การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น

นางสาวอลิสรา ชมชื่น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS BY INTEGRATING THE THEORY OF GROWTH OF MATHEMATICAL UNDERSTANDING, COMMUNICATING, AND REASONING TO ENHANCE MATHEMATICAL COMPETENCY OF LOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Miss Alisara Chomchuen

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Curriculum and Instruction
Department of Curriculum, Instruction, and Educational Technology
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผลเพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น
โดย	นางสาวอลิสรา ชมชื่น
สาขาวิชา	หลักสูตรและการสอน
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	รองศาสตราจารย์ ดร. น้อมศรี เคท

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

.....คณบดีคณะครุศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.พฤทธิ์ ศิริบรรณพิทักษ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ
(**รอง**ศาสตราจารย์ ดร. พิมพันธ์ เดชะคุปต์)

.....อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(รองศาสตราจารย์ ดร. น้อมศรี เคท)

.....กรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร. สุวิมล ว่องวาณิช)

.....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สิริพร ทิพย์คง)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อลิสรา ชมชื่น : การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น(A DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS BY INTEGRATING THE THEORY OF GROWTH OF MATHEMATICAL UNDERSTANDING, COMMUNICATING, AND REASONING TO ENHANCE MATHEMATICAL COMPETENCY OF LOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร. อัมพร ม้าคนอง, อ.ที่ปรึกษาร่วม : รศ.ดร. น้อมศรี เคท, 165 หน้า.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) พัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น และ 2) ศึกษาผลการใช้กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยการพิจารณาจากสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการสื่อสาร และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดำเนินการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง นำข้อมูลที่ได้จากการศึกษามาสร้างกระบวนการเรียนการสอน แล้วนำไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนห้วยยอด จังหวัดตรัง จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 48 คน ระยะเวลาในการทดลอง 12 สัปดาห์ แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองคือ แบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสถิติ t ANCOVA และ MANCOVA ได้กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ประกอบด้วยขั้นตอนการสอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ 1) ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน 2) ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ 3) ขั้นสร้างความเชื่อมโยง และ 4) ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

1. ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ภาควิชา หลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา ลายมือชื่อนิสิต.....

สาขาวิชา หลักสูตรและการสอน ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

ปีการศึกษา 2550 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

4684662027 : MAJOR CURRICULUM AND INSTRUCTION
KEY WORD: MATHEMATICAL UNDERSTANDING/ MATHEMATICAL COMPETENCIES
ALISARA CHOMCHUEN : A DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS BY INTEGRATING THE THEORY OF GROWTH OF MATHEMATICAL UNDERSTANDING, COMMUNICATING, AND REASONING TO ENHANCE MATHEMATICAL COMPETENCY OF LOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. AUMPORN MAKANONG, Ph.D., THESIS CO-ADVISOR : ASSOC. PROF. NORMSRI CATE, Ph.D. 165 pp.

The purposes of this research were to 1) develop an instructional process by integrating the theory of growth of mathematical understanding, communicating, and reasoning to enhance mathematical competency of lower secondary school students, and 2) study the effects of the developed instructional process on mathematical competency which composed of mathematical conceptual knowledge, procedural knowledge, problem solving, communication and reasoning abilities. The instructional process was developed based on analysis and synthesis of background knowledge of mathematics instructional management, theory of growth of mathematical understanding, communicating and reasoning, and tried out and implemented in the following way: The samples of this study were eighth grade students of Huai Yod School, Trang Province. There were two groups of students, one control and one experimental, with 48 students in each group. The duration of this experiment was 12 weeks long. The research instruments were tests of mathematical conceptual knowledge, mathematical procedural knowledge, mathematical problem solving ability, mathematical communication ability and mathematical reasoning ability. Data were analyzed by using arithmetic mean, standard deviation, t-test, ANCOVA and MANCOVA. The developed instructional process consisted of 4 steps, namely: 1) reviewing prior knowledge, 2) learning from doing activity, 3) connecting information and 4) constructing knowledge and applying. The findings of this study were as follows:

1. The mathematical conceptual knowledge, procedural knowledge, problem solving, communication, and reasoning abilities of students in the experimental group were significantly higher than those of students in the control group at .05 level.

2. Mathematical conceptual knowledge, procedural knowledge, problem solving, communication, and reasoning abilities of students in the experimental group after learning with developed instructional process were significantly higher than before learning with developed instructional process at .05 level.

Department Curriculum, Instruction, and Educational Technology — Student's signature.....

Field of study Curriculum and Instruction — Advisor's signature.....

Academic year 2007 — Co-advisor's signature.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ ความอนุเคราะห์และความกรุณาจากหลายท่านๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยใคร่ของกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง ที่ได้ให้คำปรึกษา ให้คำแนะนำ และให้ความกรุณาอย่างยิ่งจนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เกิดขึ้นได้ รวมทั้งขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษาร่วมรองศาสตราจารย์ ดร.น้อมศรี เคท ที่ให้คำชี้แนะและให้กำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ตลอดมา

ขอกราบขอบพระคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ซึ่งมีรองศาสตราจารย์ ดร. พิมพันธ์ เดชะคุปต์ ประธานกรรมการ ศาสตราจารย์ ดร.สุวิมล ว่องวาณิช และรองศาสตราจารย์ ดร. สิริพร ทิพย์คง ที่ให้คำแนะนำ ช่วยชี้แนะข้อแก้ไขในประเด็นต่างๆ ด้วยความกรุณาเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนห้วยยอด รองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ ผู้ช่วยฝ่ายวิชาการ ที่ให้ความกรุณาในการทดลองสอนที่โรงเรียนห้วยยอดและช่วยอำนวยความสะดวกในเรื่องต่างๆ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณอาจารย์ในกลุ่มเรื่องการเรียนรู้คณิตศาสตร์และคณะครูโรงเรียน ห้วยยอดทุกท่านที่ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือในการเก็บข้อมูล และขอขอบคุณนักเรียนที่เข้าร่วมการทดลองครั้งนี้ที่ให้ความร่วมมือในการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนอย่างตั้งใจ ขอบพระคุณโรงเรียนย่านตาขาวรัฐชนูปถัมภ์ โรงเรียนวังวิเศษ โรงเรียนวิเชียรมาตุ และโรงเรียนกันตังพิทยานุสรณ์ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการทดลองใช้เครื่องมือ อำนวยความสะดวกในการเก็บข้อมูลร่วมมือ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนดังกล่าวที่ตั้งใจทำแบบทดสอบต่างๆ อย่างเต็มที่ในการเก็บรวบรวมข้อมูลสำหรับการวิจัยในครั้งนี้เป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณท่านผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่กรุณาชี้แนะ ให้คำแนะนำต่างๆ

ขอกราบขอบพระคุณคณะกรรมการบริหารหลักสูตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอนที่ให้ความรู้ความเอาใจใส่ ดูแลติดตามความก้าวหน้าในการทำวิทยานิพนธ์ของผู้วิจัย และขอขอบพระคุณพี่ เพื่อน น้องร่วมสาขาวิชา ตลอดจนญาติมิตรที่ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจให้ผู้วิจัยทำวิทยานิพนธ์จนสำเร็จลุล่วง

ท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และครู อาจารย์ ในทุกระดับการศึกษาทุกท่าน หากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ก่อให้เกิดประโยชน์ประการใด ขอมอบสิ่งดีงามเหล่านั้นแด่ท่านผู้มีพระคุณทั้งหลายที่ได้กล่าวมาซึ่งมีส่วนสำคัญทำให้เกิดวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย..... .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..... .... จ

กิตติกรรมประกาศ..... .... ฉ

สารบัญ..... .... ช

สารบัญตาราง..... .... ญ

สารบัญแผนภูมิ..... .... ฐ

บทที่ 1 บทนำ..... 1

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา..... 1

วัตถุประสงค์การวิจัย..... 6

สมมติฐานการวิจัย..... 7

ขอบเขตของการวิจัย..... 8

คำนิยามศัพท์เฉพาะ..... 9

ประโยชน์ที่ได้รับ..... 11

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... 12

กระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์..... 13

ปรัชญาการสอนและหลักการคณิตศาสตร์..... 13

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์..... 14

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน..... 34

การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์..... 35

ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์..... 35

ความสำคัญของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์..... 39

การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ 40

ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน 45

การสื่อสารทางคณิตศาสตร์..... 49

ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์..... 49

บทที่ 2 (ต่อ) หน้า

ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์..... 50

แนวทางการพัฒนาการสื่อสารทางคณิตศาสตร์..... 52

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์..... 58

ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์..... 58

ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์..... 60

แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์..... 65

สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์..... 70

ความหมายของสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์..... 70

ความสำคัญของการมีสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์..... 71

ประเภทของสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์..... 72

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... 83

งานวิจัยเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์..... 83

งานวิจัยเกี่ยวกับมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์.... 87

งานวิจัยเกี่ยวกับการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผล.... 90

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย..... 95

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน..... 96

การศึกษาข้อมูลพื้นฐานด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์..... 96

การศึกษาแนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 97

การสร้างกระบวนการเรียนการสอน..... 100

การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน..... 109

การสร้างแผนการเรียนรู้..... 109

การสร้างเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล..... 113

การประเมินผลของกระบวนการเรียนการสอน..... 119

กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง..... 119

การดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน..... 120

การวิเคราะห์ข้อมูล..... 124

หน้า

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล..... 127
ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล..... 127
ผลของการประเมินกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล..... 135
ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ การแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง..... 136
ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง..... 152
ผลการศึกษาพัฒนาการของการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในกลุ่มทดลอง..... 154
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ..... 158
สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล..... 165
อภิปรายผลการวิจัย..... 166
ข้อเสนอแนะ..... 173
รายการอ้างอิง..... 175
ภาคผนวก..... 188
ภาคผนวก ก กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล..... 189
ภาคผนวก ข รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิตรวจกระบวนการเรียนการสอนและเครื่องมือการวิจัย..... 200
ภาคผนวก ค ตัวอย่างแผนการสอน..... 202
ภาคผนวก ง เครื่องมือการวิจัย..... 222
ภาคผนวก จ การวิเคราะห์ข้อมูล..... 245
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์..... 265

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	ประโยคภาษาและประโยคสัญลักษณ์.....	18
2	ผลคูณของเลขยกกำลัง.....	19
3	มาตรฐานการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	54
4	แสดงชั่วโมงการทำงาน.....	56
5	แสดงจำนวนเงินที่นายจ้างต้องจ่าย.....	56
6	มาตรฐานการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	68
7	การเรียนการสอนการให้เหตุผล.....	70
8	มาตรฐานการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	80
9	สรุปแนวการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน.....	101
10	ขั้นตอนการเรียนการสอนตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน.....	103
11	เกณฑ์คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	115
12	เกณฑ์คะแนนความสามารถในการแก้สื่อสารทางคณิตศาสตร์.....	117
13	เกณฑ์คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	118
14	แบบแผนการทดลอง.....	120
15	เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	122
16	ตัวอย่างการบูรณาการการสื่อสารและการให้เหตุผลในการจัดการเรียนการสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล.....	132
17	ผลคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง (คะแนนเต็ม 30 คะแนน).....	136
18	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	137
19	ผลความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 30 คะแนน).....	137

ตารางที่		หน้า
20	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	138
21	ผลความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 12 คะแนน)	138
22	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	139
23	ผลความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 12 คะแนน).....	140
24	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	140
25	ผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 32 คะแนน)	141
26	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	142
27	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	143
28	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	143
29	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	144
30	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	145
31	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	146

ตารางที่		หน้า
32	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	147
33	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	148
34	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	148
35	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	149
36	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	150
37	เปรียบเทียบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในแต่ละเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	151
38	ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง**....**	152
39	ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง.....	152
40	ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง.....	153
41	ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง.....	153
42	ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง.....	154

สารบัญแผนภูมิ

แผนภูมิที่		หน้า
1	ขั้นตอนของวิธีสอนแบบอุปนัย.....	18
2	ขั้นตอนของวิธีสอนแบบนิรนัย.....	19
3	ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีสอนและผลการเรียนรู้.....	30
4	ความสอดคล้องของประเภทความเข้าใจของ Usiskin และ Byrnes.....	39
5	รูปแบบการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน.....	46
6	การเปรียบเทียบการสร้างความเข้าใจตามแนวคิดของ Carpenter และ Lehrer, Pirie และ Keiren และ Hiebert และ Carpenter	49
7	ลำดับขั้นตอนของการคิด.....	59
8	กระบวนการทำความเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาด้วยกลวิธีการแปลความโดยตรงและกลวิธีการสร้างรูปแบบ.....	80
9	กรอบแนวคิดการวิจัย.....	94
10	การสังเคราะห์ขั้นตอนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล....	107
11	กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล	128

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทิศทางการพัฒนาประเทศในแผนการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 10 (พ.ศ. 2550 – 2555) (สำนักงานคณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, 2550: 50) มุ่งพัฒนาคุณภาพคนและสังคมไทยสู่สังคมแห่งภูมิปัญญาและการเรียนรู้ ด้วยการพัฒนาคนในทุกมิติอย่างสมดุล ทั้งด้านร่างกาย สติปัญญา คุณธรรม จริยธรรม อารมณ์ มีทักษะความสามารถในการแก้ปัญหา ทักษะในการประกอบอาชีพ มีความมั่นคงในการดำรงชีวิตอย่างมีศักดิ์ศรี และอยู่ร่วมกันอย่างมีความสุข และมีเป้าหมายให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาหลัก ซึ่งประกอบด้วย คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาไทย และภาษาอังกฤษ ของทุกระดับการเรียนรู้สูงกว่าร้อยละ 55 สาเหตุที่คณิตศาสตร์ถูกจัดเป็นวิชาหลักที่เน้นให้คนไทยต้องได้รับการพัฒนา เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนามนุษย์ให้สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ, 2545: 1) ดังนั้นจึงต้องเริ่มพัฒนาความรู้ความสามารถและทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่เด็ก

แม้ว่าคณิตศาสตร์จะเป็นวิชาที่มีความสำคัญและหลักสูตรทุกหลักสูตรที่ผ่านมามุ่งเน้นให้นักเรียนทุกคนมีความสามารถทางคณิตศาสตร์ แต่ในความเป็นจริงแล้วผลการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนยังมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ โดยในปีการศึกษา 2536, 2538 และ 2540 พบว่าคะแนนเฉลี่ยร้อยละของการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับประเทศอยู่ในระดับต่ำ (คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2541: 14–23 ; สมศักดิ์ สินธุ์เวชญ์, 2542: 4) และต่อมาจากการประเมินตามโครงการ TIMSS-R ในปี พ.ศ. 2542 ซึ่งมีประเทศในเอเชียเข้าร่วมโครงการจำนวน 38 ประเทศ ไทยได้คะแนนเฉลี่ยอยู่ลำดับที่ 16 และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์อยู่ในกลุ่มเก่งมีเพียง 7% (สุนีย์ คล้ายนิล, 2546) และในการประเมินผลนักเรียนนานาชาติตามโครงการ PISA-2000 (Program for International Student Assessment) ขององค์กรเพื่อความร่วมมือและพัฒนาทางเศรษฐกิจ (The Organization for Economic Co-operation and Development :

OECD) ซึ่งเป็นการประเมินทักษะการรู้คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของนักเรียนวัยจบการศึกษาภาคบังคับ มีการประเมินการรู้ทางคณิตศาสตร์ (mathematics literacy) 3 ด้าน คือ เนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และการใช้คณิตศาสตร์ ปรากฏว่านักเรียนไทยได้คะแนนคณิตศาสตร์ 432 คะแนน เป็นลำดับที่ 32 จากจำนวนประเทศต่างๆ ที่เข้าร่วมโครงการ 41 ประเทศ (สุนีย์ คล้ายนิล, 2547) ส่วน ปี พ.ศ. 2546 ได้คะแนนคณิตศาสตร์ 417 คะแนน (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, กระทรวงศึกษาธิการ, 2550: 19-20; OECD, 2007: 53) ซึ่งต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ย 500 คะแนน ทั้งสองครั้ง ซึ่งสอดคล้องกับผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับชาติ (NT) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ประจำปีการศึกษา 2549 ที่นักเรียนได้คะแนนคณิตศาสตร์เฉลี่ย 12.46 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 31.15 และตั้งแต่ปีการศึกษา 2547-2549 พบว่านักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์ลดลง ผลการประเมินเหล่านี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์น้อย

จุดมุ่งหมายของการศึกษาคณิตศาสตร์ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เพื่อให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่เพียงพอ สามารถนำความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นไปพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นความรู้ และทักษะกระบวนการจึงควรเกิดจากการเรียนด้วยความเข้าใจ การสอนให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญประการหนึ่งในการศึกษาคณิตศาสตร์ ซึ่งได้รับความสนใจมาหลายปีจนถึงปัจจุบัน นักจิตวิทยาและนักการศึกษาเห็นว่าการสอนเพื่อความเข้าใจทำให้นักเรียนมีความสามารถมากกว่าและมีความคงทนยาวนานกว่าการสอนชนิดอื่นๆ (Sheffield and Cruikshank, 2005: 24) การพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงควรมุ่งเน้นการพัฒนาให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจอย่างถ่องแท้ (ปานทอง กุลนาถศิริ, 2539: 12) โดยส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยการปฏิสัมพันธ์ในชั้นเรียนด้วยการนำเสนอความคิดเห็น การพูดคุย การโต้แย้ง การลงมือปฏิบัติ การใช้เครื่องมืออุปกรณ์ต่างๆ กิจกรรมต่างๆ เหล่านี้จะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจสถานการณ์ที่ซับซ้อนได้มากขึ้น (Parker, 1993: 7) ดังคำกล่าวที่ว่า “ฉันได้ยินและฉันลืม ฉันเห็นและฉันจำได้ ฉันทำและฉันเข้าใจ

ความรู้หรือความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นั้นแบ่งออกเป็น 2 ด้าน (Reys and others, 2004: 22) คือ ความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการ ซึ่งจากงานวิจัยของ Slesnick (1982 อ้างถึงใน Sharp and Adams, 2002) ได้ศึกษาความสามารถของนักเรียนในการหารจำนวนเต็ม พบว่า ความเข้าใจด้านมโนทัศน์เป็นตัวส่งผลให้นักเรียนใช้กลวิธีทางคณิตศาสตร์สำหรับดำเนินการหารจำนวนเต็มได้ดีขึ้น และจากการศึกษาความรู้ด้านมโนทัศน์และ

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์โดยการสังเกตทักษะที่นักเรียนใช้เกี่ยวกับเครื่องหมายทศนิยมและความหมายที่เชื่อมโยงกับมโนทัศน์ ของ Wearne and Hiebert (1988 อ้างถึงใน Martinie, S., 2005) พบว่านักเรียนขาดความเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์กับการดำเนินการ ผลที่ตามมาคือนักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้เฉพาะตามขั้นตอนที่เรียนมาเท่านั้น แสดงว่าถ้านักเรียนไม่มีความเข้าใจมโนทัศน์เกี่ยวกับกฎแล้วนักเรียนมักจะลืมหรือทำผิด และนำมโนทัศน์ไปใช้ได้ยาก การส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์จึงมีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากความเข้าใจด้านมโนทัศน์และ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนเรียนรู้ขั้นต่อไปง่ายขึ้นและเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงได้ดีขึ้น ช่วยให้นักเรียนมองเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ เป็นคนมีประสิทธิภาพในการทำงานสูงและมีพฤติกรรมการคิดวิเคราะห์ในระดับสูง สามารถนำสมบัติและความเข้าใจต่างๆ ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ นอกจากนั้นความสามารถด้านมโนทัศน์และการดำเนินการยังเป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญและจำเป็นสำหรับความสามารถในการแก้ปัญหาด้วย

ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน (the theory of growth of mathematical understanding) (Pirie & Kieren, 1989, 1991, 1992, 1994) มองว่าความเข้าใจเป็นกระบวนการที่มีความเป็นพลวัตร และต่อเนื่อง ไม่ใช่สิ่งที่ได้มาเดี่ยวๆ และไม่ใช่กลุ่มความรู้ที่รวบรวมไว้เป็นในลักษณะเส้นตรง ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจนี้พยายามแสดงรายละเอียดของความเข้าใจในนิยามของทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ที่ว่า ความเข้าใจเป็นกระบวนการทางปัญญาที่มีความต่อเนื่องของโครงสร้างทางความรู้ของบุคคล โดยนักเรียนจะสร้างความเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์หนึ่งๆ เป็นลำดับขั้นทั้งหมด 8 ระดับ คือ การรู้สิ่งเดิม การสร้างภาพ การเกิดภาพในใจ การสังเกตสมบัติ การจัดระเบียบสมบัติที่สังเกตได้ การสังเกตสมบัติที่จัดระเบียบไว้ การสร้างโครงสร้าง และการสร้าง โดยการพัฒนาความเข้าใจตามระดับขั้นนี้เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง และเมื่อนักเรียนเกิดปัญหาในการทำความเข้าใจในระดับที่สูงขึ้น นักเรียนสามารถย้อนกลับ (fold back) มาทำความเข้าใจกับระดับความเข้าใจก่อนหน้าที่เป็นพื้นฐานของการทำความเข้าใจที่สูงขึ้นได้ ระดับความเข้าใจในแต่ละขั้นจึงขึ้นอยู่กับรูปแบบและกระบวนการของระดับความเข้าใจที่อยู่ภายใน และถูกจำกัดโดยรูปแบบและกระบวนการของระดับความเข้าใจที่อยู่ภายนอก โครงสร้างของความเข้าใจในระดับหนึ่งๆ จึงเหมือนกับโครงสร้างของความเข้าใจในระดับอื่น และระดับความเข้าใจหนึ่งๆ สามารถเรียกใช้ความรู้ความเข้าใจในระดับก่อนๆ ได้ (Pirie and Martin, 2000) ดังนั้นความคิดรวบยอดและความรู้ความเข้าใจต่างๆ จึงมีความเชื่อมโยงกันในทุกระดับของความเข้าใจ

ลักษณะการเรียนการสอนประการหนึ่งที่อาจเป็นปัญหาต่อการพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนคือวิธีการสอนของครูที่มักเป็นการบรรยายหรือสาธิตประกอบการอธิบาย แล้วครูเป็นผู้สรุปกฎ ทฤษฎีต่างๆ ให้นักเรียนจดจำนำไปใช้ ดังนั้นนักเรียนจะเรียนด้วยการท่องจำเป็นส่วนใหญ่(มาลินท์ อิทธิรส, 2544: 26) นักเรียนจะได้สื่อสารกับครูโดยการตอบคำถามของครูเท่านั้น ซึ่งบางครั้งหากนักเรียนตอบผิด นักเรียนก็จะไม่ทราบเหตุผลว่าผิดอย่างไร แต่ครูจะใช้วิธีถามนักเรียนคนต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบที่ถูกต้องที่ครูต้องการ สิ่งที่นักเรียนได้จะเป็นความรู้และความจำเท่านั้น (กิตติ พัฒนาตระกูลสุข, 2546: 55) ซึ่งลักษณะการเรียนการสอนนี้ไม่ใช่การเรียนรู้เพื่อให้เกิดความเข้าใจ ดังนั้นการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต้องใช้การสื่อสาร โดยให้นักเรียนได้มีโอกาสสื่อสารทั้งกับครูและเพื่อนร่วมชั้นเรียน เพราะคณิตศาสตร์เป็นภาษาและการศึกษาคณิตศาสตร์ยังเป็นกิจกรรมทางสังคม (Baroody and Coslick, 1993: 2-99) การสื่อสารจึงสามารถพัฒนานักเรียนได้ทั้งความสามารถในการเรียนรู้และการมีทักษะทางสังคม และมีบทบาทใน การเรียนการสอน คือเป็นตัวเชื่อมโยงระหว่างความคิดนามธรรมกับรูปธรรม ภาษาทางทฤษฎีกับสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้วัตถุ รูปภาพ กราฟ สัญลักษณ์ คำพูด และมโนภาพแทนแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Kennedy and Tipps, 1994: 181) นักเรียนจะแลกเปลี่ยนแนวคิดด้วยการไตร่ตรอง กลั่นกรอง โต้แย้ง และแก้ไขปรับปรุงแนวคิดนั้นร่วมกับเพื่อนๆ และทำความเข้าใจของตนเองให้ชัดเจนขึ้น กระบวนการสื่อสารยังช่วยสร้างแนวคิดที่มีความหมายและสามารถนำไปปฏิบัติได้ โดยนักเรียนต้องคิด ให้เหตุผล และสื่อสารผลการคิดของตนเองต่อคนอื่นด้วยการพูด หรือการเขียน การฟังการอธิบายของคนอื่นและการสนทนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนมีโอกาสพัฒนาความเข้าใจของตนเอง และช่วยให้นักเรียนมีความคิดที่แหลมคมขึ้น (National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 2000: 60) การสื่อสารแนวคิดที่ประสบความสำเร็จเกิดจากการประนีประนอมความหมายและได้รับความเชื่อถือสนับสนุนแนวคิดจากสมาชิกของชั้นเรียน และการเรียนการสอนที่ใช้กระบวนการสื่อสารทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น (สุธิดา เกตุแก้ว, 2547; ประภาวดี เทพทอง, 2545) นอกจากนั้นการสื่อสารแนวคิดทำให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลมากขึ้นด้วย (ปิยวรรณ ตีระกิตติธนา, 2548)

อนึ่ง การสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ด้วยการสนับสนุนหรือหักล้างด้วยหลักฐานอย่างสมเหตุสมผลจากการอภิปรายในชั้นเรียน ทำให้นักเรียนตระหนักว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ตั้งอยู่บนข้อตกลงเบื้องต้นและกฎต่างๆ เป็นการเชื่อมโยงความสัมพันธ์เชิงตรรกทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลเป็นธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ มีอยู่ทุกส่วนในกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ เป็นกิจวัตรในการคิดซึ่งต้องได้รับการพัฒนาในบริบทที่หลากหลาย การพัฒนาการ

ให้เหตุผลของนักเรียนทำได้โดยให้นักเรียนพัฒนาแนวคิด สำรวจปรากฏการณ์ แสดงเหตุผลของคำตอบ และใช้ข้อคาดคะเนทางคณิตศาสตร์ในบริบทต่างๆ (NCTM, 2000: 56) การเน้นการให้เหตุผลช่วยให้นักเรียนมองเห็นว่าคณิตศาสตร์มีความเป็นเหตุเป็นผลและนักเรียนสามารถทำความเข้าใจได้ (Baroody and Coslick, 1993: 2-59) และสามารถที่จะค้นพบสิ่งใหม่ๆ ได้ด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนมีโอกาสให้เหตุผลในกิจกรรมที่ปฏิบัติด้วยการลงมือกระทำ วาดภาพ ใช้แผนผัง กราฟฟิค อภิปราย และการเขียน ผ่านการคิด การแสดงเหตุผล และการประเมินผล ทำให้นักเรียนคิดและตรึกตรองหาเหตุผลเพื่อพิจารณาหาแนวทางในการแก้ปัญหาโดยอาศัยองค์ประกอบพื้นฐานต่างๆ เช่น การสังเกต ความรู้และประสบการณ์เดิม ทำให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้หรือแนวคิดได้อย่างสมเหตุสมผล หรือสามารถใช้ในการอธิบายความหมายของสิ่งที่รู้ด้วยคำพูดของตนเอง การแสดงตัวอย่าง การใช้มโนทัศน์ การนำความรู้ไปใช้ การแสดงเหตุผลพิสูจน์ การเปรียบเทียบข้อแตกต่าง การอธิบาย นำเสนอด้วยวิธีการใหม่ การสรุปเป็นหลักเกณฑ์ทั่วไป เป็นต้น นักเรียนที่เรียนด้วยความเข้าใจและมีเหตุผลจะตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่อาศัยการให้เหตุผลอย่างมีระบบและจะเป็นการพัฒนาพื้นฐานในการเรียนรู้คณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆ ต่อไป

การแก้ปัญหามีความเกี่ยวข้องกับความรู้ ทักษะ และความสามารถหลายอย่าง เช่น ความรู้ในเนื้อหาและมโนทัศน์ ความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการ ทักษะการคิด การแก้ปัญหาที่ดีมักรวมถึงการวิเคราะห์และอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบและวิธีการที่ใช้ว่าถูกต้อง เหมาะสม หรือมีประสิทธิภาพเพียงใด ซึ่งในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จะมีปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนได้คิดหาคำตอบอยู่ตลอด ดังนั้นหลักสูตรการศึกษาคณิตศาสตร์จึงให้ความสำคัญกับบทบาทของการแก้ปัญหา การพัฒนาความก้าวหน้าและทักษะในการแก้ปัญหาของนักเรียนอย่างมาก เช่น การศึกษาคณิตศาสตร์ในรัฐแคลิฟอร์เนียได้เน้นทักษะพื้นฐาน ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์และการแก้ปัญหา ในส่วนของประเทศไทยการให้ความสำคัญกับกระบวนการคิดและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ปรากฏในพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 โดยได้กำหนดแนวทางการจัดการศึกษาในส่วนของการจัดกระบวนการเรียนรู้โดยระบุให้ “...นักเรียนได้ฝึกทักษะกระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์ และการประยุกต์ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ไขปัญหา...” สอดคล้องกับแผนการศึกษาแห่งชาติ (คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2545: 61) ที่มีเป้าหมายให้คนไทยทุกคนมีทักษะและกระบวนการในการคิด การวิเคราะห์ และการแก้ปัญหา ซึ่งความสามารถในการแก้ปัญหามีประโยชน์ต่อการพัฒนานักเรียนหลายด้าน เช่น

1. ช่วยพัฒนาทักษะการคิดของนักเรียน

2. สามารถสร้างความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์ได้ และช่วยเพิ่มพูนประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

3. พัฒนาความสามารถของนักเรียนในการเชื่อมโยงและใช้ความรู้ที่เรียนมาในการแก้ปัญหาจริง เนื่องจากการแก้ปัญหาเกิดขึ้นทั้งในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และในบริบทอื่นๆ

4. มีความสามารถในการใช้และประยุกต์กลวิธีที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

5. สามารถตรวจสอบและสะท้อนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

จากการวิเคราะห์การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน ที่ได้ขยายความเข้าใจให้มีความละเอียดขึ้น ร่วมกับการสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ พบว่าแนวคิดทั้งสามนี้ให้ความสำคัญกับประสบการณ์และกระบวนการเรียนรู้เพื่อให้ได้มาซึ่งความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ โดยสนับสนุนให้มีการแสดงเหตุผลในการแลกเปลี่ยนแนวคิดหรือการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และหากนักเรียนมีความสามารถจำกัดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แต่ละครั้งนักเรียนจะกลับไปทบทวนความรู้และความเข้าใจเดิมที่มีอยู่เพื่อเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาหรือทำความเข้าใจในระดับที่สูงขึ้น ซึ่งด้วยการมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนและครูนี้ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจคณิตศาสตร์ทั้งในด้านความรู้และทักษะอย่างลึกซึ้งขึ้น และสามารถนำความรู้และทักษะที่มีไปใช้ได้

ด้วยเหตุผลดังกล่าวมาทั้งหมด ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น

วัตถุประสงค์การวิจัย

การวิจัยเพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น มีวัตถุประสงค์ดังนี้

1. เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

2. เพื่อศึกษาผลการใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น โดยการดำเนินการดังนี้

2.1 เปรียบเทียบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล และกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

2.2 เปรียบเทียบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ก่อนและหลังการทดลอง

2.3 ศึกษาพัฒนาการของการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ก่อนเรียนและหลังเรียนเป็นระยะๆ

สมมติฐานการวิจัย

จากการศึกษาการเรียงลำดับการเรียนทักษะและมโนทัศน์ของ Heid (1988 อ้างถึงใน Kwon, Rasmussen and Allen, 2005) โดยกลุ่มทดลองเน้นการเรียนมโนทัศน์ของขั้นตอนวิธีการในการใช้คอมพิวเตอร์ใน 12 สัปดาห์แรก ส่วนใน 3 สัปดาห์สุดท้ายเน้นทักษะการคำนวณด้วยมือ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนมีความเข้าใจด้านมโนทัศน์มากกว่ากลุ่มที่เรียนตามปกติ และนักเรียนสามารถทำแบบวัดด้านทักษะหลังเรียนได้ดี สอดคล้องกับ Empson (2002) ที่กล่าวว่าถ้านักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์แล้ว นักเรียนจะประสบผลสำเร็จในวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนจะสามารถเรียนรู้ มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน และทำคะแนนในแบบวัดได้ดี นอกจากนั้นนักเรียนที่มีความรู้สูงจะตอบคำถามได้ถูกต้องมากกว่า พร้อมทั้งสามารถแสดงเหตุผลในการตัดสินใจได้มากกว่ากลุ่มที่มีความรู้น้อย (Niemi, 1996) ดังนั้นผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยในครั้งนี้ ดังนี้

1. ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

2. ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

4. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

6. ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

7. ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

8. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

9. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

10. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนแบบสหศึกษา สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ จังหวัดตรัง

2. ตัวแปรในการวิจัย

ตัวแปรในการทดลองเพื่อศึกษาผลของการจัดการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ประกอบด้วย

2.1 ตัวแปรต้น คือ การจัดการเรียนการสอน ซึ่งมี 2 รูปแบบ คือ

2.1.1 กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

2.1.2 การเรียนการสอนตามปกติ

2.2 ตัวแปรตาม คือ สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

2.2.1 ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

2.2.2 ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

2.2.3 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2.4 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

2.2.5 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หมายถึง ขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นโดยการนำทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน ซึ่งมีระดับการพัฒนาความเข้าใจ 8 ระดับ คือ การรู้สิ่งเดิม การสร้างภาพ การเกิดภาพในใจ การสังเกตสมบัติ การจัดระเบียบสมบัติที่สังเกตได้ การสังเกตสมบัติที่จัดระเบียบไว้ การสร้างโครงสร้าง และการสร้างความรู้หรือมโนทัศน์ใหม่ มาบูรณาการร่วมกับการสอนที่เน้นการสื่อสารและการให้เหตุผล เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ได้เป็นกระบวนการเรียนการสอน 4 ขั้น ประกอบด้วย ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ ขั้นสร้างความเชื่อมโยง และขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้

การจัดการเรียนการสอนตามปกติ หมายถึง การจัดการเรียนการสอนตามแนวการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 โดยคำนึงถึงนักเรียนเป็นสำคัญ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริงจากการฝึกปฏิบัติ ฝึกให้นักเรียนคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหา กิจกรรมการเรียนการสอนผสมผสานระหว่างสาระด้านเนื้อหาและทักษะกระบวนการ

สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้ความเข้าใจ ความสามารถ และความชำนาญทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดจากการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่แสดงออกให้สังเกตได้และวัดได้ ประกอบด้วย ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. **ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์** หมายถึง ความสามารถในการใช้ความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ความหมายทางสัญลักษณ์ หลักการ รูปแบบ และความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ต่างๆ วัดได้จากแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. **ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์** หมายถึง ความสามารถในการใช้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการทำงานหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงการใช้ศัพท์ ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อการดำเนินการต่างๆ ในกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ โดยวัดได้จากแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. **ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์** หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์วิชาคณิตศาสตร์ดำเนินการหาคำตอบของปัญหาได้ โดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้วยการวิเคราะห์ตีความหมายโจทย์ปัญหา วางแผน และกำหนดขั้นตอนในการแก้ปัญหา เลือกใช้กลวิธีที่มีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหา และตรวจสอบความถูกต้องหรือความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ ซึ่งวัดได้จากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยประยุกต์เกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ (2546: 137)

4. **ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์** หมายถึง ความสามารถในการใช้ภาษา ศัพท์ และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย หรือนำเสนอเพื่ออธิบายแนวความคิดหรือหลักการทางคณิตศาสตร์ให้ผู้อื่นเข้าใจ หรือแลกเปลี่ยนความรู้หรือความคิดเห็นทางคณิตศาสตร์กับบุคคลอื่น ได้อย่างถูกต้องและรัดกุมด้วยการพูด และการเขียน ซึ่งวัดได้จากแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยประยุกต์เกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ (2546: 138) และสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 18–19)

5. **ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์** ประกอบด้วยความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัยและอุปนัย โดย ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง ความสามารถในการนำกฎ นิยาม ทฤษฎี หรือหลักการทั่วไปทางคณิตศาสตร์ไปใช้สรุปความถูกต้องของเนื้อหาที่สอดคล้องกันได้ และความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

หมายถึงความสามารถในการหาข้อสรุปจากลักษณะร่วมของข้อมูลย่อยๆ ที่มีได้ ซึ่งวัดได้จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบวัดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยประยุกต์เกณฑ์การจำแนกความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของซิลเลส (Seales, 1956: 229–230) และเกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ (2546: 137)

ประโยชน์ที่ได้รับ

1. ได้กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเป็นทางเลือกหนึ่งของนักการศึกษาและครูคณิตศาสตร์จะได้พิจารณานำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และสนองความมุ่งหมายของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

2. ผลการศึกษาชี้ว่ากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เหมาะสมกับการใช้กับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น เนื่องจากเป็นวัยที่สามารถคิดได้ทั้งอย่างเป็นรูปธรรมและนามธรรม และมีโครงสร้างในการคิด และเป็นวัยที่มีความพร้อมในการแสดงออก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่อง การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาทฤษฎี แนวคิด และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อต่อไปนี้

1. กระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
   - 1.1 ปรัชญาการสอนและหลักการสอนคณิตศาสตร์
   - 1.2 การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
   - 1.3 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน
2. การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
   - 2.1 ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
   - 2.2 ความสำคัญของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
   - 2.3 การสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
   - 2.4 ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน
3. การสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 3.1 ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 3.2 ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 3.3 แนวทางการพัฒนาการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
4. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - 4.3 แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
5. สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์
   - 5.1 ความหมายของสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์
   - 5.2 ความสำคัญของการมีสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์

5.3 ประเภทของสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์

5.3.1 สมรรถภาพด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์

5.3.2 สมรรถภาพด้านทักษะทางคณิตศาสตร์

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

6.1 งานวิจัยที่เกี่ยวของกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

6.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

6.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. กระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

1.1 ปรัชญาการสอนและหลักการสอนคณิตศาสตร์

ปรัชญาการสอนคณิตศาสตร์ หมายถึง หลักแห่งความรู้และความจริงที่จะยึดถือเพื่อเป็นแนวทางในการสอนคณิตศาสตร์ (ยุพิน พิพิธกุล, 2530: 48) ซึ่งประกอบด้วย

1) สอนให้นักเรียนคิดและค้นพบด้วยตนเอง ครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะและผู้อำนวยความสะดวก

2) สอนโดยยึดโครงสร้าง มีระบบระเบียบ แต่ควรใช้วิธีสอนหลายๆ วิธีอย่างมีการยืดหยุ่นให้เหมาะสมตามเนื้อหา

3) ไม่มุ่งสอนแต่เนื้อหาคณิตศาสตร์อย่างเดียว ควรจะสอดแทรกจริยธรรม ฝึกความมีวินัยไปในตัว ฝึกความเป็นเหตุเป็นผล

การสอนคณิตศาสตร์นั้นครูควรรู้หลักการสอนเพื่อช่วยให้การสอนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ยุพิน พิพิธกุล(2530: 49) และ อัมพร ม้าคนอง (2546: 8-10) ได้ให้หลักการสอนคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกันกล่าวโดยสรุปได้ดังนี้

1) สอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์หรือความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการคิดสรุปด้วยตนเอง และมีส่วนร่วมในการค้นคว้า สรุปกฎเกณฑ์ และทำกิจกรรมกับผู้อื่น

2) ใช้ความสนใจของนักเรียนเป็นจุดเริ่มต้น โดยใช้ความคิดและคำถามของนักเรียนในการนำเข้าสู่บทเรียนหรือเป็นประเด็นในการอภิปราย

3) สอนให้นักเรียนเห็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์และความต่อเนื่องของเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่องที่สัมพันธ์กันควรสอนไปพร้อมกัน เช่น เซตที่เท่ากันกับเซตที่เทียบเท่ากัน ยูเนียนกับอินเตอร์เซกชัน

4) สอนโดยการใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรมอธิบายนามธรรม หรือการทำสิ่งที่เป็นนามธรรมมากๆ ให้เป็นนามธรรมที่ง่ายขึ้น

5) สอนจากเรื่องง่ายไปสู่ยาก และไม่ควรสอนเรื่องที่ยากเกินความสามารถของนักเรียน

6) สอนผ่านประสาทสัมผัสหลายอย่าง ทั้งการดู การฟัง การเขียน การพูด และการปฏิบัติ

7) สอนโดยคำนึงถึงประสบการณ์เดิมและความรู้พื้นฐานของนักเรียน กิจกรรมใหม่ควรต่อเนื่องจากกิจกรรมเดิม

8) ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติในสิ่งที่ทำได้ และสอนให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ในห้องเรียนและคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน ความสัมพันธ์ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ โดยจัดโอกาสให้นักเรียนได้นำความคิดทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ อย่างกว้างขวาง

9) สอนโดยคำนึงว่าจะให้นักเรียนเรียนอะไร และเรียนอย่างไร นั่นคือต้องคำนึงถึงทั้งเนื้อหาวิชาและกระบวนการเรียน

10) ครูควรมีความกระตือรือร้นและตื่นตัวอยู่เสมอ สอนให้นักเรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์ สนุกสนานในการทำกิจกรรม

11) ครูควรศึกษาธรรมชาติและศักยภาพของนักเรียน เพื่อจัดกิจกรรมการสอนให้สอดคล้องกับนักเรียน

กล่าวได้ว่าการสอนคณิตศาสตร์นั้นนอกจากครูต้องเป็นผู้ที่มีความรู้ความชำนาญในเนื้อหาคณิตศาสตร์แล้วยังต้องมีความรู้ทางด้านปรัชญาการสอนและหลักการสอนคณิตศาสตร์เพื่อเป็นพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้แก่นักเรียน ทั้งปรัชญาและหลักการสอนคณิตศาสตร์ต่างให้ความสำคัญกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ จุดประสงค์ของการเรียนการสอน ลักษณะของกิจกรรม บทบาทของครู และบทบาทและความรู้ความสามารถของนักเรียนในกระบวนการเรียนรู้ ซึ่งทุกส่วนจะต้องมีความสอดคล้องและส่งเสริมซึ่งกันและกัน

1.2 การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

1.2.1 วิธีสอนคณิตศาสตร์

วิธีสอนคณิตศาสตร์นั้นมีหลายวิธีซึ่ง ยุพิน พิพิธกุล (2530) และอศิภรณ์ อินทรมณี (2546: 171-179) ได้เสนอเอาไว้สามารถสรุปได้ดังนี้

1) วิธีสอนแบบบรรยาย (Lecture method) เป็นวิธีสอนที่ครูเป็นผู้บอกนักเรียนเป็นส่วนใหญ่ มักใช้กับนักเรียนที่มีจำนวนมาก สำหรับวิชาคณิตศาสตร์นั้น วิธีสอนแบบบรรยายมักจะใช้กับการเล่าเรื่อง เล่าประวัติศาสตร์ เช่นประวัติของตัวเลข ประวัติของนักคณิตศาสตร์ โดยมีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนทราบเนื้อหาอย่างรวดเร็ว ให้เนื้อหาในเรื่องที่นักเรียนหาได้ยาก และเน้นลักษณะหรือความสำคัญของเนื้อหานั้นๆ การสอนบรรยายในวิชาคณิตศาสตร์นั้นครูควรดำเนินการดังนี้

1.1) เขียนแผนผังประกอบการบรรยาย เพราะจะทำให้ผู้ฟังเข้าใจยิ่งขึ้นและไม่เบื่อ

1.2) ใช้สื่อการเรียนการสอนประกอบ เช่น ถ้าเล่าเรื่องพีทาโกรัสอาจมีแผนที่โลกเพื่อให้นักเรียนรู้สถานที่เกิดของพีทาโกรัส โดยครูเล่าประวัติไปพร้อมกับชี้แผนที่ ก็จะทำให้นักเรียนสนใจ

1.3) ครูควรเล่าอย่างมีชีวิตชีวา ใช้ถ้อยคำและความหนักเบาของเสียงที่น่าฟัง

1.4) ครูควรเตรียมตัวและวางแผนลำดับขั้นของการเล่าล่วงหน้า การเล่าโดยไม่มีการเตรียมการนั้นจะทำให้เรื่องที่เล่าไม่น่าสนใจ

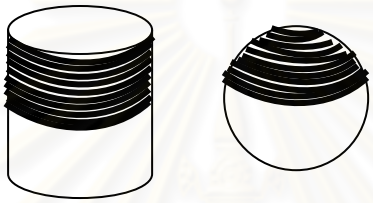
2) วิธีสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล (Expository method) เป็นวิธีการสอนที่ครูเป็นผู้บอกให้นักเรียนคิดตาม มีจุดประสงค์เพื่อให้ครูสามารถสอนเป็นกลุ่มใหญ่ได้ ให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาแจ่มแจ้งในเรื่องที่นักเรียนไม่มีความรู้ และให้นักเรียนรู้กฎ หรือสูตรในเวลาอันรวดเร็ว วิธีสอนบรรยายและแสดงเหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์นั้นครูก็จะบรรยายและแสดงเหตุผล ในขณะที่ครูอธิบายนั้นครูก็จะพยายามวิเคราะห์ ตีความ ชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจ แล้วครูก็จะสรุปด้วยตนเอง นักเรียนจะเป็นผู้ฟังเป็นส่วนใหญ่ การทำกิจกรรมการเรียนการสอนเน้นครูเป็นสำคัญ นักเรียนไม่ค่อยมีโอกาสเข้าร่วมกิจกรรมมากนัก นอกจากตอบคำถามจากครูและซักถามเรื่องที่ยังไม่เข้าใจเท่านั้น วิธีสอนนี้ครูใช้สื่อประกอบการเรียนการสอนโดยการใช้ให้ดูและอธิบายสิ่งที่ต้องการ และหากเป็นการสอนเกี่ยวกับกฎ หรือสูตร ครูจะบอกวิธีการนำไปใช้โดยการยกตัวอย่างประกอบ เมื่ออธิบายจนนักเรียนเข้าใจแล้วจึงให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ถ้านักเรียนทำได้แสดงว่าเข้าใจ

3) วิธีสอนแบบใช้คำถาม (Question method) เป็นวิธีการสอนที่มุ่งให้ความรู้แก่นักเรียนโดยการถาม - ตอบ และให้ความคิดไปทีละน้อย จนนักเรียนสามารถสรุปได้ มีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนรู้จักฟังและคิดตามด้วยเหตุผล ให้นักเรียนรู้จักลำดับขั้นความคิด ให้

นักเรียนสามารถสรุปบทเรียนได้ด้วยตนเอง ให้นักเรียนสนใจในการเรียน เพราะจะต้องตั้งใจฟังคำถามและคิดตอบในขณะเดียวกัน และให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาอย่างรวดเร็ว

4) วิธีสอนแบบสาธิต (Demonstration method) หมายถึงการแสดงให้นักเรียนดู ครูจะให้ความรู้แก่นักเรียนโดยใช้สื่อการเรียนการสอนที่เป็นรูปธรรม และใช้คำถามประกอบ นักเรียนจะได้ดูสื่อจากการเรียนการสอนนั้น พร้อมทั้งคิดตามและสามารถสรุปมโนทัศน์ได้ มีจุดประสงค์เพื่อใช้สื่อการเรียนการสอนแสดงให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนยิ่งขึ้น ให้นักเรียนมองเห็นแนวทางและมโนทัศน์ที่สำคัญ และนำไปสู่ข้อสรุปได้ และใช้รูปธรรมอธิบายนามธรรม

ตัวอย่าง การสอนเรื่องการหาพื้นที่ผิวของทรงกลม



ใช้ทรงกลมและทรงกระบอกที่มีความสูงเท่ากัน และทรงกลมบรรจุในทรงกระบอกได้พอดี ใช้ด้ายเส้นโตๆ พันครึ่งหนึ่งของทรงกระบอกและทรงกลม คลี่ด้ายออกมาวัดความยาวจะได้ความยาวเท่ากัน

$\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ผิวทรงกลม = $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก

พื้นที่ผิวทรงกลม = พื้นที่ผิวทรงกระบอก

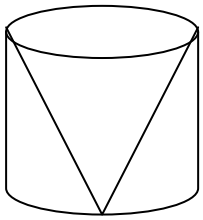
พื้นที่ผิวทรงกลม = $2\pi rh$

$= 2\pi r \times 2r$

$= 4\pi r^2$

5) วิธีสอนแบบทดลอง(Experimental method) เป็นวิธีการสอนที่มุ่งให้นักเรียนเรียนโดยการกระทำหรือโดยการสังเกต เป็นการนำรูปธรรมมาอธิบายนามธรรม นักเรียนจะต้องค้นหาข้อสรุปด้วยตนเอง โดยอาจทดลองแบบรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มก็ได้ ขึ้นอยู่กับเนื้อหาและความเหมาะสม มีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนได้ทดลอง และค้นหาข้อสรุปด้วยตนเอง ฝึกให้นักเรียนรู้จักทำงานกลุ่มด้วยการทดลองร่วมกัน ฝึกให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกตและรู้จักบันทึกผล และฝึกการทำงานร่วมกันแบบประชาธิปไตยเมื่อทดลองเป็นกลุ่ม

ตัวอย่าง การสอนเรื่องการหาปริมาตรของกรวยกลม



วัสดุ 1. ทรงกระบอกและกรวยกลม ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากัน สูงเท่ากัน

2. ทราย

กิจกรรม 1. ตวงทรายใส่กรวยกลมให้เต็ม แล้วเทลงในทรงกระบอกจนเต็ม บันทึกจำนวนครั้งในการเท

2. จากผลการทดลองสรุปได้ว่า

ปริมาตรกรวยกลม = $\frac{1}{3}$ ปริมาตรทรงกระบอก

= $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

6) วิธีสอนแบบอภิปราย (Discussion method) เป็นวิธีการสอนที่มุ่งให้นักเรียนทำงานเป็นกลุ่ม นักเรียนจะรวมพลังความคิดเพื่อพิจารณาปัญหา ช่วยกันหาข้อเท็จจริง หาเหตุผล แล้วร่วมกันตอบปัญหา วิธีสอบแบบอภิปรายนี้จะฝึกให้นักเรียนกล้าแสดงออก ฝึกการใช้เหตุผล การฟังที่ดี ให้เป็นคนมีระเบียบวินัย ตลอดจนมีความอดทนที่จะฟังความคิดเห็นของผู้อื่น และฝึกการทำงานร่วมกันแบบประชาธิปไตย มีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ฝึกให้นักเรียนได้แสดงออกตามแนวประชาธิปไตย ฝึกให้นักเรียนเป็นผู้พูดและผู้ฟังที่ดี ฝึกให้นักเรียนได้คิดด้วยเหตุผลอย่างรอบคอบและรู้จักฟังความคิดของผู้อื่น และฝึกให้นักเรียนรู้จักใช้วิจารณญาณและรู้จักฟังความคิดของผู้อื่นด้วยเหตุผล

ตัวอย่าง การสอนเรื่องประโยคภาษาและประโยคสัญลักษณ์

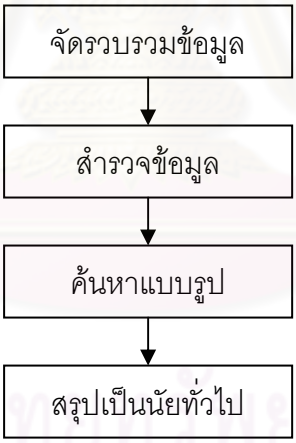
- ครูแจกกระดาษที่มีตารางแสดงตัวอย่างประโยคภาษาและประโยคสัญลักษณ์ให้นักเรียนทุกคน แล้วให้นักเรียนอภิปรายและยกตัวอย่างประโยคภาษาและประโยคสัญลักษณ์ อาจแบ่งเป็นกลุ่มย่อย หรือทำพร้อมกันทั้งชั้น

ตารางที่ 1 ประโยคภาษาและประโยคสัญลักษณ์

ข้อ	ประโยคภาษา	ประโยคสัญลักษณ์
1	ศูนย์น้อยกว่าสาม	$0 < 3$
2		
3		
4		
5		

- ครูตรวจสอบผลงานที่นักเรียนอภิปราย

7) วิธีสอนแบบอุปนัย(Inductive method) เป็นวิธีการสอนที่ครูจะยกตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่างภายใต้เงื่อนไขหรือสถานการณ์แบบหนึ่ง เพื่อให้นักเรียนเห็นรูปแบบเมื่อนักเรียนใช้การสังเกตเปรียบเทียบดูสิ่งที่มีลักษณะร่วมกัน หรือความสัมพันธ์ทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น ก็จะสามารถนำไปสู่ข้อสรุปได้ และมักจะตามด้วยวิธีสอนแบบนิรนัย มีลำดับขั้นตอนของวิธีสอนดังนี้



แผนภูมิที่ 1 ขั้นตอนของวิธีสอนแบบอุปนัย

วิธีสอนแบบอุปนัยมีจุดประสงค์เพื่อช่วยให้ค้นพบกฎเกณฑ์ที่สำคัญด้วยการสังเกตตัวอย่างที่มีจำนวนมากพอ แล้วกำหนดนัยทั่วไป ช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจอย่างแจ่มแจ้ง และรู้จักสัมพันธ์ความคิด ช่วยให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต รู้จักคิดและไตร่ตรองด้วยเหตุผล และหาข้อสรุปด้วยตนเอง

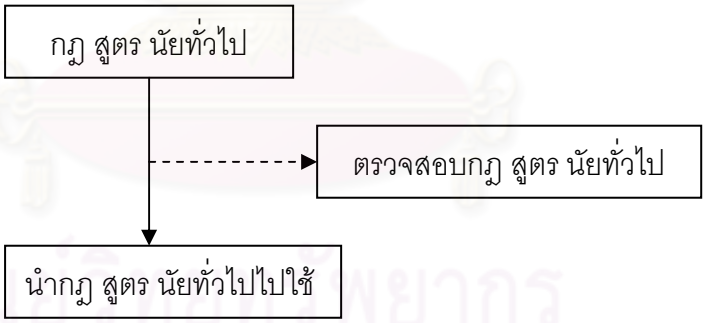
ตัวอย่าง การสอนเรื่องการหาผลคูณของเลขยกกำลัง

ตารางที่ 2 ผลคูณของเลขยกกำลัง

ข้อ	การคูณเลขยกกำลัง	เขียนการคูณในรูปการกระจาย	เขียนการคูณในรูปการกระจายใหม่	ผลคูณ	ผลบวกของเลขชี้กำลัง
1	$2^2 \times 2^3$	(2×2)×(2×2×2)	2×2×2×2×2	2^5	2+3 =5
2	$3^3 \times 3^4$	(3×3×3)×(3×3×3×3)	3×3×3×3×3×3×3	3^7	3+4=7
3	$5^4 \times 5^2$				
4	$8^6 \times 8^5$				
…					
10	$a^n \times a^m$				

ดังนั้น $a^m \times a^n = a^{m+n}$

8) วิธีสอนแบบนิรนัย (Deductive method) เป็นวิธีการสอนที่ครูนำกฎ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎี หรือข้อตกลงที่เป็นที่ยอมรับว่าเป็นความจริงนำมาใช้เพื่อนำสู่ข้อสรุปเรื่องราวหนึ่งๆ ที่มีเงื่อนไขสอดคล้องกับกฎ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎี หรือข้อตกลงนั้นๆ แล้วเกิดข้อสรุปอันใหม่ขึ้น มีลำดับขั้นตอนของวิธีสอนดังนี้



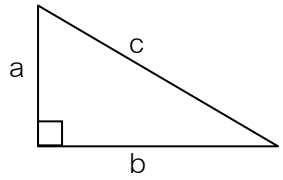
แผนภูมิที่ 2 ขั้นตอนของวิธีสอนแบบนิรนัย

วิธีสอนแบบนิรนัยใช้สอนเมื่อต้องการแก้ปัญหายากๆ โดยใช้กฎ สูตร นิยามที่เคยเรียนมาแล้ว โดยนักเรียนจะตัดสินเรื่องใดเรื่องหนึ่งได้จะต้องพิสูจน์ความจริง หรือวิเคราะห์ให้เสร็จสิ้นเสียก่อน

ตัวอย่าง การสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

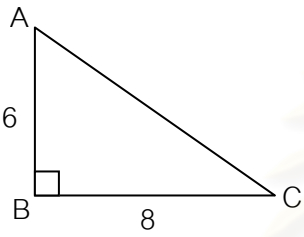
กฎ สูตร นัยทั่วไป : ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้าม มุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

ตรวจสอบกฎ สูตร นัยทั่วไป : ครูเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้าน a ซม. b ซม. และ c ซม. แล้วหาพื้นที่พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากแล้วหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากกล่าว



ได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

นำกฎ สูตร นัยทั่วไปไปใช้ : ครูกำหนดโจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 6 หน่วย ด้าน BC ยาว 8 หน่วย ด้าน AB ยาวเท่าใด



วิธีทำ จากสูตร $c^2 = a^2 + b^2$

ได้ว่า $AC^2 = AB^2 + AC^2$

$AC^2 = 8^2 + 6^2$

$= 64 + 36 = 100$

$AB = 10$

ดังนั้นด้าน AB ยาว 10 หน่วย

9) วิธีสอนแบบค้นพบ (Discovery method) เป็นวิธีการสอนที่ให้นักเรียนเจอปัญหาหรือสถานการณ์ แล้วให้นักเรียนเสาะแสวงหาวิธีแก้ปัญหานั้น ครูให้นักเรียนพิจารณาผลที่เกิดขึ้น ซึ่งครูมิได้คาดหวังว่านักเรียนจะต้องค้นพบดังที่ครูต้องการเสมอไป แต่เป็นการเน้นกระบวนการค้นพบไม่ได้เน้นผลของการค้นพบ

หรือเป็นวิธีสอนที่เน้นไปที่นักเรียน ว่าต้องการให้ค้นพบอะไร เช่น กฎ สูตรหรือนิยาม นักเรียนจะสามารถสรุปมโนทัศน์หรือความคิดรวบยอดได้ การค้นพบแบบนี้จะค้นพบโดยวิธีสอนแบบใดก็ได้ เช่น การถามตอบ การสาธิต การทดลอง การอภิปราย ตลอดจนการอุปนัยและนิรนัย วิธีการใดที่สามารถทำให้นักเรียนสามารถสรุปหรือกำหนดนัยทั่วไปได้ก็เรียกว่าเป็นการค้นพบ

วิธีสอนแบบค้นพบมีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการในการค้นพบ และเกิดการคิดสร้างสรรค์ ให้นักเรียนรู้จักสังเกต เปรียบเทียบ และพิจารณาหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง และให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกัน เพื่อสามารถหาข้อสรุปได้ โดยครูมีแนวทางในการสอนให้นักเรียนค้นพบ 3 วิธี ดังนี้

9.1) นักเรียนค้นพบด้วยตนเอง

9.2) นักเรียนค้นพบภายใต้การแนะแนวทางของครู (Guided discovery) การค้นพบแบบนี้ครูจะเป็นผู้แนะแนวทาง เพราะถ้าปล่อยให้นักเรียนค้นด้วยตนเองก็จะทำให้เสียเวลามาก บางทีเป็นเรื่องที่ยากที่จะค้นพบด้วยตนเอง ดังนั้นครูจะแนะนำเล็กน้อยนักเรียนก็จะสามารถค้นคำตอบได้

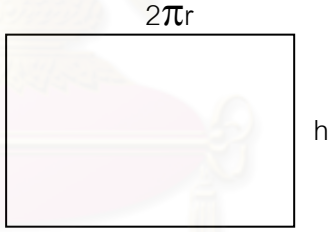
9.3) นักเรียนค้นพบเป็นรายบุคคลหรือเรียนเป็นคณะ เมื่อนักเรียนมาร่วมปรึกษาหารือกันก็จะเกิดการค้นพบได้ง่ายเข้า นักเรียนบางคนก็ชอบคิดคนเดียวก็ค้นพบได้

ตัวอย่าง การสอนเรื่องการหาพื้นที่ผิวรอบรูปของทรงกระบอก

กิจกรรม 1. ครูนำแกนกระดาษชะรำมาตัดแล้วคลี่ออก

2. ครูใช้คำถามว่าเส้นรอบวงมีสูตรว่าอย่างไร [นักเรียนตอบ $2\pi r$]

ครูกำหนดส่วนสูงของกระดาษให้เท่ากับ h



3. ครูใช้คำถามให้นักเรียนบอกสูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง × ความยาว

4. ครูให้นักเรียนสรุปสูตรพื้นที่ผิวรอบรูปของทรงกระบอก

พื้นที่ผิวรอบรูปของทรงกระบอก = $2\pi rh$

10) วิธีสอนแบบร่วมมือ (Cooperative learning) เป็นวิธีสอนที่ใช้การแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนชายและหญิงที่มีความสามารถต่างกันทั้งคนเก่ง ปานกลาง และอ่อน แล้วจัดกิจกรรมให้นักเรียนต้องพึ่งพากันเรียนรู้ โดยมีเทคนิคการจัดการเรียนการสอนแบบต่าง ๆ เช่น

(1) เทคนิคการพัฒนาบุคคลซึ่งร่วมกันทำงานเป็นหมู่คณะ (TAI) โดยครูจะสอนนักเรียนที่มีความสามารถในระดับเดียวกันจากลุ่มต่างๆ ขณะที่นักเรียนที่

เหลือในกลุ่มจะทำงานในกลุ่มของตนเองจากแบบฝึกหัดที่ได้รับมอบหมายโดยมีการช่วยเหลือกันในกลุ่ม ซึ่งประเมินผลทั้งเป็นกลุ่มและรายบุคคล

(2) เทคนิคการเรียนแบบกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD) เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่นักเรียนในกลุ่มช่วยเหลือซึ่งกันและกันในการเรียน และมีการทดสอบย่อยเพื่อประเมินการเรียนรู้และความก้าวหน้าของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้งเป็นกลุ่มและรายบุคคล

(3) เทคนิคการเรียนแบบกลุ่มการแข่งขัน (TAG) เป็นกิจกรรมเรียนการสอนที่นักเรียนช่วยเหลือกันและกันในกลุ่มย่อยเพื่อให้กลุ่มประสบผลสำเร็จตามเป้าที่กำหนดไว้ โดยเน้นเกมการแข่งขันตอบคำถาม โดยให้แต่ละกลุ่มเตรียมสมาชิกสำหรับการแข่งขันตอบปัญหาที่ครูกำหนดให้หรือเตรียมไว้แล้ว และดำเนินการแข่งขันเกมเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนเพื่อการเรียนรู้ และความสำเร็จของกลุ่มขึ้นกับความสามารถของแต่ละบุคคลเป็นสำคัญ

11) วิธีสอนโดยกระบวนการสร้างความคิดรวบยอด เป็นวิธีสอนที่ครูจัดกิจกรรมโดยใช้สิ่งเร้าที่เป็นตัวอย่างและไม่ใช่ตัวอย่าง ไปกระตุ้นนักเรียนให้เกิดการเรียนรู้ความคิดรวบยอดด้วยการสังเกต ซึ่งมีลำดับขั้นการสอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง เพื่อจำแนกความแตกต่างและหาลักษณะร่วม

ขั้นที่ 2 สรุปลักษณะร่วม

ขั้นที่ 3 ทดสอบ นำไปใช้

1.2.2 ทักษะการสอนคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้น เพื่อให้นักเรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ ครูจึงต้องเลือกใช้วิธีสอนหลายๆ วิธี โดยคำนึงถึงความเหมาะสมของเนื้อหา ความสามารถและความถนัดของครู ลักษณะของนักเรียน และทรัพยากรที่มี เป็นต้น นอกจากครูต้องรู้วิธีสอนตลอดจนกลวิธีแล้ว ครูยังต้องฝึกทักษะด้านต่างๆ เพิ่มเติมอีกเพื่อให้การสอนสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ทักษะที่ครูควรจะฝึกมีดังนี้ (ยุพิน พิพิธกุล, 2523: 175-222; อัมพร ม้าคนอง, 2546: 40-44)

1) ทักษะการนำเข้าสู่บทเรียน

การนำเข้าสูบทเรียนมีความสำคัญเนื่องจากเป็นการเตรียมความพร้อมให้นักเรียนสำหรับการเรียนเนื้อหาที่ครูตั้งใจจะสอนในแต่ละคาบ การนำเข้าสู่บทเรียนมีวิธีต่างๆ ตามเนื้อหาที่จะมาสอน เป็นต้นว่า การทบทวนความรู้เดิมที่เป็นพื้นฐานของความรู้ในคาบที่จะสอน เช่น การทบทวนสมบัติการเท่ากันก่อนการสอนแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว $2x - 4 = 6x + 5$

เป็นต้น การสนทนาซักถามด้วยการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของสิ่งที่นักเรียนพบในชีวิตประจำวันกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเรียนในห้องเรียน เช่น ควรซื้อเชือกที่ใช้ชักธงชาติของเสาธงโรงเรียนมีความยาวอย่างน้อยเท่าใด ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส การนำเข้าสู่บทเรียนจึงมีความสำคัญในลักษณะที่เป็นการทบทวนพื้นฐานเก่า ทำให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์หรือภาพรวมของสิ่งที่เรียนมาแล้วกับสิ่งที่กำลังจะเรียนรู้ใหม่ ตลอดจนความสัมพันธ์ของสิ่งที่เรียนกับการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน

การนำเข้าสู่บทเรียนควรมีลักษณะดังนี้

1.1) ทำก่อนการสอนเนื้อหาใหม่

1.2) ไม่ควรใช้เวลานานเกินไปหรือนำยืดยาวเกินไป

1.3) ครูไม่จำเป็นต้องเป็นผู้ทบทวนหรือผู้บอกนักเรียนเสมอไป แต่อาจใช้คำถามให้นักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของสิ่งที่นักเรียนเรียนรู้แล้วกับสิ่งใหม่ที่จะเรียน

1.4) ให้นักเรียนช่วยกันคิดช่วยกันอธิบายความรู้ที่เป็นพื้นฐานของเนื้อหาที่จะเรียน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนเองในการทบทวนความรู้เก่า และครูได้ประเมินว่านักเรียนมีความรู้เพียงพอต่อการเรียนเนื้อหาใหม่หรือไม่

1.5) ครูสร้างประเด็นปัญหาให้นักเรียนอภิปรายเพื่อหาวิธีแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาใหม่

2) ทักษะการสรุปบทเรียน

ทักษะการสรุปบทเรียนเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งของการสอนแต่ละคาบ เนื่องจากเป็นการสรุปสาระสำคัญของสิ่งที่สอนมาทั้งหมด และเป็นการทำให้นักเรียนพยายามสื่อสารสิ่งที่ตนเข้าใจออกมาให้ผู้อื่นรับทราบ ซึ่งบางครั้งนักเรียนที่เข้าใจเนื้อหาดีแต่อาจไม่สามารถสื่อสารออกมาเป็นภาษาพูดหรือภาษาเขียนให้ผู้อื่นเข้าใจได้ ครูจึงมีบทบาทเป็นผู้แนะนำว่าควรสรุปอะไรและสรุปอย่างไร การสรุปบทเรียนควรมีลักษณะดังนี้ คือ

1.1) การสรุปบทเรียนควรสรุปเป็นตอนๆ จากเนื้อหาย่อยๆ ในระหว่างการสอน เมื่อนักเรียนเกิดมโนทัศน์จากเรื่องที่สอนไปแล้ว เพื่อจะได้ใช้ข้อมูลนั้นสำหรับการสอนเนื้อหาย่อยในลำดับที่สูงขึ้น และเพื่อไม่ให้เป็นการสะสมสาระสำคัญไว้สรุปในตอนท้ายมากเกินไป ซึ่งอาจทำให้นักเรียนลืมบางส่วนได้

1.2) การสรุปบทเรียนควรให้นักเรียนเป็นผู้สรุป โดยครูเป็นผู้แนะแนวทางในการสรุปเพื่อที่นักเรียนจะได้ทราบว่าสิ่งที่ตนเข้าใจนั้นถูกต้องหรือไม่ และครูจะได้ทราบว่านักเรียนมีความเข้าใจสิ่งที่สอนมากน้อยเพียงใด

1.3) การสรุปบทเรียนเมื่อจบบทเรียนแล้วเป็นการทบทวนรวบยอดอีกครั้งหนึ่งว่าในคาบนั้นนักเรียนได้เรียนอะไรไปบ้าง มีกฎเกณฑ์อะไรที่ควรจะเข้าใจ และมีความเข้าใจถูกต้องหรือไม่ มีความเข้าใจมากน้อยเพียงใด ครูควรให้นักเรียนได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของบทสรุปย่อยๆ เอง ก่อนที่ครูจะสรุปรวมให้ภายหลัง หากเป็นทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม ครูไม่ควรสรุปสิ่งเหล่านั้นทันที แต่ควรรอให้นักเรียนใช้ภาษาของตนเองสรุปก่อน ครูจึงสรุปในภายหลัง

1.4) การสรุปบทเรียนไม่ควรทำเฉพาะกับการสอนเนื้อหาเท่านั้น การสอนโจทย์ปัญหา ขั้นตอนหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ ก็อาจมีการสรุปบทเรียนได้

วิธีการสรุปบทเรียน อาจทำได้หลายวิธี ดังนี้

- สรุปจากการอภิปรายและตอบคำถามของนักเรียน
- สรุปโดยการใช้สื่อการสอน
- สรุปด้วยเพลง กลอน หรือเกม

3) ทักษะการตั้งคำถาม

การตั้งคำถามเป็นเรื่องที่จำเป็นในทุกๆ บทเรียนคณิตศาสตร์ ในชั้นเรียนมีทั้งนักเรียนที่ถามครูเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจนยิ่งขึ้น และครูตั้งคำถามเพื่อตรวจสอบ ขยายความคิดและพัฒนาการเรียนของนักเรียน ครูควรคำนึงถึงคำถามที่ใช้ให้มีลักษณะดังต่อไปนี้

3.1) ครูต้องคิดคำถามล่วงหน้า พร้อมทั้งประมาณการคำตอบที่นักเรียนน่าจะตอบเพื่อเตรียมตัวอธิบายหรือแก้ไขหากนักเรียนเข้าใจไม่ถูกต้อง

3.2) ควรตั้งคำถามให้นักเรียนได้คิด มีการอภิปราย อธิบายคำตอบ หรือแสดงเหตุผล มากกว่าตั้งคำถามที่ต้องการเฉพาะคำตอบเพียงคำตอบเดียว

3.3) เมื่อถามนักเรียนไปแล้วครูควรสนใจฟังคำตอบของนักเรียน ให้ความสำคัญกับคำตอบของนักเรียน หากนักเรียนตอบไม่ถูก ครูควรใช้คำถามช่วยให้เกิดข้อคิด

3.4) ครูควรพยายามถามครั้งเดียว และหลีกเลี่ยงการซ้ำคำถามของครูและคำตอบซ้ำของนักเรียน เพื่อเป็นการฝึกวินัยการฟังที่ดีในขณะเดียวกันถ้าครูถามซ้ำอาจไปก่อกวนการคิดของนักเรียน

4) ทักษะการยกตัวอย่าง

การยกตัวอย่างในวิชาคณิตศาสตร์มีความสำคัญในการช่วยให้นักเรียนเห็นภาพของสิ่งที่ครูกำลังพูดถึงหรืออธิบายอยู่ ทำให้นักเรียนเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น ครูจะยกตัวอย่างได้ดีเพียงใดนั้นขึ้นอยู่กับความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่ ในการยกตัวอย่างครูควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

4.1) ควรยกตัวอย่างสถานการณ์ที่ใกล้ตัวนักเรียนหรือเกิดขึ้นกับนักเรียนและมีความสัมพันธ์กับเนื้อหาที่สอน

4.2) การยกตัวอย่างควรมีจุดมุ่งหมายชัดเจน เช่น เพื่อให้นักเรียนเข้าใจทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม เพื่อแสดงขั้นตอนการคำนวณ เพื่อให้เห็นการนำไปใช้ และต้องยกตัวอย่างทันที

4.3) เปิดโอกาสให้นักเรียนยกตัวอย่างเอง

4.4) จำนวนตัวอย่างที่ยกมาควรมีมากพอที่จะทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจชัดเจน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการยกตัวอย่างให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ในตัวอย่างและสรุปออกมาเป็นทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม

4.5) การยกตัวอย่างเปรียบเทียบเมื่อเรื่องที่สอนมีลักษณะเป็นคู่และต้องการให้เห็นความแตกต่าง เมื่อสอนอย่างหนึ่งแล้วก็ควรสอนอีกอย่างหนึ่งด้วย เช่น สอน ห.ร.ม. และ ค.ร.น. โดยการแยกแฟกเตอร์ก็ควรสอนไปพร้อมๆ กัน

4.6) ยกตัวอย่างที่ง่ายก่อนแล้วจึงยกตัวอย่างที่ยากขึ้นตามลำดับ โดยเฉพาะการยกตัวอย่างในการสอนมโนทัศน์ ควรยกตัวอย่างเป็นตัวเลขหรือจำนวนน้อยๆ เพื่อที่นักเรียนจะได้ให้ความสำคัญกับเนื้อหาสาระมากกว่าตัวเลขหรือจำนวน

ทั้งวิธีสอนและทักษะการสอนเป็นสิ่งสำคัญที่ต้องครูต้องฝึกฝนให้มีความชำนาญ เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์สัมฤทธิ์ผลอย่างรวดเร็ว ง่าย มีความสุขและสนุกสนานในการเรียนรู้ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์และสนใจเรียนมาขึ้น

1.2.3 การเรียนการสอนคณิตศาสตร์

Bell and others (1983 อ้างถึงใน Ernest, 2000: 4-8) ได้จำแนกสิ่งที่นักเรียนควรเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย ข้อเท็จจริง ทักษะ มโนทัศน์ การสร้างมโนทัศน์ โครงสร้างมโนทัศน์ การเรียนรู้กลวิธีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ การพัฒนาเจตคติ และความประทับใจต่อคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียดดังนี้

1) ข้อเท็จจริง คือหน่วยความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เล็กที่สุด เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ข้อเท็จจริงแต่ละหน่วยประกอบขึ้นเป็นตัวสาระการเรียนรู้ มีการเชื่อมโยงอย่างมีความหมาย ง่ายต่อการจำ จนกลายเป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างมโนทัศน์

2) ทักษะ คือการดำเนินการที่มีหลายขั้นตอน รวมถึงทักษะที่คุ้นเคยและทักษะที่ต้องฝึกบ่อยๆ เช่น การดำเนินการทางจำนวน เช่น การบวกในแนวตั้ง หรือการดำเนินการด้วยเครื่องหมายทางพีชคณิต เช่น การแก้สมการเชิงเส้น นักเรียนสามารถพัฒนาทักษะได้ด้วยเรียนรู้จากตัวอย่าง ด้วยการสังเกตตัวอย่างที่เคยทำ แล้วจึงปฏิบัติตาม หากเป็นตัวอย่างที่ยากก็ต้องมี

ฝึกซ้ำ นักเรียนมักเรียนรู้ทักษะคลาดเคลื่อน ซึ่งความคลาดเคลื่อนส่วนใหญ่มักเกิดจากการเรียนรู้ทักษะแค่บางส่วน ทำให้ทักษะบางส่วนขาดไปหรือรวมทักษะผิดพลาด ความคลาดเคลื่อนอีกส่วนมาจากการใช้กฎผิด เช่น $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{7}$ เนื่องจากนักเรียนใช้การบวกจำนวนเต็มแทนการบวกเศษส่วน

3) มโนทัศน์และโครงสร้างมโนทัศน์ มโนทัศน์เป็นสมบัติที่บอกความหมายของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง เช่น มโนทัศน์ของจำนวนลบคือจำนวนที่น้อยกว่าศูนย์ มโนทัศน์ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือรูปในระนาบที่มีด้านที่เท่ากัน 4 ด้าน และมุมฉาก 4 มุม การเรียนรู้เพียงชื่อจะเป็นการเรียนข้อเท็จจริงเท่านั้น แต่การเรียนรู้ความหมายของชื่อและการให้คำจำกัดความ จึงจะถือเป็นการเรียนรู้มโนทัศน์

โครงสร้างมโนทัศน์เป็นกลุ่มของมโนทัศน์และการเชื่อมโยงสัมพันธ์ระหว่างกัน ซึ่งมีความซับซ้อนและพัฒนามากขึ้นเมื่อนักเรียนเพิ่มเติมมโนทัศน์มากขึ้นและเชื่อมโยง มโนทัศน์เหล่านั้นผ่านการเรียนรู้ เช่น โครงสร้างมโนทัศน์เรื่องการกำหนดค่าประจำหลักของจำนวน การกำหนดค่าประจำหลักเป็นระบบทางจำนวนที่เราใช้ในการให้ค่าของตัวเลข เช่น การกำหนดค่าประจำหลักของ 9 จะได้ว่า 9 ในหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย และทศนิยมตำแหน่งที่หนึ่ง มีค่าเป็น 9 , 90, 900 และ 0.9 ตามตำแหน่งของศูนย์และจุดทศนิยมที่แสดงอยู่ ดังนั้นการคูณด้วย 10, 100, 1000 จึงหมายถึงการย้ายจำนวนเต็มไป 1, 2 หรือ 3 ตำแหน่งตามลำดับ และไม่มีจุดสิ้นสุดในการให้ค่าประจำหลักทั้งทางซ้ายและทางขวาของเส้นจำนวน ส่วนโครงสร้างมโนทัศน์เรื่องรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นการรู้ความสัมพันธ์ระหว่างรูปหลายเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว ความรู้ทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ที่นักเรียนเรียนในโรงเรียนถูกสร้างขึ้นตามโครงสร้างของมโนทัศน์ ข้อเท็จจริงและทักษะที่นักเรียนเรียนนั้นรวมอยู่ในโครงสร้างนี้แล้วหรือไม่ก็มีความเชื่อมโยงกันอยู่ ยิ่งนักเรียนมีความเชื่อมโยงระหว่างข้อเท็จจริง ทักษะและมโนทัศน์มาก นักเรียนก็จะสามารถจำและนำความรู้มาใช้ได้ง่ายขึ้น

4) กลวิธีทั่วไป เป็นวิธีการหรือกระบวนการที่เป็นแนวทางในการเลือกทักษะหรือความรู้เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาแต่ละขั้น ซึ่งถ้าปัญหาที่นักเรียนพบเหมือนกับที่เคยทำมาก่อน นักเรียนจะจำวิธีการแก้ปัญหานั้นได้ แต่ถ้าเป็นปัญหาที่เปลี่ยนไป นักเรียนจะไม่สามารถระลึกวิธีการแก้ปัญหาได้ ดังนั้นกลวิธีทั่วไปจึงมีประโยชน์อย่างมากเพราะนักเรียนจะใช้เป็นแนวทางต่างๆ ที่อาจนำไปสู่คำตอบ ปัญหาปลายเปิดและการสืบเสาะจะทำให้นักเรียนสร้างสรรค์วิธีการ

สำรวจเพื่อหาคำตอบและรูปแบบทางคณิตศาสตร์ กลวิธีทั่วไปที่สามารถนำไปใช้กับปัญหาที่ซับซ้อนมากๆ และการค้นหาแนวทางในการแก้ปัญหา มีดังนี้

4.1) การนำเสนอปัญหาด้วยการวาดแผนผัง

4.2) พยายามแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า โดยหวังว่าจะได้ข้อแนะนำวิธีการ

4.3) การสร้างตัวอย่าง

4.4) สร้างตารางผลลัพธ์ต่างๆ

4.5) ใส่ผลลัพธ์ในตารางเพื่อเป็นตัวแนะตามลำดับ

4.6) ค้นหาแบบรูปจากข้อมูลที่มี

4.7) คิดหาวิธีการที่ต่างออกไปและทดลองหาคำตอบ

4.8) ตรวจสอบคำตอบ

5) เจตคติ เจตคติต่อคณิตศาสตร์เป็นความรู้สึกและการตอบสนองของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งความชอบหรือไม่ชอบ ความเชื่อมั่นในการทำงานคณิตศาสตร์ เป็นต้น เจตคติต่อคณิตศาสตร์มีความสำคัญและเป็นจุดมุ่งหมายทั่วไปอย่างหนึ่งของการสอนคณิตศาสตร์ การมีเจตคติทางบวกนำไปสู่ความพยายามและการบรรลุความสำเร็จได้มากขึ้น

6) ความประทับใจ ความประทับใจในวิชาคณิตศาสตร์สัมพันธ์กับความเข้าใจภาพรวมทางคณิตศาสตร์ การตระหนักรู้ในความเป็นคณิตศาสตร์ในภาพรวม ความเข้าใจในคุณค่าและบทบาทของคณิตศาสตร์ต่อสังคม

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ, 2544: 2-5) นั้นเมื่อนักเรียนเรียนจบกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์แล้ว นักเรียนต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาคุณภาพชีวิตตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น และต้องมีความสมดุลระหว่างสาระทางด้านความรู้ ทักษะกระบวนการ ควบคู่กับคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยม สำหรับช่วงชั้นที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3 หลักสูตรมุ่งเน้นการศึกษาเพื่อสำรวจตรวจสอบความสามารถ และความถนัดของตนเอง สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่กำหนดให้เป็นมาตรฐานที่จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคน เมื่อเรียนจบนักเรียนควรมีความสามารถดังนี้

1) มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวน

จริง สามารถคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้

2) สามารถนึกภาพและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติจากภาพสองมิติ มีความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตร สามารถเลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่างๆ เกี่ยวกับความยาว พื้นที่และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้

3) มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้

4) มีความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับการแปลง (transformation) ทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน(translation) การสะท้อน(reflection) และการหมุน(rotation) และนำไปใช้ได้

5) สามารถวิเคราะห์แบบรูป สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถใช้สมการ อสมการ กราฟ หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ ในการแก้ปัญหา

6) มีความเข้าใจเกี่ยวกับค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อคำถาม กำหนดวิธีการศึกษาและเก็บรวบรวมข้อมูลที่เหมาะสมได้ สามารถนำเสนอข้อมูล รวมทั้งอ่าน แปลความหมายและวิเคราะห์ข้อมูลจากการนำเสนอต่างๆ สามารถใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ ตลอดจนเข้าใจถึงความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นได้จากการนำเสนอข้อมูลทางสถิติ

7) มีความเข้าใจเกี่ยวกับการสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์และประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์ต่างๆ ได้

8) มีความเข้าใจเกี่ยวกับการประมาณค่า และสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

9) มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลายและใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสม สามารถให้เหตุผล สื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ

เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตรครูจึงมีบทบาทความสำคัญเป็นอย่างมาก เพราะถ้าครูจัดการเรียนการสอนไม่ครอบคลุมวัตถุประสงค์นักเรียนก็จะได้แค่

ความรู้ความจำด้านเนื้อหาเท่านั้น ซึ่งเป็นแค่ส่วนหนึ่งของเป้าหมายการเรียนรู้ ในการจัดการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับจุดประสงค์นั้นครูต้องคำนึงถึงการจัดกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนบรรลุความรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานที่กำหนดไว้ในหลักสูตร นอกจากนั้นต้องจัดกิจกรรมให้เชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาในหลักสูตรกับการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต้องยึดหลักการทั่วไปสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียนเพื่อเป็นแนวทางสำหรับครูและบุคคลที่เกี่ยวข้องใช้ตัดสินเนื้อหาและลักษณะต่างๆ ของคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยหลักการทั่วไป 6 ข้อ คือ (NCTM, 2000: 11)

1) ความเสมอภาค คณิตศาสตร์ศึกษาเพื่อความเชี่ยวชาญต้องมีความเสมอภาค มีความคาดหวังสูงและให้การส่งเสริมนักเรียนทุกคนอย่างเต็มที่

2) หลักสูตร ต้องเป็นมากกว่าการรวบรวมกิจกรรม โดยกิจกรรมในหลักสูตรต้องมีความสอดคล้องกัน เน้นคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและการเชื่อมต่อที่ดีระหว่างชั้นเรียน

3) การสอน การสอนคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพต้องเข้าใจสิ่งที่นักเรียนรู้และสิ่งที่นักเรียนต้องการเรียน จากนั้นจึงท้าทายและส่งเสริมนักเรียนให้เรียนรู้อย่างเต็มที่

4) การเรียน นักเรียนต้องเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ สร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเองจากประสบการณ์และความรู้เดิม

5) การประเมินผล การประเมินผลต้องส่งเสริมการเรียนคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและใช้ข้อมูลจากทั้งครูและนักเรียน

6) เทคโนโลยี เป็นสิ่งจำเป็นต่อการเรียนและการสอนคณิตศาสตร์ใช้ในการสอนและกระตุ้นการเรียนรู้ของนักเรียน

Cockcroft (1982 อ้างถึงใน Ernest, P., 2000: 13) ได้ศึกษาการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และให้ข้อเสนอแนะว่าในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้นควรประกอบด้วยโอกาสต่างๆ ดังนี้

1) การอธิบายโดยครู

2) การอภิปรายระหว่างครูกับนักเรียน และระหว่างนักเรียนกับนักเรียน

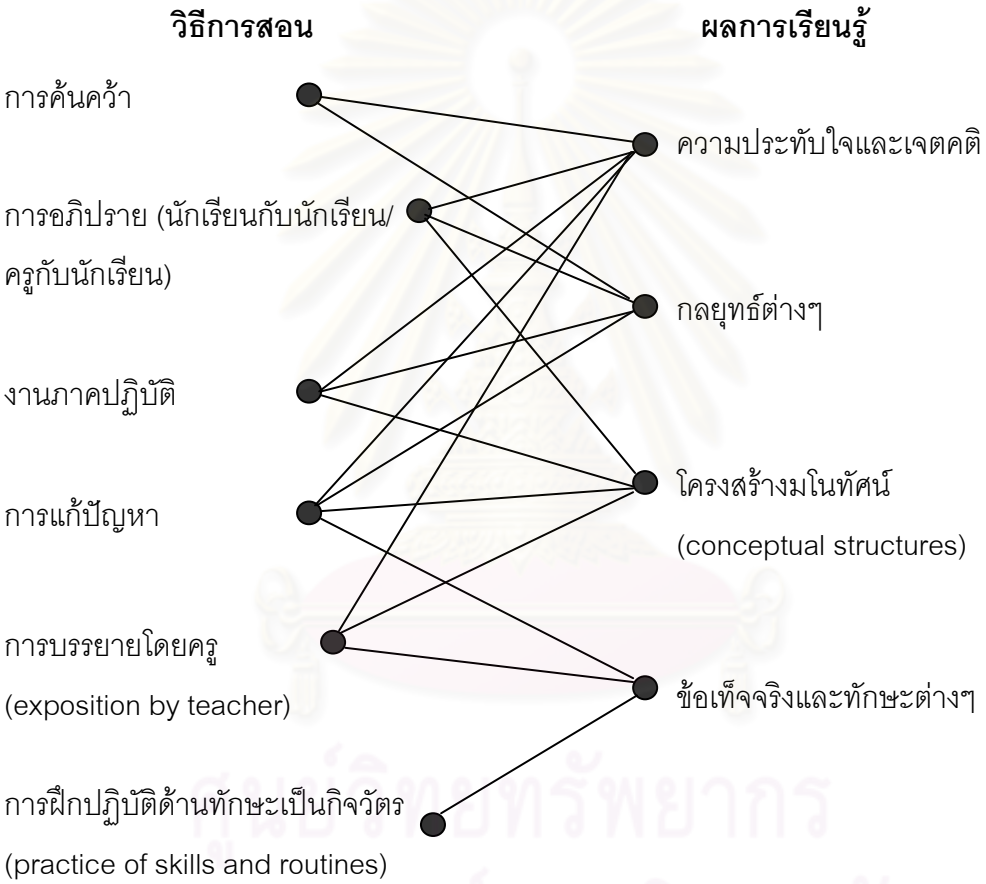
3) การมอบหมายงานภาคปฏิบัติที่เหมาะสม

4) การฝึกทักษะพื้นฐานให้มีความแข็งแกร่งและทำเป็นกิจวัตร

5) การแก้ปัญหา รวมทั้งการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน

6) การมอบหมายงานที่ต้องใช้การสืบเสาะ

การจัดการเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดและแก้ปัญหาด้วยตนเอง ได้ค้นคว้าจากสื่อและเทคโนโลยีต่างๆ โดยอิสระ ครูมีส่วนช่วยในการจัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของนักเรียนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ทำหน้าที่เป็นที่ปรึกษา ให้คำแนะนำและชี้แนะในข้อบกพร่องของนักเรียน จะช่วยให้นักเรียนพัฒนากลวิธีการแก้ปัญหาใหม่ๆ โครงสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งความรู้เรื่องข้อเท็จจริงและทักษะทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ซึ่งวิธีการสอนดังกล่าวมีอิทธิพลต่อผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ดังแสดงในแผนภูมิ



แผนภูมิที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีสอนและผลการเรียนรู้

(Cockcroft, 1982 อ้างถึงใน Ernest, 2000: 13)

1.2.4 การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะบรรลุตามเป้าหมายที่วางไว้หรือไม่นั้นต้องอาศัยการวัดและการประเมินผลจึงจะสามารถบอกถึงคุณภาพของนักเรียนได้ การประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่ช่วยให้ได้ข้อมูลสารสนเทศ ซึ่งแสดงถึงพัฒนาการและความก้าวหน้าในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้านต่างๆ คือ

1) ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น รวมทั้งการนำความรู้ดังกล่าวไปประยุกต์

2) ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอการเชื่อมโยง และการคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ซึ่งข้อมูลเหล่านี้ส่งเสริมให้ครูและนักเรียนทราบจุดเด่น จุดด้อย ด้านการสอนและการเรียนรู้ และเกิดแรงจูงใจที่จะพัฒนาตน โดยกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ (2545: 208-210) ได้ให้หลักการสำคัญในการประเมินผลดังนี้

1) การประเมินผลต้องกระทำอย่างต่อเนื่อง และควบคู่ไปกับกระบวนการเรียนการสอน

2) การประเมินผลต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์และเป้าหมายการเรียนรู้

3) การประเมินผลทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญเท่าเทียมกับการวัดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหา

4) การประเมินผลการเรียนรู้ต้องนำไปสู่ข้อมูลสารสนเทศเกี่ยวกับนักเรียนรอบด้าน

5) การประเมินผลการเรียนรู้ต้องเป็นกระบวนการที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการปรับปรุงความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตน

Wilson (1971: 660 – 685) ได้จำแนกพฤติกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ด้านพุทธิพิสัยเป็น 4 ระดับ ดังนี้

1) ความรู้ความจำเกี่ยวกับการคำนวณ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้เป็นการวัดเกี่ยวกับทักษะในการคิดคำนวณ ได้แก่ การวัดความรู้ ความจำแบบง่ายๆ เกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนได้เรียนผ่านมาแล้ว พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งออกเป็น 3 ระดับ คือ

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (knowledge of specific facts) หมายถึงการวัดความรู้ความจำเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาในรูปหรือแบบเดียวกับที่นักเรียนได้รับจากการเรียนการสอนมาก่อน รวมถึงความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนต้องนำมาใช้เสมอ

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of terminology) หมายถึงการบอกความหมายของคำศัพท์และนิยามต่างๆ ตามที่เคยเรียนมาแล้วโดยไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ และไม่ต้องใช้ความรู้อื่นมาช่วย

1.3 ความรู้ความจำเกี่ยวกับการใช้ขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ (Ability to carry out algorithm) หมายถึงการที่นักเรียนสามารถนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา

ดำเนินการตามกระบวนการของการคิดคำนวณในแบบที่เคยเรียนมาแล้ว ในขั้นนี้ไม่ได้มุ่งหมายให้นักเรียนคิดหากระบวนการคิดแบบใหม่ด้วยตนเอง

2) ความเข้าใจ (Comprehension) หมายถึงความสามารถในการนำความรู้ที่รู้มาแล้วมาสัมพันธ์กับโจทย์หรือปัญหาใหม่ ตลอดจนสามารถตีความ แปลความ สรุปความ และขยายความได้ การวัดพฤติกรรมระดับนี้แบ่งเป็น 6 ขั้น คือ

2.1) ความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ (Knowledge of concepts) หมายถึงความสามารถในการสรุปความหมายของสิ่งที่เรียนมาตามความเข้าใจของตนเอง รู้จักนำข้อเท็จจริงของเนื้อหาต่างๆ ที่เรียนรู้มาสัมพันธ์กันโดยการนำมาสรุปความหมายของสิ่งนั้นอีกครั้งหนึ่ง หรืออาจจะกล่าวได้ว่ามโนทัศน์เป็นกลุ่มของสิ่งที่เกี่ยวข้องกับความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริง

2.2) ความรู้เกี่ยวกับหลักการ กฎและการทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of principles, rules and generalization) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์และตัวปัญหา ซึ่งนักเรียนควรจะรู้หลังจากที่เรียนเรื่องนั้นจบแล้ว

2.3) ความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of mathematical structure) หมายถึงความสามารถในการมองเห็นส่วนประกอบย่อยของข้อความทางคณิตศาสตร์ตามลักษณะที่มุ่งหวัง ส่วนใหญ่เกี่ยวกับศัพท์และนิยามในคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

2.4) ความสามารถในการแปลงส่วนประกอบของปัญหาจากแบบหนึ่งไปอีกแบบหนึ่ง (Ability of transform problem elements from one mode to another) หมายถึงความสามารถในการเปลี่ยนข้อความเป็นสัญลักษณ์หรือสมการ ในขั้นนี้ไม่รวมถึงการคิดคำนวณหาคำตอบในสมการนั้น

2.5) ความสามารถในการดำเนินการทางเหตุผล (Ability of follow a line of reasoning) คณิตศาสตร์ส่วนมากอยู่ในรูปของการอนุมาน (Deductive format) ดังนั้นการจะเข้าใจบทความหรือผลงานทางคณิตศาสตร์จึงต้องอาศัยความสามารถในการดำเนินตามแนวเหตุผลขณะที่อ่าน

2.6) ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to read and interpret a mathematics problem) หมายถึง ความสามารถในการอ่านและตีความจากโจทย์ ความสามารถระดับนี้รวมทั้งการแปลความหมายจากกราฟหรือข้อมูลทางสถิติ ตลอดจนการแปลสมการหรือตัวเลขให้เป็นรูปภาพ

3) การนำไปใช้ (Application) เป็นการนำความรู้ กฎ หลักการ ข้อเท็จจริง ทฤษฎี ฯลฯ ที่เรียนมาแล้วไปแก้ปัญหาใหม่ให้สำเร็จ โดยโจทย์ปัญหาที่ใช้วัดในระดับ

นี้จะต้องไม่ใช่โจทย์ข้อเดิมที่อยู่ในแบบฝึกหัด หรือเคยทำมาแล้ว การวัดพฤติกรรมในระดับนี้แบ่งเป็น 4 ขั้นดังนี้

3.1) ความสามารถในการแก้ปัญหาธรรมดา (Ability to solve routine problem) ปัญหาธรรมดาหมายถึงปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่เคยเรียนมาแล้วในห้องเรียน โดยที่นักเรียนจะต้องจัดรูปของพฤติกรรมขั้นความเข้าใจและการใช้กระบวนการเพื่อที่จะแก้ปัญหา

3.2) ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to make comparisons) หมายถึงการให้นักเรียนนึกถึงรายละเอียดที่เกี่ยวข้องต่างๆ เช่น มโนทัศน์ กฎ ศัพท์ นิยาม ของข้อมูลสองชุด เพื่อค้นพบความสัมพันธ์เปรียบเทียบและนำมาสรุปในการตัดสินใจ

3.3) ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to analyze data) เป็นความสามารถในการแยกแยะ จำแนกปัญหาโจทย์ออกเป็นส่วนย่อยว่ามีความจำเป็นหรือไม่ในการนำไปใช้แก้ปัญหาโจทย์

3.4) ความสามารถในการมองเห็นรูปแบบ ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการสมมาตร (Ability to recognize patterns isomorphisms and symmetries) พฤติกรรมในขั้นนี้เกี่ยวกับการระลึกถึงข้อมูล แปลงปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล ระลึกถึงความสัมพันธ์ เพื่อให้นักเรียนหาสิ่งที่คุ้นเคยกับข้อมูลที่กำหนดให้หรือจากปัญหาที่กำหนดให้

4) การวิเคราะห์ (Analysis) พฤติกรรมขั้นนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในด้านพุทธิพิสัย พฤติกรรมในขั้นนี้ต้องใช้ความสามารถในระดับสูง จะเป็นการแก้ปัญหาที่แปลกกว่าธรรมดา หรือโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยมาก่อน ไม่เคยฝึกมาก่อน แต่ไม่ใช่โจทย์ที่อยู่นอกขอบข่ายเรื่องที่เคยเรียนมา ดังนั้นพฤติกรรมในขั้นนี้จึงครอบคลุมความรู้ความสามารถในสามขั้นที่แล้วมา รวมทั้งมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์เพื่อสามารถค้นพบวิธีการหรือแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหานั้นๆ ได้ พฤติกรรมในขั้นนี้แบ่งออกเป็น 5 ขั้นย่อย คือ

4.1) ความสามารถในการแก้ปัญหาที่แปลกกว่าธรรมดา (Ability to solve nonroutine problems) หมายถึงความสามารถในการถ่ายโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนมาไปสู่เนื้อหาใหม่ ซึ่งนักเรียนต้องแยกปัญหาออกเป็นส่วนย่อยๆ สำรวจว่ารู้อะไรบ้างในแต่ละตอน รวมทั้งการเรียนรู้สัญลักษณ์ใหม่เพื่อนำไปสู่คำตอบ การแก้ปัญหาลักษณะนี้ส่วนมาเป็นปัญหาสถานการณ์ด้วย จึงนำกระบวนการคิดคำนวณมาใช้โดยตรงไม่ได้ ต้องพยายามหาวิธีการใหม่

4.2) ความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์ (Ability to discover relationships) หมายถึงความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์ใหม่หรือนำสัญลักษณ์จากสิ่งที่กำหนดให้มาสร้างสูตรใหม่ด้วยตนเอง หรือเพื่อนำมาใช้ประโยชน์ในการหาคำตอบ

4.3) ความสามารถในการแสดงการพิสูจน์ (Ability to construct proofs) หมายถึง ความสามารถในการพิสูจน์ด้วยตนเองซึ่งไม่เหมือนกับความสามารถในการพิสูจน์ ขั้นนำไปใช้ โดยครูจะต้องอาศัยนิยามและทฤษฎีต่างๆ เข้ามาช่วยแก้ปัญหา

4.4) ความสามารถในการวิพากษ์วิจารณ์ (Ability to criticize proofs) หมายถึง สามารถวิพากษ์วิจารณ์ พิสูจน์ เป็นการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียนพิสูจน์ แต่เป็นความสามารถที่ยุ่งยากซับซ้อนกว่าการเขียนพิสูจน์ เพราะจะต้องใช้เหตุผลว่าการพิสูจน์นั้นถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดบ้าง

4.5) ความสามารถในการสร้างและแสดงความสมเหตุสมผลของการทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Ability to formulate and validate generalization) หมายถึงความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์และเขียนพิสูจน์ความสัมพันธ์ที่ค้นพบ

การประเมินการสอนนี้มีประโยชน์ทั้งสำหรับครูและนักเรียน ทำให้ครูรู้ว่านักเรียนผ่านการเรียนรู้ตามที่ตั้งไว้หรือไม่ ควรจะมีการช่วยเหลือหรือส่งเสริมในด้านใดแก่นักเรียนบ้างจึงจะทำให้นักเรียนได้พัฒนาตนเองเต็มศักยภาพ ส่วนนักเรียนจะได้รู้ความสามารถและความบกพร่องของตนเองเพื่อจะได้นำไปแก้ไข ปรับปรุงและพัฒนาให้ถูกทางต่อไป

1.3 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

Joyce and Weil (1996) ได้เสนอหลักการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนซึ่งนำมาประยุกต์ใช้ในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนในครั้งนี้ ไว้ดังนี้

1) รูปแบบการเรียนการสอนต้องมีทฤษฎีรองรับ เช่น ทฤษฎีจิตวิทยา

2) เมื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนแล้ว ก่อนนำไปใช้ต้องมีการวิจัยเพื่อทดสอบทฤษฎีและตรวจสอบคุณภาพในลักษณะของการนำไปใช้ในสถานการณ์จริง และนำข้อค้นพบมาปรับปรุงแก้ไขรูปแบบที่พัฒนาขึ้น

3) การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนอาจพัฒนาให้นำไปใช้ได้อย่างกว้างขวางหรือใช้เฉพาะวัตถุประสงค์อย่างใดอย่างหนึ่งก็ได้

4) การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนจะมีจุดมุ่งหมายหลักที่ใช้เป็นหลักในการพิจารณาเลือกใช้รูปแบบ นั่นคือ ถ้าผู้ใช้นำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ตรงกับจุดมุ่งหมายหลัก

ก็จะทำให้เกิดผลสูงสุด แต่ก็สามารถนำรูปแบบไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์อื่นๆ ได้ ถ้าพิจารณาเห็นว่าเหมาะสม แต่อาจมีผลของรูปแบบน้อยลง

2. การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

ความเข้าใจได้รับความสนใจและมีความสำคัญอย่างมากในการเรียนรู้ ได้มีนักการศึกษาให้ความหมายเกี่ยวกับความเข้าใจไว้หลายท่าน

Perkins and Blyth (1994 อ้างถึงใน North Central Regional Educational Laboratory, 2000) กล่าวว่า "ความเข้าใจ เป็นความสามารถที่จะถ่ายทอดความคิดหรือความรู้ที่มีต่อสิ่งต่างๆ ตามที่ความคิดขณะนั้นต้องการสื่อออกไป เช่น การอธิบายวิธีการค้นหาหลักฐานและตัวอย่างการให้หลักการทั่วไป การประยุกต์สิ่งใดสิ่งหนึ่ง การอุปมาอุปมัยเรื่องใดเรื่องหนึ่ง และการนำเสนอรูปแบบวิธีใหม่ต่อเรื่องใดเรื่องหนึ่ง" นอกจากนี้ Perkins (1992: 78) ได้ให้ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะแตกต่างกัน 3 แบบ คือ 1) ความเข้าใจเกิดขึ้นเมื่อนักเรียนได้รับข้อมูล โดยแสดงออกถึงความเข้าใจด้วยการปฏิบัติ 2) การปฏิบัติที่แสดงถึงความเข้าใจนั้นต้องใช้การคิดหลากหลาย 3) การทำความเข้าใจบางอย่างที่นักเรียนอาจไม่เข้าใจอย่างแท้จริง แต่ถือว่าได้มีการพยายามแล้ว

Booth (2002) กล่าวว่าความเข้าใจในเรื่องหนึ่งนั้นประกอบด้วยความสามารถ 4 ด้าน คือ ความสามารถในการทำสิ่งเดียวกันนั้นได้อีก ความสามารถในการทำสิ่งเดียวกันในสถานการณ์ที่แตกต่าง ความสามารถในการทำสิ่งเดียวกันด้วยวิธีการที่แตกต่าง และความสามารถในการปฏิบัติสิ่งต่างๆ อย่างแท้จริง

Sierpinska (1994) ได้ให้ความหมายของความเข้าใจว่า คือ ประสบการณ์ทางความคิดในเรื่องหนึ่ง โดยที่บุคคลเชื่อมโยงเรื่องนั้นกับเรื่องอื่น หรือความเข้าใจเป็นการให้สัญลักษณ์กับการให้ความหมายของเรื่องที่ทำความเข้าใจ ซึ่งกระบวนการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย การสำรวจตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่าง การค้นคว้าแบบรูป การใช้การหยั่งรู้ การให้เหตุผลแบบอุปนัย การสร้างแบบรูปทางคณิตศาสตร์ การตั้งปัญหา การคาดคะเนและการตรวจสอบ การพิสูจน์ การเตรียมข้อมูลเพื่อการนิรนัย การอภิปรายทั่วไป การเพิ่มเติมข้อสรุปหรือสัจพจน์ และการรับรู้สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ (Robinson, Robinson and Maceli, 2000: 116)

Skemp (1971: 65 อ้างถึงใน Simmons 1993: 98 , Clemson and Clemson, 1994:18) ได้จำแนกความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ชนิด คือ ความเข้าใจด้านการใช้งาน (instrumental understanding) คือกระบวนการเพื่อให้ได้คำตอบโดยไม่มีคำถามหรือข้อคัดค้าน ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ในทันที เกิดขึ้นจากการเรียนรู้ตามลักษณะนิสัย เป็นการเรียนรู้เกี่ยวกับกฎ เช่น กฎของการหารเศษส่วน การคูณจำนวนลบ เป็นต้น นักเรียนมีความรอบรู้ในวิธีการและสิ่งที่จะต้องทำเพื่อให้ได้คำตอบเท่านั้น แต่ไม่เข้าใจเหตุผลของกลวิธีที่ใช้ และความเข้าใจด้านความสัมพันธ์ (rational understanding) คือการประยุกต์ใช้ความรู้กับสถานการณ์ใหม่ๆ โดยนำมโนทัศน์ที่เกิดขึ้นจากการเรียนรู้ด้วยปัญญามาใช้ เป็นความเข้าใจและรอบรู้อย่างแท้จริง

จากความหมายดังกล่าวข้างบน สรุปได้ว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์หมายถึง ความสามารถในการถ่ายทอดความคิดและความรู้ที่เกิดจากการรับข้อมูลและประสบการณ์ทางความคิดโดยการให้สัญลักษณ์หรือให้ความหมายกับสิ่งหนึ่งๆ โดยความเข้าใจทางคณิตศาสตร์แสดงออกทางการปฏิบัติ การใช้งานและการประยุกต์ใช้ความรู้กับสถานการณ์ใหม่

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์สามารถจำแนกออกเป็น 2 ชนิดใหญ่ๆ คือ ความเข้าใจด้านมโนทัศน์ และความเข้าใจด้านการดำเนินการ (Byrnes, 1996: 155-156) ดังนี้

1) ความเข้าใจด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (mathematical conceptual understanding)

Schunk(1991: 176) ให้ความหมายของมโนทัศน์สรุปได้ว่า มโนทัศน์ คือ ข้อความที่กำหนดขึ้นมาเพื่ออธิบายถึงวัตถุ สัญลักษณ์หรือเหตุการณ์ที่มีลักษณะต่างๆ ที่เป็นลักษณะสำคัญ

Woolfolk (1995: 286) ให้ความหมายของมโนทัศน์ สรุปได้ว่า มโนทัศน์ คือ หมวดหมู่ข้อความชุดหนึ่งที่เกิดจากการจัดกลุ่มเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับแนวคิด วัตถุ หรือบุคคลที่มีลักษณะสำคัญคล้ายคลึงกัน

นาตยา ปิลันธนานนท์ (2542: 8 -12) ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์เป็นความรู้ ความเข้าใจในภาพรวมขององค์ความรู้ และข้อเท็จจริง การมีมโนทัศน์ต้องอธิบายหรือใช้ตัวอย่างประกอบเพื่อแสดงความเข้าใจในเรื่องนั้น คนเราจะเกิดมโนทัศน์ในเรื่องต่างๆ ได้ต้องมีความรู้ มีประสบการณ์ ได้เห็นของจริงหรือตัวอย่าง ถ้าความรู้หรือประสบการณ์มีมาก มโนทัศน์ก็กว้างขวางขึ้น ถ้าความรู้หรือประสบการณ์ผิดพลาด มโนทัศน์ก็ผิดพลาด

Donovan and Bransford (2005: 218) ได้ให้ความหมายของความเข้าใจด้านมโนทัศน์ คือความเข้าใจ(Comprehension) มโนทัศน์ การดำเนินการและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ โดยความเข้าใจด้านมโนทัศน์สะท้อนถึงความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลตามนิยามหรือตามความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ โดยนักเรียนจะแสดงความเข้าใจเมื่อนักเรียนได้สร้างตัวอย่าง ได้นำเสนอ หรือได้ปฏิบัติตามมโนทัศน์ด้วยวิธีการต่างๆ (College Board, 2002: 38)

Good (1959: 118) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ ความคิด ความเข้าใจเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ในด้านการคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวน การให้เหตุผลอย่างเป็นแบบแผน และคุณลักษณะภายนอกของสิ่งของ อันเกิดจากการสังเกตหรือได้รับประสบการณ์แล้วนำลักษณะเหล่านั้นมาประมวลเข้าด้วยกันเป็นข้อสรุปทางคณิตศาสตร์

Cooney, Davis และ Henderson (1983: 85) กล่าวไว้สรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เรียนรู้โดยสามารถสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาเป็นรูปนิยามหรือความหมายของเรื่องนั้น การมีมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชัน คือ นักเรียนสามารถบอกนิยามของฟังก์ชันได้

จากความหมายของมโนทัศน์ที่กล่าวมาข้างต้น พอสรุปได้ว่า มโนทัศน์ คือ ข้อความหรือคิดหรือความรู้ที่อธิบายถึงการจัดกลุ่มวัตถุ เหตุการณ์ หรือบุคคลที่มีลักษณะสำคัญร่วมกันหรือคล้ายคลึงกัน และ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ ข้อความหรือความรู้ที่สรุปจากลักษณะสำคัญร่วมกัน ซึ่งแสดงถึงความคิด ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า ความเข้าใจด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการถ่ายทอดความรู้และความคิดออกมาเป็นข้อความหรือสัญลักษณ์ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้วยการยกตัวอย่าง สร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ การคาดคะเนและการตรวจสอบ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ และการนำเสนอในรูปแบบต่างๆ

2) ความเข้าใจด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (mathematical procedural understanding)

Hasselbling and Moore (1996) ได้ให้ความหมายความเข้าใจด้านการดำเนินการ คือ ความสามารถในการใช้กฎ ขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ หรือการดำเนินการในการแก้ปัญหางานทางคณิตศาสตร์ ความรู้ด้านการดำเนินการประกอบด้วย 2 ส่วนคือ ความรู้เรื่องสัญลักษณ์ เช่น +, -, ×, ÷ เป็นต้น และความรู้เรื่องกฎเกณฑ์ในการทำงานทางคณิตศาสตร์ เช่น ขั้นตอนวิธีการทำงาน (Algorithms) เป็นต้น

นักเรียนสามารถแสดงถึงความเข้าใจการดำเนินการด้วยการเลือกใช้การดำเนินการที่ถูกต้องเหมาะสม การพิสูจน์ความถูกต้องของการดำเนินการด้วยการใช้แบบรูปหรือวิธีการทางสัญลักษณ์ หรือการปรับเปลี่ยนการดำเนินการให้เหมาะสมกับองค์ประกอบของปัญหา ซึ่งสะท้อนถึงความสามารถของนักเรียนในการเชื่อมโยงการดำเนินการกับปัญหาที่กำหนด การใช้วิธีการที่ถูกต้อง การสื่อความหมายของวิธีการ และการให้เหตุผลอธิบายกระบวนการที่ใช้แก้ปัญหา (College Board, 2002: 39)

จากความหมายของความเข้าใจด้านการดำเนินการข้างต้น สรุปได้ว่า ความเข้าใจด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการใช้กฎ ขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ความรู้เรื่องวิธีการทางสัญลักษณ์และกฎเกณฑ์ในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

Usiskin (2001 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547ก) ได้แบ่งความเข้าใจที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เป็น 4 ลักษณะ ดังนี้

1) ความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (skill – algorithm understanding) หรือที่เรียกว่าความเข้าใจด้านทักษะ เช่น ความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการคูณเศษส่วน นักเรียนจะแสดงความเข้าใจประเภทนี้เมื่อได้ลงมือทำงาน ความเข้าใจด้านทักษะนี้ประกอบด้วย

1.1) ความชำนาญในการตัดสินใจ การคิดในรูปแบบที่ง่ายกว่าการคิดในรูปแบบเดิม หรือใช้วิธีการที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน

1.2) ความสามารถในการตรวจสอบขั้นตอนวิธีการ หรือกระบวนการที่นำมาซึ่งผลลัพธ์

1.3) การสร้างขั้นตอนวิธีการหรือกระบวนการใหม่สำหรับการหาคำตอบ

2) ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติคณิตศาสตร์ (properties –mathematical understanding) เป็นความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาอธิบายกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ งานที่แสดงถึงความเข้าใจสมบัติคณิตศาสตร์นี้ ได้แก่

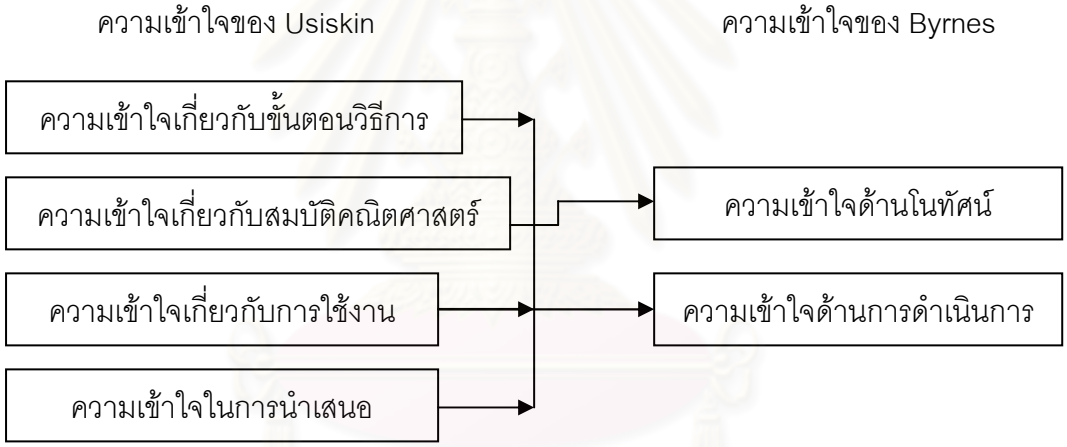
2.1) งานระดับล่าง เช่น การระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์

2.2 งานระดับกลาง เช่น การอธิบายความสำคัญของสมบัติ

2.3 งานระดับสูง เช่น การเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

3) ความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้งาน (use – application understanding) ซึ่งเป็นความเข้าใจที่แท้จริง เนื่องจากนักเรียนจะต้องรู้ว่าเมื่อใดควรใช้คณิตศาสตร์ จะใช้อะไร และใช้อย่างไร ความเข้าใจลักษณะนี้รวมการใช้งานของคณิตศาสตร์ทุกประเภท ตั้งแต่ในห้องเรียนจนถึงในชีวิตจริง

4) ความเข้าใจในการนำเสนอ (understanding through representation) ผู้ที่มีความเข้าใจด้านนี้จะต้องสามารถนำเสนอสิ่งที่ตนเข้าใจให้ผู้อื่นทราบด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งหรือหลายวิธี โดยจะใช้สื่อหรือวัสดุอุปกรณ์ใดประกอบก็ได้ และจะนำเสนอในรูปแบบที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมก็ได้ ทั้งนี้จะเน้นที่ความสามารถในการถ่ายทอดสิ่งที่ตนเข้าใจให้ผู้อื่นได้เข้าใจด้วย ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ลักษณะนี้ แต่ละลักษณะเป็นอิสระซึ่งกันและกัน ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจสามารถประกอบด้วยลักษณะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่มากกว่า 1 ลักษณะ ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมและประสบการณ์ของนักเรียน ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามการแบ่งของ Usiskin จะพบว่าความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ ความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้งาน และความเข้าใจเกี่ยวกับการนำเสนอ สอดคล้องกับความเข้าใจด้านการดำเนินการ และความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติสอดคล้องกับความเข้าใจด้านมโนทัศน์ ตามการจำแนกของ Byrnes ดังแสดงในแผนภูมิที่ 4



แผนภูมิที่ 4 ความสอดคล้องของประเภทความเข้าใจของ Usiskin และ Byrnes

2.2 ความสำคัญของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจถูกให้ความสำคัญในการจัดเรียนการสอนอย่างมาก โดย NCTM (2000: 20-22) ได้กำหนดให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ เนื่องจากความสำคัญของความเข้าใจด้านมโนทัศน์ของความรู้และการกระทำของคนที่มีความชำนาญทางคณิตศาสตร์ ความชำนาญทำให้สามารถใช้ความรู้ได้อย่างคล่องแคล่ว และประยุกต์ใช้กับสถานการณ์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องได้ นอกจากนั้นความเข้าใจด้านมโนทัศน์ยังเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของความชำนาญ เช่นเดียวกับความรู้เกี่ยวกับข้อเท็จจริงและการดำเนินการ ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้เกี่ยวกับข้อเท็จจริง ความชำนาญในการดำเนินการ และความเข้าใจด้านมโนทัศน์

ทำให้เกิดประโยชน์ในแนวทางที่หลากหลาย นักเรียนที่จำข้อเท็จจริงหรือการดำเนินการได้โดยปราศจากความเข้าใจมักจะไม่มั่นใจว่าเมื่อใดควรใช้ความรู้ของตน หรือจะใช้อย่างไร และการเรียนรู้จะไม่คงทน ส่วนการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจจะทำให้การเรียนรู้ง่ายขึ้น เมื่อนักเรียนเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้ที่มีอยู่ในโครงสร้างความคิดด้วยวิธีการที่มีความหมายจะทำให้คณิตศาสตร์มีความหมายหลากหลายแง่มุมและง่ายในการจำและนำไปใช้

ความเข้าใจด้านมโนทัศน์เป็นองค์ประกอบสำคัญของความรู้ที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหาและจัดการกับสถานการณ์ต่างๆ นอกจากนั้นความเข้าใจด้านมโนทัศน์ยังมีความสำคัญต่อการตัดสินใจในต่อการเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับข้อเท็จจริงหรือการดำเนินการในโลกปัจจุบันที่มีการใช้เทคโนโลยีมากขึ้น ซึ่งเป็นชีวิตร่วมสมัยที่มีอยู่ทุกหนทุกแห่ง ดังนั้นการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจจึงเป็นสิ่งจำเป็นที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถนำสิ่งที่ได้เรียนรู้ไปใช้แก้ปัญหาใหม่ๆ ที่นักเรียนจะต้องเผชิญอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ในอนาคต

2.3 การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

Carpenter and Lehrer (1999: 20–23 อ้างถึงใน Sheffield and Cruikshank, 2005: 24) ได้เสนอรูปแบบการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) การสร้างความสัมพันธ์ คือการเชื่อมโยงแนวคิดหรือกระบวนการใหม่กับแนวคิดที่เข้าใจแล้ว

2) การขยายและสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ คือ การพัฒนาโครงสร้างความรู้ที่ช่วยเชื่อมโยงแนวคิดและกระบวนการให้สัมพันธ์กับสิ่งที่รู้

3) การสะท้อนประสบการณ์ คือการทดสอบแนวคิดหรือกระบวนการที่นักเรียนเรียนรู้ และความสัมพันธ์ของแนวคิดหรือกระบวนการเหล่านั้นกับความรู้เดิม

4) การเชื่อมต่อสิ่งที่รู้ (articulating) เช่น การเขียน การอภิปราย หรือการแสดงภาพของแนวคิดที่นักเรียนได้สะท้อนออกมา

5) ทำความรู้คณิตศาสตร์ให้เป็นของตนเอง คือการสร้างความรู้จากกิจกรรมที่ทำ ดังนั้นนักเรียนจึงมีความเข้าใจและเป็นความรู้ของนักเรียนเอง

Hiebert and Carpenter (1992: 69-70) ได้อธิบายการสร้างความเข้าใจในรูปของการเพิ่มเครือข่ายและการปรับโครงสร้าง คือ

1) การเพิ่มเครือข่าย(adjoining) เกิดขึ้นครั้งแรกเมื่อนักเรียนมีความตระหนักในแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และนักเรียนพยายามทำความเข้าใจโดยการค้นหาวิธีการสัมพันธ์แนวคิดกับการแสดงออกทางปัญญาที่มีอยู่ ซึ่งทำให้เกิดการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดใหม่

กับการแสดงออกทางปัญญาที่ยังไม่เคยสัมพันธ์กันมาก่อน เช่น นักเรียนที่มีความเข้าใจเรื่องค่าประจำหลักของจำนวนเต็ม การบวกและการลบด้วยการเขียนในแนวตั้งให้ตัวเลขที่มีหลักเดียวกันอยู่ตรงกัน ซึ่งนักเรียนจะดำเนินการโดยนำตัวเลขที่อยู่ในหลักเดียวมารวมกันหรือลบกัน เมื่อนักเรียนได้รับปัญหาการบวกและการลบทศนิยม นักเรียนจะเชื่อมโยงความรู้เรื่องการดำเนินการในการบวกและการลบจำนวนเต็ม และใช้วิธีการเดียวกันในการหาคำตอบ เมื่อมีการเชื่อมโยงระหว่างการดำเนินการของจำนวนเต็มไปสู่การดำเนินการของทศนิยมจะทำให้เครือข่ายมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และการเพิ่มเครือข่ายเรื่องการบวกลอการิธึม log 4 + log 5 นักเรียนอาจเชื่อมโยงเรื่องลอการิธึมกับความรู้เรื่องสมบัติการแจกแจง ซึ่งอาจได้ผลลัพธ์เป็น log 4 + log 5 = log 9 ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงที่ไม่ถูกต้อง ดังนั้นนักเรียนอาจต้องใช้การเชื่อมโยงแบบอื่นเพื่อปรับความเข้าใจให้ถูกต้องต่อไป

2) การปรับโครงสร้าง (reorganization) คือการแสดงออกด้วยวิธีการใหม่ สร้างการเชื่อมโยงใหม่ และปรับปรุงหรือยกเลิกการเชื่อมโยงเก่า ซึ่งจะทำให้เครือข่ายการคิดมีความสมบูรณ์ขึ้น มีความเข้าใจที่มีเสถียรภาพมากขึ้น การปรับโครงสร้างเกิดขึ้นเมื่อนักเรียนสะท้อนความคิดและตระหนักในความไม่สอดคล้องกันกับแนวคิดที่มีอยู่เดิม เช่น ถ้านักเรียนรู้ในภายหลังว่า log 4 + log 5 = log 20 อาจจะเป็นสาเหตุในการปรับโครงสร้างเพื่อให้ความเข้าใจมีความสมบูรณ์ขึ้น

การพัฒนาความเข้าใจนั้นมีหลักการที่สำคัญดังนี้ (Fehr, 1972: 487-488)

1) ความเข้าใจทุกประเภทเริ่มจากประสบการณ์ที่มีความหมายร่วมกับบุคคลอื่น การลงมือปฏิบัติในสถานการณ์จริง

2) ในพัฒนาความเข้าใจต้องใช้เวลาเพื่อการพัฒนา

3) นักเรียนต้องมีอิสระในการทำกิจกรรม นั้นคือนักเรียนต้องได้ลงมือกระทำกับวัตถุ เพื่อให้รู้สิ่งที่กำลังกระทำคืออะไร ซึ่งจะเป็นการกระตุ้นและแนะแนวทางของการตั้งสมมติฐาน ซึ่งจะนำไปสู่ความเข้าใจ กิจกรรมที่ให้นักเรียนปฏิบัติต้องไม่เกินกำลังความสามารถของนักเรียน

4) ครูต้องให้คำแนะนำในการดำเนินการเพื่อให้นักเรียนคิดได้ โดยการตั้งคำถามต่างๆ เช่น สิ่งที่กำลังทำอยู่คืออะไร มีความหมายว่าอย่างไร มีวิธีการทำกิจกรรมอย่างไรบ้าง ซึ่งหลังจากนั้นนักเรียนอาจถามกลับมาว่า ทำไมต้องทำด้วยวิธีการดังกล่าว

5) ความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดใหม่กับแนวคิดเก่าที่นักเรียนเคยเรียนมาก่อนจะช่วยเปลี่ยนโครงสร้างใหม่ของทัศนะทางจิตใจของนักเรียนด้วยการยอมรับความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนมากขึ้นเข้าสู่โครงสร้างทางปัญญา ซึ่งจะทำให้มีความเข้าใจที่ลึกซึ้งขึ้น

6) เมื่อนักเรียนไม่สามารถให้คำนิยามหรือคำอธิบายที่ถูกต้องหรือดีพอ ครูต้องเป็นผู้ให้คำอธิบายแก่นักเรียนเนื่องจากคำนิยามที่ถูกต้องเป็นการบอกความหมายของคำนิยามนั้น และความหมายของคำนิยามเป็นการแสดงถึงสิ่งที่คำนิยามกล่าวถึง ให้นักเรียนตรวจสอบเพื่อทำความเข้าใจความหมายของคำนิยาม โดยเฉพาะคำสำคัญ ซึ่งจะนำไปสู่ความเข้าใจมโนทัศน์ที่ให้นิยามอย่างลึกซึ้งขึ้น

Talbert and McLaughlin (1993: 169 อ้างถึงใน Wallace and Louden, 2003) จำแนกหลักการสำคัญในการสอนเพื่อพัฒนาความเข้าใจไว้ 3 ข้อ ดังนี้

1) ความรู้ถูกสร้างขึ้นโดยนักเรียนและเกิดขึ้นจากความรู้ ทักษะ ค่านิยมและความเชื่อที่มีมาก่อน

2) ครูคือผู้แนะนำ ผู้มีส่วนร่วมในการสร้างความรู้ของนักเรียน

3) ห้องเรียนคือ สังคมของนักเรียน มีการร่วมแบ่งปันเป้าหมายและความมีมาตรฐานการเรียนรู้ มีบรรยากาศของความซื่อสัตย์ซึ่งกันและกัน มีค่านิยมทางพฤติกรรมที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีความกล้าและความพยายามในการเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนอย่างแท้จริง ดังนั้นครูควรจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความเข้าใจโดยคำนึงถึงข้อเสนอแนะ 6 ข้อ คือ (Perkins, 1993: 30-31)

1) ใช้การเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดเป็นหลัก ให้นักเรียนได้ปฏิบัติมากกว่าครู โดยให้นักเรียนได้ใช้แนวคิดที่เรียน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้แนวคิดนั้นด้วยแนวทางของตนเอง ซึ่งถ้าหากนักเรียนไม่ได้ใช้ความคิดในเรื่องที่เรียนในทันที นักเรียนจะไม่สามารถสร้างความเข้าใจที่จะนำไปสู่การปฏิบัติได้

2) เตรียมการประเมินผลที่ต่อเนื่อง ในประเมินผลการเรียนการสอนนั้นนักเรียนต้องทราบเกณฑ์ในการประเมิน ได้รับทราบผลการประเมินและการเสนอแนะเพื่อการเรียนที่ดีกว่าเดิม และมีโอกาสในการสะท้อนความเข้าใจสิ่งที่ได้เรียนรู้ ดังนั้นจึงควรประเมินการเรียนรู้ในกระบวนการเรียนรู้ตั้งแต่เริ่มบทเรียนจนสิ้นสุดบทเรียน ร่วมด้วยการสะท้อนกลับผลการเรียนรู้จากครู จากเพื่อน หรือจากตัวนักเรียนเอง โดยอาจใช้เกณฑ์จากครูหรือเกณฑ์ที่นักเรียนกำหนดขึ้นเอง

3) สนับสนุนการแสดงออกของนักเรียน เพราะการแสดงออกจะบ่งบอกถึงความเข้าใจในทางปฏิบัติของนักเรียน ครูต้องให้นักเรียนได้ใช้จินตนาการ การหยั่งรู้ และการแสดงออกที่ส่งเสริมความเข้าใจทางปฏิบัติ นอกจากนั้นครูต้องให้นักเรียนได้สร้างการแสดงออกด้วยตนเอง

4) เอาใจใส่ต่อปัจจัยการพัฒนา ตามทฤษฎีของนักจิตวิทยากลุ่มเพียเจต์ที่เชื่อว่าความเข้าใจของนักเรียนพัฒนาไปตามระดับพัฒนาการของโครงสร้างทางปัญญา เช่น เด็กที่ยังไม่ถึงระดับพัฒนาการที่เป็นแบบแผนจะไม่สามารถเข้าถึงมโนทัศน์ที่เกี่ยวกับตัวแปรและการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน และภายใต้ภาวะที่เหมาะสมนักเรียนสามารถเข้าใจได้มากกว่าที่คิด ส่วนนักจิตวิทยากลุ่มเพียเจต์ใหม่ได้เสนอความเข้าใจในมโนทัศน์ที่ซับซ้อนขึ้นอยู่กับโครงสร้างศูนย์กลางทางการคิด(central conceptual structure) การเรียนการสอนที่ดีจะช่วยนักเรียนบรรลุโครงสร้างศูนย์กลางทางการคิด เด็กที่อายุน้อยกว่าไม่สามารถเข้าใจมโนทัศน์ที่มีแนวคิด 2 หรือ 3 แนวคิด ดังนั้นครูที่สอนต้องเอาใจใส่ต่อปัจจัยเหล่านี้ แต่ต้องไม่ยึดอายุของนักเรียนในสิ่งที่นักเรียนควรเรียนหรือไม่ควรเรียนมากเกินไป

5) แนะนำวิธีการเรียนรู้เนื้อหาสาระแก่นักเรียน โดยการทำความเข้าใจมโนทัศน์และหลักการทั่วไปนั้นต้องไม่แยกออกจากกัน ในการสอนทั่วๆ ไปนักเรียนจะได้รับข้อเท็จจริง มโนทัศน์ และระเบียบวิธีการในวิชานั้นๆ แต่นักเรียนจะมีความสามารถในการพิสูจน์ อธิบาย แก้ปัญหา หรือศึกษาค้นคว้าเนื้อหาสาระวิชาน้อยมาก รูปแบบการคิดที่บอกถึงการปฏิบัติที่แสดงออกถึงความเข้าใจทำให้เข้าใจข้อเท็จจริง มโนทัศน์ และระเบียบวิธีการในวิธีการที่หลากหลายและมีนัยทั่วไปมากขึ้น ดังนั้นครูต้องสอนเนื้อหาอย่างมีโครงสร้างและมีความสมเหตุสมผล

6) สอนเพื่อการถ่ายโยง (teach for transfer) การสอนเพื่อการถ่ายโยงเป็นการสอนที่มีความสัมพันธ์กับการสอนเพื่อความเข้าใจ การปฏิบัติที่แสดงถึงความเข้าใจต้องใช้ถ่ายโยง เพราะการถ่ายโยงทำให้นักเรียนค้นหาความรู้ที่ผ่านมา การค้นหาข้อพิสูจน์ การอธิบาย การค้นหาตัวอย่าง ยิ่งกว่านั้น การปฏิบัติที่แสดงออกถึงความเข้าใจหลายอย่างอยู่นอกเหนือเนื้อหาสาระที่เรียน หรือนอกเหนือห้องเรียน ซึ่งเป็นการนำความรู้คณิตศาสตร์ในชั้นเรียนไปใช้ในชีวิตประจำวัน ดังนั้นครูต้องให้นักเรียนได้ปฏิบัติงานอย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจเนื้อหาที่เรียนไป

Talbert and McLaughlin (1993: 169 อ้างถึงใน Wallace and Louden, 2003) จำแนกหลักการสำคัญในการสอนเพื่อพัฒนาความเข้าใจไว้ 3 ข้อ ดังนี้

1) ความรู้ถูกสร้างขึ้นโดยนักเรียนและเกิดขึ้นจากความรู้ ทักษะ ค่านิยมและความเชื่อที่มีมาก่อน

2) ครูคือผู้แนะนำ ผู้มีส่วนร่วมในการสร้างความรู้ของนักเรียน

3) ห้องเรียนคือ สังคมของนักเรียนรู้ มีการร่วมแบ่งปันเป้าหมายและความมีมาตรฐาน มีบรรยากาศของความซื่อสัตย์ซึ่งกันและกัน มีการส่งเสริมให้นักเรียนมีความกล้าและความพยายามในการเรียนรู้ที่สำคัญ

การสอนเพื่อความเข้าใจมีข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมดังนี้ (California State Department of Education, 1987 อ้างถึงใน Parker, 1993: 16- 17)

1) ส่งเสริมการคิดและสอนโดยใช้ปัญหา สร้างสถานการณ์ และการตั้งคำถาม

2) ครูต้องสร้างสถานการณ์เหมาะสม แล้วตั้งคำถาม ฟังการแสดงความคิดเห็นของนักเรียนและให้ความสำคัญกับความสนใจของนักเรียนมากกว่าสอนมโนทัศน์ด้วยการอธิบาย

3) ครูต้องเตรียมประสบการณ์ที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนได้ค้นคว้าและพบกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์

4) ครูต้องเตรียมกิจกรรมที่สามารถทำความเข้าใจได้หลายระดับ เนื่องจากนักเรียนมีความสามารถแตกต่างกัน

5) ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนทำงานร่วมกันในกลุ่มขนาดเล็กเพื่อให้ได้เรียนรู้ทั้งจากครูและจากเพื่อน

6) เมื่อนักเรียนไม่สามารถประสบความสำเร็จตามเป้าหมาย ครูต้องช่วยนักเรียนด้วยการตั้งคำถามหรือให้ปัญหาใหม่ที่ง่ายขึ้น

7) เนื่องจากนักเรียนอาจตอบคำถามถูกแต่ยังมีความเข้าใจพื้นฐานที่ไม่ถูกต้อง ครูต้องให้ความสนใจกับสิ่งที่นักเรียนคิดและเข้าใจ ด้วยการตรวจสอบความคิดและข้อมูลต่างๆ

8) เมื่อครูนำเสนอกิจกรรม ครูต้องทำแนวคิดหรือมโนทัศน์ที่ต้องการสอนให้กระจ่าง

9) ครูควรส่งเสริมนิสัยการตั้งคำถามให้แก่นักเรียน

10) ครูต้องช่วยนักเรียนพัฒนาการแก้ปัญหา

11) ครูต้องใช้คำที่กระตุ้นให้นักเรียนสร้างความคิดและเผชิญกับเรื่องที่เข้าใจไม่สมบูรณ์ และส่งเสริมให้นักเรียนนำความเข้าใจของตนเองไปใช้ ให้ความสำคัญกับการพัฒนาภาษาทางคณิตศาสตร์ โดยในการสอนครูควรเน้นการพัฒนามโนทัศน์เป็นอันดับแรก จากนั้นบัญญัติภาษาที่จะใช้ และสุดท้ายจึงเขียนเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้อง

2.4 ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน

ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เป็นทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นโดยไพรีและไคเรน(Pirie and Kieren,1989,1991,1992,1994) โดยอธิบายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ว่ามีลักษณะเป็นพลวัต (dynamics) เป็นลำดับขั้นแต่ไม่เป็นเชิงเส้น และเป็นกระบวนการจัดการความรู้ของบุคคลที่มีความต่อเนื่องของการคิดตามระดับความเชี่ยวชาญ ดังนั้นในแต่ละระดับของความเข้าใจต่างๆ จึงประกอบไปด้วยระดับความเข้าใจที่ประสบความสำเร็จมาแล้ว

ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน ประกอบด้วยขั้นของการคิดที่อธิบายถึงกิจกรรมทางการคิดที่จำเป็นเพื่อการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาเฉพาะใดๆ ซึ่งประกอบด้วย 8 ระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1 เรียกว่า การรู้สิ่งเดิม (primitive knowing) เป็นการเข้าใจระดับแรกที่เป็นจุดเริ่มต้น แสดงถึงความเข้าใจที่ใช้เป็นพื้นฐานในการเริ่มการเรียนรู้ใหม่ แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นคณิตศาสตร์ในระดับต่ำ ความรู้ระดับนี้เป็นความรู้ที่ครูเชื่อว่านักเรียนทุกคนต้องมี ความรู้ในระดับนี้เป็นส่วนประกอบของระดับการรู้ในระดับต่อไป

ระดับที่ 2 เรียกว่า การสร้างภาพ (image making) ระดับนี้นักเรียนจะใช้ความสามารถที่มีอยู่กับเงื่อนไขหรือสถานการณ์ใหม่ โดยการแสดงออกด้วยการปฏิบัติ ซึ่งอาจเป็นการเขียนแสดงด้วยภาพ หรือด้วยวิธีอื่นๆ เช่น การพับกระดาษเพื่อแสดง “หนึ่งหน่วย” “ครึ่งหน่วย” “หนึ่งในสี่หน่วย” และการใช้คำหรือภาษาที่เกี่ยวข้อง

ระดับที่ 3 เรียกว่า การเกิดภาพในใจ (image having) เป็นขั้นที่นักเรียนเกิดภาพในใจเกี่ยวกับกิจกรรมที่ทำในขั้นก่อนๆ ซึ่งนักเรียนใช้ภาพในใจเหล่านี้ในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างของการเรียนรู้ในขั้นนี้คือ นักเรียนบอกได้ว่า เศษส่วนบอกถึงขนาดหรือความใหญ่ของส่วนที่ถูกแบ่งหรือพับ การเกิดภาพในใจนี้ทำให้ความเข้าใจคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นอิสระจากการแสดงออกด้วยการปฏิบัติ

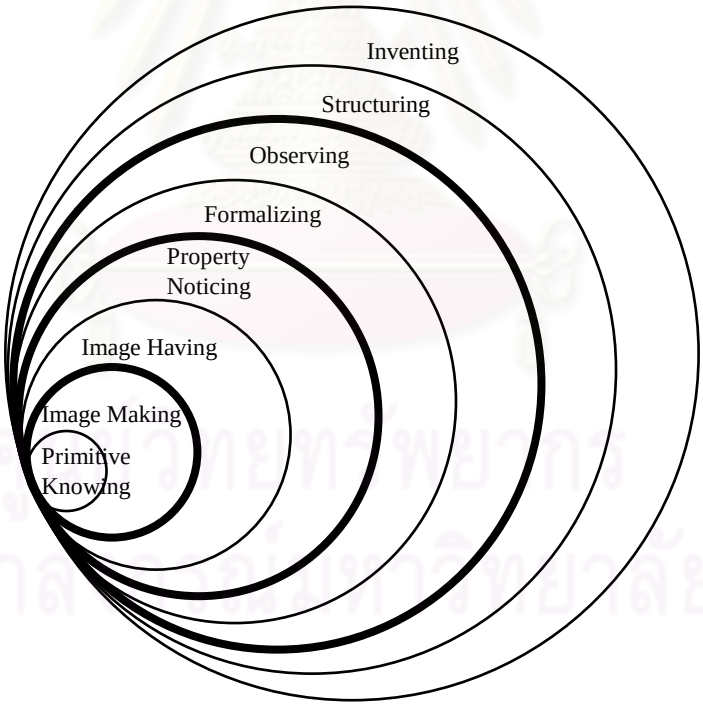
ระดับที่ 4 เรียกว่า การสังเกตสมบัติ (property noticing) นักเรียนสามารถตรวจสอบสมบัติเฉพาะและสมบัติที่เกี่ยวข้องของภาพทางความคิด รวมถึงการสังเกตความแตกต่าง การประสมประสาน หรือเชื่อมโยงระหว่างภาพต่างๆ การคาดคะเนว่าภาพเหล่านั้นเกิดขึ้นได้อย่างไร และจะจดบันทึกความสัมพันธ์เหล่านั้นได้อย่างไร เช่น การสังเกตว่าเศษส่วนแบ่งครึ่งเกิดจากการรวมกันของเศษส่วนแบ่งครึ่งอื่นๆ เป็นต้นว่า ½ เกิดจาก ¼ รวมกับ ¼ ซึ่ง ¼ เป็นเศษส่วนแบ่งครึ่งอีกประเภทหนึ่ง

ระดับที่ 5 เรียกว่า การจัดระเบียบ (formalizing) สมบัติที่สังเกตได้ ในขั้นนี้นักเรียนจะนำสมบัติที่สังเกตได้ในขั้นก่อนมาวิเคราะห์และจัดระเบียบเพื่อรวบรวมเป็นกฎหรือหลักการทั่วไป

ระดับที่ 6 เรียกว่า การสังเกต (observing) เป็นขั้นของการสังเกตสมบัติสิ่งที่ได้จัดระเบียบไปแล้ว เพื่อนำมาจัดระบบ หาข้อสรุป และจัดกระบวนการคิดส่วนบุคคล และมีความตระหนักในผลที่ตามมาของกระบวนการคิด เช่น การสังเกตเพื่อหาข้อสรุปว่า ไม่มีเศษส่วนที่แบ่งครึ่งที่เล็กที่สุด เนื่องจากจะสามารถแบ่งครึ่งไปได้เรื่อยๆ

ระดับที่ 7 เรียกว่า การสร้างโครงสร้าง (structuring) ในขั้นนี้ นักเรียนพยายามอธิบายสิ่งที่สังเกตได้อย่างมีโครงสร้างที่เป็นเหตุเป็นผล โดยการค้นหาความสัมพันธ์และสร้างโครงข่ายของความสัมพันธ์เหล่านั้น ระดับนี้เป็นระดับที่ความรู้ความสามารถถูกพิสูจน์ได้ เช่น พิสูจน์ว่าเศษส่วนแบ่งครึ่งมีสมบัติปิดภายใต้การบวก

ระดับที่ 8 เรียกว่า การสร้าง (inventing) ในขั้นนี้ นักเรียนมีความรู้อย่างเป็นโครงสร้างที่สมบูรณ์ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่แท้จริง และความเข้าใจนี้อาจนำมาซึ่งมโนทัศน์ใหม่



แผนภูมิที่ 5 รูปแบบการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน

จากแนวคิดของนักวิจัยหลายท่าน(Lawson and Chinnappan, 2000; Pirie and Kieren, 1994: 173; Pirie and Martin, 2000; Towers, Martin and Pirie, 2005; Davis, 1996;

Varela, Thompson and Rosch, 1991) สามารถสรุปลักษณะสำคัญของทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนได้ดังนี้

1) นักเรียนมีความเข้าใจโดยการสร้างประสบการณ์ด้วยตนเองและการสร้างความรู้ความเข้าใจใหม่

2) ความเข้าใจในระดับต่างๆ ที่อยู่ในรูปแบบของทฤษฎีไม่เพียงกำหนดระดับความเข้าใจเท่านั้น แต่เป็นการเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์ต่างๆ กับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้อย่างตลอดเวลาด้วย

3) ความเข้าใจเป็นกระบวนการที่ส่วนประกอบต่างๆ ภายในโครงสร้างทางปัญญาต้องมีการเชื่อมโยง ดังนั้นความเข้าใจจึงซับซ้อนมากกว่าแค่การได้คำตอบที่ถูกต้องเท่านั้น

4) เมื่อนักเรียนเผชิญกับปัญหาที่ไม่สามารถหาคำตอบได้ในแต่ละระดับความเข้าใจ นักเรียนจะเป็นผู้จัดกระทำเพื่อให้เกิดความเข้าใจในระดับที่สูงขึ้น ซึ่งจะไม่ใช่การแก้ปัญหาได้อย่างทันทีทันใด แต่นักเรียนจะต้องย้อนกลับไปทำความเข้าใจในระดับความเข้าใจก่อน ซึ่งการกลับไปสู่การทำความเข้าใจในระดับก่อนนี้เรียกว่า "การย้อนกลับ" (folding back) ซึ่งการย้อนกลับนี้เกิดขึ้นโครงสร้างที่มีอยู่ไม่เพียงพอที่จะใช้ในการแก้ปัญหา ดังนั้นนักเรียนจึงต้องทำความเข้าใจให้สมบูรณ์ขึ้น โดยการระลึกถึงกิจกรรมในระดับความข้าใจที่อยู่ภายใน จากนั้นก็สร้างความเข้าใจหรือมโนภาพใหม่ เพื่อนักเรียนใช้ความเข้าใจที่มีมาก่อนนั้นเป็นพื้นฐานเพื่อการเรียนรู้ในระดับต่อไป ซึ่งการย้อนกลับเป็นกระบวนการที่จำเป็นและเกิดขึ้นภายในตัวบุคคล หากไม่มีความสามารถในการย้อนกลับไปสู่มโนภาพที่ถูกต้องจะทำให้ความเข้าใจขาดการเชื่อมโยงและทำให้นักเรียนเชื่อมโยงความเข้าใจในระดับต่างๆ ไม่ได้ ปัจจัยที่ช่วยให้เกิดการย้อนกลับในลักษณะนี้มี 3 ประเภทใหญ่ๆ คือ

4.1) ปัจจัยเกี่ยวกับความถูกต้อง (validating intervention) ที่จะทำให้นักเรียนแสดงว่าตนเองคิดหรือทำอะไรอยู่ และทำไมคิดเช่นนั้น

4.2) ปัจจัยที่กระตุ้นการเรียนรู้ (provocative intervention) ซึ่งผลักดันให้นักเรียนขยายความเข้าใจสู่สถานการณ์ใหม่หรือระดับความเข้าใจด้านนอก

4.3) ปัจจัยที่เป็นเครื่องขัดขวาง (invocative intervention) ซึ่งเป็นอุปสรรคต่อความเข้าใจและทำให้นักเรียนต้องย้อนกลับไประดับความเข้าใจข้างในก่อน

ลักษณะที่ทำให้การย้อนกลับประสบความสำเร็จในการย้อนกลับแต่ละครั้งประกอบด้วย 3 ลักษณะ คือ

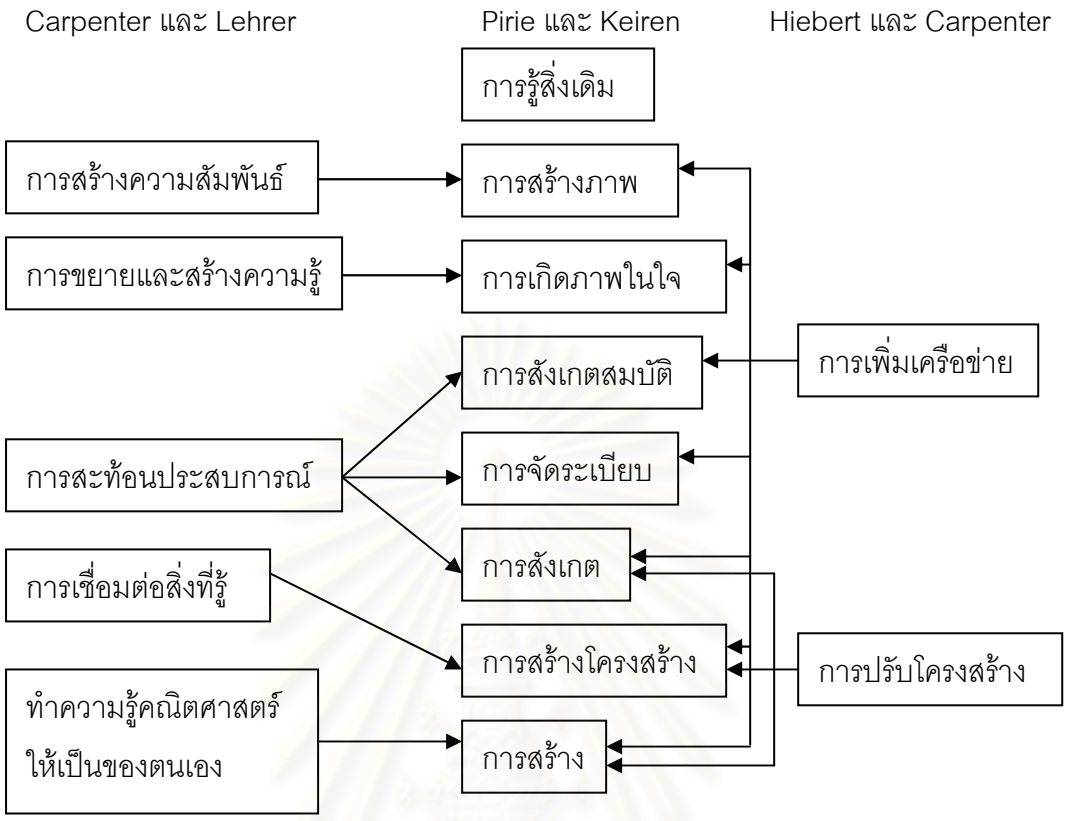
a) นักเรียนจำเป็นต้องรู้ข้อจำกัดในความเข้าใจปัจจุบันของตนเองว่าคืออะไร และต้องรู้ชนิดของกิจกรรมที่ต้องกระทำเมื่อมีการย้อนกลับ

b) กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นความเข้าใจชั้นในซึ่งนักเรียนย้อนกลับไปทำความเข้าใจอีกครั้งมีความเหมาะสมกับการเรียนรู้

c) ความสามารถของนักเรียนสัมพันธ์กับกิจกรรมของความเข้าใจชั้นใน และความเข้าใจใหม่สัมพันธ์กับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ แต่หากความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นถูกจัดโครงสร้างไม่ดีพอสำหรับการเรียกใช้ความรู้ที่เหมาะสมได้อย่างอัตโนมัติ จะทำให้นักเรียนขาดความสามารถในการระลึกความรู้ง่ายๆ อย่างทันทีทันใด ในการระลึกถึงความรู้ความเข้าใจเดิมที่มีอยู่นั้นแม้ว่านักเรียนไม่มีการปรับเปลี่ยนความเข้าใจล่าสุด แต่หากมีการค้นหาและทบทวนความเข้าใจในบริบทของปัญหาที่เผชิญ การระลึกถึงความรู้ความเข้าใจนี้ก็ส่งผลการย้อนกลับเพื่อทำความเข้าใจให้มีความเข้มข้นขึ้น นอกจากนั้นการที่นักเรียนทำการรวบรวมส่วนต่างๆ ของความเข้าใจด้วยตนเองนั้น จะทำให้นักเรียนรู้และตระหนักว่าตนมีความเข้าใจสิ่งที่ต้องใช้แต่ไม่สามารถเข้าถึงได้ในทันที ซึ่งทำให้นักเรียนต้องกลับไปทำความเข้าใจเรื่องที่เรียนใหม่และปรับโครงสร้างการรวบรวมข้อมูลของตนให้มีง่ายต่อการเรียกใช้

5) ส่งเสริมแนวทางการพึ่งพากันและกันของทุกๆ ส่วนในสภาพการเรียนการสอน การมีส่วนร่วมในการแบ่งปันการเรียนรู้และความเข้าใจ ทำให้การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่นักเรียนต้องปฏิบัติกิจกรรมร่วมกัน โดยมีความเชื่อพื้นฐานที่ว่าความเข้าใจยังคงถูกสร้างขึ้นจากนักเรียน บรรยากาศในห้องเรียน หลักสูตร นักเรียนคนอื่นๆ และการปฏิบัติงานของครู ดังนั้นในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ครูจึงต้องระงับใจไม่บอกความรู้แก่นักเรียนในทันทีทันใด และต้องระลึกอยู่เสมอว่าการก้าวไปสู่ความเข้าใจในขั้นต่อไปนั้น นักเรียนจำเป็นต้องย้อนกลับไปสู่ความเข้าใจก่อนหน้า

จากแนวคิดและทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจที่กล่าวมาข้างต้นเปรียบเทียบตามแนวคิดของ Carpenter and Lehrer, Pirie and Keiren และ Hiebert and Carpenter เป็นแผนภูมิได้ดังนี้



แผนภูมิที่ 6 การเปรียบเทียบการสร้างความเข้าใจตามแนวคิดของ Carpenter และ Lehrer, Pirie และ Keiren และ Hiebert และ Carpenter

จากการวิเคราะห์ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า ทฤษฎีนี้ให้ความสำคัญกับการสร้างความรู้รายบุคคล ส่งเสริมให้นักเรียนย้อนกลับไปทำความเข้าใจกับความรู้ความเข้าใจเดิม และเชื่อมโยงมโนทัศน์ต่างๆ เข้าด้วยกัน โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่มีการแบ่งปันและพึ่งพากันและกันในการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้

3. การสื่อสารทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

NCTM (1989: 214) เสนอว่าการสื่อสารเป็นความสามารถของนักเรียนในการใช้ศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงและทำความเข้าใจแนวคิด เป็นการผสมผสานความรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความเข้าใจของตนเอง โดยนักเรียนจะเข้าใจความคิดของตนเองอย่างลึกซึ้งเมื่อนักเรียนได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาของตนเอง ได้พิสูจน์ความมีเหตุผลของตนเองต่อคนอื่น หรือเมื่อนักเรียนได้ตั้งโจทย์หรือคำถาม ด้วยวิธีการ

สื่อสารที่หลากหลาย เช่น การเขียน การฟัง และการพูด ต่อมาในปี 2000 NCTM (60-62) ได้แยกการใช้สัญลักษณ์และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เพื่อสื่อแนวคิดออกเป็นการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นการสื่อสารจึงเป็นวิธีการแลกเปลี่ยนแนวคิดและการทำความเข้าใจให้กระจ่างชัดเจน

Baroody and Coslick (1993: 2-99) กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นภาษาหนึ่งที่นอกจากช่วยในการคิดแล้วยังเป็นเครื่องมือในค้นหาแบบรูป การแก้ปัญหา และใช้ในการสื่อสารแนวคิดต่างๆ ให้มีความชัดเจน ถูกต้อง และรัดกุม

Thomas (1991: 75) กล่าวว่า คณิตศาสตร์คือการสื่อสาร นักเรียนจำเป็นต้องมีการพัฒนาทักษะด้านการเขียน การพูด การฟังอย่างหลากหลายในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ การใช้สื่อต่างๆ เช่น วัตถุ รูปภาพ แผนภูมิ ล้วนเป็นส่วนสำคัญของการสร้างมโนทัศน์และสื่อสารทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสนำเสนอความคิดผ่านทางวัตถุ การวาดภาพและการสร้างแผนภูมิ โอกาสในการสื่อสารเหล่านี้จะช่วยให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการนำเสนอ การอภิปราย การอ่าน การเขียน และการฟัง ความรู้หรือแนวคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนรู้และการใช้คณิตศาสตร์

Prestege (2002: 26) กล่าวว่า ความสามารถในการสื่อสาร คือ การที่นักเรียนสามารถกำหนด อภิปราย อธิบายข้อมูลและข้อบันทึก และนำเสนอข้อค้นพบได้หลากหลายวัตถุประสงค์และหลากหลายวิธีการ การสื่อสารเกิดจากหลายวัตถุประสงค์ ทั้งการแสดงความคิดเห็นของตนเอง การทำความเข้าใจคำพูดและการเขียนของบุคคลอื่น และการทำให้ความคิดของตนเองมีความชัดเจน

ดังนั้นจากการพิจารณาความหมายของการสื่อสารดังกล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การใช้ภาษา ศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร นำเสนอ อภิปราย อธิบายแนวความคิดหรือหลักการทางคณิตศาสตร์ให้ผู้อื่นเข้าใจ ด้วยวิธีการที่หลากหลาย โดยการพูด การฟัง การอ่าน และการเขียน ได้อย่างถูกต้องและกระชับ

3.2 ความสำคัญของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ในการเรียนคณิตศาสตร์นักเรียนจะเกิดความเข้าใจเมื่อนักเรียนได้ปฏิบัติสิ่งต่างๆ ดังนี้ นำเสนอวิธีในการแก้ปัญหา อธิบายเหตุผลของตนเองต่อเพื่อนๆ หรือต่อครู ตั้งปัญหายากๆ เป็นต้น ซึ่งการปฏิบัติสิ่งเหล่านี้ต้องใช้การสื่อสารทั้งสิ้น การสื่อสารช่วยให้นักเรียนเรียนรู้มโนทัศน์

ใหม่ในขณะที่ลงมือปฏิบัติกิจกรรม วาดภาพ ใช้สื่ออุปกรณ์ ช่วยในการอธิบายการคำนวณ ใช้แผนผัง เขียนและใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

Mumme and Shepherd (1993: 7-11) ได้เสนอประโยชน์ของการสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) การสื่อสารจะช่วยส่งเสริมในการทำความเข้าใจเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน กล่าวคือ การแสดงออกทางความคิด การเข้าร่วมอภิปราย การฟังนักเรียนคนอื่นๆ จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งขึ้น การฟังความคิดของคนอื่นจะเป็นวิธีการที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจความคิดของคนอื่นที่มีความคิดที่แตกต่างกันในสถานการณ์เดียวกัน นักเรียนจะสามารถสร้างความเข้าใจบนพื้นฐานของประสบการณ์ตรงและส่งเสริมการสร้างความรู้ที่ช่วยให้นักเรียนมีความชัดเจนในสิ่งที่นักเรียนคิด

2) การสื่อสารเป็นวิธีการแลกเปลี่ยนความเข้าใจคณิตศาสตร์ซึ่งกันและกัน กล่าวคือ การให้นักเรียนสื่อสารโต้ตอบกันและกัน จะทำให้เกิดการช่วยเหลือแลกเปลี่ยนความคิดเห็น เกิดการเรียนรู้จากเพื่อนในกลุ่มมากกว่าเรียนจากครู เพราะในกลุ่มนักเรียนด้วยกันจะใช้ภาษาในระดับเดียวกันย่อมพูดกันรู้เรื่องและไม่เกิดความอับอายในการซักถามเรื่องที่ตนไม่เข้าใจ ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนที่อธิบายให้เพื่อนฟังเกิดความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งมากขึ้น เพราะนักเรียนที่อธิบายต้องศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมก่อนจะมาอธิบายได้ และยังทำให้เกิดความภาคภูมิใจในตนเองที่มีส่วนร่วมในการช่วยเหลือเพื่อน

3) การสื่อสารเป็นการเสริมสร้างให้นักเรียนเป็นนักเรียนรู้ คือ เมื่อครูเป็นผู้ตั้งคำถามและนักเรียนเป็นผู้ตอบโดยการพูดและเขียนในสิ่งที่นักเรียนคิด หรือนักเรียนถามตอบกันเองจะทำให้นักเรียนเกิดความเชื่อมั่นในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเอง การให้นักเรียนรายงานสิ่งที่นักเรียนคิดเป็นประเด็นที่มีความสำคัญ เพราะนักเรียนจะต้องใช้ศักยภาพและควบคุมการเรียนรู้ของตนเองในการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม และในที่สุดนักเรียนจะเปลี่ยนเป็นผู้เสริมสร้างความรู้ด้วยตนเอง

4) การสื่อสารเป็นการส่งเสริมสภาพแวดล้อมที่เหมาะสมในการเรียนรู้ คือ การพูดและการฟังในกลุ่มเพื่อนจากการเรียนรู้เป็นกลุ่มย่อยเป็นวิธีที่ปลอดจากความวิตกกังวลในการแสดงความคิดใหม่ๆ เมื่อการมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนๆ เป็นสิ่งที่น่าสนุกสนานจะทำให้นักเรียนเกิดความเต็มใจในการร่วมมือกัน

5) การสื่อสารช่วยให้ครูได้หยั่งรู้ (Insight) ในความคิดของนักเรียน คือ ครูจะเรียนรู้สิ่งที่นักเรียนเรียนรู้ โดยการฟังสิ่งที่นักเรียนอธิบายโดยกระบวนการให้เหตุผล โดย

ความสามารถในการอธิบายเป็นทักษะที่ได้จากการฝึกฝนทักษะการสื่อสารในกลุ่มเพื่อนที่มีการใช้ภาษาอย่างง่ายๆ และเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียน

3.3 แนวทางการพัฒนาการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

เป้าหมายของการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยการสื่อสารคือ เป็นวิธีการให้นักเรียนได้พูด ฟัง อ่าน และเขียนภาพ ศัพท์ ภาษา และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ อธิบายความสัมพันธ์ นักเรียนจึงต้องมีโอกาสในการทดสอบความคิดของตนเองในสังคมคณิตศาสตร์ในห้องเรียน โดยครูสามารถส่งเสริมกิจกรรมการสื่อสารในห้องเรียนได้ด้วยการสร้างสังคมที่นักเรียนรู้สึกมีอิสระในการแสดงออกทางความคิด ครูกระตุ้นการสื่อสารของนักเรียนด้วยการใช้คำถามนำแล้วให้นักเรียนอธิบายแนวคิดของตน โดยให้เพื่อนๆ มีส่วนร่วมในการอภิปรายแนวคิดนั้น โดยการอภิปรายข้อดีและข้อบกพร่องของแต่ละแนวทางและร่วมกันตัดสินใจเลือกแนวทางการแก้ปัญหาที่ดีที่สุด ก่อให้เกิดปฏิสัมพันธ์แลกเปลี่ยนแนวคิดซึ่งกันและกัน ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนโดยใช้การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พูดและมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนๆ และครู เพื่อให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น อธิบายเหตุผล และนักเรียนจะได้รับฟังความคิดเห็นของเพื่อนพร้อมทั้งสะท้อนความคิดของเพื่อนด้วย และให้นักเรียนได้ฝึกการอ่านและการเขียนไปพร้อมกัน โดยเฉพาะนักเรียนที่เรียนอ่อนอาจจะไม่เข้าใจแนวคิดบางอย่างซึ่งคนอื่นเข้าใจแล้ว ดังนั้นครูจึงต้องให้ความช่วยเหลือเป็นพิเศษ การเรียนรู้โดยผ่านมุมมองของคนอื่นเป็นสิ่งกระตุ้นการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มนี้ การมีส่วนร่วมในการอภิปรายในชั้นเรียนเป็นสิ่งท้าทายสำหรับนักเรียนบางคน ดังนั้นครูควรส่งเสริมการสื่อสารให้มากขึ้น

Rowan and Morrow (1993: 9-11) ได้เสนอแนวการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

1) การนำเสนอสื่อรูปธรรม แล้วให้นักเรียนพรรณนาถึงสิ่งที่พบ

2) ใช้เนื้อหา เรื่องราว หรืองานที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวนักเรียน เช่น โครงงานที่มีกิจกรรมสืบค้นเป็นสื่อที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้สื่อสารโดยตรง กิจกรรมเช่นนี้ช่วยให้นักเรียนเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ว่าเป็นวิชาที่มีประโยชน์ในการดำเนินชีวิต และเป็นเรื่องราวที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวนักเรียนทำให้การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นไปอย่างสมบูรณ์

3) การใช้คำถาม โดยเฉพาะคำถามปลายเปิดจะเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและแสดงการตอบสนองออกมา คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดอย่างหลากหลาย และมีการคิดอย่างสร้างสรรค์

4) ให้โอกาสนักเรียนได้เขียนสื่อสารแนวคิด เพื่อให้นักเรียนเห็นว่าการเขียนเป็นส่วนสำคัญของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องเข้าใจว่าทำไมจึงต้องเขียนอธิบาย นั่นคือเป้าหมายของการเขียนต้องชัดเจน

การสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์โดยการเขียนเป็นทักษะการสื่อสารที่ช่วยให้นักเรียนมีความชัดเจนในแนวคิด ช่วยพัฒนาการรับรู้ทางคณิตศาสตร์ ได้ทราบว่าตนเองมีความคิดเห็นและมีความเข้าใจอย่างไร เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนที่ไม่กล้าแสดงออกด้วยการพูดได้แสดงออกโดยการเขียน

5) ใช้การเรียนแบบร่วมมือและช่วยเหลือกัน (Cooperative and Collaborative Group) เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจแนวคิด อธิบายแนวคิดกันในกลุ่ม เป็นการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสาร

6) ใช้การชี้แนะโดยตรงและโดยอ้อม (Overt and Covert Clues) การตอบสนองต่อคำถามของนักเรียน การบริหารและจัดระบบชั้นเรียน เป็นการชี้แนะให้นักเรียนได้ทราบถึงสิ่งที่คาดหวังและมาตรฐานของการเรียนรู้ เพื่อที่นักเรียนจะได้แสดงแนวความคิดเหล่านั้นได้อย่างไม่ต้องกังวล

ส่วน Buschman (1995: 325 – 329) ได้แนะนำการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการสื่อสารไว้ดังนี้

1) เสนอปัญหาและคำตอบ และให้นักเรียนเขียนข้อความที่เห็นด้วยหรือไม่เห็นด้วยกับคำตอบ

2) เสนอปัญหาที่แก้แบบผิดๆ ให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับข้อผิดพลาดนั้น

3) เสนอปัญหาที่ประกอบด้วยข้อมูล และเงื่อนไขหนึ่งของปัญหาให้นักเรียนเขียนปัญหาใหม่และมีข้อมูลและเงื่อนไขไม่แตกต่างจากปัญหาเดิม แล้วให้นักเรียนแก้ปัญหาทั้ง 2 ข้อ

4) เสนอปัญหาและวิธีแก้ปัญหาบางส่วน แล้วให้นักเรียนหาทางแก้ปัญหาต่อให้สำเร็จ และให้นักเรียนคิดหาวิธีแก้ปัญหาแบบใหม่และอธิบายวิธีแก้ปัญหานั้น

5) เสนอปัญหาและข้อเท็จจริงที่ไม่เกี่ยวกับคำตอบให้นักเรียนระบุข้อเท็จจริงเหล่านั้น และเขียนปัญหานั้นใหม่โดยตัดข้อเท็จจริงที่ไม่เกี่ยวข้องออกไป

6) เสนอปัญหาให้นักเรียน แล้วให้นักเรียนอธิบายวิธีแก้ปัญหาโดยใช้เพียงคำสั้นๆ

7) หลังจากนั้นเรียนแก้ปัญหาเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเขียนปัญหาใหม่ที่มีบริบทแตกต่างกันไป แต่ยังคงมีโครงสร้างปัญหาเหมือนเดิม

8) เสนอปัญหาในชีวิตจริงที่ไม่มีตัวเลขแก่นักเรียน ให้นักเรียนประมาณคำตอบและตัวเลขที่หายไป

9) เสนอกราฟหรือตารางให้นักเรียน แล้วให้นักเรียนเขียนเรื่องที่นำเสนอข้อมูลในกราฟหรือตารางนั้น

10) เสนอปัญหาปลายเปิดให้นักเรียน แล้วให้นักเรียนค้นหาข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหา

11) ให้นักเรียนเขียนเรื่องราวใหม่โดยมีข้อมูลที่เป็นตัวเลขอยู่ด้วยเพื่อใช้เป็นแหล่งในการสร้างโจทย์ปัญหา

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ, 2545: 26) ได้กำหนดมาตรฐานการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแนวในการจัดการเรียนการสอนให้บรรลุผลตรงกันไว้ดังตารางที่ 4 ดังนี้

ตารางที่ 3 มาตรฐานการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น			
ป. 1 – 3	ป. 4 – 6	ม. 1 - 3	ม. 4 – 6
ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนออย่างถูกต้องและเหมาะสม	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนออย่างถูกต้องและเหมาะสม	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนออย่างถูกต้องชัดเจน และรัดกุม	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนออย่างถูกต้องชัดเจน และรัดกุม

โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(2546: 18 – 19) ได้แจกแจงความสามารถในการแสดงออกตามขั้นตอนของทักษะการสื่อสารที่จะนำมาประเมินการเรียนรู้ไว้ดังนี้

1) เลือกรูปแบบของการสื่อสาร การสื่อความหมายและนำเสนอด้วยวิธีการที่เหมาะสม

2) ใช้ข้อความ ศัพท์ สูตร สมการ หรือแผนภูมิที่เป็นสากล

3) บันทึกผลงานในทุกขั้นตอนอย่างสมเหตุสมผล

4) สรุปสาระสำคัญที่ได้จากการค้นคว้าหาความรู้จากแหล่งการเรียนรู้

5) เสนอความคิดเห็นที่เหมาะสมกับปัญหา

NCTM (2000: 60-63) ได้กำหนดมาตรฐานของการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนในระดับอนุบาลถึงเกรด 12 ไว้ ดังนี้

1) จัดระบบและรวบรวมเหตุผลความคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเองผ่านการสื่อสาร

2) สื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์อย่างเชื่อมโยงกันและชัดเจนแก่เพื่อน ครู และคนอื่นๆ

3) วิเคราะห์และประเมินความคิดและกลวิธีทางคณิตศาสตร์ของคนอื่นๆ

4) ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างกระชับ

ซึ่งพฤติกรรมการปฏิบัติที่บ่งชี้ถึงการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

1) การแปลความหมายความสัมพันธ์ของเครื่องหมายทางพีชคณิต

2) การใช้สถิติ ตาราง และกราฟในการสื่อสารแนวคิดและข้อมูลเพื่อการสร้างความเชื่อมั่นในการนำเสนอและวิเคราะห์การนำเสนอของคนอื่นที่มีลักษณะการนำเสนอที่ลำเอียงหรือลวงตา(deceptive)

3) สื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของตนเอง สาธิตขั้นตอนเป็นลำดับอย่างสมเหตุสมผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุป

กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ (2545: 201-203) ได้เสนอแนวทางในการจัดการเรียนรู้เพื่อให้เกิดทักษะการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

1) กำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน

2) ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและแสดงความคิดเห็นด้วยตนเอง โดยครูช่วยชี้แนะแนวทางในการสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

การฝึกทักษะการสื่อสารต้องทำอย่างต่อเนื่อง โดยสอดแทรกอยู่ทุกขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ให้นักเรียนคิดตลอดเวลาที่เห็นปัญหาว่า ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น จะมีวิธีแก้ปัญหาอย่างไร เขียนรูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรเป็นอย่างไร จะใช้ภาพ ตาราง หรือกราฟใดช่วยในการสื่อสารความหมายทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์

กำหนดสถานการณ์ดังนี้

ร้านค้าแห่งหนึ่งมีลูกจ้าง 3 คน คือ แดง น้อย และจิต โดยแต่ละคนเสนอค่าจ้างทำงานชั่วโมงละ 100 110 120 บาท ตามลำดับ และมีงาน 3 อย่างคือ a b และ c จำนวนชั่วโมงที่แดงทำงาน a, b และ c คือ 7.5, 8 และ 4.5 ชั่วโมง ตามลำดับ จำนวนชั่วโมงที่น้อยทำงาน a, b และ c คือ 6, 8.5 และ 5 ชั่วโมง ตามลำดับ และจำนวนชั่วโมงที่จิตทำงาน a, b และ c คือ 6.5, 7 และ 3.5 ชั่วโมง ตามลำดับ

อยากทราบว่านายจ้างควรให้ลูกจ้างคนใดทำงานอย่างใดที่สามารถทำงานนั้นเสร็จและจ่ายเงินน้อยที่สุด และ

ถ้านายจ้างต้องการรับลูกจ้างเพื่อเข้าทำงานทั้งสามอย่างเพียงหนึ่งคน เขาควรรับลูกจ้างคนใดเข้าทำงานจึงจะจ่ายน้อยที่สุด

ในการแก้ปัญหานี้นักเรียนจะต้องวิเคราะห์ปัญหาและใช้ตารางช่วยในการสื่อสาร สื่อความหมายข้อมูลที่กำหนดให้

ตารางที่ 4 แสดงชั่วโมงการทำงาน

งาน	จำนวนชั่วโมงการทำงาน		
	แดง	น้อย	จิต
A	7.5	6	6.5
b	8	8.5	7
c	4.5	5	3.5

จากนั้นนักเรียนช่วยกันหาคำตอบและสร้างตารางใหม่เพื่อแสดงจำนวนเงินที่นายจ้างต้องจ่ายจากการทำงานทั้ง 3 อย่าง

ตารางที่ 5 แสดงจำนวนเงินที่นายจ้างต้องจ่าย

งาน	จำนวนเงินที่นายจ้างต้องจ่าย(บาท)		
	แดง	น้อย	จิต
A	750	660	780
b	800	935	840
c	450	550	420
รวม	2,000	2,145	2,040

นักเรียนสามารถใช้ตารางที่ 2 นำเสนอคำตอบดังนี้

ควรจ้างน้อยทำงาน a เพราะจ่ายค่าจ้างน้อยที่สุด

ควรจ้างแดงทำงาน b เพราะจ่ายค่าจ้างน้อยที่สุด

ควรจ้างจิตทำงาน c เพราะจ่ายค่าจ้างน้อยที่สุด

และควรจ้างแดงทำงานทั้ง 3 อย่าง เพราะจ่ายค่าจ้างในการทำงานรวมทั้ง 3 อย่างน้อยที่สุด

กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ (2542: 59-62) ระบุว่าในการจัดการเรียนการสอนนั้นควรจัดให้นักเรียนได้ฝึกการสื่อสารอย่างหลากหลาย และนำไปสู่การปฏิบัติจริงทั้งในห้องเรียนและนอกห้องเรียน โดยมีขั้นตอนที่สำคัญ 2 ขั้นตอน คือ ขั้นการเตรียมคุณสมบัติ และขั้นการนำสมบัติที่ดีในการสื่อสารไปใช้ในการเรียนการสอน

1) ขั้นเตรียมคุณสมบัติ การเตรียมคุณสมบัติที่ดีในการสื่อสารเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการสื่อสารที่มีประสิทธิภาพในการเรียนการสอนในห้องเรียน หากครูต้องการให้นักเรียนมีการสื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพและประสบความสำเร็จ ครูต้องกำหนดคุณลักษณะที่จะใช้ในการสื่อสารและจัดกิจกรรมเพื่อฝึกทักษะนั้น ๆ ให้กับนักเรียนก่อนการนำทักษะไปใช้ในการเรียนการสอนเนื้อหาวิชาต่างๆ

2) ขั้นการนำคุณสมบัติที่ดีในการสื่อสารไปใช้ในการเรียนการสอน เป็นขั้นที่ครูกำหนดเนื้อหา จุดประสงค์ของการเรียนการสอนตามหลักสูตร แล้วนำกระบวนการสื่อสารและคุณสมบัติที่ดีในการสื่อสารของนักเรียนมาใช้ เพื่อนำไปสู่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนต่อไป ซึ่งองค์ประกอบที่เกี่ยวข้องกับการรับรู้สารจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการจัดการเรียนการสอนที่ใช้ในกระบวนการสื่อสาร

จากแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนโดยใช้การสื่อสารที่กล่าวมา สรุปได้ว่า การจัดกิจกรรมโดยใช้การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ควรใช้สื่อหรือสถานการณ์ที่ใกล้ตัวนักเรียน ให้นักเรียนมีโอกาสในการแสดงความคิดเห็นหรือแสดงออกด้วยวิธีการหลากหลาย เช่น การตั้งคำถาม การพูด การเขียนแสดงความคิดหรือนำเสนองานต่างๆ ทั้งในกลุ่มย่อยและหน้าชั้นเรียน โดยมีครูเป็นผู้ชี้แนะแนวทาง

4. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

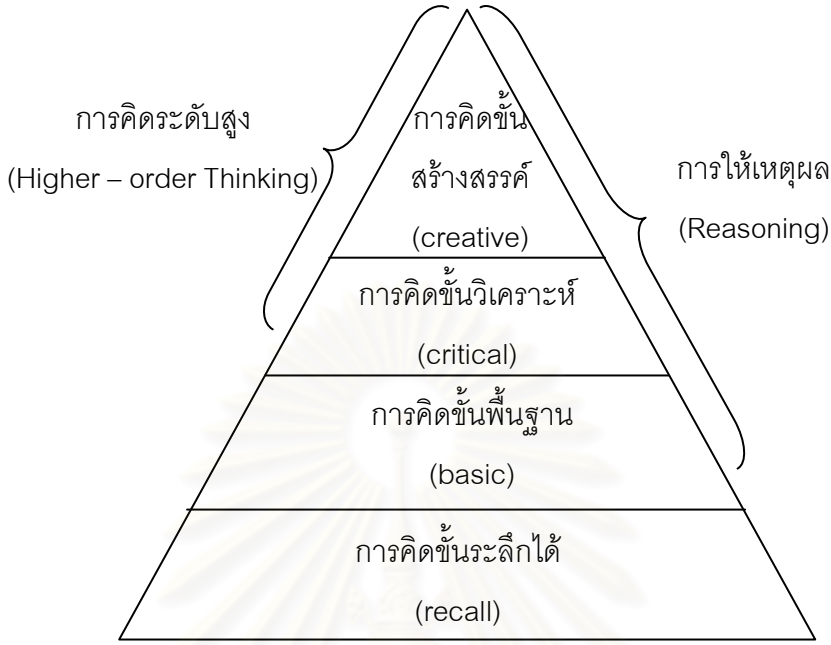
การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในมาตรฐานการเรียนรู้ด้านทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ซึ่งการจัดการเรียนรู้ให้นักเรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล ซึ่งในกระบวนการให้เหตุผลนั้นนักเรียนต้องรู้และต้องใช้การคิดหลายทักษะ เช่น การคิดวิเคราะห์ คิดสังเคราะห์ คิดไตร่ตรอง คิดอย่างมีวิจารณญาณเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นี้ช่วยให้นักเรียนสร้างข้อสรุปทางตรรกศาสตร์(Logic) สามารถประยุกต์ใช้ทักษะการจำแนกทางตรรกศาสตร์มาอธิบายความคิดของตนเอง พร้อมทั้งการตรวจสอบคำตอบและกระบวนการ การใช้แบบรูปและความสัมพันธ์เพื่อหาคำตอบ และทำความเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ดังนั้นทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเกิดขึ้นจากการให้เหตุผลของนักเรียนนั่นเอง

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีคำนิยามเช่นเดียวกับ การให้เหตุผล การคิดทางคณิตศาสตร์ และการคิดอย่างมีเหตุผล ซึ่งนักการศึกษาได้ให้ความหมายของการให้เหตุผล การคิด และการคิดอย่างมีเหตุผล ไว้ดังนี้

ทิศนา แขมมณี และคณะ (2544: 144) ได้ให้ความหมายของการคิดอย่างมีเหตุผลว่า เป็นการคิดที่มีจุดมุ่งหมาย เพื่อเข้าใจความคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเหตุผล โดยสามารถจำแนกข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริง และพิจารณาเรื่องที่คิดบนพื้นฐานของข้อเท็จจริงโดยใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัย และอุปนัย ซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อยๆ ดังนี้

1) สามารถแยกข้อเท็จจริงและความคิดเห็นออกจากกันได้
2) สามารถใช้เหตุผลแบบนิรนัยหรืออุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้
3) สามารถใช้เหตุผลทั้งแบบนิรนัยและอุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้

Krulik and Rudnick (1993: 3 – 5) ได้กล่าวว่า การคิดหมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนด โดยนักเรียนต้องสร้างข้อความคาดคะเน หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผล อธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น ซึ่งข้อสรุปก็คือแนวคิดหรือความรู้ใหม่ที่ได้รับ โดย ครูลิคและรุดนิค ได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ การคิดขั้นระลึกได้ (recall) การคิดขั้นพื้นฐาน (basic) การคิดขั้นวิเคราะห์ (critical) และการคิดขั้นสร้างสรรค์ (creative) ส่วนการให้เหตุผล ครูลิคและรุดนิคมองว่าเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่เหนือไปจากการคิดขั้นระลึกได้ ดังแผนภูมิต่อไปนี้



แผนภูมิที่ 7 ลำดับขั้นตอนของการคิด (Krulik and Rudnick, 1993: 3)

Krulik and Rudnick อธิบายว่า การคิดเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน แต่ละขั้นที่แสดงในภาพมิได้แยกขาดออกจากกันเลยทีเดียว แต่ละขั้นตอนอาจคาบเกี่ยวกันบ้าง จากแผนภูมิดังกล่าวจะเห็นว่าการให้เหตุผลจะรวมถึงการคิดขั้นพื้นฐาน การคิดขั้นวิเคราะห์ และการคิดขั้นสร้างสรรค์ สำหรับการคิดขั้นวิเคราะห์และการคิดสร้างสรรค์ Krulik and Rudnick เรียกว่าเป็นการคิดระดับสูง (Higher – order Thinking)

Prestege (2002: 26) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผล คือ การที่นักเรียนสามารถค้นหาคำตอบและตัดสินความถูกต้องได้ รวมถึงการพัฒนาแนวคิดเป็นข้อสรุปทั่วไป การโต้แย้งและการพิสูจน์ ดังนั้นการให้เหตุผลจึงเป็นการหาความเป็นไปได้ของคำตอบและการตัดสินความถูกต้องของคำตอบ

จากความหมายของการคิด และความสัมพันธ์ระหว่างการคิดและการให้เหตุผลและคณิตศาสตร์กับการให้เหตุผลดังกล่าว สรุปเป็นความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเหตุและผล โดยการจำแนกข้อเท็จจริง ใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัย และอุปนัยเพื่อหาคำตอบ ตัดสินความถูกต้อง หรือข้อสรุปเป็นความคิดรวบยอดที่สมเหตุสมผล และขยายหลักการไปสู่ความคิดอื่น

4.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นแนวทางสำคัญในการพัฒนาและการอธิบายขอบเขตของปรากฏการณ์ บุคคลที่สามารถคิดและวิเคราะห์อย่างมีเหตุผลจะสามารถมองเห็นรูปแบบ โครงสร้าง หรือลักษณะของสถานการณ์ทั้งในโลกแห่งความจริงและสิ่งของที่เป็นสัญลักษณ์ คนที่คิดและวิเคราะห์อย่างมีเหตุผลจะตั้งคำถามเมื่อพบรูปแบบที่มีความคลาดเคลื่อน หรือเมื่อเกิดข้อสงสัยต้องการเหตุผลบุคคลเหล่านี้ก็จะคาดคะเนและพิสูจน์ข้อคาดคะเนนั้น จนกระทั่งได้ข้อสรุปที่สมเหตุสมผล ดังนั้นการให้เหตุผลจึงจำเป็นต่อทั้งการเรียนคณิตศาสตร์และการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน ซึ่ง Baroody and Coslick (1998: 2-22 – 2-23) กล่าวว่าการให้เหตุผลจำเป็นต่อการทำงานทางคณิตศาสตร์เพราะ

1) การให้เหตุผลสามารถส่งเสริมอำนาจทางคณิตศาสตร์ ด้วยการช่วยให้นักเรียนมองเห็นว่าคณิตศาสตร์มีความเป็นเหตุเป็นผลและสามารถทำความเข้าใจได้

2) การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญในการเรียนการสอนและการใช้ชีวิต การค้นพบรูปแบบและการใช้เหตุผล “ถ้า.....แล้ว.....” สามารถนำไปใช้ในเนื้อหาวิทยาศาสตร์และเนื้อหาอื่นๆ ได้ นอกจากนี้การประเมินข้อโต้แย้งยังเป็นสิ่งจำเป็นในการตัดสินใจอีกด้วย

ข้อมูลจากการให้เหตุผลของนักเรียนมีความสำคัญโดยอาจทำให้ครูสามารถดำเนินการในสิ่งต่อไปนี้ (อัมพร ม้าคนอง, 2547ก)

1) อธิบายระดับพัฒนาการของนักเรียนในการเรียนมโนทัศน์หนึ่งๆ

2) ระบุความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนหรืออุปสรรคต่อการเรียนรู้ของนักเรียนพร้อมทั้งเหตุผล

3) วิเคราะห์แนวคิดใหม่ (emerging ideas) ที่เกิดจากการให้เหตุผลของนักเรียน เพื่อที่จะขยายความและอภิปรายร่วมกับนักเรียนคนอื่นๆ

4) ระบุโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (mathematical structures) หรือประเภทของปัญหาที่จำเป็นสำหรับการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายของนักเรียน

5) จัดหาสถานการณ์ที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้ของนักเรียน

6) ตรวจสอบผลของสิ่งแวดล้อมและวัฒนธรรมในห้องเรียนที่มีต่อความคิดและความเข้าใจของนักเรียน

Eysenck, Wurzburg and Berne (1972: 214) ได้แบ่งการให้เหตุผลออกเป็น 2 วิธี คือ การให้เหตุผลแบบนิรนัย และการให้เหตุผลแบอุปนัย ดังนี้

1) การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นความสามารถในการหาเหตุผลจากหลักใหญ่ไปหาหลักย่อย หมายความว่าเป็นการนำเอาความรู้เดิมที่เป็นส่วน

ใหญ่มาเป็นข้ออ้าง แล้วดูความสัมพันธ์ ความสอดคล้องหรือคล้อยตาม เพื่อสรุปเป็นความรู้ใหม่ที่เป็นส่วนย่อยซึ่งเป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผล

2) การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นความสามารถในการหาเหตุผลจากหลักย่อยไปหาหลักใหญ่ เป็นการสรุปจากข้อเท็จจริงย่อยๆ แล้วหากฎหรือเกณฑ์ทั่วไปในการรวมส่วนย่อยๆเหล่านั้นเข้าด้วยกัน

Baroody and Coslick (1993: 2 -61) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่ามี 3 ประเภท โดยเพิ่มการให้เหตุผลเชิงหยั่งรู้ (Intuitive reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) หรือเกิดจากลางสังหรณ์ ไม่ได้มีข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ จึงตัดสินใจจากข้อมูลที่เห็นหรือจากความรู้สึกภายใน เหตุผลเชิงหยั่งรู้จึงเป็นเหตุผลที่วางอยู่บนสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสมมติฐาน ซึ่งสิ่งที่ปรากฏอาจถูกหรือผิดก็ได้ ส่วนอีก 2 ประเภท คือ การให้เหตุผลแบบนิรนัยและการให้เหตุผลแบบอุปนัยเช่นเดียวกับ Eysenck and others (1972)

Seales (1956: 229–230) ได้จำแนกความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยไว้ 6 ประเภท ดังนี้

1) การจัดหมวดหมู่ (classification) เป็นการวัดความสามารถด้านการจำแนก การแยกสิ่งของออกเป็นประเภทต่างๆ ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม โดยยึดโครงสร้าง หน้าที่ รูปร่าง ลักษณะ สมบัติเฉพาะ ฯลฯ เป็นหลักในการเปรียบเทียบกับกลุ่มนั้นๆ

1.1) รูปแบบคำถาม โจทย์จะกำหนดคำมาให้ชุดหนึ่งซึ่งเป็นพวกเดียวกัน แล้วให้เลือกคำที่อยู่ในพวกเดียวกับคำที่กำหนดให้

ตัวอย่าง หนังสือ สมุด ปากกา ดินสอ .....

ก. ครู ข. นักเรียน ค. ไม้บรรทัด ง. กระดานดำ

1.2) รูปแบบของคำถาม โจทย์จะกำหนดคำมาให้ชุดหนึ่ง ซึ่งจะมีคำอยู่คำหนึ่งที่แตกต่างไปจากคำอื่นๆ ไม่เข้าพวกกับข้ออื่นๆ ที่เป็นพวกเดียวกันหรืออยู่ในประเภทเดียวกัน โจทย์จะให้หาคำที่ไม่อยู่ในประเภทเดียวกันหรือไม่เข้าพวก

ตัวอย่าง คำในข้อใดที่ไม่เข้าพวกกับคำที่กำหนดให้

ก. โทรทัศน์ ข. พัดลม ค. เทป ง. ไม้กวาด

2) การอุปมาอุปไมย (Analogy) เป็นการวัดความสามารถด้านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ ซึ่งจะต้องวิเคราะห์คำถามและหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งของ และเรื่องราวต่างๆ แล้วขยายหลักการนั้นออกสู่สิ่งอื่นหรือสถานการณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์เป็นทำนองเดียวกัน หรือลักษณะเดียวกับของเดิม ซึ่งอาจเป็นทางด้านโครงสร้างหน้าที่ หรือลักษณะต่างๆ ที่มีความสัมพันธ์กัน เหมาะสมกันมากที่สุด

รูปแบบของคำถาม โจทย์จะกำหนดคำหรือภาพมาให้คู่หนึ่ง คำหรือภาพที่กำหนดให้นั้นจะสัมพันธ์กันในทางใดทางหนึ่ง แล้วให้หาคำตอบหรือภาพที่มีความสัมพันธ์กับคำหรือภาพที่กำหนด

ตัวอย่าง วัด : พระ, โรงเรียน : .....

ก. นายอำเภอ ข. ตำรวจ ค. ครู ง. ทหาร

3) การลำดับตัวเลข (number series) เป็นการวัดความสามารถในการเข้าใจและเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน หรือปริมาณมาก น้อย

รูปแบบของคำถาม โจทย์จะกำหนดตัวเลขมาให้ชุดหนึ่ง แล้วให้สังเกตตัวเลขในชุดนั้นว่าแต่ละตัวเปลี่ยนแปลงไปด้วยกฎเกณฑ์ใด อย่างใด แล้วหาตัวเลขตัวถัดไปของตัวเลขชุดนั้น

ตัวอย่าง 10, 20, 30, 40, 50,.....

ก. 60 ข. 70 ค. 80 ง. 90

4) การลำดับตัวอักษร (letter series) เป็นการวัดความสามารถในการเข้าใจและเห็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวอักษร ลำดับก่อนหลังของตัวอักษร

รูปแบบของคำถาม โจทย์จะกำหนดตัวอักษรมาให้เหมือนกับการลำดับตัวเลข แล้วให้สังเกตตัวอักษรในชุดนั้นว่าแต่ละตัวเปลี่ยนแปลงไปด้วยกฎเกณฑ์ใด อย่างใด แล้วหาตัวอักษรตัวถัดไป

ตัวอย่าง ม ก ย ก ร ก ล ก ว.....

ก. ก ข. ข ค. ศ ง. ย

5) การจัดกลุ่มตัวอักษร (letter grouping) เป็นการวัดความสามารถในการจัดกลุ่มตัวอักษร ว่าในกลุ่มตัวอักษรที่ให้มานั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

รูปแบบของคำถาม โจทย์จะกำหนดกลุ่มตัวอักษรมาให้ 4 กลุ่ม ซึ่งจะมีอยู่ 3 กลุ่มที่มีความสัมพันธ์เหมือนกัน และจะมีอยู่กลุ่มตัวอักษรหนึ่งที่แตกต่างออกไปไม่เข้าพวกกับกลุ่มอื่น

ตัวอย่าง กลุ่มตัวอักษรกลุ่มใดแตกต่างไปจากกลุ่มที่กำหนดให้

ก. กกงจ ข. กมวก ค. สกกบ ง. กจขง

6) การสรุปรวม (generalization) และหลักการคิดให้เหตุผลแบบอุปนัยของมิลล์ (Mill's Methods of Introductive Inference) ซึ่ง Mill (อ้างใน Copi and Cohen, 1990: 383 – 399) ได้รวบรวมวิธีการสรุปผลแบบอุปนัยเอาไว้สำหรับตรวจดูความสัมพันธ์ของกรณีต่างๆ มีทั้งหมด 5 วิธี ดังนี้

6.1) วิธีหาความสอดคล้องกัน (methods of agreement) ในปรากฏการณ์ที่นำมาพิจารณาซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่มีข้อมูลตั้งแต่ 2 ข้อมูลขึ้นไป ข้อมูลเหล่านั้นจะมีสิ่งแวดล้อมที่เกิดก่อนปรากฏการณ์หลายๆ อย่างต่างๆ กันไป แต่มีอยู่อย่างหนึ่งที่เหมือนกันเป็นตัวร่วมที่เกิดขึ้นในทุกข้อมูล แล้วทุกข้อมูลเกิดปรากฏการณ์เหมือนกัน สรุปได้ว่าสิ่งแวดล้อมที่เกิดก่อนปรากฏการณ์ที่เหมือนกันในทุกข้อมูลนั้น เป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์นั้น เขียนเป็นแผนภาพดังนี้

เหตุ	ผล
a b c d	X
a q r p	X
a m n o	X

จากแผนภาพจะเห็นว่า a คือสาเหตุของ X เช่น ในหอพักแห่งหนึ่ง นิสิตทุกคนท้องเสียอย่างแรง เราต้องการทราบว่าอะไรเป็นสาเหตุให้เกิดการท้องเสีย ก็เรียกนิสิตมาสอบถามว่ารับประทานอะไรบ้างก่อนเกิดการท้องเสีย ปรากฏว่านิสิตทุกคนรับประทานอาหารต่างๆ กัน มีส้มตำเป็นตัวร่วมที่ทุกคนรับประทานเหมือนกัน จึงสรุปว่าตัวร่วมนั้นเป็นสาเหตุของปรากฏการณ์ คือ การรับประทานส้มตำเป็นสาเหตุที่ทำให้ท้องเสีย

6.2) วิธีหาความแตกต่าง (methods of difference) ในข้อมูลหลายๆ ข้อมูลที่มีสิ่งแวดล้อมซึ่งเกิดก่อนปรากฏการณ์เหมือนๆ กัน และมีปรากฏการณ์เหมือนๆ กันตามมา แต่มีข้อมูลหนึ่งที่มีสิ่งแวดล้อมซึ่งเกิดก่อนปรากฏการณ์ต่างออกไป และมีปรากฏการณ์ตามมาต่างออกไปด้วย สรุปได้ว่าสิ่งแวดล้อมที่เกิดก่อนปรากฏการณ์ที่แตกต่างไปนั้น เป็นสาเหตุทำให้เกิดปรากฏการณ์ตามมาที่ต่างออกไป เขียนเป็นแผนภาพดังนี้

เหตุ	ผล
a b c d.....	X
a b c d.....	X
p b c d.....	L

จากแผนภาพจะเห็นว่า p คือสาเหตุของ L เช่น นก นิด หน่อย รับประทานอาหารร่วมกัน ปรากฏว่านิดคนเดียวเท่านั้นที่มีอาการท้องเสีย จากการสอบถามพบว่า นก นิด และหน่อย รับประทานอาหารเหมือนๆ กัน มีอยู่อย่างเดียวที่นิดรับประทาน แต่นกกับหน่อยไม่รับประทาน คือ มะม่วงแช่อิ่ม ดังนั้นอาจสรุปได้ว่า มะม่วงแช่อิ่มเป็นสาเหตุของการท้องเสีย

6.3) วิธีหาความสอดคล้องและแตกต่างกัน (joint methods of agreement and difference) คือการนำ 2 วิธีมาผสมกันทำให้การสันนิษฐานสรุปหาสาเหตุได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แม่นยำขึ้นมากกว่าใช้วิธีใดวิธีหนึ่งตามลำพัง เพราะเป็นการช่วยกันตรวจสอบสาเหตุทั้งสองวิธี โดยผลสรุปออกมาตรงกัน เขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

เหตุ	ผล
a b c d.....	X
a c p y.....	X
- b c p.....	L
a y d c.....	X

จากแผนภาพจะเห็นว่า ทุกกรณีที่มี a จะเกิดผล X แต่ที่ไม่มี a ก็ไม่เกิดผล X ส่วนประกอบอื่นๆ นั้นกระจัดกระจายแตกต่างออกไป ดังนั้นอาจสรุปได้ว่า a คือสาเหตุของ X เช่น เก่ง แขก เปิ้ล นก และ หนิง เดินทางทัศนาจรร่วมกัน ตอนเย็นปรากฏว่าปวดท้องกันทุกคน แต่เปิ้ลมีอาการท้องเสียด้วย ถ้าจะหาสาเหตุของการปวดท้องและท้องเสีย จะต้องสำรวจดูว่าแต่ละคนรับประทานอาหารใดบ้าง สมมติว่าเป็นดังนี้

เก่ง	ข้าว	แกงเผ็ด	ทอดมัน	ซาลาเปา			
แขก	ข้าว	แกงเผ็ด		ซาลาเปา	มะม่วง		
เปิ้ล	ข้าว	แกงเผ็ด	ทอดมัน		มะม่วง	ก๋วยจั๊บ	ส้มตำ
นก		แกงเผ็ด	ทอดมัน	ซาลาเปา		ก๋วยจั๊บ	ราดหน้า
หนิง		แกงเผ็ด		ซาลาเปา		ก๋วยจั๊บ	ราดหน้า

ดังนั้นอาจสรุปได้ว่า สาเหตุของอาการปวดท้องน่าจะเป็นแกงเผ็ด(ความสอดคล้อง) สาเหตุของอาการท้องเสียน่าจะเป็นส้มตำ (ความแตกต่าง) ข้อสรุปที่ได้มานี้มีคุณค่าเพียงระดับน่าจะเป็นเท่านั้น จะยืนยันแน่นอนไม่ได้ ถ้าทดสอบได้ก็ให้ทดสอบดู เพื่อความน่าจะเป็นให้สูงและใกล้ความจริงมากขึ้น

6.4) วิธีหาส่วนที่เหลือ (methods of residues) ในปรากฏการณ์เดียวกัน ถ้ามีสาเหตุที่ทำให้เกิดผลหลายอย่างร่วมกัน ถ้าเรารู้ว่าสาเหตุใดทำให้เกิดผลใด ให้เราหักออกเสีย ก็จะเป็นสาเหตุของผลที่เหลือ เขียนเป็นแผนภาพดังนี้

เหตุ A B C
ผล a b c
รู้ว่า B เป็นสาเหตุของ b
และ C เป็นสาเหตุของ c

ดังนั้นสาเหตุที่เหลือคือ A ย่อมเกิดผลที่เหลือคือ a เช่น วันหนึ่งไปจ่ายกับข้าวที่ตลาด ซื้อเนื้อหมู ผักสด น้ำปลา ขนมหวาน ส้ม รวมเป็นเงิน 150 บาท จำได้ว่าเนื้อหมู 70 บาท

น้ำปลาราคา 22 บาท ผักสดราคา 27 บาท ส้มราคา 18 บาท แต่จำไม่ได้ว่าขนมหวานราคาเท่าไหร่ ก็ใช้วิธีหาส่วนที่เหลือ ทำให้ทราบว่าขนมหวานราคา 13 บาท เพราะ 13 บาทที่เหลือเป็นผลของสาเหตุที่เหลือ

ในกรณีนี้จะเห็นว่า เรารู้ว่าสาเหตุมีจำนวนจำกัดและมีอะไรบ้าง สามารถสำรวจได้ทั่วถึงทุกหน่วย ทำให้ได้ผลสรุปแน่นอน แต่ถ้ากรณีใดที่ไม่สามารถรู้จำนวนที่แน่นอนของสาเหตุหรือไม่รู้ว่าจะมีอะไรบ้างก็ต้องตั้งสมมติฐานและทดสอบ ผลสรุปที่ได้ก็จะมีระดับน่าจะเป็นไปได้เหมือนวิธีอุปนัยอื่นๆ

6.5) วิธีหาความผันแปร (methods of concomitant variation) เป็นการสังเกตการเปลี่ยนแปลงของสิ่งแวดล้อมที่เกิดขึ้นก่อน และปรากฏการณ์ที่เกิดตามมาว่าเกี่ยวข้องสัมพันธ์คล้อยตามกัน คือเพิ่มหรือลดระดับตามกันแค่ไหน จึงต้องระวังว่าสาเหตุเดียวกันมิใช่ว่าต้องให้ผลเดียวกันเสมอ เพราะถ้าสาเหตุมีความเข้มข้นเปลี่ยนไปมากๆ ผลอาจจะเกิดขึ้นเป็นอย่างอื่นเลยก็ได้ เขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

เหตุ	ผล
a b c d	X
a_1 b c d	X_1
a_2 b c d	X_2
a_3 b c d	X_3

จะเห็นว่าเมื่อ a เปลี่ยนไป X ก็จะผันแปรไปด้วย แสดงว่า a และ X เกี่ยวข้องกันเป็นเหตุเป็นผลกัน เช่น อ๋อยรับประทานยาแก้ปวด 1 เม็ด ไม่มีผลอะไรเลย รับประทาน 2 เม็ด ทำให้หายปวดศรีษะ รับประทาน 10 เม็ด ทำให้ตาย เป็นต้น

4.3 แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การให้เหตุผลมีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถใช้เหตุผลและสืบเสาะข้อคาดคะเน พัฒนาและประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเลือกและใช้วิธีการให้เหตุผลและการพิสูจน์ได้หลากหลาย โดยแนวการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมีอยู่ 2 วิธี คือ

1) การจัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นวิธีการที่ให้นักเรียนได้พิจารณาข้อมูลที่เป็นจริงจากส่วนย่อยที่เกิดขึ้นซ้ำๆ กันภายใต้เงื่อนไขหรือสถานการณ์แบบหนึ่ง ไปสู่ข้อสรุปหรือความจริงทั่วไป หรือการสังเกตจากตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง แล้วใช้เหตุผลสรุปความสัมพันธ์ในรูปทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น เช่น

ถ้ากระเป๋าใบนี้เป็นสีเขียว แล้วจะเป็นของสมปอง

กระเป๋าใบนี้ไม่เป็นของสมปอง

ดังนั้น กระเป๋าใบนี้ไม่เป็นสีเขียว

หรือ ชุดของจำนวน 1,3,5,7,9,...

จะเห็นว่าแต่ละจำนวนมีผลต่างกับจำนวนถัดไปเป็น 2 และเมื่อนำตำแหน่งของจำนวนไปสัมพันธ์กับค่าของจำนวน จะพบว่าแต่ละจำนวนมีค่าน้อยกว่าสองเท่าของตำแหน่งของจำนวนอยู่ 1 นั่นคือ

จำนวนตำแหน่งที่ 1 มีค่าเท่ากับ 2(1) – 1 = 1

จำนวนตำแหน่งที่ 2 มีค่าเท่ากับ 2(2) – 1 = 3

จำนวนตำแหน่งที่ 3 มีค่าเท่ากับ 2(3) – 1 = 5

เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า

จำนวนตำแหน่งที่ 10 มีค่าเท่ากับ 2(10) – 1 = 19

2) จัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการนำกฎ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎี หรือข้อตกลงที่เป็นที่ยอมรับว่าเป็นความจริงเพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุปเรื่องราวหนึ่งๆ ที่มีเงื่อนไขสอดคล้องกับกฎ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎี หรือข้อตกลงนั้นๆ เช่น กำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉาก ($a^2 + b^2 = c^2$) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านประกอบมุมฉากเป็น 3 หน่วย และ 4 หน่วย จะมีความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น $3^2 + 4^2 = 9 + 19 = 25 = 5^2$

Baroody and Coslick (1998: 2-23 – 2-30) กล่าวว่าการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ควรมีลักษณะดังนี้

1) การให้เหตุผลควรบูรณาการอยู่ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ทุกระดับชั้น นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมให้ใช้การให้เหตุผลแบบหยั่งรู้และแบบอุปนัยเพื่อคาดการณ์ และการใช้เหตุผลแบบนิรนัยง่ายๆ เช่น การใช้เหตุผล “ถ้า....แล้ว....”

2) ช่วยให้นักเรียนเห็นว่ามีรูปแบบที่แตกต่างกันมากมาย ทั้งกฎเกณฑ์ในสถานการณ์ต่างๆ สิ่งของ และจำนวน

3) ใช้กิจกรรมที่มีการจำแนกชัดเจนก่อน

4) ส่งเสริมให้นักเรียนประเมินการคาดการณ์และการนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547: 3) ได้เสนอแนวการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผลว่าควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

1) ให้นักเรียนเรียนรู้อย่างมีเหตุผล

2) ให้นักเรียนฝึกคิดอย่างมีเหตุผล

3) ให้นักเรียนฝึกเป็นผู้ให้เหตุผล

4) ให้นักเรียนฝึกเขียนอธิบายสิ่งที่นักเรียนทำเพื่อหาคำตอบ

5) ให้นักเรียนฝึกให้เหตุผลในการอธิบายหรืออภิปราย

6) ให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ ประเมินการให้เหตุผลของผู้อื่น

7) ให้นักเรียนรู้จักใช้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำหรับการตรวจสอบหรือพิจารณาความถูกต้อง

8) ให้นักเรียนได้อาศัยการให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผล

องค์ประกอบหลักที่ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผลและรู้จักให้เหตุผลมีดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ, 2545: 199, วราภรณ์ มีหนัก, 2545)

1) ควรให้นักเรียนได้พบกับโจทย์หรือปัญหาที่นักเรียนสนใจ เป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของนักเรียนที่จะคิดและให้เหตุผลในการหาคำตอบได้

2) ให้นักเรียนมีโอกาสและเป็นอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการใช้และให้เหตุผลของตนเอง

3) ครูช่วยสนับสนุนและชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจว่าเหตุผลของนักเรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ มีข้อบกพร่องอย่างไร

ครูช่วยสรุปและชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจว่า เหตุผลของนักเรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ ขาดตกบกพร่องอย่างไรการเริ่มต้นที่จะส่งเสริมให้นักเรียนเรียนรู้ และเกิดทักษะในการให้เหตุผล ครูควรจัดสถานการณ์หรือปัญหาที่น่าสนใจให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ ครูสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนและคอยช่วยเหลือโดยกระตุ้นหรือชี้แนะอย่างกว้างๆ โดยใช้คำถามกระตุ้นด้วยคำว่า “ทำไม” “อย่างไร” “เพราะเหตุใด” เป็นต้น ควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดอย่างหลากหลาย โจทย์ปัญหาหรือสานการณ์ที่กำหนดให้ควรเป็นปัญหาปลายเปิด (open-ended problem) ที่นักเรียนสามารถแสดงความคิดเห็นหรือให้เหตุผลที่แตกต่างกันได้ หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ, 2545: 25) ได้กำหนดมาตรฐานการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนไว้ดังนี้

ตารางที่ 6 มาตรฐานการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น			
ป. 1 – 3	ป. 4 – 6	ม. 1 - 3	ม. 4 – 6
ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม	ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม	สามารถแสดงเหตุผลโดยการอ้างอิงความรู้ข้อมูลหรือข้อเท็จจริงหรือสร้างแผนภาพ	นำวิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยมาช่วยในการค้นหาความจริงหรือข้อสรุปและช่วยในการตัดสินใจบางอย่างได้

NCTM (2000: 56-59) ได้กำหนดมาตรฐานของการให้เหตุผลและการพิสูจน์สำหรับนักเรียนในระดับอนุบาลถึงเกรด 12 ไว้ดังนี้

1) ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์

2) สร้างและตรวจสอบข้อความคาดคะเนทางคณิตศาสตร์ได้

3) พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

4) เลือกและใช้วิธีการให้เหตุผลและวิธีการพิสูจน์ชนิดต่างๆ ได้หลากหลาย

พฤติกรรมที่แสดงออกถึงการให้ทักษะเหตุผลทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2546: 18 – 19) ดังนี้

1) เลือกและใช้วิธีการให้เหตุผลและวิธีการพิสูจน์ชนิดต่างๆ ได้หลากหลาย

2) พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

3) เลือกใช้ความรู้เพื่อจัดลำดับขั้นตอนของการให้เหตุผลและลงข้อสรุป

4) อ้างอิงความรู้ ข้อมูลหรือข้อเท็จจริง หรือสร้างแผนภาพ

5) ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล

6) สร้างและตรวจสอบข้อความคาดคะเนทางคณิตศาสตร์ได้

7) การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ การจัดหมวดหมู่ สรุปรวมข้อมูลที่มีลักษณะเหมือนหรือต่างกันได้

ตัวอย่างการให้เหตุผล กำหนดโจทย์ปัญหาดังนี้

ไม้ไผ่ลำหนึ่งยาว 2.85 เมตร ปักอยู่ในบึงแห่งหนึ่ง ซึ่งมีน้ำลึกโดยเฉลี่ย 1.30 เมตร ถ้าส่วนที่อยู่เหนือน้ำคิดเป็น $\frac{1}{3}$ ของความยาวของไม้ไผ่ลำนี้ ไม้ไผ่ส่วนที่ปักอยู่ในดินยาวกี่เมตร

สมมติว่า ด.ช.ก่อ แสดงวิธีทำตามแนวคิดดังนี้

ความยาวของไม้ไผ่ส่วนที่อยู่เหนือน้ำคิดเป็น $\frac{1}{3}$ ของ 2.85 = 0.95 เมตร

ความยาวของไม้ไผ่ส่วนที่ปักอยู่ในน้ำเท่ากับ 1.30 เมตร

ดังนั้นไม้ไผ่ส่วนที่ปักอยู่ในดินยาว 2.85 – (0.95 + 1.30) = 0.6 เมตร

ตอบ 0.6 เมตร

ด.ญ.ศรีเพ็ญ แสดงความคิดเห็นว่า โจทย์ข้อนี้หาคำตอบไม่ได้ เพราะว่าโจทย์กำหนดความลึกของน้ำโดยเฉลี่ย 1.30 เมตร ตรงตำแหน่งที่ไม้ปักอยู่ไม่ทราบว่ามีความลึกของน้ำเท่าไรแน่ จึงไม่สามารถหาความยาวของไม้ส่วนที่ปักอยู่ในดินได้

ครูอาจใช้คำถามกระตุ้นว่า “ใครมีความคิดเห็นแตกต่างไปจากสองแนวคิดนี้อีกหรือไม่” ถ้าไม่มีความคิดเห็นเพิ่มเติมครูควรถามความคิดเห็นต่อว่า คำตอบของศรีเพ็ญมีเหตุผลที่ยอมรับได้หรือไม่

ในการฝึกให้นักเรียนให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลคำตอบของ ด.ญ.ศรีเพ็ญ ถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง สมเหตุสมผลคำตอบหนึ่ง

อาจมีนักเรียนบางคนแสดงความคิดเห็นว่า วิธีทำของ ด.ช. ก่อ ยังไม่ถูกต้อง เพราะเหตุว่าตำแหน่งที่ไม้ปักอยู่อาจปักอยู่ในบริเวณที่ตื้นหรือลึกกว่า 1.30 เมตร เพราะฉะนั้นความยาวของไม้ส่วนที่ปักอยู่ในดินอาจมากกว่าหรือน้อยกว่า 0.6 เมตร ก็ได้ ถ้านักเรียนแสดงความคิดเห็นเช่นนี้ ครูควรใช้คำถามให้นักเรียนคิดต่อว่านักเรียนจะแก้ไขวิธีทำของ ด.ช. ก่อ อย่างไรจึงจะได้คำตอบที่ถูกต้องและสมเหตุสมผล

นักเรียนอาจจะให้เหตุผลเพิ่มเติมโดยใช้คำว่า “ถ้า” ในบรรทัดที่สอง ดังนี้

ถ้า ไม้ส่วนที่ปักอยู่ในน้ำยาว 1.30 เมตร ไม้ส่วนที่ปักอยู่ในดินก็จะยาว 0.6 เมตร

หรือสรุปตรงคำตอบว่า ไม้ส่วนที่ปักอยู่ในดินยาว**ประมาณ** 0.6 เมตร ก็ได้

ตัวอย่างการให้เหตุผลในกระบวนการแก้ปัญหาที่ใช้คำถามประกอบการหาคำตอบ

ครูกำหนดโจทย์ จงทำ $(x^{-3}y^{-2}z^{0})^{-2}$ เมื่อ x, y, z ไม่เท่ากับ 0 ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตารางที่ 7 การเรียนการสอนการให้เหตุผล

คำถามของครู	ขั้นตอนแสดงวิธีทำ	การให้เหตุผลของนักเรียน
1. จากโจทย์นักเรียนควรจะลดรูปส่วนใดก่อน 2. นักเรียนจะใช้สมบัติใดต่อไป 3. นักเรียนจะใช้สมบัติใดต่อไปอีก	$(x^{-3}y^{-2}z^{0})^{-2} = (x^{-3}y^{-2})^{-2}$ $= (x^{-3})^{-2}.y^{-2})^{-2}$ $= x^{6}y^{4}$	1. ลดรูป z^{0} ก่อน เพราะว่าเมื่อ $z \neq 0$ จะได้ $z^{0} = 1$ จะทำให้ลดตัวแปรเหลือเพียงสองตัว 2. จากสูตรที่เคยทราบว่า $(ab)^{n} = a^{n}b^{n}$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ 3. จากสูตรที่เคยทราบว่า $(a^{m})^{n} = a^{mn}$ เมื่อ $a \neq 0$

กล่าวโดยสรุปได้ว่าการพัฒนาการให้เหตุผลต้องใช้วิธีการให้สอดคล้องกับลักษณะของเนื้อหา คำถึงองค์ประกอบและมาตรฐานที่ต้องการให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้เป็นสำคัญ

5. สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์

5.1 ความหมายของสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์

พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน (2525 : 773) ให้ความหมาย สมรรถภาพ หมายถึง ความสามารถ

กรอบแนวคิดสมรรถภาพหลักเพื่อการเรียนรู้ตลอดชีวิตของสหภาพยุโรป ได้ให้ความหมายของสมรส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีรถภาพและสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ ไว้ว่า สมรรถภาพ หมายถึง ผลรวมของความรู้ ทักษะและเจตคติในบริบทหนึ่งๆ ส่วน สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการพัฒนาและใช้การคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน มีความรู้และความสามารถในการคำนวณที่ดี โดยเฉพาะด้านกระบวนการและการปฏิบัติ รวมถึงความสามารถและความเต็มใจใช้กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ทั้งการคิดเชิงตรรกศาสตร์และการคิดเชิงปริภูมิ และความสามารถในการนำเสนอด้วยสูตร แบบจำลอง โครงสร้าง กราฟ และแผนผังต่างๆ

OECD(2007) กล่าวว่าสมรรถภาพมีความหมายมากกว่าความรู้และทักษะ แต่รวมถึงความสามารถในการผสานความต้องการด้วยการโน้มน้าวและการขับเคลื่อนทางจิต เช่น ความสามารถในการสื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพเป็นสมรรถภาพที่เกิดจากความรู้ด้านภาษาของบุคคล ทักษะปฏิบัติทางด้านเทคโนโลยีการสื่อสารและเจตคติต่อคนที่สื่อสารด้วย

Niss (2003: 7-10) ให้ความหมายว่า สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถของบุคคลในการใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ต่างๆ ทั้งที่อยู่ในและนอกขอบเขตทั่วไปทางคณิตศาสตร์ หากความรู้คณิตศาสตร์สามารถทำได้ เช่นใช้คณิตศาสตร์เพื่อทำความเข้าใจ เพื่อตัดสินใจ เพื่อปฏิบัติและเพื่อให้เหตุผล รวมถึงการเตรียมการและสามารถปฏิบัติทางคณิตศาสตร์ทั้งโดยใช้ความรู้พื้นฐานและใช้ความเข้าใจอย่างถ่องแท้ ด้วยการปฏิบัติทางกาย การแสดงพฤติกรรม(รวมทั้งการพูด) และการคิด โดย Niss แบ่งสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ไว้ 8 ด้าน คือ การคิดทางคณิตศาสตร์ การสร้างและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอรูปธรรมทางคณิตศาสตร์ การจัดกระทำต่อสัญลักษณ์และระเบียบวิธีการทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และการใช้อุปกรณ์และเครื่องมือต่างๆ

จากความหมายของสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ต่างๆ ทั้งที่อยู่ในและนอกขอบเขตทั่วไปทางคณิตศาสตร์ เพื่อทำความเข้าใจ ปฏิบัติ คำนวณ ตัดสินใจ สื่อสาร แก้ปัญหา และให้เหตุผลในสถานการณ์ต่างๆ

5.2 ความสำคัญของการมีสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์

สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์มีความจำเป็นต่อสังคมและต่อบุคคล คนทุกคนที่ได้รับการศึกษาควรมีความรอบรู้ทางด้านมโนทัศน์และทักษะในการจัดการกับสาระทางวิชาการต่างๆ เช่น สูตรทางคณิตศาสตร์เกิดจากการบูรณาการของสาระสำคัญต่างๆ ซึ่งเราอาจต้องใช้สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการทำงานทางด้านเทคโนโลยี การทำงานในหน้าที่การงานหรือการทำงานที่ต้องใช้ทักษะ หรือการจัดการทางการเงิน เป็นต้น ดังนั้นนักเรียนจึงต้องได้รับการอธิบายเกี่ยวกับสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ ต้องสามารถใช้คณิตศาสตร์ได้ทั้งทางทฤษฎีและทักษะปฏิบัติ ดังนั้นการสอนต้องสลับไปมาระหว่างกิจกรรมการสำรวจ การเล่น การสร้างสรรค์ และการแก้ปัญหา กับการฝึกทักษะ ในส่วนของกิจกรรมในโรงเรียนต้องมีการสำรวจทั้งแนวคิดของโรงเรียน โครงสร้างและความสัมพันธ์ของวิชาต่างๆ เพื่อสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนทั้งหญิงและชายมีโอกาสได้รับประสบการณ์ต่างๆ ที่ส่งเสริมเจตคติทางบวกและความเข้าใจที่คงทนในวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ตลอดชีวิตต่อไป

5.3 ประเภทของสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์

สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้จำแนกออกเป็น 2 ด้านใหญ่ๆ คือ สมรรถภาพด้านความรู้และสมรรถภาพด้านทักษะ

5.3.1 สมรรถภาพด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์

สมรรถภาพด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์จำแนกออกเป็น 2 ด้าน คือความรู้ด้านมโนทัศน์ และความรู้ด้านการดำเนินการ ดังนี้

1) ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

1.1) ความหมายของความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

Hiebert and Lefevre (1986: 3-4) ให้ความหมายของความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ โครงข่ายที่ประกอบด้วยข้อมูลต่างๆ และความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านั้น ต้องใช้การเรียนรู้อย่างมีความหมาย

Rittle-John and Alibali (1999) ให้ความหมายของความรู้ด้านมโนทัศน์ หมายถึงความเข้าใจทั้งที่ชัดเจนและไม่ชัดเจนเกี่ยวกับหลักการทั่วไปและความสัมพันธ์ระหว่างกันของความรู้ในเรื่องต่างๆ

น้อมศรี เคท (2547: 24) ให้ความหมายของความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์คณิตศาสตร์ คือ ความรู้เกี่ยวกับหลักการ ความสัมพันธ์และแบบรูป

Byrnes (1996: 156-157) ได้ยกตัวอย่างความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น 1) ความเข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ที่ใช้ (Referents) เช่น 5 หมายถึงสิ่งของ 5 ชิ้น และ ½ หมายถึงของครึ่งหนึ่งจากของทั้งหมด 2) ความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของสิ่งของ (Relative numerosity) เช่น ส้ม 8 ผลมีจำนวนมากกว่าส้ม 4 ผล 3) การจัดกลุ่มทางคณิตศาสตร์ (Categories) เช่น เศษส่วนต่างๆ มุมต่างๆ เป็นต้น และเข้าใจความแตกต่างระหว่างกลุ่มที่จัด เช่น มุมแหลมต่างกับมุมฉาก 4) รู้ข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ (Facts) เช่น ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา 5) รู้เหตุผลของคำตอบ (Why) เมื่อดำเนินการจนได้คำตอบหลังแล้วสามารถบอกได้ว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกหรือผิด

ดังนั้น สมรรถภาพความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการใช้ความรู้เกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ การให้ความหมายทางสัญลักษณ์ หลักการ ความสัมพันธ์ แบบรูป และเหตุผลของคำตอบที่ได้

1.2) แนวทางการพัฒนาความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนมีมโนทัศน์ในวิชาคณิตศาสตร์นิยมใช้วิธีอุปนัย คือการให้เห็นหรือศึกษาจากตัวอย่างมากๆ แล้วสรุป ซึ่งมีลำดับขั้นการสอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง เพื่อจำแนกความแตกต่างและหาลักษณะร่วม

ขั้นที่ 2 สรุปลักษณะร่วม

ขั้นที่ 3 ทดสอบ นำไปใช้

ภาควิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยรามคำแหง(2530 : 31-32) ได้เสนอรายละเอียดกระบวนการสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยกระบวนการดังนี้

1.2.1) เริ่มจากการรับรู้ (perception) ให้นักเรียนสังเกตเพื่อหาข้อมูลจากสิ่งที่ต้องการจะสร้างมโนทัศน์ด้วยวิธีการที่หลากหลาย เช่น การดู การฟัง การสัมผัส เป็นต้น

1.2.2) การพิจารณาข้อแตกต่าง (differentiation) ให้นักเรียนพิจารณาหาความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างของข้อมูลหรือสิ่งที่เรียนให้ละเอียดมากขึ้น

1.2.3) การแยกแยะ (abstraction) คือการสามารถแยกแยะสิ่งที่เรียนออกจากสิ่งอื่น

1.2.4) การรวมเข้าด้วยกัน (integration) คือการสรุปรวบยอดหรือหารูปแบบทั่วไปของเรื่องที่เรียนเพื่อสร้างเป็นหน่วยความคิด เป็นการกำหนดและหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ได้พิจารณาแล้ว ผลที่ได้ออกมาอาจกำหนดเป็นสัญลักษณ์ สิ่งที่สรุปรวบยอดนี้เรียกว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจเป็นกฎหรือหลักการบางอย่างที่ได้จากการพิจารณาคุณสมบัติซึ่งมีลักษณะเฉพาะ

1.2.5) การอุปนัย (induction) เป็นกระบวนการสร้างมโนทัศน์อีกขั้นหนึ่ง คือการเอาสิ่งที่ค้นพบไปประยุกต์ใช้กับเหตุการณ์อื่นบ้างในรูปประโยค ถ้า .....แล้ว .....

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ครูจำเป็นต้องรู้ว่านักเรียนมีความเข้าใจมโนทัศน์ที่เรียนไปหรือไม่ ดังนั้นครูจึงต้องศึกษาพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจมโนทัศน์ของนักเรียน ซึ่ง นาตยา ปิลันธนานนท์ (2542 : 14, College Board, 2002 : 38) ได้จำแนกพฤติกรรมที่แสดงว่านักเรียนมีมโนทัศน์ในเรื่องที่เรียน พฤติกรรมดังกล่าวประกอบด้วย

- สามารถระบุ เรียกชื่อของมโนทัศน์
- สามารถสังเกต คัดเลือก จำแนก แยกแยะ ยกตัวอย่าง และที่ไม่ใช่ตัวอย่างของมโนทัศน์ได้
- สามารถบอกลักษณะของมโนทัศน์ ด้วยการแสดงความสัมพันธ์ของรูปแบบ แผนผัง การจัดกระทำ และนำเสนอมโนทัศน์ด้วยวิธีการต่างๆ

- การสังเกตเห็น อธิบาย และใช้เครื่องหมาย สัญลักษณ์และรูปแบบในการนำเสนอมโนทัศน์
- การจำแนกและใช้หลักการทั่วไป รู้และใช้ข้อเท็จจริงและบทนิยาม
- สามารถอธิบาย สรุปความหมาย ความรู้ และความเข้าใจมโนทัศน์ด้วยภาษาของตนเอง
- เปรียบเทียบ บอกข้อแตกต่าง และผสมผสานมโนทัศน์และหลักการทั่วไปที่สัมพันธ์กันเพื่อขยายความเข้าใจ
- การอธิบายข้อสรุปทั่วไปและความสัมพันธ์ของการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

2) ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

2.1) ความหมายของความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

น้อมศรี เคท (2547: 24) ให้ความหมายของความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ คือ การจดจำสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้และสามารถนำหลักการหรือกฎเกณฑ์ต่างๆ ไปใช้ในการแก้ปัญหาหรือหาคำตอบ หรือ หมายถึงการที่บุคคลมีทักษะทางคณิตศาสตร์และนำทักษะนั้นมาปฏิบัติในการคิดคำนวณอย่างเป็นขั้นตอน

Rittle-John and Alibali (1999) กล่าวว่า “ความรู้ด้านการดำเนินการ หมายถึงการปฏิบัติเป็นขั้นตอนเพื่อการแก้ปัญหา”

Hiebert and Lefevre (1986: 6) ให้ความหมายของความรู้ด้านการดำเนินการที่มีลักษณะแตกต่างกัน 2 ส่วน คือ ส่วนแรกประกอบด้วยภาษาที่เป็นแบบแผนหรือระบบการเสนอสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ อีกส่วนประกอบด้วยขั้นตอนวิธีการหรือกฎในการทำงานทางคณิตศาสตร์

Byrnes (1996: 157) บอกว่าความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยการรู้ขั้นตอนที่นำไปสู่เป้าหมายหนึ่ง เช่น การรู้ขั้นตอนวิธีการด้านเกี่ยวกับ 1) การนับ 2) การบวก ลบ คูณ และหาร 3) การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม 4) การแยกตัวประกอบสมการหลายตัวแปร 5) การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

College Board (2002: 39) กล่าวว่าความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ความสามารถในการอ่านและเขียนกราฟและตาราง การดำเนินการทางเรขาคณิต ทักษะที่ไม่เกี่ยวกับการคำนวณ เช่น การหมุน(rounding) และการเรียงลำดับ(ordering) เป็นต้น

ดังนั้นสมรรถภาพความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการทำงานหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงการใช้ศัพท์ ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อการดำเนินการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์

2.2) แนวทางการพัฒนาความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

Hiebert (1989 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2546: 24) ได้เสนอขั้นตอนการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่หนึ่ง ขั้นการพัฒนาความหมายสำหรับสัญลักษณ์

เป็นขั้นของการเชื่อมโยงระหว่างสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนพบเป็นประจำกับแนวคิดหรือวัตถุที่สัญลักษณ์เหล่านั้นถูกใช้แทน ในทางคณิตศาสตร์จะใช้สัญลักษณ์สองประเภทใหญ่ๆ คือ ตัวเลข เช่น 1, 2.4, $\frac{1}{2}$ และเครื่องหมายแสดงการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น +, -, $\times$, $\div$ เป็นต้น

ขั้นที่สอง ขั้นพัฒนาความหมายสำหรับกฎและการดำเนินการ

เป็นขั้นของการพัฒนาความหมายของสิ่งที่จะกลายเป็นกฎหรือขั้นตอนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น ประโยคสัญลักษณ์ 65 – 27 = 38 นั้น แทนการหัก 27 ออกจาก 65 โดยหัก 10 ออกจาก 60 และหัก 7 ออกจาก 5 แต่หัก 7 ออกจาก 5 ไม่ได้ จึงใช้วิธีใหม่คือ แบ่ง 60 ออกเป็น 50 กับ 10 แล้วให้ 10 กับ 5 รวมเป็น 15 ซึ่งจะทำให้สามารถหักได้ โดยหัก 20 ออกจาก 50 และหัก 7 ออกจาก 15 ซึ่งจะเหลือ 30 และ 8 ตามลำดับ ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 38 ซึ่งสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์แสดงแต่ละขั้นตอนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 65 - 27 &= (60 - 20) + (5 - 7) \\ &= (50 - 20) + (10 + 5 - 7) \\ &= 30 + (15 - 7) \\ &= 30 + 8 \\ &= 38 \end{aligned}$$

ขั้นที่สาม ขั้นตรวจสอบความเป็นเหตุเป็นผล

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถคาดคะเนคำตอบที่ใกล้เคียงความจริงได้ จากการใช้ความหมายในขั้นที่หนึ่ง เช่น หากนักเรียนทราบความหมายของ $4 \div (\frac{2}{3})$ หมายถึงจำนวนของ $\frac{2}{3}$ ที่รวมกันแล้วได้ 4 นักเรียนจะสามารถคาดคะเนได้ว่าคำตอบที่ได้ต้องมากกว่า 4 เพราะ $\frac{2}{3}$ มีค่าไม่ถึง 1 คำตอบจึงอาจเป็น 5 หรือ 6 หรือ 7

การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของ Hiebert ช่วยทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจความหมายเนื้อหาคณิตศาสตร์มากกว่าการจำขั้นตอนวิธีการคิดคำนวณไปใช้ ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการนำความรู้ที่ได้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์อย่างแท้จริง ซึ่ง Usiskin(1998 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2543) หลักการพื้นฐานสำหรับการสอนขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ คือ

1) เทคโนโลยีเปลี่ยนแปลงความสำคัญของขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์บางอย่างมีความสำคัญมากขึ้น บางอย่างมีความสำคัญน้อยลง แต่มีขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์บางอย่างที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงความสำคัญ

2) สำหรับปัญหาใดๆ ขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับกระบวนการ 3 ชนิด คือ ชนิดที่คิดได้ด้วยสมอง ชนิดที่ทำได้ด้วยปากกาและดินสอ และชนิดที่ทำได้โดยการช่วยเหลือของครู

3) ไม่ว่าครูคิดว่ากำลังสอนขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์อะไร จะมีนักเรียนบางคนที่ทำโดยวิธีที่แตกต่างออกไป

4) การจะใช้ขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ ครูควรเตรียมตัวและหาวิธีที่จะดำเนินการสอนขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์นั้นอย่างเหมาะสม

5) เพื่อให้เป็นการคุ้มค่าต่อการสอน ครูควรตั้งจุดมุ่งหมายในการสอนขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์

ในการสอนการดำเนินการทั้งในส่วนของสัญลักษณ์และขั้นตอนวิธีการนั้นจะมีการดำเนินการวิธีใหม่ๆ อยู่เสมอ ดังนั้นการเรียนรู้การดำเนินการจะทำให้นักเรียนมีความรู้คณิตศาสตร์แล้ว การเรียนรู้การดำเนินการใหม่จะทำให้สามารถใช้การดำเนินการกับสถานการณ์ที่ซับซ้อนมีความคล่องแคล่วขึ้น ดังนั้นครูจึงควรจัดการเรียนการสอนที่ช่วยนักเรียนให้นักเรียนมีความชำนาญในการดำเนินการและมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งกับการดำเนินการดังกล่าว ซึ่งจะทำให้นักเรียนบรรลุผลด้านการดำเนินการและนำความรู้และความเข้าใจไปใช้ในช่วงเวลาต่างๆ ได้ (Watson, 2002)

5.3.2 สมรรถภาพด้านทักษะทางคณิตศาสตร์

สมรรถภาพด้านทักษะทางคณิตศาสตร์จำแนกออกเป็น 3 ด้าน คือ การแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผล ดังนี้

1) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1) ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Sternberg and Williams (2002: 319) ให้ความหมายของการแก้ปัญหาว่า คือ กระบวนการในการเปลี่ยนจากสถานการณ์ที่ต้องการหาคำตอบมาสู่การได้คำตอบ โดยต้องฝ่าฟันผ่านอุปสรรคต่างๆ ในขั้นตอนการแก้ปัญหา

Heddens and Speer (1997: 40) กล่าวว่า การแก้ปัญหา คือกระบวนการที่บุคคลใช้ตอบสนองและเอาชนะอุปสรรคหรือสิ่งขัดขวางเมื่อไม่สามารถหาคำตอบหรือวิธีการหาคำตอบได้ในทันที ดังนั้นการแก้ปัญหาจึงใช้เนื้อหาสาระหลายอย่าง

Brahier (2005: 25) ได้ให้คำนิยามของการแก้ปัญหาว่า คือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ซึ่งนักเรียนพยายามจำแนกสิ่งที่ต้องการเพื่อวางแผน ดำเนินการตามแผน และตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ เมื่อเผชิญกับปัญหานักเรียนจะพัฒนากลวิธีการแก้ปัญหาต่างๆ ที่สามารถประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ต่างๆ ซึ่งอาจประกอบด้วยการเขียนสมการ สร้างรูปแบบ เขียนกราฟ สร้างตาราง เป็นต้น

ดังนั้น สมรรถภาพการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์ในวิชาคณิตศาสตร์ดำเนินการหาคำตอบของปัญหาได้ โดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้วยการวิเคราะห์ตีความหมายโจทย์ปัญหา วางแผน และกำหนดขั้นตอนในการแก้ปัญหา เลือกใช้กลวิธีที่มีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหา และตรวจสอบความถูกต้องหรือความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

1.2) กระบวนการแก้ปัญหา

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นเน้นที่กระบวนการที่ใช้แก้ปัญหาและความสามารถทางทักษะคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาวิธีการในการเข้าใจปัญหา (Mayer and Hegarty, 1996: 30-31) ซึ่งต้องอาศัยการพัฒนาและการเชื่อมโยงความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการของนักเรียน กระบวนการแก้ปัญหาประกอบด้วยขั้นตอนในการคิดและการดำเนินการแก้ปัญหา ซึ่งสามารถช่วยให้บุคคลดำเนินการได้อย่างเป็นระเบียบ ไม่สับสนและสามารถแก้ปัญหาได้ผล ดังที่โพลยา ซึ่งได้ชื่อว่าเป็นบิดาแห่งการแก้ปัญหาสมัยใหม่ ได้เสนอกระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของโพลยา ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน (อ้างถึงใน Mayer, 1992 : 49-50) คือ

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (understanding the problem)

ขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาต้องรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับปัญหาและตั้งคำถาม “สิ่งที่ต้องการคืออะไร หรือสิ่งที่ไม่รู้คืออะไร (สิ่งที่โจทย์ถาม)” “อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ หรือสิ่งที่เป็นข้อมูลหรือเงื่อนไข” นั่นคือเป็นขั้นตอนที่ต้องทำความเข้าใจคำที่มีอยู่ในปัญหาและแปลงปัญหานั้นใหม่ โดยใช้ถ้อยคำของผู้แก้ปัญหา พิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการถาม

ข้อมูลที่กำหนดให้เพียงพอต่อการแก้ปัญหาหรือไม่ หรือมีข้อมูลใดที่ไม่ใช้ในการแก้ปัญหาแต่โจทย์กำหนดให้มา หรือปัญหานั้นคล้ายกับที่ตนเคยแก้หรือไม่

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (devising a plan)

ขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาต้องพยายามใช้ประสบการณ์ที่ผ่านมาเพื่อค้นหาวิธีการแก้ปัญหาและตั้งคำถาม "รู้จักปัญหาที่คล้ายคลึงกับปัญหานี้หรือไม่" "สามารถสร้างเป้าหมายใหม่ด้วยวิธีการใหม่ ๆ บนพื้นฐานของประสบการณ์ที่ผ่านมา หรือ สามารถสร้างสิ่งที่กำหนดให้ใหม่ด้วยวิธีการใหม่ๆ ที่สัมพันธ์กับประสบการณ์ที่ผ่านมา" นั่นคือเป็นขั้นการแก้ปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาต้องหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้กับสิ่งที่โจทย์ถามหา ซึ่งมีกลวิธีให้เลือกใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะปัญหา เช่น การเดาและการทดสอบ การใช้ตัวแปร การค้นหารูปแบบ การวาดภาพประกอบ การแก้สมการ การใช้สูตร การให้เหตุผลทางตรงและทางอ้อม การพิจารณาปัญหาที่เคยแก้มาแล้วซึ่งมีความคล้ายคลึงกัน การใช้สถานการณ์จำลอง เป็นต้น

ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน (carrying out the plan)

ผู้แก้ปัญหาต้องพยายามวางแผนเพื่อหาคำตอบ ตรวจสอบในแต่ละขั้นตอน นั่นคือเป็นขั้นที่นำกลวิธีที่เลือกไปใช้แก้ปัญหาให้เป็นผลสำเร็จ โดยทำไปตามลำดับขั้นตอนที่กำหนดไว้อย่างละเอียด ใช้ภาษาที่ชัดเจน เข้าใจง่ายและสมเหตุสมผล

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้ (looking back)

ผู้แก้ปัญหาต้องตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ด้วยวิธีการต่าง ๆ หรือด้วยการพิจารณาความสอดคล้องกันของวิธีการและคำตอบ และตั้งคำถาม "สามารถใช้ผลลัพธ์ที่ได้หรือวิธีการกับปัญหาอื่น ๆ ได้หรือไม่" เป็นขั้นที่มีประโยชน์อย่างยิ่งเพราะจะช่วยให้เราทราบว่าคำตอบที่ได้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ถามหรือไม่ และกระบวนการที่ใช้หาคำตอบนั้นถูกต้องทุกขั้นตอนหรือไม่ นอกจากนี้อาจพบวิธีการแก้ปัญหาที่ง่าย สั้น และชัดเจนยิ่งขึ้น รวมทั้งอาจเกิดแนวคิดที่นำไปใช้ดัดแปลงสำหรับการแก้ปัญหาใหม่ได้

1.3) กลวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

กลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหามีดังนี้ (Musser and Burger, 1997, Reys and others, 2004: 124, Sternberg and Williams, 2002)

- การคาดเดาและตรวจสอบ
- ใช้ตัวแปร
- เขียนภาพ หรือเขียนแผนผัง
- เขียนรายการ หรือวิธีการที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- หารูปแบบ

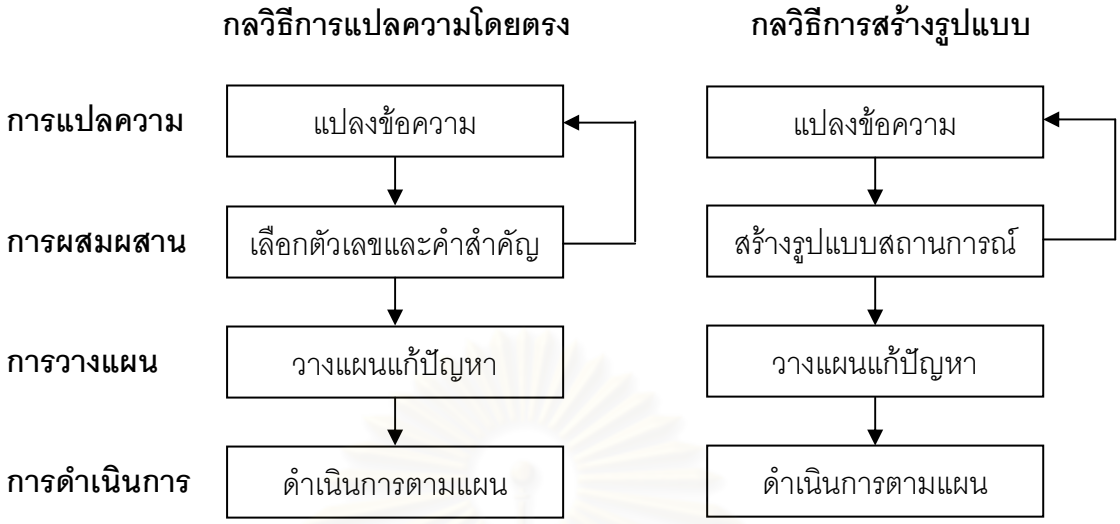
- ใช้การให้เหตุผลโดยตรง หรือใช้การให้เหตุผลโดยอ้อม
- ใช้สมบัติของจำนวน
- แก้ปัญหาที่เหมือนกัน หรือแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า
- ทำงานย้อนกลับ
- แก้ปัญหาเป็นกรณีย่อยๆ หรือจำแนกเป็นจุดประสงค์ย่อยๆ
- เปลี่ยนวิธีคิดหรือมุมมอง

โดยทั่วไปนักเรียนสามารถใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานแก้ปัญหาที่เป็นสัญลักษณ์ได้ แต่อาจไม่สามารถใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้เมื่อเป็นโจทย์ปัญหา Mayer และ Hegarty (1996: 35 - 36) ได้เสนอกลวิธีในการทำความเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 2 วิธี คือ

1) กลวิธีการแปลความโดยตรง (direct translation strategy) ประกอบด้วยการเลือกตัวเลขที่อยู่ในโจทย์ จากนั้นจึงใช้การดำเนินการทางเลขคณิตกับตัวเลขดังกล่าว เช่น มีโจทย์ปัญหาว่า สายันต์ยืมเงินจากสถาบันการเงินแห่งหนึ่งจำนวน 12,000 บาท เป็นเวลาหนึ่งปี โดยมีอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี สายันต์ต้องจ่ายเงินคืนทั้งหมดเท่าใด เมื่อใช้กลวิธีการแปลความโดยตรง จะแก้ปัญหาโดยการเลือกตัวเลขจากโจทย์ คือ 12,000 และ 12 จากนั้นใช้การดำเนินการทางเลขคณิตที่สอดคล้องกับคำสำคัญในโจทย์ คือ ดอกเบี้ย ดังนั้นจึงหาคำตอบโดยการคูณ 12,000 กับ 0.12 วิธีนี้เป็นการดำเนินการโดยยึดเหตุผลด้านปริมาณก่อนเหตุผลด้านคุณภาพ

2) กลวิธีการสร้างรูปแบบ (problem model strategy) ประกอบด้วยการทำความเข้าใจสถานการณ์ในโจทย์และวางแผนแก้ปัญหา จากโจทย์ปัญหาที่ผ่านมา เมื่อใช้กลวิธีการสร้างรูปแบบหาคำตอบโดยจะเริ่มด้วยการหาโครงสร้างในการนำเสนอ เช่น จะนำเสนอจำนวนเงินยืม อัตราดอกเบี้ย และเงินที่จ่ายคืนซึ่งเป็นการรวมเงินยืมและดอกเบี้ย แล้วจากนั้นจึงวางแผนแก้ปัญหา เช่น คำนวณดอกเบี้ยก่อน (12,000 x 0.12) แล้วหาผลรวม (รวมดอกเบี้ยกับเงินยืม)

กระบวนการทำความเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาตามกลวิธีทั้งสองนี้ประกอบด้วย 3 องค์ประกอบ คือ การแปลความ การผสมผสาน และการวางแผน ซึ่งบทบาทขององค์ประกอบทั้ง 3 เขียนเป็นแผนภูมิได้ดังนี้



แผนภูมิที่ 8 กระบวนการทำความเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาด้วยกลวิธีการแปลความโดยตรงและกลวิธีการสร้างรูปแบบ (Mayer and Hegarty, 1996: 37)

จากกลวิธีการทำความเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาทั้งสองวิธีนี้พบว่า นักเรียนที่สามารถแก้ปัญหาได้สำเร็จจะใช้กลวิธีการสร้างรูปแบบมากกว่า ดังนั้นครูจึงควรสอนการแก้ปัญหาโจทย์ด้วยกลวิธีการสร้างรูปแบบให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ เพื่อจะได้นำไปใช้ได้อย่างคล่องแคล่วต่อไป

1.4) แนวการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กรมวิชาการ, 2544: 25) ได้กำหนดมาตรฐานการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังตาราง

ตารางที่ 8 มาตรฐานการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น			
ป. 1 – 3	ป. 4 – 6	ม. 1 - 3	ม. 4 – 6
1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้	1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้	1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้	1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้

ตารางที่ 8 (ต่อ)

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น			
ป. 1 – 3	ป. 4 – 6	ม. 1 - 3	ม. 4 – 6
2. ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาในสถานการณ์จริงได้	2. ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีแก้ปัญหาในสถานการณ์จริงได้	2. ใช้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม	2. แก้ปัญหาในสถานการณ์จริงโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้ 3. ใช้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

NCTM (2000: 52-55) ได้กำหนดมาตรฐานของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนในระดับอนุบาลถึงเกรด 12 ไว้ ดังนี้

1) สร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาได้

2) แก้ปัญหาทั้งในบริบททางคณิตศาสตร์และบริบทอื่นๆ

3) ประยุกต์ใช้กลวิธีต่างๆ ในการแก้ปัญหา

4) ตรวจสอบและสะท้อนผลของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ (2544: 195-198) ได้เสนอแนวทางในการจัดการเรียนรู้เพื่อให้เกิดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา 4 ขั้นตอน คือ ทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา วางแผนแก้ปัญหา ดำเนินการแก้ปัญหา และตรวจสอบหรือมองย้อนกลับ ซึ่งในกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนนี้ต้องอาศัยทักษะอื่นๆ ประกอบด้วย ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์โจทย์ ต้องอาศัยทักษะที่สำคัญและจำเป็นอีกหลายประการ เช่น ทักษะในการอ่านโจทย์ปัญหา ทักษะการแปลความหมายทางภาษ ซึ่งนักเรียนควรแยกแยะได้ว่าโจทย์กำหนดอะไร และโจทย์ต้องการให้หาอะไร หรือพิสูจน์ข้อความใด

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นที่สำคัญที่สุด ต้องอาศัยทักษะในการนำความรู้ หลักการหรือทฤษฎีที่เรียนมาแล้ว ทักษะในการเลือกใช้ยุทธวิธีที่เหมาะสม เช่น เลือกใช้การเขียนรูปหรือแผนภาพ ตาราง การสังเกตหารูปแบบความสัมพันธ์ เป็นต้น ในบางปัญหาอาจใช้ทักษะมนการประมาณค่า คาดการณ์ หรือคาดเดาคำตอบมาประกอบด้วย

ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา ต้องอาศัยทักษะในการคิดคำนวณหรือการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ทักษะการพิสูจน์หรือการอธิบายและแสดงเหตุผล

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบหรือมองย้อนกลับ ต้องอาศัยทักษะในการคำนวณ การประมาณคำตอบ การตรวจสอบผลลัพธ์ที่หาได้โดยอาศัยความรู้สึกเชิงจำนวน (number sense) หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ (spatial sense) ในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่สอดคล้องกับสถานการณ์หรือปัญหา

โดยครูควรจัดกิจกรรมด้วยการกำหนดประเด็นคำถามนำให้คิด และหาคำตอบเป็นลำดับเรื่อยไป จนนักเรียนสามารถหาคำตอบได้ จากนั้นในปัญหาต่อๆ ไป ครูจึงลดประเด็นคำถามลงจนเมื่อนักเรียนมีทักษะในการแก้ปัญหาเพียงพอก็ไม่ต้องใช้ประเด็นคำถามชี้นำอีก จากนั้นครูควรเน้นฝึกการวิเคราะห์แนวคิดอย่างหลากหลาย ในขั้นการวางแผนแก้ปัญหาให้มาก

2) การสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สมรรถภาพการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ภาษา ศัพท์ และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย หรือนำเสนอ เพื่ออธิบายแนวความคิดหรือหลักการทางคณิตศาสตร์ให้ผู้อื่นเข้าใจ หรือแลกเปลี่ยนความรู้หรือความคิดเห็นทางคณิตศาสตร์กับบุคคลอื่น ได้ดี มีคุณภาพ ถูกต้องแม่นยำ และรวดเร็ว ด้วยการพูด การฟัง การอ่าน และการเขียน

3) การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สมรรถภาพการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเหตุและผล โดยการจำแนกข้อเท็จจริง ใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัย และอุปนัย เพื่อหาคำตอบ ตัดสินความถูกต้อง หรือข้อสรุปเป็นความคิดรวบยอดที่สมเหตุสมผล และขยายหลักการไปสู่ความคิดอื่น

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

6.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

6.1.1 งานวิจัยภายในประเทศ

ศิริชัย โสภา (2535) ได้วินิจฉัยข้อบกพร่องของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง พื้นฐานของความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วน การบวก การลบ การคูณ การหาร และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วน โดย เรื่องการหาผลบวกของเศษส่วนที่มีตัวส่วนไม่เท่ากันและไม่อยู่ในรูปของจำนวนคละ นักเรียนไม่หา ค.ร.น. ของตัวส่วน แต่นำตัวเศษบวกกับตัวเศษ ตัวส่วนบวกกับตัวส่วน เรื่องการหาผลต่างของจำนวนเต็มกับจำนวนคละ นักเรียนใช้การเปลี่ยนจำนวนคละเป็นเศษเกิน แล้วนำจำนวนเต็มลบกับตัวเศษ เรื่องการหาผลบวกของจำนวนคละที่มีตัวส่วนไม่เท่ากัน นักเรียนไม่หา ค.ร.น. ของตัวส่วน และไม่เปลี่ยนจำนวนคละเป็นเศษเกิน แต่นำจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็ม ตัวเศษบวกกับตัวเศษ ตัวส่วนบวกกับตัวส่วน เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหารเศษส่วนนั้นนักเรียนแปลความหมายของโจทย์โดยใช้วิธีการผิด เรื่องการหาผลหารของจำนวนเต็มด้วยจำนวนคละ ผลหารของจำนวนคละด้วยจำนวนเต็ม ผลหารของจำนวนเต็มด้วยเศษส่วน และผลหารของเศษส่วนด้วยจำนวนเต็ม นักเรียนใช้วิธีเปลี่ยนเครื่องหมายหารเป็นเครื่องหมายคูณ แล้วกลับเศษส่วนของตัวตั้ง

6.1.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

Grinevitch (2004) ศึกษาความเข้าใจวิชาพีชคณิตนามธรรม(abstract algebra) ของนิสิตโดยใช้ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนเพื่อตรวจสอบการเรียนรู้และความเข้าใจมโนทัศน์เรื่องพื้นฐานทฤษฎีกลุ่ม และตรวจสอบการจำแนกลักษณะการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามรูปแบบของไพรีและไคเรนที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงระดับปริญญาตรี โดยใช้การศึกษาเชิงลึกรายกรณีกับนิสิตที่ลงเรียนวิชาพีชคณิตนามธรรมจำนวน 6 คนที่เรียนเรื่องกลุ่มและกลุ่มที่คล้ายกัน การประเมินผลที่ออกแบบพิเศษตามรูปแบบการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนใช้ศึกษาระดับความเข้าใจของนิสิต เก็บข้อมูลการพัฒนาความเข้าใจของนิสิตจากการสังเกตในชั้นเรียนรายวัน การวิเคราะห์งานเกี่ยวกับการเขียน การวิเคราะห์โจทย์ฝึกหัด และการสัมภาษณ์พร้อมการบันทึกเสียง การวิเคราะห์ข้ามกรณีแสดงว่านิสิตที่แสดงความเข้าใจมโนทัศน์เรื่องกลุ่มอย่างลึกซึ้งกว่าจะแสดงความเชี่ยวชาญของความเข้าใจมโนทัศน์เรื่องกลุ่มที่คล้ายกันได้มากกว่า และแสดงความเข้าใจผิดน้อยกว่า แสดงว่ารูปแบบการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนเป็น

เครื่องมือที่ใช้ได้ดีสำหรับจำแนกลักษณะความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงระดับปริญญาตรีของนิสิต

Droujkova (2004) ศึกษาบทบาทของการเปรียบเทียบในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องสัดส่วน ซึ่งจุดมุ่งหมายสุดท้ายของการศึกษานี้คือการออกแบบซอฟแวร์ที่จะช่วยให้บุคคลเกิดการเรียนรู้เรื่องสัดส่วนที่จัดให้แก่นักเรียน 6 คนซึ่งมีอายุตั้งแต่ 13-16 ปี ในระหว่างการสัมภาษณ์ส่วนตัว กระบวนการออกแบบซอฟแวร์ช่วยให้เข้าถึงการเปรียบเทียบที่นักเรียนพัฒนาขึ้นเพื่อการคิดเรื่องสัดส่วน การศึกษาครั้งนี้ใช้ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนร่วมกับรูปแบบเพื่อการพัฒนาสัดส่วนเชิงเหตุผลที่สร้างขึ้น โปรแกรมซอฟแวร์ที่นักเรียนสร้างขึ้นส่งเสริมระบบการเปรียบเทียบ ซึ่งช่วยให้ประสานกับกระบวนการพัฒนาความรู้ในเรื่องสัดส่วน รูปแบบที่ใช้เพื่อการทำกระบวนการนี้ประกอบด้วยความคิดเห็นจากชั้นเรียนเดียวกันซึ่งมีความสัมพันธ์กันและไม่แปรปรวน การค้นพบแสดงว่าความคิดเห็นแต่ละอย่างนี้อาจจะถูกพัฒนาขึ้นผ่านทางการกระทำในโลกที่คล้ายคลึงกันทางด้านคุณภาพและการเพิ่มขึ้นอย่างทวีคูณ

Warner (2005) ได้ศึกษาพฤติกรรมที่แสดงถึงความคิดที่ยืดหยุ่นทางคณิตศาสตร์และการช่วยเหลือนักเรียนให้พัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ รวมถึงพฤติกรรมที่บอกถึงความสามารถในการอธิบายความคิดของตนเองและความคิดของบุคคลอื่น (ด้วยวิธีต่างๆ เช่น การอธิบาย การใช้ การสร้างสิ่งต่างๆ บนฐานความคิดนั้น ผ่านทางการตั้งคำถามและการแสดงถึงความสมบูรณ์หรือไม่สมบูรณ์ของความคิดนั้น) เชื่อมโยงเนื้อหา มีไหวพริบต่อสถานการณ์ทางปัญหาโดยอาศัยปัญหาที่มีอยู่ และนำเสนอความคิดเดิมด้วยวิธีการใหม่ๆ และ/หรือเชื่อมโยงการนำเสนอกับความคิดอื่นๆ กลุ่มทดลองในการวิจัยคือนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีระดับความสามารถแตกต่างกัน โดยสำรวจปัญหาการรวมเชิงซ้อน (complex combinatorics problems) กับการมีส่วนร่วมนอกเวลาเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน ด้วยการอธิบายความคิดของตนเอง ตั้งคำถาม แสดงเหตุผลปกป้องความคิดของตนเอง และพิสูจน์ผลลัพธ์ทั้งหมด รวบรวมข้อมูลด้วยการบันทึกลงวีดีโอและวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีการศึกษารายกรณี ผลจากการวิเคราะห์นำไปสู่การสรุปทั่วไปของการสร้างมโนทัศน์ของความยืดหยุ่นของความคิดทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงที่สัมพันธ์กับทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน การเชื่อมโยงเหล่านี้มีแสดงให้เห็นในการศึกษา 3 กรณีที่แสดงถึงความยืดหยุ่นของพฤติกรรมและการพัฒนาความเข้าใจ ผลการวิจัยแสดงว่าความเข้าใจมีการพัฒนา โดยมีการเปลี่ยนแปลงทั่วไปจากพฤติกรรมต่างๆ เช่น การตั้งคำถาม การอธิบาย และการใช้ความคิด

ของตนเองหรือความคิดของคนอื่น การตั้งสมมติฐาน การเชื่อมโยงในการนำเสนอและการเชื่อมโยงทางเนื้อหา

Jung (2002) ศึกษาวิธีและขอบเขตของการนำเสนอ ผลของความเข้าใจและการพัฒนาความเข้าใจเรื่องการแปลงรูปทางเรขาคณิตของนิสิตในชั้นเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานระดับวิทยาลัยที่ใช้เทคโนโลยีเป็นฐาน โดยมีกรอบการวิจัย 3 เรื่อง คือ 1) เทคโนโลยีในคณิตศาสตร์ศึกษา 2)รูปภาพบนจอคอมพิวเตอร์ การสร้างภาพ(visualization) และการนำเสนอ และ 3) ความเข้าใจและการพัฒนาความเข้าใจ โดยมีสมมติฐานการวิจัย 3 ข้อ คือ 1) วิธีที่นิสิตเสนอส่วนประกอบของการนำเสนอเป็นอย่างไร เช่น การแปลงรูปในชั้นเรียนที่ใช้เทคโนโลยีเป็นฐาน ถ้ามีความแตกต่างของแต่ละส่วนประกอบระหว่างการนำเสนอในครั้งแรกและครั้งที่สอง มีความแตกต่างกันอย่างไร 2) วิธีและขอบเขตการนำเสนอส่งผลต่อความเข้าใจและการพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้เทคโนโลยีเป็นฐานอย่างไร 3) ประโยชน์และอุปสรรคที่เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนเรียนรู้คืออะไร เช่น การแปลงรูปในชั้นเรียนที่ใช้เทคโนโลยีเป็นฐาน ผลการศึกษาพบว่าการนำเสนอสิ่งที่เรียนรู้ในชั้นเรียนของนักเรียนไม่สมดุลกัน โดยนำเสนอด้วยรูปภาพมากที่สุด และตามด้วยการนำเสนอด้วยคำพูด นิสิตมักหลีกเลี่ยงการนำเสนอด้วยการเขียน ยกเว้นถูกสั่งโดยเฉพาะ การพัฒนาความเข้าใจด้านการแปลงรูปขึ้นอยู่กับ a) ความเข้าใจมโนทัศน์พื้นฐาน b) ประโยชน์ของมโนทัศน์พื้นฐาน c) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่กำหนด การนำเสนอด้วยการเขียนอาจมีบทบาทสำคัญต่อกระบวนการเรียนรู้ทั้งหมดถ้าหากใช้กระดาษและปากกาเป็นอุปกรณ์หลักในการศึกษา รูปแบบการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนไม่มีนัยสำคัญในการศึกษานี้เนื่องจากความซับซ้อนของเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์ ขณะที่การย้อนกลับมีนัยสำคัญ อุปสรรคในประสบการณ์ทางเทคโนโลยี คือ ภาพบนจอคอมพิวเตอร์จำกัดการคิดเชิงตรรกของนักเรียน และภาพบนจอคอมพิวเตอร์อาจทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่ผิดพลาด ดังนั้นจึงควรใช้เทคโนโลยีที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น ในอนาคตจึงต้องมีการพัฒนาทฤษฎีหรือเครื่องมือที่ประเมินความเข้าใจและการพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนได้

Carvey (2002) ทำการศึกษาการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในระหว่างการเรียนวิธีสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาของนักศึกษาครูซึ่งได้เข้าร่วมการศึกษาแผนการสอนด้วยการคิดและการวางแผนวิธีการสอนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตรีโกณมิติ โดยในช่วง 5 สัปดาห์แรก นักศึกษาครูมีโอกาสหลากหลายในการแลกเปลี่ยนความคิดและสะท้อนความคิดกับเพื่อนๆ การวิจัยนี้ศึกษาผลผลิตทางคณิตศาสตร์และวิธีสอนสำหรับนักศึกษาครูที่เข้าร่วมในการศึกษาแผนการสอน โดยแบ่งการศึกษาออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกศึกษาการพัฒนาความเข้าใจของ

นักศึกษาครูหนึ่งคนในเนื้อหารูปสามเหลี่ยมมุมฉากตรีโกณมิติ ผลการศึกษาชี้ว่าการพูดคุยเกี่ยวกับภาพที่แต่ละคนคิดเป็นจุดสำคัญของการพัฒนาความเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนของนักศึกษาครู รวมทั้งโอกาสและบริบทที่หลากหลายในการแลกเปลี่ยนความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์นำไปสู่การพัฒนาความเข้าใจเรื่องรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตรีโกณมิติและการพัฒนาความเข้าใจกลวิธีการสอนของนักศึกษาครู ส่วนที่สอง ศึกษาความเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นโดยนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาจำนวน 3 คน ผลจากการวิจัยบ่งชี้ว่า นักศึกษาครูได้รับประโยชน์จากโอกาสที่หลากหลายในการพูดและฟังภาษาทางคณิตศาสตร์ เช่น นักศึกษาครูปรับเปลี่ยนจากการพูดเพื่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นการพูดเพื่อการสอนคณิตศาสตร์ ผลการศึกษายังระบุอีกว่าความสามารถของนักศึกษาครูในการวางแผนเพื่อการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับความเข้าใจของนักศึกษาครู ซึ่งมีความเชื่อมโยงอย่างยิ่งกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

Cohen (1990) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการเรียนการสอนแบบใช้ทักษะโดยตรงในการหารเศษส่วนฐานสิบกับความเข้าใจคณิตศาสตร์ของนักเรียน ตามทฤษฎีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมของ Vygotsky โดยศึกษากับนักเรียน 9 คน ที่มีอายุ 11ปี และ 12 ปี ด้วยการสัมภาษณ์การแก้ปัญหาที่ได้รับมอบหมายในบทเรียน จากการวิเคราะห์การสัมภาษณ์แสดงว่าความเข้าใจไม่ได้มีความคิดเดียว แต่ประกอบด้วย 3 แนวทาง คือ 1) ความเข้าใจด้านกระบวนการ ซึ่งรวมถึงความคิดเกี่ยวกับการใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ (algorithms) 2) ความเข้าใจด้านภาษา ซึ่งประกอบด้วย การควบคุมตัวเองด้านภาษาซึ่งช่วยให้จำลำดับขั้นตอน และวลีการอธิบายที่ใช้ในการอธิบายขั้นตอน 3) ความเข้าใจด้านความสัมพันธ์ ซึ่งรวมถึงความสัมพันธ์เรื่องค่าของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการ ความเข้าใจของนักเรียนมี 2 ประเภท คือ ผู้ที่ทำตามกฎและผู้ที่มีไหวพริบ ผู้ที่ทำตามกฎใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่ขาดความสามารถในการยืดหยุ่นในการใช้ แนวทางการทำความเข้าใจไม่ได้มีการประสมประสานและแนวทางที่สัมพันธ์กันยังไม่ได้รับการพัฒนา ผู้ที่มีไหวพริบใช้กลวิธีมากกว่าและประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ไม่คุ้นเคย แนวทางความเข้าใจมีการประสมประสานดีว่า ความสามารถในการหารของนักเรียนไม่มีความแตกต่างเมื่อจบหน่วยการเรียน หน่วยการเรียนการสอนประกอบด้วย 5 บทเรียน แต่ละบทเรียนมีทักษะและอธิบายด้วยจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยครูใช้เทคนิคการสอน 6 ชนิด คือ 1) เน้นวิธีการทางคณิตศาสตร์ 2) การควบคุมตัวเองด้านภาษา 3) ช่องทางสู่ความเข้าใจเดี่ยว 4) ภาษาในการอธิบาย 5) การอ้างการเรียนการสอนที่ผ่านมา 6) การอ้างกฎ ใช้เทคนิคเหล่านี้เพื่อเพิ่มทักษะและความเข้าใจ ผลการวิจัยนำไปสู่การเสนอแนะการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่อยู่บนฐานของการให้ความหมาย

6.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

6.2.1 งานวิจัยภายในประเทศ

ปราโมทย์ บุญญสิริ (2546) วิจัยการจัดการเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นการปฏิบัติ ทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนได้ดีและสามารถสรุปมโนทัศน์ได้ด้วยตนเอง เช่นในการทดลองกิจกรรมการวัดอุณหภูมิเพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนเต็ม โดยให้นักเรียนทำการทดลองวัดอุณหภูมิของน้ำ น้ำแข็ง และน้ำแข็งปนเกลือ ทำให้นักเรียนได้ข้อค้นพบเกี่ยวกับจำนวนเต็มว่าจำนวนเต็มมีทั้งที่เป็นจำนวนเต็มบวก ศูนย์และจำนวนเต็มลบ และยังทำให้นักเรียนมีเจตคติทางบวกต่อวิชาคณิตศาสตร์อีกด้วย

6.2.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

Beckett (1999)ได้ศึกษาการพัฒนาความเข้าใจด้านมโนทัศน์วิชาสถิติในสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เพื่อการสร้างความรู้ด้วยตนเองของนิสิต เพื่อจำแนกนิสิตที่ไปไม่ถึงระดับของการดำเนินการอย่างมีแบบแผนและเพื่อสำรวจกลวิธีที่สามารถทำให้นิสิตเกิดความเข้าใจด้านมโนทัศน์เรื่องสถิติและความน่าจะเป็น โดยมีสมมติฐานว่าการสอนแบบฝึกหัดที่ใช้แนวคิดการสร้างความรู้ด้วยตนเองจะช่วยให้นิสิตสามารถคิดในระดับที่เป็นรูปธรรม โดยทำการสำรวจสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เพื่อสร้างความรู้ด้วยตนเองที่เน้นการปฏิสัมพันธ์ในกลุ่มของนิสิตในการอภิปราย การแบ่งปัน และการสื่อสารทางด้านความคิด กระบวนการคิดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนิสิต ซึ่งนิสิตเรียนรู้จากปัญหาที่ใช้ข้อมูลจากชีวิตจริง ทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดเขียนตอบเพื่อตัดสินความสามารถในการให้เหตุผลของนิสิตในการดำเนินการระดับก่อนมีแบบแผนหรือมีแบบแผน กลุ่มทดลองสองกลุ่มสร้างสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เพื่อการสร้างความรู้ด้วยตนเอง โดยให้เรียนรู้ด้วยการอภิปรายและการทำงานร่วมกัน อีกสองกลุ่มเป็นกลุ่มควบคุม เมื่อสิ้นสุดภาคการศึกษา นิสิตทุกคนทำแบบสำรวจสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เพื่อการสร้างความรู้ด้วยตนเองเพื่อประเมินความคิดเห็นของนิสิตตามกลวิธีการสอนที่สร้างสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เพื่อการสร้างความรู้ด้วยตนเอง เพื่อวัดผลความเข้าใจด้านมโนทัศน์ทางสถิติและความน่าจะเป็น ผลปรากฏว่ากลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ สอดคล้องกับสมมติฐานที่ว่าสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เพื่อการสร้างความรู้ด้วยตนเองช่วยให้นิสิตเกิดความเข้าใจด้านมโนทัศน์

Boehm (1996) ศึกษาการเชื่อมโยงความเข้าใจมโนทัศน์ในการสอนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยม เศษส่วน และเรขาคณิตพื้นฐาน เพื่อศึกษารูปแบบมโนทัศน์ที่ช่วยความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในแง่ของเทคนิค

หนึ่งที่ใช้เพิ่มความทรงจำ ด้วยการเน้นมโนทัศน์การใช้เครื่องมืออุปกรณ์วัสดุ เพื่อสร้างแบบของวิธีการ เชื่อมโยงการจัดทำเครื่องมือกับขั้นตอนวิธีการ และการพัฒนารูปแบบการคิด โดยใช้การเรียนการสอน 2 แบบ คือ การเรียนการสอนที่ใช้มโนทัศน์เป็นฐานและการเรียนการสอนที่ใช้ตำราเป็นฐาน การเรียนการสอนที่ใช้มโนทัศน์เป็นฐานจะเน้นมโนทัศน์โดยเริ่มด้วยการใช้อุปกรณ์ต่างๆ เป็นสื่อการสอน นำเสนอด้วยภาพ และเชื่อมโยงการปฏิบัติกับกระบวนการคิดที่พัฒนาด้วยการนำเสนอทางสัญลักษณ์ การเรียนการสอนในชั้นเรียนที่ใช้ตำราเป็นฐานดำเนินการโดยไม่ใช้อุปกรณ์เป็นสื่อการสอนและให้เฉพาะการนำเสนอมโนทัศน์ด้วยภาพ ผลการทดสอบหลังเรียนพบว่า นักเรียนที่ได้รับการเรียนการสอนที่เน้นมโนทัศน์เป็นฐานปฏิบัติได้ดีกว่าอย่างมีนัยสำคัญในเรื่องเศษส่วนและเรขาคณิต แต่ดีกว่าเล็กน้อยในเรื่องจำนวนเต็มและทศนิยม

Artuso (1993) ศึกษาความแตกต่างส่วนบุคคลและความแตกต่างของการพัฒนาระดับความเข้าใจมโนทัศน์การให้คุณค่า กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 , 4 และ 6 ชั้นปีละประมาณ 20 คนด้วยการสัมภาษณ์ประเมินผลส่วนบุคคล โดยศึกษาความเข้าใจในบริบทของรูปธรรมของจำนวนที่นำเสนอโดยการใช้แท่งฐานสิบ (base-ten blocks) ขนาดต่างๆ กัน และในบริบทของกึ่งนามธรรมจากการนำเสนอจำนวนโดยการใช้แท่งหน่วยวางในคอลัมน์ที่เหมาะสม ดังนั้นแท่งแต่ละแท่งจึงให้แทนจำนวนในคอลัมน์ ผลการศึกษาพบว่าระดับความเข้าใจมีความแตกต่างกันทั้งระหว่างบุคคลและระหว่างชั้นเรียน นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ไม่ให้การตอบสนองที่ถูกต้องเหมือนกับนักเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 6 ในคำถามความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ รวมถึงการสร้างจำนวน หลักของจำนวน การคำนวณปัญหาการบวกและการคูณ ทั้งโดยการใช้และไม่ใช้การจัดกลุ่ม นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ต้องการการให้กำลังใจมากกว่านักเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 6 แต่อย่างไรก็ตาม หลังจากการเรียนการสอนด้วยการให้กำลังใจ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 สามารถทำได้ดีเช่นเดียวกับนักเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 6 แต่นักเรียนยังมีปัญหาเกี่ยวกับคำถามในโจทย์กับความเข้าใจด้านกระบวนการ การอธิบายการยืมในโจทย์การบวกและการลบ และการแปลงความรู้เรื่องระบบฐานสิบสู่ระบบฐานอื่นๆ การวิจัยพบว่าการเรียนการสอนกึ่งนามธรรมช่วยในการทำความเข้าใจมโนทัศน์ ด้วยการวัดผลความแตกต่างระหว่างบุคคลทำให้จำแนกนักเรียนที่มีความเข้าใจได้ดีออกจากนักเรียนที่ไม่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสรุปได้ว่าการเรียนการสอนควรเน้นการเชื่อมโยงความเข้าใจรูปธรรมไปสู่ความเข้าใจกึ่งนามธรรมและสุดท้ายควรเชื่อมไปสู่ความเข้าใจนามธรรม

Porter (1996) ศึกษาผลของการเขียนเพื่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ต่อความเข้าใจด้านมโนทัศน์และด้านการดำเนินการในวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นระดับวิทยาลัย และเพื่อพัฒนาระบบการ

จำแนกความคลาดเคลื่อนของนิสิตในเนื้อหาแคลคูลัส โดยแบ่งทดสอบกับนิสิต 2 กลุ่มที่ได้รับการเรียนการสอนแบบเดียวกัน ด้วยครูคนเดียวกัน และสอนโดยเน้นมโนทัศน์ของวิชาเดียวกันและมีการอภิปรายถึงกิจกรรมในชั้นเรียน โดยให้นิสิตกลุ่มที่หนึ่งใช้กิจกรรมการเขียน อีกกลุ่มใช้กิจกรรมอื่นๆ ที่ไม่รวมการเขียน จากการทดสอบความคลาดเคลื่อนในวิชาแคลคูลัสของนิสิตทั้งสองกลุ่ม ได้พัฒนาระบบการจำแนกที่ประกอบด้วยความคลาดเคลื่อนด้านการดำเนินการ 2 ประเภท และความคลาดเคลื่อนด้านมโนทัศน์ 4 ประเภท ผลการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่าความคลาดเคลื่อนด้านมโนทัศน์และด้านการดำเนินการของนิสิตทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ นั่นคือ กิจกรรมการเขียนส่งผลต่อความเข้าใจด้านมโนทัศน์และด้านการดำเนินการไม่แตกต่างกับกิจกรรมที่ไม่ใช้การเขียน ซึ่งถ้านิสิตเข้าร่วมในกิจกรรมที่ไม่ใช้การเขียนโดยเน้นมโนทัศน์และใช้การอภิปรายเข้าร่วม นิสิตจะสามารถประสบผลสำเร็จในระดับเดียวกับความเข้าใจของนิสิตที่ใช้กิจกรรมการเขียน

Rittle-Johnson (1999) ได้เสนอรูปแบบซ้ำเพื่อความเข้าใจในการพัฒนาความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการ และรวมไปถึงการเปลี่ยนแปลงการนำเสนอปัญหา งานวิจัยนี้ประเมินรูปแบบที่สร้างขึ้นในการเรียนเรื่องเศษส่วนโดยมีกลุ่มทดลอง 2 กลุ่ม คือนักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 ที่ได้รับการประเมินความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการเรื่องเศษส่วน ทั้งก่อนและหลังช่วงการแก้ปัญหา ในระหว่างการแก้ปัญหานักเรียนแทนเศษส่วนลงบนเส้นจำนวน และอธิบายคำตอบที่ถูกต้อง ผลจากกลุ่มทดลองที่หนึ่งส่งเสริมความสัมพันธ์ของรูปแบบซ้ำ ความรู้ด้านมโนทัศน์ที่มีอยู่ก่อนของนักเรียนสนับสนุนประโยชน์ของความรู้ด้านการดำเนินการ และในขณะเดียวกันประโยชน์ของความรู้ด้านการดำเนินการเหล่านี้ก็ส่งเสริมการปรับปรุงความรู้ด้านมโนทัศน์ด้วย ดังนั้นการนำเสนอปัญหาที่ถูกต้องก็เป็นสื่อสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการที่ได้รับการปรับปรุง ผลจากการวิจัยกลุ่มทดลองที่สองแสดงเป็นหลักฐานในการเชื่อมโยงการนำเสนอปัญหาที่ปรับปรุงแล้วไปสู่ความรู้ด้านการดำเนินการที่ปรับปรุงแล้ว นักเรียนที่ได้รับการส่งเสริมให้แสดงออกจะนำเสนอปัญหาที่ถูกต้องมากกว่าและได้รับประโยชน์จากความรู้ด้านการดำเนินการมากกว่า ซึ่งความสามารถทางคณิตศาสตร์ทั่วๆ ไปมีอิทธิพลที่ขัดแย้งกับการเรียนรู้ของสองกลุ่มตัวอย่างนี้ สุดท้าย ผลจากการวิจัยส่งเสริมรูปแบบซ้ำเพื่อการพัฒนาความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการและให้วิธีการที่เป็นไปได้

Carroll and Porter(1997) ศึกษาผลการใช้หลักสูตรส่งเสริมการสร้างขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ ด้วยการสัมภาษณ์นักเรียนและครู พบว่าในขณะสอนครูมีความกระตือรือร้นเมื่อใช้การค้นคว้าและการร่วมมือมากกว่าการสอนด้วยการจำและการทำแบบฝึกหัดตามขั้นตอน

วิธีการแบบเดิม ครูมีความเข้าใจเรื่องการดำเนินการและการแก้ปัญหาใหม่ๆ และจากการสัมภาษณ์นักเรียนเกรด 4 จากห้องเรียน 10 ห้องที่ได้รับการเรียนตามหลักสูตรส่งเสริมขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียน 67% แก้ปัญหาได้ถูกต้องด้วยการนับหรือวิธีการคล้ายๆ กัน เมื่อถึงฤดูใบไม้ผลิ นักเรียน 80% แก้ปัญหาได้ถูกต้อง ซึ่งเกิดจากการได้รับโอกาสใช้และสำรวจขั้นตอนวิธีการและกลวิธีในการเรียนเกรด 3 และได้พัฒนาความชำนาญยิ่งขึ้น นักเรียนแก้ปัญหาการลบที่มีจำนวนต่างกันมากโดยการนับลดลงครั้งละ 10 และ 5 แต่แก้ปัญหาการลบจำนวนที่ไม่ต่างกันมากด้วยการบวกเข้า แสดงว่านักเรียนมีเครื่องมือในการคำนวณมากขึ้นและเลือกใช้วิธีหนึ่งในการแก้ปัญหา

Teachey (2003) ศึกษาผลสัมฤทธิ์เรื่องการแก้ปัญหาเรื่องฟังก์ชันพหุนามของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ โดยประเมินทั้งความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการ และผลของระบบความเชื่อทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนที่ลงทะเบียนเรียนวิชาพีชคณิต 2 ในโปรแกรมฤดูร้อนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ เก็บข้อมูลด้วยการวัดระดับความเชื่อ การทดสอบในชั้นเรียน และการสัมภาษณ์เชิงลึก ผลการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่านักเรียนมีความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์ต่างๆ ที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันและพหุนามได้อย่างหลากหลาย และนักเรียนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้กับสถานการณ์จริงได้ง่าย แต่อย่างไรก็ตามกลุ่มตัวอย่างก็ได้รับมโนทัศน์ที่ผิดพลาดในความเข้าใจเรื่องบทบาทของตัวแปรอิสระและตัวแปรตามของฟังก์ชัน นักเรียนพยายามใช้มโนทัศน์เรื่องการสมมาตรและหาความสัมพันธ์ของการสมมาตรกับฟังก์ชันพหุนาม

6.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

6.3.1 งานวิจัยภายในประเทศ

กิตติศักดิ์ แก้งทอง (2547) ศึกษาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยม โดยแบ่งระดับการให้เหตุเป็น 4 ระดับ พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงและปานกลางให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ 4 มากที่สุด ส่วนนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ 3 มากที่สุด และให้เหตุผลแตกต่างกันในแต่ละระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ทุกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ให้เหตุผลทาง

คณิตศาสตร์อยู่ระดับ 3 มากที่สุด และให้เหตุผลแตกต่างกันในแต่ละระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน นักเรียนที่มีที่ตั้งของโรงเรียนต่างกันจะมีระดับการให้เหตุผลแตกต่างกัน

ปิยวรรณ ตีระกิตติธนา (2548) ได้วิจัยความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ใช้การสื่อสารแนวคิดเพื่อเพิ่มความสามารถในการให้เหตุผล ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนหลังการใช้กิจกรรมสูงกว่าก่อนการใช้กิจกรรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อเพิ่มความสามารถในการให้เหตุผลมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

วัชรี ขันเชื้อ (2545). ได้ศึกษาความสามารถทางการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการสื่อสารแนวความคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการพูดและการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เมื่อเรียนโดยใช้ชุดการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้น โดยใช้กระบวนการกลุ่มเพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสาร นักเรียนมีความสามารถการสื่อสารแนวความคิดทางคณิตศาสตร์ตามเกณฑ์ร้อยละ 70

ศิริพร รัตนโกสินทร์ (2546) ได้ศึกษาความสนใจในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนการใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ยุพาพักตร์ ทั่งสุข (2546) ได้วางแผนจัดการเรียนรู้โดยการประเมินจากสภาพจริงด้วยการบันทึกพฤติกรรมการสังเกตของครูและนักเรียน ให้นักเรียนประเมินตนเอง และทดสอบย่อยแบบอัตนัย เพื่อวิเคราะห์ความก้าวหน้าทางการเรียนเรื่องอัตราส่วนและร้อยละของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่า ในด้านความรู้นั้นนักเรียนทุกคนมีความเข้าใจอัตราส่วนและร้อยละสามารถทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง แต่นักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อนไม่สามารถทำแบบฝึกหัดที่ซับซ้อนได้ ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้และมีความคิดสร้างสรรค์

สมเดช บุญประจักษ์ (2540) ได้วิจัยการพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ ซึ่งศักยภาพทางคณิตศาสตร์สื่อสารพัฒนาฝึกผ่านกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา ผลการวิจัยพบว่า ศักยภาพด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการคณิตศาสตร์สื่อสารหลังการทดลองกับก่อนการทดลองแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยศักยภาพของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม

ชานนท์ ศรีผ่องงาม (2549) ได้ศึกษาความก้าวหน้าของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนแบบแบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง จำนวนจริง ผลการศึกษาพบว่า ความก้าวหน้าของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองภายหลังเรียนด้วยชุดการเรียนแบบแบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์มีค่าเฉลี่ยตั้งแต่ร้อยละ 70 ขึ้นไป โดยค่าเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 81.02

สุธิดา เกตุแก้ว (2547) ศึกษาผลของการใช้กระบวนการสื่อสารในการจัดการเรียนการสอนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น พบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าร้อยละ 50 และสูงกว่ากลุ่มที่จัดการเรียนรู้ปกติ รวมทั้งยังมีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่จัดการเรียนรู้ปกติ

ประภาวดี เทพทอง (2545) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมปีที่ 5 ที่สอนด้วยกระบวนการสื่อสาร พบว่านักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการสื่อสารมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีปกติ

6.3.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

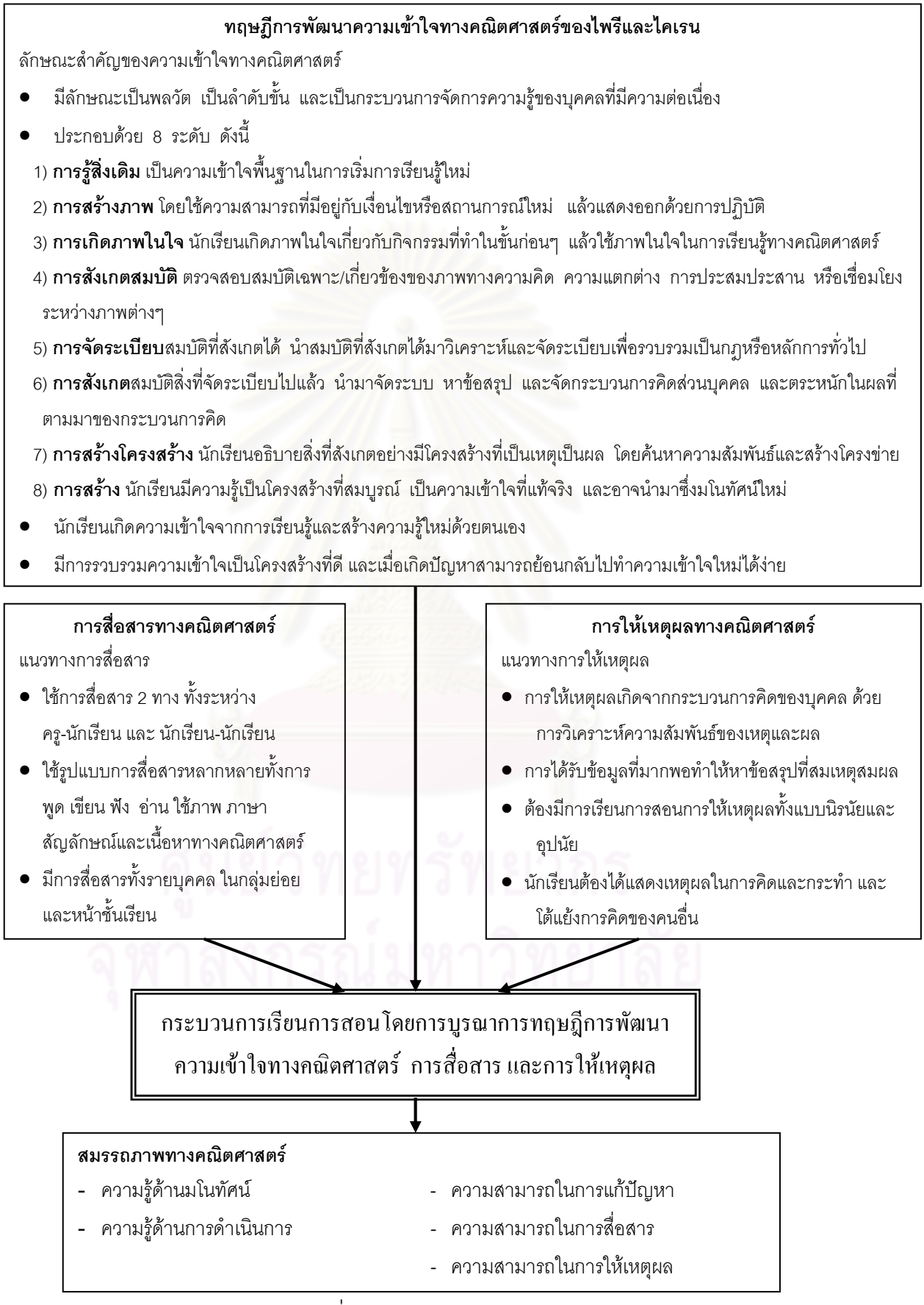
Leighon (2006) ได้ฝึกฝนตรรกทางสัญลักษณ์เพื่อส่งเสริมการให้เหตุผลแบบนิรนัยของนิสิต พบว่า 1) นิสิตกลุ่มที่ฝึกการให้เหตุผลแบบให้เงื่อนไขแบบง่าย สามารถแสดงออกด้วยการปฏิบัติได้ดีกว่ากลุ่มที่ฝึกการให้เหตุผลแบบจำแนก 2) การฝึกฝนตรรกทางสัญลักษณ์ทำให้การแสดงออกด้วยการปฏิบัติเพิ่มขึ้นในการให้เหตุผลแบบจำแนกแบบยาก และลดลงในการให้เหตุผลแบบให้เงื่อนไขแบบยาก 3) การประเมินรูปแบบมีความสำคัญต่อการวัดการเพิ่มขึ้นของการปฏิบัติ โดยรูปแบบการตอบสนองที่ถูกเลือกมีความเหมาะสมกับการวัดการให้เหตุผลแบบจำแนกมากกว่าการให้เหตุผลแบบให้เงื่อนไข ส่วนรูปแบบการตอบสนองที่สร้างขึ้นเหมาะสมกว่าในการให้เหตุผลแบบให้เงื่อนไข

Rojas (1992: 53 – 05A) ได้ศึกษาวิจัยการส่งเสริมการเรียน เรื่อง ความน่าจะเป็น โดยพัฒนานักเรียนด้านทักษะการอ่านและการเขียน โดยให้นักเรียนได้เรียนเป็นกลุ่ม เรียนเนื้อหาเรื่องความน่าจะเป็นและใช้เทคนิคการส่งเสริมกิจกรรมทางภาพในการเรียนคณิตศาสตร์ ฝึกการสื่อสารให้แก่นักเรียนโดยการกระตุ้นให้นักเรียนได้ค้นคว้าโดยการเสริมแรงในการอ่าน เขียน และพูด ผลปรากฏว่า การทดลองนี้ทำให้นักเรียนมีผลการเรียนที่ดีขึ้นในกิจกรรมการเขียน แต่ว่ากิจกรรมการอ่านนักเรียนเห็นประโยชน์เพียงเล็กน้อย โดยไม่รู้ว่าการอ่านมีประโยชน์อย่างไร และอะไรที่เป็นความสามารถในการอ่านของตน

จากการศึกษาเอกสารต่างๆ ข้างต้น สรุปเป็นกรอบแนวคิดในการวิจัยการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ได้ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กรอบแนวคิดการวิจัย



แผนภูมิที่ 9 กรอบแนวคิดการวิจัย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น มีขั้นตอนการดำเนินงานแบ่งออกเป็น 3 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล ประกอบด้วย

1. การศึกษาข้อมูลพื้นฐานด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
2. การศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับแนวคิด ทฤษฎี ที่เกี่ยวข้อง
3. การสร้างกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล

ขั้นที่ 2 การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วย

1. การสร้างแผนการเรียนรู้
2. การสร้างเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล

ขั้นที่ 3 การประเมินผลของกระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วย

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. การดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน
3. การวิเคราะห์ข้อมูล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีลำดับขั้นในการพัฒนาดังนี้

1. การศึกษาข้อมูลพื้นฐานด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ พบว่า

1.1 สภาพปัญหาเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จากการสำรวจกรณีศึกษาของ สมวงษ์ แปลงประสพโชค, สุกัญญา ยีกา และเอนก จันทรจรูญ (2546) ซึ่งแบ่งปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 หมวด คือ เกี่ยวกับตัวนักเรียน เกี่ยวกับหลักสูตร และเกี่ยวกับครู ผลการสำรวจพบว่าครูคิดว่าปัญหาในการสอนคณิตศาสตร์ที่มากที่สุดที่เกี่ยวกับตัวนักเรียนคือ นักเรียนมีพื้นฐานคณิตศาสตร์ไม่ดี รองลงมาคือ นักเรียนไม่สามารถประยุกต์ความรู้ไปใช้แก้ปัญหาได้ และนักเรียนไม่ชอบคิดและไม่ชอบทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง ส่วนปัญหาเกี่ยวกับหลักสูตรที่ครูคิดว่ามีปัญหามากที่สุดคือ เนื้อหาวิชาที่เรียนมากเกินไป รองลงมา คือ ลักษณะวิชาต้องคิดซับซ้อน และสื่อการสอนไม่เพียงพอและสูตรมาก สับสน จำยาก และปัญหาเกี่ยวกับตัวครูที่คิดว่ามีปัญหามากที่สุดคือ ครู ไม่ใช้สื่อการสอนเพื่อช่วยให้เข้าใจ รองลงมาคือครูสอนจริงจังบรรยากาศเครียด และเห็นว่าวิธีการสอนของครูไม่น่าสนใจ

1.2 การศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานช่วงชั้นที่ 3 และแนวทางการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามความมุ่งหวังของหลักสูตร เพื่อนำมาเป็นแนวทางในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับหลักสูตร และเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนสามารถบรรลุจุดประสงค์กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรได้ดียิ่งขึ้น โดยการศึกษาวิเคราะห์จากเอกสารหลักสูตร คู่มือประกอบการใช้หลักสูตร คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ คู่มือการประเมินผลการเรียนการสอนตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานช่วงชั้นที่ 3-4 ซึ่งจัดทำโดยกระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ (2545) ได้ข้อสรุปดังนี้

1.2.1 เป้าหมายหลักของการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ ในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1–3) คือ การพัฒนาทางปัญญา ให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ มีความสามารถในทักษะการเรียนคณิตศาสตร์

1.2.2 ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้นให้เน้นที่ผู้เรียนเป็นสำคัญ โดยได้เสนอแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้ใช้การเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง

1.2.3 ในด้านจุดประสงค์การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นประกอบด้วย 2 ส่วนคือ ความรู้ด้านเนื้อหาสาระ และความรู้ทางด้านทักษะกระบวนการ

1.2.4 ในด้านการวัดและการประเมินผลการเรียน เน้นที่การวัดและประเมินตามสภาพจริง โดยเน้นการประเมินผลระหว่างเรียนตามจุดประสงค์การเรียนรู้โดยพิจารณาจากผลงานของนักเรียน และการประเมินผลรายปีตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่คาดหวังของชั้นปี

2. การศึกษาแนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ศึกษาแนวคิด และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน โดยรวบรวมจากหนังสือ และเอกสารเกี่ยวกับการวิจัย ได้ข้อสรุปดังนี้

2.1.1 ด้านแนวคิดทางความเข้าใจของทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน สรุปได้ดังนี้

1) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการจัดการความรู้ของบุคคลที่มีความต่อเนื่องของการคิดตามระดับขั้น และความเข้าใจระดับต่างๆ ประกอบไปด้วยความเข้าใจในระดับก่อนหน้า

2) ระดับการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ต่างๆ เป็นขั้นของการคิด ซึ่งประกอบด้วย 8 ขั้นคือ การรู้สิ่งเดิม การสร้างภาพ การเกิดภาพในใจ การสังเกตสมบัติ การจัดระเบียบ การสังเกต การสร้างโครงสร้าง และการสร้าง

3) นักเรียนเกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการเรียนรู้ประสบการณ์และสร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง

4) การรวบรวมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้เป็นโครงสร้างที่ดีจะช่วยให้เรียกใช้ความรู้ได้ดี ดังนั้นเมื่อนักเรียนเผชิญกับปัญหาและไม่สามารถหาคำตอบของแก้ปัญหาได้ นักเรียนจะย้อนกลับไปทำความเข้าใจในระดับก่อนหน้า เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้สิ่งใหม่ในระดับที่สูงขึ้น

2.1.2 ด้านการวิจัยความเข้าใจของทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน สรุปได้ดังนี้

1) นักเรียนที่มีความเข้าใจระดับสูงในมโนทัศน์หนึ่ง จะมีความเข้าใจมโนทัศน์อื่นๆ ที่มีความสัมพันธ์กับเนื้อหาวิชาดังกล่าวในระดับสูงเช่นกัน

2) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์สังเกตได้จากการตั้งคำถาม การอธิบาย การใช้ความคิดของตนเองหรือความคิดของคนอื่น การตั้งสมมติฐาน หรือการนำเสนอ เป็นต้น

3) การพัฒนาความเข้าใจจะเกิดขึ้นในโอกาสต่างๆ ของการแลกเปลี่ยนและสะท้อนภาพของการคิดระหว่างกันของผู้เรียน

4) การคิดย้อนกลับไปสู่ระดับความเข้าใจที่ต่ำกว่าและการรวบรวมข้อมูลคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเป็นสิ่งสำคัญที่จะพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และช่วยให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้น

5) ครูสามารถหาแนวทางช่วยเหลือผู้เรียนให้ขยายความเข้าใจในทุกวิถีทาง

2.2 ศึกษาแนวคิด และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยรวบรวมจากหนังสือ และเอกสารเกี่ยวกับการวิจัย ได้ข้อสรุปดังนี้

2.2.1 ด้านแนวคิดการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1) การจัดการเรียนการสอนต้องใช้การสื่อสาร 2 ทาง ทั้งระหว่างนักเรียนกับตัวนักเรียน นักเรียนกับเพื่อน และนักเรียนกับครู

2) ใช้การสื่อสารหลากหลายวิธีการ ทั้งการพูด การฟัง การอ่านและการเขียนเพื่อให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดหรือหลักการ หรือแลกเปลี่ยนความรู้หรือความคิดเห็น แปลความ อธิบายความคิด หรือนำเสนองานต่างๆ ทั้งตัวต่อตัวกับเพื่อน ในกลุ่มย่อยและหน้าชั้นเรียน

3) ต้องใช้เนื้อหา ภาษา ศัพท์ และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลายในการเรียนรู้

4) สื่อสารเนื้อหาสาระที่หลากหลายทั้งข้อเท็จจริง กฎ สูตร นัยทั่วไป ข้อวินิจฉัย ความคิดเห็น

2.2.2 ด้านงานวิจัยการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1) การจัดโอกาสและบริบทที่หลากหลายในการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีขึ้น

2) การเรียนเป็นกลุ่มจะสามารถส่งเสริมการสื่อสารของนักเรียนได้

3) การสื่อสารมีความสัมพันธ์ทางบวกกับความเข้าใจด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

4) นักเรียนมักจะหลีกเลี่ยงการสื่อสารด้วยการเขียน จะเขียนเมื่อถูกสั่งโดยเฉพาะ

5) การประเมินผลตามสภาพจริงด้วยการบันทึกพฤติกรรมการสังเกตของครูและนักเรียน ให้นักเรียนประเมินตนเอง สามารถสังเกตการณ์พัฒนาความสามารถในการสื่อสารของนักเรียนได้

6) นักเรียนที่เรียนโดยใช้กระบวนการสื่อสารจะมีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

2.3 ศึกษาแนวคิด และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยรวบรวมจากหนังสือ และเอกสารเกี่ยวกับการวิจัย ได้ข้อสรุปดังนี้

2.3.1 ด้านแนวคิดการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1) การให้เหตุผลเกิดจากกระบวนการคิดของบุคคล ด้วยการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเหตุและผล

2) การได้รับข้อมูลหรือตัวอย่างที่มากพอ จะทำให้สามารถหาข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดได้

3) นักเรียนได้แสดงเหตุผลในสิ่งที่คิดหรือทำเพื่ออธิบายความเข้าใจของตนเองหรือโต้แย้งบุคคลอื่น

4) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้สามารถทำได้ 2 ลักษณะ คือ

4.1) การสอนแบบแบบอุปนัยนิรนัย ด้วยการให้ตัวอย่างแล้วให้นักเรียนสรุปมโนทัศน์ด้วยตนเอง แล้วนำมโนทัศน์ที่สรุปได้ไปใช้แก้ปัญหา

4.2) การสอนแบบแบบนิรนัย ด้วยการให้หลักการของมโนทัศน์แล้วยกตัวอย่างให้นักเรียนเห็นลักษณะปลีกย่อยของมโนทัศน์นั้นๆ แล้วนักเรียนนำหลักการของมโนทัศน์ไปใช้แก้ปัญหา

2.3.2 ด้านงานวิจัยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1) นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่างกันจะให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

2) การให้แนวคิดในการให้เหตุผลแก่นักเรียนจะส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลสูงขึ้น

3) การประเมินผลตามสภาพจริงด้วยการบันทึกพฤติกรรมการสังเกตของครูและนักเรียน ให้นักเรียนประเมินตนเอง สามารถสังเกตการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนได้

3. การสร้างกระบวนการเรียนการสอน

ในการสังเคราะห์กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้วิจัยดำเนินการตามลำดับขั้นตอนดังนี้

3.1 วิเคราะห์แนวการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน

การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนมองว่าความเข้าใจเป็นกระบวนการจัดการอย่างต่อเนื่องของโครงสร้างความรู้ของแต่ละคน โดยมีแนวคิดดังนี้

1) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มีความเป็นพลวัต ต่อเนื่องตามระดับขั้น โดยความเข้าใจระดับต่างๆ ประกอบไปด้วยความเข้าใจในระดับก่อนๆ

2) การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนมี 8 ระดับ คือการรู้สิ่งเดิม การสร้างภาพ การเกิดภาพในใจ การสังเกตสมบัติ การจัดระเบียบ การสังเกตการสร้างโครงสร้าง และการสร้าง

3) นักเรียนเกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการเรียนรู้ประสบการณ์และสร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง

4) การรวบรวมความเข้าใจเป็นโครงสร้างที่ดีช่วยให้เรียกใช้ความรู้ได้ดี ดังนั้นเมื่อนักเรียนเผชิญกับปัญหาและไม่สามารถหาคำตอบของปัญหาได้ นักเรียนจะย้อนกลับไปทำความเข้าใจในระดับก่อนหน้า เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้สิ่งใหม่ในระดับที่สูงขึ้น

จากระดับขั้นความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนทั้ง 8 ขั้น ซึ่งอธิบายถึงพฤติกรรมที่แสดงออกถึงความเข้าใจในแต่ละขั้น วิเคราะห์ออกมาเป็นพฤติกรรมของความเข้าใจ และจากพฤติกรรมดังกล่าวนำมาวิเคราะห์แนวการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎี ได้ผลดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 9 สรุปแนวการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน

ระดับความเข้าใจ	พฤติกรรมของความเข้าใจ	แนวการจัดการเรียนการสอน
1. การรู้สิ่งเดิม	มีความรู้ความเข้าใจเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ หรือประสบการณ์เดิม	ทบทวนความรู้พื้นฐาน หรือ แลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่นักเรียนเคยพบกับสิ่งที่จะเรียนรู้
2. การสร้างภาพ	การลงมือปฏิบัติเพื่อการเรียนรู้กับเนื้อหาใหม่โดยใช้ความรู้พื้นฐานหรือประสบการณ์เดิม ซึ่งแสดงออกด้วยวิธีการต่างๆ เช่น การพูด การเขียน การวาดภาพ การประกอบวัตถุ การลงมือปฏิบัติกิจกรรม ฯลฯ	จัดประสบการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติ ทดลอง ค้นคว้า และแก้ปัญหา โดยให้นักเรียนนำความรู้หรือประสบการณ์เดิมมาใช้อธิบายความรู้ใหม่ เพื่อขยายความรู้ความเข้าใจให้มากขึ้น
3. การเกิดภาพในใจ	สร้างภาพในความคิดที่เป็นตัวแทนของความรู้ความเข้าใจจากการเรียนรู้ เป็นภาพที่มีลักษณะเป็นนามธรรม	ให้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับความรู้หรือความคิดที่ได้จากการเรียนรู้
4. การสังเกตสมบัติ	ระบุ ตรวจสอบ สังเกตความเหมือนหรือความต่าง ประสม ประสาน เชื่อมโยง คาดคะเน หรือบันทึกสมบัติต่างๆ ของความรู้ที่เรียน	ครูกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตจุดสำคัญต่างๆ ของสิ่งที่เรียน แล้วเขียนระบุออกมาเป็นข้อๆ จากนั้นนำสิ่งที่สังเกตได้มาจัดหมวดหมู่ จัดประเภท จัดลำดับ จากนั้นให้พิจารณาความเหมือน ความแตกต่าง ความสัมพันธ์ ความเชื่อมโยง โดยส่งเสริมการคาดคะเนคำตอบ เทคนิคต่างๆ ที่สามารถนำมาใช้ในการสอนคือ การระดมสมอง การเรียนรู้แบบร่วมมือ เป็นต้น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 9 (ต่อ)

ระดับความเข้าใจ	พฤติกรรมเพื่อความเข้าใจ	แนวการจัดการเรียนการสอน
5. การจัดระเบียบ	นำสมบัติมาวิเคราะห์ จัดระเบียบเป็นกฎหรือหลักการทั่วไป	นำข้อมูลหรือสมบัติที่ได้มาจัดกลุ่มในรูปแบบต่างๆ หรือสรุปเป็นหลักการทั่วไปหรือกฎ โดยครูอาจใช้เทคนิคการเรียนการสอนด้วยการระดมสมอง การเรียนรู้แบบร่วมมือ เป็นต้น
6. การสังเกต	จากสมบัติที่จัดระเบียบไว้นำมาหาข้อสรุป จัดกระบวนการคิดและหาผลของกระบวนการคิดนั้น	เป็นการนำสมบัติที่จัดระเบียบเอาไว้มาประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ใหม่ จัดเป็นกระบวนการในการคิดและการทำคณิตศาสตร์เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจน มีความชำนาญขึ้น
7. การสร้างโครงสร้าง	อธิบายความสมเหตุสมผลของสมบัติที่จัดระเบียบ พิสูจน์ความถูกต้องของข้อสรุปที่ได้ หาความสัมพันธ์และสร้างโครงข่ายความสัมพันธ์	อธิบาย อ้างเหตุผล หรือบอกความสัมพันธ์ของข้อสรุปที่ได้ด้วยกลวิธีต่างๆ เช่น การอุปนัย การนิรนัย การเขียนโครงข่ายความสัมพันธ์
8. การสร้าง	เขียนหรือพูดหรือสรุปข้อความรู้ที่ได้ออกมาเป็นความเข้าใจด้วยภาษาของตนเอง	ให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้ใหม่ออกมาเป็นภาษาของตนเอง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากระดับขั้นความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนทั้ง 8 ขั้นและแนวการจัดการเรียนการสอนที่ได้ นำมาสังเคราะห์เป็นขั้นตอนการเรียนการสอนตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

ตารางที่ 10 ขั้นตอนการเรียนการสอนตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน

ระดับความเข้าใจ	แนวการจัดการเรียนการสอน	ขั้นตอนการเรียนการสอน
1. การรู้สิ่งเดิม	ทบทวนความรู้พื้นฐาน หรือแลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่นักเรียนเคยพบกับสิ่งที่จะเรียนรู้	1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน ทบทวนความรู้พื้นฐาน หรือแลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยพบด้วยการตั้งคำถาม การเล่าเรื่อง หรือการยกตัวอย่างสถานการณ์
2. การสร้างภาพ	จัดประสบการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติ ทดลอง ค้นคว้า โดยให้นักเรียนนำความรู้หรือประสบการณ์เดิมมาใช้อธิบายความรู้ใหม่ เพื่อขยายความรู้ความเข้าใจให้มากขึ้น	2. ขั้นเรียนรู้จากการปฏิบัติ นักเรียนเรียนรู้เนื้อหาใหม่ด้วยการลงมือปฏิบัติ ทดลอง ค้นคว้า ตั้งคำถาม อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นและความรู้ร่วมกับเพื่อนๆ และครู เพื่อระบุสมบัติหรือลักษณะต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียน แล้วนำมาจัดหมวดหมู่ให้มีความสอดคล้องสัมพันธ์กัน เทคนิคต่างๆ ที่สามารถนำมาใช้ในการสอนคือ การระดมสมอง การเรียนรู้แบบร่วมมือ เป็นต้น (ประกอบด้วยขั้นการสร้างภาพ การเกิดภาพในใจและการสังเกตสมบัติของไพรีและไคเรน)
3. การเกิดภาพในใจ	ให้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับความรู้หรือความคิดที่ได้จากการเรียนรู้	
4. การสังเกตสมบัติ	ครูกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตจุดสำคัญต่างๆ ของสิ่งที่เรียน แล้วเขียนระบุออกมาเป็นข้อๆ จากนั้นนำสิ่งที่สังเกตได้มาจัดหมวดหมู่ จัดประเภท จัดลำดับ จากนั้นให้พิจารณาความเหมือน ความแตกต่าง ความสัมพันธ์ ความเชื่อมโยง เทคนิคต่างๆ ที่สามารถนำมาใช้ในการสอนคือ การระดมสมอง การเรียนรู้แบบร่วมมือ เป็นต้น	

ตารางที่ 10 (ต่อ)

ระดับความเข้าใจ	แนวการจัดการเรียนการสอน	ขั้นตอนการเรียนการสอน
5. การจัดระเบียบ	นำข้อมูลหรือสมบัติที่ได้มาจัดกลุ่มในรูปแบบต่างๆ หรือสรุปเป็นหลักการทั่วไปหรือกฎ โดยครูอาจใช้เทคนิคการเรียนการสอนด้วยการระดมสมอง การเรียนรู้แบบร่วมมือ เป็นต้น	3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง นักเรียนรวบรวมข้อความรู้มาพิจารณาความเชื่อมโยง วิเคราะห์หาความสัมพันธ์ แล้วสรุปเป็นกฎหรือหลักการทั่วไป แล้วนำกฎหรือหลักการทั่วไปที่ได้ไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ โดยครูอาจใช้เทคนิคการเรียนการสอนด้วยการระดมสมอง การเรียนรู้แบบร่วมมือ เป็นต้น (ประกอบด้วยขั้นการจัดระเบียบและขั้นการสังเกตของไพรีและไคเรน)
6. การสังเกต	เป็นการนำสมบัติที่จัดระเบียบเอาไว้มาประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ใหม่ จัดเป็นกระบวนการในการคิดและการทำคณิตศาสตร์เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจน มีความชำนาญขึ้น	
7. การสร้างโครงสร้าง	อธิบาย อ้างเหตุผล หรือบอกความสัมพันธ์ของข้อสรุปที่ได้ด้วยกลวิธีต่างๆ เช่น การอุปนัย การนิรนัย การเขียนโครงข่ายความสัมพันธ์	4. สร้างความรู้ของตนเอง นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้ให้เป็นความรู้ของตนเอง ด้วยการเขียนแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สมเหตุสมผล (ประกอบด้วยขั้นการสร้างโครงสร้างและขั้นการสร้างของไพรีและไคเรน)
8. การสร้าง	ให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้ใหม่ออกมาเป็นภาษาของตนเอง	

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.2 วิเคราะห์แนวการจัดการเรียนการสอนโดยใช้กระบวนการสื่อสาร

จากแนวการจัดการเรียนการสอนโดยใช้การสื่อสารของ Rowwan and Morrow (1993) Buschman (1995) และกระทรวงศึกษาธิการ (2545) สรุปได้ดังนี้

1) ใช้เนื้อหา เรื่องราว หรืองานที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวนักเรียน เพื่อให้นักเรียนเห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์และสามารถทำความเข้าใจเนื้อหาได้ง่ายขึ้น

2) ครูนำเสนอสื่อที่เป็นรูปธรรม ให้นักเรียนพรรณนาหรืออภิปรายความคิดเห็นถึงสิ่งที่พบ

3) กำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน

4) ใช้คำถามหรือปัญหาปลายเปิด กระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและแสดงการตอบสนองออกมา

5) ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมในการเรียนรู้ด้วยตนเอง

6) ให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นของตนเอง ด้วยการรายงานสั้นๆ การตอบคำถามจากครูหรือเพื่อน การนำเสนองานที่ได้รับมอบหมาย หรือการอภิปราย

7) ให้นักเรียนเขียนสื่อสารแนวคิด โดยอาจใช้ตาราง กราฟ หรือแผนภูมิประกอบ

8) ครูใช้การเรียนแบบร่วมมือและช่วยเหลือกัน เพื่อให้นักเรียนได้พูดคุย ซักถาม โต้แย้ง แลกเปลี่ยนแนวคิดภายในกลุ่มและส่งเสริมความสามารถในการสื่อสาร

9) ครูใช้การชี้แนะแนวทางในการสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

3.3 วิเคราะห์แนวการจัดการเรียนการสอนด้วยการให้เหตุผล

จากแนวการจัดการเรียนการสอนด้วยการให้เหตุผลของ Baroody and Coslick (1998) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ (2546) และวราภรณ์ มีหนัก (2545) สรุปได้ดังนี้

1) ให้สถานการณ์หรือปัญหาที่นักเรียนสนใจ ไม่ยากเกินความสามารถ

2) ให้นักเรียนให้เหตุผลในการอธิบายหรืออภิปราย แสดงความคิดเห็นในการใช้และให้เหตุผลของตนเอง

3) ให้นักเรียนเขียนอธิบายเหตุผลสิ่งที่นักเรียนทำเพื่อหาคำตอบ

4) ให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ ประเมินการให้เหตุผลของผู้อื่น

5) ให้นักเรียนรู้จักใช้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำหรับการตรวจสอบประกอบการตัดสินใจ หรือพิจารณาความถูกต้อง

6) ผู้สอนสนับสนุนและชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจว่าเหตุผลของนักเรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ มีข้อบกพร่องอย่างไร

3.4 สังเคราะห์แนวการเรียนการสอนจากการสังเคราะห์แนวคิดการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน การสื่อสาร และการให้เหตุผล

จากขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน แนวทางการจัดการเรียนการสอนโดยใช้การให้เหตุผล และแนวทางการจัดการเรียนการสอนโดยใช้การสื่อสาร สังเคราะห์เป็นแนวคิดของกระบวนการเรียนการสอน และขั้นตอนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ได้ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน
การสื่อสาร
บทบาทครู
ก่อนสอน
1) เตรียมเนื้อหา เรื่องราว หรืองานที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวนักเรียน
2) เตรียมคำถาม และสื่อที่เป็นรูปธรรม
3) กำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน
ขณะสอน
1) ตั้งคำถามหรือปัญหาปลายเปิด
2) นำเสนอด้วยวิธีการหลากหลาย เช่น ภาพ กราฟ ตาราง แผนภาพความคิด
3) เปิดโอกาสและกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกิจกรรม ซักถามและแสดงความคิดเห็น
4) ชี้แนะแนวทางในการสื่อสาร
5) ใช้การเรียนแบบร่วมมือให้นักเรียนช่วยเหลือ แลกเปลี่ยนความรู้และประสบการณ์ซึ่งกันและกัน
หลังสอน
1) ชี้ข้อบกพร่องในการสื่อสารของนักเรียน
2) ตั้งคำถามและให้คำแนะนำแนวทางที่ถูกต้อง
บทบาทนักเรียน
1) ลงมือปฏิบัติกิจกรรมในการเรียนรู้ด้วยตนเอง
2) อ่าน รับฟังข้อมูลหรือความคิดของคนอื่น
3) ตอบคำถาม ซักถาม อภิปราย นำเสนอแนวคิด/วิธีแก้ปัญหา แสดงความคิดเห็นร่วมกับเพื่อนและครู
4) เขียน บันทึก สรุป ความรู้ด้วยภาษาของตนเอง และจัดระเบียบความรู้ให้เข้าใจง่าย
1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน ทบทวนความรู้พื้นฐาน หรือแลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยพบด้วยการตั้งคำถาม การเล่าเรื่อง หรือการยกตัวอย่างสถานการณ์
2. ขั้นเรียนรู้จากการปฏิบัติ นักเรียนเรียนรู้เนื้อหาใหม่ด้วยการลงมือปฏิบัติ ทดลอง ค้นคว้า ตั้งคำถาม อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นและความรู้ร่วมกับเพื่อนๆ และครู เพื่อระบุสมบัติหรือลักษณะต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียน แล้วนำมาจัดหมวดหมู่ให้มีความสอดคล้องสัมพันธ์กัน
3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง นักเรียนรวบรวมข้อความรู้มาพิจารณาความเชื่อมโยง วิเคราะห์หาความสัมพันธ์ แล้วสรุปเป็นกฎหรือหลักการทั่วไป แล้วนักเรียนนำกฎหรือข้อสรุปที่ได้ไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ
4. สร้างความรู้ของตนเอง นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้ให้เป็นความรู้ของตนเอง ด้วยการเขียนแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สมเหตุสมผล
การให้เหตุผล
บทบาทครู
ก่อนสอน
1) เตรียมสถานการณ์/โจทย์/ปัญหาที่เหมาะสมนักเรียนสนใจ ไม่ยากเกินความสามารถ
2) เตรียมคำถามทำไม อย่างไร เพราะเหตุใด
ระหว่างสอน
1) ตั้งคำถามให้นักเรียนคิด
2) เปิดโอกาสและกระตุ้นให้นักเรียนแสดงเหตุผลในการคิดและการกระทำ
3) สนับสนุน ชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจว่าเหตุผลของนักเรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ บกพร่องอย่างไร
หลังสอน
1) ชี้ข้อบกพร่องในการให้เหตุผล/ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน
2) ตั้งคำถามและให้คำแนะนำแนวทางที่ถูกต้อง
บทบาทนักเรียน
1) ให้เหตุผลแบบนิรนัย/อุปนัย ในการอธิบาย อภิปราย แสดงความคิดเห็นในการใช้และให้เหตุผลของตนเอง
2) เขียนอธิบายเหตุผล พิสูจน์สิ่งที่นักเรียนทำเพื่อหาคำตอบ
3) คิดวิเคราะห์ ประเมินการให้เหตุผลของผู้อื่น
4) สรุปแนวคิด/ความรู้
5) ใช้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำหรับการตรวจสอบ ประกอบการตัดสินใจหรือพิจารณาความถูกต้อง

ขั้นตอนการเรียนการสอนโดยบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน การสื่อสาร และการให้เหตุผล

1. **ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน**

เป็นขั้นของการเตรียมความพร้อมให้แก่นักเรียน ด้วยการทบทวนความรู้พื้นฐาน

2. **ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ**

2.1 ครูจัดประสบการณ์หรือสถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนนำความรู้หรือประสบการณ์เดิมมาใช้อธิบายความรู้ใหม่ เป็นการขยายความรู้ความเข้าใจให้มากขึ้น

2.2 นักเรียนหาลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม สมบัติ หรือส่วนประกอบต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียน และแสดงเหตุผลแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับความรู้หรือความคิดของตนเองกับเพื่อน

โดยครูอาจใช้เทคนิคการตั้งคำถาม การอภิปราย เป็นต้น

3. **ขั้นสร้างความเชื่อมโยง**

3.1 นักเรียนนำข้อความรู้หรือข้อมูลจากขั้นที่ 2 มาพิจารณาและวิเคราะห์เพื่อจัดลำดับ เชื่อมโยง จัดประเภท หรือจัดหมวดหมู่ แล้วสรุป เป็นข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปด้วยตนเอง

3.2 นักเรียนนำเสนอข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปที่ได้ต่อชั้นเรียนเพื่อร่วมกันอภิปรายและตรวจสอบความถูกต้อง

วิธีการสอนที่ครูสามารถนำมาใช้ในขั้นนี้คือ การระดมสมอง การเรียนแบบร่วมมือ

4. **ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้**

4.1 นักเรียนเขียนข้อสรุปความรู้ที่ได้ให้เป็นความรู้ของตนเอง โดยเขียนให้อยู่ในรูปของโครงสร้างความรู้ที่สมเหตุสมผล

4.2 นักเรียนนำความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้ฝึกทักษะและแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ

แผนภูมิที่ 10 การสังเคราะห์ขั้นตอนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

3.5 นำกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นให้ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบคุณภาพในด้านความเป็นมาของกระบวนการเรียนการสอน แนวคิดที่ใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย หลักการ จุดประสงค์ ขั้นตอนการเรียนการสอน และการวัดและประเมินผล และตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยผู้เชี่ยวชาญได้เสนอแนะให้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีความน่าสนใจ สนุกสนานให้มากขึ้น และในส่วนของการสอนเรื่องแก้ปัญหาควรให้นักเรียนค้นหาสิ่งที่โจทย์ถามก่อนเพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางจะไปสู่คำตอบได้ง่ายขึ้น แล้วจึงจะดำเนินการในขั้นต่อๆ ไป

ขั้นที่ 2 การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีการดำเนินงานดังนี้

1. **การสร้างแผนการเรียนรู้**

ผู้วิจัยจะจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้เพื่อใช้ในการจัดการเรียนรู้ โดยดำเนินการดังนี้

1.1 ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 และหลักสูตรสถานศึกษา หนังสือเรียนและคู่มือครูคณิตศาสตร์(กระทรวงศึกษาธิการ, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549ก, 2549ข) แล้วเลือกตัวอย่างเนื้อหาคณิตศาสตร์มาทดลองสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ได้เนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 5 เรื่อง รวม 68 ชั่วโมง แต่ละเรื่องมีจำนวนคาบที่กำหนดโดยประมาณในหนังสือคู่มือการจัดการเรียนการสอนกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ โดยรวมเวลาทั้งกิจกรรมการเรียนรู้และการประเมินผลระหว่างปีและปลายปีไว้ในแต่ละเนื้อหา ดังนี้

1) การแปลงทางเรขาคณิต

1.1 การเลื่อนขนาน	จำนวน 4 ชั่วโมง
1.2 การสะท้อน	จำนวน 4 ชั่วโมง
1.3 การหมุน	จำนวน 4 ชั่วโมง

2) ความเท่ากันทุกประการ

2.1 การเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต จำนวน 2 ชั่วโมง

2.2 การเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม จำนวน 1 ชั่วโมง

2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน จำนวน 3 ชั่วโมง

2.4 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบมุม – ด้าน – มุม จำนวน 3 ชั่วโมง

2.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – ด้าน – ด้าน จำนวน 2 ชั่วโมง

2.6 การนำไปใช้ จำนวน 3 ชั่วโมง

3) ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

3.1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จำนวน 2 ชั่วโมง

3.2 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 5 ชั่วโมง

3.3 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 5 ชั่วโมง

4) ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง

4.1 จำนวนตรรกยะ จำนวน 3 ชั่วโมง

4.2 จำนวนอตรรกยะ จำนวน 2 ชั่วโมง

4.3 รากที่สอง จำนวน 7 ชั่วโมง

4.4 รากที่สาม จำนวน 6 ชั่วโมง

5) การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

5.1 ทบทวนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จำนวน 3 ชั่วโมง

5.2 การนำไปใช้ จำนวน 9 ชั่วโมง

1.2 เขียนแผนการเรียนรู้ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย ชื่อแผนการเรียนรู้ จำนวนคาบ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สาระสำคัญ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการรู้ การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ โดยกำหนดขั้นตอนหลักของกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นตอนในกระบวนการเรียนการสอนโดยบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ดังนี้

(1) ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน

ครูเตรียมความพร้อมให้แก่นักเรียนด้วยการทบทวนความรู้พื้นฐาน หรือแลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่นักเรียนเคยพบกับสิ่งที่จะเรียนรู้ เพื่อเชื่อมโยงเหตุการณ์หรือเนื้อหาเดิมที่สัมพันธ์กับสิ่งที่จะเรียนรู้ใหม่

(2) ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ

(2.1) ครูจัดประสบการณ์หรือสถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง

(2.2) นักเรียนหาลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม สมบัติ หรือส่วนประกอบต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียน และแสดงเหตุผลแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อน

(3) ขั้นสร้างความเชื่อมโยง

(3.1) นักเรียนนำข้อความรู้หรือข้อมูลต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียนซึ่งได้จากขั้นที่ 2 มาพิจารณาและวิเคราะห์จัดหมวดหมู่ แล้วสรุปข้อมูลออกมาเป็นกฎ หรือหลักการทั่วไปด้วยตนเอง

(3.2) นักเรียนนำเสนอข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปที่ได้ต่อชั้นเรียนเพื่อร่วมกันอภิปรายและตรวจสอบความถูกต้อง

(4) ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้

(4.1) นักเรียนเขียนข้อสรุปความรู้ที่ได้ในรูปของโครงสร้างความรู้ที่สมเหตุสมผล

(4.2) นักเรียนนำความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้ฝึกทักษะและแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ

1.3 นำแผนการเรียนรู้เรื่องการเลื่อนขนานไปทดลองสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนห้วยยอด สังกัดเขตการศึกษาพื้นที่ 2 จังหวัดตรัง จำนวน 1 ห้องเรียน เพื่อตรวจสอบความเป็นไปได้ในการนำไปใช้ในสภาพการเรียนการสอนจริง ได้ข้อมูลการตรวจสอบดังนี้

1) ด้านกิจกรรมการเรียนการเรียนรู้ พบว่า

(1) นักเรียนสามารถลงมือปฏิบัติกิจกรรมในเนื้อหาใหม่โดยใช้ความรู้พื้นฐานที่มีได้

(2) นักเรียนสามารถหาลักษณะร่วม และสมบัติของเนื้อหาที่กำหนดให้ได้ โดยครูต้องให้การชี้แนะให้นักเรียนพิจารณาในบางส่วน

(3) พฤติกรรมของนักเรียนแบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ค่อยพูดคุยหรือแลกเปลี่ยนความคิดในการทำกิจกรรม คนที่ทำไม่ได้มักจะดูของเพื่อนแล้วเขียนตาม และนักเรียนอีกส่วนที่ตั้งใจเรียน ซักถาม หรือแสดงความคิดเห็นกับเพื่อนๆ หรือครู

2) ด้านเวลาที่ใช้ในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า การดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นตอนการสอนหลัก อันได้แก่ ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ ขั้นสร้างความเชื่อมโยง และขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ ให้ครบทั้งสี่ขั้นตอนนั้นต้องใช้เวลามากน้อยตามความยากง่ายของการบรรลุจุดประสงค์และตามลักษณะความต่อเนื่องของเนื้อหาในแต่ละเรื่อง

ผู้วิจัยนำข้อค้นพบจากการทดลองสอนมาทำการปรับปรุงแผนการเรียนรู้ ได้แผนการเรียนรู้จำนวน 26 แผน รวม 56 คาบ คาบละ 55 นาที ดังต่อไปนี้

1) การแปลงทางเรขาคณิต

1.1 การเลื่อนขนาน	จำนวน 3 คาบ
1.2 การสะท้อน	จำนวน 3 คาบ
1.3 การหมุน	จำนวน 4 คาบ

2) ความเท่ากันทุกประการ

2.1 การเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต	จำนวน 0.5 คาบ
2.2 การเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	จำนวน 0.5 คาบ
2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน	จำนวน 3 คาบ
2.4 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบมุม – ด้าน – มุม	จำนวน 3 คาบ
2.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – ด้าน – ด้าน	จำนวน 2 คาบ
2.6 การนำไปใช้	จำนวน 3 คาบ

3) ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

3.1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	จำนวน 2 คาบ
3.2 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	จำนวน 5 คาบ
3.3 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส	จำนวน 3 คาบ

4) ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง

4.1 จำนวนตรรกยะ	จำนวน 2 คาบ
4.2 จำนวนอตรรกยะ	จำนวน 2 คาบ
4.3 รากที่สอง	จำนวน 6 คาบ
4.4 รากที่สาม	จำนวน 5 คาบ

5) การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

5.1 ทบทวนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	จำนวน 3 คาบ
5.2 การนำไปใช้	จำนวน 7 คาบ

2. การสร้างเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อศึกษาผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน โดยสร้างแบบวัดในวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 5 ฉบับ ดังนี้

2.1 แบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จากตำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาหลักสูตรและกำหนดขอบเขตเนื้อหาที่จะสร้างแบบวัดของวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

3) สร้างตารางวิเคราะห์เนื้อหาและพฤติกรรมที่ต้องการวัด เพื่อให้ครอบคลุมเนื้อหาที่กำหนด

4) สร้างแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก ได้แบบวัดจำนวน 36 ข้อ มีเกณฑ์การให้คะแนนโดยตอบตัวเลือกถูกตรงตามเฉลยให้ 1 คะแนน ตอบตัวเลือกผิดไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 ตัวเลือก ให้ 0 คะแนน

5) นำแบบวัดไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา พิจารณาความสอดคล้องระหว่างคำถามกับพฤติกรรมที่ต้องการวัด ลักษณะการใช้คำถาม การเขียนตัวเลือกและตัวลวง รวมทั้งการใช้ภาษาที่ถูกต้อง นำมาปรับปรุงแก้ไข และตัดข้อสอบที่ไม่เหมาะสมออก ทำการคัดเลือกข้อสอบ จนได้ข้อสอบที่มีความสมบูรณ์ 33 ข้อ

คำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิและการปรับปรุงแก้ไขแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

(1) ข้อที่ควรปรับปรุงคำถามให้ชัดเจนขึ้นมีจำนวน 3 ข้อ

(2) ข้อที่ควรปรับปรุงตัวเลือกให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้นมีจำนวน 3 ข้อ ข้อที่ควรปรับปรุงตัวลวงให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้นมีจำนวน 6 ข้อ

6) นำแบบวัดที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวังวิเศษ จังหวัดตรัง จำนวน 93 คน แล้วหาค่าความเที่ยง โดยใช้สูตร คูเดอร์ ริชาร์ดสัน 20 (KR 20) ได้ 0.686 มีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.208 – 0.443 และค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.204 – 0.774 เหลือแบบวัดที่ใช้ในการเก็บข้อมูลจำนวน 30 ข้อ

2.2 แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์จากตำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาหลักสูตรและกำหนดขอบเขตเนื้อหาที่จะสร้างแบบวัดของวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

3) สร้างตารางวิเคราะห์เนื้อหาและพฤติกรรมที่ต้องการวัด เพื่อให้ครอบคลุมเนื้อหาที่กำหนด

4) สร้างแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก ได้แบบวัดจำนวน 46 ข้อ มีเกณฑ์การให้คะแนนโดยตอบตัวเลือกถูกตรงตามเฉลยให้ 1 คะแนน ตอบตัวเลือกผิดไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 ตัวเลือก ให้ 0 คะแนน

5) นำแบบวัดไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา พิจารณาความสอดคล้องระหว่างคำถามกับพฤติกรรมที่ต้องการวัด ลักษณะการใช้คำถาม การเขียนตัวเลือกและตัวลวง รวมทั้งการใช้ภาษาที่ถูกต้อง นำมาปรับปรุงแก้ไข และตัดข้อสอบที่ไม่เหมาะสมออก ทำการคัดเลือกข้อสอบ จนได้ข้อสอบที่มีความสมบูรณ์ฉบับละ 44 ข้อ

คำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิและการปรับปรุงแก้ไขแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

(1) ข้อที่ควรปรับปรุงคำถามให้ชัดเจนขึ้นมีจำนวน 10 ข้อ

(2) ข้อที่ควรปรับปรุงตัวเลือกให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้นมีจำนวน 1 ข้อ ข้อที่ควรปรับปรุงตัวลวงให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้นมีจำนวน 4 ข้อ

6) นำแบบวัดที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนย่านตาขาวรัฐชนูปถัมภ์ จังหวัดตรัง จำนวน 98 คน แล้วหาค่าความเที่ยง โดยใช้สูตรคูเดอร์ ริชาร์ดสัน 20 (KR 20) ได้ 0.80 มีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.21 – 0.78 และค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.20 – 0.79 เหลือแบบวัดที่ใช้ในการเก็บข้อมูลจำนวน 30 ข้อ

2.3 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากตำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหา และพฤติกรรมที่วัดได้จัดเป็นลำดับการเกิดพฤติกรรม

3) คัดเลือกเนื้อหาที่ใช้ในการสร้างแบบวัด

4) สร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นแบบวัดอัตนัย แสดงวิธีทำ ฉบับละ 3 ข้อ

5) สร้างเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบบ rubric อ้างอิงจากเกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ (2546: 138) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 18 – 19) และสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติอเมริกา (NCTM, 2000: 60-63) โดยแต่ละข้อให้คะแนนเต็ม 4 คะแนน ดังนี้

ตารางที่ 11 เกณฑ์คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
4 ดีมาก	- ใช้ยุทธวิธีเหมาะสม - ดำเนินการได้คำตอบถูกต้องทุกขั้นตอน
3 ดี	- ใช้ยุทธวิธีเหมาะสม - ดำเนินการนำไปสู่คำตอบ แต่เข้าใจผิดบางส่วน หรือไม่ได้ตอบปัญหา หรือตอบไม่ถูกต้อง
2 พอใช้	- มียุทธวิธีแก้ปัญหา - ดำเนินการสำเร็จเพียงบางส่วน หรือได้คำตอบถูกต้อง แต่ไม่มีรายละเอียดของการแก้ปัญหา
1 ต้องปรับปรุง	- ไม่มียุทธวิธีแก้ปัญหา - มีร่องรอยของแนวทางหรือการดำเนินการแก้ปัญหาบางส่วน แต่อธิบายต่อไม่ได้ แก้ปัญหาไม่สำเร็จ
0 ไม่ดี	- คำตอบไม่ถูกต้องและไม่มีร่องรอยของการดำเนินการแก้ปัญหา

6) นำแบบวัด ไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา พิจารณาความสอดคล้องระหว่างคำถามกับพฤติกรรมที่ต้องการวัด ลักษณะการใช้คำถาม การเขียนตัวเลือกและตัวลวง รวมทั้งการใช้ภาษาที่ถูกต้อง นำมาปรับปรุงแก้ไขคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิและการปรับปรุงแก้ไข สรุปได้ดังนี้

(1) ควรปรับปรุงความเหมาะสมของเวลาในการสอบ จากที่รวมเวลาในการสอบทั้งสามข้อใช้เวลา 60 นาที เปลี่ยนเป็นระบุเวลาที่ใช้ในการสอบ คือข้อสอบแต่ละข้อสอบหลังจากเรียนจบในแต่ละบทและใช้เวลาสอบข้อละ 15 นาที

(2) ควรปรับปรุงคำถามในข้อ 1 จาก “ใช้เชือกเส้นหนึ่งผูกยอดเสาต้นที่หนึ่งซึ่งสูง 15 เมตร แล้วนำมายึดกับหมุดที่อยู่ห่างจากโคนเสา 8 เมตร จะเหลือเชือก 4 เมตร แล้วถ้าเอาเชือกเส้นเดียวกันไปผูกยอดเสาต้นที่สองซึ่งสูง 16 เมตร นำมายึดกับหมุดที่อยู่ห่างจากโคนเสา 12 เมตร เชือกดังกล่าวจะยึดได้พอดี หรือ เหลือ หรือขาดเท่าใด” เปลี่ยนเป็น “.....เชือกดังกล่าวจะยึดได้พอดีหรือไม่ ถ้าไม่พอดี จะขาดหรือเหลือเชือกยาวเท่าใด”

7) นำแบบวัดที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวิเชียรมาตุ จังหวัดตรัง จำนวน 88 คน แล้วหาค่าความเที่ยง โดยใช้สูตร สัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) แบบวัดก่อนเรียนได้ความเที่ยง 0.836 และแบบวัดหลังเรียนได้ความเที่ยง 0.82 แบบวัดทั้งสองฉบับมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ 0.89 มีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.25 - 0.48 และค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.37 – 0.76

2.4 แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ จากตำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาความสามารถในการสื่อสาร และพฤติกรรมที่วัดได้จัดเป็นลำดับการเกิดพฤติกรรม

3) คัดเลือกเนื้อหาที่ใช้ในการสร้างแบบวัด

4) สร้างแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นแบบวัดอัตนัย แสดงวิธีทำ ฉบับละ 3 ข้อ

5) สร้างเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์แบบ rubric อ้างอิงจากเกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ(2546: 138) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 18 – 19) และสภาครูคณิตศาสตร์แห่งอเมริกา (NCTM, 2000: 60-63) โดยแต่ละข้อให้คะแนนเต็ม 4 คะแนน ดังนี้

ตารางที่ 12 เกณฑ์คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
4 ดีมาก	- ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ถูกต้อง - ใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางประกอบการอธิบายได้ถูกต้อง เหมาะสม - นำเสนอเป็นลำดับขั้นตอนถูกต้อง ชัดเจน และมีรายละเอียดสมบูรณ์
3 ดี	- ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ถูกต้องเป็นส่วนมาก - ใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางประกอบการอธิบายถูกต้อง - นำเสนอเป็นลำดับขั้นตอนถูกต้อง ชัดเจน ขาดรายละเอียดที่สมบูรณ์
2 พอใช้	- ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ถูกต้องบางส่วน - ใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางประกอบการอธิบายถูกต้องบางส่วน - นำเสนอเป็นลำดับขั้นตอน ขาดความชัดเจน ขาดรายละเอียด
1 ต้องปรับปรุง	- ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ถูกต้องบางส่วน - ไม่ใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางประกอบการอธิบาย - นำเสนอไม่เป็นลำดับขั้นตอน ไม่ชัดเจน และขาดรายละเอียด
0 ไม่ดี	- ไม่นำเสนอ

6) นำแบบวัด ไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา พิจารณาความสอดคล้องระหว่างคำถามกับพฤติกรรมที่ต้องการวัด ลักษณะการใช้คำถาม การเขียนตัวเลือกและตัวลวง รวมทั้งการใช้ภาษาที่ถูกต้อง นำมาปรับปรุงแก้ไข

คำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิและการปรับปรุงแก้ไข สรุปได้ดังนี้

(1) ควรปรับปรุงความเหมาะสมของเวลาในการสอบ จากที่รวมเวลาในการสอบทั้งสามข้อใช้เวลา 60 นาที เปลี่ยนเป็นระบุเวลาที่ใช้ในการสอบ คือข้อสอบแต่ละข้อสอบหลังจากเรียนจบในแต่ละบทและใช้เวลาสอบข้อละ 15 นาที

(2) ควรแก้ไขคำในข้อ 2 และ 3 เนื่องจากมีคำที่พิมพ์ผิด

7) นำแบบวัดที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนห้วยยอด จังหวัดตรัง จำนวน 78 คน แล้วหาค่าความเที่ยง โดยใช้สูตร สัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) แบบวัดก่อนเรียนได้ความเที่ยง 0.83

และแบบวัดหลังเรียนได้ความเที่ยง 0.861 แบบวัดทั้งสองฉบับมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ 0.872 มีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.25 – 0.40 และค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.37 – 0.63

2.5 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากตำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผล และพฤติกรรมที่วัดได้จัดเป็นลำดับการเกิดพฤติกรรม

3) คัดเลือกเนื้อหาที่ใช้ในการสร้างแบบวัด

4) สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นข้อสอบเติมคำจำนวน 36 ข้อ โดยแต่ละข้อมีช่องให้เติมคำตอบ 2 ช่อง ช่องแรกเป็นการหาคำตอบของคำถาม ส่วนช่องที่สองเป็นการเติมเหตุผลของคำตอบที่ได้

5) สร้างเกณฑ์การให้คะแนน ช่องแรกตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน ช่องที่สองสองมีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

ตารางที่ 13 เกณฑ์คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
1 ดี	- อ้างอิงเหตุผลถูกต้อง ครบถ้วน
0.5 พอใช้	- อ้างอิงเหตุผลถูกต้องบางส่วน
0 ไม่ดี	- อ้างอิงเหตุผลไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการอ้างเหตุผล

6) นำแบบวัด ไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา พิจารณาความสอดคล้องระหว่างคำถามกับพฤติกรรมที่ต้องการวัด ลักษณะการใช้คำถาม การเขียนตัวเลือกและตัวลวง รวมทั้งการใช้ภาษาที่ถูกต้อง นำมาปรับปรุงแก้ไข เหลือข้อสอบ 36 ข้อ

คำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิและการปรับปรุงแก้ไข คือ ควรปรับปรุงคำถามให้ชัดเจนขึ้นมีจำนวน 7 ข้อ โดยในเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตซึ่งเป็นเรื่องใหม่ คำถาม

ควรมีข้อความนำที่ชัดเจนให้นักเรียนมีแนวทางในการสรุป เช่น ข้อ 1. “จากรูปข้างล่างจงหาพิกัดของจุด E” เปลี่ยนเป็น “จากรูปข้างล่างให้นักเรียนสังเกตการแปลงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งแล้วหาพิกัดของจุด E”

7) นำแบบวัดที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนกันตังพิทยานุสรณ์ จังหวัดตรัง จำนวน 86 คน แล้วหาค่าความเที่ยง โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ได้ความเที่ยง 0.95 มีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.21 – 0.68 และค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.35 – 0.75 เหลือแบบวัดที่ใช้ในการเก็บข้อมูลจำนวน 20 ข้อ

ขั้นที่ 3 การประเมินผลของกระบวนการเรียนการสอน

ในการประเมินผลของกระบวนการเรียนการสอน ดำเนินการโดยการนำแผนการเรียนรู้ไปทดลองใช้ในสถานการณ์จริงเพื่อประเมินกระบวนการเรียนการสอน มีขั้นตอนดังนี้

1. **กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง**

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนแบบสหศึกษา สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ จังหวัดตรัง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2550 โรงเรียนห้วยยอด จังหวัดตรัง แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1.1 การเลือกโรงเรียนห้วยยอด จังหวัดตรัง ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกใช้โรงเรียนห้วยยอด อำเภอห้วยยอด จังหวัดตรัง สังกัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการแบบเจาะจงเป็นโรงเรียนที่ใช้ในการทดลองสอนคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล โดยโรงเรียนห้อยยอดมีลักษณะดังนี้

1.1.1 เป็นโรงเรียนแบบสหศึกษาขนาดใหญ่ มีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในปีการศึกษา 2550 รวมจำนวน 2,608 คน และมีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 576 คน

1.1.2 เป็นโรงเรียนที่นักเรียนส่วนใหญ่มาจากครอบครัวซึ่งมีสถานภาพทางสังคมและเศรษฐกิจในระดับกลางและต่ำ ผู้ปกครองส่วนใหญ่ประกอบอาชีพเกษตรกร

1.2 การคัดเลือกห้องเรียน โรงเรียนห้วยยอดมีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 12 ห้องเรียน โดยมีการจัดนักเรียนเข้าห้องเรียนดังนี้

- ห้อง ม.2/12 เป็นห้องเรียนพิเศษ
- ห้อง ม. 2/11 – ม. 2/6 จัดนักเรียนเข้าห้องโดยเรียงตามลำดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากสูงไปต่ำ
- ห้อง ม.2/5 – ม.2/1 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำคละความสามารถกัน

ผู้วิจัยนำนักเรียนห้อง ม. 2/7 และ ม. 2/8 ซึ่งเป็นนักเรียนที่มีระดับคะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ใกล้เคียงกันมาใช้ในการทดลอง มีจำนวนนักเรียนห้องละ 49 คน รวมนักเรียนทั้งหมด 98 คน

1.3 การสุ่มกลุ่มทดลอง ดำเนินการโดยจับสลากเพื่อจัดเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ได้นักเรียนห้อง ม. 2/7 เป็นกลุ่มควบคุม และห้อง ม. 2/8 เป็นกลุ่มทดลอง

2. การดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

การดำเนินการทดลอง ดำเนินการดังนี้

2.1 การกำหนดแบบแผนการทดลอง

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi-Experimental Research) แบบสองกลุ่มวัดก่อนและหลังการทดลอง (The Pretest-Posttest Control Group Design) ดังแบบแผนการทดลองในตารางที่ 14

ตารางที่ 14 แบบแผนการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	การวัดก่อนการทดลอง		การวัดหลังการทดลอง
E	O_1	X	O_2
C	O_3		O_4

E คือ กลุ่มทดลอง

C คือ กลุ่มควบคุม

O_1, O_3 คือ ค่าที่สังเกตหรือผลที่วัดได้ก่อนการทดลอง

O_2, O_4 คือ ค่าที่สังเกตหรือผลที่วัดได้หลังการทดลอง

X คือ ตัวแปรที่จัดกระทำ (กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล)

2.2 การติดต่อประสานงานก่อนการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

2.2.1 ติดต่อขอความร่วมมือในการทำวิจัยจากผู้บริหารโรงเรียนห้วยยอด จังหวัดตรัง

2.2.2 ชี้แจงวัตถุประสงค์ของการวิจัย ขั้นตอนการวิจัย แนวทางในการจัดการเรียนรู้ และการประเมินผลกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นให้แก่ รองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ และครูผู้รับผิดชอบการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และกำหนดตารางเวลาสอน

2.3 การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

2.3.1 การดำเนินการก่อนทดลอง ผู้วิจัยทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แล้วนำคะแนนจากแบบวัดทั้ง 5 ฉบับมารวมกันเป็นคะแนนก่อนเรียน ผลการทดสอบลักษณะการแจกแจงของคะแนนก่อนเรียน พบว่ามีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ผลการทดสอบความแปรปรวนของคะแนนก่อนเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมได้ค่า sig. = .460 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 ดังนั้นทั้งสองกลุ่มมีความแปรปรวนของคะแนนก่อนเรียนเท่ากัน และผลการทดสอบคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ได้ค่า sig. = .005 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 ดังนั้นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองแตกต่างกับกลุ่มควบคุม ดังนั้นจึงใช้คะแนนก่อนเรียนเป็นตัวแปรร่วมในการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมหลายตัวแปร

2.3.2 การดำเนินการทดลอง ผู้วิจัยเป็นผู้สอนนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม รวม 2 ห้อง ห้องละ 56 คาบ คาบละ 55 นาที และเป็นเวลา 12 สัปดาห์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 ตั้งแต่เดือนพฤศจิกายน 2550 จนสิ้นเดือนมกราคม 2551 เรื่องที่ใช้ในการทดลองคือ เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ความเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในรายวิชา ค32101 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ที่เน้นการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามขั้นตอนของไพรีและไคเรน บูรณาการร่วมกับการสื่อสารและการให้เหตุผล ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามแนวการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 โดยแสดงการเปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมดังตารางที่ 15

ตารางที่ 15 เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน เป็นขั้นของการเตรียมความพร้อมให้แก่นักเรียน ด้วยการทบทวนความรู้พื้นฐาน 2. ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ 2.1 ครูจัดประสบการณ์หรือสถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนนำความรู้หรือประสบการณ์เดิมมาใช้อธิบายความรู้ใหม่ เป็นการขยายความรู้ความเข้าใจให้มากขึ้น 2.2 นักเรียนหาลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม สมบัติ หรือส่วนประกอบต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียนและแสดงเหตุผลแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับความรู้หรือความคิดของตนเองกับเพื่อน 3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง 3.1 นักเรียนนำข้อความรู้หรือข้อมูลจากขั้นที่ 2 มาพิจารณาและวิเคราะห์เพื่อจัดลำดับ เชื่อมโยง จัดประเภท หรือจัดหมวดหมู่ แล้วสรุป เป็นข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปด้วยตนเอง 3.2 นักเรียนนำเสนอข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปที่ได้ต่อชั้นเรียนเพื่อร่วมกันอภิปรายและตรวจสอบความถูกต้อง 4. ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ 4.1 นักเรียนเขียนข้อสรุปความรู้ที่ได้ให้เป็นความรู้ของตนเอง โดยเขียนให้อยู่ในรูปของโครงสร้างความรู้ที่สมเหตุสมผล 4.2 นักเรียนนำความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้ฝึกทักษะและแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ทุกขั้นการเรียนการสอน หากนักเรียนไม่สามารถทำความเข้าใจในขั้นนั้นๆ ให้นักเรียนย้อนกลับไปทำความเข้าใจขั้นก่อนหน้า แล้วครูใช้การตั้งคำถาม ชี้แนะแนวทางเพิ่มเติม	1. ขั้นนำ เป็นการเตรียมความพร้อมเพื่อความสู่กิจกรรม โดยใช้คำถามเชื่อมโยงเนื้อหา ทบทวนความรู้เดิม 2. ขั้นกิจกรรมการเรียนการสอน จัดการเรียนรู้ตามแนวการจัดการเรียนรู้ในคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 โดยคำนึงถึงผู้เรียนเป็นสำคัญและจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ทั้งเนื้อหาและทักษะกระบวนการ เช่น ใช้ปัญหาคำถาม สาธิต หรือให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมรายบุคคลหรือรายกลุ่ม อภิปรายซักถามเพื่อหาข้อสรุป 3. ขั้นฝึกทักษะ นักเรียนนำความรู้หรือแนวคิดไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ต่างๆ เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 4. ขั้นสรุป ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความคิดรวบยอดจากบทเรียน

2.4 การดำเนินการหลังการทดลอง ผู้วิจัยทดสอบนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยแบบวัด 5 ฉบับ ดังนี้

2.4.1 วัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแยกทดสอบ 3 ครั้ง คือ ทดสอบเรื่องแปลงทางเรขาคณิตพร้อมกับความเท่ากันทุกประการหลังเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ทดสอบเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงพร้อมกันหลังเรียนเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และทดสอบเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหลังการสอนทันที

2.4.2 วัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแยกทดสอบ 3 ครั้ง คือ ทดสอบเรื่องแปลงทางเรขาคณิตพร้อมกับความเท่ากันทุกประการหลังเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ทดสอบเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงพร้อมกันหลังเรียนเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และทดสอบเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหลังการสอนทันที

2.4.3 วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยวัดเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยทำการสอบทันทีหลังการสอนแต่ละเรื่อง

2.4.4 วัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยวัดเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยทำการสอบทันทีหลังการสอนแต่ละเรื่อง

2.4.5 วัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแยกทดสอบ 3 ครั้ง คือ ทดสอบเรื่องแปลงทางเรขาคณิตพร้อมกับความเท่ากันทุกประการหลังเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ทดสอบเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงพร้อมกันหลังเรียนเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และทดสอบเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหลังการสอนทันที

3. **การวิเคราะห์ข้อมูล**

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS/PC^{+} for WINDOW ดังนี้

3.1 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (Analysis of Covariance : ANCOVA) โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.2 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.3 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.4 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.5 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

การเปรียบเทียบตัวแปรตามด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมนั้น ผู้วิจัยได้ทำการทดสอบลักษณะของข้อมูลก่อนการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ตามข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ดังนี้

1) ทดสอบความสัมพันธ์ในรูปเชิงเส้นระหว่างตัวแปรร่วมและตัวแปรตามในประชากรด้วยค่าสถิติ F

2) ทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความชันของสมการถดถอยของตัวแปรตามบนตัวแปรร่วมภายในกลุ่มประชากรทุกกลุ่มด้วยค่าสถิติ F

3.6 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม (Multivariate Analysis of Covariance : MANCOVA) โดยใช้คะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.7 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม โดยใช้คะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.8 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม โดยใช้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.9 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม โดยใช้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.10 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม โดยใช้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

การเปรียบเทียบตัวแปรตามด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามนั้น ผู้วิจัยได้ทำการทดสอบลักษณะของข้อมูลก่อนการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ตามข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมหลายตัวแปร ดังนี้

1) variance-covariance matrices ของตัวแปรตามในแต่ละกลุ่มต้องเท่ากัน

2) ตัวแปรตาม p ตัวมีการแจกแจงแบบ multivariate normal คือ linear combination ของตัวแปรตามจะต้องมีการแจกแจงปกติ

3.11 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.12 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.13 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.14 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.15 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิจัยเรื่อง การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น แบ่งออกเป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

ตอนที่ 2 ผลของการประเมินกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ได้พัฒนาขึ้นโดยศึกษาข้อมูลพื้นฐานและสภาพปัญหา ศึกษาแนวคิดทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ สร้างกระบวนการเรียนการสอน ผลจากการดำเนินงานดังกล่าว ทำให้ได้กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการ

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีหลักการดังนี้

1. นักเรียนเป็นศูนย์กลางการเรียนรู้ นักเรียนสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยการเรียนรู้จากประสบการณ์
2. นักเรียนเป็นผู้สร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง
3. การเรียนรู้เนื้อหาคณิตศาสตร์มีความต่อเนื่อง ตามลำดับความเข้าใจ และย้อนกลับมาทำความเข้าใจใหม่ได้
4. มีตัวอย่างที่มากพอในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนได้ข้อสรุปหรือใช้ข้อสรุปกับตัวอย่างดังกล่าว และแสดงเหตุผลในการคิดและการกระทำ
5. นักเรียนเสนอ แลกเปลี่ยนความคิดเห็น เหตุผล หรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยการพูด ฟัง อ่าน และเขียน
6. นักเรียนต้องแสดงความรู้ด้วยการพูดหรือการเขียนเป็นโครงสร้างที่ง่ายต่อการจำและการเรียกใช้งาน

วัตถุประสงค์

เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้านต่าง ๆ ดังนี้

1. ด้านความรู้ ประกอบด้วยความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์
2. ด้านทักษะและกระบวนการ ประกอบด้วย ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

เนื้อหา

มโนทัศน์ การดำเนินการ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

วัดและประเมินผล

1. ความรู้ด้านมโนทัศน์
2. ความรู้ด้านการดำเนินการ
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา
4. ความสามารถในการสื่อสาร
5. ความสามารถในการให้เหตุผล

ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน

1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน เป็นขั้นของการเตรียมความพร้อมให้แก่นักเรียน โดยทบทวนความรู้พื้นฐาน
2. ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ
   2.1 ครูจัดประสบการณ์/สถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง โดยนำความรู้/ประสบการณ์เดิมมาอธิบายความรู้ใหม่
   2.2 นักเรียนหาลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม หรือสมบัติต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียน และแสดงเหตุผลแลกเปลี่ยนความคิดเห็น
3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง
   3.1 นักเรียนพิจารณาและวิเคราะห์ข้อความรู้/ข้อมูลจากขั้น 2 จัดลำดับ เชื่อมโยง จัดประเภท หรือจัดหมวดหมู่ แล้วสรุป เป็นข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปด้วยตนเอง
   3.2 นักเรียนนำเสนอข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปที่ได้ต่อชั้นเรียน อภิปราย ตรวจสอบความถูกต้อง
4. ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้
   4.1 นักเรียนเขียนข้อสรุปความรู้ที่ได้ให้เป็นความรู้ของตนเองในรูปของโครงสร้างความรู้ที่สมเหตุสมผล
   4.2 นักเรียนนำความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้ฝึกทักษะและแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ

แผนภูมิที่ 11 กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

จากแผนภูมิที่ 11 กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น มีรายละเอียดดังนี้

หลักการ

หลักการของกระบวนการเรียนการสอนได้จากการสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน ได้แก่ ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน การสื่อสาร และการให้เหตุผล สรุปหลักการได้ดังนี้

1. นักเรียนเป็นศูนย์กลางการเรียนรู้ นักเรียนเป็นผู้สร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยการเรียนรู้จากประสบการณ์
2. นักเรียนเป็นผู้สร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง
3. การเรียนรู้เนื้อหาคณิตศาสตร์มีความต่อเนื่อง เป็นไปตามลำดับความเข้าใจ และเมื่อนักเรียนไม่สามารถทำความเข้าใจในระดับความเข้าใจหรือการเรียนรู้ที่สูงขึ้นได้ นักเรียนสามารถย้อนกลับมาทำความเข้าใจใหม่ในระดับความเข้าใจหรือการเรียนรู้ระดับต่ำกว่าได้
4. มีตัวอย่างที่มากพอในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนได้ข้อสรุปหรือใช้ข้อสรุปกับตัวอย่างดังกล่าว และแสดงเหตุผลในการคิดและการกระทำ
5. นักเรียนได้เสนอและแลกเปลี่ยนความคิดเห็น เหตุผล หรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยการพูด การฟัง การอ่าน และการเขียน
6. นักเรียนต้องแสดงความรู้ที่สร้างขึ้นได้อย่างชัดเจนด้วยการพูดหรือการเขียนเป็นโครงสร้างที่ง่ายต่อการจำและการเรียกใช้งานโดยการใช้กราฟ ตาราง แผนภูมิ เป็นต้น

วัตถุประสงค์

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผลนี้ เป็นกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีจุดประสงค์เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในด้านต่างๆ ดังนี้

1. ด้านความรู้ ประกอบด้วยความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์
2. ด้านทักษะและกระบวนการ ประกอบด้วยความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

กระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ประกอบด้วยขั้นตอนการเรียนการสอน 4 ขั้น ดังนี้

1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน

เป็นขั้นของการเตรียมความพร้อมให้แก่นักเรียน ด้วยการทบทวนความรู้พื้นฐานเชื่อมโยงเหตุการณ์หรือเนื้อหาที่สัมพันธ์กับสิ่งที่จะเรียนรู้ หรือแลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่นักเรียนเคยพบกับสิ่งที่จะเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนมองเห็นความเชื่อมโยงของเนื้อหาคณิตศาสตร์เดิมกับเนื้อหาใหม่ หรือเห็นประโยชน์ของเนื้อหาคณิตศาสตร์กับการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน โดยครูอาจนำเทคนิคการสอนต่างๆ เช่น การใช้คำถาม การอภิปราย การเล่าเรื่องจากสถานการณ์จริง การใช้วัสดุต่างๆ ประกอบ เป็นต้น

2. ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ

2.1 ครูจัดประสบการณ์หรือสถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนนำความรู้หรือประสบการณ์เดิมมาใช้อธิบายความรู้ใหม่ เป็นการขยายความรู้ความเข้าใจให้มากขึ้น

2.2 นักเรียนหาลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม สมบัติ หรือส่วนประกอบต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียน และแสดงเหตุผลแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับความรู้หรือความคิดของตนเองกับเพื่อน

โดยครูอาจใช้เทคนิคการตั้งคำถาม การอภิปราย เป็นต้น

3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง

3.1 นักเรียนนำข้อความรู้หรือข้อมูล ซึ่งประกอบด้วยลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม สมบัติ หรือส่วนประกอบต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียนซึ่งได้จากขั้นที่ 2 มาพิจารณาและวิเคราะห์เพื่อเชื่อมโยง จัดลำดับ จัดประเภท หรือจัดหมวดหมู่ ด้วยการใช้ตารางหรือแผนผังต่างๆ ตามความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือสมบัติต่างๆ โดยแสดงแนวการคิดให้เห็นความสมเหตุสมผล แล้วสรุปข้อมูลออกมาเป็นข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปด้วยตนเอง

3.2 นักเรียนนำเสนอข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปที่ได้ต่อชั้นเรียนเพื่อร่วมกันอภิปรายและตรวจสอบความถูกต้อง เพื่อให้ได้เป็นข้อสรุปของชั้นเรียน หากนักเรียนสรุปไม่ได้ ครูจะใช้คำถามและให้คำแนะนำให้นักเรียนย้อนกลับไปพิจารณาลักษณะหรือสมบัติต่างๆ ที่ค้นพบให้รอบคอบอีกครั้งหนึ่ง

วิธีการสอนที่ครูสามารถนำมาใช้ในขั้นนี้คือ การระดมสมอง การเรียนแบบร่วมมือ

4. ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้

4.1 นักเรียนเขียนข้อสรุปความรู้ที่ได้ให้เป็นความรู้ของตนเอง โดยเขียนให้อยู่ในรูปของโครงสร้างความรู้ที่สมเหตุสมผลเพื่อเป็นตัวแทนของความรู้ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง เช่น ผังมโนทัศน์ เครือข่ายความรู้ ตาราง เป็นต้น ซึ่งช่วยให้นักเรียนสามารถจำได้ดี

4.2 นักเรียนนำความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้ฝึกทักษะและแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ตามกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ดำเนินการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียนทั้งระยะก่อนเรียนและหลังเรียน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การวัดและประเมินผลการเรียนคณิตศาสตร์ในระยะก่อนการใช้กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วยการวัดและประเมินผลความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. การวัดและประเมินผลการเรียนคณิตศาสตร์หลังการใช้กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วยการวัดและประเมินผลความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ตัวอย่างการบูรณาการสื่อสารและการให้เหตุผลในการจัดการเรียนการสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ดังตารางที่ 16

ตารางที่ 16 ตัวอย่างการบูรณาการการสื่อสารและการให้เหตุผลในการจัดการเรียนการสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

การสื่อสาร	การจัดการเรียนการสอน	การให้เหตุผล
- ครูนำเสนอด้วยภาพ - นักเรียนเขียนสมการด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ - นักเรียนพูดสื่อสารความคิด รับฟัง และแสดงความคิดเห็นด้วยภาษา ศัพท์ สูตร สมการ แปลความหมายทางคณิตศาสตร์	1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน - ให้นักเรียนหาความยาวด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้จำนวน 2 ข้อ บนกระดานดำ - ครูสุ่มนักเรียนจำนวน 2 คนแสดงวิธีหาคำตอบ นักเรียนที่เหลือร่วมกันแสดงความคิดเห็น	- นักเรียนใช้เหตุแบบนิรนัยหาคำตอบ - นักเรียนอธิบายขั้นตอนการหาคำตอบและอ้างเหตุผลของคำตอบที่ได้ วิเคราะห์ ประเมินความถูกต้องของเหตุผลและคำตอบ
- ครูนำเสนอด้วยภาพ ตั้งคำถามและกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกิจกรรมและแสดงความคิดเห็น - ครูตั้งคำถาม นักเรียนอธิบายคำตอบ - นักเรียนอ่านเนื้อหาคณิตศาสตร์ ปฏิบัติกิจกรรม วาดภาพ แปล ความหมาย ซักถาม บันทึก แลกเปลี่ยนความคิด จัดระบบข้อมูลและสรุปแนวคิดคณิตศาสตร์	2. ขั้นเรียนรู้จากการปฏิบัติ 2.1 นักเรียนรวมกลุ่มกลุ่มละ 4–5 คน ปฏิบัติกิจกรรมดังนี้ 2.1.1 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรม “รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก” 2.1.2 ครูสุ่มตัวแทนกลุ่ม 3 กลุ่มนำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน นักเรียนคนอื่นและครูร่วมกันแสดงความคิดเห็นและเสนอแนะเพิ่มเติม จนได้ข้อสรุปว่า “พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก” เป็นความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส	- นักเรียนแสดงเหตุผลในการคิดและทำงานกับเพื่อน สนับสนุนหรือคัดค้านแนวคิดของตนและเพื่อน - นักเรียนอ้างอิงความรู้ ข้อมูล ข้อเท็จจริง คาดคะเนคำตอบ วิเคราะห์ความสัมพันธ์ พิสูจน์ สรุปในแบบรูปที่เข้าใจง่าย - สรุป ตรวจสอบ ประเมินความถูกต้องความสมเหตุสมผลของคำตอบ

ตารางที่ 16 (ต่อ)

การสื่อสาร	การจัดการเรียนการสอน	การให้เหตุผล
- นักเรียนพูดสื่อสารความคิด รับฟัง แสดงความคิดเห็น สาธิตขั้นตอนการทำงาน เขียนสรุปด้วยภาษา ศัพท์ สูตร สมการทางคณิตศาสตร์	2. (ต่อ) 2.1.3 ครูตั้งคำถาม หากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขนาดใหญ่มาก นักเรียนจะใช้การพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสตามกิจกรรมนี้ได้หรือไม่ [ไม่ได้] 2.2 ครูให้นักเรียนพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยให้ทำใบกิจกรรม “ประกอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ” ครูสุ่มตัวแทนกลุ่ม 3 กลุ่มนำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน นักเรียนคนอื่นร่วมกันแสดงความคิดเห็นและเสนอแนะเพิ่มเติม	- หากนักเรียนสรุปไม่ได้ครูตั้งคำถามแนะแนวทางให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์และความเป็นเหตุเป็นผล
- ครูเสนอสถานการณ์ และตั้งคำถามกระตุ้น - ครูตั้งคำถามแนะแนวทางเชื่อมโยงความรู้ - นักเรียนอธิบาย ชี้แจงเหตุผล เชื่อมโยงและสรุปความรู้	3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง 3.1 นักเรียนอธิบายพร้อมทั้งแสดงเหตุผลถึงความแตกต่างและความเหมือนของการอธิบายความหมายสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและการอธิบายความหมายของทฤษฎีบทพีทาโกรัส แล้วสรุปเป็นกฎหรือหลักการทั่วไป	- นักเรียนแสดงเหตุผลสนับสนุนความสัมพันธ์/หมวดหมู่ของข้อมูล จัดลำดับการให้เหตุผลและลงข้อสรุป ตรวจสอบความถูกต้องสมเหตุสมผลของข้อสรุป

ตารางที่ 16 (ต่อ)

การสื่อสาร	การจัดการเรียนการสอน	การให้เหตุผล
- นักเรียนเสนอความคิดที่เหมาะสมกับปัญหา เขียนสื่อสารการคิด อธิบายความคิดอย่างเชื่อมโยงกัน	3. (ต่อ) 3.2 ครูยกตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนเสนอแนวการคิดคำตอบ ครูสุ่มนักเรียนแสดงแนวการคิดจำนวน 2 คน จากนั้นให้นักเรียนแสดงวิธีคิด แล้วครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลย 3.2.1 ครูยกตัวอย่างที่ 2 แล้วดำเนินการเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1 3.2.2 นักเรียนทำใบงาน : ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ครูสุ่มนักเรียนเฉลยคำตอบ	- นักเรียนแสดงเหตุผลประกอบแนวคิด เลือกและใช้วิธีการให้เหตุผลแบบนิรนัย/อุปนัย ประเมินความสมเหตุสมผลของข้อมูล แสดงการคิดเป็นขั้นตอนสมเหตุสมผล ตรวจสอบประเมินความถูกต้อง สมเหตุสมผลของเหตุผล/คำตอบ
- ครูตั้งคำถามและชี้แนวทางการนำเสนอ - นักเรียนใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์สรุปความรู้ ใช้ภาพวาด แผนภาพ แผนผัง ตาราง เสนอความคิด - นักเรียนเสนอความคิดที่เหมาะสมกับปัญหา เขียนอธิบายความคิดเป็นลำดับ	4. ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ 4.1 นักเรียนแต่ละคนนำความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส การพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส วิธีการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส มาเขียนข้อสรุปความรู้ที่ได้ด้วยสัญลักษณ์ที่เข้าใจง่ายขึ้นโดยการเขียนเป็นแผนผังความคิด การสร้างตาราง หรือการวาดภาพประกอบ 4.2 นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.2 ในหนังสือเรียนหน้า 20 ข้อ 1 , 2 ,4, 5, 6 เป็นการบ้าน	- ครูตั้งคำถามให้นักเรียนอธิบายเหตุผล - นักเรียนเขียนอธิบายเป็นขั้นตอนสมเหตุสมผลอ้างอิงความรู้ คาดคะเนคำตอบ ตรวจสอบความถูกต้อง - วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล จัดหมวดหมู่ สรุป ตรวจสอบความสมเหตุสมผล

ตอนที่ 2 ผลของการประเมินกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

การประเมินผลกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ดำเนินการโดยการนำแผนการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นตามกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล นำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนห้วยยอด จังหวัดตรัง ในวิชา ค 32101 จำนวน 2 ห้องเรียน เพื่อประเมินประสิทธิภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดย

1) วิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (Analysis of Covariance) เพื่อเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียน โดยมีตัวแปรอิสระคือกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ตัวแปรร่วมคือคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน ตามลำดับ

2) วิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม (Multivariate Analysis of Covariance) เพื่อเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่อง โดยมีตัวแปรร่วมคือคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน ตามลำดับ

3) ทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนเรียนและหลังเรียน

โดยมีวัตถุประสงค์ในการวิจัยเพื่อประเมินผลกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผลที่พัฒนาขึ้น ซึ่งในการเก็บข้อมูลมีนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมป่วยและขาดสอบห้อง

ละ 1 คน ดังนั้นจึงวิเคราะห์ข้อมูลกลุ่มตัวอย่างกลุ่มละ 48 คน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง มีรายละเอียดดังนี้

2.1 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง

2.1.1 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตารางที่ 17 ผลความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)

	กลุ่ม	Mean($\bar{x}$)	Sd.	Min	Max	Sk	Ku
ก่อนเรียน	ทดลอง	9.35	2.12	5	14	-.05	-.26
	ควบคุม	9.38	2.61	4	16	.68	1.05
หลังเรียน	ทดลอง	17.71	2.52	11	23	-.10	.08
	ควบคุม	15.96	3.00	11	24	.47	-.02

จากตารางที่ 17 เมื่อพิจารณาสถิติบรรยายของคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่า มีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใกล้เคียงกัน และกลุ่มทดลองมีการแจกแจงใกล้เคียงโค้งปกติ

จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนกับหลังเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน และความแปรปรวนของความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนทั้งสองกลุ่มเท่ากัน ดังนั้นจึงวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วย ANCOVA โดยมีความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นตัวแปรร่วมได้

ตารางที่ 18 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F	Sig.
ระหว่างกลุ่ม (b)	1	73.97	73.97	10.066	.001*
ภายในกลุ่ม (w)	93	683.42	7.35		
รวม(t)	94	757.39			

*p < .05

จากตารางพบว่า ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่าความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่าความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05

2.1.2 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตารางที่ 19 ผลความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)

	กลุ่ม	Mean($\bar{x}$)	Sd.	Min	Max	Sk	Ku
ก่อนเรียน	ทดลอง	8.94	2.49	4	15	.44	.01
	ควบคุม	8.02	2.06	4	14	.40	.35
หลังเรียน	ทดลอง	16.73	2.95	13	25	.79	.09
	ควบคุม	14.81	2.90	8	21	.09	-.27

จากตารางที่ 19 เมื่อพิจารณาสถิติบรรยายของคะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่า มีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใกล้เคียงกัน และมีการแจกแจงใกล้เคียงโค้งปกติ

จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า ความสัมพันธ์

ระหว่างความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนกับหลังเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน และความแปรปรวนของความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนทั้งสองกลุ่มเท่ากัน ดังนั้นจึงวิเคราะห์ความรู้ด้านการดำเนินการหลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วย ANCOVA โดยมีคะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นตัวแปรร่วมได้

ตารางที่ 20 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F	Sig.
ระหว่างกลุ่ม (b)	1	63.20	63.20	7.682	.004*
ภายในกลุ่ม (w)	93	765.13	8.23		
รวม(t)	94	828.33			

* $p < .05$

จากตารางผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ พบว่าคะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่าความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05

2.1.3 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตารางที่ 21 ผลความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 12 คะแนน)

	กลุ่ม	Mean($\bar{x}$)	Sd.	Min	Max	Sk	Ku
ก่อนเรียน	ทดลอง	3.38	2.33	0	9	.68	-.26
	ควบคุม	2.08	1.35	0	6	.93	.64
หลังเรียน	ทดลอง	8.52	2.00	4	11	-.67	-.80
	ควบคุม	5.29	1.76	1	9	-.17	-.24

จากตารางที่ 21 เมื่อพิจารณาสถิติบรรยายของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่า มีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแตกต่างกัน โดยกลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานสูงกว่ากลุ่มควบคุม และมีการแจกแจงใกล้เคียงโค้งปกติ

จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนกับหลังเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน และความแปรปรวนของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนทั้งสองกลุ่มเท่ากัน ดังนั้นจึงวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วย ANCOVA โดยมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นตัวแปรร่วมได้

ตารางที่ 22 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F	Sig.
ระหว่างกลุ่ม (b)	1	160.09	160.09	47.292	.000*
ภายในกลุ่ม (w)	93	314.82	3.39		
รวม(t)	94	474.91			

*p < .05

จากตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05

2.1.4 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตารางที่ 23 ผลความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 12 คะแนน)

	กลุ่ม	Mean($\bar{x}$)	Sd.	Min	Max	Sk	Ku
ก่อนเรียน	ทดลอง	1.40	1.05	0	4	1.22	1.27
	ควบคุม	1.42	1.20	0	5	.90	.67
หลังเรียน	ทดลอง	6.04	1.77	2	9	-.42	-.14
	ควบคุม	3.65	1.74	1	9	1.00	1.77

จากตารางที่ 23 เมื่อพิจารณาสถิติบรรยายของคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่า มีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใกล้เคียงกัน

จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนกับหลังเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน และความแปรปรวนของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนทั้งสองกลุ่มเท่ากัน ดังนั้นจึงวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารหลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วย ANCOVA โดยมีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นตัวแปรร่วมได้

ตารางที่ 24 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F	Sig.
ระหว่างกลุ่ม (b)	1	139.51	139.51	57.170	.000*
ภายในกลุ่ม (w)	93	226.94	2.44		
รวม(t)	94	366.45			

*p < .05

จากตารางผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ พบว่าความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่าความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.1.5 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตารางที่ 25 ผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (คะแนนเต็ม 32 คะแนน)

	กลุ่ม	Mean($\bar{x}$)	Sd.	Min	Max	Sk	Ku
ก่อนเรียน	ทดลอง	6.18	2.66	2.0	12.5	.28	-.89
	ควบคุม	5.21	1.98	1.5	11.5	.58	1.02
หลังเรียน	ทดลอง	15.47	4.97	8.0	26.5	.62	-.38
	ควบคุม	12.79	3.63	6.5	22.0	.67	.30

จากตารางที่ 23 เมื่อพิจารณาสถิติบรรยายของคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่า มีคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแตกต่างกัน โดยกลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานสูงกว่ากลุ่มควบคุม และมีการแจกแจงใกล้เคียงโค้งปกติ

จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนกับหลังเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน และความแปรปรวนของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนทั้งสองกลุ่มเท่ากัน ดังนั้นจึงวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารหลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วย ANCOVA โดยมีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นตัวแปรร่วมได้

ตารางที่ 26 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F	Sig.
ระหว่างกลุ่ม (b)	1	146.53	146.53	7.724	.004*
ภายในกลุ่ม (w)	93	1764.35	18.97		
รวม(t)	94	1910.88			

*p < .05

จากตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยมีคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นตัวแปรร่วม พบว่าคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่าคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05

2.1.6 การทดสอบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล และกลุ่มปกติ จำแนกตามเรื่อง คือ เรื่องที่ 1 : การแปลงทางเรขาคณิต เรื่องที่ 2 : ความเท่ากันทุกประการ เรื่องที่ 3 : ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เรื่องที่ 4 : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และเรื่องที่ 5 : การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1) การทดสอบความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จำแนกตามเรื่อง

จากการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม(MANCOVA) ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า เมทริกซ์ความแปรปรวน - ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีขนาดเท่ากัน ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีความสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนของความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแต่ละเรื่องเท่ากัน ดังนั้นสามารถวิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามได้ เพื่อควบคุมตัวแปรแทรกซ้อนที่เกิดจากความแตกต่างของกลุ่มตัวอย่างก่อนเรียน โดยมีตัวแปรตามคือ ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่อง ตัวแปรร่วม คือ ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนทั้ง 5 เรื่อง

ตารางที่ 27 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

อิทธิพล (Effect)	Value	F	df	Error df	Sig.
ความรู้ด้านมโนทัศน์ก่อนเรียน	.93	1.257	5	89	.290
การจัดการเรียนรู้	.85	3.112	5	89	.012*

*p < .05

จากตารางผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม พบว่าความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนไม่มีอิทธิพลต่อความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียน และการจัดการเรียนรู้แตกต่างกันทำให้ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 28 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่อง ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	ตัวแปรตาม	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	เรื่องที่ 1	5.05	1	5.05	7.519	.004*
	เรื่องที่ 2	.00	1	.00	.000	.498
	เรื่องที่ 3	.51	1	.51	1.254	.133
	เรื่องที่ 4	3.04	1	3.04	1.691	.089
	เรื่องที่ 5	15.12	1	15.12	10.080	.001*
ความคลาดเคลื่อน	เรื่องที่ 1	62.51	93	.67		
	เรื่องที่ 2	110.51	93	1.19		
	เรื่องที่ 3	37.89	93	.41		
	เรื่องที่ 4	166.96	93	1.80		
	เรื่องที่ 5	139.51	93	1.50		
รวม	เรื่องที่ 1	740.00	96			
	เรื่องที่ 2	1478.00	96			
	เรื่องที่ 3	181.00	96			
	เรื่องที่ 4	2725.00	96			
	เรื่องที่ 5	1728.00	96			

*p < .05

จากตาราง พบว่า ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ 2 เรื่อง คือ การแปลงทางเรขาคณิต และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่าความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ 3 เรื่อง คือ ความเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ของกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2) การทดสอบความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์จำแนกตามเรื่อง

จากการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม (MANCOVA) ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า เมทริกซ์ความแปรปรวน - ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีขนาดเท่ากัน ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีความสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนของความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแต่ละเรื่องเท่ากัน ดังนั้นสามารถวิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามได้ เพื่อควบคุมตัวแปรแทรกซ้อนที่เกิดจากความแตกต่างของกลุ่มตัวอย่างก่อนเรียน โดยมีตัวแปรตามคือความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่อง ตัวแปรร่วม คือ ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนทั้ง 5 เรื่อง

ตารางที่ 29 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

อิทธิพล (Effect)	Value	F	df	Error df	Sig.
ความรู้ด้านการดำเนินการก่อนเรียน	.94	1.179	5	89	.326
การจัดการเรียนรู้	.79	4.716	5	89	.001*

*p < .05

จากตารางผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม พบว่า ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนไม่มีอิทธิพลต่อความรู้ด้านการดำเนินการทาง

คณิตศาสตร์หลังเรียน และการจัดการเรียนรู้แตกต่างกันทำให้ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05

ตารางที่ 30 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	ตัวแปรตาม	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	เรื่องที่ 1	13.09	1	13.09	17.436	.000*
	เรื่องที่ 2	1.97	1	1.97	1.297	.179
	เรื่องที่ 3	.612	1	.61	.425	.258
	เรื่องที่ 4	3.41	1	3.41	2.717	.052
	เรื่องที่ 5	3.48	1	3.48	3.121	.041*
ความคลาดเคลื่อน	เรื่องที่ 1	69.80	93	.75		
	เรื่องที่ 2	140.97	93	1.52		
	เรื่องที่ 3	133.77	93	1.44		
	เรื่องที่ 4	116.77	93	1.26		
	เรื่องที่ 5	103.66	93	1.12		
รวม	เรื่องที่ 1	1171.00	96			
	เรื่องที่ 2	1828.00	96			
	เรื่องที่ 3	481.00	96			
	เรื่องที่ 4	811.00	96			
	เรื่องที่ 5	1393.00	96			

*p < .05

จากตารางพบว่า ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ 2 เรื่อง คือ การแปลงทางเรขาคณิตและการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่าความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ 3 เรื่อง คือ ความเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วย

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3) การทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จำแนกตามเรื่อง

จากการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม(MANCOVA) ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า เมทริกซ์ความแปรปรวน - ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีขนาดเท่ากัน ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีความสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแต่ละเรื่องเท่ากัน ดังนั้นสามารถวิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามได้ เพื่อควบคุมตัวแปรแทรกซ้อนที่เกิดจากความแตกต่างของกลุ่มตัวอย่างก่อนเรียน โดยมีตัวแปรตามคือความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 3 เรื่องคือ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ตัวแปรร่วม คือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนทั้ง 3 เรื่อง

ตารางที่ 31 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

อิทธิพล (Effect)	Value	F	df	Error df	Sig.
ความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนเรียน	.90	3.394	3	91	.021*
การจัดการเรียนรู้	.66	15.785	3	91	.000*

*p < .05

จากตารางผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแตกต่างกันทำให้ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแตกต่างกัน และการจัดการเรียนรู้แตกต่างกันทำให้ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 32 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	ตัวแปรตาม	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	เรื่องที่ 3	27.64	1	27.64	33.634	.000*
	เรื่องที่ 4	19.79	1	19.79	10.108	.001*
	เรื่องที่ 5	2.69	1	2.69	6.429	.007*
ความคลาดเคลื่อน	เรื่องที่ 3	76.43	93	.82		
	เรื่องที่ 4	182.06	93	1.96		
	เรื่องที่ 5	38.87	93	.42		
รวม	เรื่องที่ 3	1179.00	96			
	เรื่องที่ 4	639.00	96			
	เรื่องที่ 5	211.00	96			

*p < .05

จากตารางพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้ง 3 เรื่อง คือ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4) การทดสอบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์จำแนกตามเรื่อง

จากการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม(MANCOVA) ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า เมทริกซ์ความแปรปรวน - ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีขนาดเท่ากัน ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีความสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแต่ละเรื่องเท่ากัน ดังนั้นสามารถวิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามได้ เพื่อควบคุมตัวแปรแทรกซ้อนที่เกิดจากความแตกต่างของกลุ่มตัวอย่างก่อนเรียน โดยมีตัวแปรตามคือความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 3 เรื่อง คือ

การแปลงทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ตัวแปรร่วม คือ ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนทั้ง 3 เรื่อง

ตารางที่ 33 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

อิทธิพล (Effect)	Value	F	df	Error df	Sig.
ความสามารถในการสื่อสารก่อนเรียน	.70	13.225	3	91	.000*
การจัดการเรียนรู้	.55	25.020	3	91	.000*

*p < .05

จากตารางผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม พบว่าความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแตกต่างกันทำให้ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแตกต่างกัน และการจัดการเรียนรู้แตกต่างกันทำให้ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 34 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	ตัวแปรตาม	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	เรื่องที่ 1	.75	1	.75	.984	.162
	เรื่องที่ 3	88.47	1	88.47	67.082	.000*
	เรื่องที่ 5	2.37	1	2.37	13.217	.000*
ความคลาดเคลื่อน	เรื่องที่ 1	70.70	93	.76		
	เรื่องที่ 3	122.66	93	1.32		
	เรื่องที่ 5	16.70	93	.18		
รวม	เรื่องที่ 1	248.00	96			
	เรื่องที่ 3	814.00	96			
	เรื่องที่ 5	135.00	96			

*p < .05

จากตารางพบว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 2 เรื่อง คือ ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

5) การทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จำแนกตามเรื่อง

จากการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม (MANCOVA) ดังรายละเอียดในภาคผนวก จ พบว่า เมทริกซ์ความแปรปรวน - ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีขนาดเท่ากัน ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่องมีความสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแต่ละเรื่องเท่ากัน ดังนั้นสามารถวิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามได้ เพื่อควบคุมตัวแปรแทรกซ้อนที่เกิดจากความแตกต่างของกลุ่มตัวอย่างก่อนเรียน โดยมีตัวแปรตามคือความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแต่ละเรื่อง ตัวแปรร่วม คือ ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนทั้ง 5 เรื่อง

ตารางที่ 35 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนตามเนื้อหาคณิตศาสตร์ 5 เรื่อง ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

อิทธิพล (Effect)	Value	F	df	Error df	Sig.
ความสามารถในการให้เหตุผลก่อนเรียน	.97	.521	5	89	.760
การจัดการเรียนรู้	.68	8.245	5	89	.000*

*p < .05

จากตารางผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม พบว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนไม่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียน และการจัดการเรียนรู้แตกต่างกันทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

ตารางที่ 36 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แหล่งความแปรปรวน	ตัวแปรตาม	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	เรื่องที่ 1	1.92	1	1.92	.740	.196
	เรื่องที่ 2	.80	1	.80	.187	.333
	เรื่องที่ 3	4.04	1	4.04	7.119	.005*
	เรื่องที่ 4	1.71	1	1.71	.716	.200
	เรื่องที่ 5	42.36	1	42.36	35.707	.000*
ความคลาดเคลื่อน	เรื่องที่ 1	241.30	93	2.60		
	เรื่องที่ 2	397.04	93	4.27		
	เรื่องที่ 3	52.73	93	.57		
	เรื่องที่ 4	222.02	93	2.39		
	เรื่องที่ 5	110.32	93	1.19		
รวม	เรื่องที่ 1	1274.75	96			
	เรื่องที่ 2	2013.39	96			
	เรื่องที่ 3	224.00	96			
	เรื่องที่ 4	1037.75	96			
	เรื่องที่ 5	773.00	96			

*p < .05

จากตารางพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 2 เรื่อง คือ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนกลุ่มที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 3 เรื่อง คือ การแปลงทางเรขาคณิต ความเท่ากันทุกประการ และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 28, 30, 32, 34 และ 36 สรุปการเปรียบเทียบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมจำแนกตามเรื่องได้ดังตารางที่ 37

ตารางที่ 37 เปรียบเทียบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในแต่ละเรื่องของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

เรื่อง	กลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม				
	มโนทัศน์	ดำเนินการ	แก้ปัญหา	สื่อสาร	ให้เหตุผล
การแปลงทางเรขาคณิต	✓	✓			
ความเท่ากันทุกประการ					
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส			✓	✓	✓
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง			✓		
การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	✓	✓	✓	✓	✓

จากตารางพบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนสูงกว่ากลุ่มควบคุมในเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ส่วนเรื่องความเท่ากันทุกประการนักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนไม่สูงกว่ากลุ่มควบคุม

2.2 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ สามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

2.2.1 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ตารางที่ 38 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

	Mean($\bar{x}$)	SD.	t	Sig.
คะแนนก่อนเรียน	9.35	3.063	18.896	.000*
คะแนนหลังเรียน	17.71			

*p < .05

จากตารางพบว่าความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังทดลองสูงกว่าก่อนทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

2.2.2 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ตารางที่ 39 ผลการวิเคราะห์ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

	Mean($\bar{x}$)	SD.	t	Sig.
คะแนนก่อนเรียน	8.94	3.287	16.421	.000*
คะแนนหลังเรียน	16.73			

*p < .05

จากตารางพบว่าความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังทดลองสูงกว่าก่อนทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

2.2.3 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ตารางที่ 40 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

	Mean($\bar{x}$)	SD.	t	Sig.
คะแนนก่อนเรียน	3.38	2.609	13.664	.000*
คะแนนหลังเรียน	8.52			

*p < .05

จากตารางพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังทดลองสูงกว่าก่อนทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

2.2.4 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

ตารางที่ 41 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

	Mean($\bar{x}$)	SD.	t	Sig.
คะแนนก่อนเรียน	1.40	1.509	21.335	.000*
คะแนนหลังเรียน	6.04			

*p < .05

จากตารางพบว่าความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังทดลองสูงกว่าก่อนทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

2.2.5 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

ตารางที่ 42 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

	Mean($\bar{x}$)	SD.	t	Sig.
คะแนนก่อนเรียน	6.18	5.553	11.592	.000*
คะแนนหลังเรียน	15.47			

*p < .05

จากตารางพบว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังทดลองสูงกว่าก่อนทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

2.3 ผลการศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในกลุ่มทดลอง

การศึกษาพัฒนาการของนักเรียนซึ่งได้จากการสังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน ให้นักเรียนประเมินเพื่อนด้วยแบบประเมินความสามารถด้านการพูดสื่อสาร และพฤติกรรมด้านการให้เหตุผล นักเรียนมีพัฒนาการดังนี้

2.3.1 พัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การพัฒนาในการแก้ปัญหาแก้ปัญหาของนักเรียนได้แยกพิจารณาเป็น 4 ขั้นของการแก้ปัญหา คือ

1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ในการเรียนการสอน ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ต้องการหา จากนั้นให้นักเรียนคิดถึงความรู้ที่ต้องใช้ในการคำตอบดังกล่าว ซึ่งปรากฏว่านักเรียนสามารถทำได้ดี ระบุสิ่งต่างๆ ได้ถูกต้อง

2) ขั้นวางแผนแก้ปัญหา นักเรียนทราบทุกอย่างภายในโจทย์และความรู้ที่ต้องใช้ แต่นักเรียนไม่สามารถลำดับแนวคิดหรือวิธีการเพื่อจะไปให้ถึงคำตอบที่ต้องการ และนักเรียนส่วนใหญ่ไม่เขียนขั้นตอนนี้ลงในการทำงานทั้งในระหว่างการเรียนซึ่งครูเขียนให้ดูเป็นตัวอย่าง และในการทำงานส่งครู ซึ่งครูแก้ไขการสอนโดยให้นักเรียนพิจารณาสิ่งต่างที่ได้ในขั้นทำความเข้าใจปัญหา แล้วนำมาวางแผนการหาคำตอบให้เห็นเป็นแผนผังของความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนด สิ่งที่โจทย์ถาม ความรู้ที่ต้องใช้ และลำดับของการคิดเพื่อไปสู่คำตอบที่ต้องการเป็นตัวอย่าง แล้วให้นักเรียนลองเขียนแผนผังของความสัมพันธ์ดังกล่าวในโจทย์ข้ออื่นๆ

ซึ่งนักเรียนสามารถวางแผนการแก้ปัญหาได้ดีขึ้น แต่เมื่อในระยะต่อมานักเรียนมักไม่ค่อยเขียนแผนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา แต่ข้ามไปแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบเลย

3) ขั้นดำเนินการตามแผน ในขั้นตอนนี้หากนักเรียนสามารถวางแผนได้ถูกต้องก็จะสามารถดำเนินการได้ แต่นักเรียนบางส่วนมีปัญหาด้านการคำนวณและมักทำข้ามขั้นตอนจนมองไม่เห็นว่าเกิดการผิดพลาดขึ้นที่ใด ซึ่งครูให้คำแนะนำโดยให้นักเรียนกลับไปท่องสูตรคูณและทำงานให้ละเอียดขึ้น

4) ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบ ในช่วงแรกของการเรียกการสอนไม่มีนักเรียนทำขั้นตอนนี้ให้เห็นเป็นรูปธรรมเลย เมื่อได้คำตอบของโจทย์แล้วนักเรียนเขียนคำตอบ ซึ่งบางครั้งคำตอบผิดและเมื่อครูสอบถามว่าผิดตรงไหนนักเรียนก็ไม่สามารถบอกได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้กับโจทย์ที่กำหนดและแสดงการตรวจคำตอบให้เห็นก่อนการเขียนตอบ เช่น เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสซึ่งโจทย์กำหนดความยาวของด้านประกอบมุมฉาก 1 ด้าน และความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมาให้แล้วให้ความยาวของด้านประกอบมุมฉาก แล้วนักเรียนหาค่ามาได้มากกว่าความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก แสดงให้เห็นว่ามีการผิดพลาดในขั้นตอนขั้นตอนหนึ่งในการแก้ปัญหา เพราะคำตอบที่ได้ขัดแย้งกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก นักเรียนจึงต้องกลับไปทำความเข้าใจและตรวจสอบการทำงานของตนเองใหม่อีกครั้ง เป็นต้น ต่อมานักเรียนจึงเขียนการพิสูจน์คำตอบมากขึ้น แต่ในระยะหลังของการเรียนการสอนที่ครูให้นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาโดยครูไม่ได้แสดงขั้นตอนการพิสูจน์ทุกครั้งในการแสดงตัวอย่าง ทำให้นักเรียนละเลยการเขียนแสดงวิธีตรวจสอบ

จากพัฒนาการในการแก้ปัญหาของนักเรียนดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าครูต้องมีความคงเส้นคงวาในการแสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนต่างๆ หากครูละเลยหรือคิดว่านักเรียนน่าจะปฏิบัติได้เหมือนที่เคยเรียนและเคยทำมาก่อน นักเรียนก็จะละเลยไม่ปฏิบัติตามที่ครูทำเพราะคิดว่าขั้นตอนดังกล่าวไม่สำคัญ

2.3.2 พัฒนาการของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

1) การสื่อสารโดยการพูด จากการประเมินการสื่อสารด้วยแบบประเมินการสื่อสารด้านการพูดโดยให้นักเรียนประเมินเพื่อนด้วยการจับคู่ แล้วเลือกรายการจากแบบประเมินทักษะการสื่อสารโดยการพูดจำนวน 5 ครั้ง พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ประเมินให้เพื่อนมีความสามารถทางการสื่อสารโดยการพูดมากขึ้นกว่าการประเมินในครั้งแรกๆ ซึ่งจากการสังเกตในชั้นเรียนพบว่าในช่วงแรกนักเรียนไม่ค่อยพูดคุยในเรื่องคณิตศาสตร์กันทั้งกับเพื่อนและกับครู โดยในช่วงแรกนักเรียนที่ไม่เข้าใจแนวคิดหรือเนื้อหาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มักนั่งเฉยๆ รอให้ครูบอกหรือเฉลย หรือดูการทำงานจากเพื่อนที่อยู่ข้างๆ โดยไม่ถาม แม้ว่าเพื่อนคนนั้นจะเข้าใจหรือไม่ก็

ตาม หรือเมื่อครูถามนักเรียนโดยตรงนักเรียนก็จะไม่เต็มใจตอบ ในส่วนของการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนพบว่าในช่วงแรกของการเรียนการสอน สมาชิกที่เป็นผู้นำในการทำงานและเป็นผู้ที่ทำงานเป็นส่วนมากจะเป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนดี และมักเป็นคนเดิมทุกครั้ง ส่วนนักเรียนที่เรียนอ่อนมักนั่งมองเพื่อนทำงานและช่วยเหลือเล็กๆ น้อยๆ ครูจึงให้กำลังใจนักเรียนโดยการบอกให้นักเรียนพูดโดยไม่ต้องอายและไม่ต้องกลัวว่าคำตอบจะผิด เพราะคนมีโอกาสผิดพลาดได้และหากไม่พูดออกมาก็จะไม่รู้ว่าเราเข้าใจผิด และครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เดินไปถามความเห็นจากเพื่อนที่ตนเองสนิทแต่นั่งอยู่ไกล ส่งเสริมให้นักเรียนที่เข้าใจแล้วอธิบายให้นักเรียนที่ยังไม่เข้าใจฟังโดยการมอบหมายความรับผิดชอบให้โดยตรง ครูเดินดูการทำงานของนักเรียนและถามเพื่อให้นักเรียนอธิบายสิ่งที่นักเรียนทำเป็นรายบุคคล และใช้การสุ่มนักเรียนออกมาเสนอหน้าชั้นเรียน โดยให้นักเรียนเป็นผู้เสนอเลขที่ของนักเรียนแต่ครูเป็นคนเลือก โดยครูอาจเลือกตามที่นักเรียนเสนอมา หรือใช้เลขที่ดังกล่าวเลือกคนใหม่ หรือครูเลือกด้วยตนเองสลับกันไปทำให้นักเรียนสนุกสนานและตื่นเต้นกับนำเสนอในชั้นเรียนมากขึ้น เป็นต้น ต่อมานักเรียนมีการปรับเปลี่ยนพฤติกรรมโดยเด็กเก่งอธิบายให้เด็กอ่อนฟัง และเด็กอ่อนก็ตั้งใจเรียนมากขึ้น โดยสังเกตได้จากนักเรียนความกล้าในการพูดแสดงความคิดเห็นทั้งกับเพื่อนและกับครูมากขึ้น นำเสนอได้ดีขึ้น แต่โดยรวมแล้วนักเรียนสามารถสื่อสารกับเพื่อนเป็นรายบุคคลได้ดีกว่าการสื่อสารกับครูหรือสื่อสารต่อกลุ่มใหญ่ และส่วนมากมักหลีกเลี่ยงการนำเสนอ และมีนักเรียนบางคนที่มีความกล้าแสดงออกและต้องการนำเสนอความคิดหน้าชั้นเรียน แต่เพื่อนนักเรียนมักล้อเลียนจนนักเรียนคนดังกล่าวต้องลดพฤติกรรมลง

2) การสื่อสารโดยการเขียน นักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องในการสื่อสารด้วยการเขียน เช่น นักเรียนไม่สามารถวาดภาพทิศทางต่างๆ ได้ บางครั้งนักเรียนวาดรูปได้แต่ไม่อธิบายวิธีการได้มาของรูปดังกล่าว จากการสังเกตจากสมุดคณิตศาสตร์พบว่าในช่วงแรกของการเรียนการสอนซึ่งครูได้เน้นให้นักเรียนเขียนเพื่อการสื่อสารโดยครูยกตัวอย่างวิธีการสื่อสารต่างๆ เช่น การใช้ตาราง แผนผัง กราฟ เป็นต้น นักเรียนได้เขียนสื่อสารตามแบบอย่างที่ครูนำเสนอและคิดวิธีการนำเสนอด้วยตนเองบ้าง แต่เมื่อครูให้นักเรียนเขียนการนำเสนอด้วยตนเองโดยครูไม่แสดงหรือเขียนเป็นตัวอย่าง จำนวนนักเรียนที่สื่อสารด้วยการเขียนกราฟ ตาราง หรือแผนผังลดน้อยลง และหากในเนื้อหาหรืองานใดที่ครูไม่ได้ระบุให้ใช้การนำเสนอโดยตรง จะมีนักเรียนนำเสนอมาน้อยมาก และนักเรียนมักไม่เขียนอธิบายการคิด เช่น ในการเรียนเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนไม่เขียนการกำหนดตัวแปร หรือการแปลงประโยคภาษานั้นแปลงเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้อย่างไร แต่นักเรียนจะข้ามไปเขียนประโยคสัญลักษณ์ของสมการที่เดียว ทำให้การทำงานของนักเรียนเกิดข้อผิดพลาด และนักเรียนไม่ทราบว่าผิดตรงไหน

2.3.3 พัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

จากการประเมินการให้เหตุผลด้วยแบบประเมินทักษะการให้เหตุผลด้านการพูด โดยให้นักเรียนประเมินเพื่อนด้วยการจับคู่ แล้วเลือกรายการจากแบบประเมินทักษะการสื่อสาร โดยการพูดจำนวน 5 ครั้ง พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ประเมินให้เพื่อนมีความสามารถในการสื่อสาร โดยการพูดมากขึ้นกว่าการประเมินในครั้งแรกๆ ซึ่งในช่วงแรกของการเรียนการสอนนักเรียนจะแสดงเหตุผลของสิ่งที่ทำน้อยมาก แม้ว่าครูจะถามให้นักเรียนอธิบายแต่นักเรียนก็ไม่สามารถอธิบายสิ่งที่กระทำได้ ต่อมาครูใช้คำถามนำให้นักเรียนแสดงเหตุผลทีละขั้นตอน นักเรียนจึงสามารถอธิบายเหตุผลได้มากขึ้น และเมื่อพิจารณาแยกวิธีการให้เหตุผลของนักเรียนออกเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัยและแบบอุปนัย พบการพัฒนาการของนักเรียนดังนี้

1) การให้เหตุผลแบบนิรนัย จากการสังเกตพฤติกรรมการเรียนในห้องเรียนพบว่านักเรียนสามารถอ้างอิงกฎ สูตร นิยาม สมบัติของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น แต่ยังมีนักเรียนบางคนที่จำกฎ สูตร นิยาม หรือสมบัติไม่ได้หรือจำได้ไม่หมด ทำให้ไม่สามารถทำโจทย์คณิตศาสตร์หรือแสดงเหตุผลอ้างอิงได้ เช่น นักเรียนให้เหตุผลของความเท่ากันของมุมในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสว่า “เพราะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส” “เพราะเท่ากัน” หรือให้เหตุผลของการแปลงทางเรขาคณิตโดยการหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90 องศา ว่า “เป็นการหมุน” “ก็มันเป็นอย่างนั้น” “น่าจะใช่” เป็นต้น ต่อมาครูจึงใช้คำถามนำให้นักเรียนตอบอย่างมีความเฉพาะเจาะจงเพิ่มขึ้น เช่น เรื่องความเท่ากันทุกประการด้วยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยถามให้นักเรียนระบุสมบัติที่เป็นเหตุผลของการอ้างดังกล่าวว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน หรือความยาวด้านประกอบมุมยอดมีขนาดเท่ากัน เป็นต้น

2) การให้เหตุผลแบบอุปนัย นักเรียนสามารถหาคำตอบของกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละกิจกรรมได้ แต่นักเรียนไม่สามารถหาลักษณะร่วมของตัวอย่างหรือกิจกรรม หรือนำคำตอบที่ได้มาหาความสัมพันธ์กันได้ ดังนั้นครูจึงใช้การชี้แนะให้นักเรียนสังเกตลักษณะที่เหมือนและต่างของกิจกรรมที่ให้ ซึ่งในช่วงแรกนักเรียนก็ยังไม่สามารถสรุปความสัมพันธ์ของลักษณะดังกล่าวได้ จนเมื่อผ่านการเรียนการสอนโดยให้มีการสรุปลักษณะที่สัมพันธ์กันมากขึ้นนักเรียนจึงสามารถสรุปได้มากขึ้น แต่ก็ยังต้องอาศัยการชี้แนะจากครู

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น มีสาระของการวิจัยดังนี้

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยเพื่อพัฒนากระบวนการจัดการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผลเพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น มีวัตถุประสงค์ดังนี้

1. เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล
2. เพื่อศึกษาผลการใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยการดำเนินการดังนี้

2.1 เปรียบเทียบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล และกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

2.2 เปรียบเทียบความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ก่อนและหลังการทดลอง

2.3 ศึกษาพัฒนาการของการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ก่อนเรียนและหลังเรียนเป็นระยะๆ

สมมติฐานการวิจัย

1. ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการจัดการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

2. ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการจัดการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการจัดการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

4. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการจัดการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการจัดการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีปกติ

6. ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

7. ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

8. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

9. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

10. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล ประกอบด้วย

1.1 การศึกษาข้อมูลพื้นฐานด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

1.1.1 สภาพปัญหาเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

1.1.2 การศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานช่วงชั้นที่ 3 และแนวทางการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามความมุ่งหวังของหลักสูตร

1.2 การศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับแนวคิด ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1.2.1 ศึกษาแนวคิด และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน

1.2.2 ศึกษาแนวคิด และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยรวบรวมจากหนังสือ และเอกสารเกี่ยวกับการวิจัย

1.2.3 ศึกษาแนวคิด และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยรวบรวมจากหนังสือ และเอกสารเกี่ยวกับการวิจัย

1.3 การสร้างกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล

1.3.1 วิเคราะห์แนวการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน

1.3.2 วิเคราะห์แนวการจัดการเรียนการสอนโดยใช้กระบวนการสื่อสาร

1.3.3 วิเคราะห์แนวการจัดการเรียนการสอนด้วยการให้เหตุผล

1.3.4 สังเคราะห์แนวการเรียนการสอนจากการสังเคราะห์แนวคิดการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน การสื่อสาร และการให้เหตุผล

2. การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วย

2.1 การสร้างแผนการเรียนรู้

2.1.1 ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 และหลักสูตรสถานศึกษา หนังสือเรียนและคู่มือครูคณิตศาสตร์ แล้วเลือกตัวอย่างเนื้อหา

คณิตศาสตร์มาทดลองสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน การสื่อสาร และการให้เหตุผล ได้เนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ความเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

2.1.2 เขียนแผนการเรียนรู้ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย ชื่อแผนการเรียนรู้ จำนวนคาบ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สาระสำคัญ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ โดยกำหนดขั้นตอนหลักของกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นตอนในกระบวนการเรียนการสอนโดยบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

2.1.3 นำแผนการสอนเรื่องการเลื่อนขนานไปทดลองสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนห้วยยอด สังกัดเขตการศึกษาพื้นที่ 2 จังหวัดตรัง จำนวน 1 ห้องเรียน เพื่อตรวจสอบความเป็นไปได้ในการนำไปใช้ในสภาพการเรียนการสอนจริง เพื่อนำมาปรับปรุงแผนการเรียนรู้ที่สร้างให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้น ได้แผนการเรียนรู้จำนวน 26 แผน รวม 56 คาบ คาบละ 55 นาที

2.2 การสร้างเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล

2.2.1 การสร้างและตรวจสอบคุณภาพของแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ได้แบบวัดทั้ง 5 ฉบับ และผลการตรวจสอบคุณภาพดังแสดงในภาคผนวก จ

2.2.2 นำแบบวัดทั้ง 5 ฉบับไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนการสอน เพื่อนำคะแนนที่ได้มาเป็นตัวแปรร่วมในการวิเคราะห์ข้อมูลระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

3. การประเมินผลของกระบวนการเรียนการสอน

3.1 จัดกลุ่มตัวอย่างเพื่อทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 ของโรงเรียนห้อยยอด จังหวัดตรัง สังกัดสำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐานเขต 2 จังหวัดตรัง กระทรวงศึกษาธิการ จำนวน 576 คน ได้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้น ม.2/7 และ ม.2/8 รวม 98 คน สุ่มแยกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่ม

ควบคุม ได้นักเรียนชั้น ม. 2/8 เป็นกลุ่มทดลอง และนักเรียนชั้น ม. 2/7 เป็นกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 49 คน

3.2 การดำเนินการทดลองใช้กระบวนการจัดการเรียนการสอน ใช้การวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi-Experimental Research) ที่มีกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม วัดก่อนและหลังการทดลอง (The Pretest-Posttest Control Group Design) โดยมีขั้นตอนการดำเนินการวิจัยดังนี้

3.2.1 การดำเนินการก่อนทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.2.2 การดำเนินการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแนวการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ใช้เวลาสอนห้องละ 56 คาบ คาบละ 55 นาที เป็นเวลา 12 สัปดาห์ โดยกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

3.2.3 การดำเนินการหลังการทดลอง ผู้วิจัยทำการทดสอบนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังนี้

1) วัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแยกทดสอบ 3 ครั้ง คือ ทดสอบเรื่องแปลงทางเรขาคณิตพร้อมกับความเท่ากันทุกประการหลังเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ทดสอบเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงพร้อมกันหลังเรียนเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และทดสอบเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหลังการสอนทันที

2) วัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแยกทดสอบ 3 ครั้ง คือ ทดสอบเรื่องแปลงทางเรขาคณิตพร้อมกับความเท่ากันทุกประการหลังเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ทดสอบเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงพร้อมกันหลังเรียนเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และทดสอบเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหลังการสอนทันที

3) วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยวัดเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยทำการสอบทันทีหลังการสอนแต่ละเรื่อง

4) วัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยวัดเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยทำการสอบทันทีหลังการสอนแต่ละเรื่อง

5) วัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแยกทดสอบ 3 ครั้ง คือ ทดสอบเรื่องแปลงทางเรขาคณิตพร้อมกับความเท่ากันทุกประการหลังเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ทดสอบเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงพร้อมกันหลังเรียนเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และทดสอบเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหลังการสอนทันที

3.3 การวิเคราะห์ข้อมูล

3.3.1 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (Analysis of Covariance : ANCOVA) โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.3.2 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.3.3 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.3.4 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.3.5 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบวัดการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม และคะแนนจากการสอบหลังเรียนด้วยแบบวัดฉบับเดิมเป็นตัวแปรตาม

3.3.6 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม(Multivariate Analysis of Covariance : MANCOVA) โดยใช้คะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.3.7 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม พหุนาม โดยใช้คะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.3.8 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม โดยใช้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.3.9 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม โดยใช้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.3.10 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนจำแนกตามเรื่องของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนาม โดยใช้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นตัวแปรร่วม

3.3.11 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านการมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.3.12 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.3.13 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.3.14 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

3.3.15 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองก่อนและหลังการทดลอง

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

จากการนำกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปใช้ทดลองในสถานการณ์จริงด้วยการวิจัยกึ่งทดลองแบบมีกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง และทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน โดยกลุ่มทดลองได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติ ได้ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

2. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

4. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผลมีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

5. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

6. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น

7. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น

8. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น

9. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น

10. นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น

อภิปรายผลการวิจัย

จากการศึกษาศึกษาผลของการใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น มีประเด็นในการอภิปรายดังนี้

1. การอภิปรายผลจากกระบวนการเรียนการสอน

1.1 ในขั้นของการสร้างความเชื่อมโยงนักเรียนมักมองไม่เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล หรือมองเห็นแต่ไม่กล้าสรุปความคิดเพราะกลัวผิด แต่จะดูสรุปจากในหนังสือ ดังนั้นผู้วิจัยจึงแนะนำให้นักเรียนสังเกตลักษณะร่วม หรือความแตกต่างของข้อมูลแต่ละตัว แล้วจึงรวมกลุ่มข้อมูลนำมาสรุปเป็นความรู้แต่ละข้อ ซึ่งเมื่อฝึกซ้ำๆ กัน ต่อมานักเรียนจึงสามารถหาความสัมพันธ์และข้อสรุปได้เร็วขึ้น

1.2 ในขั้นของการสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ นักเรียนมักเขียนสรุปข้อความรู้ต่างๆ ตามอย่างในหนังสือหรือตามคำพูดของครู และมักสรุปความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ต้นคาบกับความรู้ท้ายคาบ ทำให้นักเรียนลืมความรู้พื้นฐานหรือวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบ ผู้วิจัยจึงต้องเน้นย้ำและแล้วฝึกให้นักเรียนเขียนตามความเข้าใจและใช้ภาษาของตนเอง

2. การอภิปรายผลจากการวิเคราะห์การทดลอง

2.1 การที่ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่านักเรียนในกลุ่มปกติเป็นเพราะปัจจัยหลายประการ เมื่อพิจารณาถึงกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นเริ่มตั้งแต่การทบทวนความรู้พื้นฐานของนักเรียนที่มีความสัมพันธ์กับความรู้หรือมโนทัศน์ใหม่ที่จะเรียน ทำให้นักเรียนได้ใช้ความรู้เดิมเป็นพื้นฐานในการเรียนใหม่ เกิดความต่อเนื่องของการทำความเข้าใจ เมื่อมาถึงขั้นของการเรียนรู้ด้วยการปฏิบัติที่นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองทั้งโดยการกระทำกับวัตถุ การคิด การคำนวณ การแสดงเหตุผล สิ่งเหล่านี้เป็นพื้นฐานให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น จากนั้นเมื่อนักเรียนได้รับความรู้ย่อยๆ จากการปฏิบัติกิจกรรมต่างนักเรียนได้นำความรู้ดังกล่าวมาเรียบเรียงให้เกิดเป็นมโนทัศน์หรือข้อสรุปที่เอาไปใช้ประโยชน์ได้และยังได้แลกเปลี่ยนข้อสรุปของตนเองกับเพื่อนๆ ทำให้นักเรียนมองเห็นความบกพร่อง จุดดี จุดเด่นของความคิดและข้อสรุปของตนเองและของเพื่อนด้วย แล้วนำความคิดเห็น สิ่งที่สังเกตได้จากการทำกิจกรรมและการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนและครูมาปรับปรุงข้อสรุป มโนทัศน์ หรือความรู้ของตนเองให้ดีขึ้นโดยการเขียนด้วยภาษาที่ตนเองเข้าใจได้ง่ายตามขั้นตอนการสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ ทุกขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนที่ต่อเนื่อง เป็นพื้นฐานและส่งเสริมซึ่งกันและกันนี้จึงทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้มโนทัศน์ได้ดียิ่งขึ้น เช่น จากกิจกรรมการสะท้อนซึ่งครูให้นักเรียนคิดถึงการส่องกระจกแล้วให้นักเรียนอภิปรายลักษณะต้นแบบและภาพที่เกิดขึ้นทั้งขนาดของภาพ ระยะของภาพในกระจกโดยประมาณ ทิศทางของภาพ เป็นต้น จากนั้นจึงให้ทำใบงานโดยให้เปรียบเส้นสะท้อนในใบงานเป็นกระจก นักเรียนสามารถหาภาพได้โดยไม่ทราบหลักของการสะท้อนทางคณิตศาสตร์มาก่อน นักเรียนใช้ความรู้จากประสบการณ์จริงมาทำกิจกรรม และเมื่อทำกิจกรรมการสะท้อนในทางคณิตศาสตร์นักเรียนจึงใช้วิธีการเดียวกันมาเรียนรู้สิ่งที่เป็นรูปธรรมน้อยกว่าการส่องกระจกและสามารถทำได้รวดเร็ว และได้มโนทัศน์หลักของการสะท้อน ดังนั้นเมื่อนักเรียนทำกิจกรรมหาพิกัดของภาพต่างๆ ที่ได้จากการสะท้อน แล้วใช้การสังเกตเพื่อหาความสัมพันธ์ของพิกัด x พิกัด y ของรูปต้นแบบและภาพจากการสะท้อน แต่ละคนจะได้ข้อสรุปของการหาพิกัดของภาพที่ได้จากการสะท้อนโดยไม่ต้องเขียนภาพประกอบ จากนั้นจึงนำข้อสรุปของตนเองนำเสนอต่อบุคคลอื่นได้แลกเปลี่ยนและตรวจสอบความคิดซึ่งกันและกันจนนำไปสู่ข้อสรุปที่

นักเรียนเป็นผู้สร้างขึ้นด้วยตนเอง ดังนั้นความรู้ที่เกิดขึ้นจึงไม่ใช่สิ่งที่ได้มาโดยการเป็นฝ่ายรับ แต่เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นจากการสร้างหรือคิดค้นด้วยการลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง(Ernest, 2000: 16; Rey and others, 2004: 20-21) ซึ่งการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นสะท้อนให้เห็นได้ทั้งด้วยการแสดงออกทางร่างกายและทางความคิด ด้วยการสังเกตความสัมพันธ์ การจดจำรูปแบบได้และการสรุปนัยทั่วไปหรือมโนทัศน์ ซึ่งเป็นการบูรณาการความรู้ใหม่เข้ากับโครงสร้างทางความคิดที่นักเรียนมีอยู่เดิม ซึ่งขณะที่นักเรียนเรียนรู้มโนทัศน์ต่างๆ นักเรียนจะได้เขียน วาดภาพ อ่าน และสร้างความคิดของตนเองไปพร้อมๆ กัน การเรียนรู้แนวคิดหรือมโนทัศน์เดียวกันที่สามารถแสดงออกได้หลากหลายวิธีการนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนมีความยืดหยุ่นในการคิด (Kennedy and Tipps, 2000: 4) ทำให้สามารถคิดได้หลายวิธีการ

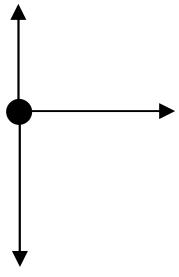
2.2 การที่ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่านักเรียนในกลุ่มปกตินั้นมีสาเหตุเช่นเดียวกับการมีความรู้ด้านมโนทัศน์สูงขึ้น เนื่องจากนักเรียนได้เรียนรู้อย่างต่อเนื่องจากมโนทัศน์พื้นฐานจนถึงมโนทัศน์เกี่ยวกับขั้นตอนการดำเนินการทำงานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้นักเรียนรู้วิธีการหาคำตอบต่างๆ เมื่อถึงช่วงของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบนักเรียนจึงนำความรู้ความเข้าใจจากมโนทัศน์ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วมาใช้โดยการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น เมื่อนักเรียนได้มโนทัศน์เรื่องรากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง แล้วได้รับมอบหมายงานให้หาคำตอบของการบวก การลบ การคูณ และการหาร รากที่สองและรากที่สาม เช่น $\frac{(\sqrt{10}\times\sqrt{5}+\sqrt{18}-10\sqrt{2})\times\sqrt[3]{24}\sqrt[3]{81}\sqrt[3]{3}}{\sqrt{8}}$ เมื่อครูให้นักเรียนอธิบายขั้นตอนในการหาคำตอบ นักเรียนส่วนหนึ่งดำเนินการโดยการสังเกตรากที่สองและรากที่สามที่เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งถอดรากไม่ได้ก่อนแล้วใช้ความรู้เรื่องรากที่สองและรากที่สามทำรากที่สองและรากที่สามของจำนวนอื่นๆ ให้มีลักษณะเดียวกับรากของจำนวนเฉพาะดังกล่าว แล้วดำเนินการบวก ลบ คูณ หรือหารจำนวนที่คล้ายกันเหล่านั้นตามลำดับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ บางคนใช้การคูณรากที่สองและรากที่สามก่อนแล้วจึงถอดรากที่สามด้วยการแยกตัวประกอบหรือใช้ตาราง ส่วนรากที่สองที่ไม่สามารถถอดรากได้จะใช้การแยกตัวประกอบเพื่อถอดรากดังกล่าวให้เหลือรากที่มีจำนวนน้อยๆ จากนั้นจึงบวกและลบรากที่สองดังกล่าว จากนั้นจึงหารจำนวนที่ได้ ส่วนนักเรียนบางส่วนคำนวณค่าตามลำดับของจำนวนที่เขียนทำให้ได้คำตอบไม่เหมือนกับเพื่อน เมื่อตรวจสอบคำตอบกับเพื่อนจึงได้มีการแลกเปลี่ยนวิธีการและแสดงเหตุผลในการคิดทำให้นักเรียนได้แก้ไขความเข้าใจของตนเองใหม่ นักเรียนกลุ่มนี้ขาดความสามารถในการระลึกความรู้ง่ายๆ อย่างทันทีทันใด เนื่องจากความเข้าใจของผู้เรียนนั้นถูกจัดโครงสร้างไม่ดีพอสำหรับการเรียกใช้

ความรู้ที่เหมาะสมได้อย่างอัตโนมัติ แต่เมื่อมีการค้นหาและทบทวนความเข้าใจในบริบทของปัญหาที่เผชิญ การทบทวนนี้จะทำให้ผลของการย้อนกลับเข้มข้นขึ้น ซึ่งการที่ผู้เรียนทำการรวบรวมชิ้นส่วนเล็กๆ ของความเข้าใจของตนเองนั้น ทำให้ผู้เรียนรู้และตระหนักว่าตนมีความเข้าใจสิ่งที่ต้องใช้แต่ไม่สามารถเข้าถึงได้ในทันที (Towers, Martin and Pirie, 2005) จะเห็นได้ว่าความรู้ความเข้าใจด้านโนทัศน์ที่มีอยู่ก่อนจะส่งเสริมความรู้ความเข้าใจด้านการดำเนินการ และในขณะเดียวกันขณะปฏิบัติกิจกรรมดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก็จะกลับไปส่งเสริมปรับปรุงความรู้ความเข้าใจด้านมโนทัศน์ให้เข็มแข็งขึ้น (Rittle-Johnson, 1999) เช่น นักเรียนที่มีความรู้ความเข้าใจมโนทัศน์และการดำเนินการเกี่ยวกับพื้นที่และเส้นรอบรูป จะสามารถใช้สูตรที่เหมาะสมในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สามารถบอกได้ว่าไม่มีสูตรในการพื้นที่ของจุด และสามารถประมาณพื้นที่ของรูปโดยการตีตาราง ส่วนนักเรียนที่เห็นว่าพื้นที่และเส้นรอบวงเป็นเพียงขั้นตอนทางคณิตศาสตร์จะคิดว่าพื้นที่คือความยาวคูณกับความกว้าง หรือเศษหนึ่งส่วนสองคูณความยาวฐานคูณความสูง และไม่สามารถตีความหรือแก้ปัญหาที่มากกว่าจำนวนที่แสดงในสูตร(Rickard, 1998: 25) ซึ่งเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจทั้งมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ด้วยการสร้างของตนเองแล้วจะทำให้นักเรียนมีศักยภาพทางคณิตศาสตร์ด้วย ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับงานและปัญหาต่างๆ ได้เนื่องจากนักเรียนเข้าใจว่าตนเองกำลังทำอะไร นอกจากนั้นยังเตรียมความพร้อมให้กับนักเรียนในการเผชิญกับปัญหาต่างๆ ต่อไปด้วย (Sheffield and Cruikshank, 2005: 44)

2.3 การที่ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่านักเรียนในกลุ่มปกติ และสูงกว่าก่อนเรียนเป็นผลต่อเนื่องมาจากกระบวนการเรียนการสอนที่ทำให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจด้านมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์มาก่อน ดังนั้นเมื่อนักเรียนได้รับปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจึงใช้ความรู้ทั้งสองด้านมาแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Rittle-Johnson (1999) ซึ่งพบว่าหากนักเรียนนำเสนอการแก้ปัญหาได้ถูกต้องจะเป็นการสื่อให้เห็นว่าความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการมีการพัฒนาและมีการเชื่อมโยงกัน เช่น จากการหาคำตอบของโจทย์ปัญหา “ ถ้าต้องการน้ำตาล 30% โดยการผสมจากน้ำเชื่อมสองขวด ขวดแรกเป็นน้ำเชื่อมที่มีน้ำตาล 70% มีน้ำเชื่อมอยู่ 200 ลูกบาศก์เซนติเมตร ขวดที่สองเป็นน้ำเชื่อมที่มีน้ำตาลอยู่ 20% ถ้าใช้น้ำเชื่อมจากขวดแรกทั้งหมดจะต้องใช้น้ำเชื่อมจากขวดที่สองเท่าใด” ซึ่งนักเรียนต้องใช้ความรู้ด้านมโนทัศน์เรื่องการแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ สมบัติการเท่ากัน การแจกแจง ค.ร.น. และขั้นตอนการทำงานทางคณิตศาสตร์ มาแก้ปัญหาข้อนี้ ครูจัดกิจกรรมโดยการร่วมกันวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการให้หา การจะได้คำตอบต้องทราบสิ่งใดบ้าง

จากนั้นให้นักเรียนรวมกลุ่มกัน 4-5 คน เพื่อหาคำตอบของสมการ นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มร่วมกันแสดงความคิดเห็นว่าควรกำหนดสิ่งใดเป็นตัวแปร ซึ่งทุกกลุ่มกำหนดตรงกันคือกำหนดสิ่งที่โจทย์ถามคือปริมาณน้ำเชื่อมจากขวดที่สองเป็นตัวแปร แล้วจึงแปลงประโยคภาษาแต่ละประโยคเป็นประโยคสัญลักษณ์ โดยแต่ละกลุ่มมีลำดับการแปลงไม่เหมือนกัน บางกลุ่มก็แปลงเรียงตามข้อความในโจทย์ บางกลุ่มเรียงลำดับใหม่ตามความเข้าใจของตนเอง และบางกลุ่มทำได้เฉพาะกำหนดตัวแปรแล้วคิดต่อไม่ได้ จึงถามหรือดูเพื่อนกลุ่มอื่นจนได้แนวทางจึงนำมาคิดต่อ เมื่อแต่ละกลุ่มได้คำตอบ ครูจึงสุ่มบางกลุ่มออกมาแสดงและอธิบายวิธีคิด ส่วนนักเรียนคนอื่นๆ ร่วมกันแสดงความคิดเพิ่มเติม ด้วยการให้ปัญหาแล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบที่เปิดกว้างนี้จะทำให้นักเรียนพยายามแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการของตนเองและเรียนรู้ที่เป็นนักแก้ปัญหาด้วยตนเอง (Ernest, 2000: 14) และด้วยการแลกเปลี่ยนความคิดกันทำให้นักเรียนได้เรียนรู้วิธีคิดอื่นๆ จากเพื่อน กิจกรรมการแก้ปัญหาจึงไม่ได้ส่งเสริมนักเรียนเป็นรายบุคคลเท่านั้นแต่ยังเป็นกิจกรรมที่สามารถแก้ปัญหาได้ดีในกลุ่มเล็กๆ หรือการทำงานร่วมกันในชั้นเรียนอีกด้วย (Grinstein and Lipsey, 2001: 297)

2.4 การที่ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่านักเรียนในกลุ่มปกติ และมีความสามารถในการสื่อสารหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ด้วยกระบวนการเรียนการสอนในกลุ่มทดลองที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้สื่อสารแลกเปลี่ยนความคิดทั้งกับครูและกับเพื่อน รวมทั้งได้ใช้วิธีการในการสื่อสารอย่างหลากหลายทั้งโดยการพูด การเขียนในลักษณะต่างๆ เช่น ใช้ภาพ แผนผัง ตาราง เป็นต้น ทำให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการสื่อสารของตนเองเพิ่มขึ้น แต่โดยพื้นฐานแล้วนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่ได้รับการส่งเสริมให้มีการสื่อสารด้านการเขียนมากนัก โดยสังเกตจากแบบวัดที่ผ่านมาเน้นการเลือกตอบหรือเติมคำ ข้อสอบให้แสดงวิธีทำมีน้อย นักเรียนจึงไม่เห็นความสำคัญของการเขียนและนำเสนอผิดพลาด เช่น “เส้นทางเดินป่าชมธรรมชาติของอุทยานแห่งชาติแห่งหนึ่งเริ่มต้นจากที่ทำการอุทยานแห่งชาติ เดินไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 1.5 กิโลเมตร แล้วเดินไปทางทิศตะวันตกอีก 1.2 กิโลเมตร จากนั้นเดินไปทางทิศเหนืออีก 1 กิโลเมตร จึงถึงจุดชมวิว จงหา ระยะทางจากที่ทำการอุทยานแห่งชาติถึงจุดชมวิว” นักเรียนหลายคนวาดรูปจากโจทย์ได้เป็นดังนี้



สำหรับการเรียนเรื่องการแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ เช่น “สามเท่าของผลบวกของจำนวนจำนวนหนึ่งกับสามเท่ากับสิบสอง” เมื่อผู้วิจัยให้นักเรียนแปลงประโยคดังกล่าวให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ นักเรียนบางคนอ่านโจทย์แล้วแบ่งวรรคตอนเป็นว่า “สามเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง บวกสาม เท่ากับ สิบสอง” จึงเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ว่า “3x + 3 = 12” ขณะที่อีกคนอ่านโจทย์เป็น “สามเท่าของ ผลบวกของจำนวนจำนวนหนึ่งกับสาม เท่ากับ สิบสอง” จึงเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ว่า “3(x + 3) = 12“

ซึ่งทั้งสองสถานการณ์แสดงว่านักเรียนมีความสามารถในการอ่านและทำความเข้าใจข้อความน้อย จากการจัดกิจกรรมในกลุ่มทดลองที่ครูเปิดโอกาสและกระตุ้นให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน ดังนั้นเมื่อนักเรียนในกลุ่มทดลองพบว่าข้อความหรือภาพที่เขียนได้ไม่เหมือนกันนักเรียนจะโต้เถียงกันว่าแต่ละคนแบ่งวรรคตอนประโยคดังกล่าวอย่างไร โดยต่างกันฝ่ายต่างอธิบายความคิดของตนเองให้อีกคนฟัง และพิจารณาความคิดของเพื่อนจนเห็นข้อผิดพลาดจากการอ่านโจทย์ที่ตัดบางส่วนของประโยคออกไปจนทำให้ข้อความหรือความหมายของประโยคเปลี่ยนไป ซึ่งทำนักเรียนมองเห็นความสำคัญของคำต่างๆ ที่ใช้ในการเขียนโจทย์ด้วยการแลกเปลี่ยนความคิด ความเห็น ด้วยการพูด เพราะไม่ใช่นักเรียนทุกคนที่จะไปถึงความเข้าใจในระดับเดียวกันด้วยเวลาที่เท่ากัน ผู้เรียนแต่ละคนจะไปถึงความเข้าใจของตนเองที่แตกต่างกัน ดังนั้นสิ่งที่ดีที่สุดที่ครูสามารถคาดหวังได้คือการร่วมกันแบ่งปันความเข้าใจของนักเรียน ซึ่งเกิดขึ้นในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน (Cobb, Yackel & Wood, 1992) ซึ่งการอภิปรายกันดังกล่าวจะช่วยให้นักเรียนเกิดแนวคิด วิธีการที่หลากหลาย มีเหตุผลและสามารถสรุปคำตอบได้ (สิริพร ทิพย์คง, 2551) และจากการสังเกตในชั้นเรียนนักเรียนมีการสื่อสารด้วยการพูดมากขึ้นและสามารถสื่อสารได้ดี ทั้งนี้เนื่องมาจากนักเรียนได้ทำกิจกรรมการสื่อสารโดยการซักถามทั้งกับเพื่อนและครูเพื่อให้อธิบายความคิดและเหตุผลทางคณิตศาสตร์ให้ฟัง ซึ่งทำให้นักเรียนได้อธิบายและพิจารณาตัดสินคำตอบที่นำเสนอ (NTCM, 2000: 271) ดังนั้นนักเรียนจึงมีการพัฒนาโครงสร้างความรู้ในขณะที่สร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากประสบการณ์และการปฏิบัติร่วมกับครูและเพื่อนๆ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น (Sheffield and Cruikshank, 2005: 44)

2.5 การที่ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่านักเรียนในกลุ่มปกติ และสูงกว่าก่อนเรียนเป็นเพราะกระบวนการเรียนการสอนที่ให้นักเรียนใช้เหตุผลในการรวบรวม หาความสัมพันธ์ และสรุปมโนทัศน์ และการสื่อสารแลกเปลี่ยนความคิดกับคนอื่น ทำให้นักเรียนต้องคิดหาเหตุผลในการนำเสนอและให้เหตุผลสนับสนุนความคิดของตนเอง สนับสนุนหรือคัดค้านความคิดของบุคคลอื่น

เช่น ในการเรียนเรื่องบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส นักเรียนจะวัดขนาดมุมของรูปสามเหลี่ยมต่างๆ แล้วระบุชนิดของรูปสามเหลี่ยมนั้นโดยอ้างเหตุผลจากมุมที่วัดได้ และวัดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านกับชนิดของรูปสามเหลี่ยม แล้วสรุปออกมาเป็นบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสและการจำแนกรูปสามเหลี่ยมโดยใช้ความสัมพันธ์ของความยาวด้านที่ค้นพบ ดังนั้นเมื่อนักเรียนได้รับมอบหมายงานให้พิจารณารูปสามเหลี่ยมต่างๆ แล้วตัดสินว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้นั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด นักเรียนจึงใช้ความรู้เรื่องบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาดำเนินการหาคำตอบและตัดสินชนิดของรูปสามเหลี่ยมโดยอ้างเหตุผลของคำตอบจากมโนทัศน์ที่ได้รับก่อนหน้านี้ ซึ่งจากกิจกรรมการเรียนการสอนมีนักเรียนบางคนที่ระบุชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากผิดไปจากเพื่อน นักเรียนก็จะแสดงเหตุผลในการคิดของตนเองและนักเรียนคนอื่นจะแสดงเหตุผลคัดค้านจนทั้งสองฝ่ายสามารถสรุปความถูกต้องของคำตอบได้ การให้เหตุผลในสิ่งที่ทำ จะทำให้นักเรียนเป็นผู้ที่รู้ทันความคิดและบทบาทของตนเองในกระบวนการเรียนรู้ รู้ถึงกระบวนการเรียนรู้และความคิดของตนเอง รู้ถึงความก้าวหน้าในการคิดของตนเอง ส่วนการอธิบายและการรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่นเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคนเข้าใจมุมมองของคนอื่นที่มีต่อความคิดของตน นักเรียนได้อธิบายให้เหตุผลต่อมุมมองของตนเองขณะที่รู้มุมมองของคนอื่น การพยายามอธิบายเหตุผลเบื้องหลังและการรับฟังมุมมองของคนอื่น ทำให้นักเรียนสามารถตัดสินคุณภาพการคิดของตนและเรียนรู้ยุทธวิธีที่มีประสิทธิภาพไปพร้อมกัน นอกจากนี้การให้นักเรียนพูดเกี่ยวกับแนวคิด อธิบายหรือตรวจสอบการหาคำตอบของตนเอง ตั้งคำถามเพื่อให้เกิดความชัดเจนและการพยายามแก้ข้อขัดแย้ง จะนำไปสู่โอกาสของการสร้างมโนทัศน์ใหม่และการขยายกรอบความคิดของนักเรียนไปสู่วิธีการหาคำตอบที่หลากหลายยิ่งขึ้น (จรรยา ภูอุดม, 2545: 18) แม้ว่านักเรียนในกลุ่มทดลองจะมีคะแนนสูงนักเรียนในกลุ่มควบคุม และสูงกว่าก่อนเรียน แต่ก็ยังมีความสามารถในการให้เหตุผลน้อยโดยมีคะแนนเฉลี่ย 15.47 คะแนน คิดเป็น 48.34 ซึ่งไม่ผ่านเกณฑ์ประเมินของกระทรวงศึกษาธิการ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนใช้เหตุผลนิรนัยและอุปนัยในการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลน้อย เพราะโดยทั่วไปเรามักจะใช้คณิตศาสตร์ใน 2 ลักษณะ คือ การประยุกต์สูตรและการดำเนินการในการแก้ปัญหาทั่วไป และการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนโดยใช้กลวิธีพื้นฐาน แต่จะได้รับการส่งเสริมเกี่ยวกับการนิรนัยลักษณะเฉพาะของรูปแบบทางคณิตศาสตร์น้อย การคำนวณหลายขั้นตอนบนพื้นฐานของการวัดทางคณิตศาสตร์ที่เราใช้ในการทำงานและชีวิตประจำวันเป็นสิ่งที่ห่างไกลกับการให้เหตุผลเชิงตรรกที่จะนำไปสู่การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ไม่มีวิธีการของการนิรนัยใดที่จะทำให้คณิตศาสตร์มีประโยชน์ต่อการใช้งานได้มากเท่ากับนิสัยการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และทักษะทางคณิตศาสตร์ (Steen, 1999: 270)

2.6 เมื่อพิจารณาผลการทดลองในแต่ละสาระที่เรียนซึ่งนักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนสูงกว่ากลุ่มควบคุมในสาระการแปลงทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะกระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ส่งผลให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจได้ดีในเนื้อหาสาระดังกล่าว ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากเนื้อหาดังกล่าวสามารถสื่อสารเป็นรูปธรรมได้ง่ายและสามารถพบเห็นหรือใช้ในชีวิตประจำวันได้ โดยเฉพาะเรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวนักเรียนกลุ่มทดลองมีความรู้และความสามารถสูงกว่ากลุ่มควบคุมทั้ง 5 แบบวัด เนื่องจากเรื่องนี้เป็นโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ใกล้ตัวนักเรียน โดยนักเรียนได้เรียนรู้ตามกระบวนการที่สืบเนื่อง ได้มีโอกาสร่วมงานกับคนอื่นหรือมีส่วนร่วมในการคิดกฎเกณฑ์ต่างๆ (โสภณ บำรุงสงฆ์ และสมหวัง ไตรต้นวงศ์, 2520: 19) จากการทบทวนความรู้พื้นฐานที่ใช้ในการเรียนอย่างครบถ้วนและเรียนรู้มโนทัศน์เกี่ยวกับแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ให้นักเรียนได้แปลความหมายและความเข้าใจให้อยู่ในรูปภาษา เครื่องหมาย และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่สำคัญในการทำให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย ซึ่งเมื่อดำเนินการแก้ปัญหานักเรียนได้คิดและแก้ปัญหาในวิถีทางที่ตนเองเข้าใจ ใช้วิธีการที่หลากหลาย ได้สะท้อนความคิด วิพากษ์วิจารณ์ความคิดของตนเองและผู้อื่น โดยใช้เหตุผลเป็นที่ตั้ง (อัมพร ม้าคะนอง, 2547: 125) ได้ปรับเปลี่ยนหรือปรับปรุงวิธีการของตนให้ดีขึ้น ทำให้นักเรียนสร้างความเข้าใจได้ด้วยตนเองและสามารถใช้ความรู้ความเข้าและทักษะได้ดี แต่ในส่วนของสาระความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงเป็นความรู้ที่มีความเป็นนามธรรมสูง นักเรียนในกลุ่มทดลองจึงมีความสามารถในแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมเพียงด้านเดียว ส่วนเรื่อง ความเท่ากันทุกประการเป็นความรู้ในลักษณะที่เป็นนามธรรมและไม่สัมพันธ์กับการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน นักเรียนต้องใช้เหตุผลทั้งแบบนิรนัยและอุปนัยในการพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการโดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และส่วนของเส้นตรง นักเรียนในกลุ่มทดลองจึงมีคะแนนไม่สูงกว่ากลุ่มควบคุม ซึ่งสอดคล้องกับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนได้คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์การประเมิน

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

จากผลการวิจัยที่พบว่ากระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วยให้นักเรียนในกลุ่มทดลองมีสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์อันประกอบด้วย ความรู้ด้านมโนทัศน์และการดำเนินการ

ความสามารถในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมนั้นอย่างชัดเจนนั้น ผู้วิจัยเห็นว่าสามารถนำผลการวิจัยนี้ไปใช้กับนักเรียนในโรงเรียนอื่นได้ โดยมีข้อเสนอแนะในประเด็นต่างๆ ดังนี้

1.1 การจัดการเรียนการสอนแต่ละขั้น ครูสามารถเลือกวิธีสอน เทคนิคการสอนที่สอดคล้องกับกระบวนการในแต่ละขั้นได้อย่างหลากหลายตามลักษณะเนื้อหา ความสามารถ ความถนัดและความพร้อมของครูและนักเรียน

1.2 สิ่งสำคัญในกระบวนการเรียนการสอนนี้คือให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมในการเรียนการสอนให้มากที่สุด และต้องมีจัดการเรียนรู้จากสิ่งที่ความเข้าใจง่ายไปสู่สิ่งที่เข้าใจได้ยากขึ้นเป็นนามธรรมขึ้นตามลำดับ

1.3 ครูต้องจัดโอกาสหรือสถานการณ์ที่อำนวยให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นหรืออธิบายเหตุผลกันอย่างกว้างขวางโดยไม่เกิดความวิตกกังวล และสนับสนุนการแสดงออกทั้งด้วยการพูดและการเขียน

1.4 องค์ประกอบสำคัญของกระบวนการเรียนการสอนนี้คือการให้นักเรียนเป็นผู้สร้างความรู้ด้วยตนเอง ดังนั้นครูจะต้องจัดการเรียนการสอนที่เอื้อประโยชน์ให้นักเรียนสามารถสร้างความรู้ด้วยตนเองอย่างเต็มที่

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 แนวคิดการพัฒนาความเข้าทางคณิตศาสตร์เป็นกรอบความคิดกว้างๆ ที่สามารถนำไปพัฒนาเป็นกระบวนการเรียนการสอนใหม่ที่มีขั้นตอนและรายละเอียดแตกต่างไปจากกระบวนการเรียนการสอนในการวิจัยครั้งนี้

2.2 เนื่องจากงานการวิจัยครั้งนี้เป็นงานวิจัยเพื่อสร้างกระบวนการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาสมรรถภาพของนักเรียนด้านความรู้มโนทัศน์และการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผล ซึ่งน่าจะได้นำกระบวนการเรียนการสอนนี้ไปทดลองใช้ศึกษากับตัวแปรอื่นๆ เช่น ความสามารถในการเชื่อมโยง ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

2.3 ควรศึกษาการนำกระบวนการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความเข้าใจไปใช้โดยการแบ่งกลุ่มตัวอย่างตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เพื่อศึกษาความเหมาะสมและข้อจำกัดของกระบวนการเรียนการสอนต่อนักเรียนในระดับต่างๆ กัน

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กิตติ พัฒนตระกูลสุข. (2546). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาล้มเหลวจริงหรือ. วารสารคณิตศาสตร์ 530-532(พฤศจิกายน-ธันวาคม 45 – มกราคม 46): 54-58.

กิตติศักดิ์ แก้งทอง. (2547). การศึกษาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาในโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 11 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และภูมิหลังต่างกัน. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, สำนักงาน. (2541). รายงานผลการจัดคุณภาพการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: ฟันนี่ พับบริชชิ่ง.

คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, สำนักงาน. (2545). แผนการศึกษาแห่งชาติ (2545 – 2559). กรุงเทพมหานคร: พริกหวานกราฟฟิค.

คณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, สำนักงาน. (2550). สรุปสาระสำคัญ [Online]. Available from: http://social.nesdb.go.th/nesdbsoc/pages/showpage.aspx?file=webandid=home [2007, December 21].

จรรยา ภูอุดม. (2545). แนวการจัดการเรียนการสอนและการประเมินผลที่สอดคล้องกับสาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์ 46(พฤษภาคม-กรกฎาคม):14-36.

ชานนท์ ศรีผ่องงาม. (2549). การพัฒนาชุดการเรียนแบบแบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์ (Student Teams Achievement Divisoin : STAD) เพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนจริง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ทิศนา แขมมณี และคณะ. (2544). วิทยาการด้านการคิด. กรุงเทพมหานคร: เดอะ มาสเตอร์กรุ๊ป แมเนจเม้นท์.

น้อมศรี เคท. (2547). คุณภาพหลากหลายที่ได้จากการเรียนรู้คณิตศาสตร์. วารสารครุศาสตร์ 3(มีนาคม - มิถุนายน): 18-28.

นาตยา ปิลันธนานนท์. (2542). การเรียนรู้ความคิดรวบยอด. กรุงเทพมหานคร: เจ้าพระยาระบบการพิมพ์.

ประภาวดี เทพทอง. (2545). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ด้วยการสอนโดยใช้กระบวนการสื่อสาร. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปราโมทย์ บุญญสิริ. (2546). การประเมินการปฏิบัติในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ปานทอง กุลนาถศิริ. (2539). การจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 21. วารสารสสวท. 92 (มกราคม - มีนาคม): 12.

ปิยวรรณ ตีระกิตติธนา. (2548). กิจกรรมการเรียนการสอนที่ใช้การสื่อสารแนวความคิดเพื่อเพิ่มความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

มาลินท์ อิทธิรส. (2544). การแก้ปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์ 3(กันยายน -ธันวาคม): 25-30.

ยุพาพักตร์ ทั่งสุข. (2546). การศึกษาความก้าวหน้าทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง “อัตราส่วนและร้อยละ” โดยประเมินตามสภาพจริง. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชาการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ยุพิน พิพิธกุล. (2523). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

ยุพิน พิพิธกุล. (2530). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2525). พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2525. กรุงเทพมหานคร: อักษรเจริญทัศน์.

เลขาธิการสภาการศึกษา, สำนักงาน, กระทรวงศึกษาธิการ. (2550). สมรรถภาพการศึกษาไทยในเวทีสากล พ.ศ. 2549. กรุงเทพมหานคร: พริกหวานกราฟิค.

วราภรณ์ มีหนัก. (2545). การจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. วารสารวิชาการ 5(9): 58 – 65.

วัชรี ขันเชื้อ. (2545). การพัฒนาชุดการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้นโดยใช้กระบวนการกลุ่มเพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทร วิโรฒ.

ศิริชัย โสภา. (2535). การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง “เศษส่วน” ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จังหวัดศรีสะเกษ. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชาการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ศิริพร รัตนโกสินทร์. (2546). การสร้างชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการมัธยมศึกษาบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมวิชาการ. (2542). การสังเคราะห์รูปแบบการพัฒนาศักภาพของเด็กไทยด้านทักษะการสื่อสาร. กรุงเทพมหานคร: สำนักทดสอบทางวิชาการ.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมวิชาการ. (2544). คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สสวท.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมวิชาการ. (2545). เอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.).

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมวิชาการ. (2546). การจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์(ร.ส.พ.).

ศึกษาธิการ, กระทรวง. สสวท. (2547). คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 . กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. สสวท. (2548). คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 . นครปฐม: นครปฐมการพิมพ์.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. สสวท. (2549ก). หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 . กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. สสวท. (2549ข). หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 . กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2546). คู่มือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สสวท.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2547). การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพมหานคร: เอส.พี.เอ็น การพิมพ์.

สมเดช บุญประจักษ์. (2540). การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สมวงษ์ แปลงประสพโชค, สุกัญญา ยีกา และเอนก จันทรจรูญ. (2546). ปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ กรณีศึกษา : ความคิดเห็นของครูคณิตศาสตร์ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือที่เข้ารับการอบรมโครงงานคณิตศาสตร์[Online]. Available from: http://www.ripn-math.com/doc/aa_009.doc[8 กรกฎาคม 2549].

สมศักดิ์ สินธุ์เวชญ์. (2542). มุ่งสู่คุณภาพการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: วัฒนาพานิช.

สิริพร ทิพย์คง. (2551). การอภิปรายร่วมกันในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์ 590-592(พฤศจิกายน – ธันวาคม 2550 – มกราคม 2551): 28-36.

สุธิดา เกตุแก้ว. (2547). ผลของการใช้กระบวนการสื่อสารที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุนีย์ คล้ายนิล. (2546). “คณิตศาสตร์ไทย ไม่เข้มแข็ง” : เพราะอะไร. วารสารการศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี 125(กรกฎาคม - สิงหาคม): 18-24.

สุนีย์ คล้ายนิล. (2547). การรู้คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของนักเรียนวัยจบการศึกษาภาคบังคับ. วารสารการศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี 129(มีนาคม - เมษายน): 9-18.

โสภณ บำรุงสงฆ์ และ สมหวัง ไตรต้นวงศ์. (2520). เทคนิคและวิธีสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่. กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช.

หลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยรามคำแหง, ภาควิชา. (2530). การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: รุ่งศิลป์การพิมพ์(1977).

อศิภรณ์ อินทรมณี. (2546). การสังเคราะห์งานวิจัยเกี่ยวกับวิธีสอนคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาหลักสูตรและการนิเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร.

อัมพร ม้าคนอง. (2543). การสอน Algorithms ในวิชาคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์ ปริมา 44 506-508(พฤศจิกายน – ธันวาคม 2543 – มกราคม 2544): 26-32.

อัมพร ม้าคนอง. (2546). คณิตศาสตร์: การสอนและการเรียนรู้. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2547ก). การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน และอัมพร ม้าคนอง (บรรณาธิการ), ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์, หน้า 94-109. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

อัมพร ม้าคนอง. (2547ข). เอกสารประกอบการสอน รายวิชา 2704687 การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (อัดสำเนา).

ภาษาอังกฤษ

Artuso, M. (1993). Children's understanding of place value in mathematics: A cognitive developmental view[Online]. Available from: http://www.lib.uni.com/dissertations[2005, August 4].

Baroody, A.J. and Coslick, R.T. (1993). Problem solving, reasoning, and communicating, K-12 : Helping children think mathematically. New York: Macmillan.

Baroody, A. J. and Coslick, R.T. (1998). Fostering children mathematical power : An investigating approach to K – 8 mathematics instruction. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Beckett, T. M. (1999). Development of conceptual understanding of statistics for concrete thinkers in a constructivist learning environment. Educational doctoral thesis. University of Massachusetts Lowell.

Boehm, E. (1996). Linking conceptual understanding in teaching with learning 5th grade mathematics[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations[2005, August 4].

Booth, S. (2002). Learning and teaching for understanding mathematics. Proceedings of SEFI Mathematics Workshop, Vienna, June, 2002.

Brahier, D.J. (2005). Teaching secondary and middle school mathematics. 2nd ed. Boston: Pearson Education.

Buschman, L. (1995). Communicating in the language of mathematics. Teaching Children Mathematics 1(6) : 324–329.

Byrnes, J.P. (1996). Cognitive development and learning in instruction contexts. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Carroll, W.M. and Porter, D. (1997). Invented strategies can develop meaningful mathematical procedures. Teaching Children Mathematics 3: 370–374.

Carvey, L.O. (2002). Growth in mathematical understanding while learning to teach right triangle trigonometry: Patterns of growth and connection building through lesson plan study[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations [2005, August 4].

Clemson, D. and Clemson, W. (1994). Mathematics in the early years. London : Routtedge.

Cobb, P., Yackel, E. and Wood, T. (1992). The constructivist alternative to the representational view of mine in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education 23: 2-33.

Cohen, R.J. (1990). The relationships between instruction and students' conceptions of mathematics[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations [2005, August 4].

College Board. (2002). Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress. Washington, D.C.: National Assessment Governing Board.

Cooney, T. J., Davis, E. J. and Henderson, K.B. (1983). Dynamics teaching secondary school mathematics. 2nd ed. Boston: Houghton Mifflin.

Copi, I.M. and Cohen, C. (1990). Introduction to logic. 8th ed. New York: Macmillan.

Davis, B. (1996). Teaching mathematics: Toward a sound alternative. New York: Garland.

Donovan, M.S. and Bransford, J.D.(eds). (2005). How students learn : history, mathematics, and science in the classroom : Committee on how people learn, a targeted report for teachers. Washington, D.C.: The National Academies.

Droujkova, M. A. (2004). Roles of metaphor in the growth of mathematical understanding [Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations [2005, August 4].

Empson, S.B. (2002). Is teaching mathematics for understanding sufficient? Journal of Curriculum of Studies 34(5): 589–602.

Ernest, P. (2000). Teaching and learning mathematics. In Kashy, V., Ernest, P. and Casey, R. (eds.), Mathematics for primary teachers, pp 3-20. London : Routlege.

Eysenck, H.J., Wurzburg, W.A. and Berne, A. M. (1972). Encyclopedia psychology. vol. 2. London: Search Press.

Fehr, H.F. (1972). Teaching modern mathematics in the elementary school. 2nd ed. Massachusetts: Addison-Wesley.

Good, C. V. (1959). Dictionary of education. New York: McGraw-Hill.

Grinevitch, O. A. (2004). Student understanding of abstract algebra: A theoretical examination [Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations [2005, August 4].

Grinstein, L.S. and Lipsey, S.I. (2001). Encyclopedia of mathematics education. New York: RoutledgeFalmer.

Hasselbling,T.D. and Moore, P.R. (1996). Developing mathematical literacy through he use of contexualized learning environments. Journal of Computing in Childhood Education 7(3-4): 119–222.

Heddens, J.W. and Speer, W.R. (1997). Today's mathematics: Part 1 : Concepts and classroom methods. New Jersey: Prentice – Hall.

Hiebert, J. and Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In Grouws, D.A. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, pp.65-97. New York: Simon and Schuster Macmillan.

Hiebert, J. and Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics : An introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.), Conceptual and procedural knowledge, pp1-28. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Joyce, B. and Weil, M. (1996). Models of teaching. Boston: Ally and Bacon.

Jung, I. (2002). Student representation and understanding of geometric transformations with technology experience[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations[2005, August 4].

Kennedy, L. M. and Tipps, S. (1994). Guiding Children Learning of Mathematics 1994. 7th ed. California: Wadsworth.

Kennedy, L. M. and Tipps, S. (2000). Guiding Children Learning of Mathematics 1994. 9th ed. California: Wadsworth.

Krulik, S. and Rudnick, J. (1993). Reasoning and problem solving : A handbook for elementary school teachers. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Kwon, O. N., Rasmussen, C. and Allen, K. (2005). Students' retention of mathematical knowledge and skills in differential equations. School Science and Mathematics105(5): 227-239.

Lawson, M.J. and Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving. Journal for Research in Mathematics Education 31: 26-43.

Leighon. J.P. (2006). Teaching and assessing deductive reasoning skills. The Journal of Experimental Education 74(2): 109-136.

Martinie, S. (2005). Assessing conceptual understanding of rational numbers and constructing a model of the interrelated skills and concepts[Online]. Available from: http://www.math.ksu.edu/math791/finalpaper/sherriterm2.pdf [2005, August 4].

Mayer, R.E. (1992). Thinking, problem solving, cognition. 2nd ed. New York: W.H. Freeman and Company.

Mayer, R.E. and Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In Sternberg, R. and Ben-Zeev, T. (eds.), The nature of mathematical thinking, pp.29–53. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mumme, J. and Shepherd, N. (1993). Communication in mathematics in implementing the K-8 curriculum and evaluation standard. Reston, VA: NCTM.

Musser, G.L. and Burger, W.F. (1997). Mathematics for elementary teachers. New Jersey: Prentice Hall.

National Council of Teachers of Mathematics[NCTM]. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics[NCTM]. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niemi, D. (1996). Assessing conceptual understanding in mathematics: representations, problem solutions, justifications, and explanations. The Journal of Educational Research 89: 351-363.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project[Online]. Available from: http://www7.nationalacademies.org[2007, September 15].

North Central Regional Educational Laboratory. (2000). Advance Thinking[Online]. Available from: http://www.ncrl.orgsdrs/areas/issues/students/atrisk/at7lk4.htm. [2006, June 14].

OECD. (2007). PISA 2006 science competencies for tomorrow world[Online]. Available from: http://www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070367.pdf [2007, September 15].

Parker, R.E. (1993). Mathematical power : Lessons from a classroom. Portsmouth: Hienemann.

Perkins, D. (1992). Smart school : Better thinking and learning for every child. New York: The Free Press.

Perkins, D. (1993). Teaching for understanding. The Professional Journal of the American Federation of Teachers 17(3): 28-35.

Pirie, S.E.B. and Kieren, T. E. (1989). Through the recursive eye : Mathematical understanding as a dynamic phenomenon. Proceedings of the annual conference of the international group for the psychology of mathematics education 13: 119-126.

Pirie, S.E.B. and Kieren, T. E. (1991). Folding back :Dynamic in the growth of mathematical understanding. Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) 15: 169-176.

Pirie, S.E.B. and Kieren, T. E. (1992). Creating constructivist environments and constructing creating mathematics?. Educational Studies in Mathematics 23 : 505 - 528.

Pirie, S.E.B. and Kieren, T. E. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it?. Educational Studies in Mathematics 26(3): 165-190.

Pirie, S.E.B. and Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. Mathematics Education Research Journal 12(2):127-146.

Porter, M.K. (1996). The effects of writing to learn mathematics on conceptual understanding and procedural ability in introductory college calculus[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations[2005, August 4].

Porter, M. K. and Masingila, J. O. (2000). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. Educational Studies in Mathematics 42(2):165-177.

Prestege, S. (2002). Mathematics 11-16. In Haggarty, L.(ed.), Aspects of teaching secondary mathematics : Perspectives on practice, pp.24-37. London: RoutledgeFalmer.

Reys, R.E., Lindquist, M.M., Lambdin, D.V., Smith, N.L. and Suydam,M.N. (2004). Helping children learn mathematics. 7th ed. New Jersey: JohnWiley & Sons.

Rickard, A. (1998). Conceptual and procedural understanding in middle school mathematics. In Leutzinger, L. (ed.), Mathematics in middle school, pp.25-29. Reston: NCTM.

Riedesel, C.A. (1990). Teaching elementary school mathematics. 5th ed. New Jersey: Prentice Hall.

Rittle-Johnson, B. (1999). Iterative development of conceptual and procedural knowledge: A framework for understanding knowledge change[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations[2005, August 4].

Rittle-Johnson, B. and Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. Journal of Educational Psychology 91(1): 175-189.

Robinson, E.E., Robinson, M.F. and Maceli, J.C. (2000). The impact of standards – based instructional materials mathematics in the classroom. In Burke, M.J. and Curcio, F.R. (eds.), Learning mathematics for a century, pp. 112–126. Reston, VA.: NCTM.

Rojas, M.E. (1992). Enhancing the learning of probability through developing students' skills in reading and writing. Educational doctoral thesis. Columbia University Teachers College.

Rowan, T.E. and Morrow. (1993). Implementing K-8 Curriculum and Evaluation Standards from the Arithmetic Teacher. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Schunk, D.H. (1991). Learning theories an educational perspective. New York: Merrill.

Seales, H.L. (1956). Logic ang Science. 3rd ed. New York: The Ronald.

Sharp, J. and Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. The Journal of Educational Research 95(6): 333-347.

Sheffield, L.J. and Cruikshank, D.E. (2005). Teaching and learning mathematics : Pre – kindergarten through middle school. New Jersey: John Wiley and Sons.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in mathematics. London: The Falmer Press.

Steen, L.A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In Stiff, L.(ed.), Developing mathematical reasoning in grades K-12, pp. 270-285. Reston, VA: NCTM.

Sternberg, R.J. and Ben-Zeev, T. (1996). The nature of mathematics thinking. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Sternberg, R.J. and Williams, W.M. (2002). Educational psychology. Boston: Allyn and Bacon.

Talbert, J.E. and Mclaughlun, M.W. (1993). Understanding teaching in context. In D.K. Cohen, M.W. Mclaughlun and J.E. Talbert (eds.), Teaching for understanding: Challenges for policy and practice, pp. 167-206. San Francisco, CA: Jorrsey-Bass. Cited in Wallace, J. and Louden, W. (2003). What we don't understand about teaching for understanding: questions from science education. Journal of curriculum studies 35(5): 545 – 566.

Teachey, A.L. (2003). Investigations in conceptual understanding of polynomial functions and the impact of mathematical belief systems on achievement in an accelerated summer program for gifted students[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations[2005, August 4].

Thomas, D. A. (1991). Children, teachers, and mathematics. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Towers, J., Martin, L. and Pirie, S. (2005). Growing mathematical understanding : Layered observations[Online]. Available from: http://www.west.asu.edu/ cmw/pme/resrepweb/PME-rr-towers3.htm[2005 , August 4].

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In Morrow, L.J. and Kenny, M.J. (eds.), The teaching and learning of algorithm in school mathematics, pp 21-31. Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (2001). Trends in mathematics education. In Document for conference titled “Trends in mathematics education”, pp.14-20. Bangkok, Dec 13. อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง. (2547ก). การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน และอัมพร ม้าคนอง (บรรณาธิการ), ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์, หน้า 94-109. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

Varela, F., Thompson, E. and Rosch, E. (1991). The embodied mind: Cognitive science and human experience. Cambridge, MA: MIT Press.

Wallace, J. and Louden, W. (2003). What we don’t understand about teaching for understanding: questions from science education. Journal of curriculum studies 35(5): 545 – 566.

Warner, L. (2005). Behaviors that indicate mathematical flexible thought[Online]. Available from: http://wwwlib.uni.com/dissertations[2005, August 4].

Watson, A. (2002). Teaching for understanding. In Haggarty, L. (ed.), Aspects of teaching secondary mathematics : Perspective on practice, pp.153-163. New York: RoutledgeFalmer.

Wilson, J. W. (1971). Evaluation of learning in secondary school mathematics. In Bloom, Benjamin S., Hasting, J. Thomas and Modaus, George F., Handbook on formative and summative evaluation of student learning, pp 643–696. New York: McGraw-Hill Company.

Woolfolk, A.E. (1995). Educational Psychology. 6th ed. Boston: Allyn and Bacon.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้การบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

ความเป็นมาและความสำคัญของกระบวนการเรียนการสอน

การศึกษาในปัจจุบันนั้นมีจุดมุ่งหมายในการเตรียมคนให้มีความสามารถในการเรียนรู้ตลอดชีวิต ดังนั้นจะต้องเตรียมคนให้พร้อมที่จะดำเนินชีวิตอยู่ในสังคมในอนาคต โดยจะต้องพัฒนาให้เป็นคนมีคุณภาพเป็นผู้ที่มีความรู้ ความสามารถ และทักษะต่างๆ เช่น ทักษะด้านเทคโนโลยีสารสนเทศ (IT) ภาษา การสื่อสาร การคิด และสามารถใช้ความรู้ ความสามารถ และทักษะเหล่านั้นไปใช้แก้ปัญหาและตัดสินใจอย่างมีเหตุผล สภาศึกษานิเทศก์คณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา(National Council of Supervisors of Mathematics[NTCM], 1989: 471) ได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับนักเรียนที่จะเติบโตไปสู่สังคมข่าวสารว่าจะต้องเป็นผู้ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากคณิตศาสตร์มีความสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาประเทศ เพราะความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานของความรู้ทางวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และอุตสาหกรรม และปัจจุบันวิทยาการต่างๆ ต้องใช้ความรู้คณิตศาสตร์ระดับสูงขึ้นและต้องการมากขึ้น

แม้ว่าคณิตศาสตร์จะเป็นวิชาที่มีความสำคัญและหลักสูตรทุกหลักสูตรที่ผ่านมามุ่งเน้นให้นักเรียนทุกคนมีความสามารถทางคณิตศาสตร์ แต่ในความเป็นจริงแล้วผลการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนยังมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ โดยในปีการศึกษา 2536, 2538 และ 2540 พบว่าคะแนนเฉลี่ยร้อยละของการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับประเทศอยู่ในระดับต่ำ (คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2541: 14–23 ; สมศักดิ์ สินธุ์เวชญ์, 2542: 4) และต่อมาจากการประเมินตามโครงการ TIMSS-R ในปี พ.ศ. 2542 ซึ่งมีประเทศในเอเชียเข้าร่วมโครงการจำนวน 38 ประเทศ ไทยได้คะแนนเฉลี่ยอยู่ลำดับที่ 16 และนักเรียนที่ผลสัมฤทธิ์อยู่ในกลุ่มเก่งมีเพียง 7% (สุนีย์ คล้ายนิล, 2546) และในการประเมินผลนักเรียนนานาชาติตามโครงการ PISA-2000 (Program for International Student Assessment) ขององค์กรเพื่อความร่วมมือและพัฒนาทางเศรษฐกิจ (The Organization for Economic Co-operation and Development : OECD) ซึ่งเป็นการประเมินทักษะการรู้คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของนักเรียนวัยจบการศึกษาภาคบังคับ มีการประเมินการรู้ทางคณิตศาสตร์ (mathematics literacy) 3 ด้าน คือ เนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และการใช้คณิตศาสตร์ ปรากฏว่านักเรียนไทยได้คะแนนคณิตศาสตร์ 432 คะแนน เป็นลำดับที่ 32 จากจำนวนประเทศต่างๆ ที่เข้าร่วมโครงการ

41 ประเทศ (สุนีย์ คล้ายนิล, 2547) ส่วน ปี พ.ศ. 2546 ได้คะแนนคณิตศาสตร์ 417 คะแนน (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2550: 19-20; OECD, 2007: 53) ซึ่งต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ย 500 คะแนน ทั้งสองครั้ง ซึ่งสอดคล้องกับผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับชาติ (NT) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ประจำปีการศึกษา 2549 ที่นักเรียนได้คะแนนคณิตศาสตร์เฉลี่ย 12.46 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 31.15 และตั้งแต่ปีการศึกษา 2547-2549 พบว่านักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์ลดลง ผลการประเมินเหล่านี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์น้อย

ลักษณะการเรียนการสอนที่อาจเป็นสาเหตุหนึ่งของปัญหาเกี่ยวกับผลการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนคือ การที่นักเรียนมักได้รับการเสนอความคิดที่เป็นนามธรรมก่อนจะได้รับประสบการณ์ที่เป็นรูปธรรม ซึ่งเป็นสาเหตุให้นักเรียนไม่สามารถสร้างความรู้เอง และไม่สามารถบรรลุจุดมุ่งหมายทางการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่มุ่งให้นักเรียนมีทั้งความรู้ ทักษะกระบวนการ และสามารถนำความรู้และทักษะไปใช้ได้ การเรียนการสอนให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจ(Understanding) จึงเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญประการหนึ่งในการศึกษาคณิตศาสตร์ ซึ่งการสอนเพื่อความเข้าใจนั้นได้รับความสนใจมาหลายปีจนถึงปัจจุบัน นักจิตวิทยาและนักการศึกษาเห็นว่าการสอนเพื่อความเข้าใจทำให้นักเรียนมีความสามารถมากกว่าและมีความคงทนยาวนานกว่าการสอนชนิดอื่นๆ (Sheffield and Cruikshank, 2005: 24) การส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์จึงมีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากความเข้าใจด้านมโนทัศน์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนเรียนรู้ขั้นต่อไปง่ายขึ้นและเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงได้ดีขึ้น ช่วยให้นักเรียนมองเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ มีประสิทธิภาพในการทำงาน และมีพฤติกรรมการคิดวิเคราะห์ในระดับสูง สามารถนำสมบัติและความเข้าใจต่างๆ ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

การพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงควรมุ่งเน้นการพัฒนาให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจอย่างถ่องแท้ โดยส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยการปฏิสัมพันธ์ในชั้นเรียนด้วยการนำเสนอความคิด การพูดคุย การโต้แย้ง การลงมือปฏิบัติ การใช้เครื่องมืออุปกรณ์ต่างๆ การพูดคุยและการสะท้อนแนวคิดทางคณิตศาสตร์และสิ่งต่างๆ ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจสถานการณ์ที่ซับซ้อนขึ้น ดังคำกล่าวที่ว่า “ฉันได้ยินและฉันลืม ฉันเห็นและฉันจำได้ ฉันทำและฉันเข้าใจ”

การทำความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์นั้นไพรีและไคเรนได้พัฒนาทฤษฎีที่อธิบายถึงขั้นตอนที่นักเรียนสร้างความเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์หนึ่งๆ โดยมีลำดับขั้นทั้งหมด 8 ระดับ และการพัฒนาความเข้าใจนี้เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องและย้อนกลับไปกลับมาเมื่อนักเรียนเกิดปัญหา

ในการทำความเข้าใจในระดับที่สูงขึ้น ระดับความเข้าใจในแต่ละขั้นจึงขึ้นอยู่กับรูปแบบและกระบวนการของระดับความเข้าใจที่อยู่ภายใน และถูกจำกัดโดยรูปแบบและกระบวนการของระดับความเข้าใจที่อยู่ภายนอก และระดับความเข้าใจหนึ่งๆ สามารถเรียกใช้ความรู้ความเข้าใจในระดับก่อนๆ ได้ (Pirie & Kieren, 1994, Pirie & Martin, 2000) ดังนั้นความคิดรวบยอดและความรู้ความเข้าใจต่างๆ จึงมีความเชื่อมโยงกันในทุกระดับของความเข้าใจ

อย่างไรก็ตาม วิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะสำคัญประการหนึ่ง คือ คณิตศาสตร์เป็นภาษาที่มีความหมาย เป็นภาษาเฉพาะ รัดกุม สามารถสื่อสารและนำมาประยุกต์ใช้กับชีวิตประจำวันได้ และมีบทบาทในการเรียนการสอน คือ เป็นตัวเชื่อมโยงระหว่างความคิดนามธรรมกับรูปธรรม โดยใช้รูปภาพ กราฟ ตัวอักษร การสื่อสารเป็นวิธีการให้นักเรียนแสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ โดยการพูด การเขียน การแสดงด้วยภาพ ศัพท์ สัญลักษณ์ ในการนำเสนอแนวคิด อธิบายความสัมพันธ์ และจำลองสถานการณ์ โดยเพื่อนๆ มีส่วนร่วมในการอภิปรายแนวคิดนั้น ก่อให้เกิดปฏิสัมพันธ์แลกเปลี่ยนแนวคิดกันและกัน กล่าวได้ว่า การสื่อสารนั้นช่วยให้นักเรียนมีความชัดเจนในความคิดและเกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้งยิ่งขึ้น(Kennedy and Tipp, 1994:181) ดังนั้นในการพัฒนานักเรียนให้เป็นผู้มีความสามารถในการเรียนรู้คณิตศาสตร์นั้นจึงต้องพัฒนานักเรียนให้มีความรู้ ทักษะ และความสามารถทางคณิตศาสตร์ และใช้ความรู้และทักษะเหล่านั้นในการสื่อสารแนวคิดทั้งการฟัง การพูด การอ่าน และการเขียน การนำเสนอการแสดงแนวคิดเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในสิ่งที่เรียนอย่างลึกซึ้ง

นอกจากนี้ การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับคณิตศาสตร์ และการคิดอย่างมีเหตุผลนับเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากคณิตศาสตร์ต้องใช้ความคิดความมีเหตุผล และเป็นเครื่องมือพัฒนาความคิดและได้ฝึกสมอง นักเรียนที่เรียนด้วยความเข้าใจและมีเหตุผลจะตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่อาศัยการให้เหตุผลอย่างมีระบบและจะเป็นการพัฒนาพื้นฐานแนวการเรียนรู้คณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆ ต่อไป นอกจากนั้นการสอนคณิตศาสตร์ในลักษณะของความเป็นเหตุเป็นผลจะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เกิดความมั่นใจ เชื่อว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล นักเรียนสามารถทำความเข้าใจและสามารถจะค้นพบสิ่งใหม่ๆ ได้ด้วยตนเอง การเป็นผู้รู้จักคิด คิดอย่างมีเหตุผลจะเป็นเครื่องมือสำหรับการเรียนรู้ตลอดชีวิต เพื่อสามารถนำไปใช้ในการพัฒนาตนเองทั้งในการทำงานและการดำรงชีวิต

ด้วยเหตุผลดังกล่าวผู้วิจัยจึงสร้างกระบวนการเรียนการสอนขึ้น โดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน ร่วมกับการสื่อสารและการให้

เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น

แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการเรียนการสอน

แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการเรียนการสอน มีรายละเอียดดังนี้

1. **ทฤษฎีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน**

ทฤษฎีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน จัดอยู่ในกลุ่มพุทธิปัญญา (cognitivism) โดยมองว่าความเข้าใจเป็นกระบวนการจัดการอย่างต่อเนื่องของโครงสร้างความรู้ของแต่ละคน มีแนวคิดดังนี้

1.1 ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มีความเป็นพลวัต ต่อเนื่องตามระดับขั้น โดยความเข้าใจระดับต่างๆ ประกอบไปด้วยความเข้าใจในระดับก่อนๆ

1.2 การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรนมี 8 ระดับ คือ

ระดับที่ 1 เรียกว่า การรู้สิ่งเดิม (primitive knowing) เป็นการเข้าใจระดับแรกที่เป็นจุดเริ่มต้น แสดงถึงความเข้าใจที่ใช้เป็นพื้นฐานในการเริ่มการเรียนรู้ใหม่ แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นคณิตศาสตร์ในระดับต่ำ ความรู้ระดับนี้เป็นความรู้ที่ผู้สอนเชื่อว่านักเรียนทุกคนต้องมี ความรู้ในระดับนี้เป็นส่วนประกอบของระดับการรู้ในระดับต่อไป

ระดับที่ 2 เรียกว่า การสร้างภาพ (image making) ระดับนี้นักเรียนจะใช้ความสามารถที่มีอยู่กับเงื่อนไขหรือสถานการณ์ใหม่ โดยการแสดงออกด้วยการปฏิบัติ ซึ่งอาจเป็นการเขียนแสดงด้วยภาพ หรือด้วยวิธีอื่นๆ เช่น การพับกระดาษเพื่อแสดง “หนึ่งหน่วย” “ครึ่งหน่วย” “หนึ่งในสี่หน่วย” และการใช้คำหรือภาษาที่เกี่ยวข้อง

ระดับที่ 3 เรียกว่า การเกิดภาพในใจ (image having) เป็นขั้นที่นักเรียนเกิดภาพในใจเกี่ยวกับกิจกรรมที่ทำในขั้นก่อนๆ ซึ่งนักเรียนใช้ภาพในใจเหล่านี้ในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างของการเรียนรู้ในขั้นนี้คือ นักเรียนบอกได้ว่า เศษส่วนบอกถึงขนาดหรือความใหญ่ของส่วนที่ถูกแบ่งหรือพับ การเกิดภาพในใจนี้ทำให้ความเข้าใจคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นอิสระจากการแสดงออกด้วยการปฏิบัติ

ระดับที่ 4 เรียกว่า การสังเกตสมบัติ (property noticing) นักเรียนสามารถตรวจสอบสมบัติเฉพาะและสมบัติที่เกี่ยวข้องของภาพทางความคิด รวมถึงการสังเกตความแตกต่าง การประสมประสาน หรือเชื่อมโยงระหว่างภาพต่างๆ การคาดคะเนว่าภาพเหล่านั้นเกิดขึ้นได้อย่างไร และจะจดบันทึกความสัมพันธ์เหล่านั้นได้อย่างไร เช่น การสังเกตว่า

เศษส่วนแบ่งครึ่งเกิดจากการรวมกันของเศษส่วนแบ่งครึ่งอื่นๆ เป็นต้นว่า ½ เกิดจาก ¼ รวมกับ ¼ ซึ่ง ¼ เป็นเศษส่วนแบ่งครึ่งอีกประเภทหนึ่ง

ระดับที่ 5 เรียกว่า การจัดระเบียบ (formalizing) สมบัติที่สังเกตได้ ในขั้นนี้นักเรียนจะนำสมบัติที่สังเกตได้ในขั้นก่อนมาวิเคราะห์และจัดระเบียบเพื่อรวบรวมเป็นกฎหรือหลักการทั่วไป

ระดับที่ 6 เรียกว่า การสังเกต (observing) เป็นขั้นของการสังเกตสมบัติสิ่งที่ได้จัดระเบียบไปแล้ว เพื่อนำมาจัดระบบ หาข้อสรุป และจัดกระบวนการคิดส่วนบุคคล และมีความตระหนักในผลที่ตามมาของกระบวนการคิด เช่น การสังเกตเพื่อหาข้อสรุปว่า ไม่มีเศษส่วนที่แบ่งครึ่งที่เล็กที่สุด เนื่องจากจะสามารถแบ่งครึ่งไปได้เรื่อยๆ

ระดับที่ 7 เรียกว่า การสร้างโครงสร้าง (structuring) ในขั้นนี้ นักเรียนพยายามอธิบายสิ่งที่สังเกตได้อย่างมีโครงสร้างที่เป็นเหตุเป็นผล โดยการค้นหาความสัมพันธ์และสร้างโครงข่ายของความสัมพันธ์เหล่านั้น ระดับนี้เป็นระดับที่ความรู้ความสามารถถูกพิสูจน์ได้ เช่น พิสูจน์ว่าเศษส่วนแบ่งครึ่งมีสมบัติปิดภายใต้การบวก

ระดับที่ 8 เรียกว่า การสร้าง (inventing) ในขั้นนี้ นักเรียนมีความรู้อย่างเป็นโครงสร้างที่สมบูรณ์ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่แท้จริง และความเข้าใจนี้อาจนำมาซึ่งมโนทัศน์ใหม่

1.3 นักเรียนเกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการเรียนรู้ประสบการณ์และสร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง

1.4 การรวบรวมความเข้าใจเป็นโครงสร้างที่ดีช่วยให้เรียกใช้ความรู้ได้ดี ดังนั้นเมื่อนักเรียนเผชิญกับปัญหาและไม่สามารถหาคำตอบของปัญหาได้ นักเรียนจะย้อนกลับไปทำความเข้าใจในระดับก่อนหน้า เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้สิ่งใหม่ในระดับที่สูงขึ้น

2. การสื่อสารทางคณิตศาสตร์

การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ภาษา ศัพท์ และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายแนวคิดหรือหลักการทางคณิตศาสตร์ให้ผู้อื่นเข้าใจ หรือแลกเปลี่ยนความรู้หรือความคิดเห็นทางคณิตศาสตร์กับบุคคลอื่น ด้วยการพูดและการเขียน

แนวการจัดการเรียนการสอนโดยใช้กระบวนการสื่อสาร(กรมวิชาการ, 2545: 201 ; Rowan and Morrow, 1993: 9-11) เป็นดังนี้

1) ใช้เนื้อหา เรื่องราว หรืองานที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวนักเรียน เพื่อให้นักเรียนเห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์และสามารถทำความเข้าใจเนื้อหาได้ง่ายขึ้น

2) ครูนำเสนอสื่อที่เป็นรูปธรรม ให้นักเรียนพรรณนาหรืออภิปรายความคิดเห็นถึงสิ่งที่พบ

3) กำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน

4) ใช้คำถามหรือปัญหาปลายเปิด กระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและแสดงการตอบสนองออกมา

5) ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมในการเรียนรู้ด้วยตนเอง

6) ให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นของตนเอง ด้วยการรายงานสั้นๆ การตอบคำถามจากครูหรือเพื่อน การนำเสนองานที่ได้รับมอบหมาย หรือการอภิปราย

7) ให้นักเรียนเขียนสื่อสารแนวคิด โดยอาจใช้ตาราง กราฟ หรือแผนภูมิประกอบ

8) ครูใช้การเรียนแบบร่วมมือและช่วยเหลือกัน เพื่อให้นักเรียนได้พูดคุย ซักถาม โต้แย้ง แลกเปลี่ยนแนวคิดภายในกลุ่มและส่งเสริมความสามารถในการสื่อสาร

9) ครูใช้การชี้แนะแนวทางในการสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

3. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเหตุและผล เพื่อหาข้อสรุปเป็นความคิดรวบยอดที่สมเหตุสมผลและขยายหลักการไปสู่ความคิดอื่น จำแนกออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย คือความสามารถในการคิดเพื่อหาสรุปหรือข้อความรู้ใหม่โดยอาศัยข้อเท็จจริงย่อยๆ แล้วพยายามหากฎหรือหลักการทั่วไปที่รวมลักษณะสำคัญของส่วนย่อยๆ เหล่านั้นเข้าด้วยกัน

2. ให้เหตุผลแบบนิรนัย คือ ความสามารถในการนำกฎหรือหลักการทั่วไปไปใช้อ้างอิงเพื่อสรุปเป็นความรู้ใหม่ที่เป็นส่วนย่อยของกฎหรือหลักการทั่วไปเดิม

การจัดการเรียนการสอนโดยใช้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มี 2 วิธี คือ

3.1. การจัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นวิธีการที่ให้นักเรียนได้พิจารณาข้อมูลที่เป็นจริงจากส่วนย่อยที่เกิดขึ้นซ้ำๆ กันภายใต้เงื่อนไขหรือสถานการณ์แบบหนึ่ง ไปสู่ข้อสรุปหรือความจริงทั่วไป หรือการสังเกตจากตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง แล้วใช้เหตุผลสรุปความสัมพันธ์ในรูปทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น ซึ่งมีลำดับการสอนดังนี้

1) ให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง เพื่อจำแนกความแตกต่าง และหาลักษณะร่วม

2) สรุปลักษณะร่วมของตัวอย่าง

3) ทดสอบ และนำไปใช้

3.2. การจัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการนำกฎ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎี หรือข้อตกลงที่เป็นที่ยอมรับว่าเป็นความจริงเพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุปเรื่องราวหนึ่งๆ ที่มีเงื่อนไขสอดคล้องกับกฎ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎี หรือข้อตกลงนั้นๆ

แนวการจัดการเรียนการสอนด้วยการให้เหตุผล (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2547: 3; กระทรวงศึกษาธิการ, กรมวิชาการ, 2545: 199; วราภรณ์ มีหนัก,2545) สรุปได้ดังนี้

1) ให้สถานการณ์หรือปัญหาที่นักเรียนสนใจ ไม่ยากเกินความสามารถ

2) ให้นักเรียนให้เหตุผลในการอธิบายหรืออภิปราย แสดงความคิดเห็นในการใช้และให้เหตุผลของตนเอง

3) ให้นักเรียนเขียนอธิบายเหตุผลสิ่งที่นักเรียนทำเพื่อหาคำตอบ

4) ให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ ประเมินการให้เหตุผลของผู้อื่น

5) ให้นักเรียนรู้จักใช้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำหรับการตรวจสอบประกอบการตัดสินใจ หรือพิจารณาความถูกต้อง

6) ผู้สอนสนับสนุนและชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจว่าเหตุผลของนักเรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ มีข้อบกพร่องอย่างไร

องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้การบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น มีองค์ประกอบต่างๆ ซึ่งได้ผ่านการดำเนินการสร้างอย่างเป็นระบบให้มีความสัมพันธ์ สอดคล้องและส่งเสริมซึ่งกันและกัน โดยองค์ประกอบเหล่านี้ได้แก่

1. หลักการ
2. จุดมุ่งหมาย
3. ขั้นตอนการเรียนการสอน
4. การวัดและประเมินผล

โดยมีรายละเอียดของแต่ละองค์ประกอบดังนี้

หลักการ

หลักการของกระบวนการเรียนการสอนนี้ได้จากการสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน ได้แก่ ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรีและไคเรน การให้เหตุผล และการสื่อสาร โดยสรุปหลักการของกระบวนการเรียนการสอนได้ดังนี้

1. นักเรียนเป็นศูนย์กลางการเรียนรู้ นักเรียนเป็นผู้สร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยการเรียนรู้จากประสบการณ์
2. นักเรียนเป็นผู้สร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง
3. การเรียนรู้เนื้อหาคณิตศาสตร์มีความต่อเนื่อง เป็นไปตามลำดับความเข้าใจ และเมื่อนักเรียนไม่สามารถทำความเข้าใจในระดับความเข้าใจหรือการเรียนรู้ที่สูงขึ้นได้ นักเรียนสามารถย้อนกลับมาทำความเข้าใจใหม่ในระดับความเข้าใจหรือการเรียนรู้ระดับต่ำกว่าได้
4. มีตัวอย่างที่มากพอในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนได้ข้อสรุปหรือใช้ข้อสรุปกับตัวอย่างดังกล่าว และแสดงเหตุผลในการคิดและการกระทำ
5. นักเรียนได้เสนอและแลกเปลี่ยนความคิดเห็น เหตุผล หรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยการพูด การฟัง การอ่าน และการเขียน
6. นักเรียนต้องแสดงความรู้ที่สร้างขึ้นได้อย่างชัดเจนด้วยการพูดหรือการเขียนเป็นโครงสร้างที่ง่ายต่อการจำและการเรียกใช้งานโดยการใช้กราฟ ตาราง แผนภูมิ เป็นต้น

จุดมุ่งหมาย

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผลนี้ เป็นกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีจุดประสงค์เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในด้านต่างๆ ดังนี้

1. ด้านความรู้ ประกอบด้วยความรู้ด้านมโนทัศน์และความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์
2. ด้านทักษะและกระบวนการ ประกอบด้วยความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล ซึ่งมีจุดประสงค์เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ประกอบด้วยขั้นตอนการเรียนการสอน 4 ขั้น ดังนี้

1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน

เป็นขั้นของการเตรียมความพร้อมให้แก่นักเรียน ด้วยการทบทวนความรู้พื้นฐานเชื่อมโยงเหตุการณ์หรือเนื้อหาที่สัมพันธ์กับสิ่งที่จะเรียนรู้ หรือแลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่นักเรียนเคยพบกับสิ่งที่จะเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนมองเห็นความเชื่อมโยงของเนื้อหาคณิตศาสตร์เดิมกับเนื้อหาใหม่ หรือเห็นประโยชน์ของเนื้อหาคณิตศาสตร์กับการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน โดยผู้สอนอาจนำเทคนิคการสอนต่างๆ เช่น การใช้คำถาม การอภิปราย การเล่าเรื่องจากสถานการณ์จริง การใช้วัสดุต่างๆ ประกอบ เป็นต้น

2. ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ

2.1 ครูจัดประสบการณ์หรือสถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนนำความรู้หรือประสบการณ์เดิมมาใช้อธิบายความรู้ใหม่เป็นการขยายความรู้ความเข้าใจให้มากขึ้น

2.2 นักเรียนหาลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม สมบัติ หรือส่วนประกอบต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียน และแสดงเหตุผลแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับความรู้หรือความคิดของตนเองกับเพื่อน

โดยครูอาจใช้เทคนิคการตั้งคำถาม การอภิปราย เป็นต้น

3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง

3.1 นักเรียนนำข้อความรู้หรือข้อมูล ซึ่งประกอบด้วยลักษณะเฉพาะ ลักษณะทั่วไป ลักษณะร่วม สมบัติ หรือส่วนประกอบต่างๆ ของเนื้อหาที่เรียนซึ่งได้จากขั้นที่ 2 มาพิจารณาและวิเคราะห์เพื่อเชื่อมโยง จัดลำดับ จัดประเภท หรือจัดหมวดหมู่ ตามความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือสมบัติต่างๆ โดยแสดงแนวการคิดให้เห็นความสมเหตุสมผลแล้วสรุปข้อมูลออกมาเป็นข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปด้วยตนเอง

3.2 นักเรียนนำเสนอข้อคาดคะเน กฎ หรือหลักการทั่วไปที่ได้ต่อชั้นเรียนเพื่อร่วมกันอภิปรายและตรวจสอบความถูกต้อง เพื่อให้ได้เป็นข้อสรุปของชั้นเรียน หากนักเรียนสรุปไม่ได้ ครูจะใช้คำถามและให้คำแนะนำให้นักเรียนย้อนกลับไปพิจารณาลักษณะหรือสมบัติต่างๆ ที่ค้นพบให้รอบคอบอีกครั้งหนึ่ง

วิธีการสอนที่ครูสามารถนำมาใช้ในขั้นนี้คือ การระดมสมอง การเรียนแบบร่วมมือ

4. ขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้

4.1 นักเรียนเขียนข้อสรุปความรู้ที่ได้ให้เป็นความรู้ของตนเอง โดยเขียนให้อยู่ในรูปของโครงสร้างความรู้ที่สมเหตุสมผลเพื่อเป็นตัวแทนของความรู้ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง เช่น ผังมโนทัศน์ เครือข่ายความรู้ ตาราง เป็นต้น ซึ่งช่วยให้นักเรียนสามารถจำได้ดี

4.2 นักเรียนนำความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้ฝึกทักษะและแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ

การวัดและประเมินผล

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ตามกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ดำเนินการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียนทั้งระยะก่อนเรียน ระหว่างเรียน และหลังเรียน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การวัดและประเมินผลการเรียนคณิตศาสตร์ในระยะก่อนการใช้กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วยการวัดและประเมินผลความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. การวัดและประเมินผลการเรียนคณิตศาสตร์ในระหว่างการใช้กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วยการวัดและประเมินผลทักษะการสื่อสาร และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยแบบประเมินการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และแบบประเมินการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. การวัดและประเมินผลการเรียนคณิตศาสตร์หลังการใช้กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วยการวัดและประเมินผลความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ภาคผนวก ข

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิตรวจกระบวนการเรียนการสอนและเครื่องมือการวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิตรวจกระบวนการเรียนการสอน

1. รองศาสตราจารย์ ดร. สุนีย์ เหมะประสิทธิ์	คณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
2. รองศาสตราจารย์ ดร. สุวิมล เขี้ยวแก้ว	หลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตตรัง
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรพรรณ ตันบรรจง	หลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

1. ดร. บุญญิสา แซ่หล่อ	คณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
2. อาจารย์วัฒนิตา นำแสงวานิช	กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาฯ ฝ่ายมัธยม จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. อาจารย์วรรณพงศ์ บุณยโอภาส	กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนกำแพงเพชร จังหวัดกำแพงเพชร

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. ดร. บุญญิสา แซ่หล่อ	คณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
2. รองศาสตราจารย์กิตติ พัฒนตระกูลสุข	กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตแห่งเกษตรศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. อาจารย์สนั่น เขื่อนแก้ว	กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสงวนหญิง จังหวัดสุพรรณบุรี

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างแผนการสอน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 1 ช่วงชั้นที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

สาระ การสะท้อน จำนวน 2 คาบ

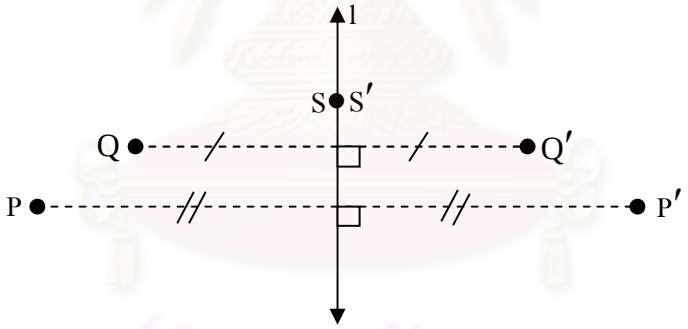
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถ

1. อธิบายลักษณะการสะท้อนได้
2. เขียนภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบได้
3. หาจุดยอดมุมของภาพที่เกิดจากการสะท้อนได้
4. อภิปราย แสดงความคิดเห็นอย่างสมเหตุสมผล
5. ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิด

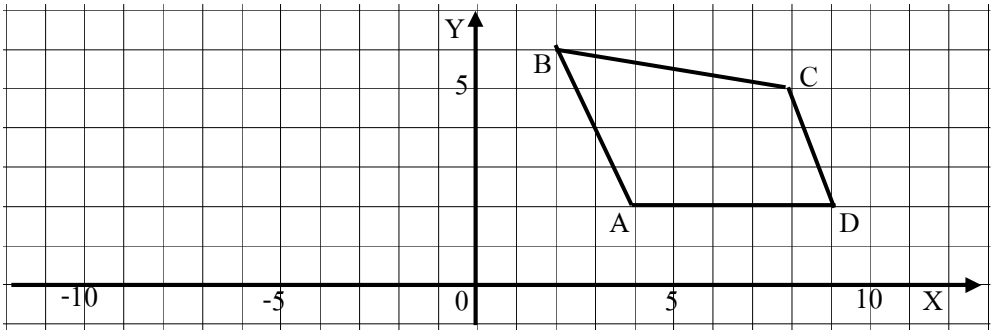
สาระการเรียนรู้

1. การสะท้อน (Reflection) เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีเส้นตรง 1 เส้นหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน แต่ละจุด P บนระนาบจะมีจุด P′ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P โดยที่
   1) ถ้าจุด P ไม่อยู่บนเส้นตรง 1 แล้วเส้นตรง 1 จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$
   2) ถ้าจุด P อยู่บนเส้นตรง 1 แล้วจุด P และจุด P′ เป็นจุดเดียวกัน



2. สมบัติการสะท้อน
   1) เลื่อนรูปต้นแบบทับรูปที่ได้จากการสะท้อนได้สนิทโดยต้องพลิกรูป ดังนั้นรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนจะเท่ากันทุกประการ
   2) ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนของส่วนของเส้นตรงนั้นไม่จำเป็นต้องขนานกันทุกคู่
   3) ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดที่สมนัยกันบนภาพที่ได้จากการสะท้อนจะขนานกัน แต่ไม่จำเป็นต้องยาวเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด □ ABCD มีจุดยอด A(4,2), B (2,6), C(8,5) และ D(9,2) เป็นรูปต้นแบบ และแกน Y เป็นเส้นสะท้อน จงหาภาพและพิกัดของภาพที่ได้จากการสะท้อน



แนวคิด หาจุด A', B', C' และ D' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด A, B, C และ D ตามลำดับด้วยเส้นสะท้อนแกน Y ซึ่งจุด A', B', C' และ D' จะมีพิกัดที่หนึ่ง (x) เป็นจำนวนตรงข้ามกับพิกัดที่หนึ่งของจุด A, B, C และ D ตามลำดับ เพราะอยู่คนละข้างแกน Y เป็นระยะที่เท่ากัน และจะมีพิกัดที่สอง (y) เป็นจำนวนเดียวกัน เพราะอยู่ห่างแกน X เป็นระยะที่เท่ากัน

วิธีทำ 1. หาพิกัดของจุด A', B', C' และ D' ได้ดังนี้

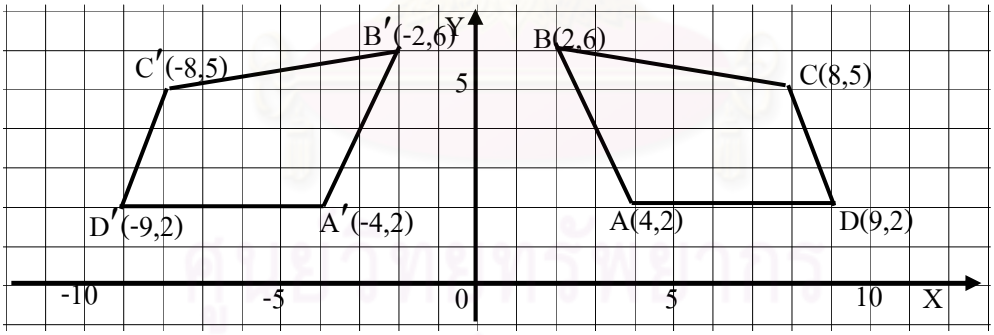
1) จากรูปจุด A มีพิกัด (4,2) ดังนั้นจุด A' จึงมีพิกัดเป็น (-4,2)

2) จุด B มีพิกัด (2,6) ดังนั้นจุด B' จึงมีพิกัดเป็น (-2,6)

3) จุด C มีพิกัด (8,5) ดังนั้นจุด C' จึงมีพิกัดเป็น (-8,5)

4) และจุด D มีพิกัด (9,2) ดังนั้นจุด D' จึงมีพิกัดเป็น (-9,2)

2. ลาก $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ และ $\overline{A'D'}$ จะได้ $\square A'B'C'D'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\square ABCD$ ด้วยเส้นสะท้อนแกน Y



3. สรุปการสะท้อน

ความหมาย	สมบัติ	พิกัดภาพสะท้อน
เส้นตรง l เป็นเส้นสะท้อน P เป็นรูปต้นแบบ P' เป็นภาพสะท้อน - P อยู่นอก l แล้ว l จะแบ่งครึ่ง และ $\perp \overline{PP'}$ - P อยู่บน l แล้ว $P = P'$	1. พลิกรูปทับกันสนิท เท่ากันทุกประการ 2. $\overline{AB}$ และ $\overline{A'B'}$ ไม่จำเป็นต้องขนานกันทุกคู่ 3. $\overline{PP'}$ ไม่จำเป็นต้องยาวเท่ากัน	พิกัดรูปต้นแบบ(a, b) - แกน X เส้นสะท้อน พิกัด (a,-b) - แกน Y เส้นสะท้อน พิกัด (-a,b)

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นของไพรี -ไคเรน	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. การรู้สิ่งเดิม (การสะท้อนในชีวิตประจำวัน) 2. การสร้างภาพ	1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการสนทนาเกี่ยวกับการส่องกระจกเพื่อสำรวจความเรียบร้อยในการแต่งกาย และให้นักเรียนอภิปรายเกี่ยวกับภาพหรือเงาที่เกิดจากการสะท้อนในกระจก โดยเปรียบเทียบรูปร่าง ขนาด และทิศทางของเงากับของจริง ภาพที่เห็นในกระจกเรียกว่าภาพสะท้อน โดยมีกระจกเป็นตัวสะท้อน 2. ขั้นเรียนรู้จากการปฏิบัติ 2.1 นักเรียนทำใบงานที่ 3.1 : การสะท้อน และใบงานที่ 3.2 : เส้นสะท้อน จากนั้นครูสุ่มถามคำตอบพร้อมให้แสดงเหตุผลข้อละ 1 คน นักเรียนที่เหลือร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง 2.2.1 ครูให้นักเรียนรวมกลุ่มกลุ่มละ 4 – 5 คน ปฏิบัติกิจกรรมเงาในกระจกจากหนังสือเรียนหน้า 150 -151 และตอบคำถามต่อไปนี้เพิ่มเติม - รอยพับแบ่งครึ่ง $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ หรือไม่ - นักเรียนใช้วิธีการใดในการทับรูปสามเหลี่ยม ABC กับ รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ให้ได้สนิท - ถ้าเขียนจุด(●) ลงบนรอยพับ ภาพที่เกิดจะอยู่ตรงตำแหน่งใด แล้วบันทึกลงในสมุดพร้อมสรุปข้อค้นพบที่ได้	1. ขั้นนำ ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการสนทนาเกี่ยวกับการส่องกระจกเพื่อสำรวจความเรียบร้อยในการแต่งกาย และให้นักเรียนอภิปรายเกี่ยวกับภาพหรือเงาที่เกิดจากการสะท้อนในกระจก โดยเปรียบเทียบรูปร่าง ขนาด และทิศทางของเงากับของจริง ภาพที่เห็นในกระจกเรียกว่าภาพสะท้อน โดยมีกระจกเป็นตัวสะท้อน 2. ขั้นสอน 2.1 ครูให้นักเรียนรวมกลุ่มกลุ่มละ 4 – 5 คน ปฏิบัติกิจกรรมเงาในกระจกจากหนังสือเรียนหน้า 150 -151 และตอบคำถามต่อไปนี้เพิ่มเติม - รอยพับแบ่งครึ่ง $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ หรือไม่ - นักเรียนใช้วิธีการใดในการทับรูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ให้ได้สนิท - ถ้าเขียนจุด(●) ลงบนรอยพับ ภาพที่เกิดจะอยู่ตรงตำแหน่งใด แล้วบันทึกลงในสมุดพร้อมสรุปข้อค้นพบที่ได้

ขั้นของไพรี -ไคเรน	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
3. การเกิดภาพในใจ	2.2.2 ครูสุ่มตัวแทนกลุ่ม 2 กลุ่มออกมาเสนอข้อสรุปที่ได้จากการทำกิจกรรม นักเรียนในกลุ่มอื่นๆ ช่วยกันแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม จนได้ว่า 1) ระยะของภาพจากการสะท้อนถึงรอยพับเท่ากับระยะของรูปต้นแบบถึงรอยพับ 2) รอยพับแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ 3) รูปสามเหลี่ยม ABC ทับ รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ สนิท และ4) ถ้าจุด(●) อยู่บนรอยพับ จะเกิดภาพที่จุดเดียวกัน ครูวาดภาพประกอบการสรุปของนักเรียน	2.2 ครูนำเสนอภาพการสะท้อนทางเรขาคณิตโดยมีเส้นตรง 1 เป็นเส้นสะท้อน 2.3 ให้นักเรียนตรวจสอบข้อสรุปที่ได้จากการทำกิจกรรมกับความหมายของการสะท้อนว่าสอดคล้องกันหรือไม่ ถ้าไม่สอดคล้อง ให้ทบทวนหาข้อสรุปอีกครั้ง
4. การสังเกตสมบัติ	2.2 นักเรียนในกลุ่มเดิมทำกิจกรรมที่ 3.1 : การสะท้อน จากนั้นครูสุ่มตัวแทนกลุ่มตอบคำถามพร้อมแสดงเหตุผลจากใบกิจกรรมข้อละ 1 กลุ่ม โดยนักเรียนที่เหลือร่วมกันแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม	2.4 นักเรียนทำกิจกรรมสำรวจการสะท้อนในหนังสือหน้า 154 จากนั้นครูสุ่มนักเรียนตอบคำถามจากกิจกรรม แล้วสรุปผลจากคำตอบที่ได้เป็นสมบัติของการสะท้อน
5. การจัดระเบียบ	3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง 3.1 ให้นักเรียนในกลุ่มเดิมร่วมกันนำคำตอบจากคำถามข้อที่ 1- 2 สรุปเป็นสมบัติของการสะท้อน 1 ข้อ คำตอบจากคำถามข้อที่ 3- 5 สรุปเป็นสมบัติของการสะท้อน 1 ข้อ และ คำตอบจากคำถามข้อที่ 6 สรุปเป็นสมบัติของการสะท้อน 1 ข้อ	3. ขั้นฝึกทักษะ 3.1 นักเรียนใบงานที่ 3.1 : การสะท้อน และใบงานที่ 3.2 : เส้นสะท้อน จากนั้นครูสุ่มถามคำตอบพร้อมให้แสดงเหตุผลข้อละ 1 คน นักเรียนที่เหลือร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง
6. การสังเกต	3.2 สุ่มตัวแทนกลุ่ม 3 กลุ่มนำเสนอสมบัติที่สรุปได้ นักเรียนในกลุ่มอื่นร่วมกันเสนอแนะและปรับปรุงให้ถูกต้อง 3.2.1 นักเรียนแต่ละคนทำใบงานที่ 3.3 : พิกัดของการสะท้อน แล้วนักเรียนตรวจสอบคำตอบกันภายในกลุ่ม แล้วครูเฉลยคำตอบ	3.2 นักเรียนแต่ละคนทำใบงานที่ 3.3 : พิกัดของการสะท้อน ครูให้นักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ 3.3 ครูตั้งคำถาม 1) เมื่อแกน X เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน เป็นอย่างไร และพิกัดที่สอง (y) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน เป็นอย่างไร

ขั้นของไพรี -ไดเรน	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
7. การสร้าง โครงสร้าง 8. การสร้าง	3.2.2 ครูให้นักเรียนอภิปรายในหัวข้อต่อไปนี้ (1) เมื่อแกน X เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร และพิกัดที่สอง (y) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร (2) เมื่อแกน Y เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร และพิกัดที่สอง (y) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร (3) วิธีการหาพิกัดของภาพสะท้อนเมื่อมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน และแกน Y เป็นเส้นสะท้อน 4. สร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ 4.1 นักเรียนเขียนข้อสรุปความหมายของการสะท้อน สมบัติของการสะท้อน และพิกัดของภาพสะท้อนที่ได้ด้วยสัญลักษณ์ที่เข้าใจง่ายโดยการเขียนเป็นแผนผังความคิด การสร้างตาราง หรือการวาดภาพประกอบ จากนั้นครูสุ่มนักเรียน 2 คนมาเขียนการสรุปความรู้ที่ได้ของตนเอง 4.2 ครูยกตัวอย่างที่ 1 แล้วให้บอกวิธีการคิดคำตอบ ครูเขียนสิ่งที่นักเรียนบอกบนกระดานดำ แล้วครูให้นักเรียนออกมาแสดงการหาพิกัดของจุดต่างๆ คนละ 1 จุด และวาดภาพประกอบ 1 คน จากนั้นครูเสนอแนะเพิ่มเติมเพื่อให้การแสดงวิธีทำมีความละเอียดมากขึ้น นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.2 ในหนังสือเรียนหน้า 173 ข้อที่ 1, 2 เป็นการบ้าน	2) หาพิกัดของภาพสะท้อนได้อย่างไร 3) เมื่อแกน Y เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน เป็นอย่างไร และพิกัดที่สอง (y) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน เป็นอย่างไร 4) หาพิกัดของภาพสะท้อนได้อย่างไร 3.4 ครูยกตัวอย่างที่ 1 โดยการตั้งคำถามประกอบการอธิบาย 3.5 นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.2 ในหนังสือเรียนหน้า 173 ข้อที่ 1, 2 เป็นการบ้าน 4. ขั้นสรุป ครูนักเรียนสรุปความหมายของการสะท้อน สมบัติของการสะท้อน และการหาพิกัดของภาพสะท้อน

สื่อการเรียนรู้

1. พลาสติกใส ภาพรูปสามเหลี่ยม
2. ตารางกราฟ
3. ใบงานที่ 3.1 : การสะท้อน
4. ใบงานที่ 3.2 : เส้นสะท้อน
5. ใบกิจกรรมที่ 3.1 : การสะท้อน
6. ใบงานที่ 3.3 : พิกัดการสะท้อน

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน 2. สังเกตจากการแสดงความคิดเห็น 3. สังเกตจากการทำกิจกรรม 4. สังเกตจากผลงานการทำใบงาน 5. สังเกตจากการเขียนสรุป 6. สังเกตจากการทำแบบฝึก	

บันทึกหลังการเรียนการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

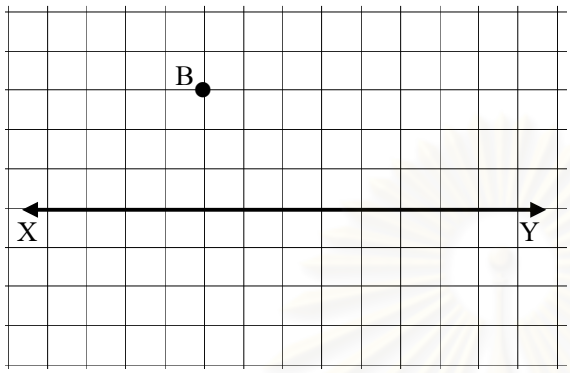
.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ใบงานที่ 3.1 : การสะท้อน

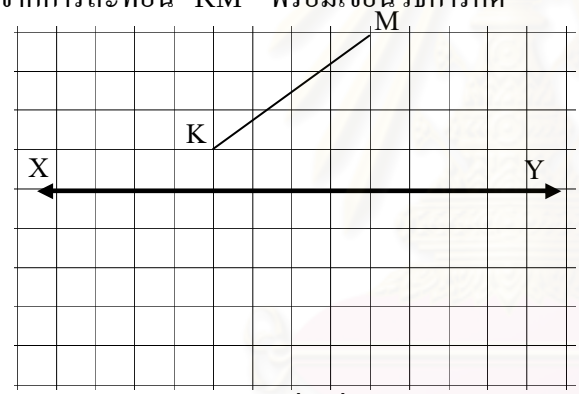
ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

1. กำหนดจุด B เป็นรูปต้นแบบ และ $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นสะท้อน จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด B พร้อมเขียนวิธีการคิด



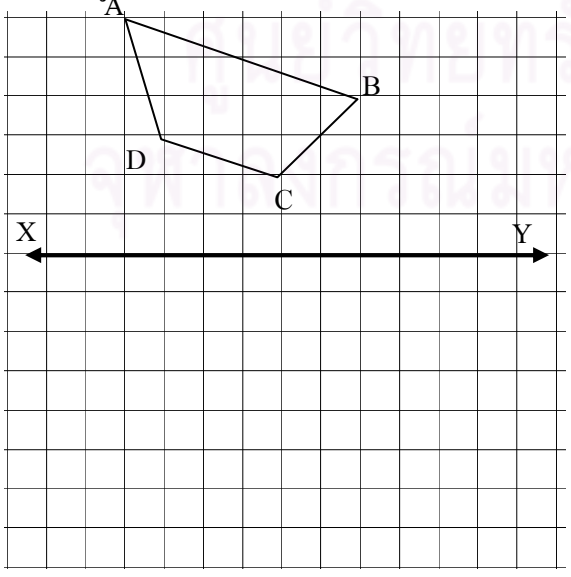
วิธีคิด.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. กำหนดส่วนของเส้นตรง $\overline{KM}$ เป็นรูปต้นแบบ และ $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นสะท้อน จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อน $\overline{KM}$ พร้อมเขียนวิธีการคิด



วิธีคิด.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. กำหนดรูปต้นแบบรูปสี่เหลี่ยม ABCD และ $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นสะท้อน จงเขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสี่เหลี่ยม ABCD พร้อมเขียนวิธีการคิด

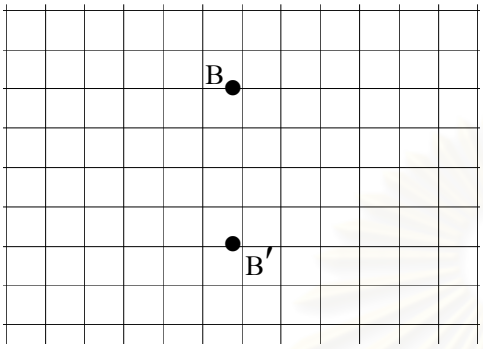


วิธีคิด.....
.....
.....
.....
.....
.....

ใบงานที่ 3.2 : เส้นสะท้อน

ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

1. กำหนดจุด B เป็นรูปต้นแบบ และจุด B′ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน จงเขียนเส้นสะท้อนที่ทำให้เกิดภาพ B′ พร้อมเขียนวิธีการคิด



วิธีคิด.....

.....

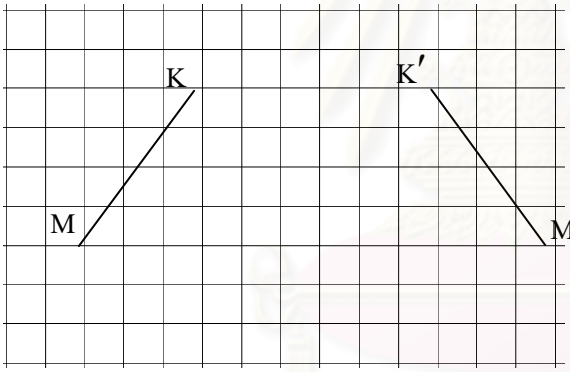
.....

.....

.....

.....

2. กำหนดส่วนของเส้นตรง $\overline{KM}$ เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{K'M'}$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน จงหาเส้นสะท้อนที่ทำให้เกิด $\overline{K'M'}$ พร้อมเขียนวิธีการคิด



วิธีคิด.....

.....

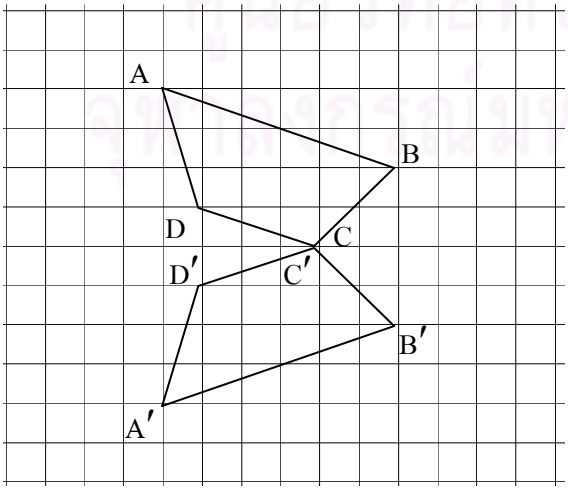
.....

.....

.....

.....

3. กำหนดรูปต้นแบบรูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม A′B′C′D′ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน จงหาเส้นสะท้อนที่ทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยม A′B′C′D′ พร้อมเขียนวิธีการคิด



วิธีคิด.....

.....

.....

.....

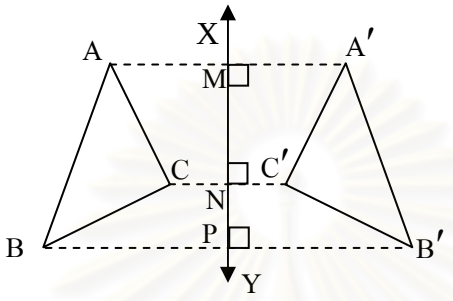
.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 3.1 : การสะท้อน

กำหนด ΔABC เป็นรูปต้นแบบ เมื่อสะท้อน ΔABC ด้วยเส้นสะท้อน XY และได้ $\Delta A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน ดังรูป



ลาก $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ตัด $\overleftrightarrow{XY}$ ที่จุด M, N และ P ตามลำดับ ซึ่งจากข้อสรุปการสะท้อนจะได้ว่าแต่ $\overleftrightarrow{XY}$ ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$

จากภาพการสะท้อนข้างบนจงตอบคำถามต่อไปนี้

1. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ขนานกันหรือไม่.....
2. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ยาวเท่ากันหรือไม่ .....
3. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ และ $BC = B'C'$ ใช่หรือไม่.....
4. $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ และ $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ใช่หรือไม่.....
5. จากข้อ 4 ด้านแต่ละด้านของรูปต้นแบบกับภาพที่ได้จากการสะท้อนจำเป็นต้องขนานกันหรือไม่... .....
6. ใช้พลาสติกใสลอก ΔABC แล้วเลื่อนไปทับ $\Delta A'B'C'$ รูปทั้งสองทับกันได้สนิทหรือไม่ .....

ถ้าไม่ได้ให้นักเรียนพลิกพลาสติกใสแล้วเลื่อน ΔABC ไปทับ $\Delta A'B'C'$ B' แล้วตรวจสอบว่ารูปทั้งสองทับกันได้สนิทหรือไม่.....

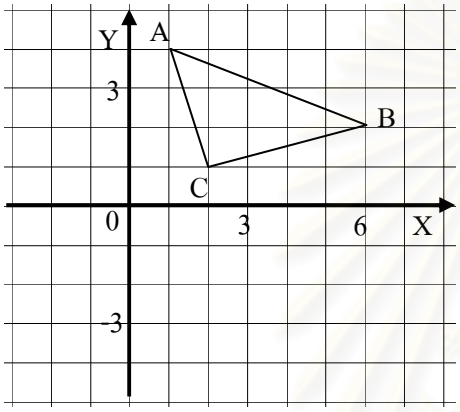
ใบงานที่ 3.3 : พิกัดของการสะท้อน

ชื่อ.....ชั้น ม. 2/ …… เลขที่.....

กำหนดรูปต้นแบบรูปสามเหลี่ยม ABC (1) เขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC (2) หาพิกัดของรูปต้นแบบและพิกัดของภาพที่ได้ แล้วเติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์

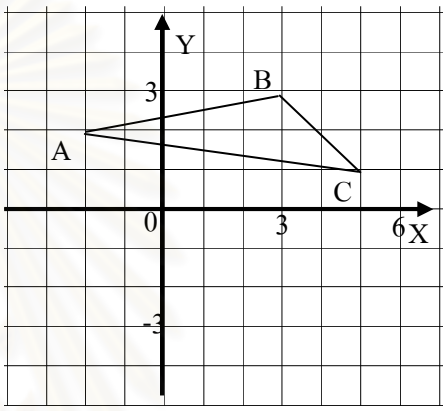
1. แกน X เป็นเส้นสะท้อน

1.1)



พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

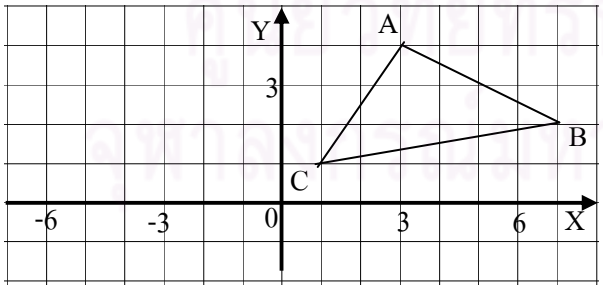
1.2)



พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

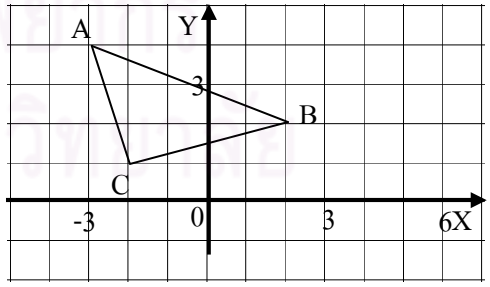
2. แกน Y เป็นเส้นสะท้อน

2.1)



พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

2.2)



พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 1 ช่วงชั้นที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

สาระ พิกัดของภาพสะท้อน จำนวน 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถ

1. จับคู่รูปที่เกิดจากการสะท้อนได้
2. หาจุดยอดมุมของภาพที่เกิดจากการสะท้อนจากเส้นสะท้อนในลักษณะต่างๆ ได้
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับการสะท้อนแก้ปัญหาได้
4. อภิปราย แสดงความคิดเห็นอย่างสมเหตุสมผล
5. ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอแนวคิด

สาระการเรียนรู้

1. การหาพิกัดของภาพสะท้อน

1.1 แกน X เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) เป็นค่าเดียวกันทั้งในรูปต้นแบบและภาพสะท้อน ส่วนพิกัดที่สอง (y) ของภาพสะท้อนเป็นจำนวนตรงข้ามกับพิกัดที่สองของรูปต้นแบบ

1.2 แกน Y เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของภาพสะท้อนเป็นจำนวนตรงข้ามกับพิกัดที่หนึ่งของรูปต้นแบบ ส่วนพิกัดที่สอง (y) เป็นค่าเดียวกันทั้งในรูปต้นแบบและภาพสะท้อน

1.3 เส้นสะท้อนขนานกับแกน X หรือขนานกับแกน Y

- เส้นสะท้อนขนานกับแกน X พิกัดที่หนึ่ง (x) จะคงเดิม พิกัดที่สอง (y) จะเปลี่ยนแปลง
- เส้นสะท้อนขนานกับแกน Y พิกัดที่หนึ่ง (x) จะเปลี่ยนแปลง พิกัดที่สอง (y) จะคงเดิม

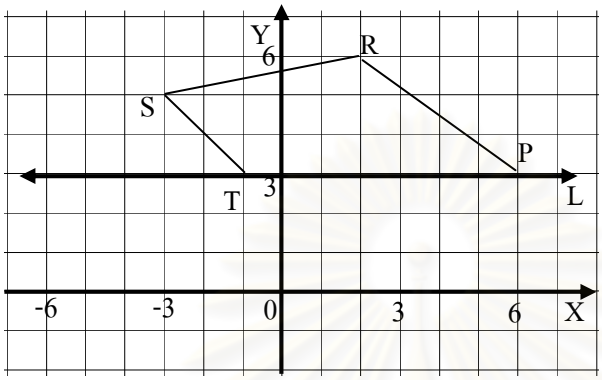
โดยให้นับช่องตารางหาระยะระหว่างจุดที่กำหนดให้กับเส้นสะท้อน ซึ่งจะเท่ากับระยะของภาพสะท้อน จากนั้นจึงหาพิกัดของภาพสะท้อน

1.4 เส้นสะท้อนไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y แต่เป็นเส้นแนวทแยง ให้ลากเส้นตรงจากจุดที่กำหนดให้และตั้งฉากกับเส้นสะท้อน ภาพของจุดที่กำหนดให้จะอยู่บนเส้นตั้งฉากที่สร้าง และห่างจากเส้นสะท้อนเป็นระยะเท่ากับระยะของจุดที่กำหนดให้กับเส้นสะท้อน จากนั้นจึงหาพิกัดของภาพสะท้อน

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด □PRST และให้เส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อนที่ขนานกับแกน X อยู่เหนือแกน X 3 หน่วย จงหา

1) พิกัดของจุด P', R', S' และ T' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P, R, S และ T

2) □$P'R'S'T'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน □PRST



แนวคิด หาจุด P', R', S' และ T' โดยใช้การนับช่องตารางหาระยะที่จุด P', R', S' และ T' อยู่ห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากับระยะที่จุด P, R, S และ T อยู่ห่างจากเส้นสะท้อน

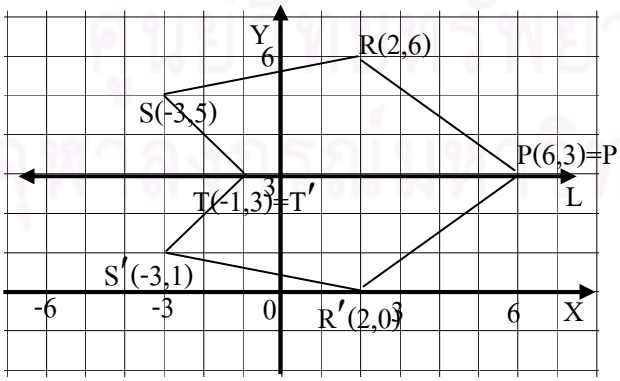
วิธีทำ

1. หาพิกัดของจุด P', R', S' และ T' ดังนี้

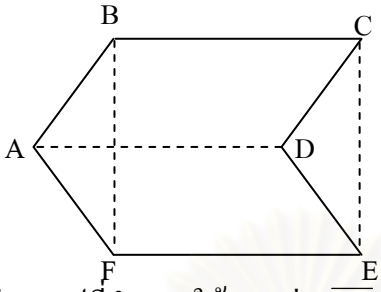
(1) หาพิกัดของจุด P, R, S และ T ได้เป็น (6, 3), (2, 6), (-3, 5) และ (-1, 3) ตามลำดับ

(2) หาพิกัดของจุด P', R', S' และ T' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P, R, S และ T ตามลำดับ จะได้ $P'(6, 3)$, $R'(2, 0)$, $S'(-3, 1)$ และ $T'(-1, 3)$

2. ลาก $\overline{P'R'}$, $\overline{R'S'}$, $\overline{S'T'}$ จะได้ □$P'R'S'T'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน □PRST ด้วยเส้นสะท้อน L



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดรูป ABCDEF ที่ $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{DC}$ และ $\overline{BC}$ ขนานกับ $\overline{FE}$, BC = FE = 7 เซนติเมตร และ BF = CE = 6 เซนติเมตร จงหาพื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนด



แนวคิด จากการสังเกตรูปที่กำหนดให้คะเนว่า $\overline{AD}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{BF}$ □AFED จึงเป็นภาพสะท้อนของ □ABCD โดยมี $\overline{AD}$ เป็นเส้นสะท้อน ดังนั้นอาจประมาณพื้นที่รูป ABCDEF เป็น 2 เท่าของ □ABCD ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

วิธีทำ

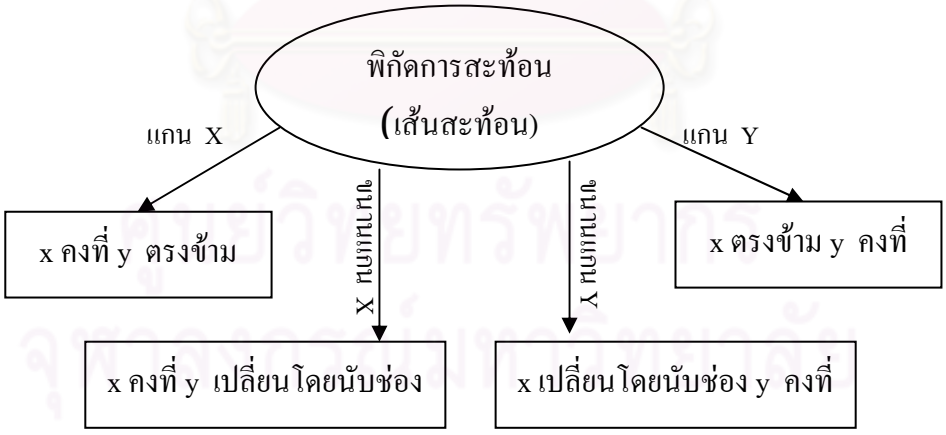
จากรูป □ABCD มีความกว้าง 3 เซนติเมตร และยาว 7 เซนติเมตร

จะได้พื้นที่ □ABCD ประมาณ $3 \times 7 \approx 21$ ตารางเซนติเมตร

ดังนั้นพื้นที่รูป ABCDEF ประมาณ $21 \times 2 \approx 42$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ ประมาณ 42 ตารางเซนติเมตร

2. สรุปพิกัดการสะท้อนและการใช้แก้ปัญหา



กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นของไพรี -ไคเรน	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. การรู้สิ่งเดิม (การสะท้อน) 2. การสร้างภาพ 3. การเกิดภาพในใจ 4. สังเกตสมบัติ	1. ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน นักเรียนพิจารณารูปในหนังสือเรียนหน้า 170 ว่าเป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานหรือไม่ แล้วครูสุ่มนักเรียนออกมาแสดงคำตอบและอธิบายเหตุผล 2. ขั้นเรียนรู้จากการปฏิบัติ 2.1 ครูให้นักเรียนจับคู่ทำใบงานที่ 4.1 : พิกัดของภาพสะท้อน 2.1.1 จากนั้นให้รวมกลุ่ม 4 คนตรวจสอบคำตอบที่ได้ในแต่ละคู่ หากไม่สอดคล้องกันให้ตรวจสอบเพื่อหาข้อสรุป จากนั้นรวมกลุ่ม 8 คนแล้วตรวจสอบคำตอบอีกครั้ง 2.2.2 นักเรียนส่งตัวแทนกลุ่ม (8 คน) ออกมาแสดงคำตอบพร้อมอธิบายวิธีการคิด นักเรียนคนอื่นๆ ร่วมกันแสดงความคิดเห็น ครูเสนอแนะเพิ่มเติม 2.2 จากคำตอบในใบงานที่ 4.1 ให้นักเรียนอภิปรายในกันกลุ่ม 8 คนในประเด็นดังนี้ 1) เมื่อเส้นตรง L ที่ขนานกับแกน X เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร และพิกัดที่สอง (y) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร และสรุปวิธีหาพิกัดภาพสะท้อน	1. ขั้นนำ นักเรียนพิจารณารูปในหนังสือเรียนหน้า 170 ว่าเป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานหรือไม่ แล้วครูสุ่มนักเรียนออกมาแสดงคำตอบและอธิบายเหตุผล 2. ขั้นสอน 2.1 ครูให้นักเรียนจับคู่ทำใบงานที่ 4.1 : พิกัดของภาพสะท้อน 2.2 ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้องและเสนอแนะเพิ่มเติม 2.3 ครูตั้งคำถามจากคำตอบที่ได้จากใบงาน - เมื่อเส้นตรง L ที่ขนานกับแกน X เป็นเส้นสะท้อน ภาพสะท้อนที่ได้ค่าใดคงที่ [x] ค่าใดเปลี่ยนแปลง [y] - สอดคล้องกับภาพสะท้อนที่ได้จากแกน X เป็นเส้นสะท้อน หรือแกน Y เป็นเส้นสะท้อน [X] - เมื่อเส้นตรง L ที่ขนานกับแกน Y เป็นเส้นสะท้อน ภาพสะท้อนที่ได้ค่าใดคงที่ [y] ค่าใดเปลี่ยนแปลง [x] - สอดคล้องกับภาพสะท้อนที่ได้จากแกน X เป็นเส้นสะท้อน หรือแกน Y เป็นเส้นสะท้อน [Y]

ขั้นของไพรี -ไดเรน	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
5. การจัดระเบียบ 6. การสังเกต	2) เมื่อเส้นตรง L ที่ขนานกับแกน Y เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อนสัมพันธ์กันอย่างไร และพิกัดที่สอง (y) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร และสรุปวิธีหาพิกัดภาพสะท้อน 3) จากคำตอบในข้อ 1-2 มีความสอดคล้องหรือแตกต่างกับพิกัดของภาพสะท้อนที่มีแกน X หรือ แกน Y เป็นเส้นสะท้อน อย่างไร 4) เมื่อเส้นตรง L ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y เป็นเส้นสะท้อน พิกัดที่หนึ่ง (x) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อนสัมพันธ์กันอย่างไร และพิกัดที่สอง (y) ของรูปต้นแบบและภาพสะท้อน สัมพันธ์กันอย่างไร และสรุปวิธีหาพิกัดภาพสะท้อน ครูยกตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนเสนอแนวคิดในการหาคำตอบ ครูเขียนแนวคิดบนกระดานดำพร้อมเสนอแนะเพิ่มเติม จากนั้นให้นักเรียนหาคำตอบตามแนวคิด และตรวจสอบคำตอบกับเพื่อน 3. ขั้นสร้างความเชื่อมโยง 3.1 ให้นักเรียนในกลุ่มเดิมร่วมกันนำคำตอบจากการอภิปรายสรุปเป็นวิธีหาพิกัดของภาพสะท้อน 3.2 นักเรียนส่งตัวแทนกลุ่มนำเสนอข้อสรุปที่ได้ นักเรียนในกลุ่มอื่นร่วมกันเสนอแนะและปรับปรุงให้ถูกต้อง	2.4 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการหาพิกัดของภาพสะท้อน 2.5 ครูยกตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนเสนอแนวคิดในการหาคำตอบ ครูเขียนแนวคิดบนกระดานดำพร้อมเสนอแนะเพิ่มเติม จากนั้นให้นักเรียนหาคำตอบตามแนวคิด และตรวจสอบคำตอบกับเพื่อน 3. ขั้นฝึกทักษะ 3.1 ครูยกตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนเสนอวิธีการในการหาคำตอบ ครูเขียนวิธีการที่นักเรียนเสนอพร้อมเสนอแนะเพิ่มเติม นักเรียนแสดงวิธีทำตามวิธีการที่เสนอ แล้วตรวจสอบคำตอบกับเพื่อน 3.2 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปวิธีหาพื้นที่โดยใช้ความรู้เรื่องการสะท้อน 3.3 นักเรียนทำแบบฝึกที่ 4.1 : พิกัดภาพสะท้อน และแบบฝึกหัด 4.2 ข้อ 4 ในหนังสือเรียนหน้า 175 เป็นการบ้าน 4. ขั้นสรุป นักเรียนสรุปการหาพิกัดของภาพสะท้อนในลักษณะต่างๆ และ วิธีหาพื้นที่ของรูปโดยใช้การสะท้อน

ขั้นของไพรี -ไคเรน	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
7. การสร้างโครงสร้าง 8. การสร้าง	3.2.1 ครูยกตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนเสนอวิธีการในการหาคำตอบ ครูเขียนวิธีการที่นักเรียนเสนอพร้อมเสนอแนะเพิ่มเติม 3.2.2 นักเรียนแสดงวิธีทำตามวิธีการที่เสนอ แล้วตรวจสอบคำตอบกับเพื่อน 3.2.3 ครูให้นักเรียนคิดวิธีหาพื้นที่ของรูปโดยใช้ความรู้เรื่องการสะท้อน 4. สร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ 4.1 นักเรียนเขียนข้อสรุปการหาพิกัดของภาพสะท้อนในลักษณะต่างๆ และวิธีหาพื้นที่ของรูปโดยใช้การสะท้อนที่ตนเองคิดขึ้น ด้วยสัญลักษณ์ที่เข้าใจง่าย โดยการเขียนเป็นแผนผังความคิด การสร้างตาราง หรือการวาดภาพประกอบ 4.2 นักเรียนทำแบบฝึกที่ 4.1 : พิกัดภาพสะท้อน และแบบฝึกหัด 4.2 ข้อ 4 ในหนังสือเรียนหน้า 175 เป็นการบ้าน	

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สื่อการเรียนรู้

1. ตารางกราฟ
2. ใบงานที่ 4.1 : พิกัดภาพสะท้อน
3. แบบฝึกที่ 4..1 : พิกัดภาพสะท้อน

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน 2. สังเกตจากการแสดงความคิดเห็น 3. สังเกตจากผลงานการทำใบงาน 4. สังเกตจากการเขียนสรุป 5. สังเกตจากการทำแบบฝึก	

บันทึกหลังการเรียนการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

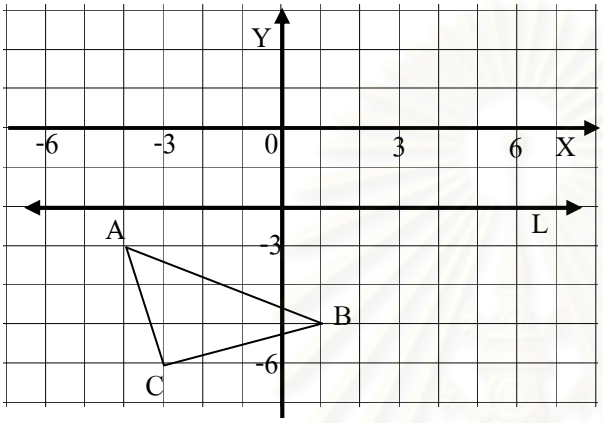
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ใบงานที่ 4.1 : พิกัดภาพสะท้อน

ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

กำหนดรูปต้นแบบรูปสามเหลี่ยม ABC (1) เขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC (2) หาพิกัดของรูปต้นแบบและพิกัดของภาพที่ได้ พร้อมเขียนวิธีการหาพิกัดของภาพสะท้อน

1. เส้นตรง L ที่ขนานกับแกน X เป็นเส้นสะท้อน



วิธีคิด.....

.....

.....

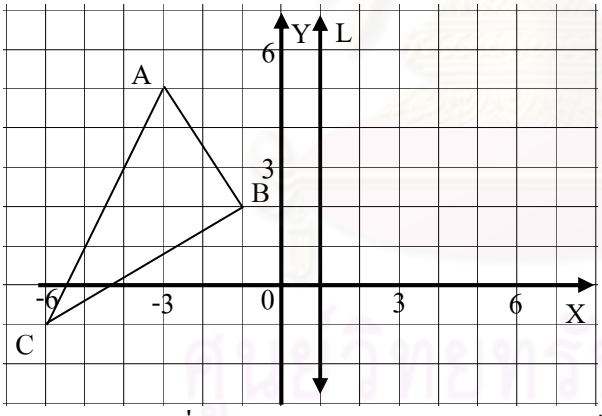
.....

.....

.....

.....

2. เส้นตรง L ที่ขนานกับแกน Y เป็นเส้นสะท้อน



วิธีคิด.....

.....

.....

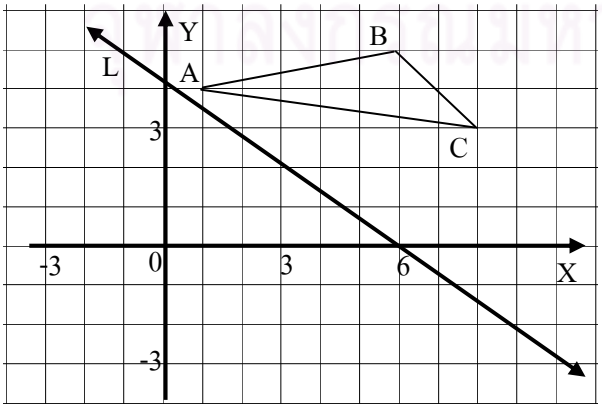
.....

.....

.....

.....

3. เส้นตรง L ที่ไม่ขนานกับแกน X และแกน Y เป็นเส้นสะท้อน



วิธีคิด.....

.....

.....

.....

.....

.....

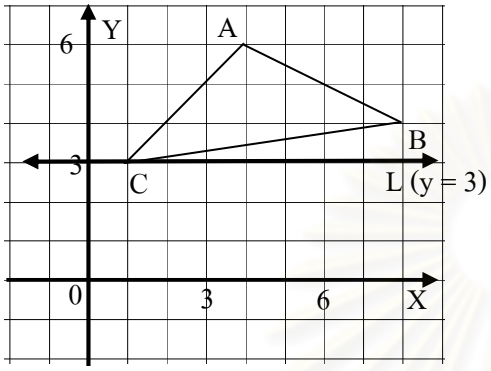
.....

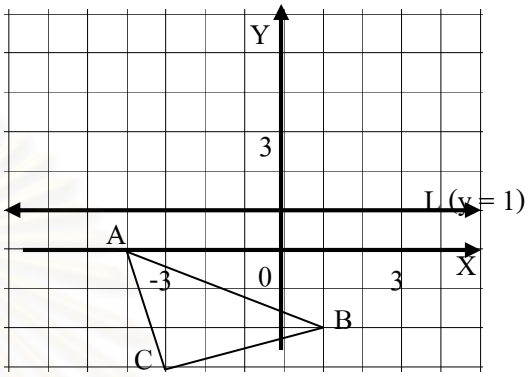
แบบฝึก 4.1 : พิกัดภาพสะท้อน

ชื่อ.....ชั้น ม. 2/ ……. เลขที่.....

กำหนดรูปต้นแบบรูปสามเหลี่ยม ABC (1) เขียนภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC (2) หาพิกัดของรูปต้นแบบและพิกัดของภาพที่ได้ แล้วเติมตารางให้สมบูรณ์

1. เส้นตรง L ที่ขนานกับแกน X เป็นเส้นสะท้อน

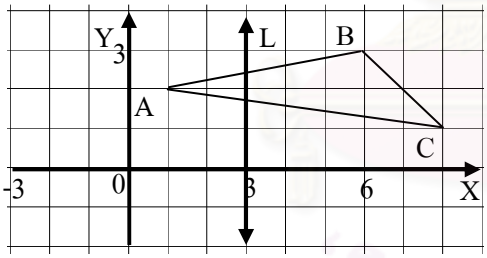


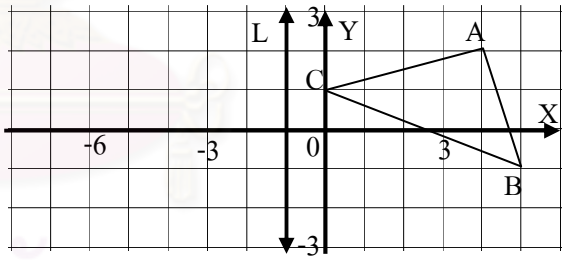


พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

2. เส้นตรง L ที่ขนานกับแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

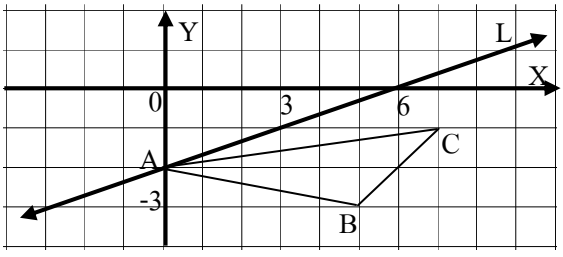




พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

3. เส้นตรง L ที่ไม่ขนานกับแกน X และแกน Y เป็นเส้นสะท้อน



พิกัดรูปต้นแบบ	พิกัดภาพสะท้อน
A(……..)	A′(……)
B(……..)	B′(……)
C(……..)	C′(……)

ภาคผนวก ง

เครื่องมือการวิจัย

- แบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
- แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์
- แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคการศึกษา 2/2550

คำชี้แจง

1. แบบวัดนี้มีทั้งหมด 30 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบวัด 60 นาที
2. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น แล้วกาเครื่องหมาย × ลงในกระดาษคำตอบ ดังตัวอย่าง

ข้อ	ก	ข	ค	ง
80		×		

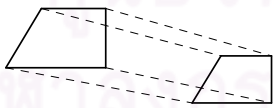
3. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ข เป็นข้อ ง ให้ทำดังนี้

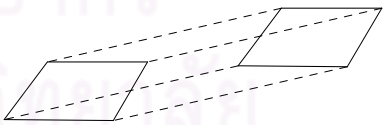
ข้อ	ก	ข	ค	ง
80		=		×

4. นักเรียนสามารถคิดคำนวณลงในแบบวัดได้
5. ขอให้นักเรียนทำแบบวัดให้ครบทุกข้อ และส่งแบบวัดคืนกรรมการคุมสอบ

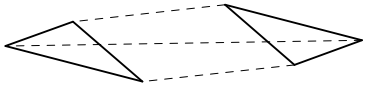
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. “จุดที่สมนัยกัน” หมายความว่าอย่างไร
   ก. จุดที่อยู่ในรูปต้นแบบและภาพ
   ข. จุดที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของรูปต้นแบบ
   ค. จุดที่ลากเส้นเชื่อมต่อกันได้ของรูปต้นแบบและภาพ
   ง. จุดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันของรูปต้นแบบและภาพ
2. ข้อใดกล่าวเกี่ยวกับการเลื่อนขนานได้ถูกต้อง
   ก. เป็นการเลื่อนจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง
   ข. เป็นการเลื่อนจุดทุกจุดไปตามทิศทางที่กำหนด
   ค. เป็นการเลื่อนจุดทุกจุดไปเป็นระยะทางที่กำหนด
   ง. เป็นการเลื่อนจุดทุกจุดไปตามทิศทางและระยะทางที่กำหนด
3. ข้อใดไม่ใช่หลักของการสะท้อน
   ก. จุดต่างๆ บนเส้นสะท้อนเป็นจุดคงที่
   ข. ภาพที่เกิดจากการสะท้อนเหมือนรูปต้นแบบ
   ค. ภาพที่เกิดจากการสะท้อนสลับด้านซ้าย-ขวากับรูปต้นแบบ
   ง. ภาพจากการสะท้อนห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากับรูปต้นแบบ
4. ข้อใดไม่ใช่หลักของการหมุน
   ก. ภาพที่เกิดจากการหมุนเหมือนกับรูปต้นแบบ
   ข. ภาพที่เกิดจากรูปต้นแบบเกิดจากจุดหมุนหนึ่งจุด
   ค. ภาพที่เกิดจากการหมุนมีทิศทางเดียวกับรูปต้นแบบ
   ง. ภาพที่เกิดจากการหมุนอยู่ห่างจากจุดหมุนเท่ากับรูปต้นแบบ
5. ข้อใดเป็นการเลื่อนขนานที่ถูกต้อง

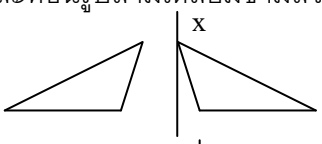
ก. 

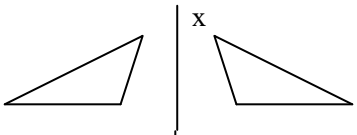
ข. 

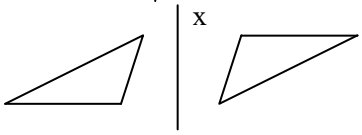
ค.

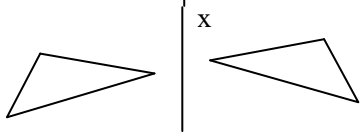
ง. 

6. การสะท้อนรูปสามเหลี่ยมข้ามส่วนของเส้นตรง x ในข้อใดถูกต้อง

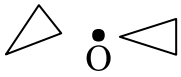
ก. 

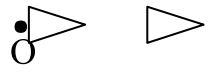
ข. 

ค. 

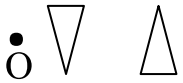
ง. 

7. การหมุนรอบจุด O ข้อใดถูกต้อง

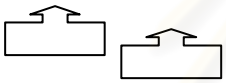
ก. 

ข. 

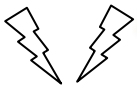
ค.

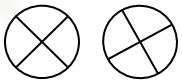
ง. 

8. การใช้การแปลงกับรูปในข้อใดกล่าว<u>ไม่ถูกต้อง</u>

ก.  การสะท้อน

ข. การเลื่อนขนาน

ค.  การหมุน

ง.  การหมุน

9. ข้อใดต่อไปนี้เท่ากันทุกประการ

ก. ส่วนของเส้นตรง 2 เส้น
ข. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 2 รูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
ค. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
ง. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2 รูปที่มีด้านเท่ากัน

10. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการเมื่อใด

ก. มีความยาวเท่ากัน
ข. มีความหนาเท่ากัน
ค. มีทิศทางเดียวกัน
ง. มีมุมเท่ากัน

11. มุมสองมุมเท่ากันทุกประการเมื่อใด

ก. แขนของมุมทั้งสองมีความยาวเท่ากัน
ข. จุดยอดของมุมทับกันสนิท
ค. ขนาดของมุมทั้งสองเท่ากัน
ง. จุดยอดและแขนของมุมเท่ากัน

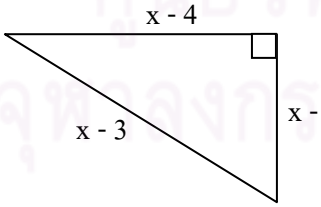
12. เงื่อนไขในข้อใด**<u>ไม่</u>**ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ก. มีมุมสมนัยกันสามคู่
ข. มีด้านสมนัยกันสามคู่
ค. ทับกันสนิท
ง. มีมุมสมนัยกันสามคู่ และด้านสมนัยกันสามคู่

13. ข้อใดเป็นรูปที่เท่ากันทุกประการ

ก. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
ข. รูปสี่เหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
ค. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากัน 3 คู่
ง. รูปวงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากัน

14. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากัน 2 คู่ และมุมเท่ากัน 1 คู่ ข้อใดสรุปถูกต้อง
    ก. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – มุม - ด้าน
    ข. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม – ด้าน - มุม
    ค. รูปสามเหลี่ยมสองรูปไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ เพราะมุมที่เท่ากันอาจไม่อยู่ระหว่างด้านที่เท่ากัน
    ง. รูปสามเหลี่ยมสองรูปไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ เพราะด้านที่เท่ากันอาจไม่อยู่ระหว่างมุมที่เท่ากัน
15. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากัน 3 คู่ และด้านเท่ากัน 1 คู่ ข้อใดสรุปถูกต้อง
    ก. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – มุม - ด้าน
    ข. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม – ด้าน - มุม
    ค. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน
    ง. รูปสามเหลี่ยมสองรูปไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ
16. ข้อใดกล่าวเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไม่ถูกต้อง
    ก. มุมที่ฐานมีขนานเท่ากัน
    ข. มุมยอดมีขนาดเล็กกว่ามุมที่ฐาน
    ค. เส้นที่ลากจากมุมยอดมาตั้งฉากกับฐาน จะแบ่งครึ่งฐาน
    ง. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
17. ทฤษฎีบทพีทาโกรัสกล่าวถึงความสัมพันธ์ในเรื่องใด
    ก. ด้านประกอบมุมฉาก
    ข. ด้านตรงข้ามมุมฉาก
    ค. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
    ง. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
18. จากรูป ข้อใดเขียนความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ถูกต้อง



    ก. $(x-3)^2 = (x-4)^2 + (x-5)^2$
    ข. $(x-4)^2 = (x-3)^2 + (x-5)^2$
    ค. $(x-5)^2 = (x-3)^2 + (x-4)^2$
    ง. $5^2 = 4^2 + 3^2$
19. ถ้า a , b และ c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC และ $c^2 > a^2 + b^2$ ข้อใดกล่าวถูกต้อง
    ก. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
    ข. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม
    ค. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน
    ง. ไม่สามารถระบุได้

20. ถ้าความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งยาว 5 , 12, 13 เซนติเมตร ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

ก. ใช้บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้

ข. รูปสามเหลี่ยมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

ค. ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 เซนติเมตร

ง. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้เท่ากับ 30 ตารางเซนติเมตร

21. ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

ข. เศษส่วนทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

ค. จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเขียนเป็นจำนวนเต็มได้

ง. จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเขียนเป็นเศษส่วนได้

22. ข้อใดไม่ใช่จำนวนจริง

ก. $\sqrt{-9}$

ข. $\sqrt[3]{-6}$

ค. $\sqrt[3]{8}$

ง. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

23. ข้อใดเป็นจำนวนอตรรกยะ

ก. $\frac{22}{7}$

ข. $1.2\dot{3}$

ค. 4.372727272…

ง. 6.242244222444…

24. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. รากที่สองของจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงบวก

ข. รากที่สามของจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงบวก

ค. รากที่สองของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ

ง. รากที่สามของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ

25. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง $\sqrt[3]{-a^3}$ เท่ากับข้อใด

ก. a

ข. –a

ค. $\pm a$

ง. $|a|$

26. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. รากที่สอง a เท่ากับ $\sqrt{a}$

ข. รากที่สามของ a เท่ากับ $\sqrt[3]{a}$

ค. $\pm\sqrt{a^2} = a$

ง. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = |a|$

27. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง $\sqrt{(a-b)^2}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $|a-b|$ ข. $|a-b|^2$

ค. $|a|-|b|$ ง. $|a|^2-|b|^2$

28. ข้อใดเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ก. $\sqrt[3]{-27}=-3$ ข. $a = -\frac{1}{2}$

ค. $a^2 + 1 = 5$ ง. $a^3 = 27$

29. ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริงและ $2a + 3b = c + 3b$ จะได้ $2a = c$ ใช้สมบัติของการเท่ากันข้อใด

ก. การบวก ข. การคูณ

ค. การหาร ง. การถ่ายทอด

30. ถ้า a , b, c และ d เป็นจำนวนจริง b และ d ไม่เท่ากับศูนย์ และ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ จะได้ ad = bc ใช้สมบัติของการเท่ากันข้อใด

ก. การบวก ข. การคูณ

ค. การหาร ง. การถ่ายทอด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคการศึกษา 2/2550

คำชี้แจง

1. แบบวัดนี้มีทั้งหมด 30 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบวัด 60 นาที
2. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น แล้วกาเครื่องหมาย × ลงในกระดาษคำตอบ ดังตัวอย่าง

ข้อ	ก	ข	ค	ง
80		×		

3. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ข เป็นข้อ ง ให้ทำดังนี้

ข้อ	ก	ข	ค	ง
80		=		×

4. นักเรียนสามารถคิดคำนวณลงในแบบวัดได้
5. ขอให้นักเรียนทำแบบวัดให้ครบทุกข้อ และส่งแบบวัดคืนกรรมการคุมสอบ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. จุด (2, 5) สะท้อนข้ามแกน Y แล้วเลื่อนขนานไปทางขวามือตามแนวแกน X 2 หน่วย แล้วเลื่อนลงตามแนวแกน Y 3 หน่วย จุดที่เกิดขึ้นมีพิกัดตรงกับข้อใด

   ก. (0, 2) ข. (0, 8)

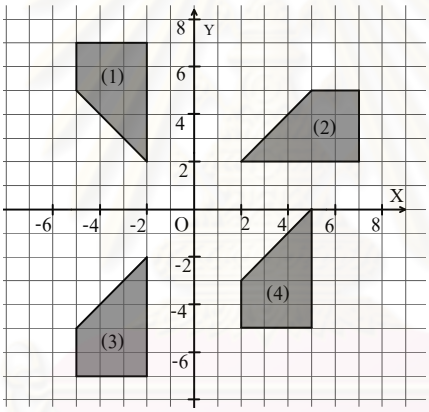
   ค. (4, -8) ง. (4, 2)

2. จุด (5, 8) หมุน 180° ตามเข็มนาฬิการอบจุด (0, 0) แล้วสะท้อนข้ามแกน Y มีพิกัดตรงกับข้อใด

   ก. (5, 8) ข. (5, -8)

   ค. (-5, 8) ง. (-5, -8)

จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดหมุน แกน X และ Y เป็นเส้นสะท้อน พิจารณารูปต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามข้อ 3 – 4



3. รูป (1) แปลงเป็นรูป (4) เพราะการแปลงตามลำดับในข้อใด

   ก. การหมุนและการเลื่อนขนาน ข. การสะท้อนและการเลื่อนขนาน

   ค. การหมุนและการสะท้อน ง. การเลื่อนขนานและการหมุน

4. รูป (3) แปลงเป็นรูป (4) เพราะการแปลงตามข้อใด

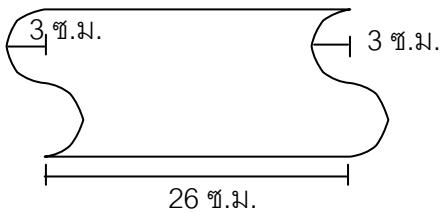
   ก. สะท้อนที่แกน X

   ข. สะท้อนที่แกน Y

   ค. เลื่อนขนานไปทางขวามือตามแนวแกน X 2 หน่วยแล้วเลื่อนขึ้นตามแนวแกน Y 7 หน่วย

   ง. เลื่อนขนานไปทางขวามือตามแนวแกน X 7 หน่วยแล้วเลื่อนขึ้นตามแนวแกน Y 2 หน่วย

5. พื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนดให้เท่ากับข้อใด



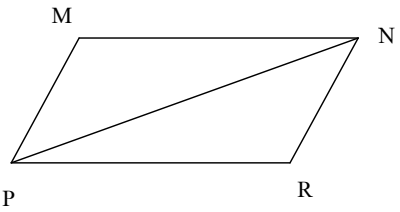
   ก. 216 ตารางเซนติเมตร

   ข. 264 ตารางเซนติเมตร

   ค. 312 ตารางเซนติเมตร

   ง. 1,248 ตารางเซนติเมตร

6. กำหนดให้ $\triangle$ MNP $\cong$ $\triangle$ RPN ข้อใด<u>ไม่ถูกต้อง</u>



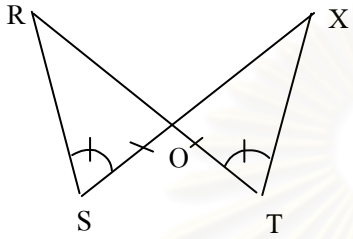
ก. $\overline{MN}$ สมนัยกับ $\overline{PR}$

ข. $\overline{MP}$ สมนัยกับ $\overline{NR}$

ค. $M\hat{N}P$ สมนัยกับ $N\hat{P}R$

ง. $M\hat{P}N$ สมนัยกับ $M\hat{N}P$

7. จากรูปข้อใดกล่าวถูกต้อง



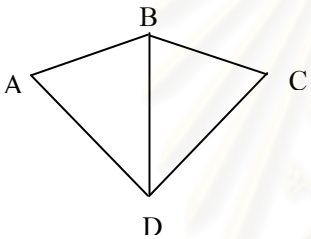
ก. RS = RO

ข. XT = XO

ค. $R\hat{O}S = X\hat{O}R$

ง. $R\hat{O}X = S\hat{O}T$

8. ต้องกำหนดเงื่อนไขใดจึงจะทำให้ $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ CBD แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน



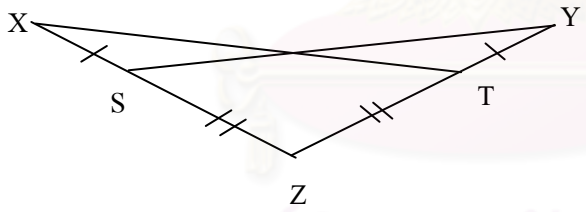
ก. AB = BC และ AD = BD

ข. AD = BC และ AB = BD

ค. AB = BC และ AD = CD

ง. AD = CD และ AB = BD

9. กำหนดให้ XS = TY และ SZ = TZ ดังนั้นรูป $\triangle$ XZT $\cong$ $\triangle$ SYZ ตามความสัมพันธ์ใด



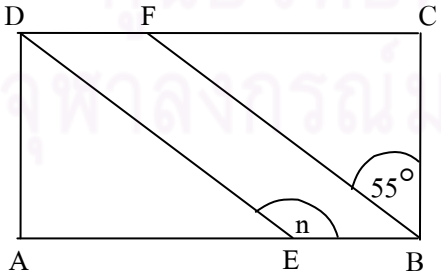
ก. มุม – ด้าน – มุม

ข. มุม – มุม - ด้าน

ค. ด้าน – มุม – ด้าน

ง. ด้าน – ด้าน – ด้าน

10. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ $\triangle$ ADE $\cong$ $\triangle$ CBF ค่าของ n ตรงกับข้อใด



ก. 35°

ข. 55°

ค. 125°

ง. 145°

11. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 17 เซนติเมตร และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 8 เซนติเมตร ด้านประกอบมุมฉากอีกด้านยาวเท่าใด

ก. 9 เซนติเมตร

ข. 15 เซนติเมตร

ค. 18 เซนติเมตร

ง. $\sqrt{353}$ เซนติเมตร

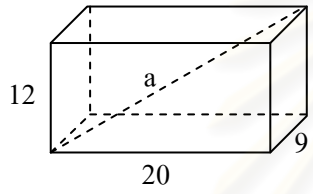
12. บ้านของนกอยู่ทางทิศเหนือของบ้านหงษ์เป็นระยะทาง 40 กิโลเมตร และบ้านของปูอยู่ทางทิศตะวันออกของบ้านหงส์เป็นระยะทาง 9 กิโลเมตร บ้านของนกกับบ้านของปูห่างกันเท่าใด

ก. 41 กิโลเมตร
ข. 49 กิโลเมตร
ค. $\sqrt{98}$ กิโลเมตร
ง. $\sqrt{1519}$ กิโลเมตร

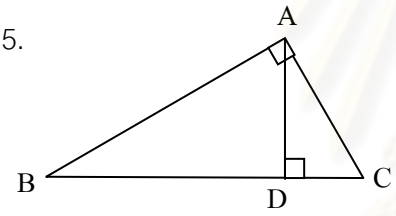
13. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านยาวยาว 24 นิ้ว มีเส้นทแยงมุมยาว 30 นิ้ว จะมีพื้นที่เท่าใด

ก. 408 ตารางนิ้ว
ข. 432 ตารางนิ้ว
ค. 540 ตารางนิ้ว
ง. 720 ตารางนิ้ว

14. จากรูป ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากข้างล่าง a ยาวเท่าใด



ก. $\sqrt{481}$
ข. $4\sqrt{34}$
ค. 24
ง. 25

15. 

จากรูป AB = 20, BC = 25 จะได้ $\overline{BD}$ ยาวเท่าใด

ก. 16
ข. 17
ค. 18
ง. 19

16. $1.5\dot{2}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{14}{9}$
ข. $\frac{151}{9}$
ค. $\frac{151}{90}$
ง. $\frac{151}{99}$

17. รากที่สองของ 784 เท่ากับข้อใด

ก. ± 28
ข. 28
ค. $\pm\sqrt{28}$
ง. $\sqrt{784}$

18. รากที่สามของ 729 เท่ากับข้อใด

ก. 7
ข. 9
ค. 11
ง. 13

19. $8\sqrt{3}-5\sqrt{3}+6\sqrt{3}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $7\sqrt{3}$
ข. $8\sqrt{3}$
ค. $9\sqrt{3}$
ง. $19\sqrt{3}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

20. $\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{4}{15}$ ข. $\frac{6}{15}$

ค. $\frac{16}{225}$ ง. 0

21. $(3\sqrt{12}\times\sqrt{27})-(\sqrt{5}\times 2\sqrt{20})$ เท่ากับข้อใด

ก. 10 ข. 14

ค. 22 ง. 34

22. $\frac{-\sqrt[3]{-27}-\sqrt{4}+\sqrt{(-7)^2}}{\sqrt[3]{64}}$ เท่ากับข้อใด

ก. 2 ข. -2

ค. $\frac{1}{2}$ ง. $-\frac{7}{2}$

23. คำตอบของสมการ $\frac{3x+2}{5}-x=\frac{3-x}{2}$ คือข้อใด

ก. 19 ข. 11

ค. $\frac{11}{19}$ ง. $\frac{11}{21}$

24. คำตอบของสมการ $x-\frac{3}{4}=\frac{2x}{3}-\frac{4}{5}$ คือข้อใด

ก. $\frac{3}{20}$ ข. $-\frac{3}{20}$

ค. $\frac{1}{60}$ ง. $-\frac{1}{60}$

25. ถ้า x เป็นคำตอบของสมการ 5x – 2(6x – 2) = 10 – 4x แล้ว 3 – 6x มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -9 ข. -2

ค. 2 ง. 15

26. ถ้า x เป็นคำตอบของสมการ 4(0.5x + 0.5) = 0.5x + 6 แล้ว 18x + 7 มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{8}{3}$ ข. $\frac{4}{3}$

ค. 31 ง. 55

27. ถ้าสองเท่าของผลบวกของจำนวนคู่ที่เป็นบวกสามจำนวนเรียงกันมากกว่า 30 อยู่ 6 จำนวนในข้อใดเป็นจำนวนที่มากที่สุด

ก. 4 ข. 6

ค. 8 ง. 10

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

28. ปัจจุบันนิดมีอายุมากกว่าหน่อย 15 ปี อีก 3 ปีต่อมา นิดมีอายุมากกว่า 2 เท่าของอายุหน่อยอยู่ 4 ปี ปัจจุบันนิดมีอายุเท่าใด

ก. 23 ปี ข. 26 ปี

ค. 29 ปี ง. 31 ปี

29. น้ำผลไม้เข้มข้น 75% จำนวน 2 ลิตร ต้องเติมน้ำกี่ลิตรจึงจะมีความเข้มข้น 20%

ก. 2.25 ลิตร ข. 5.5 ลิตร

ค. 7.5 ลิตร ง. 9.5 ลิตร

30. ปกตินทีขับรถจากบ้านไปที่ทำงานด้วยความเร็วเฉลี่ย 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง แต่ในวันหนึ่งนทีออกจากบ้านช้ากว่าปกติ 15 นาที จึงขับรถด้วยความเร็วเฉลี่ย 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จึงถึงที่ทำงานในเวลาเดิม บ้านของนทีห่างจากที่ทำงานกี่กิโลเมตร

ก. 45 กิโลเมตร ข. 55 กิโลเมตร

ค. 60 กิโลเมตร ง. 90 กิโลเมตร

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์(ก่อนเรียน)

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคการศึกษา 2/2550

คำชี้แจง

1. แบบวัดนี้มีทั้งหมด 3 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบวัด 45 นาที
2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในกระดาษเขียนตอบอย่างละเอียดข้อละ 1 หน้ากระดาษ

---

1. ใช้เชือกเส้นหนึ่งผูกยอดเสาต้นที่หนึ่งซึ่งสูง 15 เมตร แล้วนำมายึดกับหมุดที่อยู่ห่างจากโคนเสา 8 เมตร จะเหลือเชือก 4 เมตร แล้วถ้าเอาเชือกเส้นเดียวกันไปผูกยอดเสาต้นที่สองซึ่งสูง 16 เมตร นำมายึดกับหมุดที่อยู่ห่างจากโคนเสา 12 เมตร เชือกดังกล่าวจะยึดได้พอดีหรือไม่ ถ้าไม่พอดีจะขาดหรือเหลือเชือกยาวเท่าใด

2. แท็งก์น้ำทรงลูกบาศก์ 2 ใบ ใบแรกจุน้ำได้ 343,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร ใบที่สองจุน้ำได้ 27 เท่าของความจุใบแรก ใบที่สองมีความยาวด้านละเท่าใด

3. จากการสำรวจวิธีการทำบุญภายในเวลา 1 เดือนที่ผ่านมาของคนจำนวนหนึ่ง พบว่าทำบุญด้วยการบริจาคเงิน $\frac{1}{40}$ ของคนที่สำรวจ และทำบุญด้วยการตักบาตร 20% ของที่เหลือ และไม่ได้ทำบุญในหนึ่งเดือนที่ผ่านมา 624 คน จงหาจำนวนคนที่สำรวจทั้งหมด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์(หลังเรียน)

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคการศึกษา 2/2550

คำชี้แจง

1. แบบวัดนี้มีทั้งหมด 3 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบวัด 45 นาที
2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในกระดาษเขียนตอบอย่างละเอียดข้อละ 1 หน้ากระดาษ

---

1. ใช้เชือกเส้นหนึ่งผูกยอดเสาต้นที่หนึ่งซึ่งสูง 12 เมตร แล้วนำมายึดกับหมุดที่อยู่ห่างจากโคนเสา 9 เมตร จะเหลือเชือก 4 เมตร แล้วถ้าเอาเชือกเส้นเดียวกันไปผูกยอดเสาต้นที่สองซึ่งสูง 24 เมตร นำมายึดกับหมุดที่อยู่ห่างจากโคนเสา 7 เมตร เชือกดังกล่าวจะยึดได้พอดีหรือไม่ ถ้าไม่พอดีจะขาดหรือเหลือเชือกยาวเท่าใด

2. แท็งก์น้ำทรงลูกบาศก์ 2 ใบ ใบแรกจุน้ำได้ 512,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร ใบที่สองจุน้ำได้ 8 เท่าของความจุใบแรก ใบที่สองมีความยาวด้านละเท่าใด

3. นักเรียนโรงเรียนหนึ่งเดินทางมาโรงเรียนด้วยรถจักรยานยนต์ $\frac{1}{30}$ ของนักเรียนทั้งหมด และเดินทางด้วยรถรับจ้าง 40% ของที่เหลือ และนักเรียนที่เหลืออีก 522 คนเดินทางด้วยรถประจำทาง จงหาจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์(ก่อนเรียน)

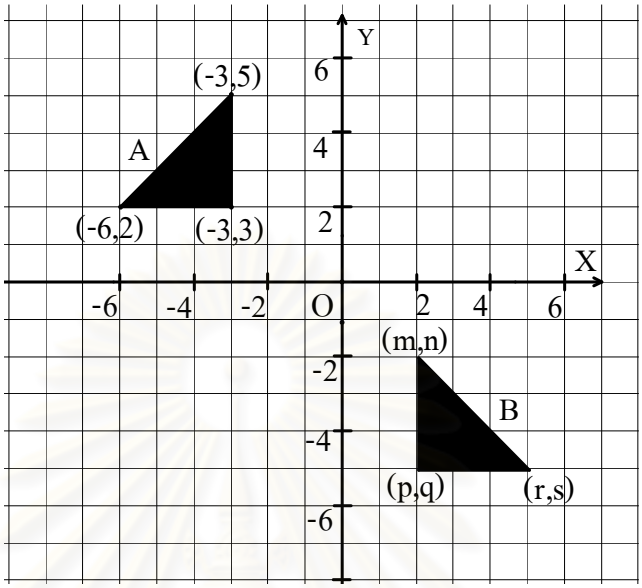
วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคการศึกษา 2/2550

คำชี้แจง

1. แบบวัดนี้มีทั้งหมด 3 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบวัด 45 นาที
2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในกระดาษเขียนตอบอย่างละเอียดข้อละ 1 หน้ากระดาษ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. จงอธิบายขั้นตอนการแปลงของภาพ A ไปเป็นภาพ B อย่างละเอียด พร้อมเขียนภาพประกอบลงในกราฟ



.....

.....

.....

2. เส้นทางเดินป่าชมธรรมชาติของอุทยานแห่งชาติแห่งหนึ่งเริ่มต้นจากที่ทำการอุทยานแห่งชาติ เดินไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 1.5 กิโลเมตร แล้วเดินไปทางทิศตะวันตกอีก 1.2 กิโลเมตร จากนั้นเดินไปทางทิศเหนืออีก 1 กิโลเมตร จึงถึงจุดชมวิว จงหาระยะทางจากที่ทำการอุทยานแห่งชาติถึงจุดชมวิว

3. รถยนต์สองคันอยู่ห่างกัน 125 กิโลเมตร บนถนนสายเดียวกันและแล่นสวนทางกันโดยเริ่มออกเดินทางพร้อมกันเวลา 9.00 น. รถคันแรกวิ่งด้วยความเร็ว 70 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถคันที่สองวิ่งด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถทั้งสองคันจะวิ่งสวนกันเวลาเท่าใด

แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์(หลังเรียน)

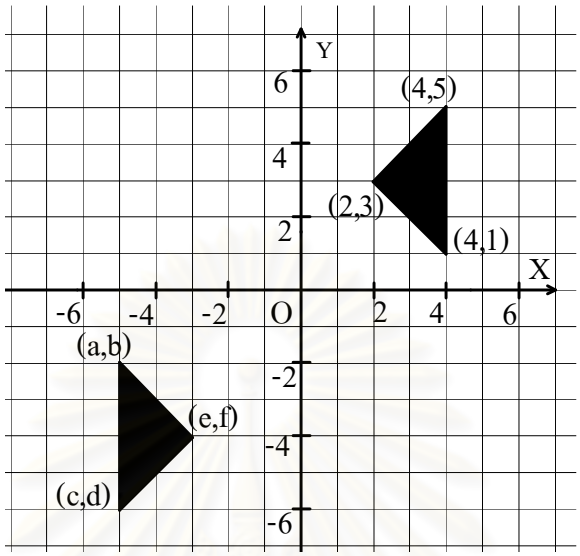
วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคการศึกษา 2/2550

คำชี้แจง

1. แบบวัดนี้มีทั้งหมด 3 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบวัด 45 นาที
2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในกระดาษเขียนตอบอย่างละเอียดข้อละ 1 หน้ากระดาษ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. จงอธิบายขั้นตอนการแปลงของภาพต่อไปนี้อย่างละเอียด พร้อมเขียนภาพประกอบลงในกราฟ



.....

.....

.....

2. คณะสำรวจพันธุ์ไม้เดินทางสำรวจพันธุ์ไม้โดยเริ่มเดินไปทางทิศเหนือเป็นระยะทาง 1.6 กิโลเมตร แล้วเดินไปทางทิศตะวันออก 0.8 กิโลเมตร จากนั้นจึงเดินไปทางใต้อีก 1 กิโลเมตร คณะสำรวจอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าใด

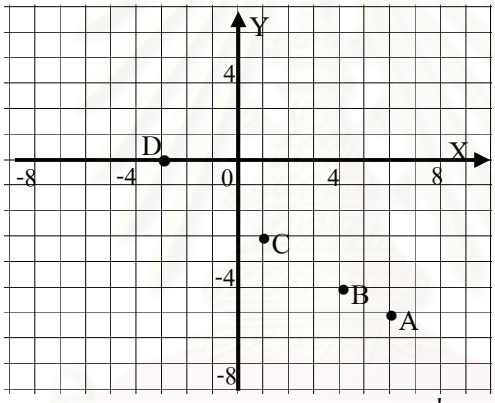
3. รถยนต์สองคันอยู่ห่างกัน 105 กิโลเมตร บนถนนสายเดียวกันและแล่นสวนทางกันโดยเริ่มออกเดินทางพร้อมกันเวลา 8.00 น. รถคันแรกวิ่งด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถคันที่สองวิ่งด้วยความเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถทั้งสองคันจะวิ่งสวนกันเวลาเท่าใด

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคการศึกษา 2/2550

คำชี้แจง

1. แบบวัดนี้มีทั้งหมด 20 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบวัด 60 นาที
2. ให้นักเรียนเติมคำตอบและแสดงเหตุผลของคำตอบหลังประโยคคำถามให้ถูกต้อง

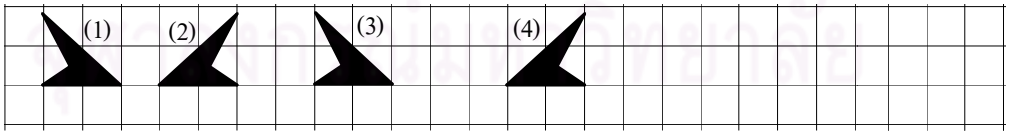


1. จากรูปข้างบนให้นักเรียนสังเกตการแปลงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง แล้วพิกัดของจุด E คือ……..

   เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

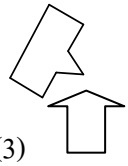
   .... …… …….. ..... ……

2. จงเขียนรูปที่ (5) ที่ได้จากรูปแบบการแปลงของรูปที่ (1) –(4) ข้างล่างนี้



   เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

   .... …… …….. ..... ……

3. ถ้ารูป (1)  แปลงเป็นรูป (2)

แล้ว รูป (3) จะแปลงเป็นรูป (4).....

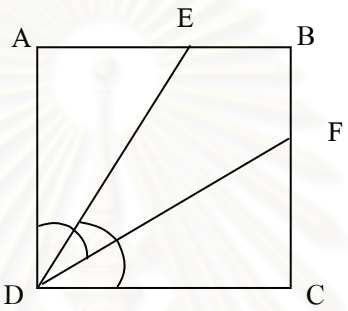
เหตุผลเพราะ..... ....

....

พิจารณาข้อความต่อไปนี้แล้วตอบคำถามข้อ 4 - 8

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ $A\hat{D}F = C\hat{D}E$ จะพิสูจน์ว่า

$\triangle ADE \cong \triangle CDF$



พิสูจน์

	พิสูจน์	เหตุผล
4.	1. $E\hat{A}D = D\hat{C}F$	1. ....
5.	2. AD = CD	2. ....
6.	3.	3. กำหนดให้
7.	4. $A\hat{D}F - E\hat{D}F = C\hat{D}E - E\hat{D}F$	4..... .....
8.	5. ..... 6. $\triangle ADE \cong \triangle CDF$	5. จากข้อ 4 6. แบบ มุม – ด้าน – มุม จากข้อ 1 , 2, 5

9. กำหนดรูปสามเหลี่ยม A B C และ D มีความยาวด้านทั้งสามเป็นดังนี้

รูป ΔA : 1.5, 2.0 , 2.5 รูป ΔB : 2.1, 2.8, 3.5

รูป ΔC : 2.0, 2.1, 3.0 และ รูป ΔD : 2.5, 6.0, 6.5

รูปสามเหลี่ยมใดแตกต่างจากรูปอื่น.....

เหตุผลเพราะ..... ....

....

10. กำหนดรูปสามเหลี่ยม A B C และ D มีความยาวด้านทั้งสามเป็นดังนี้

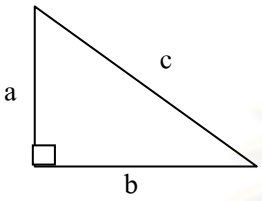
รูป ΔA : 5 , 10, 11 รูป ΔB : 6 , 7 , 9

รูป ΔC : 7, 10, 12 และ รูป ΔD : 9, 12, 16

รูปสามเหลี่ยมใดแตกต่างจากรูปอื่น.. ……..

เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

.... …… …….. ..... ……

11. 

รูปสามเหลี่ยม A มีความยาวด้าน a , b และ c ดังรูป

ส่วนรูปสามเหลี่ยม B มีความยาวด้านแต่ละด้านเป็นสองเท่าของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม A

รูปสามเหลี่ยม B เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่……

เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

.... …… …….. ..... ……

12. กระดานอัดขนาดกว้าง 2.10 เมตร ยาว 2.30 เมตร จะนำเข้าประตูที่มีกว้าง 1 เมตร และสูง 2 เมตร ได้หรือไม่ (กำหนด $\sqrt{5} \approx 2.23$)..... ..... ……

เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

.... …… …….. ..... ……

13. $4\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะหรืออตรรกยะ..... ……

เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

.... …… …….. ..... ……

14. $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{54}$ จำนวนใดที่เขียนแตกต่างจากจำนวนที่กำหนดให้พวก ……

เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

.... …… …….. ..... ……

15. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้ว $-\sqrt[3]{a^3}$ เท่ากับ $-\sqrt[3]{-a^3}$ หรือไม่ ……

เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

.... …… …….. ..... ……

16. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ แล้ว $\sqrt[2]{(ab)^2}$ เท่ากับ $\sqrt[2]{a^2b^2}$ หรือไม่

.....

เหตุผลเพราะ..... ..... …… …….. ..... ……

.... …… …….. ..... ……

17. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots$ จำนวนที่อยู่ถัดไปคือ.....
เหตุผลเพราะ..... ....
....

ให้นักเรียนใช้การแก้สมการต่อไปนี้ ตอบคำถามข้อ 18 - 20

$5(x + 2) + 3 = 5$ ----------(1)

$5(x + 2) = 2$ ----------(2)

$5x + 10 = 2$ -------- (3)

$5x = -8$ ------- (4)

$x = \frac{-8}{5}$ ------- (5)

18. การแก้สมการจากขั้นที่ (1) ไปขั้นที่ (2) ใช้สมบัติของการเท่ากันใด.....
19. การแก้สมการจากขั้นที่ (2) ไปขั้นที่ (3) ใช้สมบัติใด.....
20. การแก้สมการขั้นที่ (4) ไปขั้นที่ (5) ใช้สมบัติของการเท่ากันใด.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก จ

การวิเคราะห์ข้อมูล

- ผลการวิเคราะห์การประเมินแบบวัดจากเชี่ยวชาญ
- ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัด
- ผลการตรวจสอบลักษณะของข้อมูล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลการวิเคราะห์การประเมินแบบวัดจากเชี่ยวชาญ

1) ผลการประเมินแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่1	คนที่2	คนที่3	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	0	1	0.67
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	0	1	0.67
13	1	1	1	1
14	1	1	1	1
15	1	0	1	0.67
16	1	1	1	1
17	1	0	1	0.67
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1

ผลการประเมินแบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์(ต่อ)

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1
26	1	1	1	1
27	1	1	1	1
28	1	1	1	1
29	1	1	1	1
30	1	1	1	1

2) ผลการประเมินแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1

ผลการประเมินแบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์(ต่อ)

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
13	1	1	1	1
14	1	1	1	1
15	1	1	1	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1
26	1	1	1	1
27	1	1	1	1
28	1	1	1	1
29	1	1	1	1
30	1	1	1	1

3) ผลการประเมินแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	1	1	1	1
2	1	0	1	0.67
3	1	1	1	1

4) ตารางการประเมินแบบวัดความสามารถการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	1	1	0	0.67
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1

5) ผลการประเมินแบบวัดความสามารถการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	1	1	1	1
2	1	1	0	0.67
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1

ผลการประเมินแบบวัดความสามารถการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (ต่อ)

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ผลการวิเคราะห์
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	0	0.67
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	0	0.67
15	1	1	1	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัด

1) แบบวัดความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

จากการทดลองใช้แบบวัดนี้กับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 94 คน ได้ค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.686 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ข้อ	p	r
1	0.484	0.215
2	0.570	0.231
3	0.237	0.273
4	0.419	0.271
5	0.699	0.261
6	0.774	0.407
7	0.602	0.205
8	0.366	0.393
9	0.484	0.304
10	0.753	0.220
11	0.398	0.231
12	0.226	0.208
13	0.258	0.281
14	0.237	0.443
15	0.581	0.214

ข้อ	p	r
16	0.430	0.441
17	0.247	0.507
18	0.785	0.277
19	0.516	0.425
20	0.290	0.240
21	0.301	0.354
22	0.290	0.249
23	0.645	0.213
24	0.204	0.322
25	0.667	0.408
26	0.473	0.304
27	0.333	0.281
28	0.323	0.426
29	0.333	0.361
30	0.667	0.213

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2) แบบวัดความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์

จากการทดลองใช้แบบวัดนี้กับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 98 คน ได้ค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.806 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ข้อ	p	r
1	0.337	0.639
2	0.316	0.208
3	0.327	0.426
4	0.571	0.525
5	0.255	0.389
6	0.796	0.410
7	0.439	0.347
8	0.776	0.373
9	0.388	0.386
10	0.306	0.351
11	0.582	0.380
12	0.449	0.782
13	0.255	0.389
14	0.245	0.353
15	0.224	0.317

ข้อ	p	r
16	0.663	0.304
17	0.602	0.558
18	0.776	0.444
19	0.673	0.373
20	0.255	0.495
21	0.286	0.496
22	0.235	0.426
23	0.378	0.563
24	0.429	0.421
25	0.224	0.606
26	0.214	0.426
27	0.327	0.532
28	0.204	0.354
29	0.235	0.212
30	0.480	0.307

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3) แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากการทดลองใช้แบบวัดนี้กับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 88 คน ได้ค่าความเที่ยงแบบวัดก่อนเรียนเท่ากับ 0.836 และแบบวัดหลังเรียนเท่ากับ 0,821 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

แบบวัดก่อนเรียน		
ข้อ	p	r
1	0.750	0.432
2	0.585	0.477
3	0.375	0.250

แบบวัดหลังเรียน		
ข้อ	p	r
1	0.753	0.426
2	0.579	0.500
3	0.372	0.267

การทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังเรียน

แบบวัด	n	$\overline{X}$	S_d	r	Sig.
ก่อนเรียน	44	2.28	1.198	0.892	.000*
หลังเรียน	44	2.27	1.252		

$p < .05$

จากตารางพบว่าคะแนนแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังทดลองไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4) แบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

จากการทดลองใช้แบบวัดนี้กับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 78 คน ได้ค่าความเที่ยงของแบบวัดก่อนเรียนเท่ากับ 0.827 และแบบวัดหลังเรียนเท่ากับ 0.861 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

แบบวัดก่อนเรียน		
ข้อ	p	r
1	0.551	0.250
2	0.628	0.392
3	0.372	0.278

แบบวัดหลังเรียน		
ข้อ	p	r
1	0.543	0.256
2	0.588	0.403
3	0.378	0.290

การทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังเรียน

แบบวัด	n	$\overline{X}$	S_d	r	Sig.
ก่อนเรียน	39	2.33	1.044	0.872	.000*
หลังเรียน	39	2.27	1.028		

$p < .05$

จากตารางพบว่าแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังทดลองไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5) แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

จากการทดลองใช้แบบวัดนี้กับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 86 คน ได้ค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.951 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ข้อ	p	r
1	0.663	0.204
2	0.634	0.222
3	0.378	0.233
4	0.639	0.239
5	0.395	0.216
6	0.709	0.341
7	0.733	0.341
8	0.756	0.341
9	0.349	0.682
10	0.384	0.750

ข้อ	p	r
11	0.593	0.227
12	0.546	0.216
13	0.738	0.222
14	0.302	0.204
15	0.738	0.233
16	0.709	0.250
17	0.587	0.222
18	0.674	0.591
19	0.546	0.523
20	0.674	0.545

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การตรวจสอบลักษณะของข้อมูล

1. ทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของ ANCOVA

1.1 ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

แหล่งความแปรปรวน	SS	Df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	16.153	1	16.153	2.188	.143
ความรู้มโนทัศน์ก่อนเรียน	31.961	1	31.961	4.328	.040
การจัดการเรียนรู้* ความรู้มโนทัศน์ก่อนเรียน	4.101	1	4.101	.555	.458*
ความคลาดเคลื่อน	679.323	92	7.384		
รวม	27998.000	96			

*p > .05

จากตารางพบว่า ค่า Sig. = .458 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางกำหนด(.05) ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับก่อนเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน นั่นคือเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน จะขนานกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน

1.2 ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	.769	1	.769	.093	.761
ความรู้การดำเนินการก่อนเรียน	35.453	1	35.453	4.271	.042
การจัดการเรียนรู้* ความรู้การดำเนินการก่อนเรียน	1.528	1	1.528	.184	.669*
ความคลาดเคลื่อน	763.604	92	8.300		
รวม	24770.000	96			

*p > .05

จากตารางพบว่า ค่า Sig. = .669 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางกำหนด(.05) ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับก่อน

เรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน นั่นคือเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนจะขนานกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน

1.3 ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	70.472	1	70.472	20.697	.000
ความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนเรียน	27.674	1	27.674	8.128	.005
การจัดการเรียนรู้* ความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนเรียน	1.568	1	1.568	.461	.499*
ความคลาดเคลื่อน	313.248	92	3.405		
รวม	5071.000	96			

*p > .05

จากตารางพบว่า ค่า Sig. = .499 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางกำหนด(.05) ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับก่อนเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน นั่นคือเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน จะขนานกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน

1.4 ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	36.750	1	36.750	15.062	.000
ความสามารถในการสื่อสารก่อนเรียน	66.200	1	66.200	27.132	.000
การจัดการเรียนรู้* ความสามารถในการสื่อสารก่อนเรียน	2.467	1	2.467	1.011	.317*
ความคลาดเคลื่อน	224.475	92	2.440		
รวม	2681.000	96			

*p > .05

จากตารางพบว่า ค่า Sig. = .317 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางกำหนด(.05) ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับก่อนเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน นั่นคือเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน จะขนานกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน

1.5 ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

แหล่งความแปรปรวน	SS	df	MS	F	Sig.
การจัดการเรียนรู้	53.589	1	53.589	2.808	.097
ความสามารถในการให้เหตุผลก่อนเรียน	19.200	1	19.200	1.006	.318
การจัดการเรียนรู้* ความสามารถในการให้เหตุผลก่อนเรียน	8.735	1	8.735	.458	.500*
ความคลาดเคลื่อน	1755.613	92	19.083		
รวม	21112.490	96			

*p > .05

จากตารางพบว่า ค่า Sig. = .500 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางกำหนด(.05) ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับก่อนเรียนไม่ต่างกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน นั่นคือเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน จะขนานกันเมื่อจัดการเรียนรู้ต่างกัน

2. ทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของ MANCOVA

2.1 ความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์แยกตามเรื่อง

ตารางแสดงค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียน

	เรื่องที่ 1		เรื่องที่ 2		เรื่องที่ 3		เรื่องที่ 4		เรื่องที่ 5	
	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD
กลุ่มทดลอง	2.87	.73	3.77	1.04	1.29	.58	5.33	1.29	4.44	1.25
กลุ่มควบคุม	2.42	.90	3.77	1.15	1.15	.68	4.98	1.39	3.65	1.23

หมายเหตุ

1. Box's M = 9.876, F = .621, Sig..= .861

2. Bartlett's Test : Likelihood Ratio = .000, Approx. Chi-Square = 74.248, Sig. = .000

3. Levene's Test of Equality of Error Variances : เรื่องที่ 1 F =3.898, Sig.= .051 เรื่องที่ 2 F = .298, Sig.= .586 เรื่องที่ 3 F = .001, Sig.= .970 เรื่องที่ 4 F = .007, Sig.= .933 เรื่องที่ 5 F = .273, Sig.= .602

ผลการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของตัวแปรตามด้วย Box's Test of Equality of Covariance Matrix พบว่าสถิติทดสอบ Box's M มีค่า Sig..= .861 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด .05 ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความสัมพันธ์ของตัวแปรตามด้วย Bartlett's Test of Sphericity พบว่าค่าสถิติทดสอบมีค่า Sig. = .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้นตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของตัวแปรตามด้วย Levene's Test of Equality of Error Variances พบว่า ความแปรปรวนของคะแนนทั้ง 5 เรื่อง มีค่า Sig.เท่ากับ .051, .586, .970 , .933 และ .602 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้น ความแปรปรวนของคะแนนความรู้ด้านมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

2.2 ความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แยกตามเรื่อง

ตารางแสดงค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลังเรียน

	เรื่องที่ 1		เรื่องที่ 2		เรื่องที่ 3		เรื่องที่ 4		เรื่องที่ 5	
	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD
กลุ่มทดลอง	3.75	.838	4.35	1.211	1.85	1.444	2.90	1.134	3.88	.914
กลุ่มควบคุม	2.98	.887	4.02	1.246	1.92	.942	2.46	1.110	3.44	1.183

หมายเหตุ

1. Box's M = 22.219, F = 1.397, Sig.= .139

2. Bartlett's Test : Likelihood Ratio = .000, Approx. Chi-Square = 36.467 Sig. = .001

3. Levene's Test of Equality of Error Variances : เรื่องที่ 1 F =.057, Sig.= .811 เรื่องที่ 2 F = .182, Sig.= .671 เรื่องที่ 3 F = 9.428, Sig.= .003 เรื่องที่ 4 F = .461, Sig.= .499 เรื่องที่ 5 F = 2.664, Sig.= .106

ผลการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของตัวแปรตามด้วย Box's Test of Equality of Covariance Matrix พบว่า สถิติทดสอบ Box's M มีค่า Sig.= .139 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด .05 ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความสัมพันธ์ของตัวแปรตามด้วย Bartlett's Test of Sphericity พบว่า ค่าสถิติทดสอบมีค่า Sig. = .001 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้นตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของตัวแปรตามด้วย Levene's Test of Equality of Error Variances พบว่า ความแปรปรวนของคะแนน 4 เรื่อง คือ การแปลงทางเรขาคณิต ความเท่ากันทุกประการ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มีค่า Sig.เท่ากับ .811, .671, .499 และ .106 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้นความแปรปรวนของคะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ และทฤษฎีบทพีทาโกรัสมีค่า Sig. .003 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 แต่เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างมีจำนวนเท่ากันจึงอนุมานได้ว่าความแปรปรวนของคะแนนความรู้ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

2.3 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แยกตามเรื่อง

ตารางที่แสดงค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน

	เรื่องที่ 3		เรื่องที่ 4		เรื่องที่ 5	
	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD
กลุ่มทดลอง	3.96	.289	2.67	1.730	1.52	.825
กลุ่มควบคุม	2.69	1.274	1.48	1.052	1.13	.393

หมายเหตุ

1. Box's M = 115.38, F = 18.56, Sig.= .000

2. Bartlett's Test : Likelihood Ratio = .000, Approx. Chi-Square = 54.41 Sig. = .000

3. Levene's Test of Equality of Error Variances : เรื่องที่ 3 F = 169.06, Sig.= .000 เรื่องที่ 4 F = 26.48 , Sig.= .000 เรื่องที่ 5 F = 35.84, Sig.= .000

ผลการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของตัวแปรตามด้วย Box's Test of Equality of Covariance Matrix พบว่า สถิติทดสอบ Box's M มีค่า Sig.= .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด .05 ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีจำนวนเท่ากันจึงอนุมานได้ว่าความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความสัมพันธ์ของตัวแปรตามด้วย Bartlett's Test of Sphericity พบว่าค่าสถิติทดสอบมีค่า Sig. = .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้นตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของตัวแปรตามด้วย Levene's Test of Equality of Error Variances พบว่า ความแปรปรวนของคะแนน 3 เรื่อง มีค่า Sig.เท่ากับ . .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 แต่เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีจำนวนเท่ากันจึงอนุมานได้ว่าความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

2.4 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์แยกตามเรื่อง

ตารางแสดงค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียน

	เรื่องที่ 1		เรื่องที่ 3		เรื่องที่ 5	
	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD
กลุ่มทดลอง	1.33	.93	3.46	1.09	1.25	.57
กลุ่มควบคุม	1.17	1.10	1.54	1.22	.94	.25

หมายเหตุ

1. Box's M = 36.911, F = 5.939, Sig.= .000

2. Bartlett's Test : Likelihood Ratio = .000, Approx. Chi-Square = 80.380 Sig. = .000

3. Levene's Test of Equality of Error Variances : เรื่องที่ 1 F = 4.922, Sig.= .029 เรื่องที่ 3 F = .708 , Sig.= .402 เรื่องที่ 5 F = 26.423, Sig.= .000

ผลการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของตัวแปรตามด้วย Box's Test of Equality of Covariance Matrix พบว่า สถิติทดสอบ Box's M มีค่า Sig.= .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด .05 ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีจำนวนเท่ากันจึงอนุมานได้ว่าความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความสัมพันธ์ของตัวแปรตามด้วย Bartlett's Test of Sphericity พบว่าค่าสถิติทดสอบมีค่า Sig. = .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้นตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของตัวแปรตามด้วย Levene's Test of Equality of Error Variances พบว่า ความแปรปรวนของคะแนนความสามารถในการสื่อสารเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส มีค่า Sig.เท่ากับ .402 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 และความแปรปรวนของคะแนนความสามารถในการสื่อสารเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตและการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวมีค่า Sig. เท่ากับ .029 และ .000 ซึ่งน้อยมากกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 แต่เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีจำนวนเท่ากันจึงอนุมานได้ว่าความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.5 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แยกตามเรื่อง

ตารางแสดงค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียน

	เรื่องที่ 1		เรื่องที่ 2		เรื่องที่ 3		เรื่องที่ 4		เรื่องที่ 5	
	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD	$\bar{x}$	SD
กลุ่มทดลอง	3.438	1.7794	4.229	2.2502	1.54	.798	3.031	1.6516	3.23	1.309
กลุ่มควบคุม	3.115	1.4076	3.965	1.8590	1.08	.710	2.792	1.4173	1.83	.808

หมายเหตุ

1. Box's M = 24.114, F = 1.516, Sig.= .090

2. Bartlett's Test : Likelihood Ratio = .000, Approx. Chi-Square = 133.505 Sig. = .000

3. Levene's Test of Equality of Error Variances : เรื่องที่ 1 F =3.458, Sig.= .066 เรื่องที่ 2 F = 4.431, Sig.= .038 เรื่องที่ 3 F = 2.984, Sig.= .087 เรื่องที่ 4 F = 1.778, Sig.= .186 เรื่องที่ 5 F = 12.444, Sig.= .001

ผลการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance Matrix) ของตัวแปรตามด้วย Box's Test of Equality of Covariance Matrix พบว่าสถิติทดสอบ Box's M มีค่า Sig.= .090 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด .05 ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความสัมพันธ์ของตัวแปรตามด้วย Bartlett's Test of Sphericity พบว่าค่าสถิติทดสอบมีค่า Sig. = .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้นตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของตัวแปรตามด้วย Levene's Test of Equality of Error Variances พบว่า ความแปรปรวนของคะแนน 3 เรื่อง คือ การแปลงทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง มีค่า Sig.เท่ากับ .066, .087, และ .186 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 ดังนั้นความแปรปรวนของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ และความเท่ากันทุกประการและการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และมีค่า

Sig. เท่ากับ .038 และ .001 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญทางสถิติที่กำหนด .05 แต่เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างมีจำนวนเท่ากันจึงอนุมานได้ว่าความแปรปรวนของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

จากผลการวิเคราะห์เพื่อทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการทดสอบความแปรปรวนของตัวแปรพหุนาม พบว่าสามารถวิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมพหุนามได้

3. ทดสอบการแจกแจงเป็นโค้งปกติของข้อมูลด้วยสถิติ Kolmogorov-Smirnov Test

คะแนน	Kolmogorov-Smirnov Z	Sig.
ความรู้ด้านมโนทัศน์ก่อนเรียน	1.32	.06*
ความรู้ด้านการดำเนินการก่อนเรียน	1.21	.11*
ความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนเรียน	2.31	.00
ความสามารถในการสื่อสารก่อนเรียน	2.82	.00
ความสามารถในการให้เหตุผลก่อนเรียน	1.23	.10*
ความรู้ด้านมโนทัศน์หลังเรียน	1.00	.27*
ความรู้ด้านการดำเนินการหลังเรียน	1.38	.04
ความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียน	1.40	.04
ความสามารถในการสื่อสารหลังเรียน	1.41	.04
ความสามารถในการให้เหตุผลหลังเรียน	1.15	.14*

*p > .05

จากตารางพบว่า ความรู้ด้านมโนทัศน์ก่อนเรียน ความรู้ด้านการดำเนินการก่อนเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลก่อนเรียน ความรู้ด้านมโนทัศน์หลังเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลหลังเรียน มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติด้วยสถิติ มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ สำหรับความรู้ด้านการดำเนินการหลังเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียนและความสามารถในการสื่อสารหลังเรียน มีค่า Sig. เท่ากับ 0.04 ซึ่งใกล้เคียงกับนัยสำคัญที่ตั้งไว้มาก จึงสามารถประมาณได้ว่ามีการแจกแจงใกล้เคียงโค้งปกติ

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวอลิสรา ชมชื่น เกิดเมื่อวันที่ 24 กันยายน พ.ศ. 2518 ที่อำเภอวังวิเศษ จังหวัดตรัง สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต(ศึกษาศาสตร์) วิชาเอกคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี ในปี พ.ศ. 2541 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโทศิลปศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกการสอนคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปี พ.ศ. 2544 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรดุษฎีบัณฑิต ในสาขาวิชาหลักสูตรและการสอน ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2546 ปัจจุบันรับราชการตำแหน่งอาจารย์ที่คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย