บรรณานุกรม

หนังสือ

คณะนิสิตปริญญาโทเทคโนโลยีทางการศึกษา. "การสอนแบบโปรแกรม." เทคโนโลยีทางการศึกษา. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2518.

ชัยยงค์ พรหมวงศ์. "ความหมายของบทเรียนแบบโปรแกรม" คำบรรยายวิชา Programmed Instruction, แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, ภาคต้นปีการศึกษา 2516.

เปรื่อง กุมุท. การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป. ศูนย์โสตทัศนศึกษา วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2516.

พนัส หันนาคินทร์. "ความสำคัญ ประโยชน์ และจุดประสงค์ของวิชาคณิตศาสตร์." ตำราวิชาครูมัธยม วิธีสอนคณิตศาสตร์. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2518.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2516.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย เล่มสาม ตามร่างหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2516. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2519.

สุชา จันทน์เอม. จิตวิทยาทั่วไป. พระนคร: สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2517.

สุภา สุจริตพงศ์. "Programmed Instruction." ประมวลบทความเกี่ยวกับนวกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2517.

เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์. หลักเบื้องต้นของการวัดผลการศึกษา. โครงการตำรามหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์อักษรสัมพันธ์, 2519.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. บทคัดย่องานวิจัยทางการศึกษา. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2513.

ศึกษาธิการ, กระทรวง, กรมวิชาการ, รายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. 2509.

<u>เอกสารอื่น ๆ</u>

ครรชิต หอมแพน. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาสถิติเรื่อง "การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางและการกระจาย" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตร์มหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

จิตรา โอภาสทีพากร. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "เมตริกซ์" สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตร์มหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2518.

ประทีป สยามชัย. "บทเรียนสำเร็จรูป." <u>ประชาศึกษา</u>. 12 (สิงหาคม, 2510), 3 - 10.

ปราโมทย์ เงียบประเสริฐ. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "การจัดลำดับและการจัดหมู่" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหา-วิทยาลัย, 2519.

พลรัตน์ ลักษณียนาวิน. "การทดลองสอนพีชคณิตโดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูป." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหา-วิทยาลัย, 2514.

เพ็ญจันทร์ เฟื่องฟู. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "เวคเตอร์" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519

เฟร์ โฮเวอร์ด เอฟ. "ของ "ใหม่" ในการศึกษาคณิตศาสตร์." <u>การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 15 - 26 พฤษภาคม 2515</u>. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2516, หน้า 36 - 56.

ภิญโญ เงียบประเสริฐ. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ระบบจำนวนจริง" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

มาลี ตันติยุทธ. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "การใช้สูตรหาพื้นที่สี่เหลี่ยม" สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 7." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชาประถมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2516.

วรรณา เจียมทะวงษ์. "การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเลขคณิตชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed Text Book) กับการสอนตามปกติ." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2515.

วรรณี พร้อมมูล. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "ฟังค์ชั่นเอกซ์โปเนนท์และฟังค์ชั่นลอการิทึม" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

วาณี ศรีศิริพิศาล. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2518.

วิยดา ศิริเสรีวรรณ. "การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เซ็ทในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ โดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมกับการสอนตามปรกติ." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2518.

สนั่น สุมิตร. "คำกล่าวรายงานของผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต่อประธานในการเปิดสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์." <u>การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 15 - 16 พฤษภาคม 2515</u>. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2516.

สุภา สุจริตพงศ์. "ทำไมจึงสอน Modern Mathematics." <u>วิทยาจารย์</u>. 68 (กันยายน, 2512), 19.

สุลัดดา ไชยบุตร. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "ความสัมพันธ์และฟังก์ชั่น" สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2518.

อรพันธ์ เจริญผล, และพวงน้อย สาครรัตนกุล. "บทเรียนสำเร็จรูปในการศึกษาพยาบาล." เอกสารทางวิชาการเทคโนโลยีทางการศึกษา. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2516.

เอื้อน ปิ่นเงิน. "การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ลิมิต (Limits) และความต่อเนื่อง (Continuity) ในระดับชั้นปกศ. สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์โดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมกับการสอนตามปรกติ." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2518.

Books

Combe, H.T. Relations and Functions. London: Ginn Co., 1970.

Fine, Benjamin. Teaching Machines. New York: Sterling Publishing Co., 1962.

Fry, Edward B. Teaching Machine and Programmed Instruction. New York: McGraw-Hill Book Co., 1963.

Haber, Audrey, and Runyon, Richard P. General Statistics. 2d ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

Krishnamurthy, V. "Styles in Programming." A hand book of Programmed Learning. India Association for Programmed Learning Baroda-2, Gamdi-Anand Gujarat State, India: Anand Press, n.d., 1970.

Thomas, C.A. "The Writing of Frame." Programmed Learning in Perspective. New York: David Mckay, 1963.

Markle, SuSan Meyer. Good Frames and Bad, A Grammar of frame Writing. New York: John Wiley & Sons, 1969.

Silverman, Robert E. How to Write a Program. Carlissle, Man: Carlissle Publishers, 1970.

Winer, B.J. Statistical Principles in Experimental Design. 2d ed. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1971.

Wittich, Walter Arno, and Schuller, Charles Francis. Audiovisual Materials. New York: Harper & Row, 1968.

Wittich, Walter Arno, and Schuller, Charles Francis. Audiovisual Materials Their Nature and Use. Tokyo: John Weatherhill, 1968.

Articles

Brown Jr., Robert O. "A Comparison test of Score of Student Using Programmed Instruction Materials with These of Student not Using Programmed Instruction Materials." The Research on Programmed Instruction. Washington: U.S. Government Printing Office, 1964.

Biddle, J.C. "Effectiveness of Two Methods of Instruction of High School Geometry on Achievement Retention and Problem Solving Ability." Disertation Abstracts. Ann Arbor, Mich: University of Michigan: 3356-A.

Greatsinger, Cavin. "An Experimental Study of Programmed Instruction in Division of Fraction." A.V. Communication Review. 16 (spring, 1968): 87 - 90.

Weber, Walter Irving. "A Comparative Study of the Effectiveness of two Methods of Instruction Utilizing Programmed Meterials in a College Remedial Mathematics Course." Dissertation Abstracts. 31 (February, 1971): 3991-A.

White, Charles Colven. "The Use of Programmed Text of Remedial Mathematics Instruction in College." Dissertation Abstracts. 30 (February, 1970): 3373-A.

ภาคผนวก ก.

จุดประสงค์ทั่วไปและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเรื่อง คัลคูลัสเบื้องต้น ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดขึ้นมีดังนี้

1. เพื่อให้นักเรียนรู้จักฟังก์ชันและสมการของการเคลื่อนที่

1.1 เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางและเวลาให้นักเรียนสามารถ

1.1.1 หาระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เมื่อกำหนดเวลาให้ (ก.1 - 11) (แบบสอบข้อ 1)

1.1.2 หาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ได้เมื่อกำหนดระยะทางให้ (แบบสอบข้อ 2)

2. เพื่อให้นักเรียนรู้จักความหมายของคำว่าอัตราเร็วเฉลี่ย และความเร็วเฉลี่ย

2.1 เมื่อเรียนจบเรื่องอัตราเร็วเฉลี่ย และความเร็วเฉลี่ยแล้วนักเรียนสามารถบอกความแตกต่างของคำว่า "อัตราเร็วเฉลี่ย" และ "ความเร็วเฉลี่ย" ได้ (ก.12 - 26) (แบบสอบข้อ 3)

2.2 เมื่อกำหนดสมการของการเคลื่อนที่ให้ นักเรียนสามารถ

2.2.1 คำนวณหาอัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาใด ๆ ได้ (ก.27 - 31) (แบบสอบข้อ 4)

2.2.2 คำนวณหาความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาใด ๆ ได้ (ก.32 - 43) (แบบสอบข้อ 5)

3. เพื่อให้นักเรียนรู้จักความหมายของคำว่า ความเร็วในขณะเวลาใด ๆ

3.1 เมื่อเรียนจบเรื่องความเร็วในขณะเวลาใด ๆ แล้ว นักเรียนสามารถสรุปนิยามการหาความเร็วในขณะใด ๆ ได้ (ก.45 - 52)

3.2 เมื่อกำหนดสมการของการเคลื่อนที่ให้ นักเรียนสามารถคำนวณหาความเร็วในขณะเวลาใด ๆ ได้ (ก.54 - 61) (แบบสอบข้อ 6, 7)

4. เพื่อให้นักเรียนรู้จักความหมายของคำว่า อัตราการเปลี่ยนแปลง

4.1 เมื่อเรียนเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงจบแล้ว นักเรียนสามารถ

4.1.1 คำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยได้ (ก.67 - 75) (แบบสอบข้อ 8)

4.1.2 คำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงในขณะใด ๆ ได้ (ก.77 - 80) (แบบสอบข้อ 9, 10)

5. เพื่อให้นักเรียนรู้จักอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

5.1 เมื่อเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันแล้ว นักเรียนสามารถ

5.1.1 ใช้นิยามหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโพลิโนเมียลง่าย ๆ ได้ (ก.85 - 88) (แบบสอบข้อ 11, 12)

5.1.2 สรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตบางสูตรได้ (ก.99 - 102) (แบบสอบข้อ 16)

5.1.3 ใช้สูตรหาอนุพันธ์ของพีชคณิตง่าย ๆ ได้ (ก.104 - 120) (แบบสอบข้อ 13, 14, 15, 17)

5.2 เมื่อกำหนดสมการของการเคลื่อนที่ให้ นักเรียนสามารถหาความเร็วในขณะเวลาใด ๆ โดยใช้อนุพันธ์ได้ (ก.121 - 122) (แบบสอบข้อ 18)

5.3 เมื่อกำหนดสมการความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุในขณะเวลาใด ๆ ให้นักเรียนสามารถหาความเร่งในขณะเวลาใด ๆ ได้โดยใช้อนุพันธ์ (ก.123 - 125) (แบบสอบข้อ 19)

6. เพื่อให้นักเรียนรู้จักความชันของเส้นโค้ง

6.1 เมื่อเรียนเรื่องความชันของเส้นโค้งจบแล้ว นักเรียนสามารถบอกนิยามความชันของเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ ได้ (ก.136 - 148) (แบบสอบข้อ 24)

6.2 เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งและจุดบนเส้นโค้งให้นักเรียนสามารถ

6.2.1 ใช้นิยามหาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ (แบบสอบข้อ 21, 24)

6.2.2 ใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน คำนวณหาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้ (ก.149 - 151) (แบบสอบข้อ 22, 25)

6.2.3 บอกความชันของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้ (ก.152 - 153) (แบบสอบข้อ 20, 23, 26)

6.2.4 หาสมการของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้ (ก.157 - 161) (แบบสอบข้อ 27, 28)

6.3 เมื่อกำหนดสมการของเส้นโค้ง และความชันของเส้นโค้ง ณ จุดๆ หนึ่งให้นักเรียนสามารถ

6.3.1 บอกโคออร์ดิเนตของจุดนั้นได้ (ก.155 - 156) (แบบสอบข้อ 29, 30)

7. เพื่อให้นักเรียนรู้ความหมายของค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

7.1 เมื่อกำหนด $s = f(t)$ ให้ นักเรียนสามารถ

7.1.1 สรุปค่า t ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดได้ (ก.168 - 175) (แบบสอบข้อ 32, 33)

7.1.2 บอกค่า t ที่ทำให้อนุพันธ์ของ $s(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ได้ (ก.176 - 177) (แบบสอบข้อ 31, 34)

8. เพื่อให้นักเรียนเข้าใจปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดและต่ำสุด

8.1 เมื่อเรียนจบเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันแล้วนักเรียนสามารถ

8.1.1 หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ (ก.178, 181 - 187) (แบบสอบข้อ 35)

8.1.2 หาระยะทางซึ่งวัตถุเคลื่อนที่ขึ้นไปถึงจุดสูงสุดได้เมื่อกำหนดสมการของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งให้ (ก.179 - 180) (แบบสอบข้อ 36)

9. เพื่อให้นักเรียนรู้จักโอเปอเรชันตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ ตลอดจนนำความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์มาประยุกต์ได้

9.1 เมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตใด ๆ ให้ นักเรียนสามารถหาฟังก์ชันนั้น ๆ ได้ (ก.190 - 232) (แบบสอบข้อ 37, 38)

9.2 เมื่อกำหนดสมการของความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและเวลาให้ นักเรียนสามารถหาสมการของการเคลื่อนที่ได้ (ก.240 - 243) (แบบสอบข้อ 39)

9.3 เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งและเวลาให้ นักเรียนสามารถหาสมการของความเร็วได้ (ก.241, 242) (แบบสอบข้อ 40)

แบบทดสอบเรื่องคัลคูลัส

<u>คำชี้แจง</u> ๑. แบบทดสอบมีทั้งหมด ๔๐ ข้อ

๒. เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดจาก ก - ง แล้วทำเครื่องหมาย X ทับอักษรนั้นในกระดาษคำตอบ

1. ถ้าสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่งเป็น $s = 3t + (t - 1)^2$ เมื่อ s เป็นระยะทางหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลาหน่วยเป็นวินาที จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ไปอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าไร?

ก. 28 เมตร	ค. 21 เมตร
ข. 27 เมตร	ง. 18 เมตร

2. สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งเป็น $2s = t^2 - 2t$ เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ไปอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น 24 เมตร วัตถุนั้นจะต้องใช้เวลาเคลื่อนที่กี่วินาที?

ก. 2 วินาที	ค. 6 วินาที
ข. 4 วินาที	ง. 8 วินาที

3. ความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งในช่วงเวลา 2 วินาทีถึง 6 วินาที เป็น -24 เมตร/วินาที อยากทราบว่าอัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ในช่วงเวลา 2 วินาทีถึง 6 วินาทีเป็นเท่าใด?

ก. -6 เมตร/วินาที	ค. -24 เมตร/วินาที
ข. 6 เมตร/วินาที	ง. 24 เมตร/วินาที

4. สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งเป็น $s = \frac{12}{t+1}$ เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที อัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุในช่วงเวลา 1 ถึง 5 วินาที เป็นเท่าไร?

ก. -1.0 เมตร/วินาที　　ค. 2.0 เมตร/วินาที

ข. 1.0 เมตร/วินาที　　ง. 2.4 เมตร/วินาที

5. วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ในทางตรงด้วยสมการ $s = \frac{16}{t+2}$ เมื่อ s เป็นระยะทางหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลาหน่วยเป็นวินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t = 2 ถึง t = 6 เป็นเท่าไร?

ก. $-1\frac{3}{5}$ เมตร/วินาที　　ค. $\frac{1}{2}$ เมตร/วินาที

ข. $-\frac{1}{2}$ เมตร/วินาที　　ง. $2\frac{2}{3}$ เมตร/วินาที

6. กำหนดให้ $s = 2t^2$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ เมื่อหน่วยของเวลา t เป็นวินาที และหน่วยของระยะทาง s เป็นเมตร ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ เป็นกี่เมตรต่อวินาที?

ก. $\frac{2(t + h^2) - 2t^2}{h}$ เมตร/วินาที เมื่อ $h \to 0$

ข. $\frac{(2t^2 + h) - 2t^2}{h}$ เมตร/วินาที เมื่อ $h \to 0$

ค. $\frac{(2t + h)^2 - 2t^2}{h}$ เมตร/วินาที เมื่อ $h \to 0$

ง. $\frac{2(t + h)^2 - 2t^2}{h}$ เมตร/วินาที เมื่อ $h \to 0$

7. ถ้าสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s = 3t + 4$ จงหาว่าความเร็วในขณะเวลา $t = 5$ เป็นเท่าใด?

ก. 3 ค. 7

ข. 4 ง. 19

8. ถ้าปริมาณของน้ำ Q (ลูกบาศก์เมตร) ในถังใบหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป t (วินาที) เป็นไปตามสมการ $Q = 15 - 2t$ อยากทราบว่าในช่วงเวลาตั้งแต่ $t = 3$ ถึง $t = 7$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของน้ำในถังเป็นเท่าไร?

ก. -2.0 ล.บ.เมตร/วินาที ค. 2.0 ล.บ.เมตร/วินาที

ข. 1.75 ล.บ.เมตร/วินาที ง. 7.0 ล.บ.เมตร/วินาที

9. ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรลูกบอลเทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น r + h มีค่าเท่ากับ $\frac{4\pi}{3}(3r^2 - 3rh + h^2)$ จงหาว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกบอลนี้เทียบกับรัศมีในขณะใด ๆ เป็นเท่าไร?

ก. $\frac{4\pi}{3} \cdot r^2$ ค. $4\pi r^2$

ข. $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^2}{h}$ ง. $4\pi \cdot \frac{r^2}{h}$

10. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 - 2$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ขณะ $x = 5$ มีค่าเท่าใด?

ก. 30 ค. 15

ข. 28 ง. 13

11. ถ้า $f(x) = x^3$ แล้ว $f'(x)$ เท่ากับเท่าใด?

ก. $\lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + h) - h^3}{h}$

ข. $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - h^3}{h}$

ค. $\lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + h) - x^3}{h}$

ง. $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

12. กำหนดให้ $g = \{(x, y) \mid y = (x - 3)^2\}$, $g'(x)$ เท่ากับเท่าใด?

ก. $\lim_{t \to 0} \frac{(x + t - 3)^2 - (x - 3)^2}{t}$

ข. $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - 3 - (x - 3)^2}{h}$

ค. $\lim_{x \to 0} \frac{(x + h - 3)^2 - (x - 3)^2}{x}$

ง. $\lim_{r \to 0} \frac{(x + r)^2 - (x - 3)^2}{r}$

13. ถ้า $y = 3x^3$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ เท่ากับเท่าใด?

ก. $9x$

ข. $9x^2$

ค. $3x^2$

ง. x^4

14. กำหนด $f(x) = \frac{x^3}{4} + 3x$, $\frac{df(x)}{dx}$ เท่ากับเท่าใด?

✓

ก. $\frac{3x}{4} + 3$ ค. $\frac{3x^3}{4} + 3$

ข. $\frac{x^2}{4} + 3$ ง. $\frac{3x^2}{4} + 3$

15. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \mid y = 7 - x^2 + x^4\}$, $\frac{df(x)}{dx}$ เป็นเท่าใด?

✓

ก. $\frac{x^3}{4}$ ค. $4x^3 - 2x$

ข. $x^3 - x$ ง. $4x^3 - 2x^2$

16. ถ้า $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ แล้ว $\lim_{r \to 0} \frac{f(x + r) - f(x)}{r}$ เป็นเท่าใด?

✓

ก. $6x - 2$ ค. $3x - 2$

ข. $6x + 3$ ง. $3x + 3$

17. กำหนดให้ $y = \frac{1}{t^3}$, $\frac{dy}{dt}$ เท่ากับเท่าใด?

✓

ก. $-3t^2$ ค. $-3t^{-3}$

ข. $-3t^{-2}$ ง. $-3t^{-4}$

18. ถ้าวัตถุชนิดหนึ่งถูกโยนขึ้นไปในแนวดิ่งโดยสมการของการเคลื่อนที่เป็น

✓ $s = 20t - 4t^2$ อยากทราบว่าเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไป 2 วินาที วัตถุกำลังเคลื่อนที่

ด้วยความเร็วเท่าใด?

ก. 2 เมตร/วินาที ค. 8 เมตร/วินาที

ข. 4 เมตร/วินาที ง. 12 เมตร/วินาที

19. สมการของความเร็ว v ของวัตถุในขณะเวลา t เป็น $v = -2t + 5$ อยากทราบว่า
✓ ความเร่งของวัตถุนั้นในขณะใด ๆ มีค่าเท่าไร?

ก. −5   ค. 2

ข. −2   ง. 3

20. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 5x^2 + x$ ที่จุด (x, y) คือข้อใด?

ก. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(x + h)^2 + (x + h) - 5x^2 - x}{h}$

ข. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(x^2 + h) + (x + h) - 5x^2 - x}{h}$

ค. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(x + h)^2 + (x + h) - 5x^2 + x}{h}$

ง. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(x^2 + h) + (x + h) - 5x^2 + x}{h}$

21. กราฟของสมการ $y = (x - 2)^2$ มีความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) เป็นเท่าใด?

ก. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - (x - 2)^2}{h}$

ข. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x - 2)^2 + h - (x - 2)^2}{h}$

ค. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - 2 - (x - 2)^2}{h}$

ง. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h - 2)^2 - (x - 2)^2}{h}$

22. ความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับกราฟของ $y = 2ax^2 + 3x$ ที่จุด (1, 1) เท่ากับ -2 อยากทราบว่าความชันของเส้นโค้ง $y = 2ax^2 + 3x$ ที่จุด (1, 1) มีค่าเท่าใด?

ก. 3   ค. -2

ข. 2   ง. -3

23. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 5x^2 - 2x$ ที่จุด (1, 3) มีค่าเท่าไร?

ก. 39   ค. 8

ข. 28   ง. 3

24. ความชันของเส้นโค้ง $y = x - 3x^2$ ณ จุด $P(x, y)$ ใด ๆ ที่อยู่บนเส้นโค้งนั้นเป็นเท่าไร?

ก. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h - (3x^2 + h) - x - 3x^2}{h}$

ข. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h - 3(x^2 + h) - x - 3x^2}{h}$

ค. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h - (3x^2 + h) - x + 3x^2}{h}$

ง. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h - 3(x + h)^2 - x + 3x^2}{h}$

25. เส้นโค้ง $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$ มีความชันที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็นเท่าไร?

ก. $\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ ค. $\frac{3}{2} x$

ข. $\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}}$ ง. $3x$

26. เส้นตรง AB สัมผัสกับเส้นโค้ง $y = x^{\frac{3}{2}} - 2x$ ที่จุด (4, 0) ความชันของเส้นตรง AB เป็นเท่าไร?

ก. -2 ค. 1

ข. 0 ง. 4

27. สมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับกราฟของ $\{(x, y) \mid y = 1 - x^2\}$ ที่จุด $(2, -3)$ คือสมการใด?

ก. $y - 3 = -4(x - 2)$

ข. $y + 3 = -4(x - 2)$

ค. $y + 3 = 4(x - 2)$

ง. $y - 3 = 4(x - 2)$

28. สมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับกราฟของ $y = 3 - x^2$ ณ จุด ๆ หนึ่งซึ่ง $x = 2$ คือสมการใด?

ก. $y = 4x - 7$ ค. $y = 9 - 4x$

ข. $y = 4x - 9$ ง. $y = 7 - 4x$

29. ถ้าความชันของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับกราฟของ $y = 5x^2 + cx$, $c \in R$ ที่จุด $(3, -21)$ มีค่าเท่ากับ 8 แล้ว c จะมีค่าเท่าใด?

ก. -22 ค. 23

ข. -7 ง. 38

30. ถ้าความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับกราฟของ $y = 4 - x^2$ ที่จุด (a, b) มีค่าเท่ากับ -2 จุด (a, b) คือจุดใด?

ก. (4, 0) ค. (-1, 3)

ข. (1, 3) ง. (3, -5)

31. ค่าของ x ที่ทำให้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \mid y = 9x^2 - 3x\}$ เท่ากับศูนย์ คือค่าใด?

ก. $-\frac{1}{3}$ ค. $\frac{1}{6}$

ข. $-\frac{1}{6}$ ง. $\frac{1}{3}$

32. ถ้า $y = 3x - x^2$ ค่า x ที่ทำให้ y มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดคือค่าใด?

ก. $-\frac{4}{3}$ ค. $\frac{3}{2}$

ข. $\frac{2}{3}$ ง. 3

33. ฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4x\}$ จะมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดเมื่อ x มีค่าเท่าใด?

ก. 4 ค. -1

ข. 2 ง. -2

34. ในการเปิดหอพักให้นักศึกษาเช่าแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าผลกำไรจากค่าเช่าห้องที่ได้มีความสัมพันธ์กับจำนวนห้องที่เปิดให้เช่าตามสมการ $m = 108r - 3r^2$ เมื่อ m เป็นเงินผลกำไร r เป็นจำนวนห้อง ถ้าต้องการให้ได้กำไรมากที่สุด ควรจะเปิดห้องให้เช่ากี่ห้อง?

ก. 6 ห้อง
ข. 9 ห้อง
ค. 18 ห้อง
ง. 36 ห้อง

35. ในการปลูกพืชไร่ ณ ที่แห่งหนึ่ง ปรากฏว่าปริมาณพืชผลที่ได้มีความสัมพันธ์กับจำนวนปุ๋ยที่ใช้ตามสมการ $y = 40 + 22x - x^2$ เมื่อ x เป็นจำนวนปุ๋ยที่ใช้หน่วยเป็นกิโลกรัมต่อไร่ และ y เป็นปริมาณของพืชผลที่ได้ หน่วยเป็นถังต่อไร่ อยากทราบว่าเมื่อใช้ปุ๋ยให้เหมาะสมแล้วจะได้พืชผลมากที่สุดกี่ถังต่อไร่?

ก. 210 ถังต่อไร่
ข. 161 ถังต่อไร่
ค. 40 ถังต่อไร่
ง. 22 ถังต่อไร่

36. ความสูงของก้อนหินเหนือจากระดับพื้นดิน s เมตร เมื่อโยนขึ้นไปในแนวดิ่งในเวลา t วินาทีใด ๆ เป็นไปตามสมการ $s = 16t - 2t^2$ ก้อนหินจะขึ้นไปได้สูงสุดกี่เมตร?

ก. 4 เมตร
ข. 8 เมตร
ค. 32 เมตร
ง. 40 เมตร

37. ถ้า $2\frac{dy}{dx} = x + 5$ และ c เป็นค่าคงที่ แล้ว y เท่ากับเท่าใด?

ก. $\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + c$
ข. $\frac{x^2}{4} + 5x + c$
ค. $\frac{x^2}{2} + 5x + c$
ง. $\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + c$

38. ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน g เท่ากับ $\frac{1}{x^2}$ และ c เป็นค่าคงที่แล้ว g คือฟังก์ชันในข้อใด?

ก. $\{(x, y) \mid y = -x^{-1} + c\}$

ข. $\{(x, y) \mid y = -x^{-2} + c\}$

ค. $\{(x, y) \mid y = x^{-1} + c\}$

ง. $\{(x, y) \mid y = x^{-2} + c\}$

39. ความเร็วในขณะใด ๆ ของวัตถุชนิดหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ในแนวดิ่งเป็น $\frac{1}{2}t + 2$ และถ้า $t = 2$ จะได้ $s = 3$ เมื่อ t เป็นเวลา และ s เป็นระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ อยากทราบว่าสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้คือข้อใด?

ก. $s = \frac{t^2}{2} + 2t - 3$

ข. $s = \frac{t^2}{4} - 2t + 6$

ค. $s = \frac{t^2}{2} + 2t + 5$

ง. $s = \frac{t^2}{4} + 2t - 2$

40. ความเร่งของรถยนต์คันหนึ่งในขณะเวลาใด ๆ เป็น $2t + 2$ และถ้า $t = 1$ จะได้ $v = 8$ เมื่อ t เป็นเวลา และ v เป็นความเร็วของรถในขณะเวลา t ดังนั้น สมการความเร็วของรถยนต์คันนี้ในขณะเวลา t ใด ๆ คือข้อใด?

ก. $v = 2t^2 + 2t + 4$

ค. $v = 2t^2 - 2t + 8$

ข. $v = t^2 + 2t + 5$

ง. $v = t^2 + 2t + 11$

ความรู้พื้นฐานในการเรียนบทเรียน

ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับผู้เรียน ก่อนที่จะเรียนบทเรียนแบบโปรแกรม เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น มีดังนี้

1. มีความรู้ภาษาไทยในการอ่าน และการตีความหมายได้ดี

2. มีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในเรื่อง การบวก ลบ คูณ และหาร ในระบบจำนวนจริงได้อย่างแม่นยำ

3. มีความรู้พื้นฐานในการแยกตัวประกอบ การแก้สมการเส้นตรง และสมการโพลิโนเมียล

4. มีความรู้พื้นฐานในเรื่อง เซ็ต ระบบจำนวนจริง เส้นตรง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันเป็นอย่างดี

5. มีความรู้พื้นฐานในเรื่องเลขยกกำลัง และลิมิตเบื้องต้นเป็นอย่างดี

คำชี้แจงเกี่ยวกับบทเรียน

บทเรียนที่นักเรียนจะเรียนต่อไปนี้เรียกว่า บทเรียนแบบโปรแกรม สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนได้ศึกษาด้วยตนเอง รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียนนี้มีดังนี้

1. บทเรียนนี้มีชื่อว่า "คัลคูลัสเบื้องต้น"
2. เนื้อหาในบทเรียนแบ่งออกเป็นขั้นย่อย ๆ เรียกว่า "กรอบ"
3. ในแต่ละกรอบจะมีข้อความให้ผู้เรียนอ่าน และบางกรอบจะให้ผู้เรียนเติมตัวเลขหรือข้อความที่หายไปให้สมบูรณ์
4. ผู้เรียนจะทราบผลการตอบของนักเรียนได้ทันที ว่าถูกหรือผิด เพราะมีคำเฉลยไว้ให้
5. ในแต่ละกรอบจะมีหมายเลขประจำกรอบและแบ่งออกเป็น 2 ช่อง ช่องซ้ายมือเป็นช่องเฉลยคำตอบ ช่องขวามือเป็นช่องเสนอความรู้และคำถาม ดังตัวอย่าง

	(ในช่องนี้มีข้อความให้ผู้เรียนอ่านและมีคำถามให้ผู้เรียนตอบโดยเติมข้อความหรือตัวเลขที่ขาดหายไป) 1. จ้อยเป็นพี่ชายของเจี๊ยบดังนั้น จ้อยมีอายุ..............................เจี๊ยบ (มากกว่า, น้อยกว่า)
มากกว่า (ในช่องนี้เป็นคำตอบของกรอบที่ 1)	2. ทุกวันนี้เรายังกำหนดกันว่าดวงอาทิตย์จะขึ้นทางทิศ.......... ....ในเวลา................... (เช้า, เย็น)
ตะวันออก เช้า (ในช่องนี้เป็นคำตอบของกรอบที่ 2)	3. ....

คำแนะนำในการใช้บทเรียนแบบโปรแกรม

บทเรียนแบบโปรแกรมเป็นบทเรียนสำหรับนักเรียนเรียนด้วยตนเอง บทเรียนนี้ไม่ใช่แบบทดสอบ แต่เป็นสิ่งที่ช่วยให้นักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นจากการศึกษาเนื้อหาวิชาในแต่ละกรอบด้วยการปฏิบัติตามคำแนะนำต่อไปนี้

1. เปิดบทเรียนตั้งแต่หน้าแรกไปทีละหน้าจนถึงหน้าสุดท้าย ไม่ควรจะเปิดข้ามหน้าจะทำให้ผู้เรียนสับสน

2. ใช้กระดาษแข็งปิดข้อความในกรอบที่ 2 ก่อนที่จะเริ่มอ่านกรอบที่ 1

3. อ่านข้อความในกรอบที่ 1 อย่างละเอียดและทำความเข้าใจ เมื่ออ่านจบแล้วตอบคำถามโดยเติมคำตอบในช่องว่าง

4. ตรวจคำตอบโดยเลื่อนกระดาษแข็งไปปิดข้อความในกรอบที่ 3 ดูคำเฉลยทางช่องซ้ายมือของกรอบที่ 2 ถ้านักเรียนทำถูกต้องให้อ่านข้อความในกรอบที่ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปโดยวิธีการเดียวกัน

5. ถ้าคำตอบของนักเรียนไม่ตรงกับเฉลย ให้นักเรียนอ่านกรอบเดิมซ้ำอีกแล้วดูว่าทำไมจึงตอบผิด ถ้าเข้าใจแล้วขีดฆ่าคำตอบเดิมทิ้ง แก้คำตอบให้ถูกต้อง

6. ให้นักเรียนทำต่อไปทีละกรอบ อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่ง

7. นักเรียนต้องซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่เปิดดูเฉลยก่อน หรือลอกคำตอบมาใส่โดยไม่ได้คิดก่อน พึงระลึกเสมอว่า คำถามในแต่ละกรอบไม่ใช่ข้อทดสอบ แต่เป็นเสมือนคำถามของครูขณะที่นักเรียนเรียนในห้องเรียนนั่นเอง

8. ความรู้ในกรอบต้น ๆ จะเป็นพื้นฐานของความรู้ในกรอบต่อ ๆ ไป

9. นักเรียนไม่จำเป็นต้องทำบทเรียนให้เสร็จพร้อม ๆ กับเพื่อนถ้ารู้สึกเหนื่อยหรือเมื่อยล้าก็หยุดพักผ่อนเสียก่อนแล้วค่อยทำต่อไป

10. หลังจากเรียนบทเรียนจบแล้ว จะมีแบบทดสอบให้นักเรียนทำเพื่อวัดว่านักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นเพียงใด

บทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "คัลคูลัสเบื้องต้น"

สำหรับ

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

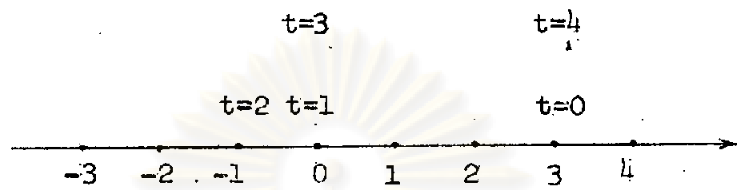
สร้างโดย

นายดนัย ยังคง

บทที่ 1 ความเร็วและอัตราเร็ว

	1. ถ้าความสัมพันธ์ $f = \{ (s, t) \mid s = at^2 + bt + c \}$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง s หน่วย และเวลา t หน่วย ความสัมพันธ์ f เขียนในรูปย่อได้เป็น $s = at^2 + bt + c$ ซึ่งก็เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง.....หน่วย และเวลา.....หน่วย
s t	2. สมการที่แสดงค่าของ s ในรูปของ t เช่น $s = at^2 + bt + c$ นี้ เรียกว่า "สมการของการเคลื่อนที่" หรือ "ฟังก์ชันของการเคลื่อนที่" กล่าวโดยทั่วไป สมการของการเคลื่อนที่ในทางตรงเขียนได้ในรูป $s = f(t)$ นั่นคือระยะทาง s เป็นฟังก์ชันของเวลา t แสดงว่า เมื่อเวลาผ่านไป t หน่วย ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปจะเป็น .....หน่วย
s	3. ในการปล่อยก้อนหินจากที่สูงแห่งหนึ่ง ให้ตกลงมาตามแนวดิ่ง สมการ ของการเคลื่อนที่เป็น $s = 4.9\ t^2$ เมื่อ s เป็นระยะทางหน่วย เป็นเมตร t เป็นเวลาหน่วยเป็นวินาที เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที นั่นคือ $t = 1$ วัตถุจะเคลื่อนเป็นระยะทาง $s = 4.9(1)^2$ $= 4.9$ เมตร ดังนั้นเมื่อ $t = 2$ วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นระยะทาง $s =$ .....เมตร

19.6	4. ถ้าสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งเป็น $s = f(t) = t^2 - 4t + 3$ เมื่อ s เป็นระยะทาง มีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที เมื่อ $t = 0$ จะได้ $s = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$ เมตร หรือจะหาค่าของฟังก์ชัน f เมื่อ t มีค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้ เมื่อ $t = 0$, จะได้ $f(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$ เมตร เมื่อ $t = 1$, จะได้ $f(1) = 1^2 - 4(1) + 3 = 0$ เมตร เมื่อ $t = 2$, จะได้ $f(2) =$ .... =...เมตร เมื่อ $t = 3$, จะได้ $f(3) =$ .... =...เมตร
$2^2 - 4(2) + 3$ -1 $3^2 - 4(3) + 3$ 0	5. จากสมการของการเคลื่อนที่ $s = t^2 - 4t + 3$ เมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที จะได้ $s =$ .... เมตร

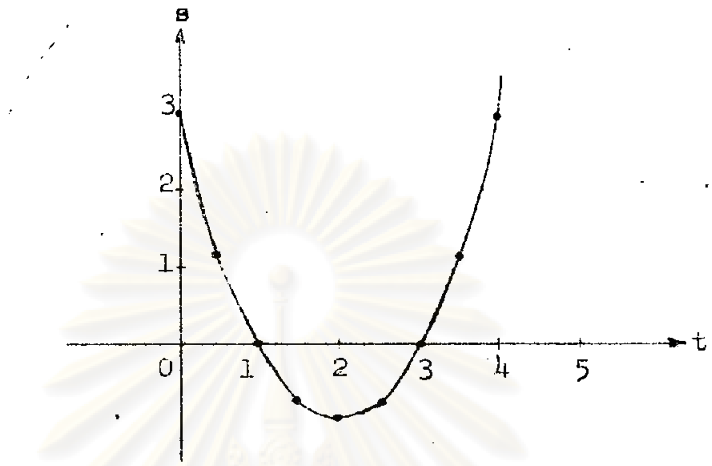
3	6. ตำแหน่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ได้เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที ตามสมการ $s = t^2 - 4t + 3$ แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้  จากรูป จุด 0 (ศูนย์) บนเส้นจำนวนเรียกว่า "จุดอ้างอิง" ในการบอกตำแหน่งของวัตถุ เมื่อ $t = 0$ จะได้ $s = 3$ แสดงว่าเมื่อเริ่มต้นจับเวลา วัตถุอยู่ห่างจากจุด 0 ไปทางขวา 3 เมตร เมื่อ $t = 1$ จะได้ $s = 0$ แสดงว่าเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที วัตถุอยู่ที่จุดอ้างอิงหรือจุด 0 เมื่อ $t = 2$ จะได้ $s = -1$ แสดงว่าเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที วัตถุอยู่ห่างจากจุด 0 ไป<u>ทางซ้าย</u> 1 เมตร เมื่อ $t = 3$ จะได้ $s = 0$ แสดงว่าเมื่อเวลาผ่านไป ......วินาที วัตถุอยู่................

<table>
<tr><td>3
อยู่ที่จุด 0 หรือจุดอ้างอิง</td><td>7.
เมื่อ s มีค่าเป็นบวกแสดงว่าวัตถุจะอยู่ทางขวาของจุดอ้างอิง และ ถ้า s มีค่าเป็นลบ วัตถุจะอยู่ทาง..........ของจุดอ้างอิง
(ขวา,ซ้าย)</td></tr>
<tr><td>ซ้าย</td><td>8.
จากสมการในกรอบที่ 6 เมื่อ t = 4 จะได้ s = ...
แสดงว่าเมื่อเวลาผ่านไป.....วินาทีวัตถุอยู่...............
...............</td></tr>
<tr><td>3
4 ห่างจากจุด 0 ไปทางขวา 3 เมตร</td><td>9.
จากรูปในกรอบที่ 6 เรายังไม่รู้ว่าระหว่างเวลา t = 0 ถึง t = 1 วัตถุเคลื่อนที่มาทางซ้ายตลอดหรือว่ามีการเคลื่อนที่ไปทางขวาเล็กน้อยก่อนแล้วจึงเคลื่อนมาทางซ้าย เราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ในช่วงเวลา t = 0 ถึง t = 1 และช่วงเวลาอื่น ๆ โดยการเขียนกราฟของสมการของการเคลื่อนที่ $s = t^2 - 4t + 3$
จงเติมตัวเลขในตารางให้สมบูรณ์
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>2.5</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$s = t^2 - 4t + 3$</td><td>3</td><td>....</td><td>0</td><td>....</td><td>...</td><td>-0.75</td><td>0</td><td>...</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

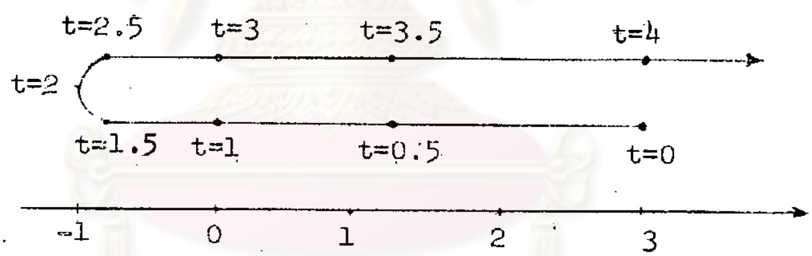
1.25 -0.75 -1 3

10.

สมการการเคลื่อนที่ $s = t^2 - 4t + 3$ แสดงโดยกราฟได้ดังนี้



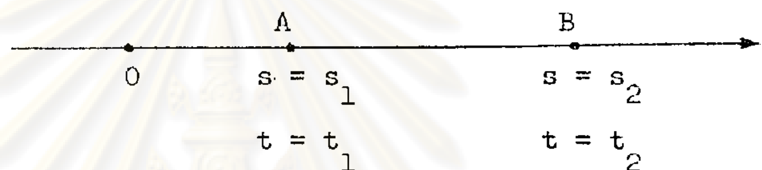
กราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง t และ s ช่วยแสดงให้เห็นภาพของการเคลื่อนที่บนเส้นจำนวนได้ชัดเจนขึ้นดังนี้



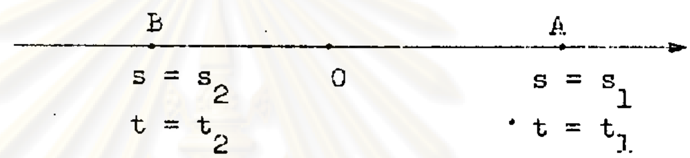
จากรูป จะเห็นว่าเมื่อเริ่มต้นจับเวลา $t = 0$ วัตถุอยู่ที่ 3 เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นวัตถุจะเคลื่อนที่มาทางซ้ายเข้าหาจุด 0 เมื่อ $t = 1$ วัตถุจะอยู่ที่..........................วัตถุจะเคลื่อนที่ไปทางซ้ายจน $t = 2$ วัตถุจะอยู่ที่ -1 แล้ววัตถุจะวกกลับเคลื่อนที่ไปทาง...........

(ขวา, ซ้าย)

จุด 0 หรือ จุดอ้างอิง ขวา	11. จากรูปในกรอบที่ 10 ในช่วงเวลา $t = 0$ ถึง $t = 1$ วัตถุเคลื่อนจาก 3 ไปอยู่ที่ 0 นั่นคือ เวลาผ่านไป 1 หน่วย วัตถุเคลื่อนที่ได้ 3 หน่วย ในช่วงเวลา $t = 1$ ถึง $t = 2$ วัตถุเคลื่อนที่จาก 0 ไปอยู่ที่ -1 นั่นคือเวลาผ่านไป 1 หน่วย วัตถุเคลื่อนที่ได้.....หน่วย
1	12. จากกรอบที่ 11 จะเห็นว่าในช่วงเวลา 1 หน่วยเท่ากัน วัตถุจะ เคลื่อนที่ได้ระยะทาง............... ซึ่งกล่าวได้ว่าวัตถุ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน) เคลื่อนที่ด้วย "อัตราเร็ว" ที่ต่างกัน ดังนั้นอัตราเร็วคืออัตราส่วนระหว่างระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ (โดยไม่คิดทิศทาง) กับเวลาที่ใช้
ไม่เท่ากัน	13. ให้ $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ในทางตรงของวัตถุ ชนิดหนึ่ง ต่อไปนี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยใช้เส้นจำนวน ซึ่งมีจุด 0 เป็นจุดอ้างอิงในการบอกระยะทาง เมื่อ $t = 0$ วัตถุอาจจะอยู่ที่จุด 0 หรือที่จุดอื่นใดก็ได้บน เส้นจำนวน เช่น ถ้า $s = 2t^2$ เมื่อ $t = 0$ จะได้ $s = 0$ แสดงว่าวัตถุ จะอยู่ที่จุด 0 ถ้า $s = 5t^2 + 7t - 3$ เมื่อ $t = 0$ จะได้ $s = -3$ แสดงว่าวัตถุจะอยู่ ณ จุดที่แทนจำนวน -3 หรือเรียกว่าวัตถุจะอยู่ ห่างจากจุด 0 ไปทาง..........เป็นระยะทาง......หน่วย (ขวา, ซ้าย)

<table>
<tr>
<td>ซ้าย 3</td>
<td>14.
เมื่อเวลาผ่านไป t_1 นั่นคือ $t = t_1$ สมมุติให้วัตถุอยู่ที่ A และเมื่อเวลาผ่านไป t_2 นั่นคือ t =...... สมมุติให้วัตถุอยู่ที่ B
ให้ s_1 เป็นจำนวนจริงที่แสดงตำแหน่งบนเส้นจำนวนด้วยจุด A
เมื่อเวลาผ่านไป t_1
ให้ s_2 เป็นจำนวนจริงแสดงตำแหน่งบนเส้นจำนวนด้วยจุด B
เมื่อเวลาผ่านไป t_2
ลองพิจารณาภาพการเคลื่อนที่บนเส้นจำนวนต่อไปนี้


จากรูป
จุด A อยู่ทางขวาของจุด 0 ดังนั้น s_1 จะเป็นจำนวนจริง ....(บวก, ลบ)
จุด B อยู่ทางขวาของจุด 0 ดังนั้น s_2 จะเป็นจำนวนจริง ....(บวก, ลบ)</td>
</tr>
<tr>
<td>t_2
บวก
บวก</td>
<td>15.
เมื่อ $t_2 > t_1$ จุด B อยู่ทางขวามือของจุด A
แสดงว่า s_2 ....s_1
(>,<)</td>
</tr>
<tr>
<td>></td>
<td>16.
เมื่อเวลาผ่านไป $t_2 - t_1$ หน่วย วัตถุเคลื่อนที่ได้ $s_2 - s_1$ หน่วย
เพราะว่า $s_2 > s_1$ ดังนั้น $s_2 - s_1$ ย่อม................ศูนย์
(มากกว่า, น้อยกว่า)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>มากกว่า</td><td>17.
เมื่อ $t_2 > t_1$ และ $s_2 > s_1$ แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปทางขวาของ A
นั่นคือ เมื่อ $t_2 > t_1$ และ $s_2 - s_1 > 0$ วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปทาง...........ของ A
(ขวา, ซ้าย)</td></tr>
<tr><td>ขวา</td><td>18.
พิจารณาภาพการเคลื่อนที่บนเส้นจำนวนต่อไปนี้


จากรูป
จุด A อยู่ทางขวาของจุด O ดังนั้น s_1 เป็นจำนวนจริง ....(บวก, ลบ)
จุด B อยู่ทางซ้ายของจุด O ดังนั้น s_2 เป็นจำนวนจริง ....(บวก, ลบ)</td></tr>
<tr><td>บวก
ลบ</td><td>19.
เมื่อ $t_2 > t_1$ และจุด B อยู่ทางซ้ายของจุด A
แสดงว่า s_2 ......s_1
(>,<)</td></tr>
<tr><td><</td><td>20.
นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป $t_2 - t_1$ หน่วย วัตถุเคลื่อนที่ได้ $s_2 - s_1$ หน่วย เพราะ $s_2 < s_1$ ดังนั้น $s_2 - s_1$ ย่อม................ศูนย์
(มากกว่า, น้อยกว่า)</td></tr>
</table>

น้อยกว่า	21. เมื่อ $t_2 > t_1$ และ $s_2 < s_1$ แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปทาง.............. ของ A (ขวา, ซ้าย) นั่นคือเมื่อ $t_2 > t_1$ และ $s_2 - s_1 < 0$ วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปทาง .... ของ A (ขวา, ซ้าย)
ซ้าย ซ้าย	22. เมื่อ $t_2 > t_1$ จะเห็นได้ว่าในช่วงเวลา $t_2 - t_1$ หน่วย วัตถุเคลื่อนที่ได้ $s_2 - s_1$ หน่วย ถ้า $s_2 - s_1 > 0$ แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่จากจุด s_1 ไปทาง .... (ขวา, ซ้าย) ถ้า $s_2 - s_1 < 0$ แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่จากจุด s_1 ไปทาง............... (ขวา, ซ้าย)
ขวา ซ้าย	23. ถ้าเวลาผ่านไป $t_2 - t_1$ หน่วย วัตถุเคลื่อนที่ได้ $s_2 - s_1$ หน่วย ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป 1 หน่วย วัตถุเคลื่อนที่ได้............หน่วย

$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$	24. ความเร็วเฉลี่ย (average velocity) คือ อัตราส่วนระหว่างระยะทางที่เคลื่อนที่ได้โดยคิดทิศทางกับเวลาที่ใช้ทั้งหมด **<u>นิยาม</u>** ถ้า s_1 เป็นตำแหน่งของวัตถุเมื่อเคลื่อนที่ไป t_1 หน่วยเวลา s_2 เป็นตำแหน่งของวัตถุเมื่อเคลื่อนที่ไป t_2 หน่วยเวลา ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$, เมื่อ $t_2 > t_1$ อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\frac{\lvert s_2 - s_1\rvert}{t_2 - t_1}$, เมื่อ $t_2 > t_1$
	25. เพราะว่า $t_2 > t_1$ จะได้ $t_2 - t_1 > 0$ และ $\lvert s_2 - s_1\rvert > 0$ ดังนั้น $\frac{\lvert s_2 - s_1\rvert}{t_2 - t_1}$ .... 0 (> , <)
>	26. นั่นคือ อัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุในช่วงเวลาใด ๆ ย่อม<u>ไม่</u>เป็นจำนวน............ (บวก, ลบ) และอัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาใดจะ .... ค่าสัมบูรณ์ของความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลานั้น (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ)

ลบ เท่ากับ	27. ให้ $s = 3t^2 - 5$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของรถยนต์คันหนึ่ง เมื่อ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร จงหาความเร็วเฉลี่ยและอัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลา 1 ถึง 5 วินาที <u>วิธีทำ</u> ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$, เมื่อ $t_2 > t_1$ ให้ $t_1 = 1$, $t_2 = 5$ ดังนั้น $s_1 = 3(1)^2 - 5 =$ .... $s_2 = 3(5)^2 - 5 =$ .... ดังนั้นความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t_1 = 1$ ถึง $t_2 = 5$ เป็น $\dfrac{s_2 - s_1}{5 - 1} = \dfrac{(\ldots\ldots) - (\ldots\ldots)}{4}$ = ... เมตร/วินาที อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วง $t_1 = 1$ ถึง $t_2 = 5$ เป็น $\dfrac{\lvert s_2 - s_1 \rvert}{5 - 1} = \dfrac{\lvert \ldots\ldots\ldots\ldots \rvert}{4}$ = ... เมตร/วินาที

-2 70 $70 \quad -2$ 18 72 18	28. ถ้า $s = f(t)$ เมื่อ $t = t_1$ และ $s = s_1$ จะได้ $s_1 = f(t_1)$, เมื่อ $t = t_2$ และ $s = s_2$ จะได้ $s_2 = f(\ldots)$ ดังนั้น $s_2 - s_1 = f(\ldots) - f(\ldots)$
t_2 $t_2 \quad t_1$	29. เมื่อ $t_2 > t_1$ และจากนิยามในกรอบที่ 24 จะได้ความเร็วเฉลี่ย ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{t_2 - t_1}$ อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\dfrac{\lvert f(\ldots) - f(\ldots)\rvert}{t_2 - t_1}$
$t_2 \quad t_1$ $t_2 \quad t_1$	30. นั่นคือเมื่อ $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่เราสามารถหา ความเร็วเฉลี่ย และอัตราเร็วเฉลี่ยได้จากสูตรต่อไปนี้ ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$, เมื่อ $t_2 > t_1$ อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\dfrac{\lvert f(t_2) - f(t_1)\rvert}{t_2 - t_1}$, เมื่อ $t_2 > t_1$

31.

ถ้า $f(t) = 4t - t^2$ เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่ง ซึ่งมีหน่วยของระยะทางเป็นเมตร และหน่วยของเวลาเป็นวินาที จงหาความเร็วเฉลี่ยและอัตราเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ในช่วงเวลา 2 ถึง 4 วินาที

วิธีทำ

ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น $\frac{f(t_2)-(f(t_1)}{t_2 - t_1}$,

เมื่อ $t_1 = 2$ จะได้ $f(t_1) = f(2) = 4(2) - 2^2 = ...$

เมื่อ $t_2 = 4$ จะได้ $f(t_2) = f(4) = ...\quad = ...$

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(...) - f(...)}{4 - 2}$$

$$= ....$$

ดังนั้นความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 2 ถึง 4 วินาทีเป็น

.......เมตร/วินาที

เพราะว่า อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เป็น

$$\frac{|f(t_2) - f(t_1)|}{t_2 - t_1},\ t_2 > t_1$$

ดังนั้น อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 2 ถึง 4 วินาทีเป็น

$$\frac{|f(...) - f(...)|}{4 - 2}$$

$$= ....\text{เมตร/วินาที}$$

4

$4(4) - 4^2$ 0

4 2

−2

−2

4 2

2

32.

ถ้า $s = 4.9t^2$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่ง พิจารณาความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 0 ถึง 1 วินาที และในช่วง 1 ถึง 2 วินาที จากตารางแสดงเวลาและระยะทางต่อไปนี้

เวลา t	ระยะทาง s $s = 4.9t^2$	ผลต่างของระยะทาง $s_2 - s_1$
0	0	
		$4.9 - 0 = 4.9$
1	4.9	
		$19.6 - 4.9 = 14.7$
2	19.6	

ช่วงเวลา $t = 0$ ถึง $t = 1$ ความเร็วเฉลี่ยเป็น ....เมตร/วินาที

ช่วงเวลา $t = 1$ ถึง $t = 2$ ความเร็วเฉลี่ยเป็น ....เมตร/วินาที

4.9

14.7

33.

ถ้า $0 < h < 1$ จะพิจารณาความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ตามสมการ $s = 4.9t^2$ ในช่วงเวลา $1 - h$ วินาทีถึง 1 วินาที และในช่วง 1 วินาทีถึง $1 + h$ วินาที เพราะว่า

เพราะว่า $s = f(t) = 4.9t^2$

ดังนั้น $f(1) = 4.9(1)^2$

$= ....$

$f(1 - h) = ...$

$= ....$

$f(1 + h) = ...$

$= ....$

4.9 $4.9(1-h)^2$ $4.9 - 9.8h + 4.9h^2$ $4.9(1+h)^2$ $4.9 + 9.8h + 4.9h^2$	34. เพราะว่าความเร็วเฉลี่ยในช่วง t_1 วินาทีถึง t_2 วินาที เป็น $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ ดังนั้นความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 - h วินาทีถึง 1 วินาทีเป็น $\frac{f(.....) - f(.....)}{1 - (1 - h)} = \frac{...........}{h}$ เมตร/วินาที $= ....$ เมตร/วินาที
1 1 - h $9.8h - 4.9h^2$ $9.8 - 4.9h$	35. ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 วินาทีถึง 1 + h วินาทีเป็น $\frac{f(.....) - f(.....)}{(1 + h) - 1} = \frac{............}{h}$ เมตร/วินาที $= ....$ เมตร/วินาที
1 + h 1 $9.8h + 4.9h^2$ $9.8 + 4.9h$	36. จากกรอบที่ 34 และ 35 เราทราบว่า เมื่อ $h \neq 0$ ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 - h ถึง 1 วินาทีเป็น $9.8 - 4.9h$ เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 ถึง 1 + h วินาทีเป็น $9.8 + 4.9h$ เมตร/วินาที ดังนั้นเมื่อ h = 1 ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 - h ถึง 1 วินาทีเป็น $9.8 - 4.9(...) = ...$ เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 + h ถึง 1 วินาทีเป็น $9.8 + 4.9(...) = ...$ เมตร/วินาที นั่นคือความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 0 ถึง 1 วินาที $= ....$ เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 ถึง 2 วินาที $= ....$ เมตร/วินาที

1 4.9 1 14.7 4.9 14.7	37. เมื่อ h = 0.5 ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 – h ถึง 1 วินาทีเป็น 9.8 – 4.9(...) = ... เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1 + h วินาทีเป็น 9.8 + 4.9(...) = ... เมตร/วินาที นั่นคือความเร็วเฉลี่ยในช่วง 0.5 ถึง 1 วินาที = ... เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1.5 วินาที = ... เมตร/วินาที
0.5 7.35 0.5 12.25 7.35 12.25	38. เมื่อ h = 0.1 ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 - h ถึง 1 วินาทีเป็น 9.8 – 4.9(...) = ... เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1 + h วินาทีเป็น 9.8 + 4.9(...) = ... เมตร/วินาที นั่นคือความเร็วเฉลี่ยในช่วง 0.9 ถึง 1 วินาที = ... เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1.1 วินาที = ... เมตร/วินาที

0.1 9.31 0.1 10.29 9.31 10.29	39. เมื่อ h = 0.01 ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 - h ถึง 1 วินาทีเป็น 9.8 - 4.9(...) = ...เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1 + h วินาทีเป็น 9.8 + 4.9(...) = ...เมตร/วินาที นั่นคือความเร็วเฉลี่ยในช่วง 0.99 ถึง 1 วินาที = ...เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1.01 วินาที = ...เมตร/วินาที
.01 9.751 .01 9.849 9.751 9.849	40. เมื่อ h = 0.001 ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 - h ถึง 1 วินาทีเป็น 9.8 - 4.9(...) = ...เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1 + h วินาทีเป็น 9.8 + 4.9(...) = ...เมตร/วินาที นั่นคือความเร็วเฉลี่ยในช่วง 0.999 ถึง 1 วินาที = ...เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1.001 วินาที = ...เมตร/วินาที

.001 9.7951

.001 9.8049

9.7951

9.8049

41.

เมื่อ h = 0.0001

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 – h ถึง 1 วินาทีเป็น

9.8 – 4.9(.....) =.........เมตร/วินาที

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1 + h วินาทีเป็น

9.8 + 4.9(......) =.........เมตร/วินาที

นั่นคือความเร็วเฉลี่ยในช่วง 0.9999 ถึง 1 วินาที

=.........เมตร/วินาที

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1.0001 วินาที

=.........เมตร/วินาที

0.0001 9.79951

0.0001 9.80049

9.79951

9.80049

42.

ลองเปรียบเทียบความเร็วเฉลี่ยในช่วงต่าง ๆ ที่หาได้จากกรอบที่ 36 ถึง 41 จากตารางต่อไปนี้

h วินาที	ช่วงเวลา 1-h ถึง 1 หรือ ช่วงเวลา 1 ถึง 1+h	ความเร็วเฉลี่ย (เมตร/วินาที)
1	0 ถึง 1	4.9
	1 ถึง 2	14.7
0.5	0.5 ถึง 1	7.35
	1 ถึง 1.5	12.25
0.1	0.9 ถึง 1	9.31
	1 ถึง 1.1	10.29
0.01	0.99 ถึง 1	9.751
	1 ถึง 1.01	9.849
0.001	0.999 ถึง 1	9.7951
	1 ถึง 1.001	9.8049
0.0001	0.9999 ถึง 1	9.79951
	1 ถึง 1.0001	9.80049

	43. จะเห็นว่าเมื่อ h มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ ความเร็วในช่วงก่อนและหลัง 1 วินาทีจะมีค่าเข้าใกล้กัน จากกรอบที่ 36 เราทราบแล้วว่าเมื่อ $h \neq 0$ ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1-h ถึง 1 วินาทีเป็น 9.8-4.9h เมตร/วินาที ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1+h วินาทีเป็น 9.8+4.9h เมตร/วินาที ขณะที่ h มีค่าน้อยลงทุกที 4.9h ก็จะมีค่าน้อยลงด้วย เช่น เมื่อ h = .000000001, 4.9h = ...
.0000000049	44. เมื่อ "h มีค่าเข้าใกล้ศูนย์" แต่ไม่เท่ากับศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ "$h \longrightarrow 0$" ดังนั้น 4.9h ก็จะมีค่าเข้าใกล้ ....ด้วย
ศูนย์	45. เมื่อ $h \rightarrow 0$, 4.9h ก็มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จึงถือว่า 4.9h มีค่าน้อยมากจนอาจตัดทิ้งได้ ดังนั้นเมื่อพิจารณา ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1-h ถึง 1 วินาที ซึ่งเท่ากับ 9.8-4.9h กับ ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1+h วินาที ซึ่งเท่ากับ 9.8+4.9h เมื่อ $h \rightarrow 0$ จะได้ $4.9h \longrightarrow 0$ ด้วย ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1-h ถึง 1 วินาที กับความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 1+h วินาทีจะมีค่าใกล้เคียงกัน และมีค่าเข้าใกล้.....เมตร/วินาที

	46.
9.8	แทนการกล่าวว่า "เมื่อ $h \longrightarrow 0$ ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $1 - h$ ถึง 1 วินาที กับในช่วง 1 วินาที ถึง $1 + h$ วินาที มีค่าใกล้เคียงกัน และมีค่าเข้าใกล้ 9.8 เมตร/วินาที" เราเรียกว่า "ความเร็วในขณะเวลา $t = 1$ มีค่า 9.8 เมตร/วินาที" และจะเห็นได้ว่า เมื่อ $h \longrightarrow 0$ แล้ว $\frac{f(1) - f(1 - h)}{1 - (1 - h)}$ กับ $\frac{f(1 + h) - f(1)}{(1 + h) - 1}$ มีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นความเร็วในขณะเวลา $t = 1$ จึงคำนวณได้จากสูตร $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$

	47. ถ้าสมการของการเคลื่อนที่เป็น $f(t) = 4.9t^2$ เราจะพิจารณา ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t - h$ ถึง t และ ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t + h$ เพราะว่า ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t_1 ถึง t_2 เป็น $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t - h$ ถึง t เป็น $\dfrac{f(.....) - f(.....)}{t - (t - h)}$ และความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t + h$ เป็น $\dfrac{f(.....) - f(.....)}{(t + h) - t}$
t $\quad$ $t - h$ $t + h$ $\quad$ t	48. เพราะ $f(t) = 4.9t^2$ ดังนั้น $f(t-h) = 4.9(.....) = ...$ $f(t+h) = ... = ...$

$(t-h)^2 \quad 4.9t^2-9.8th+4.9h^2$ $4.9(t+h)^2 \quad 4.9t^2+9.8th+4.9h^2$	49. $\frac{f(t) - f(t-h)}{t - (t-h)} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{h}$ $= \frac{\dots\dots\dots\dots}{h}$ $\frac{f(t+h)-f(t)}{(t+h) - t} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{h}$ $= \frac{\dots\dots\dots\dots}{h}$
$4.9t^2-4.9t^2+9.8th-4.9h^2$ $9.8th - 4.9h^2$ $4.9t^2+9.8th+4.9h^2-4.9t^2$ $9.8th + 4.9h^2$	50. $\frac{f(t) - f(t-h)}{t - (t-h)} = \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$ $= \frac{9.8th - 4.9h^2}{h}$ $= \dots\dots\dots$ $\frac{f(t+h) - f(t)}{(t+h) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ $= \frac{9.8th + 4.9h^2}{h}$ $= \dots\dots\dots\dots$

$9.8t-4.9h$ $9.8t+4.9h$	51. ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t-h$ ถึง t เป็น $9.8t-4.9h$ และ ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t+h$ เป็น $9.8t+4.9h$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$ ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t-h$ ถึง t จะมีค่าเข้าใกล้ .... ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t+h$ จะมีค่าเข้าใกล้ ....
$9.8t$ $9.8t$	52. เมื่อ $h \longrightarrow 0$ จะเห็นได้ว่าความเร็วก่อนและหลังเวลา t เพียงเล็กน้อยจะมีค่าเข้าใกล้ $9.8t$ ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่า ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ เป็น $9.8t$ เมื่อ $t=1$ ความเร็วในขณะเวลา $t=1$ จะเป็น $9.8(\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$ ซึ่งเท่ากับความเร็วในขณะ $t=1$ ที่ได้เคยหามาแล้ว เมื่อ $t=2$ ความเร็วในขณะเวลา $t = 2$ จะเป็น $9.8(\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$
1 9.8 2 19.6	53. จากกรอบที่ 51 และกรอบที่ 52 เมื่อ $h \longrightarrow 0$ $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ จะมีค่าใกล้เคียงกับ $\dfrac{f(t)-f(t-h)}{h}$ ดังนั้น จะให้นิยามความเร็วในขณะใด ๆ ของการเคลื่อนที่ดังนี้ <u>นิยาม</u> เมื่อ $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ $= \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$

	54. ให้ $f(t) = 3t^2$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งเมื่อเวลามีหน่วยเป็นวินาที ระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร จงหาความเร็วในขณะ $t=2$ วินาที วิธีทำ จากนิยามความเร็วในขณะ $t=2$ เป็น $\frac{f(\ldots\ldots) - f(\ldots)}{h}$,เมื่อ $h \to 0$
2+h 2	55. เนื่องจาก $f(t) = 3t^2$ ดังนั้น $f(2) = 3(\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f(2+h) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2^2 12 $3(2+h)^2$ $12+12h+3h^2$	56. $f(2+h) - f(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
$12+12h+3h^2-12$ $12h+3h^2$	57. $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{12h + 3h^2}{h}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
12+3h	58. ดังนั้น ความเร็วในขณะ $t=2$ วินาที $= \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, เมื่อ $h \to 0$ $= 12 + 3h$ เมื่อ $h \to 0$ $= 12$ เมตร/วินาที

	59. เราอาจจะหาความเร็วในขณะ t=2 วินาทีได้อีกวิธีหนึ่ง คือ หาความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ ก่อน แล้วแทนค่า t ด้วย 2 จากนิยาม ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ = $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ เมื่อ $h \rightarrow 0$ เพราะว่า $f(t) = 3t^2$ จะได้ $f(t+h)$ = ... = ... $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{.............}{h}$ = ... ดังนั้น ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ = ...เมื่อ $h \rightarrow 0$ = ... เมตร/วินาที แทนค่า t = 2 จะได้ ความเร็วในขณะ t=2 วินาที = ...เมตร/วินาที

$3(t+h)^2$

$3t^2 + 6th + 3h^2$

$3t^2 + 6th + 3h^2 - 3t^2$

$6t + 3h$

$6t + 3h$

$6t$

12

60.

ให้ $s = f(t) = 24 - t^2$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่ง เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที

จงหา ก. ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t=1$ ถึง $t=4$ วินาที

ข. อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วง $t=1$ ถึง $t=4$ วินาที

ค. ความเร็วในขณะ $t=2$ วินาที

<u>วิธีทำ</u>

จากนิยาม ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t_1 ถึง t_2 เป็น $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 4 วินาที

$= \dfrac{f(\ldots) - f(\ldots)}{3}$ เมตร/วินาที

เพราะว่า $f(t) = 24 - t^2$

$f(4) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

$f(1) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 4 วินาที

$= \dfrac{(\ldots) - (\ldots)}{3}$ เมตร/วินาที

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$ เมตร/วินาที

อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 4 วินาที คือค่าสัมบูรณ์ของความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา 1 ถึง 4 วินาที

ดังนั้น อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วง 1 ถึง 4 วินาที

$= |\ldots\ldots\ldots|$ เมตร/วินาที

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$ เมตร/วินาที

	61.
4 1	จากนิยาม ความเร็วในขณะ t = 2 วินาที
$24 - 4^2$ 8	$= \dfrac{f(\ldots\ldots) - f(\ldots\ldots)}{h}$, เมื่อ $h \longrightarrow 0$
$24 - 1^2$ 23	
8 23	เพราะว่า $f(t) = 24 - t^2$
-5	$f(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
-5	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5	$f(2+h) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
	$f(2+h) - f(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
	$\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$
	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
	ดังนั้น ความเร็วในขณะ t=2 วินาที = ...เมื่อ $h \longrightarrow 0$
	= ....เมตร/วินาที

$2+h$ 2

$24 - 2^2$

20

$24 - (2 + h)^2$

$20 - 4h - h^2$

$(20 - 4h - h^2) - 20$

$-4h - h^2$

$-4h - h^2$

$-4 - h$

$-4 - h$

-4

จากที่เรียนมาแล้วสรุปได้ว่า

๑) <u>อัตราเร็วเฉลี่ย</u> คืออัตราส่วนระหว่างระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ต่อเวลาที่ใช้ทั้งหมด

๒) <u>ความเร็วเฉลี่ย</u> คืออัตราเร็วเฉลี่ยที่คิดทิศทาง ค่าของความเร็วเฉลี่ยจะเป็นจำนวนจริง

๓) ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t_1 ถึง t_2 เท่ากับ

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad \text{เมื่อ } t_2 > t_1$$

๔) อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วง t_1 ถึง t_2 เท่ากับ

$$\frac{|f(t_2) - f(t_1)|}{t_2 - t_1}, \quad \text{เมื่อ } t_2 > t_1$$

๕) ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \text{เมื่อ } h \longrightarrow 0$$

บทที่ 2 อัตราการเปลี่ยนแปลง

62.

การเขียนฟังก์ชันในรูปของเซ็ตของคู่ลำดับ เช่น

$\{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$, $\{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$

อาจเขียนฟังก์ชันในรูปบอกกฎเกณฑ์สั้น ๆ คือ ในรูปของสมการ เช่น $y = x^2$ หรือ $f(x) = x^2$, $y = 2x + 1$ ได้

63.

ถ้า $y = f(x) = 2x^2$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากับด้านกว้างที่มีความยาว x หน่วย

ถ้าเดิมความยาวของด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมเป็น 10 หน่วย เปลี่ยนมาเป็นยาว 8 หน่วย จะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมดังนี้

ถ้าด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมยาว 10 หน่วย นั่นคือ $x_1 = 10$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม คือ $f(x_1)$ = ... ตารางหน่วย

ถ้าด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมยาว 8 หน่วย นั่นคือ x_2 = ...

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม คือ $f(x_2)$ = ... ตารางหน่วย

นั่นคือความยาวของด้านเปลี่ยนไป = $x_2 - x_1$ = ... หน่วย

และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมเปลี่ยนไป = $f(x_2) - f(x_1)$

= .... ตารางหน่วย

<table>
<tr>
<td>200
8
128
-2
-72</td>
<td>64.

จากกรอบที่ 63 ค่าของพื้นที่ที่เปลี่ยนไปเป็นจำนวนลบ แสดงว่าพื้นที่เปลี่ยนจากมากเป็นน้อย

อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่เปลี่ยนไปกับความยาวของด้านที่เปลี่ยนไป

$= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

= .... ตารางหน่วย/หน่วย

= .... ตารางหน่วย/หน่วย

อัตราส่วนดังกล่าวเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่เทียบกับความยาวของด้าน</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{-72}{-2}$

36</td>
<td>65.

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเทียบกับด้านกว้าง เมื่อด้านกว้างเปลี่ยนจากยาว 9 หน่วย กลายเป็น 12 หน่วย มีค่าเท่ากับ.................. ตารางหน่วย/หน่วย</td>
</tr>
</table>

42 (วิธีคิดแสดงดังนี้ พื้นที่เปลี่ยนไป $2(12^2-9^2)=126$ ด้านเปลี่ยนไป $= 12-9 = 3$ อัตราส่วน $= \frac{126}{3} = 42$)	66. นิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไปเป็น $x + h$, $h \neq 0$ และค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว "อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย" ของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$ คือ อัตราส่วน $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ "อัตราการเปลี่ยนแปลง" ของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใด ๆ คืออัตราส่วน $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \to 0$
	67. กำหนดให้ $y = 3 - x^2$ จงหา ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 6 ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 8$ วิธีทำ ให้ $y = f(x) = 3 - x^2$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y ในช่วง x ถึง $x + h$ เท่ากับ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $x = 4$, $x + h = 6$ ดังนั้น $h = ...$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ในช่วง x มีค่า 4 ถึง 6 เท่ากับ $\frac{f(.....) - f(.....)}{2}$

2 6 4	68. เนื่องจาก $f(x) = 3 - x^2$ $f(6) = \ldots\ldots\ldots$ $f(4) = \ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{f(6) - f(4)}{2} = \dfrac{(\ldots\ldots)}{2}$ $= \ldots\ldots$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 6 เท่ากับ..............
-33 -13 -20 -10 -10	69. จากนิยาม อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ในขณะ x มีค่าใด ๆ เท่ากับ $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \to 0$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ในขณะ x = 8 เท่ากับ $\dfrac{f(\ldots\ldots) - f(\ldots\ldots)}{h}$ เมื่อ $h \to 0$
8 + h 8	70. เนื่องจาก $f(x) = 3 - x^2$ $f(8) = \ldots\ldots\ldots$ $f(8+h) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{f(8+h) - f(8)}{h} = \dfrac{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{h}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x = 8 $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ เมื่อ $h \to 0$ $= \ldots\ldots\ldots$

-61

$3 - (8 + h)^2$

$-61 - 16h - h^2$

$-16h - h^2$

$-16 - h$

$-16 - h$

-16

71.

การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ $x = 8$ อาจทำได้โดยการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ x มีค่าใด ๆ ก่อน แล้วจึงแทนค่า $x = 8$ ก็ได้ดังนี้

เนื่องจาก $f(x) = 3 - x^2$

$$f(x+h) = 3 - (x+h)^2$$

$$= 3 - x^2 - 2xh - h^2$$

ดังนั้น $f(x+h) - f(x) = 3 - x^2 - 2xh - h^2 - 3 + x^2$

$$= -2xh - h^2$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x มีค่าใด ๆ

เท่ากับ $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$

$= \dfrac{-2xh - h^2}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$

$= -2x - h$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$

$= -2x$

(จะต้องเขียน "เมื่อ $h \longrightarrow 0$ " ไว้เสมอ ถ้ายังไม่ได้แทนค่า $h=0$)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ $x = 8$ มีค่า

$= -2(.....)$

$= ....$

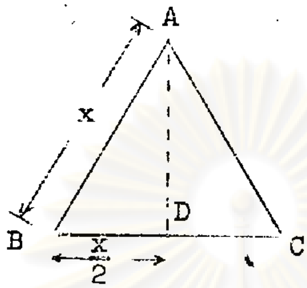
8 -16	72. ปริมาณของน้ำมันในถังใบหนึ่งเป็น Q ลูกบาศก์เมตร เมื่อเวลาผ่านไป t นาที เป็นไปตามสมการ $Q = 180 - t - t^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของน้ำมันในถังในช่วงเวลา 4 ถึง 6 นาที <u>วิธีทำ</u> ให้ $Q = f(t) = 180 - t - t^2$ จากนิยาม อัตราการเปลี่ยนแปลง<u>เฉลี่ย</u>ของ f(t) เมื่อ t เปลี่ยนเป็น t+h เท่ากับ $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ ให้ $t = 4$ $t+h = 6$ ดังนั้น $h = 2$ $f(t) = 180 - t - t^2$ $f(4) = 180 - 4 - 16 = 160$ $f(6) = 180 - 6 - 36 = 138$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f(t) เมื่อ t เปลี่ยนจาก 4 นาที เป็น 6 นาที เท่ากับ $\frac{f(6) - f(4)}{2}$ $= \frac{138 - 160}{2}$ ลบ.เมตร/นาที $= -11$ ลบ.เมตร/นาที ค่าของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเป็นจำนวนลบ แสดงว่า เมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ปริมาณของน้ำที่มีอยู่จะไม่เพิ่มขึ้นแต่จะลดลง หรืออาจกล่าวได้ว่าเมื่อ t เพิ่มขึ้น f(t) จะ .... (เพิ่มขึ้น, ลดลง)

ลดลง

73.

พิจารณา ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ากับความยาวของด้าน

ให้ y เป็นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาว x หน่วย จะสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างด้านกับพื้นที่ของสามเหลี่ยมนี้



พื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2}\ (x)\ (AD)$$

AD เป็นส่วนสูงของสามเหลี่ยมซึ่งลากจาก A มา $\perp$ กับ BC ที่ D

ดังนั้น $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{x}{2}$

จาก $\triangle$ มุมฉาก ABD, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$$= x^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

พื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่า $= y = \frac{1}{2}\ (x)\ (\frac{\sqrt{3}}{2} x)$

จะได้ $y = f(x) = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

74.

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อด้านเปลี่ยนจากยาว x เป็น x+h หน่วย $= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\text{เนื่องจาก } y = f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\text{จะได้ } f(x+h) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x+h)^2$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x+h)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{(x+h)^2 - x^2\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(x+h+x)(x+h-x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+h)h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{(2x+h)h}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+h)$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อด้านเปลี่ยนจากยาว x เป็น x+h หน่วยเท่ากับ..........

ตารางหน่วย/หน่วย

$\frac{\sqrt{3}}{4}(2x+h)$	75. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อด้านเปลี่ยนจากยาว 10 เซนติเมตร กลายเป็น 8 เซนติเมตร นั่นคือ $x = 10$, $x + h = 8$ ดังนั้น $h = 8 - 10 = -2$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่เมื่อด้านเปลี่ยนจากยาว 10 เซนติเมตร กลายเป็น 8 เซนติเมตร หาได้จากการแทนค่า $x = 10$ และ $h = -2$ เนื่องจาก $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+h)$ $= \frac{\sqrt{3}}{4}\{2(10) + (-2)\}$ $= \frac{9}{2}\sqrt{3}$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อด้านเปลี่ยนจากยาว 10 เซนติเมตร กลายเป็น 8 เซนติเมตร เท่ากับ.....................ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

$\frac{9}{2}\sqrt{3}$	76. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเมื่อเทียบกับด้านมีค่าเป็นบวก แสดงว่าเมื่อความยาวของด้านลดลงพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมก็จะลดลง **และพื้นที่ของสามเหลี่ยมจะเพิ่มขึ้น** ถ้าความยาวของด้านเพิ่มขึ้น นั่นคือ ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นบวก แสดงว่า ถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้น f(x) ก็จะ .... และ (เพิ่มขึ้น,ลดลง) ถ้า x มีค่าลดลง f(x) ก็จะ .... (เพิ่มขึ้น,ลดลง)
เพิ่มขึ้น ลดลง	77. จากกรอบที่74 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+h)$ และจากนิยาม อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ขณะที่ด้านยาว x หน่วย $= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$ $= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+h)$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$ $= \frac{\sqrt{3}}{4}2x$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ขณะที่ด้านยาว 12 เซนติเมตร $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2(\ldots)$ = ... ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

12

$6\sqrt{3}$

78.

ปริมาณของสาร Q กรัมในน้ำยาชนิดหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป t นาทีเป็นไปตามสมการ $Q = \frac{16}{t+1}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของสารนั้นในขณะ t=3 นาทีเป็นเท่าใด

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $Q = f(t) = \frac{16}{t+1}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของสารในขณะเวลา t นาทีใด ๆ

$= \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$

เพราะว่า $f(t) = \frac{16}{t+1}$

จะได้ $f(t+h) = \frac{16}{(\ldots\ldots\ldots)}$

$f(t+h)-f(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของสารในขณะเวลา t ใด ๆ

= .... เมื่อ $h \longrightarrow 0$

= .... กรัม/นาที

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของสารในขณะ t = 3 นาที

= .... กรัม/นาที

= .... กรัม/นาที

$(t+h)+1$ $\frac{16}{t+h+1} - \frac{16}{t+1}$ $\frac{-16h}{(t+h+1)(t+1)}$ $\frac{-16h}{(t+h+1)(t+1)\,h}$ $\frac{-16}{(t+h+1)(t+1)}$ $\frac{-16}{(t+1)(t+1)}$ $\frac{-16}{(3+1)(3+1)}$ -1	79. ผลจากในกรอบที่ 78 จะเห็นว่า ค่าของ**อัตราการเปลี่ยนแปลงของสาร** เทียบกับเวลาเป็น จำนวน.............แสดงว่าเมื่อเวลา เพิ่มขึ้น ปริมาณของ (บวก , ลบ) สารในน้ำยาจะ............... นั่นคือ เมื่อ t เพิ่มขึ้น (เพิ่มขึ้น, ลดลง) f(t) จะ............... (เพิ่มขึ้น, ลดลง)
ลบ ลดลง ลดลง	80. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลมเทียบกับรัศมีของฐานเมื่อส่วนสูงคงที่ วิธีทำ ให้ V เป็นปริมาตรของกรวยกลม x เป็นรัศมีของกรวยกลม และ d เป็นส่วนสูงซึ่งคงที่ จากสูตรปริมาตรของกรวยกลม จะได้ $V = f(x) = \frac{1}{3}\pi d x^2$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f(x) ขณะ x มีค่าใด ๆ เท่ากับ $\frac{f(......) - f(......)}{h}$ เมื่อ $h \to 0$ $f(x) =$ .... $f(x+h) =$ .... $f(x+h)-f(x) =$ .... $=$ .... ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลมขณะรัศมีของฐานยาว x หน่วย $= \frac{..............}{h}$ **เมื่อ** $h \to 0$ $=$ .... เมื่อ $h \to 0$ $=$ ....

$x + h$ $\qquad x$ $\frac{1}{3}\pi dx^2$ $\frac{1}{3}\pi d(x + h)^2$ $\frac{1}{3}\pi d(x+h)^2 - \frac{1}{3}\pi dx^2$ $\frac{1}{3}\pi d(2x+h)h$ $\frac{1}{3}\pi d(2x+h)h$ $\frac{1}{3}\pi d(2x+h)$ $\frac{2}{3}\pi dx$	จากที่เรียนมาแล้วสรุปได้ว่า ๑) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ มีค่าเท่ากับ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ๒) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ขณะ x มีค่าใด ๆ มีค่าเท่ากับ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$ ๓) ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ มีค่าเป็นลบ แสดงว่า เมื่อ x เพิ่มขึ้น $f(x)$ จะมีค่าลดลง และถ้า x มีค่าลดลง $f(x)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ๔) ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลง $f(x)$ มีค่าเป็นบวก แสดงว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น และถ้า x มีค่าลดลง $f(x)$ จะลดลงด้วย

บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	
	81. อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในขณะ x มีค่าใด ๆ นั้นเท่ากับ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$ และ ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ ของฟังก์ชันของการเคลื่อนที่ $s = f(t)$ นั้นเท่ากับ $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$ เรานิยมใช้สัญลักษณ์ " $\lim\limits_{h \to 0}$ " แทน เมื่อ $h \longrightarrow 0$ ดังนั้น "$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$" จะเขียนแทนด้วย "$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$" อ่านว่า ลิมิตเมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์ของ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ดังนั้น "$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$" จะเขียนแทนด้วย "........................."
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$	82. ถ้า $f = \{(m, n) \mid n = 2m\}$ อาจกล่าวได้ว่า n เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ m หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $n = f(m) = 2m$ ถ้า $g = \{(t, s) \mid s = 3t - 1\}$ อาจกล่าวได้ว่า s เป็นค่าของฟังก์ชัน g ที่ t หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $s = g(t) = 3t - 1$ ถ้า $h = \{(w, y) \mid y = w^2 - 3\}$ อาจกล่าวได้ว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน...... ที่ ...... หรือเขียนสั้น ๆ ว่า y = ... = ...

h w h(w) $w^2 - 3$	83. ถ้า $f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ หรือเขียนสั้น ๆ $y = f(x)$ จะสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชัน f ฟังก์ชันใหม่นี้ให้ชื่อว่า f' (อ่านว่า เอฟไพรม์) โดย $f' = \{(x, y) \mid y = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\}$ ซึ่งกล่าวได้ว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน f' ที่...... .หรือเขียนสั้น ๆ ว่า y = ... = $\lim_{h \to 0}$ ....
x f'(x) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	84. นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ แทนด้วยสัญลักษณ์ $y = f(x)$ ให้ f' (อ่านว่า เอฟ ไพร์ม) เป็นฟังก์ชันใหม่ ซึ่ง $f' = \{(x, y) \mid y = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\}$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เราเรียก f' ว่า อนุพันธ์ของ f และ f'(x) อ่านว่า "เอฟไพร์มของเอกซ์" ซึ่งหมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x บางครั้งเราใช้สัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ (อ่านว่าดีวายบายดีเอกซ์) หรือ $\frac{df(x)}{dx}$ (อ่านว่าดีเอฟของเอกซ์บายดีเอกซ์) แทน ดังนั้น $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

85.

กำหนดให้ $f(x) = 7x^2$ จงหา $f'(x)$ และ $f'(3)$

วิธีทำ จากนิยาม $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

เนื่องจาก $f(x) = 7x^2$

$f(x+h) = 7(.....)^2$

$= ....$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{..............}{h}$

$= ....$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} ....$

$= ....$

ดังนั้น $f'(x) = ...$

เมื่อ $x = 3$ จะได้ $f'(3) = ...$

$(x+h)$ $7x^2+14xh+7h^2$ $14xh+7h^2$ $14x+7h$ $14x+7h$ $14x$ $14x$ 42	86. กำหนดให้ $y = x^2 - 5x - 2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ <u>วิธีทำ</u> ให้ $y = f(x) = x^2 - 5x - 2$ จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\ldots\ldots) - f(\ldots\ldots)}{h}$ เนื่องจาก $f(x) = x^2 - 5x - 2$ $f(x+h) = (\ldots\ldots) - 5(\ldots\ldots) - 2$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x+h$ $\quad x$ $(x+h)^2$ $\quad (x+h)$ $x^2+2hx+h^2-5x-5h-2$ $2hx+h^2-5h$ $2x+h-5$	87. จากกรอบที่ 86 $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$2x + h - 5$ $2x - 5$	88. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$ จงหา $\dfrac{d}{dx}f(x)$ <u>วิธีทำ</u> จากนิยาม $\dfrac{d}{dx}f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$ $f(x+h) = \dfrac{3}{(x+h) - 5}$ $f(x+h) - f(x) = \dfrac{3}{(x+h) - 5} - \dfrac{3}{x-5}$ $= \dfrac{3(x-5) - 3(x+h-5)}{(x+h-5)(x-5)}$ $= \dfrac{-3h}{(x+h-5)(x-5)}$ $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{-3h}{h(x+h-5)(x-5)}$ ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-3}{(x+h-5)(x-5)}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{-3}{(x-5)^2}$	89. $\frac{dy}{dx}$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งไม่ได้หมายถึง d คูณกับ y หารด้วย d คูณกับ x ดังนั้น $\frac{dy}{dx} \neq \frac{y}{x}$ เมื่อ $y = f(x)$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ แต่ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อ h→... ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f (...) เทียบกับ x ดังนั้น $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ f(....) เทียบกับ x ในขณะ x มีค่าใด ๆ
0 x x	90. กำหนดให้ $y = (x+2)^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x = 5 วิธีทำ ให้ $y = f(x) = (x+2)^2$ เพราะว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x มีค่าใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$ จากนิยาม $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $f(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ $f(x+h)$ = ... = ... $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{.............}{h}$ = ... จะได้ $f'(x) = \lim_{h \to 0}$ .... = ... เมื่อ x=5, f(5) = ... ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x = 5 เป็น ....

$(x+h)^2+4(x+h)+4$ $x^2+2hx+h^2+4x+4h+4$ $2xh+h^2+4h$ $2x+h+4$ $2x+h+4$ $2x+4$ 14 14	91. ถ้า $y = f(x)$ เมื่อ x เป็นเวลา และ y เป็นระยะทางที่บอกตำแหน่งของวัตถุ เรานิยมใช้ t แทน x และ s แทน y ดังนั้น $y = f(x)$ จะกลายเป็น $s = f(.....)$ เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = f'(...) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(.....)-f(.....)}{h}$
t t $t+h$ t	92. จากที่เรียนมาแล้ว $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ เมื่อ $h \to .....$ ซึ่ง $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ เมื่อ $h \to .....$ ก็คือความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ ดังนั้น $f'(t)$ หรือ $\frac{ds}{dt}$ ก็คือความเร็วในขณะเวลา...... ใด ๆ
0 0 t	93. ถ้าสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งเป็น $s = 5t^2+3$ เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วในขณะ $t = 8$ วินาที <u>วิธีทำ</u> ให้ $s = f(t) = 5t^2+3$ เนื่องจาก ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ คือ $\frac{ds}{dt}$ หรือ $f'(t)$ จะได้ $f'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(....)-f(....)}{h}$

$t+h$ $\quad$ t	94. เนื่องจาก $s = f(t) = 5t^2 + 3$ $f(t+h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ จะได้ $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ เมื่อ $t=8$ จะได้ $f'(8) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น ความเร็วในขณะเวลา $t=8$ วินาทีเป็น ....เมตร/วินาที
$5(t+h)^2 + 3$ $5t^2+10th+5h^2+ 3$ $10th + 5h^2$ $10t + 5h$ $10t + 5h$ $10t$ 80 80	จากที่เรียนมาแล้วสรุปได้ว่า ๑) เมื่อ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของ f ที่ x คือ $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ๒) $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ๓) อนุพันธ์ของฟังก์ชันใด ๆ ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนั้น ๔) อนุพันธ์ของฟังก์ชันของการเคลื่อนที่ คือ ความเร็วในขณะเวลาใด ๆ

บทที่ 4 สูตรการหาอนุพันธ์

95. เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นได้โดยใช้นิยาม แต่เพื่อให้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นไปโดยสะดวกและรวดเร็ว เราจะใช้สูตรบางสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน (ในบทเรียนนี้จะกล่าวถึงเฉพาะฟังก์ชันพีชคณิตง่าย ๆ เท่านั้น) ซึ่งวิธีการหาและการพิสูจน์ที่จะนำมาใช้นั้นจะไม่กล่าวถึง แต่อาจจะมีการพิสูจน์สูตรง่าย ๆ ให้ดูบ้าง

สูตรที่ใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จะกล่าวถึงต่อไปมีดังนี้คือ

<u>สูตรที่ 1</u> ถ้า $y = f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0$$

<u>สูตรที่ 2</u> ถ้า $y = x$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 1$

<u>สูตรที่ 3</u> ถ้า $y = c\ f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} f(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$$

<u>สูตรที่ 4</u> ถ้า $y = x^n$, $n \in R$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

<u>สูตรที่ 5</u> ถ้า $y = f(x) + g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

ถ้า $y = f(x) - g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

	96. กำหนดให้ $y = f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ จงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = 0$ โดยใช้นิยาม จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เพราะว่า $f(x) = c$ จะได้ $f(x+h) = \text{........}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(\text{......}) - (\text{......})}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \text{................}$ $= \text{...........}$
c c c 0 0	97. $y = f(x) = c$ เมื่อ $c \in R$ เราเรียกฟังก์ชัน f ว่า ฟังก์ชันคงที่ ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่ใด ๆ มีค่าเท่ากับ ....
ศูนย์	98. กำหนดให้ $y = 7$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7)$ $= 0$ (สูตรที่ 1)

	99. กำหนดให้ $y = f(x) = x$ จงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = 1$ โดยใช้นิยาม จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เพราะ $f(x) = x$ จะได้ $f(x+h) = \ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(\ldots\ldots\ldots) - (\ldots\ldots\ldots)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots}{h}$ $= \ldots\ldots\ldots$
$x + h$ $x+h$ $\quad$ x h 1	100. ถ้า $y = 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้นิยาม <u>วิธีทำ</u> ให้ $y = f(x) = 2x$ $f(x+h) = \ldots\ldots\ldots$ $f(x+h) - f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$2(x+h)$ $2h$	101. จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h}$ $= \lim_{h \to 0} 2$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 2$ $\frac{d}{dx}(2x) = \ldots\ldots$

2	102. กำหนดให้ $y = f(x) = cx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ จงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = c$ โดยใช้นิยาม จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots\ldots\ldots) - f(\ldots\ldots)}{h}$ $f(x) = cx$ $f(x + h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(\ldots\ldots\ldots) - (\ldots\ldots\ldots)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
x+h x c(x+h) c(x+h) cx ch c	103. ถ้า $y = x^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้นิยาม วิธีทำ ให้ $y = f(x) = x^3$ $f(x+h) = (x+h)^3$ $= x^3 + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$ จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3x^2h \quad 3xh^2 \quad h^3$ $3x^2h+3xh^2+h^3$ $3x^2+3xh+h^2$ $3x^2$	104. หรือจากการใช้สูตรที่ 4 $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ กำหนดให้ $y = x^3$ นั่นคือ $n = \ldots\ldots\ldots$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^3}{dx}$ $= \ldots\ldots x^{3-1}$ (สูตรที่ 4) $= \ldots\ldots\ldots$
3 3 $3x^2$	105. กำหนดให้ $y = 5x^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3)$ $= \ldots\ldots\frac{dx^3}{dx}$ (สูตรที่ 3 $\frac{dcf(x)}{dx} = c\frac{d}{dx}f(x)$) $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ (สูตรที่ 4)
5 $15x^2$	106. กำหนดให้ $y = \frac{x^2}{7}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{x^2}{7})$ $= \ldots\ldots\frac{dx^2}{dx}$ (สูตรที่ 3) $= \ldots\ldots\ldots$ (สูตรที่ 4)
$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}x$	107. กำหนดให้ $y = \frac{1}{x^3}$ จงหา $f'(x)$ <u>วิธีทำ</u> $f(x) = y = x^{-3}$ $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^{-3}}{dx}$ $= (-3)x^{(\ldots\ldots)}$ (สูตรที่ 4)

-4	108. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \mid y = \frac{5}{x^4}\}$ จงหา $f'(x)$, $f'(2)$ <u>วิธีทำ</u> ให้ $y = f(x) = \frac{5}{x^4}$ $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{5}{x^4})$ $= \frac{d}{dx} 5x^{(\ldots)}$ $= \ldots\ldots\ \frac{dx}{dx}^{(\ldots\ldots)}$ (สูตรที่ 3) $f'(x) = \ldots\ldots$ เมื่อ $x=2$ จะได้ $f'(2) = \ldots\ldots$
-4 $5 \quad -4$ $-20x^{-5}$ $-\frac{5}{8}$	109. จาก $y = f(x)$ ถ้า $y = s$ และ $x = t$ จะได้ $s = f(t)$ สูตรการหาอนุพันธ์ก็ยังคงเหมือนเดิม แต่เปลี่ยนจาก y เป็น s และ x เป็น t ถ้า $s = \frac{12}{7t^5}$ จงหา $\frac{ds}{dt}$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{12}{7t^5})$ $= \frac{12}{7}\frac{d}{dt}(\frac{1}{t^5})$ (สูตรที่ 3) $= \frac{12}{7}\frac{d}{dt}(t^{-5})$ $= \frac{12}{7}(\ldots\ldots)t^{-5-1}$, (สูตรที่ 4) $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

-5 $-\frac{60t^{-6}}{7}$	110. จากสูตรที่ 5 ถ้า $y = f(x) + g(x)$ แล้ว $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y = \frac{x^7}{3} + 2x^5$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{x^7}{3}) + \frac{d}{dx}(2x^5)$ $= \ldots\ldots\frac{dx^7}{dx} + \ldots\ldots\frac{dx^5}{dx}$ $= \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$
$\frac{1}{3}$ 2 $\frac{7}{3}x^6$ $10x^4$	111. กำหนดให้ $s = 3t^2 + 8t + 5$ จงหา $\frac{ds}{dt}$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2) + \frac{d}{dt}(8t) + \frac{d}{dt}(5)$ $= \ldots\ldots\frac{dt^2}{dt} + \ldots\ldots\frac{dt}{dt} + \ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$
3 8 0 $6t$ 8 0	112. กำหนด $y = \frac{1}{3}x^5 + \frac{3}{x^{-4}} + 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{dx^5}{dx} + 3\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^{-4}}) + 2\frac{dx}{dx}$ $= \frac{1}{3}(\ldots\ldots) + 3(\ldots\ldots) + (\ldots\ldots)$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$5x^4 \quad 4x^3 \quad 2$

$\frac{5}{3}x^4 + 12x^3 + 2$

113.

กำหนด $y = \sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้นิยาม

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$

จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x+h) = \sqrt{x+h} = (x+h)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^{\frac{1}{2}} - (x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\} \frac{\{(x+h)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\}}{\{(x+h)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\}}$$

$$= \frac{\{(x+h)^{\frac{1}{2}}\}^2 - \{x^{\frac{1}{2}}\}^2}{\{(x+h)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\}}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h\{(x+h)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\}}$$

$$= \frac{1}{\{(x+h)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\{(x+h)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\}}$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

	114. กำหนด $y = \sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้สูตร วิธีทำ จากสูตร $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เมื่อ $n \in R$ $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}$ $= .....x^{(\frac{1}{2} - 1)}$ $= ....x^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{(.....)}$
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $2\sqrt{x}$	115. กำหนด $s = \sqrt[3]{t^2}$ จงหา $\frac{ds}{dt}$ วิธีทำ $s = \sqrt[3]{t^2} = t^{\frac{2}{3}}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^{\frac{2}{3}})$ $= \frac{2}{3}\, t^{(...... - 1)}$ $= ....$

$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}$ หรือ $\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}$	116. ให้ $f(x) = x^2(2x+3)$ จงหา $\frac{d}{dx}f(x)$ วิธีทำ $f(x) = \ldots\ldots\ldots + 3x^2$ $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(\ldots.) + \frac{d}{dx}(\ldots.)$ $= \ldots.\frac{dx^3}{dx} + \ldots.\frac{dx^2}{dx}$ $= \ldots\ldots\ldots$
$2x^3$ $2x^3$ $3x^2$ 2 3 $6x^2 + 6x$	117. ให้ $y = \frac{x^5 + 2x^3 + 3}{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ วิธีทำ $y = \frac{x^5}{x} + \frac{2x^3}{x} + \frac{3}{x}$ $= x^4 + 2x^2 + 3x^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^4}{dx} + 2\frac{dx^2}{dx} + 3\frac{dx^{-1}}{dx}$ $= \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$
$4x^3 + 4x - 3x^{-2}$	118. กำหนด $f(x) = \frac{2 - 4x^3 + x^5}{2x}$ จงหา $\frac{d}{dx}f(x)$ วิธีทำ $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{d}{dx}f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x} - 2x^2 + \frac{x^4}{2}$ $x^{-1} - 2x^2 + \frac{1}{2}x^4$ $\frac{dx^{-1}}{dx} - \frac{2dx^2}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dx^4}{dx}$ $\frac{-1}{x^2} - 4x + 2x^3$	119. ถ้า $s = (t-2)(t-3)$ จงหา $\frac{ds}{dt}$ วิธีทำ $s = t^2 - 5t + 6$ $\frac{ds}{dt} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{dt^2}{dt} - \frac{d(5t)}{dt} + \frac{d(6)}{dt}$ $2t - 5$	120. ถ้า $g(x) = 3x^5 - 2\sqrt{x} + 2$ จงหา $g'(x)$ วิธีทำ $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{d(3x^5)}{dx} - \frac{d(2x^{\frac{1}{2}})}{dx} + \frac{d(2)}{dx}$ $3\frac{dx^5}{dx} - 2\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} + 0$ $15x^4 - x^{-\frac{1}{2}}$	121. วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ในทางตรงด้วยสมการ $s = 5t^3 - 2t$ เมื่อ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร จงหาความเร็วของวัตถุนี้ในขณะ $t = 10$ วินาที วิธีทำ ความเร็วของวัตถุ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางในขณะเวลาใด ๆ ให้ $s = f(t) = 5t^3 - 2t$ ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{ds}{dt}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^3) - \frac{d}{dt}(2t)$ $= (\ldots\ldots) - (\ldots\ldots)$ จะได้ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ $= \frac{ds}{dt} = \ldots\ldots\ldots$ เมตร/วินาที ดังนั้นความเร็วในขณะเวลา $t = 10$ วินาที $= \ldots\ldots\ldots$ เมตร/วินาที

$15t^2$ 2 $15t^2 - 2$ 1498	122. สมการของการเคลื่อนที่ของเรือลำหนึ่งเป็น $s = 2t^3 - \frac{t^2}{2} + t$ เมื่อ t เป็นเวลาหน่วยเป็นวินาที s เป็นระยะทางหน่วยเป็นเมตร จงหาความเร็วของเรือลำนี้ในขณะ $t = 3$ วินาที <u>วิธีทำ</u> ให้ความเร็วของเรือในขณะเวลา t ใด ๆ คือ v ความเร็วในขณะใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางในขณะเวลาใด ๆ $= \frac{ds}{dt}$ ดังนั้น $v = \frac{ds}{dt}$ เนื่องจาก $s = 2t^3 - \frac{t^2}{2} + t$ $v = \frac{ds}{dt} =$ .... $=$ .... เมื่อ t=3, จะได้ความเร็วในขณะ t=3 เป็น......เมตร/วินาที
$\frac{d(2t^3)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dt^2}{dt} + \frac{dt}{dt}$ $6t^2 - t + 1$ 52	123. ถ้าความเร็วของเรือลำหนึ่งคือ $v = 7t^2 - 5t$ เมื่อ t เป็นเวลาหน่วยเป็นวินาที v เป็นความเร็วหน่วยเป็นเมตร/วินาที จงหา $\frac{dv}{dt}$ <u>วิธีทำ</u> $v = 7t^2 - 5t$ $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(7t^2) - \frac{d}{dt}(5t)$ $= (.......) - (.........)$

14t 5	124. ถ้า v เป็นความเร็ว และ t เป็นเวลา $\frac{dv}{dt}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ นี้ เรียกว่า <u>ความเร่ง</u> (acceleration) ถ้าให้ a เป็นความเร่งจะได้ว่า $\frac{dv}{dt}$ = ...
a	125. รถยนต์คันหนึ่งมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s = t^3 - 3t + 5$ เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหา ก. ความเร็วของรถยนต์ในขณะเวลา t ใด ๆ ข. ความเร่งของรถยนต์ในขณะเวลา t ใด ๆ <u>วิธีทำ</u> ถ้าให้ v เป็นความเร็วของรถยนต์ และ a เป็นความเร่งของรถยนต์ เนื่องจาก $s = t^3 - 3t + 5$ จะได้ $v = \frac{ds}{dt} = \frac{dt^3}{dt} - \frac{d(3t)}{dt} + \frac{d(5)}{dt}$ = ... เมตร/วินาที และ $a = \frac{dv}{dt}$ = ... = ... เมตร/วินาที

$$3t^2 - 3 + 0$$

$$\frac{d}{dt}(3t^2) - \frac{d}{dt}(3)$$

$$6t$$

จากที่เรียนมาแล้วสรุปได้ว่า

1) ถ้า $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2) ถ้า $y = f(x) = c$, c เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

3) ถ้า $y = f(x) = x$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 1$$

4) ถ้า $y = cf(x)$, c เป็นค่าคงที่แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = c\,\frac{df(x)}{dx}$$

5) ถ้า $y = f(x) = x^n$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$$

6) ถ้า $y = f(x) \pm g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$$

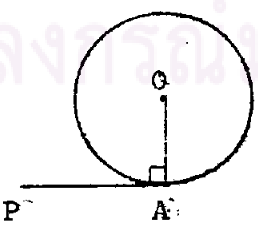
7) ความเร็วคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางในขณะเวลาใด ๆ

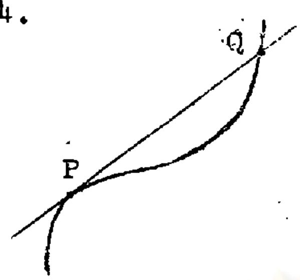
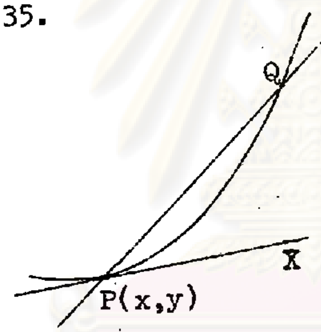
ความเร่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในขณะเวลาใด ๆ

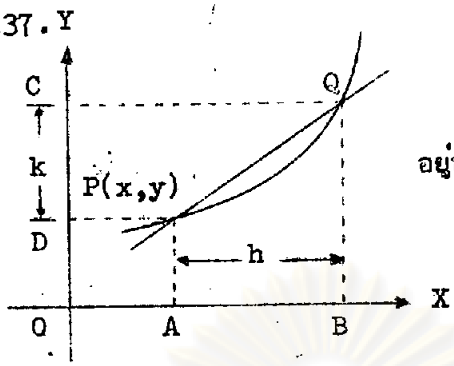
ถ้า $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ ความเร็วในขณะใด ๆ คือ $v = \frac{ds}{dt}$

และความเร่งในขณะใด ๆ คือ $a = \frac{dv}{dt}$

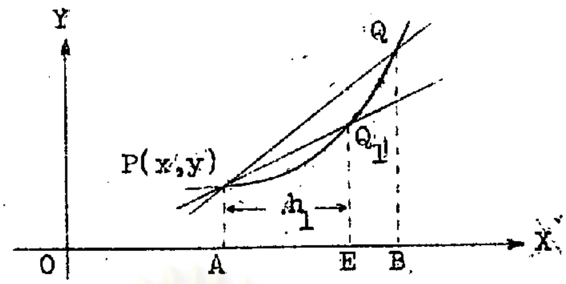
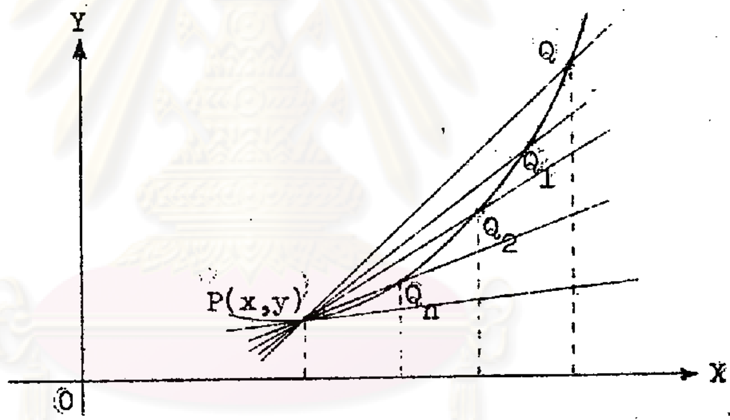
	บทที่ 5 ความชันของเส้นโค้ง
	126. ฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = mx + c\}$ หรือเขียนในรูปสั้น ๆ $y = mx + c$ เมื่อ m, c เป็นค่าคงที่ จะมีกราฟเป็นเส้นตรง ซึ่งมีความชันเท่ากับ ....
m	127. กราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{3}x + 5$ จะเป็นเส้นตรงที่มีความชัน เท่ากับ ....
$\frac{1}{3}$	128. พิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{3}x + 5$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x) + \frac{d(5)}{dx}$ $=$ ....
$\frac{1}{3}$	129. จากกรอบที่ 127 และกรอบที่ 128 จะเห็นว่าอนุพันธ์ของ $y = \frac{1}{3}x + 5$ มีค่า................ ความชันของ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ) เส้นตรง $y = \frac{1}{3}x + 5$

เท่ากับ	130. พิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = mx + c$ ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงใด ๆ ที่มีความชันเท่ากับ m จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เนื่องจาก $y = f(x) = mx + c$ จะได้ $f(x+h) = \dots\dots\dots\dots$ และ $f(x+h) - f(x) = \dots\dots\dots\dots$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\dots\dots\dots\dots}{h}$ $= \dots\dots\dots$
$m(x+h) + c$ mh mh m	131. จากกรอบที่ 5 จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $y = mx + c$ ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m นั้น จะมีอนุพันธ์เท่ากับ ....
m	132. นั่นคือ เมื่อกำหนดฟังก์ชันซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงให้อาจจะหาความชันของเส้นตรงนั้นได้โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น
	133.  จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม OA เป็นรัศมีของวงกลม และ PA ตั้งฉากกับรัศมี OA ที่จุด A เรียกเส้นตรง PA ว่า "เส้น .... " วงกลม O ที่จุด A

สัมผัส	134.  ความหมายของเส้นสัมผัสวงกลมที่เคยเรียนมา คือ เส้นตรงที่ตัดกับส่วนโค้งของวงกลมเพียงจุดเดียวไม่ว่าจะต่อออกไปเท่าไรก็ตาม แต่สำหรับเส้นโค้งทั่วไป เราไม่สามารถจะให้ความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเช่นเดียวกับเส้นสัมผัสของวงกลมได้ จากรูปจะเห็นว่า เส้นตรง PQ สัมผัสส่วนโค้งที่จุด P แต่ตัดกับส่วนโค้งอีกจุดหนึ่งที่ Q
	135.  ความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งใด ๆ ในที่นี้คือ เส้นตรงที่อยู่ในตำแหน่งใกล้กับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด 2 จุดซึ่งเกือบทับกันสนิท ส่วนของเส้นตรงที่ลากตัดเส้นโค้งเรียกว่า เส้นซีแคนต์ (secant) จากรูป เส้นตรง PX เรียกว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง และเส้น PQ เรียกว่า เส้น ....
ซีแคนต์	136. ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (x_1, y_1) และจุด (x_2, y_2) เท่ากับ ....

<table>
<tr><td>$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</td><td>137.


จากรูป จุด P และ Q
อยู่บนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$
ระยะ AB = h
ระยะ CD = k
โคออร์ดิเนตของจุด P คือ (x, y)
ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุด Q คือ (x + ..., y + ...)</td></tr>
<tr><td>h k</td><td>138.
เนื่องจากเส้นตรง PQ ผ่านจุด P(x, y) และ Q(x+h,y+k)
ดังนั้น ความชันของเส้นตรง PQ เท่ากับ ....</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{(y+k) - y}{(x+h) - x}$
(หรือ $\dfrac{k}{h}$)</td><td>139.
จากกรอบที่ 137 และ 138
เนื่องจากจุด (x, y) อยู่บนกราฟของฟังก์ชัน f
นั่นคือ $(x, y) \in f$ จะได้ $y = f(x)$ และ
$(x+h, y+k) \in f$ จะได้ $y + k = f(x + h)$
ดังนั้นโคออร์ดิเนตของจุด P(x, y) อาจเขียนเป็น (x,f(x))
และ โคออร์ดิเนตของจุด Q(x+h,y+k) อาจเขียนเป็น
(x+h, f(......))</td></tr>
<tr><td>x + h</td><td>140.
จากกรอบที่ 139
เส้นตรง PQ จะมีความชันเท่ากับ $\dfrac{f(......) - f(.....)}{h}$</td></tr>
</table>

x+h x	141:  เมื่อเลือกใช้จุด Q_1 ซึ่งอยู่ใกล้ P มากกว่า Q และระยะ AE ในรูปเป็น h_1 จะได้ โคออร์ดิเนตของจุด Q_1 คือ (x + ..., f(x +...)) ดังนั้น ความชันของเส้นตรง PQ_1 เท่ากับ $\frac{f(......) - f(......)}{(......)}$
h_1 h_1 $x+h_1$ x h_1	142.  เมื่อเลือกใช้จุดที่ใกล้ P เข้ามาเรื่อย ๆ ตามเส้นโค้ง ระยะ h จะลดลงด้วย อาจกล่าวได้ว่า เมื่อ $h \longrightarrow 0$ PQ ก็ใกล้จะเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ซึ่งความชันของเส้นตรง PQ นี้จะเท่ากับ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$ เส้นตรง PQ ซึ่งผ่านจุด P และ Q ที่เกือบทับกันนี้จะอยู่ในตำแหน่งใกล้เคียงกับตำแหน่งของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P จึงตกลงให้ใช้กันว่า ความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P(x, y) ใด ๆ เท่ากับ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h \longrightarrow 0$

	143. นิยาม เมื่อกำหนดฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งด้วยสมการ $y = f(x)$ เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
	144. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x - 3x^2$ ที่จุด $(1, -2)$ เป็นเท่าใด วิธีทำ ให้ $y = f(x) \quad = \quad x - 3x^2$ $f(x+h) \quad = \quad x + h - 3x^2 - 6xh - 3h^2$ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x - 3x^2$ ที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ ——— (A) ต้องการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, -2)$ จะต้องแทนค่า x ใน (A) ด้วย .... ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งซึ่งผ่านจุด $(1, -2)$ เท่ากับ.............

$h - 6hx - 3h^2$

$1 - 6x - 3h$

$1 - 6x - 3h$

$1 - 6x$

1

-5

145.

จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x) = x^2 - 2$ ที่จุด $(1, -1)$

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุด $P(x, y)$ เท่ากับ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

เนื่องจาก $y = f(x) = x^2 - 2$

ดังนั้น $f(x+h) = \dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots$

และ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{h}$

$= \dots\dots\dots\dots$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ

$= \lim_{h \to 0} \dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots$

และเส้นสัมผัส สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$ นั่นคือ $x = \dots\dots$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, -1)$ เท่ากับ $\dots\dots$

$(x+h)^2-2$ $x^2+2hx+h^2-2$ $2hx+h^2$ $2x+h$ $2x+h$ $2x$ 1 2	146. เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ และอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ เท่ากับ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ จะเห็นได้ว่า สูตรหาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ ก็เหมือนกับสูตรหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ทุกประการ ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ เท่ากับ $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0}$ ....
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	147. จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับกราฟของ $y = 3x^2+7x-5$ ที่จุด (1, 5) วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$ เนื่องจาก $y = 3x^2 + 7x - 5$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ldots) + \frac{d}{dx}(\ldots) - \frac{d}{dx}(5)$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ เส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 5) นั่นคือ $x = 1$ เมื่อ $x = 1$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น ความชันของเส้นตรงสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 5) เท่ากับ ....

$3x^2$ $7x$ $6x + 7$ 13 13	148. <u>นิยาม</u> ความชันของเส้นโค้งซึ่งเป็นกราฟของสมการ $y = f(x)$ (เรียกสั้น ๆ ว่าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนเส้นโค้ง หมายถึง ความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้น
	149. จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = 2x - 2x^4$ ที่จุด (1, 0) <u>วิธีทำ</u> จากนิยาม ความชันของเส้นโค้งที่จุด (1, 0) เท่ากับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 0) ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ $\frac{dy}{dx}$ เนื่องจาก $y = 2x - 2x^4$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... เส้นสัมผัส สัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 0) นั่นคือ x = ... เมื่อ x = ... จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 0) เท่ากับ .... ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (1, 0) เท่ากับ ....
$2 - 8x^3$ 1 1 -6 -6 -6	150. ความชันของเส้นโค้ง $y = 2 - 2x^2$ ที่จุด (2, -6) เป็นเท่าใด <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก y = ... $\frac{dy}{dx}$ = ... เส้นโค้งผ่านจุด (2, -6) นั่นคือ x = 2 เมื่อ x = 2 จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (2, -6) เท่ากับ ....

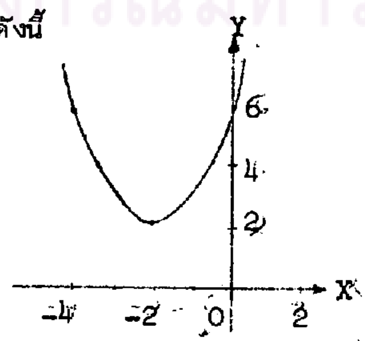
$2 - 2x^2$ $-4x$ -8 -8	151. จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = 5x^2 - 2x + 1$ ที่จุด (1, 8) <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก y = ... $\frac{dy}{dx}$ = ... เส้นโค้งผ่านจุด (-1, 8) นั่นคือ x = ... เมื่อ x = ... จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (-1, 8) เท่ากับ ....
$5x^2-2x+1$ $10x-2$ -1 -1 -12 -12	152. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x$ ที่จุด (-1, 1) เป็นเท่าไร <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก y = ... $\frac{dy}{dx}$ = ... เส้นสัมผัส สัมผัสเส้นโค้งที่จุด (-1, 1) นั่นคือ x = ... เมื่อ x = ...จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (-1, 1) เท่ากับ.......
$x^3 - 2x$ $3x^2 - 2$ -1 -1 1 1	153. เส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $y = 7 - 2x - x^2$ ที่จุด P(x, y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ.........

$-2 - 2x$	154. ความชันของเส้นโค้ง $y = x^4 - 2x$ ที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ ....
$4x^3 - 2$	155. ถ้าเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $y = kx + 2x^2, k \in R$ ที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $4x-3$ แล้ว k มีค่าเท่าไร วิธีทำ เนื่องจาก $y = kx + 2x^2, k \in R$ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d(kx)}{dx} + \frac{d(2x^2)}{dx}$ $= k +$ .... แต่กำหนดให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = kx + 2x^2$ ที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ $4x - 3$ จะได้ $k +$ .... $= 4x - 3$ ดังนั้น $k =$ ....
$4x$ $4x$ -3	156. ถ้าเส้นโค้ง $y = 3x^2 - 2bx + 3$ มีความชันที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เป็น $6x - 8$ แล้ว b มีค่าเท่าไร วิธีทำ เนื่องจาก $y =$ .... ความชันเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ $= \frac{dy}{dx} =$ .... แต่กำหนดให้ความชันของเส้นโค้ง $P(x, y)$ ใด ๆ เป็น $6x - 8$ จะได้ $6x - 8 =$ .... ดังนั้น $b =$ ....

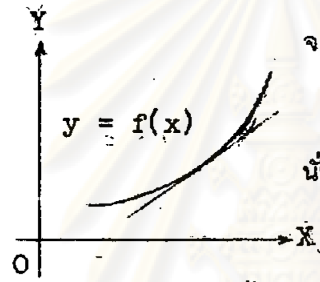
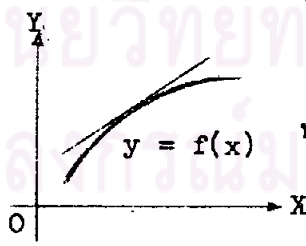
$3x^2 - 2bx + 3$ $6x - 2b$ $6x - 2b$ 4	157. เราเคยทราบมาแล้วว่า เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m จะมีสมการเป็น $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ หรือ $y - y_1 = m(x - x_1)$ และความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $\{(x, y) \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$ ดังนั้นเส้นตรงซึ่งมีความชันเป็น 3 และผ่านจุด (4, 5) จะมีสมการเป็น .... และความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชันเป็น −5 และผ่านจุด (3, −2) คือ ....
$y-5 = 3(x-4)$ $\{(x,y) \mid y+2 = -5(x-3)\}$	158. เส้นตรงซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x$ ที่จุด (1, −1) จะมีความชันเท่ากับ .... และมีสมการเป็น ....
1 $y+1 = x-1$	159. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = 3x - 4x^2$ ที่จุด (−1, −7) <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก y = ... ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P(x,y) ใด ๆ $= \frac{dy}{dx} =$ .... ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (−1, −7) เท่ากับ .... ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (−1, −7) คือ..............

$3x - 4x^2$ $3 - 8x$ 11 $y+7 = 11(x+1)$	160. ถ้าเส้นตรง AB สัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{7}{2}x - x^2$ ที่จุด (2, 3) จงหาสมการของเส้นตรง AB วิธีทำ เนื่องจาก y = ... ความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \frac{7}{2}x - x^2$ ที่จุด P(x, y) ใด ๆ เท่ากับ $\frac{dy}{dx}$ = ... เส้นตรง AB สัมผัสเส้นโค้งที่จุด (2, 3) นั่นคือ $x = 2$ เมื่อ x = ... จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... เส้นตรง AB ซึ่งผ่านจุด (2, 3) จะมีความชันเท่ากับ .... ดังนั้น สมการของเส้นตรง AB คือ ....
$\frac{7}{2}x - x^2$ $\frac{7}{2} - 2x$ 2 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $y-3 = -\frac{1}{2}(x-2)$	จากที่เรียนมาแล้วสรุปได้ว่า 1) ความชันของเส้นโค้ง ณ จุดใดก็คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้น 2) ความชันของเส้นโค้ง ณ จุดใดจะเท่ากับอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งมีกราฟเป็นเส้นโค้ง ณ จุดนั้น

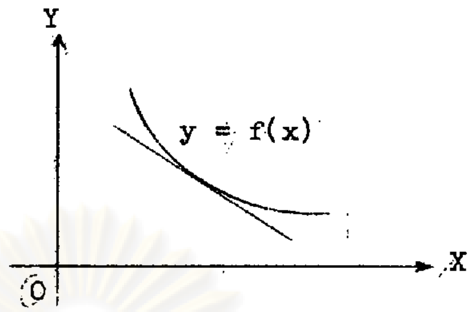
บทที่ 6 การประยุกต์ของอนุพันธ์	
	161. เมื่อกำหนด $y = x^2$ อยากทราบว่า y จะมีค่าต่ำสุดเท่าไร พิจารณาดูค่าของ x จะเห็นว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ แต่จำนวนจริงใด ๆ ยกกำลังสองแล้วต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ y จึงเป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ยกเว้นจำนวนลบ ดังนั้นค่าต่ำสุดของ y จึงเท่ากับ..........
ศูนย์	162. เมื่อกำหนด $y = -x^2 + 5$ อยากทราบว่าค่าสูงสุดของ y เป็นเท่าไร เพราะว่า $x^2 \geq 0$ ดังนั้น $-x^2$ .... 0 ($\leq$, $\geq$)
$\leq$	163. เพราะว่า $-x^2 \leq 0$ ดังนั้น $-x^2 + 5$ .... 5 ($\leq$, $\geq$) เนื่องจาก $y = -x^2 + 5$ จะได้ y .... 5 ($\leq$, $\geq$) ดังนั้น ค่าสูงสุดของ y คือ ....

<table>
<tr><td>$\leqslant$
$\leqslant$
5</td><td>164.
ถ้า $y = x^2 + 4x + 6$ ค่าต่ำสุดของ y เป็นเท่าไร
เนื่องจาก $y = x^2 + 4x + 4 + 2$
$= (.......)^2 + 2$</td></tr>
<tr><td>$(x+2)$</td><td>165.
จากกรอบที่ 164 $y = (x + 2)^2 + 2$
เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด จะได้ $(x + 2)^2$ 0
($\geqslant$, $\leqslant$)</td></tr>
<tr><td>$\geqslant$</td><td>166.
เพราะว่า $(x + 2)^2 \geqslant 0$
จะได้ $(x + 2)^2 + 2 \geqslant$ ......
เนื่องจาก $y = x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$
จะได้ $y \geqslant$ ....
ดังนั้น y มีค่าต่ำสุดเท่ากับ ....</td></tr>
<tr><td>2
2
2</td><td>167.
การหาค่าต่ำสุดของ $y = x^2 + 4x + 6$ อาจพิจารณาจากกราฟได้ดังนี้


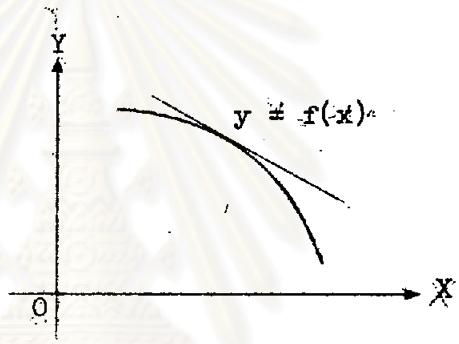
จากกราฟ
จุดวกกลับมีโคออร์ดิเนตเป็น......
ดังนั้นค่าต่ำสุดของ y เท่ากับ.....</td></tr>
</table>

(-2, 2) 2	168. การพิจารณาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของ $y = f(x)$ อาจหาได้ตามวิธีที่กล่าวมาข้างต้นคือการทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์หรือด้วยวิธีการเขียนกราฟ แต่ถ้ากำลังของตัวแปรในฟังก์ชันที่กำหนดให้มากเกินกว่า 2 อาจจะไม่สะดวกที่จะเขียนกราฟ เราจะพิจารณาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ด้วยการใช้อนุพันธ์  จากภาพ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือเมื่อ x เพิ่มขึ้น f(x) จะ .... (เพิ่มขึ้น, ลดลง) ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ หรือ $\frac{dy}{dx}$ จะมีค่าเป็น............. (บวก, ลบ)
เพิ่มขึ้น บวก	169.  จากกราฟ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือเมื่อ x มากขึ้น f(x) จะ............ (เพิ่มขึ้น, ลดลง) ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ หรือ $\frac{dy}{dx}$ จะมีค่าเป็น............ (บวก, ลบ)

เพิ่มขึ้น บวก	170.



รูป 1



รูป 2

พิจารณากราฟในรูป 1 และรูป 2

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลด

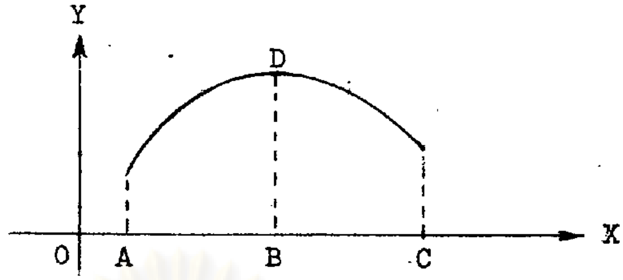
นั่นคือเมื่อ x เพิ่มขึ้น f(x) จะ ....

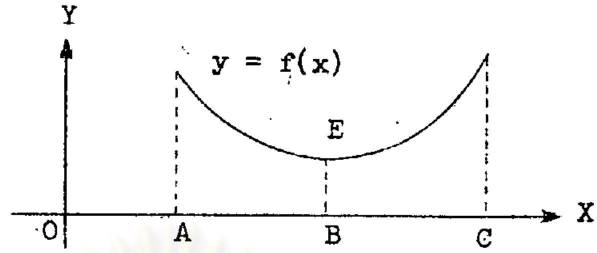
(เพิ่มขึ้น, ลดลง)

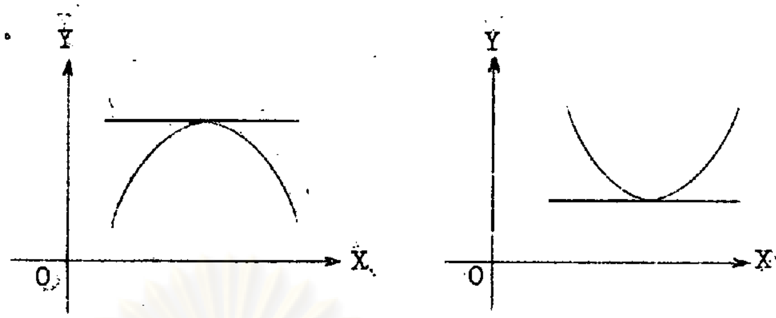
ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y)

ใด ๆ หรือ $\frac{dy}{dx}$ จะมีค่าเป็น ....

(บวก, ลบ)

ลดลง ลบ	171.  จากกราฟ ถ้าจุด D เป็นจุดวกกลับของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในช่วงระหว่าง A กับ B เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ เมื่อ x เพิ่มขึ้น $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นด้วย ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ เมื่อ x อยู่ระหว่าง A กับ B จะมีค่าเป็น.......... (บวก, ลบ) ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในช่วงระหว่าง B กับ C เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ เมื่อ x เพิ่มขึ้น $f(x)$ จะลดลง ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ เมื่อ x อยู่ระหว่าง B กับ C จะมีค่าเป็น........... (บวก, ลบ)
บวก ลบ	172. จากกราฟ $y = f(x)$ ในกรอบที่ 171 $\frac{dy}{dx}$ เป็นบวกแสดงว่า เมื่อ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ y ก็จะเพิ่มขึ้น นั่นคือ y จะเป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชันไม่ได้เพราะ y กำลังเพิ่มขึ้น $\frac{dy}{dx}$ เป็นลบแสดงว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้น y จะลดลง นั่นคือ y จะเป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชันไม่ได้เพราะ y กำลังลดลง ค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx}$ เป็นบวก หรือ x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx}$ เป็นลบจะไม่ใช่ค่า x ที่ทำให้ y มีค่าสูงสุด เพราะค่า x นั้นทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลง แต่ ณ จุดวกกลับ $\frac{dy}{dx}$ กำลังจะเปลี่ยนจากบวกเป็นลบ ดังนั้นค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ จะเป็นค่า x ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุด

	173.  จากกราฟ ถ้าจุด E เป็นจุดวกกลับของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในช่วงระหว่าง A กับ B เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ เมื่อ x เพิ่มขึ้น f(x) จะลดลง ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ เมื่อ x อยู่ระหว่าง A กับ B จะมีค่าเป็น.......... (บวก, ลบ) ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในช่วงระหว่าง B กับ C เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ เมื่อ x เพิ่มขึ้น f(x) จะเพิ่มขึ้นด้วย ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ เมื่อ x อยู่ระหว่าง B และ C จะมีค่าเป็น.......... (บวก, ลบ)
ลบ บวก	174. จากกราฟ $y = f(x)$ ในกรอบที่ 173 $\frac{dy}{dx}$ เป็นลบแสดงว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้น y **จะลด**ลง นั่นคือ y จะเป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันไม่ได้ เพราะ y กำลังลดลง $\frac{dy}{dx}$ เป็นบวกแสดงว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้น y จะเพิ่มขึ้นด้วย นั่นคือ y จะเป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชันไม่ได้ เพราะ y กำลังเพิ่มขึ้น ค่าของ x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx}$ เป็นบวกหรือ x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx}$ เป็นลบจะไม่ใช่ค่า x ที่ทำให้ y มีค่าต่ำสุด เพราะค่า x นั้นทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลง ∴ แต่ ณ จุดวกกลับ $\frac{dy}{dx}$ กำลังจะเปลี่ยนจากลบเป็นบวก ดังนั้นค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ จะเป็นค่า x ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุด

	175.  จากกราฟจะเห็นว่าถ้าลากเส้นสัมผัสกับกราฟ ณ จุดวกกลับ เส้นสัมผัสเส้นโค้งจะขนานกับแกน X ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุดต่ำสุดหรือสูงสุดนี้จึงเท่ากับ .... แต่ความชันของเส้นโค้ง ณ จุดใดก็ตาม คือความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนั้นซึ่งเท่ากับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุดนั้น ดังนั้น อนุพันธ์สำหรับค่า x ที่ทำให้ y เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดนั้นจึงเท่ากับ ....
ศูนย์ ศูนย์	176. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x$ จงหา x ที่ทำให้ $f'(x)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f(x) = x^2 - 2x$ จะได้ $f'(x) =$ .... เพราะว่า $f'(x) = 0$ จะได้ .... $= 0$ นั่นคือ $x =$ ....

$2x - 2$ $2x - 2$ 1	177. ถ้า $y = x^4 - 2x^2 + 15$ จงหา x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ วิธีทำ เนื่องจาก $y = x^4 - 2x^2 + 15$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = 0$ นั่นคือ .... = 0 ดังนั้น x = ..., ..., ...
$4x^3 - 4x$ $4x^3 - 4x$ $-1, 1, 0$	178. ถ้า $y = -x^2 - 2x + 5$, y จะมีค่าสูงสุดเท่าไร วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = -2x - 2$ เมื่อ $\frac{dy}{dx} = 0$ จะได้ $-2x - 2 = 0$ $x = -1$ ดังนั้น $x = -1$ จะเป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุด เมื่อ $x = -1$ จะได้ y = ... ดังนั้น ค่าสูงสุดของ y คือ ....

6 6	179. โยนวัตถุชนิดหนึ่งขึ้นไปในแนวดิ่ง ระยะที่วัตถุอยู่ห่างจากพื้นดิน s เมตร เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที เป็นไปตามสมการ $s = 32t - t^2$ จงหา ก. ความเร็วในขณะเวลา t ข. วัตถุจะขึ้นไปสูงสุดเท่าใด วิธีทำ เนื่องจาก $s = 32t - t^2$ ความเร็วในขณะเวลา t คือ $\frac{ds}{dt} = v = 32 - 2t$ เมื่อวัตถุขึ้นไปสูงสุด ความเร็ว ณ จุดสูงสุดจะเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $v = \frac{ds}{dt} = 0$ $32 - 2t = 0$ t = ... วัตถุจะขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป ....วินาที
16 16	180. จากกรอบที่ 179 เมื่อ $t = 16$ จะได้ s = ... ดังนั้น วัตถุจะขึ้นไปได้สูงสุด .... เมตร

181.

256 มีไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตรจะกั้นรั้วรอบที่ดินแห่งหนึ่งให้เป็น

256 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถ้าต้องการให้ได้พื้นที่มากที่สุด จะต้องกั้นรั้วรอบที่ดินให้กว้างและยาวเท่าใด

<u>วิธีทำ</u>

ให้ y เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

x เป็นความยาวของด้านกว้าง

ด้านกว้างมี 2 ด้านยาวรวมกัน $2x$ เมตร

ดังนั้นเหลือไม้ล้อมรั้วด้านยาว $1600 - 2x$ เมตร

∴จะได้ด้านยาวยาวด้านละ $\frac{1}{2}(1600 - 2x)$ เมตร

จะได้ $y = \frac{1}{2}(1600 - 2x)x$

$= 800x - x^2$

ต้องการให้ y มีค่ามากที่สุด จึงหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 800 - 2x$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$800 - 2x = 0$

$x = \ldots\ldots\ldots$

ดังนั้นถ้าต้องการให้ได้พื้นที่มากที่สุด

ต้องกั้นรั้วให้กว้าง........เมตร และยาว.......เมตร

400 400 400	182. ถ้าผลคูณของจำนวน 2 จำนวนเป็น –9 จำนวนทั้งสองจะเป็นเท่าใด ถ้าผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด __วิธีทำ__ จำนวนสองจำนวนคูณกันได้ -9 ให้จำนวนหนึ่งคือ x ดังนั้น อีกจำนวนหนึ่งจะเป็น $\frac{-9}{x}$ ให้ผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเป็น y จะได้ $y = (\ldots.)^2 + (\ldots.)^2$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ต้องการให้ y มีค่าน้อยที่สุด จึงหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
x $\quad \frac{-9}{x}$ $x^2 + \frac{81}{x^2}$ $2x - 162x^{-3}$	183. จากกรอบที่ 182 y จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\frac{dy}{dx} = 0$ นั่นคือ $2x - 162x^{-3} = 0$ $2x - \frac{162}{x^3} = 0$ $x^4 - 81 = 0$ จะได้ $x^2 = \ldots..$ หรือ $x^2 = \ldots..$ แต่ $x^2 \geq 0$ เสมอ นั่นคือ $x^2 = \ldots..$ จะได้ $x = \ldots..$ หรือ $x = \ldots..$ ดังนั้น จำนวนจริงจำนวนหนึ่งคือ ...... และอีกจำนวนหนึ่งคือ .....

9 -9 9 3 -3 3 -3	184. ในการเกิดปฏิกริยาทางเคมีครั้งหนึ่งหาอุณหภูมิได้จากสมการ $w = 10 + 4t - 0.2t^2$ เมื่อ w เป็นอุณหภูมิมีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส และ t เป็นเวลาหน่วยเป็นวินาที เมื่อเวลาผ่านไปเท่าใดอุณหภูมิจะขึ้นสูงสุด และค่าสูงสุดของอุณหภูมิเป็นเท่าใด <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $w = 10 + 4t - 0.2t^2$ จะได้ $\frac{dw}{dt}$ = ... จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\frac{dw}{dt} = 0$ เมื่อ $\frac{dw}{dt} = 0$ จะได้ t = ... ดังนั้น อุณหภูมิจะขึ้นสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป........วินาที
$4 - 0.4t$ 10 10	185. จากกรอบที่ 184 เมื่อ t = 10 จะได้ w = ... ดังนั้น อุณหภูมิสูงสุดเป็น.........องศาเซลเซียส

30 30	186. จำนวนจริง 2 จำนวนรวมกันได้ 18 ถ้าผลคูณของสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด จงหาจำนวนทั้งสองนั้น <u>วิธีทำ</u> จำนวน 2 จำนวนรวมกันได้ 18 ให้จำนวนหนึ่งคือ x ดังนั้น อีกจำนวนหนึ่งจะเท่ากับ.......... ให้ผลคูณของสองจำนวนนี้เท่ากับ y จะได้ $y = x(.....)$ $= ....$ $\frac{dy}{dx} = ...$ y มีค่ามากที่สุดเมื่อ $\frac{dy}{dx} = 0$ ให้ .... = 0 จะได้ x = ... ดังนั้น จำนวนทั้งสองคือ.......และ.......
$18 - x$ $18 - x$ $18x - x^2$ $18 - 2x$ $18 - 2x$ 9 9 9	187. ผลบวกจำนวนจริงใด ๆ รวมกับส่วนกลับของจำนวนนั้น จะมีค่าต่ำสุดเท่าไร <u>วิธีทำ</u> ให้จำนวนจริงบวกใด ๆ คือ x ดังนั้นส่วนกลับของจำนวนนั้นคือ $\frac{1}{x}$ ให้ผลบวกของจำนวนนั้นกับส่วนกลับของมันเป็น y จะได้ y = ... $\frac{dy}{dx}$ = ... y มีค่าต่ำสุดเมื่อ $\frac{dy}{dx} = 0$ ให้ .... = 0 จะได้ x =.... หรือ x = ... แต่ x เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ x = ... เมื่อ x = ... จะได้ y = ... ดังนั้นค่าต่ำสุดของผลบวกเท่ากับ.........

$x + \frac{1}{x}$	จากที่เรียนมาแล้วสรุปได้ว่า
$1 - \frac{1}{x^2}$	1) ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดต่ำสุดหรือสูงสุดของเส้นโค้ง
	$y = f(x)$ จะเท่ากับศูนย์
$1 - \frac{1}{x^2}$	2) ค่า x ที่ทำให้ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าต่ำสุดหรือสูงสุด
1 -1	นั่นคือค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$
1	
1 2	
2	

	บทที่ 7 โอเปอเรชันตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์
	188. ถ้ามีคำถามว่า จำนวนบวกอะไรยกกำลังสองแล้วได้ 4 หรือเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ว่า ถ้า $x^2 = 4$ แล้ว x มีค่าเท่าใด วิธีคิดแบบธรรมดาก็คือ ลองสมมุติค่า x แล้วยกกำลังสอง พิจารณาว่าได้ผลลัพธ์เท่าที่กำหนดหรือไม่ เช่น ลองให้ $x = 3$ จะได้ $x^2 = 9$ ดังนั้น 3 จึงไม่ใช่คำตอบ ลองให้ $x = 2$ จะได้ $x^2 = 4$ ดังนั้น 2 จึงเป็นคำตอบที่ต้องการ ถ้ามีคำถามว่า จำนวนบวกอะไรยกกำลังสองแล้วได้ผลลัพธ์เป็น 2223.24 การจะใช้วิธีสมมุติค่าแล้วยกกำลังสองเหมือนครั้งแรกนั้นจะทำได้ลำบาก จึงมีการกำหนดวิธีการหาจำนวนนั้นขึ้นมา (ซึ่งนักเรียนเคยเรียนมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น) การกระทำเพื่อหาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้เท่ากับจำนวนที่กำหนดให้นั้น เรียกว่า โอเปอเรชันตรงข้ามกับการยกกำลังสอง และกำหนดใช้สัญลักษณ์ " $\sqrt{}$ "

189.

ถ้ามีคำถามว่า 2 + 3 เป็นเท่าไรคำตอบจะเป็น 5 การกระทำที่ได้คำตอบ 5 เกิดจากการเอา 2 กับ 3 มากระทำต่อกันด้วยโอเปอเรชันบวก

ถ้ามีคำถามว่า 2 บวกกับอะไรจึงจะได้ผลลัพธ์เป็น 5 หรือเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ว่า $2 + x = 5$, x มีค่าเท่าใด

วิธีคิดแบบธรรมดาวิธีหนึ่งคือ ลองสมมุติค่า x เช่น x เป็น 3 ทดลองว่า 2 + 3 ได้ผลลัพธ์เป็น 5 หรือไม่

แต่ถ้ามีคำถามว่า จำนวนอะไรบวกกับ 2481 แล้วได้ผลลัพธ์เป็น 4823

ถ้ายังใช้วิธีคิดแบบเดิม คือ ลองสมมุติค่าแล้วนำมาบวกกับ 2481 ดูผลลัพธ์ว่าเป็น 4823 หรือไม่ วิธีนี้จะไม่สะดวก จึงกำหนดวิธีหาคำตอบ คือ 4823 - 2481

การกระทำเพื่อหาจำนวนมาบวกกับจำนวนที่กำหนด แล้วให้ได้ผลลัพธ์เท่ากับที่กำหนดนั้นเรียกว่า โอเปอเรชันตรงข้ามกับการบวก และกำหนดใช้สัญลักษณ์ " − " (ลบ)

190.

ในเรื่องเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันก็เช่นเดียวกันบางครั้งเมื่อทราบอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ๆ หนึ่ง เราอาจต้องการทราบว่าฟังก์ชันนั้นคืออะไร การกระทำเพื่อหาฟังก์ชันเมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันให้ เรียกว่า โอเปอเรชันตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ ซึ่งในบทเรียนนี้จะใช้วิธีคิดแบบธรรมดา คือ แบบลองถูกลองผิด และจะยังไม่กำหนดสัญลักษณ์ของโอเปอเรชันนี้ให้

191.

กำหนด $y = f(x)$ และ $\frac{dy}{dx} = 2x$ อยากทราบว่า y เท่ากับเท่าใด

<u>วิธีคิด</u> ลองให้ $y = 2x$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2$

ดังนั้น $y = 2x$ จึงไม่ใช่ฟังก์ชันที่ต้องการ

ลองให้ $y = x^2$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2x$

ลองให้ $y = x^2 + 5$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2x$

ลองให้ $y = x^2 + 7$ จะได้ $\frac{dy}{dx} =$ ......

2x

192.

จากกรอบที่ 191 จะเห็นว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่มีอนุพันธ์เป็น $2x$ นั้นมีหลายฟังก์ชัน เช่น $y = x^2$, $y = x^2 + 5$, $y = x^2 + 7$ ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้แตกต่างกันเฉพาะค่าคงที่

ลองให้ $y = x^2 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{dc}{dx}$$

$$= 2x$$

ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้

ดังนั้น ฟังก์ชันที่ต้องการ คือ $y =$ ...... + ...

x^2 c	193. กำหนด $y = f(x)$ และ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ จงหาว่า y เท่ากับเท่าใด วิธีคิด ลองให้ $y = 3x$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3$ ลองให้ $y = x^3$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ซึ่งเท่ากับที่กำหนดให้ ลองให้ $y = x^3 + 4$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ลองให้ $y = x^3 + 8$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ลองให้ $y = x^3 + 11$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ลองให้ $y = x^3 + x + 4$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ...
$3x^2$ $3x^2$ $3x^2$ $3x^2 + 1$	194. จากกรอบที่ 193 จะเห็นว่า ฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เท่ากับ $3x^2$ นั้น จะต่างกันที่ค่าคงที่ ดังนั้น ลองให้ $y = x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ ทดสอบหา $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^3}{dx} + \frac{dc}{dx}$ = ... ได้เท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น y = ... + ...

$3x^2$ x^3 c	195. เนื่องจาก $f(x)$ และ $f(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ จะมีค่าอนุพันธ์เท่ากันเสมอ ดังนั้น ในการหาฟังก์ชันเมื่อกำหนดค่าของอนุพันธ์มาให้จึงต้องมีค่าคงที่ c บวกอยู่ด้วยเสมอ สมการที่มีอนุพันธ์เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย เช่น $\frac{dy}{dx} = x^2$ หรือ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ นี้เรียกว่า สมการอนุพันธ์ (differential equation) และการหาฟังก์ชันที่มีค่าอนุพันธ์ตามที่กำหนดให้หรือการหา y ในรูปของ x นิยมใช้คำว่า "การแก้สมการอนุพันธ์"
	196. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ <u>วิธีคิด</u> ลองให้ $y = x^4$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ <u>วิธีทำ</u> ลองให้ $y = x^4 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ldots)}{dx} + \frac{d(\ldots)}{dx}$ $= \ldots\ldots\ldots$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

x^4 c $4x^3$ x^4 c	197. ถ้า $\frac{dy}{dx} = 5x^4$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด วิธีคิด ลองให้ $y = x^4$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ ลองให้ $y = x^5$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 5x^4$ วิธีทำ ลองให้ y = ... + ... ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... + ... = ... ซึ่งได้เท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น y = ... + ...
x^5 c $\frac{dx^5}{dx}$ $\frac{dc}{dx}$ $5x^4$ x^5 c	198. ถ้า $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $n \in R$, แล้ว y เท่ากับเท่าใด วิธีคิด ลองให้ $y = x^n$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ วิธีทำ ลองให้ y = ...+ ...... ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... + ... = ... ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น y = ... + ...

x^n c $\frac{dx^n}{dx}$ $\frac{dc}{dx}$ nx^{n-1} x^n c	199. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 2$ วิธีคิด ลองให้ $y = 2x$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$ วิธีทำ ลองให้ $y = \ldots\ldots + \ldots\ldots$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2 2x c $\frac{d(2x)}{dx} + \frac{dc}{dx}$ 2 2x + c	200. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 5$ วิธีคิด ลองให้ $y = 5x$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$ วิธีทำ ลองให้ $y = \ldots\ldots + \ldots\ldots$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y = \ldots\ldots\ldots$
5 5x c $\frac{d(5x)}{dx} + \frac{dc}{dx}$ 5 5x + c	201. กำหนดให้ $\frac{dy}{dx} = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ ดังนั้น $y = a(\ldots.) + c$ เมื่อ a, c เป็นค่าคงที่

x	202. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = x$ วิธีคิด ลองให้ $y = x^2$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = ...$ ซึ่ง...............สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ) ลองให้ $y = \frac{x^2}{2}$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = ...$ ซึ่ง...............สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ)
$2x$ ไม่เท่ากับ x เท่ากับ	203. วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = x$ ลองให้ $y = ... + ...$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = ... + ...$ $= x$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y = ... + ...$

$\frac{x^2}{2}$ c $\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{2})$ $\frac{dc}{dx}$ $\frac{1}{2}x^2$ c	204. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = x^2$ วิธีคิด ลองให้ $y = x^3$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ซึ่ง.................สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ) ลองให้ $y = \frac{x^3}{3}$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ซึ่ง.................สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ)
$3x^2$ ไม่เท่ากับ x^2 เท่ากับ	205. วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = x^2$ ลองให้ y = ... + ... ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... + ... $= x^2$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^2$ แล้ว y = ...

$\frac{x^3}{3}$ c $\frac{d(\frac{x^3}{3})}{dx}$ $\frac{dc}{dx}$ $\frac{x^3}{3} + c$	206. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = x^3$ วิธีคิด ลองให้ $y = x^4$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ซึ่ง................สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ) ลองให้ $y = \frac{x^4}{4}$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ซึ่ง................สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ)
$4x^3$ ไม่เท่ากับ x^3 เท่ากับ	207. วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = x^3$ ลองให้ y = ... + c ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... = ... ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^3$ แล้ว y = ...

$\frac{x^4}{4}$ $\frac{d}{dx}(\frac{x^4}{4}) + \frac{dc}{dx}$ x^3 $\frac{x^4}{4} + c$	208. จากกรอบที่ 202 ถึง 207 จะเห็นว่า ถ้า $\frac{dy}{dx} = x$ จะได้ $y = \frac{x^2}{2} + c$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^2$ จะได้ $y = \frac{x^3}{3} + c$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^3$ จะได้ $y = \frac{x^4}{4} + c$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^4$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด ลองให้ y = ... + c ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... $= x^4$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^4$ แล้ว y = ...
$\frac{x^5}{5}$ $\frac{d}{dx}(\frac{x^5}{5}) + \frac{dc}{dx}$ $\frac{x^5}{5} + c$	209. ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^n$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด <u>วิธีทำ</u> ลองให้ y = ... + c ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... $= x^n$ นั่นคือ ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^n$ แล้ว y = ...

$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \frac{dc}{dx}$ $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	210. ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^{8}$ จะได้ $y = \ldots\ldots + c$ ถ้า $\frac{ds}{dt} = t^{5}$ จะได้ $s = \ldots\ldots\ldots$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{3}{2}}$ จะได้ $y = \ldots\ldots + c$ ถ้า $\frac{ds}{dt} = t^{\frac{5}{4}}$ จะได้ $s = \ldots\ldots\ldots$
$\frac{x^{9}}{9}$ $\frac{t^{6}}{6} + c$ $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$ หรือ $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}$ $\frac{4t^{\frac{9}{4}}}{9} + c$	211. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ลองให้ $y = \ldots\ldots + c$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots$ $= x^{\frac{1}{2}}$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + \frac{dc}{dx}$ $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$	212. เมื่อ $\frac{dy}{dx} = x^5$ จะได้ $y = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c$ นั่นคือ $y = \frac{x^6}{6} + c$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^{-5}$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด <u>วิธีทำ</u> ลองให้ $y = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... = ... ซึ่ง...............สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ)
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right) + \frac{dc}{dx}$ x^{-5} เท่ากับ	213. เมื่อ $\frac{dy}{dx} = x^{-5}$ จะได้ $y = \frac{x^{-4}}{-4} + c$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^{-6}$ แล้ว y = ... + c ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^{-3}$ แล้ว y = ... ถ้า $\frac{ds}{dt} = t^{-8}$ แล้ว s = ...

$\frac{x^{-5}}{-5}$ หรือ $-\frac{x^{-5}}{5}$ $-\frac{x^{-2}}{2} + c$ $-\frac{t^{-7}}{7} + c$	214. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t^2}$ วิธีทำ $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t^2} = t^{-2}$ ลองให้ $s = \ldots\ldots + c$ ทดสอบ $\frac{ds}{dt} = \ldots\ldots\ldots$ $= t^{-2}$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $s = \ldots\ldots\ldots$
$-t^{-1}$ $\frac{d}{dt}(-t^{-1}) + \frac{dc}{dx}$ $-t^{-1} + c$	215. จงแก้สมการอนุพันธ์ต่อไปนี้ ก. ถ้า $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^7} = x^{(\ldots)}$ แล้ว $y = \ldots\ldots + c$ ข. ถ้า $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t^4} = t^{(\ldots)}$ แล้ว $y = \ldots\ldots + c$

-7 $-\frac{x^{-6}}{6}$ -4 $-\frac{x^{-3}}{3}$	216. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 5x$ <u>วิธีคิด</u> ลองให้ $y = \frac{x^2}{2}$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ซึ่ง................สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ) ลองให้ $y = \frac{5x^2}{2}$ จะได้ $\frac{dy}{dx}$ = ... ซึ่ง................สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ)
x ไม่เท่ากับ $5x$ เท่ากับ	217. <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = 5x$ ลองให้ y = ... + ... ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... + ... $= 5x$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้า $\frac{dy}{dx} = 5x$ แล้ว y = ... + ...

$\frac{5x^2}{2}$ c $\frac{d}{dx}(\frac{5x^2}{2})$ $\frac{dc}{dx}$ $\frac{5x^2}{2}$ c	218. เมื่อ $\frac{dy}{dx} = x^2$ จะได้ $y = \frac{x^3}{3} + c$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = 7x^2$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด <u>วิธีทำ</u> ลองให้ y = ... + ... ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... $= 7x^2$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้า $\frac{dy}{dx} = 7x^2$ แล้ว y = ... + ...
$\frac{7x^3}{3}$ c $\frac{d}{dx}(\frac{7x^3}{3}) + \frac{dc}{dx}$ $\frac{7x^3}{3}$ c	219. เมื่อ $\frac{ds}{dt} = t^3$ จะได้ $s = \frac{t^4}{4} + c$ ถ้า $\frac{ds}{dt} = 9t^3$ แล้ว s เท่ากับเท่าใด <u>วิธีทำ</u> ลองให้ s = ... + ... ทดสอบ $\frac{ds}{dt}$ = ... $= 9t^3$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้า $\frac{ds}{dt} = 9t^3$ แล้ว y = ... + ...

$\frac{9t^4}{4}$ c $\frac{d}{dt}(\frac{9t^4}{4}) + \frac{dc}{dt}$ $\frac{9t^4}{4}$ c	220. เมื่อ $\frac{dy}{dx} = x^n$ จะได้ $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ถ้า $\frac{dy}{dx} = ax^n$, a และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว y เท่ากับเท่าใด <u>วิธีทำ</u> ลองให้ $y = \ldots\ldots\ldots + c$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots + \frac{dc}{dx}$ $= ax^n$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น ถ้า $\frac{dy}{dx} = ax^n$ แล้ว $y = \ldots\ldots\ldots$
$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$ $\frac{d}{dx}(\frac{ax^{n+1}}{n+1})$ $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$	221. กำหนดให้ $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{4x^7}{5}$, f(x) เท่ากับเท่าใด <u>วิธีคิด</u> ลองให้ $f(x) = y = \frac{4}{5}\cdot\frac{x^8}{8} + c$ จะได้ $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots$ <u>วิธีทำ</u> ลองให้ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$ ทดสอบ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$ $= \frac{4}{5}x^7$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{4}{5}x^7$ $\frac{4}{5} \cdot \frac{x^8}{8} + c$ $\frac{d}{dx}(\frac{x^8}{10}) + \frac{dc}{dx}$ $\frac{x^8}{10} + c$	222. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 4x + 4x^2$ วิธีคิด อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ต้องการอยู่ในรูปผลบวก แต่อนุพันธ์ของฟังก์ชันผลบวกจะเป็นผลบวกของอนุพันธ์ นั่นคือ $y = f(x) + g(x)$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$ ลองให้ $y = x^2 + 4x^3$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2x + 12x^2$ ซึ่งไม่เท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ลองให้ $y = 2x^2 + \frac{4x^3}{3}$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$ ซึ่ง..................สิ่งที่กำหนดให้ (เท่ากับ, ไม่เท่ากับ)
$4x$ $4x^2$ เท่ากับ	223. วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = 4x + 4x^2$ ลองให้ $y = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + c$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots$ $= 4x + 4x^2$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y = \ldots\ldots\ldots$

$2x^2$ $\frac{4x^3}{3}$ $\frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(\frac{4x^3}{3}) + \frac{dc}{dx}$ $2x^2 + \frac{4x^3}{3} + c$	224. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = x - x^2$ วิธีทำ ลองให้ $y = (......) - (......) + c$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx} =$ .... $= x - x^2$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y =$ ....
$\frac{x^2}{2}$ $\frac{x^3}{3}$ $\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{2}) - \frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3}) + \frac{dc}{dx}$ $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c$	225. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2$ วิธีทำ ลองให้ $y =$ .... ทดสอบ $\frac{dy}{dx} =$ .... $= 5x^4 + 3x^2$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y =$ ....
$x^5 + x^3 + c$ $\frac{dx^5}{dx} + \frac{dx^3}{dx} + \frac{dc}{dx}$ $x^5 + x^3 + c$	226. ถ้า $f'(x) = 2x - 3$ แล้ว $f(x)$ เท่ากับเท่าใด วิธีทำ ลองให้ $y = f(x) =$ .... ทดสอบ $\frac{dy}{dx} = f'(x) =$ .... $= 2x - 3$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $y =$ ....

$x^2 - 3x + c$ $\frac{dx^2}{dx} - \frac{d(3x)}{dx} + \frac{dc}{dx}$ $x^2 - 3x + c$	227. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dv}{dt} = 3 - 4t^3$ <u>วิธีทำ</u> ลองให้ $v = (.....) - (.....) + c$ ทดสอบ $\frac{dv}{dt}$ = ... $= 3 - 4t^3$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น v = ...
$3t$ t^4 $\frac{d(3t)}{dt} - \frac{dt^4}{dt} + \frac{dc}{dt}$ $3t - t^4 + c$	228. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{ds}{dt} = 4 + t^2$ <u>วิธีทำ</u> ลองให้ $s = (.....) + (.....) + (.....)$ ทดสอบ $\frac{ds}{dt}$ = ... = ... ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น s = ...
$4t$ $\frac{t^3}{3}$ c $\frac{d(4t)}{dt} + \frac{d}{dt}(\frac{t^3}{3}) + \frac{dc}{dt}$ $4 + t^2$ $4t + \frac{t^3}{3} + c$	229. จงแก้สมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4x - 5$ <u>วิธีทำ</u> ลองให้ $y = (.....) + (.....) - (.....) + c$ ทดสอบ $\frac{dy}{dx}$ = ... = ... ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น y = ...

$2x^3$ $2x^2$ $5x$ $\frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2)$ $- \frac{d(5x)}{dx} + \frac{dc}{dx}$ $6x^2 + 4x - 5$ $2x^3 + 2x^2 - 5x + c$	230. กำหนดให้ $\frac{ds}{dt} = 3 - t - 12t^2$ จงหาว่า s เท่ากับเท่าใด วิธีทำ ลองให้ s = (....) - (....) - (....) + c ทดสอบ $\frac{ds}{dt}$ = ... $= 3 - t - 12t^2$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น s = ...
$3t$ $\frac{t^2}{2}$ $4t^3$ $\frac{d}{dt}(3t) - \frac{d}{dt}(\frac{t^2}{2})$ $- \frac{d}{dt}(4t^3) + \frac{dc}{dt}$ $3t - \frac{t^2}{2} - 4t^3 + c$	231. ถ้า $f'(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ แล้ว f(x) เท่ากับเท่าใด วิธีทำ $f'(x) = 5 + \frac{1}{x^2} = 5 + x^{(....)}$ ลองให้ f(x) = (....) + (....) + (....) ทดสอบ f'(x) = ... $= 5 + x^{-2}$ ซึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น f(x) = ...

-2 $5x \quad -x^{-1} \quad c$ $\frac{d}{dx}(5x)+\frac{d}{dx}(-x^{-1})+\frac{dc}{dx}$ $5x - x^{-1} + c$	232. จงแก้สมการอนุพันธ์ต่อไปนี้ ก. ถ้า $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - x^4$ แล้ว $y = (....) - \frac{1}{5}x^5 + c$ ข. ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^2 - x + \frac{1}{8}$ แล้ว $y = (...)x^3 - (....)x^2 + (....) + c$ ค. ถ้า $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t^5} = t^{-5}$ แล้ว $s = (.....) + c$ ง. ถ้า $f'(t) = 2 - 5t$ แล้ว $f(t) = (....) - (....) + (....)$ จ. ถ้า $\frac{dv}{dt} = 7 - \frac{t}{2}$ แล้ว $v = (....) - (....) + (....)$ ฉ. ถ้า $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 5$ แล้ว $y = (....) + (....) + (....)$ ช. ถ้า $f'(x) = 3x^2 - x^7$ แล้ว $f(x) = (....) - (....) + (....)$

$\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ x $-\frac{1t^{-4}}{4}$ 2t $\frac{5t^2}{2}$ c 7t $\frac{1t^2}{4}$ c $x^{\frac{3}{2}}$ 5x c x^3 $\frac{1x^8}{8}$ c	233. จงหาสมการเส้นโค้งซึ่งมีความชัน ณ จุด P(x, y) ใด ๆ บนโค้งนั้นเป็น $8x - \frac{1}{2}$ <u>วิธีทำ</u> ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด P(x,y) ใด ๆ เป็น $8x - \frac{1}{2}$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = 8x - \frac{1}{2}$ จะได้ y = (....) – (....) + c ดังนั้นสมการของเส้นโค้งคือ y = ...
$4x^2$ $\frac{1x}{2}$ $4x^2 - \frac{1x}{2} + c$	234. จงหาสมการเส้นโค้งซึ่งมีความชัน ณ จุด P(x, y) ใด ๆ เท่ากับ 2 – 3x <u>วิธีทำ</u> ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด P(x,y)ใด ๆ เท่ากับ 2 – 3x นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = 2 - 3x$ จะได้ y = (....) – (....) + (....) ดังนั้นสมการของเส้นโค้งคือ y = ...

$2x \quad \frac{3x^2}{2} \quad c$ $2x - \frac{3x^2}{2} + c$	235. เส้นโค้ง $y = f(x)$ มีความชันที่จุด $P(x,y)$ ใด ๆ เป็น $4x + 3$ จงหาสมการของเส้นโค้งผ่านจุด (1, 3) <u>วิธีทำ</u> ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x,y)$ ใด ๆ เป็น $4x + 3$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$ จะได้ $y = 2x^2 + 3x + c$ —— (A) เส้นโค้งผ่านจุด (1, 3) นั่นคือ เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y = 3$ แทนค่า x และ y ใน (A) จะได้ $3 = 2(1)^2 + 3(1) + c$ $c = \ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด (1, 3) และมีความชันที่จุด $P(x,y)$ ใด ๆ เป็น $4x + 3$ คือ $y = 2x^2 + 3x + (\ldots.)$
-2 -2	236. จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด (2, 9) และมีความชันของเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เป็น $2x + 1$ <u>วิธีทำ</u> ความชันของเส้นโค้งที่จุด $P(x,y)$ ใด ๆ เป็น $2x + 1$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = (\ldots\ldots) + (\ldots\ldots)$ จะได้ $y = (\ldots.) + (\ldots.) + c$ —— (B) เส้นโค้งผ่านจุด (2,9) นั่นคือ เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 9$ แทนค่า x และ y ลงใน (B) จะได้ $c = \ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการ คือ $y = \ldots\ldots\ldots$

$2x$ $\quad$ 1 x^2 $\quad$ x 3 $x^2 + x + 3$	237. จงหาความชันของเส้นโค้งที่ผ่านจุด (1,-1) และความชันของเส้นเส้นโค้งนี้ที่จุด P(x, y) ใด ๆ เป็น 6x วิธีทำ ความชันของเส้นโค้งที่จุด P(x,y) ใด ๆ เป็น 6x นั่นคือ $\frac{dy}{dx}$ = ... จะได้ y = (.....) + c ——— 1 เส้นโค้งผ่านจุด (1, - 1)นั่นคือเมื่อ x = 1 จะได้ y = -1 แทนค่า x และ y ลงใน 1 จะได้ c = ... ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการ คือ y = ...
$6x$ $3x^2$ -4 $3x^2 - 4$	238. ได้กล่าวมาแล้วในบทก่อน ๆ ว่า ถ้า s = f(t) เป็นสมการของการเคลื่อนที่ จะได้ $\frac{ds}{dt} = v$ เป็นความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ ซึ่ง v จะเป็นฟังก์ชันของเวลา t ด้วย จึงสามารถหา $\frac{dv}{dt}$ ได้ เช่นเดียวกัน $\frac{dv}{dt}$ จะเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในขณะเวลา t ซึ่งเรียกว่า "ความเร่ง" ใช้สัญลักษณ์ a จะเห็นได้ว่า เมื่อกำหนด ให้ s = f(t) จะสามารถหาความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ และความเร่งในขณะเวลา t ใด ๆ ได้ ในทางกลับกัน เมื่อกำหนดสมการความเร่งในขณะเวลา t ให้ จะสามารถหาความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ ตลอดจนสามารถหาสมการของการเคลื่อนที่ได้ด้วย

	239. ถ้า $s = 6 - 2t - 5t^3$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่ง เมื่อ t เป็นเวลาหน่วยเป็นวินาที s เป็นระยะทางหน่วยเป็นเมตร จงหาความเร่งของวัตถุนี้ในขณะ $t = 4$ วินาที <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $s = 6 - 2t - 5t^3$ จะได้ $v = \frac{ds}{dt} =$ .... ความเร็วของวัตถุในขณะเวลา t คือ v = ... จะได้ $a = \frac{dv}{dt} =$ .... ความเร่งของวัตถุในขณะเวลา t วินาที = ... ดังนั้น ความเร่งของวัตถุในขณะ t=4 วินาที = ...เมตร/วินาที
$-2 - 15t^2$ $-2 - 15t^2$ $-30t$ $-30t$ -120	240. ให้ $v = 3t + 2$ เป็นสมการของความเร็วของวัตถุชนิดหนึ่ง เมื่อ v เป็นความเร็ว t เป็นเวลา และ s เป็นระยะทาง และ เมื่อ $t = 2$ จะได้ $s = 8$ จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ <u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $v = \frac{ds}{dt} = 3t + 2$ จะได้ $s = \frac{3t^2}{2} + 2t + c$ ——— (A) เมื่อ $t = 2$ จะได้ $s = 8$ แทนค่า t และ s ใน (A) จะได้ $8 = \frac{3}{2}(2)^2 + 2(2) + c$ c = ... ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่คือ $s = \frac{3t^2}{2} + 2t +$ ....

-2 -2	241. จงหาสมการของความเร็วของวัตถุชนิดหนึ่งซึ่งมีความเร่ง ในขณะเวลาใด ๆ เป็น $4t + 3$ เมื่อ t เป็นเวลา a เป็นความเร่ง v เป็นความเร็ว และถ้า $t = 1$ จะได้ $v = 5$ <u>วิธีทำ</u> ความเร่งในขณะเวลา t ใด ๆ เป็น $4t + 3$ นั่นคือ $a = \frac{dv}{dt} = \ldots\ldots + \ldots\ldots$ จะได้ $v = \ldots\ldots + \ldots\ldots + c$ ถ้า $t = 1$ จะได้ $v = 5$ แทนค่า v และ t จะได้ $c = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น สมการของความเร็ว คือ $v = \ldots\ldots\ldots$
$4t$ 3 $2t^2$ $3t$ 0 $2t^2 + 3t$	242. ถ้า a เป็นความเร่งในขณะเวลา t v เป็นความเร็วในขณะเวลา t s เป็นระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ในเวลา t จงหาความเร็วในขณะเวลา t และสมการการเคลื่อนที่ เมื่อ $a = 3t^2 + 4$ และถ้า $t = 1$ จะได้ $v = 3$ และ $s = 5$ <u>วิธีทำ</u> ความเร่งในขณะเวลา t ใด ๆ เป็น $3t^2 + 4$ นั่นคือ $a = \frac{dv}{dt} = 3t^2 + 4$ จะได้ $v = \ldots\ldots + \ldots\ldots + c$ ——— A เมื่อ $t = 1$ จะได้ $v = 3$ แทนค่า v และ t ใน A จะได้ $3 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + c$ $c = \ldots\ldots$ ดังนั้น ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v = \ldots\ldots\ldots$

t^3 $4t$ 1 4 -2 t^3+4t-2	243. จากกรอบที่ 242 ความเร็วในขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v = t^3 + 4t - 2$ นั่นคือ $v = \frac{ds}{dt} = \ldots\ldots + \ldots\ldots - 2$ จะได้ $s = \ldots\ldots + \ldots\ldots - 2t + c$ — (B) เมื่อ $t = 1$ จะได้ $s = 5$ แทนค่า t และ s ใน (B) จะได้ $c = \ldots\ldots$ ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่คือ $s = \ldots\ldots\ldots\ldots$
t^3 $4t$ $\frac{1}{4}t^4$ $2t^2$ $\frac{19}{4}$ $\frac{1}{4}t^4 + 2t^2 - 2t + \frac{19}{4}$	จากที่เรียนมาแล้วสรุปได้ว่า ๑) การหาฟังก์ชันเดิมเมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นให้เรียกว่า การกระทำที่ตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ ๒) ฟังก์ชันต่าง ๆ ที่มีอนุพันธ์เท่ากันนั้น จะต่างกันเฉพาะค่าคงที่ ๓) ความเร็วในขณะเวลาใด ๆ จะเป็นอนุพันธ์ของสมการของการเคลื่อนที่ ๔) ความเร่งในขณะเวลาใด ๆ คืออนุพันธ์ของสมการของความเร็ว

ภาคผนวก ข.

ตารางที่ 1 ตารางหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบ ก่อนนำมาใช้ในการวิจัย

X	f	X^2	fX	fX^2
72	1	5184	72	5184
71	3	5041	213	15123
68	10	4624	680	46240
67	3	4489	201	13467
66	2	4356	132	8712
65	5	4225	325	21125
64	5	4096	320	20480
63	1	3969	63	3969
62	4	3844	248	15376
61	1	3721	61	3721
60	1	3600	60	3600
59	2	3481	118	6962
58	1	3364	58	3364
57	3	3249	171	9747
56	1	3136	56	3136
54	1	2916	54	2916
53	1	2809	53	2809
51	1	2601	51	2601
49	1	2401	49	2401
$\sum$	47		2985	190933

จากข้อมูลในตารางที่ 1 คำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบได้ดังนี้

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

จากสูตร $\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$

เมื่อ $\sum fX = 2985$, $N = 47$

จะได้ $\bar{X} = \frac{2985}{47}$

$= 63.5106$

ข. ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากสูตร $S.D. = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \bar{X}^2}$

$= \sqrt{\frac{190933}{47} - 63.5106^2}$

$= \sqrt{4062.4042 - 4033.5963}$

$= \sqrt{28.8079}$

$= 5.3672$

<u>การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบ ก่อนนำมาใช้ในการวิจัย</u>

จากสูตร $r_{yy} = \dfrac{k(S.D.)^2 - \overline{X}(k - \overline{X})}{(S.D.)^2(k - 1)}$

เมื่อ $k = 75$

$(S.D.)^2 = 28.8079$

$\overline{X} = 63.5106$

จะได้ $r_{yy} = \dfrac{75(28.8079) - 63.5106(75 - 53.5106)}{28.8079(74)}$

$$= \frac{2160.5925 - 63.5106(11.4894)}{2131.7846}$$

$$= \frac{2160.5925 - 729.6987}{2131.7846}$$

$$= \frac{1430.8938}{2131.7846}$$

$$= 0.6712$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบนี้เป็น 0.67

ตารางที่ 2 ตารางแสดงค่าความยาก (p) และอำนาจจำแนก (r) ของแบบสอบที่นำมาใช้ในการวิจัย

ข้อที่	P_L	P_H	p	r
1	.53	.84	.69	.36
2	.15	.76	.44	.60
3	.69	.84	.77	.20
4	.23	.69	.46	.46
5	.53	.92	.75	.49
6	.31	.76	.54	.45
7	.53	.92	.75	.49
8	.38	.92	.68	.60
9	.46	1.00	.79	.74
10	.69	.92	.82	.35
11	.31	.84	.59	.54
12	.46	.92	.72	.54
13	.53	.92	.75	.49
14	.08	1.00	.59	.89
15	.15	.84	.49	.67
16	.46	.69	.58	.24
17	.61	.92	.78	.43
18	.76	.92	.85	.28
19	.38	.61	.49	.23
20	.38	.92	.68	.60

ตารางที่ 2 (ต่อ)

ข้อที่	P_L	P_H	p	r
21	.53	.92	.75	.49
22	.23	.61	.41	.39
23	.53	.84	.69	.36
24	.46	.76	.61	.32
25	.61	.92	.78	.43
26	.31	1.00	.73	.80
27	.15	.46	.30	.36
28	.61	.84	.73	.28
29	.46	1.00	.79	.74
30	.53	.76	.65	.25
31	.08	.92	.50	.80
32	.69	.84	.77	.20
33	.53	.84	.69	.36
34	.46	.69	.58	.24
35	.61	.84	.73	.28
36	.23	.76	.49	.53
37	.53	.92	.75	.49
38	.61	.84	.73	.28
39	.38	.84	.62	.48
40	.46	.84	.66	.42

ตารางที่ 3 ตารางแสดงผลการทดลองใช้บทเรียนแบบโปรแกรมขั้นกลุ่มเล็ก

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (%)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (%)	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก (%)
1	8.57	82.86	94.08
2	8.57	88.57	94.77
3	17.14	74.29	92.84
4	17.14	74.29	95.04
5	11.43	85.71	89.26
6	14.29	71.43	98.76
7	28.57	68.86	97.80
8	8.57	71.43	94.90
9	14.29	94.29	96.01
10	5.71	88.57	95.59
รวม	134.28	800.3	949.05
เฉลี่ย	13.43	80.03	94.90

ตารางที่ 4 ตารางเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างคะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนบทเรียนแบบโปรแกรม

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (X_2)	คะแนนความก้าวหน้า D ($X_2 - X_1$)	D^2	คำตอบที่ตอบถูก
1	0	30	30	900	708
2	3	34	31	961	650
3	0	31	31	961	650
4	0	28	28	784	694
5	2	32	30	900	705
6	0	28	28	784	737
7	0	27	27	729	722
8	0	29	29	841	734
9	1	32	31	961	678
10	1	26	25	625	678
11	0	28	28	784	718
12	0	28	28	784	617
13	1	37	36	1296	580
14	7	31	24	576	668
15	1	24	23	529	700
16	1	25	24	576	693
17	3	26	23	676	626
18	1	24	23	529	729
19	1	21	20	400	733
20	2	23	21	441	707
21	4	32	28	784	740
22	3	30	27	729	558
23	2	20	18	324	559
24	3	32	27	841	728
25	3	29	26	676	694

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (X_2)	คะแนนความก้าวหน้า D ($X_2 - X_1$)	D^2	คำตอบที่ตอบถูก
26	7	38	31	961	716
27	3	27	24	576	723
28	2	38	36	1296	748
29	2	30	28	784	727
30	1	20	19	361	649
31	3	32	29	841	729
32	3	19	16	256	734
33	3	24	21	441	740
34	1	19	18	324	550
35	2	23	21	441	742
36	2	27	25	625	723
37	2	31	29	841	743
38	3	29	27	729	752
39	2	17	15	225	468
40	4	21	17	289	666
41	5	27	22	484	735
42	3	35	32	1024	752
43	3	27	24	576	730
44	2	30	28	784	751
45	10	38	28	784	750
46	3	23	20	400	709
47	3	31	28	784	739
48	1	29	28	784	737
49	1	32	31	961	699
50	1	22	21	441	623

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (X_2)	คะแนนความก้าวหน้า D ($X_2 - X_1$)	D^2	คำตอบที่ตอบถูก
51	3	38	35	1225	750
52	3	40	37	1369	750
53	4	32	28	784	734
54	1	26	25	625	743
55	7	39	32	1024	735
56	4	29	25	625	735
57	1	22	21	441	648
58	6	36	30	900	755
59	4	37	33	1089	743
60	4	34	30	900	744
61	1	33	32	1024	751
62	4	29	25	625	751
63	3	26	23	529	750
64	1	32	31	961	729
65	8	37	29	841	692
66	8	21	13	169	705
67	1	23	22	484	696
68	2	29	27	729	673
69	4	28	24	576	744
70	3	20	17	289	739
71	3	23	20	400	741
72	4	24	20	400	753
73	2	26	24	576	733
74	5	27	22	484	742
75	2	25	23	529	557

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (X_2)	คะแนนความก้าวหน้า D ($X_2 - X_1$)	D^2	คำตอบที่ตอบถูก
76	3	34	31	961	695
77	6	37	31	961	749
78	2	24	22	484	674
79	4	30	26	676	711
80	1	33	32	1024	702
81	7	20	13	169	755
82	3	33	30	900	735
83	2	24	22	484	743
84	2	34	32	1024	735
85	1	24	23	529	705
86	1	28	27	729	504
87	8	38	30	900	740
88	2	19	17	289	752
89	3	23	20	400	694
90	5	38	33	1089	705
91	2	24	22	484	628
92	4	30	26	676	718
93	1	26	25	484	711
94	1	25	24	576	579
95	4	24	20	400	701
96	4	21	17	289	701
97	3	18	15	225	739
98	2	22	20	400	751
99	3	30	27	729	746
100	1	23	22	484	691

การแสดงการหาสูตร $$t_c = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

จากสูตร $$t_c = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_{\bar{D}}}$$ โดยที่ $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$\mu_D = \mu_{X_1} - \mu_{X_2}$

เมื่อ $\mu_D = 0$ จะได้ $$t_c = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}}$$

แต่ $$S_{\bar{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n-1}}$$

จะได้ $$t_c = \frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n-1}}}$$

$$= \frac{\frac{\sum D}{n}}{\frac{\sqrt{\frac{\sum D^2}{n} - \left(\frac{\sum D}{n}\right)^2}}{\sqrt{n-1}}}$$

$$= \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

การคำนวณเพื่อทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างคะแนนสอบก่อนและหลังเรียนบทเรียนแบบโปรแกรม

สมมุติฐาน : คะแนนการทดสอบก่อนและหลังเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมไม่แตกต่างกัน

จากสูตร
$$t_c = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

จากตารางที่ 4

$$n = 100, \quad \sum D = 2540, \quad \sum D^2 = 67367$$

ดังนั้น
$$t_c = \frac{2540}{\sqrt{\frac{100(67367) - 6451600}{99}}}$$

$$= \frac{2540}{\sqrt{\frac{28510}{99}}}$$

$$= 47.3324$$

เนื่องจากค่า t ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 มีค่าเป็น 2.58

แสดงว่าคะแนนสอบก่อนและหลังเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.01

นั่นคือ จะสรุปได้ว่าในการเรียนบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องคัลคูลัสเบื้องต้น ที่สร้างขึ้นนี้ทำให้นักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.01

ตารางที่ 5 ตารางหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบจากการทดลองภาคสนาม

X	f	X^2	fX	fX^2
40	1	1600	40	1600
39	1	1521	39	1521
38	6	1444	228	8664
37	4	1369	148	5476
36	1	1296	36	1296
35	1	1225	35	1225
34	4	1156	136	4624
33	3	1089	99	3267
32	8	1024	256	8192
31	4	961	124	3844
30	7	900	210	6300
29	7	841	203	5887
28	6	784	168	4704
27	6	729	162	4374
26	6	676	156	4056
25	3	625	75	1875
24	9	576	216	5184
23	7	529	161	3703
22	3	484	66	1452
21	4	441	84	1764
20	4	400	80	1600
19	3	361	57	1083
18	1	324	18	324
17	1	289	17	289
$\sum$	100		2814	82304

จากข้อมูลในตารางที่ 5 คำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบได้ดังนี้

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{X}$)

จากสูตร $\overline{X} = \frac{\sum fX}{N}$

เมื่อ $\sum fX = 2814, \quad N = 100$

จะได้ $\overline{X} = \frac{2814}{100}$

$= 28.14$

ข. ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

จากสูตร $S.D. = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \overline{X}^2}$

$= \sqrt{\frac{82304}{100} - (28.14)^2}$

$= \sqrt{823.04 - 791.8596}$

$= \sqrt{31.1804}$

$= 5.5839$

<u>การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบจากการทดลองภาคสนาม</u>

จากสูตร $$r_{yy} = \frac{k(S.D.)^2 - \overline{X}(k - \overline{X})}{(S.D.)^2 (k - 1)}$$

เมื่อ $k = 40$

$(S.D.)^2 = 31.1804$

$\overline{X} = 28.14$

$$r_{yy} = \frac{40(31.1804) - 28.14(40 - 28.14)}{31.1804(39)}$$

$$= \frac{1247.216 - 28.14(11.86)}{1216.0356}$$

$$= \frac{1247.216 - 333.7404}{1216.0356}$$

$$= \frac{913.4756}{1216.0356}$$

$$= 0.7511$$

แบบสอบที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้มีค่าความเชื่อมั่น 0.75

การวิเคราะห์เกณฑ์มาตรฐาน 90/90

ก. มาตรฐาน 90 ตัวแรก

เมื่อผลรวมของคำตอบถูกของนักเรียนทุกคน = C = 70318

จำนวนคำตอบทั้งหมดในแบบเรียน = A = 76000

จำนวนนักเรียนทั้งหมด = N = 100

คะแนนที่นักเรียนทำแบบเรียนถูกคิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ $= \frac{C}{N} \times \frac{100}{A}$

$= \frac{70318 \times 100}{100 \times 76000}$

$= 92.52$

ข. มาตรฐาน 90 ตัวหลัง

เมื่อคะแนนรวมของนักเรียนที่ทำแบบทดสอบถูก = S = 2814

คะแนนเต็มของแบบทดสอบ = T = 4000

จำนวนนักเรียนทั้งหมด = N = 100

คะแนนที่นักเรียนทำแบบทดสอบถูกคิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ $= \frac{S}{N} \times \frac{100}{T}$

$= \frac{2814 \times 100}{100 \times 4000}$

$= 70.04$

บทเรียนนี้จึงมีประสิทธิภาพเป็น 92.52/70.04

ประวัติผู้เขียน

นายดนัย ยังคง เกิดเมื่อวันที่ 3 เมษายน พ.ศ. 2494 ที่จังหวัดสมุทรปราการ จบการศึกษา ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากจุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2517 ปัจจุบันเป็นวิทยากรสาขาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ