บทที่ 2

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. สมมติฐาน

ในการเขียนสมการดิฟเฟอร์เรนเชียล เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาของการโก่งงอของเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ มีข้อสมมติฐานสำหรับเปลือกบางแบบตื้นดังต่อไปนี้

1. เปลือกบางมีความหนาน้อยมาก นั่นคือ $h/R << 1$ โดยที่ R เป็นรัศมีความโค้งที่สั้นที่สุดของเปลือกบาง
2. เปลือกบางมีการเปลี่ยนรูปร่างไปเมื่อเกิดการโก่งงอ
3. การโก่งงอเป็นแบบยืดหยุ่นได้และวัสดุเป็นไปตามกฎของฮุค
4. เส้นตั้งฉากกับระนาบของเปลือกบางยังคงเป็นเส้นตั้งฉากหลังจากเกิดการโก่งงอ
5 ความชันของผิวของเปลือกบางมีค่าน้อย ซึ่งสมมติได้ว่าเปลือกบางเป็นแบบตื้น -- (shallow)

2. ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและดิสเพลซเมนท์

สำหรับความเครียดและดิสเพลซเมนท์ ฟลูกกี้[5] ได้เขียนสมการสำหรับเปลือกบางไว้-ดังนี้

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - wz_{,ij} \qquad (2.1)$$

$$\varepsilon_{kk} = u_{k,k} - wz_{,kk} \qquad (2.2)$$

3. ความสัมพันธ์ของโมเมนต์รีซัลแต้นและสเตรสรีซัลแต้น

สำหรับเปลือกบางแบบตื้นจะมีความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนท์รีซัลแต้นกับดีเฟลคชั่นคือ

$$M_{ij} = -D\left(\nu w_{,kk}\,\delta_{ij} + (1-\nu)w_{,ij}\right) \tag{2.3}$$

และความสัมพันธ์ระหว่างสเตรสรีซัลแต้นกับความเครียดคือ

$$N_{ij} = K\left(\nu\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + (1-\nu)\varepsilon_{ij}\right) \tag{2.4}$$

โดยที่ $\delta_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ และ $i = 1,2$ $j = 1,2$

$\delta_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$ $k = 1,2$

4. สมการของการสมดุลย์

สำหรับสมการของการสมดุลย์ของเปลือกบางแบบตื้น ก่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง มีสมการของการสมดุลย์คือ

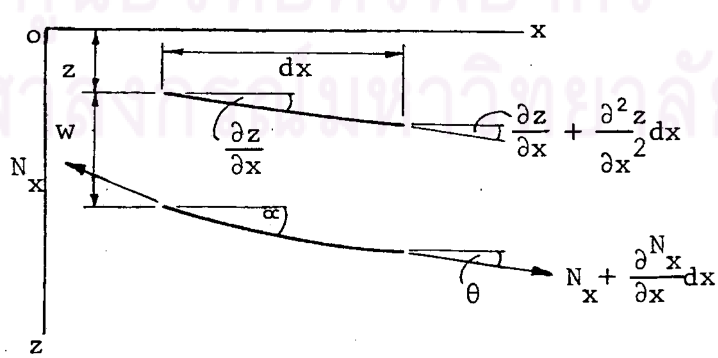
$$N_{ij,j} = 0 \tag{2.5}$$

$$Q_{i,i} + (N_{ij}z_{,j})_{,i} = 0 \tag{2.6}$$

$$M_{ji,j} - Q_i = 0 \tag{2.7}$$

ในการหาสมการของการโก่งงอ จะต้องเขียนสมการให้อยู่ในรูปของการสมดุลย์ของเปลือกบางในขณะที่เปลี่ยนรูป ในกรณีนี้ผลของการรวมแรงในแนวดิ่งจะผิดไปจากสมการ (2.6) ซึ่งจะหาค่าใหม่ได้ดังนี้

4.1 พิจารณาระนาบ xz



รูป 2 แรงบน element ของเปลือกบางในระนาบ xz

จากรูป 1 มุม α และ θ มีค่าน้อยมากดังนั้น

$$\alpha \simeq \sin\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\partial}{\partial x}(w + z)$$

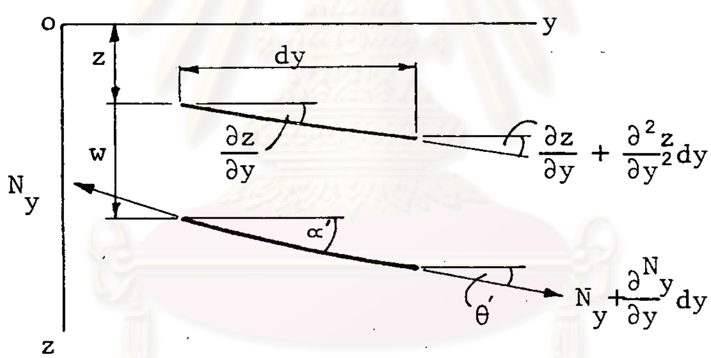
$$\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta = \alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}(w + z) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w + z)dx$$

รวมแรงในแนว z ของ Nx และตัดเทอมที่มีออร์เดอร์สูงกว่าสองทิ้ง

$$F_{zx} = -N_x d_y \sin\alpha + (Nx + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx)dy \sin\theta$$

$$= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dxdy + N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dxdy + \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dxdy + \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} dxdy \qquad (2.8.1)$$

4.2 <u>พิจารณาระนาบ yz</u>



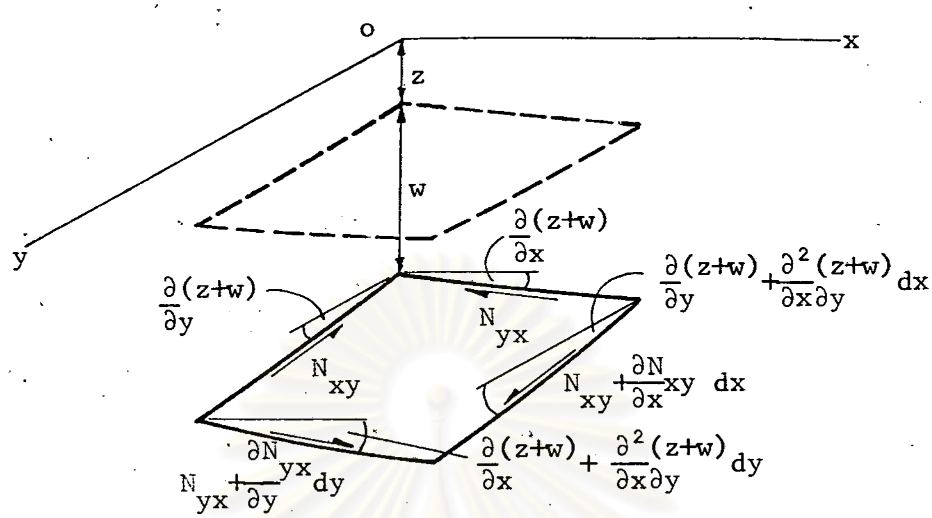
รูป 3 แรงบน element ของเปลือกบางในระนาบ yz

ในทำนองเดียวกับหัวข้อ 4.1 เมื่อรวมแรงในแนว z ของ N_y จะได้

$$F_{zy} = N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dxdy + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} dxdy + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} dxdy \qquad (2.8.2)$$

4.3 <u>พิจารณาระนาบ xy</u>

ในทำนองเดียวกับหัวข้อ 4.1 เมื่อรวมแรงในแนว z ของ N_{xy} และ N_{yx} แล้วจะได้



รูป 4 แรงบน element ของเปลือกบางในระนาบ xy

$$F_{zxy} = N_{yx}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(w+z)dxdy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(w+z)dxdy$$

$$+ N_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(w+z)dxdy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(w+z)dxdy \qquad (2.8.3)$$

จากสมการ (2.8.1), (2.8.2) และ (2.8.3) รวมกันจะได้เป็นแรงในแนว z - ทั้งหมด

$$F_z = \Big(N_x\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big) + 2N_{xy}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)$$

$$+ N_y\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big)\Big)dxdy$$

หรือ $$F_z = (N_{ij}\, w_{,ij} + N_{ij}\, z_{,ij})dxdy \qquad (2.8.4)$$

จากสมการ (2.8.4) ทำให้สมการของการสมดุลย์สมการที่ (2.6) เปลี่ยนไปคือ

$$Q_{i,i} + N_{ij}(w+z)_{,ij} = 0$$

ดังนั้นสมการของการสมดุลย์ของเปลือกบางเมื่อเปลี่ยนรูปไปแล้วคือ

$$N_{ij,j} = 0 \qquad (2.9)$$

$$Q_{i,i} + N_{ij}(w+z)_{,ij} = 0 \qquad (2.10)$$

$$M_{ji,j} - Q_i = 0 \tag{2.11}$$

จากสมการ (2.9) ถึง (2.11) สามารถรวมกันได้เป็นสมการเดียวโดยการกำจัดโมเมนท์รีซัลแต้น M_{ij} และแรงทรานสเวิสเชีย (transverse shear force) Q_i ออกโดยแทนสมการ (2.11) ลงในสมการ (2.10) จะได้

$$M_{ji,ji} + N_{ij}(w + z)_{,ij} = 0 \tag{2.12}$$

แทนสมการ (2.3) ลงในสมการ (2.12) จะได้

$$- D\nabla^4 w + N_{ij}(w + z)_{,ij} = 0 \tag{2.13}$$

ในการวิเคราะห์ถึงการโก่งงอ โดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนเราจะสมมติให้

$$N_{ij} = N^o_{ij} + N^1_{ij}$$

$$M_{ij} = M^o_{ij} + M^1_{ij}$$

$$w = w^o + w^1$$

โดยที่ "o" หมายถึงค่าที่เกิดจากการใช้ทฤษฎีเมมเบรน และ "1" หมายถึงค่าน้อย ๆ (infinitesimal quantities) ที่ทำให้เปลือกบางเกิดการโก่งงอ

ในที่นี้ $M^o_{ij} = 0$

$w^o =$ ค่าคงที่

และ $|(\ )^1| << |(\ )^o|$

แทนสมการเหล่านี้ลงในสมการ (2.13) และคิดว่า

$$|(\ )^1||(\ )^1| << |(\ )^o||(\ )^1|$$

ดังนั้นจะได้สมการของการโก่งงอคือ

$$D\nabla^4 w^1 = N^o_{ij}\ w^1{}_{,ij} + N^o_{ij}\ z_{,ij} + N^1_{ij}\ z_{,ij} + N^1_{ij}\ w^1{}_{,ij}$$

สำหรับ $N^1_{ij}\ w^1{}_{,ij}$ ถือว่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าอื่น ๆ เพราะฉะนั้นตัดทิ้งได้ ดังนั้น

$$D\nabla^4 w^1 = N^o_{ij}\ w^1{}_{,ij} + N^o_{ij}\ z_{,ij} + N^1_{ij}\ z_{,ij} \tag{2.14}$$

สำหรับเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ที่อยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอต่อพื้น

ที่ภาพฉาย เมื่อใช้ทฤษฎีเมมเบรนจะได้ค่าของสเตรรีซัลแต้นเป็น

$$N_x^o = N_y^o = 0$$

$$N_{xy}^o = -\frac{q}{2k} = \text{ค่าคงที่}$$

และจากคุณสมบัติทางเรขาคณิตของเปลือกบางรูปไฮปาร์ ซึ่งมีสมการพื้นผิวเป็น

$$z = kyx = \frac{c}{ab}\,xy$$

เพราะฉะนั้น $z_{,xx} = z_{,yy} = 0$

$$z_{,xy} = k$$

ดังนั้นจากสมการ (2.14) ซึ่งเป็นสมการของการโก่งงอ เมื่อทำให้เป็นสมการสำหรับเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์จะได้

$$D\nabla^4 w = 2N_{xy}^o\, w_{,xy} + 2N_{xy}^o\, k + 2N_{xy}\, k \tag{2.15}$$

โดยที่ N_{xy} ก็คือ N_{xy}^1 นั่นเอง

การแก้ปัญหาในสมการ (2.15) จะกระทำได้สะดวกถ้าสามารถทำให้สเตรสรีซัลแต้น N_{xy} ให้อยู่ในเทอมของ W เพื่อให้มีตัวแปรเหลือเพียงตัวเดียว สำหรับค่า N_{xy} ที่จัดอยู่ในเทอมของ w แล้วจากภาคผนวก ก. คือ

$$N_{xy} = -\,2kEh\nabla^{-4} w_{,xxyy} \tag{2.16}$$

แทนสมการ (2.16) ลงในสมการ (2.15) แล้วโอเปอเรท (operate) ด้วย ∇^4 ได้

$$\nabla^8 w + \gamma W_{,xxyy} - k_{xy}\nabla^4 W_{,xy} = 0 \tag{2.17}$$

โดยที่ $\gamma = \frac{4k^2Eh}{D} = \frac{48(1-v^2)c^2}{h^2a^2b^2}$

$$N_{xy}^o = -\frac{qab}{2c} = -\frac{qa^2}{2\beta c}$$

$$k_{xy} = \frac{2\,N_{xy}^o}{D}$$

$$\beta = \frac{a}{b}$$

สมการที่ (2.17) เป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลของการโก่งงอของเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ ซึ่งจะได้แก้สมการนี้ในบทต่อไป