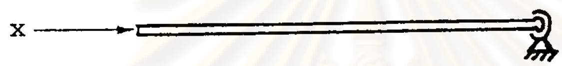
บทที่ 3

การแก้ปัญหา

การแก้ปัญหาสมการ (2.17) ซึ่งเป็นสมการของการโก่งงอ ทำได้โดยใช้วิธีของกาเลอกินจากภาคผนวก ข. โดยให้สภาพของการรองรับที่ขอบของเปลือกบางเป็นแบบธรรมดา (simply supported)



รูปที่ 5 การรองรับแบบธรรมดาที่ขอบของเปลือกบาง

ซึ่งจะทำให้สภาพของขอบของเปลือกบางที่ $x = 0, a$ เป็น

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ M_{xx} &= 0 \\ u &= 0 \\ N_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

และที่ $y = 0, b$ เป็น

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ M_{yy} &= 0 \\ v &= 0 \\ N_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ฟังก์ชั่นของ w ที่ทำให้สอดคล้องกับสภาพของขอบทั้งหมดคือ

$$w = \sum_{m}^{\infty} \sum_{n}^{\infty} A_{mn} \sin \lambda_{mx} \sin \lambda_{ny} \tag{3.3}$$

โดยที่ $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$ และ $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$

เมื่อแทนสมการที่ (3.3) ลงในสมการ (2.17) แล้วใช้วิธีของการเลอกินจะได้กาเลอกินอินทิกรัล (ดูภาคผนวก ข.) ซึ่งในอินทิกรัลนี้จะมีค่า

$$\int_o^a\int_o^b \sin\lambda_{mx}\,\sin\lambda_{ny}\,\sin\lambda_{ix}\,\sin\lambda_{jy}\,dxdy = \begin{cases} \frac{ab}{4} & m = i,\ n = j \\ 0 & m \neq i,\ n \neq j \end{cases}$$

$$\int_o^b\int_o^a \cos\lambda_{mx}\,\cos\lambda_{ny}\,\sin\lambda_{ix}\,\sin\lambda_{jy}\,dxdy = \begin{cases} 0 & m = i,\ n = j \\ 0 & i \pm m \text{ เป็นเลขคู่},\ j \pm n \\ \dfrac{4\lambda_i\lambda_j}{(\lambda_i^2-\lambda_m^2)(\lambda_j^2-\lambda_n^2)} & i \pm m \text{ เป็นเลขคี่},\ j \pm n \end{cases}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\left((\lambda_i^2 + \lambda_j^2)^4 + \gamma\lambda_i^2\,\lambda_j^2\right)A_{ij} - \frac{16\,k_{xy}}{ab}\sum_m^\infty\sum_n^\infty \frac{\lambda_m\lambda_n\lambda_i\lambda_j(\lambda_m^2+\lambda_n^2)^2A_{mn}}{(\lambda_i^2-\lambda_m^2)(\lambda_j^2-\lambda_n^2)} = 0 \quad (3.4)$$

โดยที่ $(m \pm i)$ และ $(n \pm j)$ เป็นเลขคี่เท่านั้น และจากสมการ (3.4) จัดรูปใหม่ได้

$$\left(\pi^4(i^2 + j^2\beta^2)^4 + \alpha i^2j^2\beta^2\right)A_{ij} + 16q^*\sum_m^\infty\sum_n^\infty \frac{mnij(m^2+n^2\beta^2)^2}{(i^2-m^2)(j^2-n^2)}A_{mn} = 0 \quad (3.5)$$

โดยที่

$$\beta = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \gamma a^4 = 48(1 - v^2)\left(\frac{c}{h}\right)^2\beta^2$$

$$q^* = \frac{qa^4}{DC} = a^2\beta k_{xy} = \frac{2a^2\beta N_{xy}^o}{D}$$

ซึ่งจากสมการ (3.5) แบ่งออกได้เป็นสมการสองชุดคือที่ $m \pm n$ เป็นเลขคู่และ $m \pm n$ เป็นเลขคี่ ซึ่งสมการทั้งสองนี้ ให้ค่า q^* แตกต่างกันคือ ชุดที่ $m \pm n$ เป็นเลขคู่จะให้ค่า q^* ต่ำ

กว่าชุดที่ $m \pm n$ เป็นเลขคี่สำหรับการหาแรงวิกฤติที่ทำให้เกิดการโก่งงอนั้นเราจะใช้ค่าของแรง-วิกฤติที่ต่ำที่สุด ดังนั้นในที่นี้สมการชุดที่ $m \pm n$ เป็นเลขคู่จึงเหมาะสมที่จะนำมาพิจารณาในการคำนวณ

สำหรับการคำนวณทำได้โดยกระจายสมการ (3.5) ออกให้อยู่ในรูปของดีเทอร์มิเนนท์-ซึ่งจะมี q^* เป็นตัวที่ต้องการทราบค่า แล้วทำการแก้ดีเทอร์มิเนนท์หาค่าของ q^* ออกมาก็จะทำให้ได้ค่าของแรงวิกฤติตามต้องการ