{(k)}(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)_{(k-t_\mathrm{d})}} P^{-1}_{(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^2)_{(k-t_\mathrm{d})}} \left[X_{(k-t_\mathrm{d})} - \hat{X}^1_{(k-t_\mathrm{d})} - X_{(k-t_\mathrm{d})} + \hat{X}^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right] \\
&= \left[P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}} - P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})}}\right] \left[P^1_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} + P^2_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} - P^{12}_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} - P^{21}_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})}\right]^{-1} \\
&\quad \cdot \left[\hat{X}^2_{(k-t_\mathrm{d})} - \hat{X}^1_{(k-t_\mathrm{d})}\right] + \hat{X}^1_{(k)}
\end{aligned} \tag{4.14ก}$$

และนิยามให้

$$K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)} \triangleq \left[P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}} - P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})}}\right] \left[P^1_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} + P^2_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} - P^{12}_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} - P^{21}_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})}\right]^{-1} \tag{4.14ข}$$

ดังนั้นความแปรปรวนหลังการรวมสัญญาณตัวรับรู้จึงมีค่าเป็น

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{ee}^{12t_\mathrm{d}}(k)} &= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^1_{(k)} - K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)}\left(e^1_{(k-t_\mathrm{d})} - e^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right)\right]\left[X_{(k)} - \hat{X}^1_{(k)} - K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)}\left(e^1_{(k-t_\mathrm{d})} - e^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right)\right]^\mathrm{T} \\
&= P_{\mathrm{ee}^1(k)} - K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)} P_{(\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}-\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})})\mathrm{e}^1_{(k)}} - P_{\mathrm{e}^1_{(k)}(\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}-\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})})}\left[K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)}\right]^\mathrm{T} \\
&\quad + K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)} P_{(\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}-\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})})(\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}-\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})})}\left[K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)}\right]^\mathrm{T} \\
&= P_{\mathrm{ee}^1(k)} - K^{2_{k-t_\mathrm{d}}}_{(k)}\left[P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}} - P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})}}\right]^\mathrm{T}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

นอกจากนั้นพบว่า

$$\begin{aligned}
\left[P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}} - P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})}}\right] &= P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(k-t_\mathrm{d})}}\left[I - K^1_{(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{1(k-t_\mathrm{d})} - I + K^2_{(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{2(k-t_\mathrm{d})}\right]^\mathrm{T} \\
&= P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(k-t_\mathrm{d})}}\left[K^2_{(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{2(k-t_\mathrm{d})} - K^1_{(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{1(k-t_\mathrm{d})}\right]^\mathrm{T}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

โดยอาศัยหลักการเดียวกับ (4.10) $P^{12}_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})}$ มีค่าตามสมการนี้

$$\begin{aligned}
P^{12}_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} &= P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} - P^2_{\mathrm{ez}(k-t_\mathrm{d})}\left[K^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right]^\mathrm{T} - K^1_{(k-t_\mathrm{d})}P^1_{\mathrm{ze}(k-t_\mathrm{d})} + K^1_{(k-t_\mathrm{d})}P^{12}_{\mathrm{zz}(k-t_\mathrm{d})}\left[K^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right]^\mathrm{T} \\
&= P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} - P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon^\mathrm{T}_{2(k-t_\mathrm{d})}\left[K^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right]^\mathrm{T} - K^1_{(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{1(k-t_\mathrm{d})}P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} \\
&\quad + K^1_{(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{1(k-t_\mathrm{d})}P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})}\Upsilon^\mathrm{T}_{2(k-t_\mathrm{d})}\left[K^2_{(k-t_\mathrm{d})}\right]^\mathrm{T}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ค่าความแปรปรวน $P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})}$ ต้องถูกเก็บไว้ล่วงหน้า และในทำนองเดียวกัน

แบบขยาย $$P^{12}_{\mathrm{zz}(k-t_\mathrm{d})} = \Upsilon_{1(k-t_\mathrm{d})} P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})} \Upsilon^{\mathrm{T}}_{2(k-t_\mathrm{d})} \tag{4.18}$$

แบบแปลงจุด $$P^{12}_{\mathrm{zz}(k-t_\mathrm{d})} = \sum_{j=0}^{2n} \mathcal{W}_j \left(\mathcal{Z}^1_{j(k-t_\mathrm{d})} - \hat{z}^1_{(k-t_\mathrm{d})}\right)\left(\mathcal{Z}^2_{j(k)} - \hat{z}^2_{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.19}$$

ความแปรปรวนของ $P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^1_{(k-t_\mathrm{d})}}$ และ $P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^2_{(k-t_\mathrm{d})}}$ เป็นส่วนที่ซับซ้อนและใช้การคำนวณมากที่สุด การหาความแปรปรวนทั้งสองนี้แยกพิจารณาทั้งในกรณีตัวกรองคาลมานแบบขยายและตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด

การหา $P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(k-t_\mathrm{d})}}$ เมื่อใช้ตัวกรองคาลมานแบบขยาย

ที่เวลา k และ j โดยที่ $k \geqslant j$ ในกรณีที่การประมาณตัวแปรสถานะ $X_{(k)}$ จากตัวแปรสถานะ $X_{(k-1)}$ โดยใช้สัญญาณตัวรับรู้ $Z^1_{(k)}$ ความแปรปรวนร่วมระหว่าง $e^1_{(k)}$ และ $e^-_{(j)}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความแปรปรวนร่วมระหว่าง $e_{(k-1)}$ และ $e^-_{(j)}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(j)}} &= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^1_{(k)}\right]\left[X_{(j)} - \hat{X}^-_{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^-_{(k)} - K^1_{(k)}\left(Z^1_{(k)} - \hat{Z}^1_{(k)}\right)\right]\left[X_{(j)} - \hat{X}^-_{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[\Phi_{(k-1)}\left(X_{(k-1)} - \hat{X}_{(k-1)}\right) - K^1_{(k)}\Upsilon^1_{(k-1)}\Phi_{(k-1)}\left(X_{(k-1)} - \hat{X}_{(k-1)}\right)\right] \\
&\qquad \cdot \left[X_{(j)} - \hat{X}^-_{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \left[\Phi_{(k-1)} - K^1_{(k)}\Upsilon_{(k)}\Phi_{(k-1)}\right] P_{\mathrm{e}_{(k-1)}\mathrm{e}^-_{(j)}}
\end{aligned} \tag{4.20ก}$$

และให้ $$\mathcal{A}^1_{(k)} \triangleq \left[\Phi_{(k-1)} - K^1_{(k)}\Upsilon^1_{(k)}\Phi_{(k-1)}\right] \tag{4.20ข}$$

โดยในบทนี้ Φ นั้นหมายถึงเมทริกซ์จาโคเบียน Φ_{Jac} ถ้าหากการประมาณตัวแปรสถานะ $X_{(k)}$ จากตัวแปรสถานะ $X_{(k-1)}$ โดยใช้สัญญาณตัวรับรู้ $Z^1_{(k)}$ และ $Z^2_{(i)}$ โดย $i < j$ ความแปรปรวนร่วมระหว่าง $e^{12_i}_{(k)}$ และ $e^-_{(j)}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความแปรปรวนร่วมระหว่าง $e^1_{(k)}$ และ $e^-_{(j)}$ ได้ดังนี้

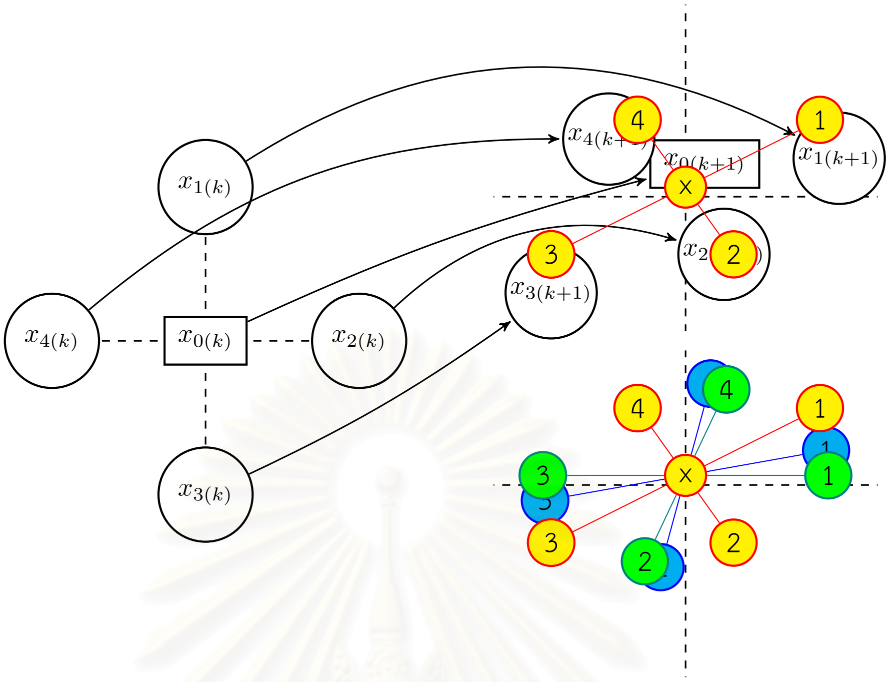
$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{e}^{12_i}_{(k)}\mathrm{e}^-_{(j)}} &= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^{12_i}_{(k)}\right]\left[X_{(j)} - \hat{X}^-_{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[X_{(k)} - \hat{X}^1_{(k)} - K^{2_i}_{(k)}\left(\hat{X}^2_{(i)} - \hat{X}^1_{(i)}\right)\right]\left[X_{(j)} - \hat{X}^-_{(j)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(j)}} - K^{2_i}_{(k)} P_{\mathrm{e}^1_{(i)}\mathrm{e}^-_{(j)}} + K^{2_i}_{(k)} P_{\mathrm{e}^2_{(i)}\mathrm{e}^-_{(j)}} \\
&= P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(j)}} - K^{2_i}_{(k)}\left(P_{\mathrm{e}^-_{(j)}\mathrm{e}^1_{(i)}}\right)^{\mathrm{T}} + K^{2_i}_{(k)}\left(P_{\mathrm{e}^-_{(j)}\mathrm{e}^2_{(i)}}\right)^{\mathrm{T}} \\
&= P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^-_{(j)}} - K^{2_i}_{(k)}\left[K^2_{(i)}\Upsilon_{2(i)} - K^1_{(i)}\Upsilon_{1(i)}\right] P^{\mathrm{T}}_{\mathrm{e}^-_{(j)}\mathrm{e}^-_{(i)}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

ดังนั้นเพื่อหา $P_{\mathrm{e}^1_{(k)}\mathrm{e}^n_{(k-t_\mathrm{d})}}$ จึงจำเป็นต้องมีการสะสมความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาด $e^-_{(k-t_\mathrm{d})}$ และความผิดพลาดตั้งแต่เวลา $k - t_\mathrm{d}$ กระทั่งถึงเวลา k โดยเริ่มการคำนวณล่วงหน้าสำหรับการรวมสัญญาณตัวรับรู้ที่เวลา k ด้วยความแปรปรวน $P^-_{\mathrm{ee}(k-t_\mathrm{d})}$ และให้ $k - t_\mathrm{d} < t \leqslant k$ จะได้

$$P_{\mathrm{e}^1_{(t)}\mathrm{e}^-_{(k-t_\mathrm{d})}} = \mathcal{A}^1_{(t)} P_{\mathrm{e}_{(t-1)}\mathrm{e}^n_{(k-t_\mathrm{d})}} \tag{4.22ก}$$

เมื่อมี $Z^1_{(t)}$ และจะมีค่าเปลี่ยนไปเมื่อถูกปรับปรุงด้วยค่า $Z^{12}_{(t-t_\mathrm{d})}$ จากอดีตดังนี้

$$P_{\mathrm{e}^{12_{t_\mathrm{d}}}_{(t)}\mathrm{e}^-_{(k-t_\mathrm{d})}} = P_{\mathrm{e}^1_{(t)}\mathrm{e}^-_{(k-t_\mathrm{d})}} - K^{2_{t-t_\mathrm{d}}}_{(t)}\left[K^2_{(t-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{2(t-t_\mathrm{d})} - K^1_{(t-t_\mathrm{d})}\Upsilon_{1(t-t_\mathrm{d})}\right] P^{\mathrm{T}}_{\mathrm{e}_{(k-t_\mathrm{d})}\mathrm{e}^-_{(t-t\mathrm{d})}} \tag{4.22ข}$$

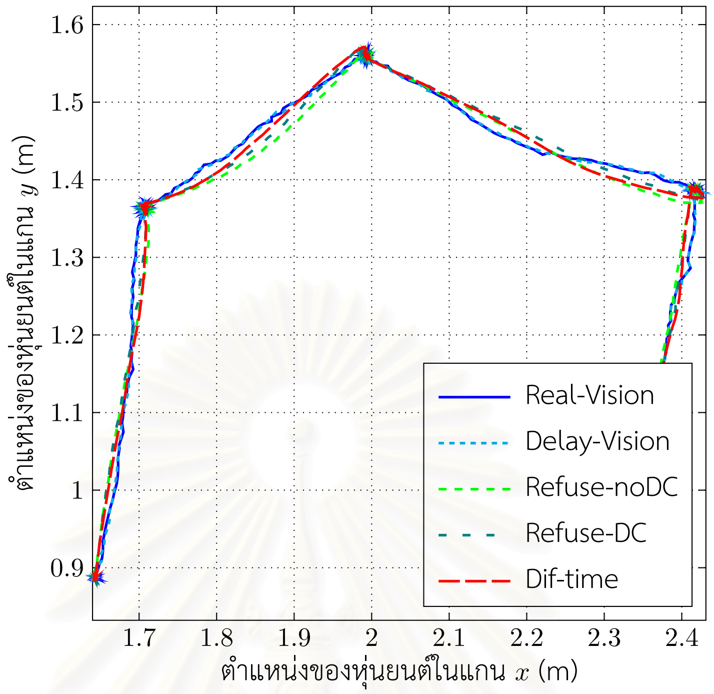


รูปที่ 4.33: ข้อบกพร่องของตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด

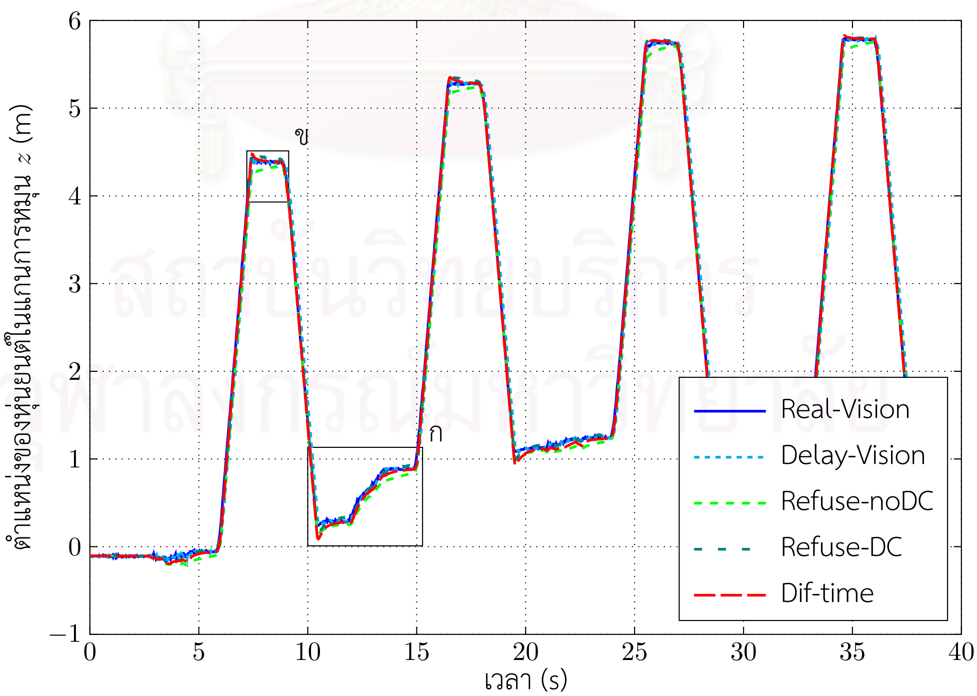
ดังนั้น ณ เวลาที่มีการรวมสัญญาณตัวรับรู้ที่เวลา t ใด ๆ จะต้องหา $P_{\mathrm{e}_t\mathrm{e}^-_{k-t_\mathrm{d}}}$ สะสมไว้สำหรับเวลา $k = t+5, t+10, t+15, t+20, t+25$ ในอนาคต แผนภาพ 4.24 แสดงการคำนวณความแปรปรวนในช่วงเวลาต่าง ๆ ซึ่งแสดงให้เห็นว่านอกจากการรวมสัญญาณตัวรับรู้ที่เวลา $k-25$ แล้ว ยังต้องหา $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-30)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-35)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-40)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-45)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$ สำหรับใช้หา $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-30)}\mathrm{e}^-_{(k-5)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-35)}\mathrm{e}^-_{(k-10)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-40)}\mathrm{e}^-_{(k-15)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-45)}\mathrm{e}^-_{(k-20)}}$ ตามลำดับ และ $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-5)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-10)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-15)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$, $P_{\mathrm{e}^{12}_{(k-20)}\mathrm{e}^-_{(k-25)}}$ ตามลำดับ ซึ่งทำให้มีความซับซ้อนของการคำนวณที่เวลาใด ๆ มากกว่าปกติถึง 5 เท่าเช่นเดียวกับการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำ (backward fusion and re-filtering)

รูป 4.34, 4.35, 4.38, 4.41 แสดงภาพการจำลองระบบเปรียบเทียบระหว่างการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและการรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลา เส้นประสีเขียว (- - - - -) ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Refuse-noDC’ แทนการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำที่ไม่ใช้การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรง เส้นประสีเขียวเข้ม (- - -) ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Refuse-DC’ แทนการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำที่ใช้การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงร่วมด้วย และเส้นประสีแดง (— — —) ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Dif-time’ แทนการรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลาโดยไม่ใช้การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรง เปรียบเทียบกับตำแหน่งและมุมที่อ่านได้จากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ทั้งที่มีและไม่มีการประวิงเวลา แทนด้วยเส้นทึบสีน้ำเงิน (———) ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Real-Vision’ และเส้นประสีฟ้า (-------) ใช้คำอธิบายสัญลักษณ์ ‘Delay-Vision’ ตามลำดับ

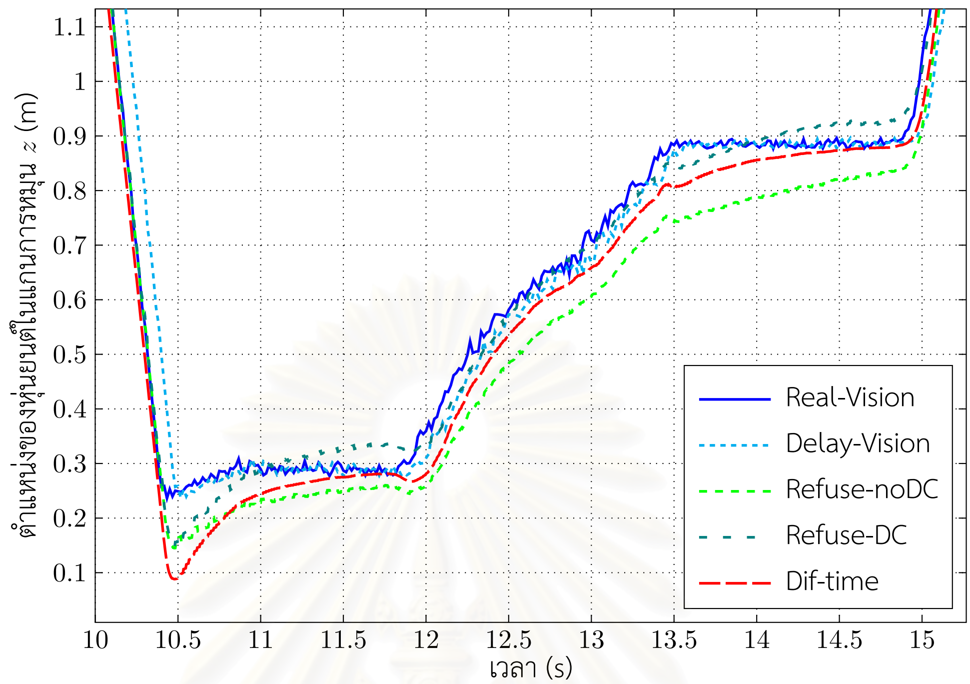
จากการทดลองเห็นว่า การรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำที่ไม่ใช้การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงนั้น ตามรอยตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ได้ไม่ดีเท่าวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำที่ประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงด้วย กล่าวคือไม่สามารถกำจัดผลการประวิงเวลาของข้อมูลจากคอมพิวเตอร์วิทัศน์ได้ดีเท่าที่ควร แต่การรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลานั้นสามารถตามรอยตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ได้อย่างดี และให้การกรองที่ดีกว่าการรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำที่ใช้การประมาณ



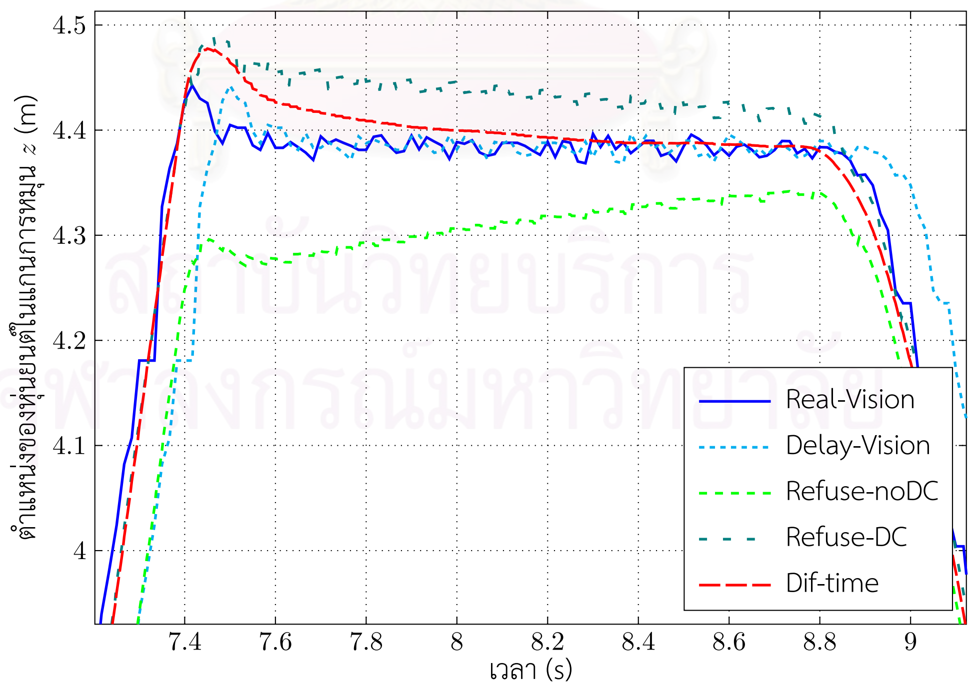
รูปที่ 4.34: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในระนาบ $x - y$



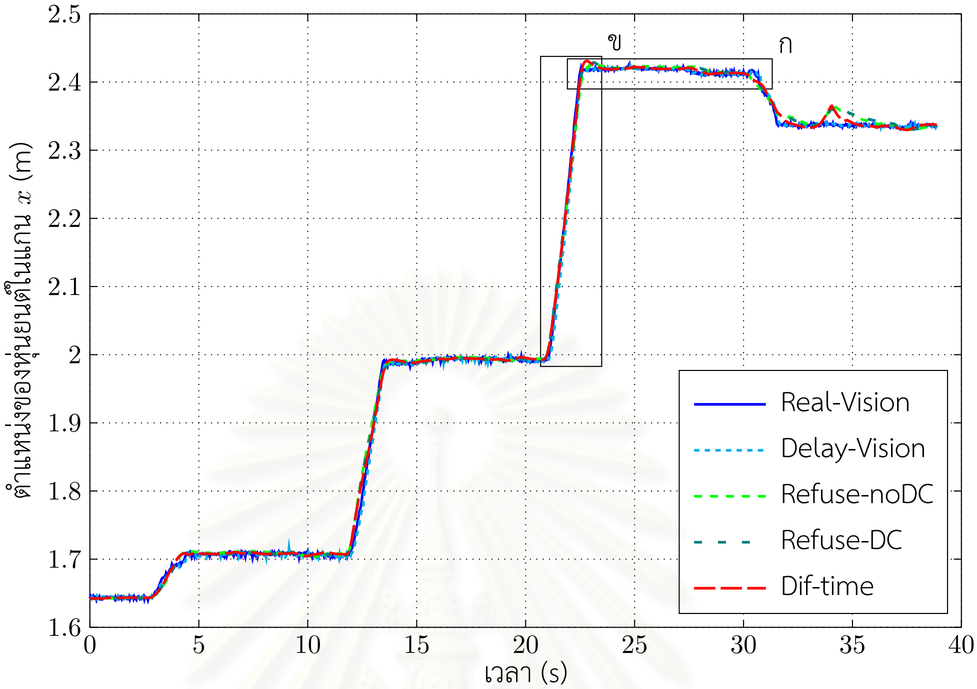
รูปที่ 4.35: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในการหมุน z



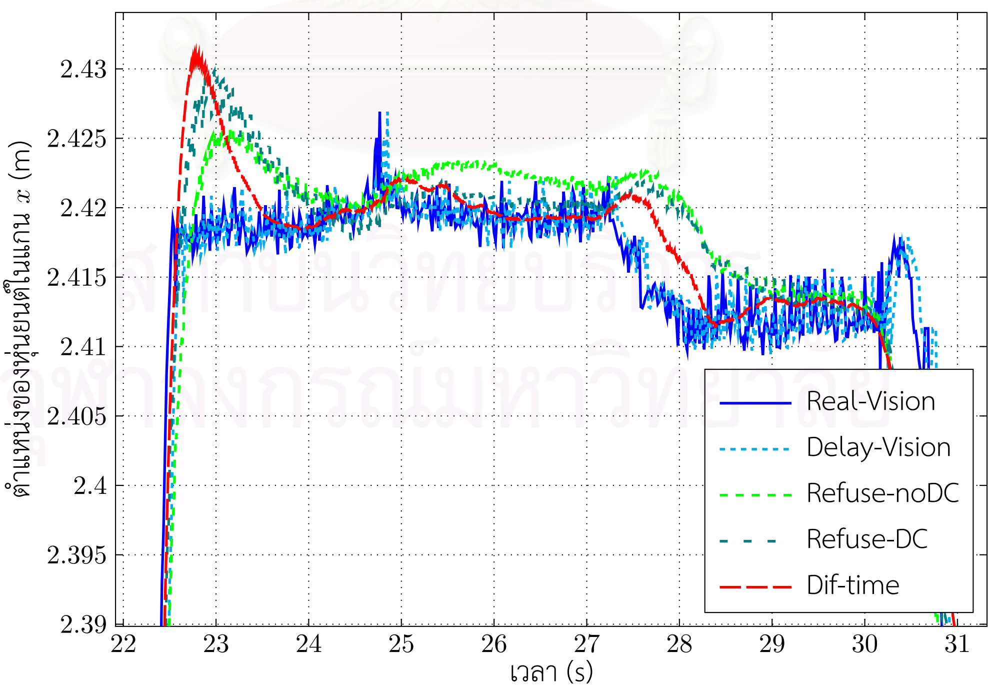
รูปที่ 4.36: ภาพขยาย ก ของผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในการหมุน z



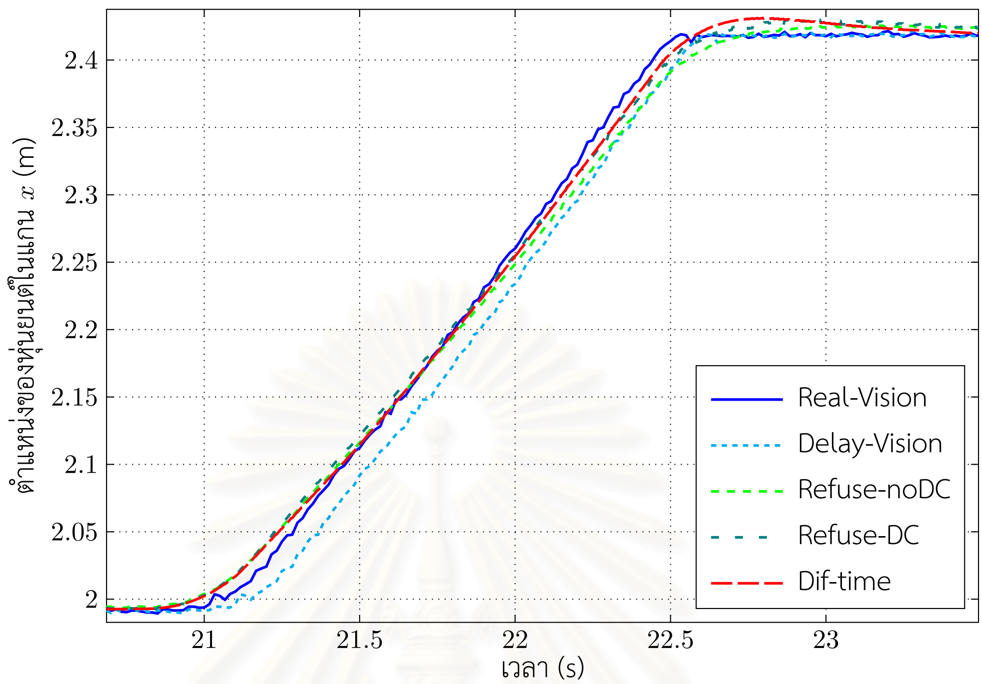
รูปที่ 4.37: ภาพขยาย ข ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในการหมุน z



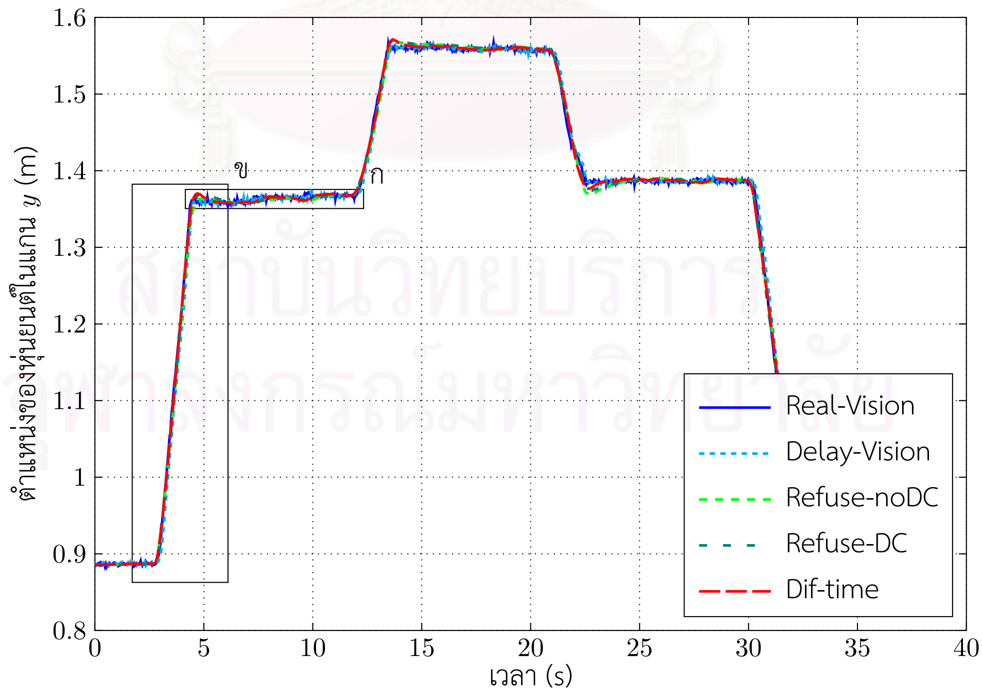
รูปที่ 4.38: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในแกน x



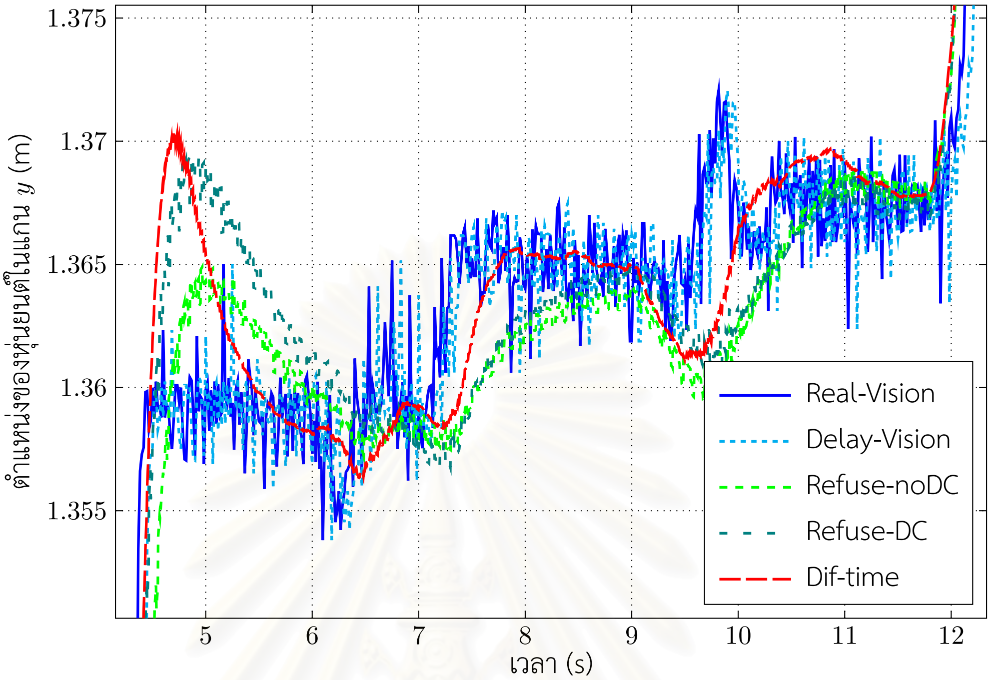
รูปที่ 4.39: ภาพขยาย ก ของผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในแกน x



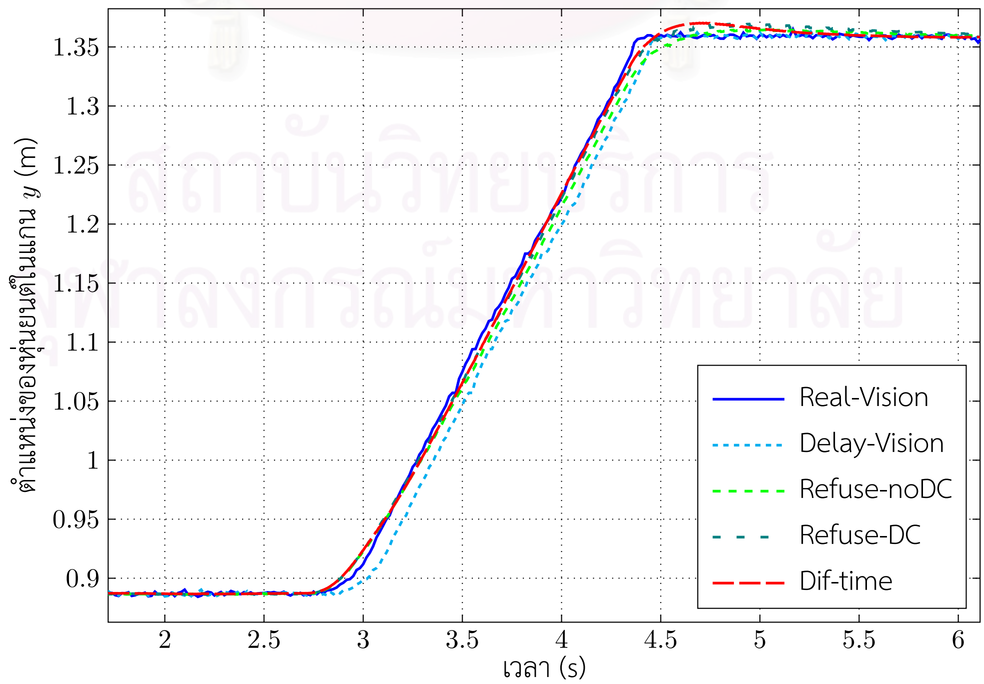
รูปที่ 4.40: ภาพขยาย ข ของผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในแกน x



รูปที่ 4.41: ผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในแกน y



รูปที่ 4.42: ภาพขยาย ก ของผลการเปรียบเทียบการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้ย้อนหลังและวิธีรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบต่างเวลา ในแกน y



สัญญาณรบกวนกระแสตรงอยู่เล็กน้อย โดยที่ไม่ต้องมีการประมาณ สัญญาณรบกวนกระแสตรง

การหา $P_{\mathrm{e}^{1}_{(k)}\mathrm{e}^{n}_{(k-t_{\mathrm{d}})}}$ เมื่อใช้ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด

สำหรับกรณีของตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดนั้นจำเป็นต้องกระจายจุดซิกมาใหม่ทุกครั้งที่มีการปรับปรุงข้อมูลด้วยหลักการเชิงตั้งฉาก ซึ่งการกระจายจุดซิกมาใหม่ทำให้จุดที่กระจายใหม่ไม่มีความสัมพันธ์ร่วมกับจุดเดิม จึงไม่สามารถหาความแปรปรวนร่วมระหว่างความผิดพลาดของการประมาณตัวแปรสถานะที่เวลาต่างกันได้ ดังนั้นจึงไม่สามารถประยุกต์ใช้ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดกับการรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลาได้ ซึ่งจากรูป 4.33 จะเห็นได้ว่า กลุ่มของจุดสีเหลืองเป็นจุดซิกมาที่ควรจะได้จากการกระจาย แต่กลุ่มของจุดสีฟ้าและสีเขียวเป็นกลุ่มของจุดซิกมาที่ได้จากการหารากที่สองและการแยกโชเลสกีของเมทริกซ์ความแปรปรวนของตัวแปรสถานะ ตามลำดับ

บทที่ 5
บทสรุป

สำหรับการประมาณตัวแปรสถานะของระบบ ความแม่นยำของแบบจำลองคณิตศาสตร์เป็นปัจจัยหนึ่งที่มีผลต่อประสิทธิภาพของตัวกรองคาลมาน จากผลการจำลองระบบเทียบกับระบบจริงพบว่า การคำนวณหาแบบจำลองคณิตศาสตร์ด้วยแบบจำลองพลวัตของหุ่นยนต์และแบบจำลองของมอเตอร์ขับเคลื่อนหุ่นยนต์แบบที่รวมแรงเสียดทานตามแนวขับเคลื่อนของล้อเพียงอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอที่จะทำให้ผลการจำลองระบบใกล้เคียงกับระบบจริงของหุ่นยนต์ แรงเสียดทานและแรงหนืดตามแนวรัศมีของหุ่นยนต์ที่ตั้งฉากกับล้อทั้งสี่เป็นอีกปัจจัยสำคัญที่ส่งผลกระทบต่อการเคลื่อนที่ในแกน x และ y ของหุ่นยนต์ แต่ไม่มีผลกระทบต่อการการหมุนของหุ่นยนต์ การหาแบบจำลองคณิตศาสตร์โดยที่ไม่คำนึงอิทธิพลของแรงเสียดทานและแรงหนืดตามแนวรัศมีของหุ่นยนต์นั้น ส่งผลให้มุมและระยะทางจากจำลองการเคลื่อนที่มีขนาดที่ไม่สอดคล้องกันคือ ระยะทางในระนาบ $x-y$ มีขนาดมากกว่าปกติ และมุมการหมุนของหุ่นยนต์มีขนาดน้อยกว่าปกติ อย่างไรก็ตามจากผลการทดลองจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์จะเห็นได้ว่า แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่รวมแรงหนืดตามแนวรัศมีของหุ่นยนต์และละเลยแรงเสียดทานนั้น เพียงพอสำหรับการหาแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ให้ผลตอบสนองใกล้เคียงกับระบบจริง โดยไม่จำเป็นต้องรวมความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มเข้าในแบบจำลองด้วยอนึ่งความแม่นยำของแบบจำลองการหมุนของหุ่นยนต์นั้นมีความสำคัญอย่างมาก เนื่องจากมุมของหุ่นยนต์คือตัวแปรสถานะที่กำหนดทิศทางการวิ่งของหุ่นยนต์ ความผิดพลาดเพียงเล็กน้อยของการประมาณมุมหุ่นยนต์จึงอาจก่อให้เกิดการประมาณตำแหน่งที่ผิดพลาดอย่างมากได้

ตัวกรองคาลมานเป็นตัวกรองที่ถูกใช้สำหรับการรวมสัญญาณตัวรับรู้อย่างแพร่หลาย เนื่องจากมีสมบัติเป็นตัวประมาณเหมาะที่สุด (optimal eatimator) ด้วยการใช้หลักการเชิงตั้งฉากเพื่อประมาณตัวแปรสถานะและรวมสัญญาณตัวรับรู้ นอกจากนั้น ด้วยกระบวนการที่ตัวกรองคาลมานใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบเพื่อทำนายตัวแปรสถานะ ทำให้ตัวกรองคาลมานมีคุณสมบัติการกรองที่ดีกว่าตัวกรองทั่วไป เนื่องจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์มีความไม่เป็นเชิงเส้น ตัวกรองคาลมานแบบขยายและตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดจึงถูกนำมาใช้ในงานวิจัยนี้ ตัวกรองคาลมานแบบขยายมีข้อได้เปรียบที่มีความซับซ้อนของการคำนวณน้อยกว่าตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด ในขณะที่ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดนั้นมีความซับซ้อนมากกว่า แต่ไม่จำเป็นต้องมีการหาเมทริกซ์จาโคเบียน ทำให้ประยุกต์ใช้กับระบบที่มีความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มได้ อีกทั้งยังใช้หาความแปรปรวนของตัวแปรสถานะได้แม่นยำกว่าตัวกรองคาลมานแบบขยาย อย่างไรก็ตามแบบจำลองที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้มีความไม่เชิงเส้นอย่างอ่อนเท่านั้น อีกทั้งจากการทดลองประยุกต์ใช้ตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดกับระบบที่ศึกษายังพบว่าตัวกรองคาลมานแบบขยายนั้นให้การประมาณตัวแปรสถานะที่เหมือนกับตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด ดังนั้นตัวกรองคาลมานแบบขยายจึงเหมาะสมกับระบบของหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทางมากกว่าตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุด

สำหรับหุ่นยนต์เคลื่อนที่ทุกทิศทางที่วัดสัญญาณจากตัวรับรู้ความเฉื่อยเป็นความเร็วจากไจโรสโกป และความเร่งจากมาตรความเร่ง ซึ่งการประมาณตำแหน่งของหุ่นยนต์จากสัญญาณเหล่านี้จะมีความผิดพลาดสะสม ในงานวิจัยนี้ได้ทดลองแก้ปัญหาความผิดพลาดสะสมของตำแหน่งและมุมของหุ่นยนต์ด้วยการใช้ตัวกรองคาลมานเพื่อประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงของไจโรสโกปและมาตรความเร่ง และจากการทดลองพบว่าช่วยลดอัตราการเพิ่มความผิดพลาดสะสมได้ สำหรับปัญหาการประวิงเวลาของข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์นั้น สามารถใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อทำนายตัวแปรสถานะในช่วงการรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างตัวรับรู้ความเฉื่อยและระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ได้ การรวมสัญญาณตัวรับรู้ระหว่างตัวรับรู้ความเฉื่อยที่ไม่มีการประ-

วิงเวลาและข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ที่มีการประวิงเวลาทำได้สองวิธีคือ การรวมสัญญาณตัวรับรู้แบบย้อนหลังและกรองซ้ำ (backward fusion and re-filtering) และการรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลา (different-time fusion) ซึ่งการรวมสัญญาณตัวรับรู้ต่างเวลานั้นให้ผลการประมาณตัวแปรสถานะที่ดีกว่า โดยที่ไม่จำเป็นต้องใช้การประมาณสัญญาณรบกวนกระแสตรงร่วมด้วย มีข้อจำกัดเพียงไม่สามารถใช้ร่วมกับตัวกรองคาลมานแบบแปลงจุดได้ ซึ่งไม่มีผลต่อแบบจำลองของหุ่นยนต์ที่ละเลยผลของความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มแล้ว

จากผลการจำลองการประมาณตัวแปรสถานะด้วยการใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์และการรวมสัญญาณตัวรับรู้ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ การประมาณตัวแปรสถานะสามารถรองรับปัญหาสัญญาณรบกวนกระแสตรงของไจโรสโกปและมาตรความเร่ง และปัญหาการประวิงเวลาของข้อมูลจากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ได้ และมีความซับซ้อนของการคำนวณไม่มากจนเกินไป ผลลัพธ์ที่ได้ตรงกับสมมติฐานคือ ตัวแปรสถานะที่ได้จากการประมาณมีแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงสัญญาณตามสัญญาณความถี่สูงที่วัดได้จากตัวรับรู้ความเฉื่อย ในขณะที่ลู่เข้าตำแหน่งและมุมที่วัดได้จากระบบคอมพิวเตอร์วิทัศน์ด้วย ซึ่งเหมาะสมกับการประมาณตำแหน่งของหุ่นยนต์ที่มีการลื่นไถลของล้อเกิดขึ้น ตัวแปรสถานะที่ประมาณได้มีความแม่นยำและเหมาะสำหรับการใช้เป็นสัญญาณป้อนกลับสำหรับการควบคุมที่มีประสิทธิภาพต่อไป

รายการอ้างอิง

[1] O. Purwin and R. D'Andrea. Trajectory generation for four wheeled omnidirectional vehicles. In American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005, volume 7, pp. 4979–4984, 2005.

[2] J. Borenstein and L. Feng. Gyrodometry: a new method for combining data from gyros and odometry in mobile robots. In Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on, 1(1996): 423–428.

[3] S. Maeyama, N. Ishikawa, and S. Yuta. Rule based filtering and fusion of odometry and gyroscope for a fail safe dead reckoning system of a mobile robot. In Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, 1996. IEEE/SICE/RSJ International Conference on, pp. 541–548, 1996.

[4] B. Barshan and H. F. Durrant-Whyte. An inertial navigation system for a mobile robot. In Intelligent Robots and Systems '93, IROS '93. Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on, volume 3, pp. 2243–2248, 1993.

[5] F. Gustafsson and N. Persson. Sensor fusion for accurate computation of yaw rate and absolute velocity. Technical Report LiTH-ISY-R-2377, SAE World Congress, 2001.

[6] S. Shekhar. Wheel rolling constraints and slip in mobile robots. In Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on, volume 3, pp. 2601–2607, 1997.

[7] Williams, B. E. Carter, P. Gallina, and G. Rosati. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots. Robotics and Automation, IEEE Transactions on 18, 3(2002): 285–293.

[8] H. Rehbinder and B. K. Ghosh. Multi-rate fusion of visual and inertial data. In Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, 2001. MFI 2001. International Conference on, pp. 97–102, 2001.

[9] F. E. Ababsa and M. Mallem. Inertial and vision head tracker sensor fusion using a particle filter for augmented reality systems. In Circuits and Systems, 2004. ISCAS '04. Proceedings of the 2004 International Symposium on, volume 3, pp. III–861–4, 2004.

[10] S. You and U. Neumann. Fusion of vision and gyro tracking for robust augmented reality registration. In Virtual Reality, 2001. Proceedings. IEEE, pp. 71–78, 2001.

[11] N. Gordon. A hybrid bootstrap filter for target tracking in clutter. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on 33, 1(1997): 353–358.

[12] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. In I. Kadar, editor, Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI, volume 3068, pp. 182–193. SPIE, 1997.

[13] R. van der Merwe, E. Wan, and S. Julier. Sigma-point kalman filters for nonlinear estimation and sensor-fusion: Applications to integrated navigation. In Proc. AIAA Guidance Navigation and Controls Conf., 2004.

[14] L. Armesto, S. Chroust, M. Vincze, and J. Tornero. Multi-rate fusion with vision and inertial sensors. In Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on, volume 1, pp. 193–199, 2004.

[15] J. B. Gao and C. J. Harris. Some remarks on kalman filters for the multisensor fusion. Information Fusion 3, (September 2002): 191–201.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
ความไม่เชิงเส้น

ก.1 ความไม่เชิงเส้นของหุ่นยนต์

เราแบ่งความไม่เชิงเส้นบนหุ่นยนต์ออกเป็นสองประเภท คือ ความไม่เชิงเส้นอย่างอ่อน (weak non-linearity) และความไม่เชิงเส้นอย่างเข้ม (strong nonlinearity) ความไม่เชิงเส้นอย่างอ่อนในตัวหุ่นยนต์นั้นได้แก่ เมทริกซ์ $\mathbb{A}$ ในสมการ (2.37ก) ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ ω_z อนุพันธ์ของตัวแปรสถานะจึงอยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรสถานะ ซึ่งจัดเป็นความไม่เชิงเส้นอย่างอ่อน

ความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มในหุ่นยนต์ชนิดแรก คือ แรงดันจ่ายให้มอเตอร์ทั้งสี่มีค่าจำกัดอยู่ที่ 12 โวลต์ ความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มอีกชนิดหนึ่ง คือ แรงเสียดทานสถิตย์ระหว่างล้อหุ่นยนต์กับพื้นสนามนั้นมีค่าจำกัด ถ้าหากแรงเสียดทานสถิตย์ที่ต้องการสำหรับการขับเคลื่อนล้อของหุ่นยนต์มีค่ามากกว่าแรงเสียดทานสถิตย์สูงสุด ล้อของหุ่นยนต์จะลื่นไถลกับพื้นสนาม และแรงเสียดทานระหว่างล้อหุ่นยนต์กับพื้นสนามจะเปลี่ยนเป็นแรงเสียดทานจลน์ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตย์และเป็นค่าที่ขึ้นกับแรงกดของล้อเท่านั้น จากสมการ (2.6) และสมการ (2.10) เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงเสียดทานจลน์และความเร็วของหุ่นยนต์ได้ดังสมการ (ก.1) และยังสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงเสียดทานจลน์และความเร็วของล้อได้ดังสมการ (ก.2)

$$\dot{V}_{\mathrm{B}} = \left(\mathbb{M} + m_{\mathrm{w}}\mathbb{T}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbb{T}f_{\mathrm{w}} \tag{ก.1}$$

$$\dot{V}_{\mathrm{w}} = \frac{r_{\mathrm{w}}}{j_{\mathrm{w}}}\left(\mathcal{T}_{\mathrm{w}} - r_{\mathrm{w}}f_{\mathrm{w}}\right) \tag{ก.2}$$

จากสมการด้านบน เมื่อค่าแรงเสียดทานสถิตย์ลดลงมาเป็นแรงเสียดทานจลน์แล้ว จะทำให้ความเร็วของหุ่นยนต์ลดลง แต่ความเร็วของล้อที่ลื่นไถลของหุ่นยนต์จะเพิ่มขึ้น และแรงเสียดทานจลน์จะเปลี่ยนเป็นแรงเสียดทานสถิตย์อีกครั้งเมื่อความเร็ว $V_{\mathrm{R}} = V_{\mathrm{w}}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของแรงกดจากความไม่สม่ำเสมอของล้อและการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ โดยรายละเอียดจะถูกอธิบายต่อไป

แรงกดที่ล้อหุ่นยนต์กระทำกับพื้นสนาม

แรงเสียดทานสถิตย์สูงสุดระหว่างล้อหุ่นยนต์กับพื้นสนามนั้นมีค่าแปรผันตามแรงกดบนพื้นผิวสัมผัสระหว่างล้อหุ่นยนต์กับพื้นสนาม ให้ N_n แทนแรงกดที่ล้อที่ n และ μ_{s} แทนค่าคงตัวสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตย์ระหว่างพื้นสนามกับล้อหุ่นยนต์ แรงเสียดทานสูงสุดระหว่างพื้นสนามกับล้อมีค่าดังสมการนี้

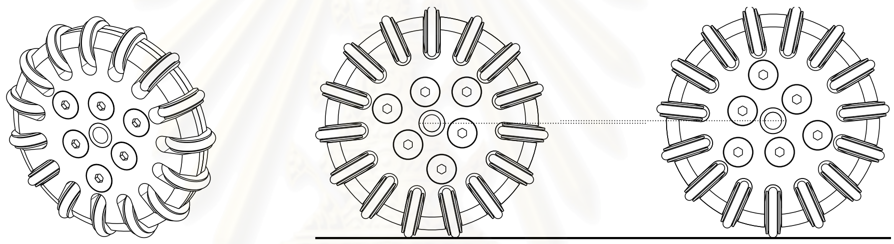
$$\max f_n = \mu_{\mathrm{s}} N_n \tag{ก.3}$$

แรงกดบนล้อหุ่นยนต์นั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยหลักอยู่สองประการคือความเร่งบนระนาบ $x-y$ ในกรอบหุ่นยนต์ และระยะห่างระหว่างล้อหุ่นยนต์กับพื้นสนามที่เกิดจากความไม่สม่ำเสมอของล้อหุ่นยนต์ รูปที่ ก.1 แสดงลักษณะของล้อชนิดเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง

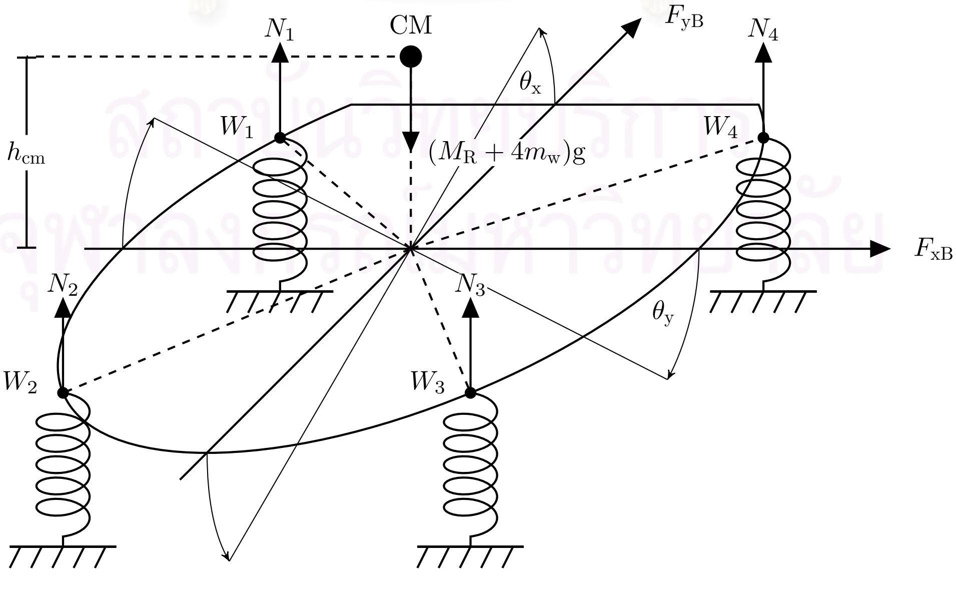
เราสามารถวิเคราะห์แรงกดที่ล้อหุ่นยนต์กระทำกับพื้นสนามได้ โดยสมมติให้ผิวสัมผัสระหว่างพื้นสนามที่เป็นพื้นพรมกับล้อหุ่นยนต์ด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์ของสปริงที่มีค่าคงตัวสปริง k_{w} รูปที่ ก.2 แสดงภาพแบบจำลองคณิตศาสตร์ของล้อทั้งสี่ที่ถูกแทนด้วยสปริง เนื่องจากมีการวิเคราะห์สมดุลของแรงบิดในแนวแกน x และแกน y ด้วย ดังนั้นจุดศูนย์กลางมวลของหุ่นยนต์ที่อยู่สูงขึ้นมาจากพื้นสนาม จึงจำเป็นสำหรับการวิเคราะห์ด้วย ในกรณีนี้เราตั้งสมมติฐานให้จุดศูนย์กลางมวลของหุ่นยนต์อยู่ในเส้นแนวดิ่งของศูนย์กลางวงกลมของหุ่นยนต์

สัญลักษณ์	ชื่อของค่าคงตัว	ปริมาณ	หน่วย
g	ความเร่งโน้มถ่วงที่ระดับน้ำทะเล	9.78	$\mathrm{m/s^2}$
μ_{s}	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตย์ระหว่างพื้นกับล้อหุ่นยนต์	–	–
μ_{k}	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ระหว่างพื้นกับล้อหุ่นยนต์	–	–
k_{w}	ค่าคงตัวสปริงระหว่างพื้นพรมกับล้อหุ่นยนต์	$\ldots$	$\mathrm{N/m}$
h_{cm}	ความสูงจุดศูนย์กลางมวลของหุ่นยนต์จากระดับมอเตอร์	0.017	m
$d_{\mathrm{y}}^{\mathrm{ac}}$	ระยะที่ติดตั้งมาตรความเร่งวัดจากจุดศูนย์กลางหุ่นยนต์ในแนวแกน y	0.00486	m
$d_{\mathrm{x}}^{\mathrm{ac}}$	ระยะที่ติดตั้งมาตรความเร่งวัดจากจุดศูนย์กลางหุ่นยนต์ในแนวแกน x	-0.05014	m

ตารางที่ ก.1: ค่าคงตัวของสภาพแวดล้อมหุ่นยนต์และค่าคงตัวที่เกี่ยวกับตัวรับรู้



รูปที่ ก.1: ลักษณะของล้อชนิดเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทาง



รูปที่ ก.2: การพิจารณาผิวสัมผัสระหว่างล้อหุ่นยนต์และพื้นสนามเป็นสปริง

ให้ N_1, N_2, N_3, N_4 เป็นแรงกดที่ล้อทั้งสี่กระทำกับพื้นสนาม สมดุลกลของแรงในแนวดิ่งจากรูปที่ ก.2 เป็นไปตามสมการนี้

$$(M_{\mathrm{R}} + 4m_{\mathrm{w}})\,\mathrm{g} = M_{\mathrm{s}}\mathrm{g} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \tag{ก.4}$$

กำหนดให้ระยะในแนวแกน z ของจุดศูนย์กลางมวลหุ่นยนต์อยู่ที่ P_{zr} เมื่อพิจารณาแรงกดที่แต่ละล้อจากรูปที่ ก.2 เราสามารถเขียนแรงกดของแต่ละล้อให้อยู่ในรูปของ $\theta_{\mathrm{x}}, \theta_{\mathrm{y}}$ และ P_{zr} ได้ดังนี้ [1]

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = k_{\mathrm{w}} \begin{bmatrix} P_{\mathrm{zr}} \\ P_{\mathrm{zr}} \\ P_{\mathrm{zr}} \\ P_{\mathrm{zr}} \end{bmatrix} - k_{\mathrm{w}} R_{\mathrm{R}} \begin{bmatrix} \cos(\beta_1) & \sin(\beta_1) \\ -\sin(\beta_2) & \cos(\beta_2) \\ -\cos(\beta_3) & -\sin(\beta_3) \\ \sin(\beta_4) & -\cos(\beta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{\mathrm{x}} \\ \theta_{\mathrm{y}} \end{bmatrix} \tag{ก.5ก}$$

เขียนแทนด้วย
$$N_{\mathrm{w}} = k_{\mathrm{w}} \left[P_{\mathrm{zr}}\right]_{4\times 1} + k_{\mathrm{w}} R_{\mathrm{R}} \mathbb{T}_2^{\mathrm{T}} \left[\theta_{\mathrm{xy}}\right] \tag{ก.5ข}$$

สังเกตได้ว่าเมทริกซ์ที่คูณกับ $[\theta_{\mathrm{xy}}]$ มีลักษณะเหมือนสองคอลัมน์แรกของเมทริกซ์ $-\mathbb{T}^{\mathrm{T}}$ เราจึงใช้สัญลักษณ์แทนเมทริกซ์นี้ด้วย $-\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}$ จากสมการ (ก.4) และ (ก.5) จะได้

$$k_{\mathrm{w}} P_{\mathrm{zr}} = \frac{1}{4}\left(M_{\mathrm{s}}\mathrm{g} - k_{\mathrm{w}} R_{\mathrm{R}} \begin{bmatrix} -\cos(\beta_1) + \sin(\beta_2) + \cos(\beta_3) - \sin(\beta_4) \\ -\sin(\beta_1) - \cos(\beta_2) + \sin(\beta_3) + \cos(\beta_4) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \theta_{\mathrm{x}} \\ \theta_{\mathrm{y}} \end{bmatrix} \right) \tag{ก.6ก}$$

หรือ
$$k_{\mathrm{w}} P_{\mathrm{zr}} = \frac{1}{4}\left(M_{\mathrm{s}}\mathrm{g} - k_{\mathrm{w}} R_{\mathrm{R}} \left[\,1\ 1\ 1\ 1\,\right] \mathbb{T}_2^{\mathrm{T}} \left[\theta_{\mathrm{xy}}\right] \right) \tag{ก.6ข}$$

ดังนั้นเราจึงเขียน N_{w} ให้อยู่ในรูปของ $[\theta_{\mathrm{xy}}]$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} M_{\mathrm{s}}\mathrm{g} \\ M_{\mathrm{s}}\mathrm{g} \\ M_{\mathrm{s}}\mathrm{g} \\ M_{\mathrm{s}}\mathrm{g} \end{bmatrix} - k_{\mathrm{w}} R_{\mathrm{R}} \left(\frac{1}{4}\mathbb{O}_{4\times 4} - \mathbb{I}_{4\times 4} \right) \begin{bmatrix} -\cos(\beta_1) & -\sin(\beta_1) \\ \sin(\beta_2) & -\cos(\beta_2) \\ \cos(\beta_3) & \sin(\beta_3) \\ -\sin(\beta_4) & \cos(\beta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{\mathrm{x}} \\ \theta_{\mathrm{y}} \end{bmatrix} \tag{ก.7ก}$$

$$N_{\mathrm{w}} = \frac{1}{4} \left[M_{\mathrm{s}} g\right]_{4\times 1} - k_{\mathrm{w}} R_{\mathrm{R}} \left(\frac{1}{4}\mathbb{O}_{4\times 4} - \mathbb{I}_{4\times 4} \right) \mathbb{T}_2^{\mathrm{T}} \left[\theta_{\mathrm{xy}}\right] \tag{ก.7ข}$$

โดยที่ $\mathbb{O}_{4\times 4}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 ที่เป็น 1 ในทุกแถวและคอลัมน์ $\mathbb{I}_{4\times 4}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 จากนั้นเราสามารถเขียนสมดุลการหมุนในแกน x และ y ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} J_{\mathrm{x}}\ddot{\theta}_{\mathrm{x}} \\ J_{\mathrm{y}}\ddot{\theta}_{\mathrm{y}} \end{bmatrix} = h_{\mathrm{cm}} \begin{bmatrix} F_{\mathrm{yB}} \\ -F_{\mathrm{xB}} \end{bmatrix} + R_{\mathrm{R}} \begin{bmatrix} \cos(\beta_1) & -\sin(\beta_2) & -\cos(\beta_3) & \sin(\beta_4) \\ \sin(\beta_1) & \cos(\beta_2) & -\sin(\beta_3) & -\cos(\beta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \tag{ก.8ก}$$

$$\mathbb{J}_{\mathrm{xy}}[\ddot{\theta}_{\mathrm{xy}}] = h_{\mathrm{cm}} \mathbb{D}^{\mathrm{T}}(1) F_{\mathrm{B}} - R_{\mathrm{R}} \mathbb{T}_2 N_{\mathrm{w}} \tag{ก.8ข}$$

โดยที่ $\mathbb{J}_{\mathrm{xy}}$ เป็นเมทริกซ์แนวแทยงมุมของโมเมนต์ความเฉื่อยของแกน x และแกน y ตามลำดับ ส่วน $\mathbb{D}(1)$ เป็นเมทริกซ์ $\mathbb{D}(\omega_{\mathrm{z}})$ ที่แทน ω_{z} ด้วย 1 ในขั้นถัดไปเราจึงรวมสมการ (ก.7) และสมการ (ก.8) เข้าด้วยกันเป็นสมการ

[1] เนื่องจากหุ่นยนต์มีการหมุนในแนวแกน x และ y น้อยมาก เราจึงใช้ θ_{x} และ θ_{y} แทน $\sin(\theta_{\mathrm{x}})$ และ $\sin(\theta_{\mathrm{y}})$ ตามลำดับ

เชิงอนุพันธ์ที่มีความสัมพันธ์ระหว่าง $[\theta_{\mathrm{xy}}]$ และ F_{B} ดังนี้

$$\mathbb{J}_{\mathrm{xy}}[\ddot{\theta}_{\mathrm{xy}}] = -R_{\mathrm{R}}\mathbb{T}_2\frac{1}{4}\left[M_{\mathrm{s}}g\right]_{4\times 1} + R_{\mathrm{R}}\mathbb{T}_2 k_{\mathrm{w}} R_{\mathrm{R}}\mathbb{Q}\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}\left[\theta_{\mathrm{xy}}\right] + h_{\mathrm{cm}}\mathbb{D}^{\mathrm{T}}(1)F_{\mathrm{B}} \quad \text{(ก.9ก)}$$

$$\mathbb{J}_{\mathrm{xy}}[\ddot{\theta}_{\mathrm{xy}}] = -\frac{1}{4}R_{\mathrm{R}}M_{\mathrm{s}}g\mathbb{T}_2\mathbb{O}_{4\times 1} + k_{\mathrm{w}}R_{\mathrm{R}}^2\mathbb{T}_2\mathbb{Q}\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}\left[\theta_{\mathrm{xy}}\right] + h_{\mathrm{cm}}\mathbb{D}^{\mathrm{T}}(1)F_{\mathrm{B}} \quad \text{(ก.9ข)}$$

โดยที่ $$\mathbb{Q} = \left(\frac{1}{4}\mathbb{O}_{4\times 4} - \mathbb{I}_{4\times 4}\right) \quad \text{(ก.9ค)}$$

เมื่อพิจารณาผลของแรงหนืดที่ต้านการเคลื่อนที่ขึ้นลงของแต่ละล้อ เราสามารถใช้วิธีเดียวกันหาผลของแรงหนืดที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ได้ ผลลัพธ์เป็นไปดังสมการต่อไปนี้

$$\mathbb{J}_{\mathrm{xy}}[\ddot{\theta}_{\mathrm{xy}}] = -\frac{1}{4}R_{\mathrm{R}}M_{\mathrm{s}}g\mathbb{T}_2\mathbb{O}_{4\times 1} + k_{\mathrm{w}}R_{\mathrm{R}}^2\mathbb{T}_2\mathbb{Q}\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}\left[\theta_{\mathrm{xy}}\right] + k_{\mathrm{vd}}R_{\mathrm{R}}^2\mathbb{T}_2\mathbb{Q}\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}[\dot{\theta}_{\mathrm{xy}}] + h_{\mathrm{cm}}\mathbb{D}^{\mathrm{T}}(1)F_{\mathrm{B}} \quad \text{(ก.10)}$$

โดยที่ k_{vd} เป็นค่าคงตัวความหนืดระหว่างล้อหุ่นยนต์กับพื้นสนาม อย่างไรก็ตามค่า k_{w} และ k_{vd} มีค่าสูงทำให้ $[\theta_{\mathrm{xy}}]$ เข้าสู่สถานะอยู่ตัวอย่างรวดเร็ว เราจึงประมาณให้ $[\ddot{\theta}_{\mathrm{xy}}]$ และ $[\dot{\theta}_{\mathrm{xy}}]$ ในสมการ (ก.10) มีค่าเป็นศูนย์ จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่าง F_{B} และ $[\theta_{\mathrm{xy}}]$ ที่สถานะอยู่ตัวดังนี้

$$-\frac{1}{4}R_{\mathrm{R}}M_{\mathrm{s}}g\mathbb{T}_2\mathbb{O}_{4\times 1} + k_{\mathrm{w}}R_{\mathrm{R}}^2\mathbb{T}_2\mathbb{Q}\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}\left[\theta_{\mathrm{xy}}\right] + h_{\mathrm{cm}}\mathbb{D}^{\mathrm{T}}(1)F_{\mathrm{B}} = 0 \quad \text{(ก.11)}$$

จากสมการ (ก.7) และ (ก.11) เราจึงหาความสัมพันธ์ระหว่าง N_{w} และ F_{B} ได้ดังนี้

$$N_{\mathrm{w}} = \frac{1}{4}M_{\mathrm{s}}g\mathbb{O}_{4\times 1} - \frac{1}{R_{\mathrm{R}}}\mathbb{Q}\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}\left(\mathbb{T}_2\mathbb{Q}\mathbb{T}_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left[\frac{1}{4}R_{\mathrm{R}}M_{\mathrm{s}}g\mathbb{T}_2\mathbb{O}_{4\times 1} - h_{\mathrm{cm}}\mathbb{D}^{\mathrm{T}}(1)F_{\mathrm{B}}\right] \quad \text{(ก.12)}$$

เราจึงใช้สมการ (ก.12) เพื่อหาค่า N_{w} จากแรงในกรอบหุ่นยนต์ F_{B} ซึ่งเมื่อนำมาพิจารณาร่วมกับสมการ (ก.3) จะทำให้เราสามารถกำหนดค่าแรงเสียดทานสูงสุดที่เป็นไปได้ในแต่ละล้อ ถ้าหากแรงเสียดทานที่จำเป็นสำหรับการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์มีค่าเกินค่านี้จะทำให้ล้อของหุ่นยนต์เกิดการลื่นไถลได้ กรณีนี้เป็นลักษณะความไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่สำคัญของระบบพลวัตในหุ่นยนต์

ภาคผนวก ข
รายละเอียดการคำนวณและหลักการเชิงตั้งฉาก

ข.1 การแพร่กระจายของความแปรปรวนระหว่างการประมาณของรุงเงขอ-คุททา

จากสมการ (2.49) และ (2.50) เพื่อลดความซับซ้อนในการคำนวณ การแพร่กระจายของความแปรปรวนของตัวแปรสถานะถูกแบ่งเป็นสี่ขั้นตอนตามการหา s_1, s_2, s_3, s_4 ในสมการ (2.49) โดยประมาณให้

$$s_1 = \mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_1)} x_1 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} \tag{ข.1ก}$$

$$s_2 = \mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)} x_2 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} \tag{ข.1ข}$$

$$s_3 = \mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)} x_3 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} \tag{ข.1ค}$$

$$s_4 = \mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_4)} x_4 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} \tag{ข.1ง}$$

โดยที่ $F_{\mathrm{Jac}}^{(x_i)} \; |i = 1, 2, 3, 4$ แทนเมทริกซ์จาโคเบียนของการหา s_i และเป็นฟังก์ชันของ x_1 จากการกระจายผลลัพธ์ของสมการ (2.50) ด้วยสมการ (2.49) และใช้การประมาณในสมการ (ข.1ก) จะได้

$$\begin{aligned} X_{(k+1)} &= x_1 + \frac{h}{6}\left(\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_1)} x_1 + 2\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)} x_2 + 2\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)} x_3 + \mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_4)} x_4\right) + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} \\ &= \left[I_{6\times 6} + \frac{h}{6}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_1)} + \frac{h}{3}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)} + \frac{h}{3}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)} + \frac{h}{6}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_4)} \right. \\ &\quad + \frac{h^2}{6}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_1)} + \frac{h^2}{6}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)} + \frac{h^2}{6}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_4)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)} \\ &\quad + \frac{h^3}{12}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_1)} + \frac{h^3}{12}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_4)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)} \\ &\quad \left. + \frac{h^4}{24}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_4)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_3)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_2)}\mathbb{F}_{\mathrm{Jac}}^{(x_1)} \right] x_1 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} \end{aligned} \tag{ข.2ก}$$

เขียนแทนด้วย $$X_{(k+1)} = \Phi_{\mathrm{RK4}} x_1 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} \tag{ข.2ข}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{ee}(k+1)} &= \mathrm{E}\left[X_{(k+1)} - \bar{X}_{(k+1)}\right]\left[X_{(k+1)} - \bar{X}_{(k+1)}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \left[\Phi_{\mathrm{RK4}} x_1 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} - \Phi_{\mathrm{RK4}}\bar{x_1} + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} + U\right]\left[\Phi_{\mathrm{RK4}} x_1 + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} - \Phi_{\mathrm{RK4}}\bar{x_1} + \mathbb{G} V_{\mathrm{C}} + U\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \Phi_{\mathrm{RK4}}\mathrm{E}\left[x_1 - \bar{x}_1\right]\left[x_1 - \bar{x}_1\right]\Phi_{\mathrm{RK4}}^{T} + E\left[U\right]\left[U\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \Phi_{\mathrm{RK4}} P_{\mathrm{ee}(k)} \Phi_{\mathrm{RK4}}^{\mathrm{T}} + R \end{aligned} \tag{ข.3}$$

ข.2 หลักการเชิงตั้งฉาก

ทฤษฎีบทของหลักการเชิงตั้งฉาก

ให้ $\mathbb{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert's space) และมี $X \in \mathbb{H}$ ซึ่ง $\mathrm{E}\left[X\right] = 0$ และ $\mathrm{E}\|X\|^2 \leqslant \infty$ สมมติให้

$$X = \eta_1 + \eta_2 \qquad | \qquad \eta_1 \in \mathbb{M}, \eta_2 \in \mathbb{M}^{\perp} \tag{ข.4}$$

โดยที่ $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}^{\perp}$ เป็นปริภูมิย่อย (subspace) ของ $\mathbb{H}$ และ $\mathbb{H} = \mathbb{M} \oplus \mathbb{M}^{\perp}$ กำหนดให้ $Z \in \mathbb{M}$ เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิ $\mathbb{M}$ ถ้าหากจะใช้ Z เพื่อประมาณ X เราต้องการหาค่าต่ำที่สุดของ $\mathrm{E}\|X - Z\|^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\|X - Z\|^2 &= \mathrm{E}\|(X - \eta_1) + (\eta_1 - Z)\|^2 \\ &= \mathrm{E}\|(X - \eta_1)\|^2 + 2\mathrm{E}\|(X - \eta_1)(\eta_1 - Z)\| + \mathrm{E}\|(\eta_1 - Z)\|^2 \\ &= \mathrm{E}\|(\eta_2)\|^2 + 2\mathrm{E}\|(\eta_2)(\eta_1 - Z)\| + \mathrm{E}\|(\eta_1 - Z)\|^2 \end{aligned} \quad \text{(ข.5)}$$

ทั้ง η_1 และ Z อยู่ในปริภูมิย่อยที่ตั้งฉากกับ η_2 ดังนั้น $\mathrm{E}\|(\eta_2)(\eta_1 - Z)\| = 0$ ดังนั้น Z ที่เท่ากับ η_1 หรือภาพฉายของ X บนปริภูมิ $\mathbb{M}$ จะทำให้ $\mathrm{E}\|(\eta_1 - Z)\|^2 = 0$ และทำให้ $\mathrm{E}\|X - Z\|^2$ มีค่าน้อยที่สุด กล่าวคือ $\mathbb{M}$ คือปริภูมิของการวัดนั่นเอง ค่าประมาณ X ที่ดีที่สุดคือภาพฉายของ X บนปริภูมิ M ซึ่งแผ่ทั่วด้วยการวัด $Y_1, Y_2, ..., Y_n$

ตัวประมาณเชิงเส้น

ให้ e แทนความผิดพลาดจากการประมาณ $X - Z$ ถ้า Z เป็นภาพฉายของ X บน $\mathbb{M}$ ซึ่งแผ่ทั่วด้วยการวัด Y หมายความว่า $e \in \mathbb{M}^{\perp}$ ซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{M}$ ทำให้

$$\mathrm{E}\|(X - Z)Y\| = 0 \quad \text{(ข.6)}$$

ถ้ากำหนดให้ $Z = AY + b$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\|(X - AY - b)Y\| &= 0 \\ \mathrm{E}\|(XY)\| - A\mathrm{E}\|(YY)\| - b\mathrm{E}\|Y\| &= 0 \end{aligned} \quad \text{(ข.7)}$$

ดังนั้น $b = 0$ เพราะต้องการให้ Z มีค่ากลางเป็นศูนย์และ Y มีค่ากลางเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$A = \frac{\mathrm{E}\|(XY)\|}{\mathrm{E}\|(YY)\|} \quad \text{(ข.8)}$$

สมการนี้เป็นหลักสำคัญที่จะนำไปใช้สำหรับตัวกรองคาลมานในวิทยานิพนธ์นี้

การประยุกต์ใช้กับตัวกรองคาลมาน

สำหรับระบบเชิงเส้นตามสมการต่อไปนี้ ที่มีความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนกระบวนการและสัญญาณรบกวนการวัดเป็น Q และ R ตามลำดับ

$$x_{(k)} = Ax_{(k-1)} + Bu_{(k-1)} + v_{(k-1)} \quad \text{(ข.9ก)}$$

$$z_{(k)} = Hx_{(k)} + w_{(k)} \quad \text{(ข.9ข)}$$

เมื่อใช้สมการ (ข.8) สำหรับการประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{x}_{(k)}$ ด้วยการวัด $z_{(k)}$ จะได้ว่า

$$\hat{x}_{(k)} - \bar{x}_{(k)} = \mathbb{A}(z_{(k)} - \bar{z}_{(k)}) \quad \text{(ข.10ก)}$$

$$\text{โดยที่} \quad \begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathrm{E}\|(xz^{\mathrm{T}})\|\mathrm{E}\|(zz^{\mathrm{T}})\|^{-1} \\ &= P_{\mathrm{xz}(k)}P^{-1}_{\mathrm{xz}(k)} \end{aligned} \quad \text{(ข.10ข)}$$

ตัวกรองคาลมานใช้ค่าประมาณตัวแปรสถานะ $\hat{x}_{(k-1)}$ และความแปรปรวน $P_{\mathrm{ee}(k-1)}$ ณ เวลา $k - 1$ เพื่อประมาณ $\bar{x}_{(k)}$, $\bar{z}_{(k)}$, $P_{\mathrm{xz}(k)}$ และ $P_{\mathrm{zz}(k)}$ ดังนี้ สำหรับการประมาณ $\bar{x}_{(k)}$

$$\bar{x}_{(k)} \approx \hat{x}^{-}_{(k)} = A\hat{x}_{(k-1)} + Bu_{(k-1)} \quad \text{(ข.11)}$$

สำหรับการประมาณ $\bar{z}_{(k)}$

$$\bar{z}_{(k)} \approx \hat{z}_{(k)} = H\hat{x}_{(k)} \tag{ข.12}$$

สำหรับการประมาณ $P_{\mathrm{xz}(k)}$ และ $P_{\mathrm{zz}(k)}$ ต้องอาศัยความแปรปรวน $P^{-}_{\mathrm{ee}(k)}$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ $P_{\mathrm{ee}(k-1)}$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
P^{-}_{\mathrm{ee}(k)} &= \mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[Ax_{(k-1)} + Bu_{(k-1)} + v_{(k-1)} - A\hat{x}_{(k-1)} - Bu_{(k-1)}\right] \\
&\qquad \cdot \left[Ax_{(k-1)} + Bu_{(k-1)} + v_{(k-1)} - A\hat{x}_{(k-1)} - Bu_{(k-1)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= A\mathrm{E}\left[x_{(k-1)} - \hat{x}_{(k-1)}\right]\left[x_{(k-1)} - \hat{x}_{(k-1)}\right]^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \\
&\qquad + A\mathrm{E}\left[x_{(k-1)} - \hat{x}_{(k-1)}\right]\left[v_{(k-1)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&\qquad + \mathrm{E}\left[v_{(k-1)}\right]\left[x_{(k-1)} - \hat{x}_{(k-1)}\right]^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} + \mathrm{E}\left[v_{(k-1)}\right]\left[v_{(k-1)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= AP_{\mathrm{ee}(k-1)}A^{\mathrm{T}} + Q
\end{aligned} \tag{ข.13}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{ez}(k)} &\approx \mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[z_{(k)} - H\hat{x}^{-}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[Hx_{(k)} + w_{(k)} - H\hat{x}^{-}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} \\
&\qquad + \mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[w_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= P_{\mathrm{ee}(k-1)}H^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{ข.14}$$

และ

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{zz}(k)} &\approx \mathrm{E}\left[z_{(k)} - H\hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[z_{(k)} - H\hat{x}^{-}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[Hx_{(k)} + w_{(k)} - H\hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[Hx_{(k)} + w_{(k)} - H\hat{x}^{-}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= H\mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} + H\mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)}\right]\left[w_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&\qquad + \mathrm{E}\left[w_{(k)}\right]\left[x_{(k)} - \hat{x}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} + \mathrm{E}\left[w_{(k)}\right]\left[w_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= HP_{\mathrm{ee}(k-1)}H^{\mathrm{T}} + R
\end{aligned} \tag{ข.15}$$

จะได้สมการประมาณตัวแปรสสถานะ $\hat{x}_{(k)}$ เป็น

$$\hat{x}_{(k)} = \hat{x}^{-}_{(k)} + P_{\mathrm{ez}(k)}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}(z_{(k)} - \hat{z}_{(k)}) \tag{ข.16}$$

จากสมการนี้ความแปรปรวนของความผิดพลาดของการประมาณตัวแปรสถานะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{ee}(k)} &= \mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}_{(k)}\right]\left[x_{(k)} - \hat{x}_{(k)}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathrm{E}\left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)} - P_{\mathrm{ez}(k)}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}H(x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)})\right] \\
&\qquad \cdot \left[x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)} - P_{\mathrm{ez}(k)}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}H(x_{(k)} - \hat{x}^{-}_{(k)})\right]^{\mathrm{T}} \\
&= P^{-}_{\mathrm{ee}(k)} - P_{\mathrm{ez}(k)}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}HP^{-}_{\mathrm{ee}(k)} - P^{-}_{\mathrm{ee}(k)}H^{\mathrm{T}}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}P_{\mathrm{ze}(k)} - P_{\mathrm{ez}(k)}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}HP^{-}_{\mathrm{ee}(k)}H^{\mathrm{T}}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}P_{\mathrm{ze}(k)} \\
&= P^{-}_{\mathrm{ee}(k)} - P_{\mathrm{ez}(k)}P^{-1}_{\mathrm{zz}(k)}P_{\mathrm{ze}(k)}
\end{aligned} \tag{ข.17}$$

ภาคผนวก ค
รายละเอียดของการแปลงอันสเซนต์

ค.1 การแยกโชเลสกีแทนการหารากที่สองของเมทริกซ์ความแปรปรวน

การกระจายจุดซิกมาเพื่อให้จุดซิกมามีค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ และความแปรปรวน P เหมือนตัวแปรสุ่มเดิมกล่าวคือ การกระจายจุดซิกมาต้องการกลุ่มของเวกเตอร์ $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ที่มีคุณสมบัติดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} l_i l_i^{\mathrm{T}} = P \qquad [l_1 \; l_2 \; \ldots \; l_n] \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = P \qquad LL^{\mathrm{T}} = P \tag{ค.1}$$

โดยที่ $l_i \cdot l_j = 0;\ i \neq j$ วิธีสำหรับการหาเมทริกซ์ L วิธีหนึ่งคือการหารากที่สองของเมทริกซ์ P ซึ่งใช้การคำนวณมาก อีกวิธีหนึ่งซึ่งใช้การคำนวณน้อยกว่าคือการแยกโชเลสกี

การแยกโชเลสกี (cholesky decomposition) แยกเมทริกซ์ P ใด ๆ ซึ่งสมมาตร (symmetric) และเป็นบวกแน่นอน (positive definite) เป็นเมทริกซ์ LL^{T} โดยที่ L เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) ดังนี้

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n2} \end{bmatrix} \tag{ค.2}$$

ดังนั้นเมทริกซ์ P ซึ่งสมมาตรและเป็นบวกแน่นอนจึงมีค่าเปรียบเทียบกับเมทริกซ์ L ได้

$$P = LL^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & & & \text{symmetrical} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1}l_{11} & l_{n1}l_{21} + l_{n2}l_{22} & \cdots & l_{n1}^2 + l_{n2}^2 + \ldots + l_{nn}^2 \end{bmatrix} \tag{ค.3}$$

สมาชิกของเมทริกซ์ L จึงมีค่าดังสมการ (ค.4)

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(p_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), \quad \text{for } i > j \tag{ค.4ก}$$

$$l_{ii} = \sqrt{p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \tag{ค.4ข}$$

เมื่อได้เมทริกซ์ L แล้ว สมการ (3.17) จึงถูกแทนด้วยสมการ (ค.5)

$$\mathcal{X}_0 = \bar{x} \qquad \mathcal{W}_0 = \kappa \frac{1}{n+\kappa} \tag{ค.5ก}$$

$$\mathcal{X}_i = \bar{x} + [\mathrm{Chol}\left((n+\kappa)P_{\mathrm{xx}}\right)]_i \qquad \mathcal{W}_i = \frac{1}{2}\frac{1}{n+\kappa} \tag{ค.5ข}$$

$$\mathcal{X}_{i+n} = \bar{x} - [\mathrm{Chol}\left((n+\kappa)P_{\mathrm{xx}}\right)]_i \qquad \mathcal{W}_{i+n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n+\kappa} \tag{ค.5ค}$$

เมื่อ $\mathrm{Chol}(\cdot)$ แทนฟังก์ชันการแยกโชเลสกีที่ให้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ L

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายศิริชัย พรสรายุทธ เกิดเมื่อวันที่ 12 มกราคม 2527 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร เป็นบุตรคนที่สองของ นายจรูญวัฒน์ พรสรายุทธ และ นางจรรยา พรสรายุทธ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จากคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีการศึกษา 2548 ด้วยโครงงานเรื่องระบบควบคุมแบบยอมอนุโลมได้ชนิดปฏิบัติการสำหรับแขนกลในระนาบสองมิติ ในสังสัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ระหว่างการศึกษาระดับปริญญาตรีมีความสนใจเกี่ยวกับหุ่นยนต์หลายชนิด โดยเฉพาะอย่างยิ่งหุ่นยนต์เดินหกขา มีความเชี่ยวชาญด้านการออกแบบและควบคุมด้วยระบบวงจรฝังตัว ในปี 2547 ชนะเลิศการแข่งขันหุ่นยนต์เตะฟุตบอลขนาดเล็กประเทศไทยร่วมกับชมรมนักประดิษฐ์วิศวกรรมในนามของทีม Plasma-Z เพื่อเป็นตัวแทนของประเทศไทยไปแข่งขัน ณ ประเทศโปรตุเกส ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ในระดับปริญญามหาบัณฑิต ในที่ปรึกษาของ ผศ.ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย