บทที่ ๒

ทฤษฎีและการสร้างโมเดล

๒.๑ สโตคาสติคโปรเสส (Stochastic Processes)

ในบทที่ ๑ ได้กล่าวถึงลักษณะของการบินเข้ามาสู่สนามของเครื่องบิน(arrival) ในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน จึงเห็นได้ชัดว่าจำนวนการมาถึงของเครื่องบิน (arrival)เหล่านี้เป็นตัวแปรสุ่ม (random variable)ที่ไม่แน่นอน ชนิดที่ขึ้นอยู่กับเวลา หรือเป็นฟังชั่นของเวลา และถ้านิยามไว้ ณ เวลา $t \in T$ ลักษณะของตัวแปรสุ่ม (random variable) ก็จะเป็นสโตคาสติคโปรเสส[๑](Stochastic Processes)

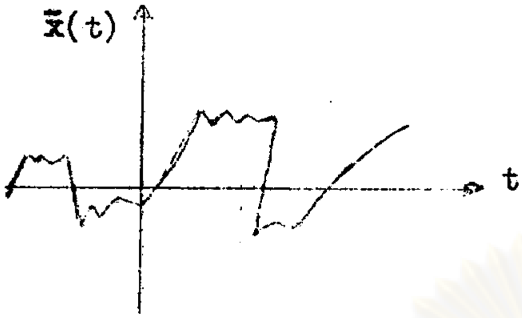
ถ้า $x(t)$ เป็นจำนวนที่รวบรวมได้(collection) ของตัวแปรสุ่ม (rondom variable) ซึ่งจำกัดนิยามไว้ ณ เวลา $t \in T$ เมื่อ T เป็นดรรชนีของชุด (index set) ของสโตคาสติคโปรเสส (stochastic process) ซึ่ง T อาจเป็นชุดของจำนวนเต็มก็ได้ คือ T มีค่าเป็น 1,2,3,..... เรียกว่าเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง(discrete-time) ของสโตคาสติคโปรเสส ถ้า T เป็นชุดค่าเนื่อง คือ $T = \{-\infty < t < \infty\}$ เรียกว่า continuous time stochastic processes

นิยามของ สโตคาสติคโปรเสส ที่ให้ไว้ข้างบนนี้เป็นนิยามแบบง่าย ๆ เพื่อนำเข้าสู่จุดของปัญหาที่ต้องการจะแก้ สำหรับเรื่องราวของสโตคาสติคโปรเสส โดยละเอียดจะไม่นำมากล่าวไว้

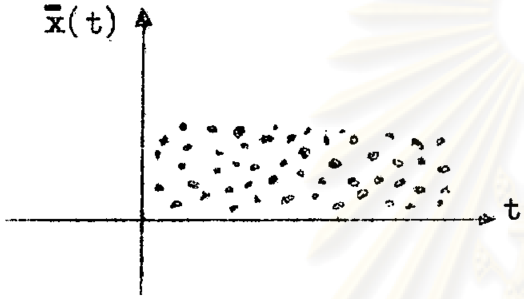
ค่าของ $x(t)$ ที่เวลา t เรียกว่า เสตทของโปรเสส(state of process) จึงเห็นได้ว่า state ที่พิจารณาถึงอาจเป็นได้ทั้งค่าเนื่อง(continuous) และค่าไม่เนื่อง (discrete)และเวลาในช่วงต่าง ๆ ที่พิจารณาก็เช่นเดียวกัน อาจมีทั้งค่าเนื่องและไม่เนื่อง ดังจะเห็นได้จากโค้งตัวอย่างตามรูปข้างล่างนี้

---

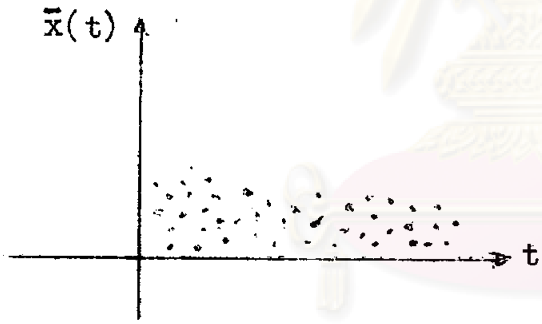
[๑] พล.อ.ต.พิสุทธิ์ ฤทธาคนี "Stochastic Processes & Markov Processes" Computer Science Journal Vol.II no.I (June, 1973) p.62



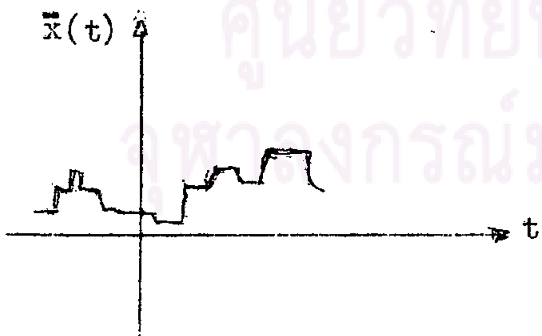
โค้งของ random noise voltage จะเป็นได้ทั้ง continuous state และ continuous time process



แสดงจำนวนน้ำในอ่างเก็บน้ำก่อนปรับระดับน้ำ เรียกว่า continuous state discrete time process



การโยนเหรียญ (unbiase) จะออกหัวหรือก้อย จึงเป็น discrete state discrete time process



จำนวนคนที่ช่องขายบัตรเข้าชมภาพยนตร์ เป็น discrete state continuous time process

กราฟเลขที่ ๓ แสดงภาวะของ state and time

โดยทั่วไปแล้ว $\overline{x}(t_1)$ จะเป็นเวคเตอร์ (vector) ที่มี n-dimension ซึ่งอาจเขียนได้ดังนี้

$$\overline{x}(t_1) = \left[x'(t_1),\ x^2(t_1),\ \ldots\ldots,\ x^n(t_1) \right]$$

เพื่อความสะดวกยิ่งขึ้น เราจะพิจารณาเฉพาะค่าจริงของ $x(t_1)$ ใน ๑ ขนาดเท่านั้นและเนื่องจาก $x(t_1)$ เป็นตัวเปลี่ยน ดังนั้นจึงมีดิสทริบิวชั่น ฟังชั่นของความน่าจะเป็น คือ (probability distribution function)

$$F(x_1;\ t_1) = P\left[x(t_1) \leq x_1 \right]$$

และถ้าในทุก ๆ $t_1,\ t_2, \ldots, t_k$ นั้นเราทราบ joint distribution ก็จะทำให้ทราบโปรเสส (process) ได้สมบูรณ์

$$F(x_1, x_2, \ldots x_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k) = P\{x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2, \ldots x(t_k) \leq x_k$$

ถ้าดัชนีของชุด T เป็น infinite แล้ว $x(t)$ จะแสดงได้โดยสมบูรณ์ เมื่อ $k \longrightarrow \infty$ ต่อไปเราจะทราบว่า โปรเสส บางชั้น (class) นั้นเราอาจทราบ $F(x_1, \ldots\ldots, x_k, \ldots\ldots t_k)$ ถ้าเราทราบเรื่องราวในอดีตของโปรเสส (past history of process)

สโตคาสติค โปรเสส จะเรียกว่าเป็น strictly stationary ถ้าแต่ละทุก ๆ $t_1, t_2, \ldots, t_k$ และ h ใด ๆ ใน T เรามีเวคเตอร์ขนาด k คือ

$$\left[x(t_1),\ x(t_2),\ \ldots\ldots\ldots,\ x(t_k) \right]$$

และ $\{x(t_1+h),\ x(t_2+h) \ldots\ldots,\ x(t_k+h)\}$

ซึ่งจะมีการกระจายแบบเดียวกัน หรือจะกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือโปรเสส จะเป็น strictly stationary ค่า ensemble ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการเลื่อนเวลาใด ๆ ค่าหนึ่ง และถ้าการวัดผลคาดคะเน ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเลื่อนเวลานี้ จะได้

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_k;\ t_1, t_2, t_k) = F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_k; t_1+h, \ldots t_k+h)$$

การที่นำปัญหานี้มากล่าวก็เพราะว่าลักษณะของเครื่องบินที่บินเข้ามาเพื่อรอการลงสนามนั้นจะเป็น สโตคาสติค โปรเสส คือในช่วงเวลา t ซึ่งอาจเป็น ๑ ชม., ๑ วัน หรือ ๑สัปดาห์

ก็สามารถจะรวบรวมเครื่องบินเหล่านั้นได้ว่ามีกี่เครื่อง ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็น discrete state continuous time process แต่ถ้าเราจะถือว่าเครื่องบินเครื่องที่ ๑ เริ่มติดต่อกับหอบังคับการบิน เพื่อขอลงสนาม พอติดต่อเสร็จเครื่องบินเครื่องที่ ๒ ก็เริ่มติดต่อหอบังคับการบินบ้าง ถ้าเป็นเช่นนี้จะถือว่าเป็น continuous state continuous time process ได้ state process จึงขึ้นอยู่กับข้อมูลที่เก็บได้จากหอบังคับการบิน ซึ่งจะได้กำหนด (define) ให้แน่นอนในบทวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

๒.๒ มาร์คอฟโปรเสส (Markov Processes)

สโตคาสติค โปรเสส $x(t)$ ที่กล่าวมาแล้วนั้น ถ้า $t \geq 0$ โปรเสสนั้นจะเรียกว่า มาร์คอฟโปรเสส(Markov processes)ถ้าชุดของ $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ใน index set ของโปรเสส เรามี conditional distribution ของ $x_n(t)$ สำหรับค่านี้กำหนดให้ของ $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{n-1})$ ขึ้นอยู่กับ $x(t_{n-1})$ เท่านั้น ซึ่งหมายถึงอนาคตขึ้นอยู่กับปัจจุบัน

$$P\left[x(t_n) \leq x_n / x(t_1) = x_1, \dots, x(t_{n-1}) = x_{n-1}\right]$$
$$= P\left[x(t_n) \leq x_n / x(t_{n-1}) = x_{n-1}\right]$$

ข้างบนนี้หมายถึง first order มาร์คอฟโปรเสสขึ้นอยู่กับ t_{n-1} และ second order มาร์คอฟโปรเสสขึ้นอยู่กับค่า t_{n-1}, t_{n-2} ถ้าไม่มีการกล่าวไว้เป็นอย่างอื่นแล้ว มาร์คอฟโปรเสส หมายถึง first order สำหรับ N-state processesจะเขียนได้ดังนี้

$$P\left[x(t_n) \leq x_n / x_n(t_{n-1}) = x_{n-1}\right]$$
$$= \sum_{x_j=1}^{x_n} P\left[x_j ; t_n / x_{n-1} ; t_{n-1}\right]$$

(เป็นค่าผลบวกของความน่าจะเป็นของโปรเสสขณะอยู่ใน state x_j ณ เวลา t_n โดยกำหนดว่าจะอยู่ใน state x_{n-1} ณ เวลา t_{n-1})

$P(x_j, t_j / x_i, t_i)$ เป็นการเขียนง่าย ๆ ของ
$P\{x(t_j) = x_j / x(t_i) = x_i\}$

สำหรับ $t_i > t_j$ มักจะเขียนให้สั้นเข้าอีกเป็น P_{ij} ซึ่งเราเรียกว่า transition prob. และถ้าทราบค่าพฤติภาพเบื้องต้น (initial condition) ก็จะทำให้รู้โปรเสสทั้งหมด

๒.๓ มาร์คอฟเชน (Markov Chain)

ถ้าปัญหาของเราที่กำลังพิจารณาอยู่นี้เป็น discrete state discrete time process แล้ว มาร์คอฟโปรเสส ก็จะกลายเป็น มาร์คอฟเชน [๒] เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาช่วงเวลาระหว่างการเปลี่ยนแปลง (transition) เป็นค่าคงที่ เช่น ๑ วัน, ๑ ชม., จะได้ผลต่างระหว่าง t_n และ t_{n-1} เป็น 1 เสมอ และจะได้ดรรชนีของชุด (index set) $T = 0, 1, 2, \ldots$

Transition prob. มักจะเขียนเป็นแบบ Matrix

$$[\Pi] = [P_{ij}]$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1j} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2j} \\ \vdots & & & \\ P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{ij} \end{bmatrix}$$

ถ้ามี N state ของมาร์คอฟโปรเสสจะได้ N x N matrix

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = \text{sum cross row}$$
$$= 1$$

---

๒ Emanuel Parzen, <u>Stochastic Processes</u> (San Francisco : Holden - Day Inc., 1962) p.187

$$\vec{P}(t+1) \quad = \vec{P}(t) \cdot \overline{\pi} \quad = \quad \vec{P}(t) \cdot |\pi|$$

อนาคต ปัจจุบัน

เมื่อพิจารณาตาม row vector จะได้

$$\vec{P}(t+1) = [P(1;\ t+1),\ P(2;\ t+1) \ldots\ldots P(N;t+1)]$$

และถ้าพิจารณาเขียนเป็นแต่ละ column การคูณ ก็จะได้ดังนี้

$$P(j;t+1) = \sum_{i=1}^{N} P(i,t)\ P_{ij}\ ;\ j = 1, \ldots\ldots N$$

ซึ่งเป็นแบบหนึ่งของสมการของท่าน Chapman - Kolmogorov[๓]

และถ้า $N \to \infty$ ก็จะได้ infinite state

$$\vec{P}(0) = [P(1,0),\ P(2,0),\ \ldots\ldots P(n\ ;\ 0)]$$

ซึ่งเป็นพฤติภาพเบื้องต้นของโปรเสส (initial condition of process) ตัวอย่างของมาร์คอฟเชน (Markov Chain) เช่น การโยนเหรียญซึ่งจะทำให้เกิดขึ้นเพียงสองเหตุการณ์เท่านั้น คือ เกิดหัว (success) และเกิดก้อย (failure) เป็น E_1 และ E_2 ถ้าเราให้

p = prob. ของการเกิดหัวตลอด

p' = prob. ของการเกิดหัวและตามด้วยก้อย

q = prob. ของการเกิดก้อยตลอด

q' = prob. ของการเกิดก้อย แล้วตามด้วยหัว

เราสามารถเขียน transition prob. ได้ดังนี้

$$P_{ij} = |\pi| = \begin{bmatrix} p & q \\ p' & q' \end{bmatrix}$$

---

๓ Ibid p.194

๒.๔ การนำ Z-Transform มาใช้กับ discrete Markov Processes

ถ้าหาก บ.ที่เข้ามาเป็นประเภท discrete state discrete time process ส่วนใหญ่จะใช้ z - Transform เพื่อหาดิสทริบิวชั่น คือ

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n , \quad n = 0,1,2.....$$

และถ้า $\bar{P}(t+1) = \bar{P}(t).|\Pi|$

จะได้ $\bar{P}(z) = \bar{P}(0)\left\{(I) - z\ |\Pi|\right\}^{-1}$

เมื่อ I = unit matrix

การหาคำตอบโดยวิธีนี้จะได้ทุก ๆ state ของ บ.ที่เข้ามาลงสนาม เช่นการเปลี่ยนสนามบินอันเนื่องจากทัศนวิสัยไม่ดี (ฝนตกหนัก หรือ หมอกลงจัดมองไม่เห็นสนาม) หรือการขอลัดคิวเพื่อลงสนาม ถ้าตัดปัญหานี้ออกไประบบจะมีเพียง state เดียว และขึ้นอยู่กับเวลาที่มีค่าเนื่อง การหาดิสทริบิวชั่นจึงเหมาะที่จะใช้ Laplace - Transform

๒.๕ วิธีการของ Laplace - Transform

ตัวแปรสุ่มที่เป็นฟังชั่นของเวลาที่มีค่าเนื่อง ไม่ว่าจะอยู่ในรูปของ differentiate หรือ integrate ถ้าเป็น linear แล้ว การหาคำตอบที่สะดวกคือใช้ Laplace Transform ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \text{ [๔]} \qquad \text{------(2.5)}$$

ในเมื่อ s เป็น complex plane = $\tau + j\omega$ วิธีการนี้คือการเปลี่ยน

---

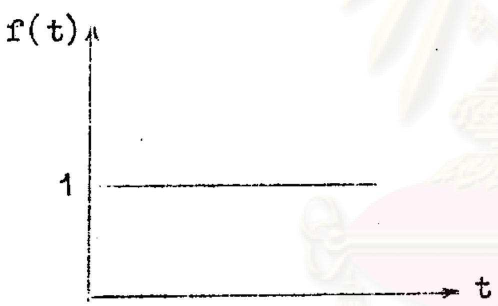
[๔] Murray F. Gardner and John L. Barnes. Transients in Linear System Vol.I (New York : John Wiley & Sons, Inc.,1954) p.104

ฟังชั่น (function) ของเวลาที่เป็นค่าจริง ให้เป็นฟังชั่นใหม่อีกอันหนึ่ง ซึ่งเป็น complex variable และฟังชั่นใหม่นี้สามารถจะบวก, ลบ, คูณ, หาร ได้ตามพีชคณิต เสร็จแล้วจึงเปลี่ยนกลับไปสู่ฟังชั่นของเวลาตามเดิม (inverse) วิธีการนี้จึงคล้ายกันกับเรื่องของ logarithm คือใส่ log เพื่อบวกลบคูณหารกันตามวิธีทางพีชคณิต เสร็จแล้วจึงหาคำตอบโดยการเปิด anti-log

จากที่กล่าวมาแล้วข้างบนจะเห็นว่าเราเปลี่ยนฟังชั่นของเวลา f(t) ไปสู่ฟังชั่นอันใหม่ $\{F(s)\}$ ได้โดยใช้ $\{e^{-st}\}$ คูณกับ f(t) แล้ว integrate มุ่งต่อเวลาจาก 0 ถึงอนันต์ ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างเท่าที่จำเป็น

๒.๕.๑ Unit Step Function U(t) คือฟังชั่นที่มีค่าคงที่ตลอดย่านของเวลาที่เปลี่ยนจาก t 0 จะเขียนได้ดังนี้

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases}$$



กราฟเลขที่ ๔

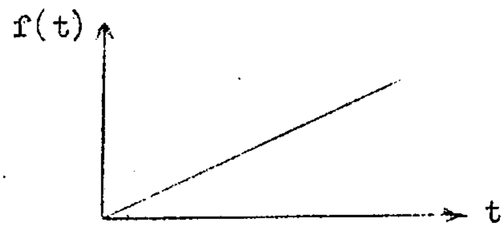
$$\mathcal{L}\, U(t) = \int_0^{\infty} (1)\, e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s}$$

๒.๕.๒ Unit Ramp Function คือฟังชั่น f(t) ซึ่งเพิ่มขึ้นแบบเส้นตรง (linear) ตามเวลา จะเขียนได้ดังนี้

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geqslant 0 \end{cases}$$



กราฟเลขที่ ๕

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} t.e^{-st}\, dt$$

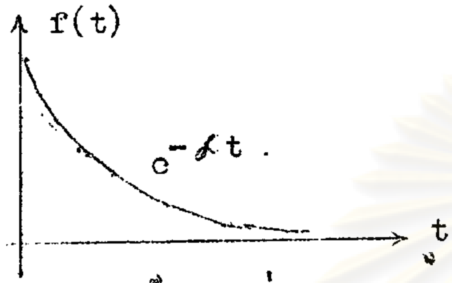
$$= -\frac{t\, e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{-1}{s} e^{-st}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

๒.๕.๓ The Damped Exponential[๕] คือฟังชั่นที่มีค่าน้อยลงไปสู่ 0 เมื่อเวลาค่อยๆ เพิ่มขึ้น จาก $0 \to \infty$ จะเขียนได้ดังนี้

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$



กราฟเลขที่ ๖

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s+\alpha}$$

๒.๕.๔ Product of Positive powers of t and Exponential function กำหนดให้

$$f(t) = t\, e^{-\alpha t}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty t\, e^{-\alpha t} \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t\, e^{-(s+\alpha)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

๒.๕.๕ Real Differentiation ถ้าฟังชั่น $f(t)$ และ $\frac{d}{dt} f(t)$ สามารถ transform ได้ และ $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ จะได้

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s\,F(s) - f(0+)$$

จากทฤษฎีข้างบน สามารถจะพิสูจน์ได้ดังนี้

จาก $\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$

---

[๕] Ibid. p.127

ให้ $u = f(t)$

$$dv = e^{-st}\,dt$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\therefore \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right] e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{f(0+)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right] e^{-st}\,dt$$

$$\therefore \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right] e^{-st}\,dt = SF(s) - f(0+)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = S\,F(s) - f(0+) \qquad \text{------}(2.5.5)$$

๒.๖ การหาคำตอบจาก inverse ของ Laplace Transform

โดยปกติแล้ว ฟังชั่นที่ transform และทำการบวก, ลบ, คูณ, หาร กันเมื่อจะ inverse กลับมาอยู่ในรูปของฟังชั่นของเวลา มักจะอยู่ในรูปของเศษส่วน เช่น

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots\ldots(s-s_k)}$$

ในเมื่อ $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_k$ เป็นค่าราก (root) เมื่อแยกออกเป็นเทอม ๆ แล้ว (partial fraction) จะได้

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k_1}{(s-s_1)} + \frac{k_2}{(s-s_2)} + \ldots\ldots \frac{K_k}{(s-s_k)}$$

เมื่อ inverse กลับ ($\mathcal{L}^{-1}$) จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] = K_1 e^{+s_1 t} + K_2 e^{+s_2 t} + \ldots\ldots K_k e^{s_k t}$$

การหาค่า K_1, $K_2, \ldots K_k$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ (constant) จะหาได้ดังนี้

$$K_1 = \left[\frac{(s-s_1)A(s)}{B(s)}\right]_{s=s_1}$$

วิธีการของ Laplace Transform ดังกล่าวจะช่วยให้หาดิสทริบิวชั่นของ บ.ที่เข้ามาเพื่อลงสนาม ตามหัวข้อ ๒.๗.๖ ต่อไป

๒.๗ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเข้าแถวคอย

แนวความคิดเกี่ยวกับการเข้าแถวคอย (Queuing Concept) โดยปกติแล้ว แถวคอยจะเกิดขึ้นได้เนื่องจากสาเหตุ ๒ ประการ คือ

๒.๗.๑ ประสิทธิภาพและจำนวนช่องหรือหน่วยบริการ (service station) มีจำนวนน้อย หรือไม่ดีพอกับความต้องการของลูกค้า (customers or arrival)

๒.๗.๒ บางครั้ง การบริการเพียงพอ แต่ลูกค้าเพิ่มขึ้นเป็นห้วง ๆ ก็ทำให้เกิดแถวคอยขึ้นได้ ส่วนในกรณีที่ช่องบริการว่างลงคอยลูกค้าก็มีสาเหตุเนื่องมาจากช่องบริการมีมากกว่าความต้องการของลูกค้า หรือความต้องการของลูกค้าพอดีกับการบริการในขณะหนึ่ง แต่ในระยะยาวกลับขาด แบบจำลองของคิว (Queuing models) ทำให้เราทราบ

๒.๗.๒.๑ ความยาว เฉลี่ยของแถวคอย (Average length of waiting line)

๒.๗.๒.๒ อัตราเฉลี่ยของลูกค้าที่มาเข้าแถวคอย (λ)

๒.๗.๒.๓ ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้คอย (Average waiting time)

๒.๗.๒.๔ ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้บริการ (μ)

๒.๗.๒.๕ ความน่าจะเป็นของลูกค้าจำนวน n ที่อยู่ในแถวคอย

๒.๗.๓ การแก้ปัญหาเพื่อลดแถวคอย อาจทำได้ ๒ วิธีดังนี้

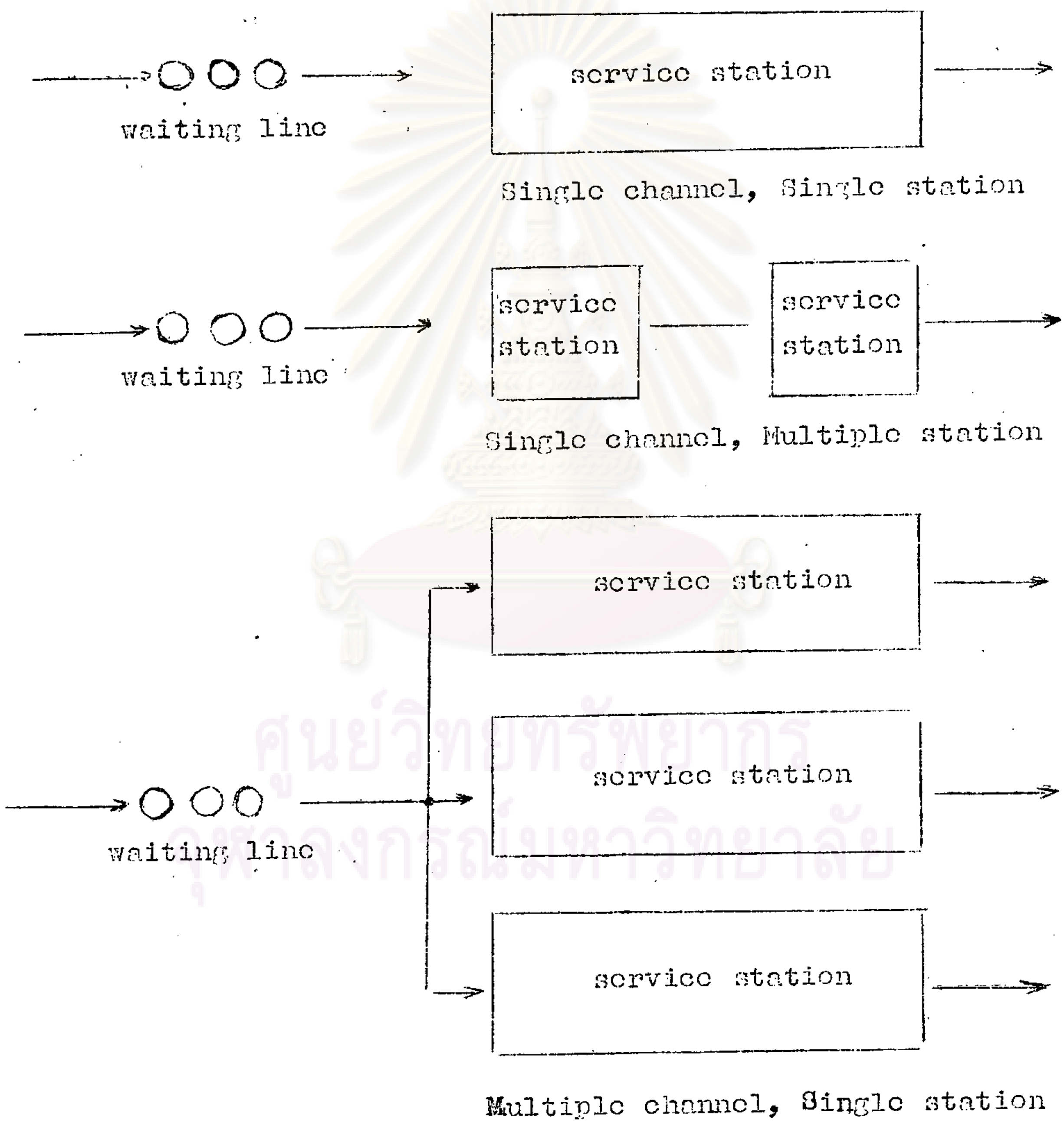
๒.๗.๓.๑ คอยควบคุมการเข้ามาของลูกค้า วิธีนี้ในทางปฏิบัติแล้วยากที่จะกระทำหรือทำไม่ได้ เพราะลูกค้า (arrival) เข้ามาในลักษณะต่างกัน

๒.๗.๓.๒ คอยควบคุมการบริการในทางปฏิบัติมักจะทำในข้อนี้ โดยเพิ่มสถานีบริการหรือความเร็ว (speed) ในการบริการ

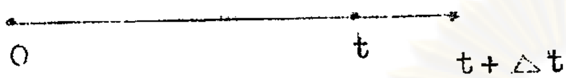
๒.๗.๔ กฎของคิว (Queue discipline) ลูกค้าที่มาก่อนได้รับบริการก่อน (first come first served)

๒.๗.๕ การจัดสถานีบริการ การจัดสถานีบริการอาจจัดได้ในลักษณะต่าง ๆ กันตามแผนภูมิที่ ๑

แผนภูมิที่ ๑ แสดงการจัดสถานีบริการ



๒.๗.๖ ปัวซองโปรเสส และ เอ็กโพเนนเชี่ยลดิสทริบิวชั่น (Poisson process and exponential distribution) เราจะพิจารณาถึงเหตุการณ์ (event) ที่เกิดในช่วงเวลา t และ Δt ซึ่ง Δt หมายถึงในช่วงเวลาที่เข้าใกล้ 0



ถ้ามีเหตุการณ์ E เกิดขึ้น n ครั้ง ในช่วงเวลา t เราให้มีความน่าจะเป็น (probability) = $P_n(t)$ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ซึ่งเกิดในช่วง $\Delta t \propto \Delta t$

∴ ความน่าจะเป็นของ E ในช่วง $\Delta t = \lambda \Delta t$

เมื่อ λ = ค่าเฉลี่ยของอัตราที่มาเข้าแถวคอย หน่วย/เวลา

จากที่กำหนดไว้ข้างบนนี้ สามารถจะเขียนใหม่ได้ดังนี้

$P_n(t)$	=	ความน่าจะเป็นของ E		ที่เกิดขึ้น	n	ครั้งในช่วงเวลา	t
$P_{n-1}(t)$	=	"	"	"	n-1	" "	t
$\lambda \Delta t$		"	"	"	1	" "	Δt
$1 - \lambda \Delta t$	=	"	"	"	ไม่เกิด	" "	Δt

เนื่องจากความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็น independent

$$\therefore \quad P_n(t + \Delta t) = P_n(t)\,(1-\lambda \Delta t) + P_{n-1}(t)\,\Delta t \lambda$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$n = 0,\ \frac{d}{dt} P_o(t) = -\lambda P_o(t) + \lambda P_{-1}(t), \quad P_{-1}(t) \neq \text{define}$$

$$\frac{d\,P_o(t)}{P_o(t)} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{d\,P_o(t)}{P_o(t)} = -\int \lambda\ dt$$

$$\log\ P_o(t) = -\lambda t + C$$

$$P_o(t) = e^{-\lambda t+C}$$
$$= e^{C} \cdot e^{-\lambda t}$$
$$= C_o\, e^{-\lambda t}$$

เมื่อพิจารณา Prob. ของ no arrival ที่ $t = o$ คือ $P_o(0)$

$$P_o(0) = 1 = C_o\, e^{o}$$
$$\therefore \quad C_o = 1$$

นั่นคือ $\quad P_o(t) = e^{-\lambda t}$

จาก $\quad \frac{d}{dt} P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$ ----(2.7.6)

ให้ $\quad P_n(t) = C_n(t)\, e^{-\lambda t}$

$$P_{n-1}(t) = C_{n-1}(t)\, e^{-\lambda t}$$
$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -\lambda e^{-\lambda t} C_n(t) + e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} C_n(t)$$

เอาค่า $P_n(t)$ และ $\frac{d}{dt} P_n(t)$ ไปแทนในสมการ (2.7.6) จะได้

$$\frac{d}{dt} C_n(t)\, e^{-\lambda t} - \lambda C_n(t) e^{-\lambda t} = -\lambda C_n(t) e^{-\lambda t} + \lambda C_{n-1}(t)\, e^{-\lambda t}$$
$$\frac{d}{dt} C_n(t) = \lambda C_{n-1}(t)$$
$$\int d\, C_n(t) = \int \lambda C_{n-1}(t)\, dt$$
$$C_n(t) = t \cdot \lambda\, C_{n-1}(t)$$

แต่ Prob., $\quad P_n(0) \quad 0 \quad$ เมื่อ $n \geqslant 1$

$$\therefore \quad C_n(t) = \lambda C_{n-1} \cdot t$$

$n = 1, \quad C_1(t) = \lambda C_o \cdot t$

$$= \lambda \cdot t \qquad (C_o = 1)$$

$n = 2, \quad C_2(t) = \lambda \int C_1 \cdot dt$

$$= \lambda \int \lambda \cdot t \, dt$$

$$= \frac{(\lambda \cdot t)^2}{2!}$$

ในทำนองเดียวกัน $\quad C_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!}$

$$C_n(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!}$$

แต่ $\quad P_n(t) = C_n(t) \, e^{-\lambda t}$

$$\therefore \quad P_n(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

สมการข้างบนนี้ จะเป็น Poisson Process

ถ้าจะใช้ Laplace Transform แก้ปัญหา ก็จะทำได้ดังนี้

จากสมการ (2.7.6)

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\text{L.T.} \left\{ S \, P_n(s) - \cancel{P_n(0)}^{\,0} \right\} + \lambda P_n(s) = \lambda P_{n-1}(s)$$

$$P_n(s) \, (S+\lambda) = \lambda P_{n-1}(s)$$

$$P_n(s) = \frac{\lambda}{(S+\lambda)} P_{n-1}(s)$$

ถ้า $n = 1, \quad P_1(s) \left\{ s+\lambda \right\} = \lambda P_o(s)$

แต่ $\quad P_o(t) = e^{-\lambda t}$

$$\therefore \quad \mathcal{L} \left[P_o(t) \right] = \frac{1}{S+\lambda} = P_o(s)$$

$$\therefore \quad P_1(s) \, (s+\lambda) = \frac{\lambda}{S+\lambda}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}$$

$$\therefore \quad P_1(t) = \lambda \cdot t \, e^{-\lambda t}$$

ถ้า $n = 2$, $P_2(s)\ (s+\lambda) = \lambda P_1(s)$

$$= \frac{\lambda.\lambda}{(s+\lambda)^2}$$

$$\therefore \quad P_2(s) = \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^3}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda.t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

ในทำนองเดียวกันอาจหา $P_n(t) = \frac{(\lambda.t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

แสดงว่า Poisson Process อาจหาได้ โดยใช้ differential equation และ Laplace Transform

และจาก prob. ที่ไม่มีหน่วยมาเพิ่มในช่วงเวลา t คือ $P_o(t)$

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

prob. ที่มี ๑ หน่วยมาเพิ่มในช่วงเวลา Δt

$$\therefore \quad P(t+\Delta t) = P_o(t)\ .\lambda.\Delta t$$

$$= p(t)\ \Delta t$$

$$\therefore \quad = e^{-\lambda t}.\lambda.\Delta t$$

$$\therefore \quad p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

ซึ่งเป็นเอ็กโพเนนเชี่ยล ดิสทริบิวชั่น (exponential distribution)

$E(t)$ = ค่าเฉลี่ยของเวลา

$$= \int_0^\infty t\ p(t)\ dt$$

$$= \int_0^\infty t\ .\lambda e^{-\lambda t}\ dt$$

จาก $\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\ du$

ให้ $y = \lambda.\ t$

$$t = y/\lambda$$

$$\therefore \quad E(t) = \int_0^\infty \frac{y}{\lambda} \, . \, \lambda e^{-y} \, \frac{dy}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y \, e^{-y} \, dy$$

$$= \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

๒.๗.๓ ปัญหาในการเข้าแถวคอย ถ้าพิจารณาถึงหน่วยที่มาเพิ่ม (arrival) และการบริการ (service) พร้อม ๆ กันแล้ว ก็อาจสร้างแบบจำลอง (model) ได้ดังนี้

ถ้าให้ n = หน่วยที่อยู่ในระบบ (รวมทั้งที่กำลังรับบริการ)

$P_n(t)$ = ความน่าจะเป็นของ state n ในเวลา t

$P_n(t+dt)$ = " " " $t + dt$

ให้ ความน่าจะเป็นของ ๑ หน่วย เข้ามาในช่วงเวลา $\Delta t = \lambda_n \Delta t$

" " " ๑ หน่วย ออกจากระบบ $\Delta t = \mu_n \Delta t$

ความน่าจะเป็นของ ไม่มีหน่วยเข้ามา (no arrival) $= (1 - \lambda_n \Delta t)$

" " ไม่มีหน่วยออกจากระบบ (no departure) $= (1 - \mu_n \Delta t)$

ระบบจะอยู่ใน state n ในช่วงเวลา $t + \Delta t$ ได้หลายอย่าง คือ

๑. ขณะ t, ระบบอยู่ใน state n, ไม่มีหน่วยเข้ามา, ไม่มีหน่วยออกจากระบบ

$$P_n(t) \quad , (1 - \lambda_n \Delta t) , \quad (1 - \mu_n \Delta t)$$

๒. ขณะ t, ระบบอยู่ใน state$(n-1)$, มีหน่วยเข้ามา ๑, ไม่มีหน่วยออกจากระบบ

$$P_{n-1}(t) \quad , \lambda_{n-1} \Delta t \quad , (1 - \mu_{n-1} \Delta t)$$

๓. ขณะ t, ระบบอยู่ใน $(n+1)$, ไม่มีหน่วยเข้ามา, มีหน่วยออกจากระบบ ๑

$$P_{n+1}(t) \quad , (1 - \lambda_{n+1} \Delta t), \quad \mu_{n+1} \Delta t$$

และเนื่องจากความน่าจะเป็นของแต่ละกรณี ไม่ขึ้นอยู่ซึ่งกันและกัน (independent)

$\therefore P_n(t+\Delta t)$ = ความน่าจะเป็นใน(๑) + ความน่าจะเป็นใน(๒) + ความน่าจะเป็นใน(๓)

$$= P_n(t)\left\{(1-\lambda_n \Delta t)(1-\mu_n \Delta t)\right\} + P_{n-1}(t) \cdot \lambda_{n-1} \Delta t\,(1-\mu_{n-1}\Delta t) + P_{n+1}(t)\left\{(1-\lambda_{n+1}\cdot \Delta t)(\mu_{n+1}\Delta t)\right\}$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -(\mu_n + \lambda_n)\, P_n(t) + P_{n-1}(t)\cdot \lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}$$

เมื่อ $\Delta t \longrightarrow 0$

จะได้

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = \begin{cases} \mu P_{n+1}(t) - \lambda P_n(t) & (n = 0) \\ -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\lambda_{n-1} P_{n-1}(t)+\mu_{n+1} P_{n+1}P(t) & (n > 0) \end{cases} \quad \text{------(2.7.7)}$$

อัตราเปลี่ยนแปลง =	ลดลงเพราะบริการ +	เพิ่มขึ้นเพราะมาใหม่ +	เพิ่มขึ้นเพราะ
ของความน่าจะเป็น	เสร็จจาก $n \to n-1$	จาก $n-1 \longrightarrow n$	บริการเสร็จ
ที่มี n หน่วยในระบบ	(เหลือ n หน่วย death)	(birth)	จาก (n+1)
			(เหลือn, death)

สมการข้างบนนี้จึงมักเรียกว่า birth and death process และถ้าระบบคงที่ (steady state) จะได้

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}$$

$$\mu_{n+1} P_{n+1} - \lambda_n P_n = \mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}$$

ถ้า $n=0$, $\mu_n = 0$, $P_{n-1} = 0$

$$\therefore \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

ถ้า $n = 1$, $\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1 = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0$

$$= 0$$

$$\therefore \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1$$

ในทำนองเดียวกัน $$P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n$$

ถ้าหากค่าเฉลี่ยของการบริการ และอัตราเข้ามาของหน่วยมีค่าคงที่ตลอด คือ มีค่าเป็น μ และ λ สมการจะเป็น

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n + \lambda P_{n-1}(t)$$

และถ้าระบบไม่มีหน่วยอยู่เลย คือ $n = 0$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} P_o(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_o(t)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} \bar{P}_n(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_o \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_o & P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

๒.๗.๘ Pure Birth Process หมายถึงมีหน่วยมาเพิ่ม แต่การบริการไม่มี คือ

$\mu = 0$, จากสมการ (2.7.7)

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} P_o(t) = -\lambda P_o(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \text{ , } \quad n = 1, 2, \ldots$$

เมื่อ $t = 0$, state P_o มี $n = 0 \Longrightarrow P_o(0) = 1$

$$\therefore \quad P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = \lambda P_o(t) - \lambda P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda P_o(t)$$

$$= \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\text{L.T.} \left\{ S\, P_1(s) - \cancel{P_1(0)}^{\,0} \right\} + \lambda P_1(s) = \frac{\lambda}{S+\lambda}$$

$$P_1(s) \quad (s+\lambda) = \frac{\lambda}{S+\lambda}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}$$

$$P_1(t) = \lambda .\ t\, e^{-\lambda t}$$

ถ้า $n = 2, \ \frac{d}{dt}P_2(t) + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$

$$= \lambda^2 .\ t\, e^{-\lambda t}$$

$$\text{L.T.} \left\{ S\, P_2(s) - P_2(0) \right\} + \lambda P_2(s) = \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}$$

$$P_2(s) = \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^3}$$

$$\therefore \quad P_2(t) = \frac{\lambda^2 .\ t^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

ในทำนองเดียวกัน $\quad P_n(t) = \frac{(\lambda .\ t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ ------(2.7.8)

ดังนั้น Pure birth process จะเป็น Poisson process นั่นเอง

๒.๗.๙ Pure death process คือไม่มีหน่วยมาเพิ่ม มีแต่การบริการเพียงอย่างเดียว นั่นคือ $\lambda = 0$ (หน่วยถ่ายจากไปผลตรงข้ามกับ pure birth,) ถ้าระบบตั้งต้น จาก R หน่วย ที่ $t = 0$, $n \longrightarrow R - n$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} P_n(t) = \mu P_n(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t) \quad , n = 0, 1, R-1,$$

$n = 0,$
$$\frac{d}{dt} P_o(t) = \mu P_1(t) - \mu P_o(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_o(t) + \mu P_o(t) = \mu P_1(t)$$

$$\text{L.T.} \left\{ S P_o(s) - \cancel{P_o}^{\,o}(0) + \mu P_o(s) \right\} = \mu P_1(s)$$

$$P_o(s) \left[S + \mu \right] = \mu P_1(s)$$

$$P_o(s) = \frac{\mu P_1(s)}{S + \mu} \qquad \text{------}(2.7.9)$$

$n = 1,$
$$\frac{d}{dt} P_1(t) = \mu P_2(t) - \mu P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_1(t) + \mu P_1(t) = \mu P_2(t)$$

$$\text{L.T.} \left\{ S P_1(s) - \cancel{P_1}^{\,o}(0) \right\} + \mu P_1(s) = \mu P_2(s)$$

$$P_1(s) = \frac{\mu P_2(s)}{(s+\mu)}$$

นำค่า $P_1(s)$ ไปแทนในสมการ(2.7.9) จะได้

$$P_o(s) = \frac{\mu \cdot \mu P_2(s)}{(s+\mu)^2}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าหา $P_2(s), P_3(s) \ldots P_n(s)$ ไปแทนใน (2.7.9) จะได้

$$P_o(s) = \frac{\mu^{R-n}}{(s+\mu)^{R-n}}$$

$$P_o(t) = \frac{(\mu t)^{R-n} e^{-\mu t}}{(R-n)!}$$

จึงสรุปได้ว่า อัตราเข้ามาของหน่วยเป็นปัวซองโปรเสส ส่วนอัตราบริการนั้นเป็นเอ็กโป-เนนเชี่ยล

๒.๘ การพิจารณาระบบที่มีเสถียรภาพ (Steady State Solution)

ระบบที่มีเสถียรภาพ คือ ระบบที่มีสภาพอยู่ตัว ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} P_n(t) = 0$$

จาก $n = 0$,

$$\frac{d}{dt} P_o(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_o(t)$$

$$0 = \mu P_1(t) - \lambda P_o(t)$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_o(t)$$

$n = 1$,

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = \mu P_2(t) - (\lambda+\mu) P_1(t) + \lambda P_o(t)$$

$$0 = \mu P_2(t) - (\lambda+\mu) \cdot \frac{\lambda}{\mu} P_o(t) + \lambda P_o(t)$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_o \left[\frac{\lambda+\mu-\mu}{\mu}\right]$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_o$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o$$

ให้

$$M = \frac{\lambda}{\mu} = \text{utilization factor}$$

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} M^n P_o$$

$$= P_o \sum_{n=0}^{\infty} M^n$$

และ

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} M^n = 1 + M + M^2 + \ldots = \frac{1}{1-M}$$

$$\therefore \quad P_o = (1-M)$$

$$\therefore \quad P_n = (1-M) M^n \qquad \text{----(2.8)}$$

๒.๘.๑ หาจำนวนเฉลี่ยของหน่วยในระบบ

$$L = \text{จำนวนเฉลี่ยของหน่วย} = E(n)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-M)\, M^n$$

$$= (1-M)\, M \frac{d}{dM} \left(\sum_{n=0}^{\infty} M^n\right)$$

$$= (1-M)\, M \frac{d}{dM} \left(\frac{1}{1-M}\right)$$

$$= \frac{M}{1-M} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$\therefore$ จำนวนเฉลี่ยของหน่วยในแถวคอย $(L) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ ----(2.8.1)

๒.๘.๒ หาความยาวของแถวคอยรับบริการ (ไม่นับ ๑ ที่เริ่มบริการ)

ให้ L_q = ความยาวเฉลี่ยของแถวคอยรับบริการ

$$= E\,(n-1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, P_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n - (1 - P_o)$$

$$= L - (1 - P_o)$$

$$= \frac{M}{1-M} - 1 + (1-M)$$

$$= \frac{M - M + M^2}{1-M} = \frac{M^2}{1-M}$$

$$= ML = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$\therefore$ ค่าเฉลี่ยความยาวของแถวคอยรับบริการ $= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ ----(2.8.2)

๒.๘.๓ หาเวลาเฉลี่ยที่หน่วยอยู่ในระบบ

ให้ W = เวลาเฉลี่ยที่หน่วยอยู่ในระบบ

$$= \frac{\text{จำนวนเฉลี่ยของหน่วยในระบบ}}{\text{อัตราที่หน่วยมาถึงระบบ(หน่วย/ชม.)}}$$

$$= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad \text{----(2.8.3)}$$

๒.๘.๔ หาเวลาคอยในแถวโดยเฉลี่ย

ให้ W_q = เวลาคอยในแถวโดยเฉลี่ย

$$= \frac{\text{ค่าเฉลี่ยของแถวคอยรับบริการ}}{\text{อัตราที่หน่วยมาถึงระบบ(หน่วย/ชม.)}}$$

$$= \frac{Lq}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad \text{----(2.8.4)}$$

๒.๘.๕ หน่วยบริการ มี K สถานี แต่ละสถานีมีอัตราบริการ μ หน่วย/เวลา

∴ อัตราบริการทั้งหมด $= K\mu$

จากสมการ (2.7.7) จะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = \begin{cases} (n+1)\mu P_{n+1} - \lambda P_n(t) & (n = 0) \text{----(2.8.5)} \\ (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} - (\lambda + K\mu) P_n & (0 < n < K) \\ K\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} - (\lambda + K\mu) P_n & (K \leq n) \end{cases}$$

$$M K = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$M = \frac{\lambda}{K\mu} = \text{atilization factor.}$$

การสร้างโมเดลทั้งหมดดังกล่าวนี้ เป็นการสร้างจากระบบที่มี ๑ สถานีบริการ (Single Channel, Single station) โมเดลเหล่านี้จะใช้ได้กับดิสทริบิวชั่นของ arrival ที่เป็นปัวซอง (Poisson distribution) และดิสทริบิวชั่นของการบริการมีลักษณะเป็น เอ็กโพเนนเชี่ยล (exponential distribution) เท่านั้น ถ้าเป็นดิสทริบิวชั่นแบบอื่น ๆ นอกเหนือไปจากที่กล่าวนี้จะใช้กับโมเดลที่สร้างมานี้ไม่ได้ ดังนั้นการวิเคราะห์ข้อมูลในบทที่ ๓ ที่จะกล่าวต่อไปจึงขึ้นอยู่กับผลของการทดสอบข้อมูลของ arrival และ service time ว่าจะมีดิสทริบิวชั่นแบบใด และถ้าหากผลของการทดสอบสอดคล้องกับโมเดลที่สร้างในบทที่สอง กล่าวคือ ข้อมูลของ บ.ที่เก็บรวบรวมได้มีลักษณะเป็นปัวซองดิสทริบิวชั่น และเวลาที่ให้บริการของหอบังคับการบินมีลักษณะเป็นเอ็กโพเนนเชี่ยล ดิสทริบิวชั่นก็สามารถจะนำโมเดล ตั้งแต่ ๒.๘, ๒.๘.๑, ๒.๘.๒, ๒.๘.๔ และ ๒.๘.๕ ไปใช้ในบทที่ ๔ ซึ่งเป็นบทตีความ และสรุปผลต่อไป