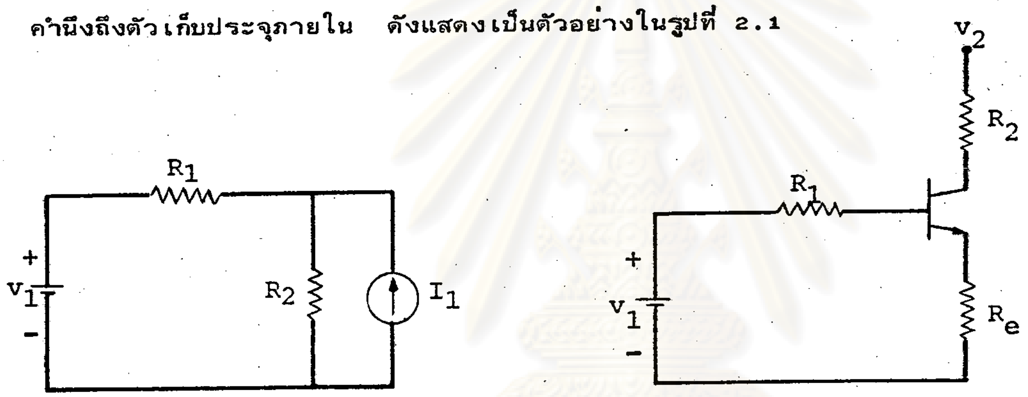
บทที่ 2

การวิเคราะห์วงจรต้านทานเชิงเส้น

2.1 การจำแนกประเภทวงจร

เราอาจจำแนกประเภทของวงจรไฟฟ้าตามชนิดของสมการวงจรได้เป็น 2 ประเภทคือ

1) วงจรต้านทาน (resistive circuit) หมายถึงวงจรที่มีสมการวงจรเป็นสมการพีชคณิต (algebraic equation) ล้วนๆ ได้แก่วงจรซึ่งไม่มีองค์ประกอบที่สามารถจำสถานะของตัวเอง (memory element) วงจรประเภทนี้อาจมีองค์ประกอบต่างๆ เช่น แหล่งกำเนิดแรงดัน แหล่งกำเนิดกระแส ความต้านทาน และอุปกรณ์สารกึ่งตัวนำทุกชนิดที่ไม่คำนึงถึงตัวเก็บประจุภายใน ดังแสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 2.1

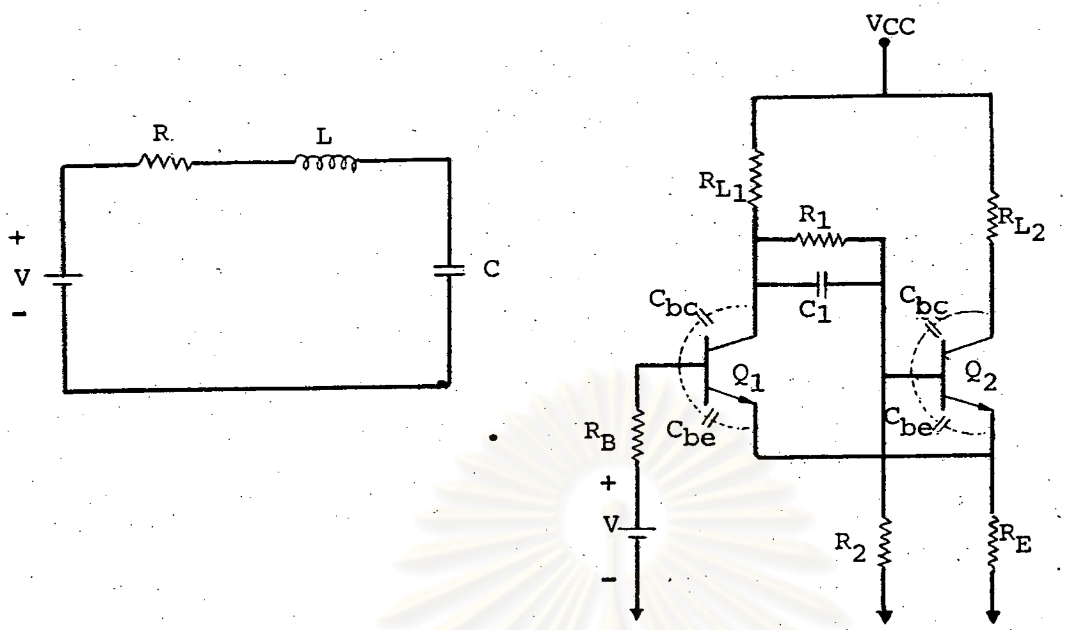


รูปที่ 2.1 ตัวอย่างของวงจรต้านทาน

2) วงจรพลวัต (dynamic circuit) หมายถึงวงจรที่มีสมการวงจรบางสมการเป็นสมการอนุพันธ์ (differential equation) ได้แก่วงจรซึ่งมีองค์ประกอบบางตัวที่สามารถจำสถานะของตัวเองได้ วงจรประเภทนี้จะมีอุปกรณ์ที่เป็น ตัวเก็บประจุ ตัวเหนี่ยวนำ หรืออุปกรณ์ของสารกึ่งตัวนำที่คำนึงถึงตัวเก็บประจุภายในอยู่ด้วย ดังแสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 2.2

ในบางกรณีวงจรพลวัตอาจให้สมการวงจรเป็นสมการพีชคณิตล้วนๆ ได้เช่น วงจรในขณะที่อยู่ในจุดทำงานสงบ เป็นต้น

นอกจากนี้เรายังสามารถจำแนกประเภทวงจรตามลักษณะสมบัติของอุปกรณ์ในวงจรได้เป็น 2 ประเภท คือ วงจรเชิงเส้น (linear circuit) และวงจรไม่เชิงเส้น (nonlinear circuit) วงจรเชิงเส้นหมายถึงวงจรที่ประกอบด้วยอุปกรณ์ซึ่งมีกราฟลักษณะสมบัติเป็นเส้นตรง ส่วนวงจรไม่เชิงเส้นนั้นจะมีอุปกรณ์บางตัวที่มีกราฟลักษณะสมบัติไม่เป็นเส้นตรง ตัวอย่างของอุปกรณ์เชิงเส้นได้แก่ ตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ เป็นต้น



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างของวงจรพลวัต

สำหรับ ไดโอด ทรานซิสเตอร์ และออปแอมป์ แม้ความเป็นจริงจะเป็นอุปกรณ์ไม่เชิงเส้น แต่ในทางปฏิบัติเราสามารถประมาณให้เป็นอุปกรณ์เชิงเส้นได้ถ้าหากอุปกรณ์เหล่านี้ทำงานในภาวะใดภาวะหนึ่งเท่านั้น เช่น ทรานซิสเตอร์ที่ทำงานในภาวะไวงาน (active) ตลอดหรือไดโอดที่ทำงานในภาวะนำกระแสตลอดเวลา

เนื้อหาของบทนี้จะกล่าวถึงวิธีสร้างและแก้สมการวงจรต้านทานเชิงเส้นเท่านั้น ส่วนวงจรพลวัตและวงจรไม่เชิงเส้นนั้น เราจะกล่าวถึงอย่างละเอียดในบทที่3 และ 4 ตามลำดับ การที่เราแยกพิจารณาเช่นนี้เพราะว่า เทคนิคที่ใช้ในการแก้สมการของวงจรเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นนั้นต่างกัน และวิธีแก้สมการพีชคณิตของวงจรต้านทานก็ต่างกับวิธีการแก้สมการอนุพันธ์ของวงจรพลวัต เนื่องจากการสร้างและแก้สมการของวงจรต้านทานเชิงเส้นนั้นเป็นวิธีที่เข้าใจได้ง่ายที่สุด จึงขอกล่าวถึงก่อนในบทนี้ และก็จะได้แนะนำให้รู้จักหลักการใช้ตราประจำอุปกรณ์ (device stamp) เพื่อสร้างสมการวงจรซึ่งเป็นหลักการที่จะนำไปใช้ในบทอื่นๆ อีกด้วย

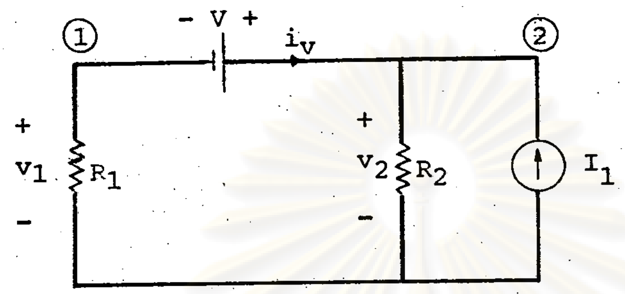
2.2 การสร้างสมการวงจรด้วยวิธีโมดิฟายด์โนดัล

ในทางทฤษฎีวงจร (circuit theory) วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งอาจมีสมการวงจรได้หลายแบบขึ้นอยู่กับการกำหนดตัวแปรของวงจรและกฎทางไฟฟ้าที่ใช้ในการสร้างสมการ วิธีการสร้างสมการที่ใช้กันทั่วไปมีอยู่ 4 วิธีตามตารางที่ 2.1

ชื่อวิธี	ตัวแปรของวงจร	กฎทางไฟฟ้า
Node Analysis	node voltage	กฎกระแส (Kirchoff current law)
Mesh Analysis	mesh current	กฎแรงดัน (Kirchoff voltage law)
Loop Analysis	loop current	กฎแรงดัน
Cut-set Analysis	tree branch voltage	กฎกระแส

ตารางที่ 2.1 การเปรียบเทียบวิธีต่างๆ ในการสร้างสมการวงจร

รายละเอียดขั้นตอนการสร้างสมการตามวิธีดังกล่าวข้างต้นนี้จะพบได้ในหนังสือที่เกี่ยวกับทฤษฎีวงจรทั่วไปเช่น [4], [7] วิธีที่ใช้กันมากที่สุดคือ Node Analysis เพราะแรงดันโนด (node voltage) เป็นตัวแปรที่เราต้องการทราบค่า อย่างไรก็ดีวิธีนี้มีจุดอ่อนตรงที่ไม่สามารถนำไปใช้โดยตรงกับวงจรบางชนิดได้เช่น วงจรที่มีแหล่งกำเนิดแรงดันต่ออยู่ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.3 การสร้างสมการของวงจรในรูปที่ 2.3 ด้วยวิธี Node Analysis



รูปที่ 2.3 ตัวอย่างวงจรที่ไม่สามารถใช้วิธี Node Analysis สร้างสมการโดยตรงได้

นั้นจำเป็น ต้องอาศัยการแปลงแหล่งกำเนิดแรงดันให้เป็นแหล่งกำเนิดกระแสก่อน จึงจะสามารถสร้างสมการได้

จากสาเหตุข้างต้นนี้จึงได้มีผู้คิดค้นวิธีสร้างสมการวงจรแบบอื่นๆ โดยอาศัยการดัดแปลงจากวิธี Node Analysis และให้ชื่อว่า 'โมดิฟายด์โนดัล (Modified Nodal) [5]' วิธีนี้ยอมให้กระแสของอุปกรณ์บางตัวเช่น กระแสของแหล่งกำเนิดแรงดัน และกระแสของตัวเหนี่ยวนำ เป็นตัวแปรของวงจรได้โดยไม่ต้องมีการดัดแปลงวงจรเดิมเสียก่อน ทำให้สะดวกต่อการนำไปเขียนเป็นโปรแกรม ตัวอย่างเช่นสมการของวงจรต้านทานในรูปที่ 2.3 ที่สร้างโดยวิธีโมดิฟายด์โนดัลนั้นเขียนได้ดังนี้

$$KCL_1 : \frac{v_1}{R_1} + i_V = 0 \qquad - (2.1\ ก)$$

$$KCL_2 : \frac{v_2}{R_2} - i_V = I_1 \qquad - (2.1\ ข)$$

$$BR_V : -v_1 + v_2 = V \qquad - (2.1\ ค)$$

สำหรับวงจรต้านทานเชิงเส้น เราสามารถเขียนสมการวงจรให้อยู่ในรูปของสมการเมตริก Ax = b ได้เสมอ โดยที่ x เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรวงจร ส่วนเมตริก A และเวกเตอร์ b นั้นเป็นค่าคงที่ เพื่อให้ช่วยเข้าใจที่มาของสมการวงจรได้ง่ายขึ้น เราจะเขียนสมการเมตริกนี้ให้อยู่ในรูปของตารางได้เป็น

x	
A	b

—(2.2)

ดังนั้นเราจะเขียนสมการ (2.1) เสียใหม่ในรูปของตารางได้ดังแสดงในรูปที่ 2.4

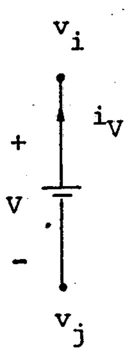
	v_1	v_2	i_V	b
KCL_1	$\frac{1}{R_1}$		1	
KCL_2		$\frac{1}{R_2}$	-1	I
BR_V	-1	+1		V

รูปที่ 2.4 ตารางสมการเมตริกของวงจรในรูปที่ 2.3

2.3 ตราประจำอุปกรณ์

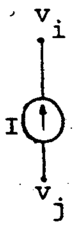
เมื่อพิจารณาถึงการสร้างสมการเมตริกของวงจรในแง่ของการเขียนโปรแกรมแล้ว วิธีโมดิฟายด์โนดัลเป็นวิธีที่อำนวยให้เราสามารถป้อนสมการลักษณะสมบัติของอุปกรณ์แต่ละตัวลงในสมการวงจรได้อย่างอิสระ อุปกรณ์แต่ละชนิดจึงมีสมการเฉพาะของตัวซึ่งเราสามารถนำไปแทนลงในสมการของวงจรตามตำแหน่งของแรงดันโนด และกระแสที่เกี่ยวข้องกับอุปกรณ์นั้น ดังนั้นจึงได้มีการกำหนดตราประจำอุปกรณ์ (device stamp) ซึ่งเป็นตารางหรือสูตรที่บอกว่าค่าของอุปกรณ์นั้นๆ ควรจะถูกโหลดเข้ายังตำแหน่งใดของเมตริก A และเวกเตอร์ b การกำหนดตราประจำอุปกรณ์นั้นก็ต้องให้สอดคล้องกับวิธีโมดิฟายด์โนดัลด้วย

ในบทนี้เราจะยกตัวอย่างตราประจำอุปกรณ์ของแหล่งกำเนิดแรงดัน แหล่งกำเนิดกระแส และตัวต้านทาน ดังแสดงในรูปที่ 2.5 สำหรับตราประจำอุปกรณ์พลวัต และอุปกรณ์ไม่เชิงเส้นนั้น จะกล่าวในบทที่ 3 และ 4 ตามลำดับ



	v_i	v_j	i_V	b
KCL_i			-1	
KCL_j			1	
BR	1	-1		V

(ก) แหล่งกำเนิดแรงดัน



	v_i	v_j	b
KCL_i			I
KCL_j			-I

(ข) แหล่งกำเนิดกระแส

	v_i	v_j
KCL_i	$\frac{1}{R}$	$-\frac{1}{R}$
KCL_j	$-\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$

(ค) ตัวต้านทาน

รูปที่ 2.5 ตราประจำอุปกรณ์ (ก) แหล่งกำเนิดแรงดัน (ข) แหล่งกำเนิดกระแส (ค) ความต้านทาน

จากรูปที่ 2.5 เมื่อเปรียบเทียบกับสมการเมตริกของวงจรในรูปที่ 2.4 แล้วจะเห็นว่า เราสามารถสร้างสมการเมตริกของวงจรได้อย่างง่ายๆ โดยการกำหนดตราประจำอุปกรณ์ของอุปกรณ์ต่างๆ ขึ้นมาก่อน แล้วไหลดค่าของอุปกรณ์นั้นๆ ตามตราประจำอุปกรณ์ที่ได้กำหนดไว้แล้วอย่างอิสระ

2.4 <u>การแก้สมการเมตริกด้วยวิธีแยกตัวประกอบแอล-ยู (LU-factorization)</u>

การแก้สมการเมตริก Ax = b นั้น วิธีที่รู้จักกันแพร่หลายและเป็นที่นิยมใช้กันทั่วไปคือ Gaussian Elimination วิธีนี้ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆ 2 ขั้นตอนคือ

1) Forward Elimination เพื่อแปลงสมการเดิมให้เป็น $\tilde{A}x = \tilde{b}$ โดยที่ $\tilde{A}$ มีโครงสร้างเป็น Upper Triangular Matrix (ดูรูปที่ 2.6ข)

2) Backward Substitution แก้สมการ $\tilde{A}x = \tilde{b}$ เพื่อหาค่าตัวแปร x

วิธีแก้สมการเมตริก Ax = b อีกวิธีหนึ่งได้แก่ วิธีแยกตัวประกอบแบบแอล-ยู [7] ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1) Factorization แยกเมตริก A ให้เป็นผลคูณของ L และ U โดยที่ L เป็น Lower Triangular Matrix และ U เป็น Upper Triangular Matrix ดังแสดงในรูปที่ 2.6

2) Substitution แก้สมการ LUx = b เพื่อหาค่าตัวแปร x

รายละเอียดของวิธีทั้งสอง จะหาอ่านได้จากหนังสือทางคณิตศาสตร์เชิงเลขทั่วไป เช่น [6] และ [7]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & 1 & & & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

(ก) Lower Triangular Matrix (ข) Upper Triangular Matrix with unity Diagonal Element.

รูปที่ 2.6 โครงสร้างเมตริกแบบ (ก) Lower Triangular (ข) Upper Triangular

วิธีทั้งสองต้องใช้จำนวนคูณหารประมาณ $\frac{n^3}{3}$ ครั้ง โดยที่ n = จำนวนตัวแปร หรือขนาดของเมตริก แต่วิธีแยกตัวประกอบแบบแอล-ยูมีข้อได้เปรียบในกรณีที่มีการแก้สมการ Ax = b หลายครั้ง โดยที่ A มีค่าคงที่ แต่ b เปลี่ยนแปลงไป ทั้งนี้เนื่องจากไม่มีความจำเป็นต้องแยกตัวประกอบ LU ใหม่ซึ่งเป็นขั้นตอนที่เสียเวลามากที่สุด เราจะพบกรณีเช่นนี้เมื่อเราต้องวิเคราะห์วงจรต้านทานเชิงเส้นและวงจรพลวัตเชิงเส้น เพื่อหาผลตอบสนองเชิงเวลา [3] กรณีเช่นนี้ยังเกิดขึ้นได้ในกรณีของวงจรพลวัตเชิงเส้นแบบท่อนด้วย แต่จะไม่มากเท่ากับในสองกรณีแรก ดังนั้นด้วยเหตุผลดังกล่าว เราจึงเลือกใช้วิธีแยกตัวประกอบแอล-ยูสำหรับแก้สมการเมตริกในการพัฒนาโปรแกรมนี้