การกระทำของพีชคณิตลีเชิงเดียวบางชนิดบนบางมอดูลของตัวเอง

นาย พงศ์พล จันทรี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. 2535

ISBN 974-581-826-7

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

018349 1165774413

THE ACTION OF CERTAIN SIMPLE LIE ALGEBRAS ON SOME OF THEIR MODULES

Mr. Pongpol Juntharee

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkron University

1992

ISBN 974-581-826-7

Thesis Title	THE ACTION OF CERTAIN SIMPLE LIE ALGEBRAS ON SOME OF THEIR MODULES
By	Mr. Pongpol Juntharee
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Assistant Professor Suwimon Hall M.S.
Thesis Co-advisor	Dr. Mark E. Hall Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya
..... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit
..... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Suwimon Hall
..... Thesis Advisor

(Assistant Professor Suwimon Hall M.S.)

Mark E. Hall
..... Thesis Co-advisor

(Dr. Mark E. Hall Ph.D.)

Sidney S. Mitchell
..... Member

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

พงศ์พล จันทรี : การกระทำของพีชคณิตลีเชิงเดียวบางชนิดบนบางมอดูลของตัวเอง
(THE ACTION OF CERTAIN SIMPLE LIE ALGEBRAS ON SOME OF THEIR MODULES)
อ.ที่ปรึกษา : ผศ.สุวิมล ฮอลล์ และ ดร.มาร์ค อี. ฮอลล์, 75 หน้า.
ISBN 974-581-826-7

ให้ L เป็นพีชคณิตลีเชิงเดียว $sl(3,\mathbf{C})$ หรือ $o(5,\mathbf{C})$, V เป็นแอล-มอดูลมิติจำกัดที่ลดทอนไม่ได้, v^+ เป็นเวกเตอร์ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ V ที่มีน้ำหนักมากที่สุด λ กำหนด $\lambda(h_1) = m_1$ และ $\lambda(h_2) = m_2$ ให้ $\{x_1,x_2,y_1,y_2\}$ เป็นเซตของตัวก่อกำเนิดเซฟเวอร์เลย์ของ L และให้ $h_i = [x_i,y_i]$ สำหรับทุกๆ $i\in\{1,2\}$

สำหรับ $L = sl(3,\mathbf{C})$ มูลฐานเวอร์มาของ V ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในรูปแบบ $y_1^{a_3}y_2^{a_2}y_1^{a_1}.v^+$ เมื่อ $a_1,a_2,a_3\in\mathbf{Z}_0^+$ และ
$$0 \le a_1 \le m_1$$
$$0 \le a_2 \le m_2+a_1$$
$$0 \le a_3 \le \min\{m_2,a_2\}$$

สำหรับ $L = o(5,\mathbf{C})$ มูลฐานเวอร์มาของ V ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในรูปแบบ $y_1^{a_4}y_2^{a_3}y_1^{a_2}y_2^{a_1}.v^+$ เมื่อ $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{Z}_0^+$ และ
$$0 \le a_1 \le m_2$$
$$0 \le a_2 \le m_1+a_1$$
$$0 \le a_3 \le \min\{m_1+a_2,2a_2\}$$
$$0 \le a_4 \le \min\{m_1,\lfloor a_3/2\rfloor\}$$

ผลสำคัญของการวิจัยมีดังนี้

สำหรับ $L = sl(3,\mathbf{C})$ เราสามารถหาสูตรที่มีรูปแบบปิดของการกระทำของ x_1,x_2,y_1 และ y_2 บนสมาชิกของมูลฐานเวอร์มาของ V ข้างต้น

สำหรับ $L = o(5,\mathbf{C})$ จะได้ผลในทำนองเดียวกัน ยกเว้นบางกรณีที่เป็นไปไม่ได้ที่จะหาสูตรที่มีรูปแบบ ปิดของการกระทำ ในกรณีเหล่านี้เราให้ขั้นตอนวิธีสำหรับการคำนวณการกระทำที่ต้องการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา คณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต .....
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....
ปีการศึกษา 2535 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

C225033 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD : VERMA BASES/CHEVALLEY GENERATORS/SIMPLE LIE ALGEBRAS/IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS
PONGPOL JUNTHAREE : THE ACTION OF CERTAIN SIMPLE LIE ALGEBRAS ON SOME OF THEIR MODULES. THESIS ADVISORS : ASSI. PROF. SUWIMON HALL, M.S. AND DR. MARK E.HALL, PH.D., 75 pp. ISBN 974-581-826-7

Let L be one of the simple Lie algebras $sl(3,\mathbb{C})$ or $o(5,\mathbb{C})$, V a finite-dimensional irreducible L-module, v^+ a maximal vector of V with highest weight λ. Set $\lambda(h_1) = m_1$ and $\lambda(h_2) = m_2$. Let $\{x_1,x_2,y_1,y_2\}$ be a set of Chevalley generators of L and let $h_i = [x_i,y_i]$ for all $i\in\{1,2\}$

For $L = sl(3,\mathbb{C})$, a Verma basis of V consists of all elements of the form $y_1^{a_3} y_2^{a_2} y_1^{a_1}.v^+$, where $a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{Z}_0^+$ and $0\le a_1\le m_1$
$0\le a_2\le m_2+a_1$
$0\le a_3\le \min\{m_2,a_2\}$

For $L = o(5,\mathbb{C})$, a Verma basis of V consists of all elements of the form $y_1^{a_4} y_2^{a_3} y_1^{a_2} y_2^{a_1}.v^+$, where $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{Z}_0^+$ and $0\le a_1\le m_2$
$0\le a_2\le m_1+a_1$
$0\le a_3\le \min\{m_1+a_2,2a_2\}$
$0\le a_4\le \min\{m_1,\lfloor a_3/2\rfloor\}$

The main results of this research are as follows :

For $L = sl(3,\mathbb{C})$, we have found closed-form formulas for the actions of x_1,x_2,y_1 and y_2 on the elements of the Verma basis of V given above.

For $L = o(5,\mathbb{C})$ similar results have been obtained, except that in some cases it has not been possible to find closed-form formulas for the actions. In these cases algorithms are given for calculating the desired actions.

ภาควิชา คณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต .....
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....
ปีการศึกษา 2535 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assistant Professor Suwimon Hall and Dr. Mark E. Hall, my thesis advisors, for their untired offering me some thougtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father, mother, brothers, sisters and friends for their encouragement throughout my graduate study.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CONTENTS

page

ABSTRACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLISH v

ACKNOWLEDGEMENT vi

INTRODUCTION 1

CHAPTER

I PRELIMINARIES 3

II BACKGROUND 10

III $\mathfrak{sl}(\mathbf{3}, \mathbf{C})$ 23

IV $\mathfrak{o}(\mathbf{5}, \mathbf{C})$ 33

REFERENCES 74

VITA 75

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

INTRODUCTION

The ability to calculate explicitly the action of the elements of a Lie algebra L on the elements of an L-module V can be a great asset in several applications. The most important cases can usually be reduced to the case where L is a finite-dimensional simple algebra and V is a finite-dimensional irreducible module. Furthermore, to calculate the action of an arbitrary element of L on an arbitrary element of V, it is sufficient to know the action of the elements of a set of generators of L on the elements of a basis of V. In this thesis our objective is to begin to attack this problem, by finding rules for calculating the action of the elements of a set of Chevalley generators of L on the elements of a Verma basis of V in the cases $L = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ and $L = \mathfrak{o}(5, \mathbf{C})$, and V is an arbitrary finite-dimensional irreducible L-module. The other algebras have been left as an open problem.

Let us describe more precisely what we have done. The two algebras considered in this thesis both have four Chevalley generators, which are denoted by x_1, x_2, y_1 and y_2. Also associated with each algebra is a number n, equal to the number of positive roots in its root system, and a sequence $i_1, i_2, \ldots, i_n$ of elements of the set $\{1, 2\}$, determined by the sequence of simple reflections in a reduced expression for the longest element of the Weyl group of the algebra. If we fix our Lie algebra L and let V be a fixed finite-dimensional irreducible L-module with maximal vector v^+, then a Verma basis for V consists of all elements of the form

$$y_{i_n}^{a_n} \cdots y_{i_1}^{a_1} \cdot v^+ \tag{1}$$

for which the exponents $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfy a certain set of inequalities.

The actions of x_1 and x_2 on an element of the form (1) can be calculated in a straightforward manner, resulting in a linear combination of elements of the same form. Unfortunately, even if the element acted upon is a basis element, some of the elements in the resulting linear combination may have exponents which do not satisfy the inequalities. However, the problem is always that some of the exponents are too large; therefore these elements can be viewed as the results of acting repeatedly on basis elements by y_1 and y_2. Thus, if the actions of y_1 and y_2 on the elements of the basis can be found, the actions of x_1 and x_2 will be known as well. When $L = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ this program has been carried out, yielding closed-form formulas for the actions of x_1, x_2, y_1 and y_2 on the elements of a Verma basis for an arbitrary finite-dimensional irreducible L-module. When $L = \mathfrak{o}(5, \mathbf{C})$, the program has also been completed, except that in some cases it has not been possible to find closed-form formulas for the actions. In these cases algorithms have been given for calculating the desired actions.

The notational conventions, definitions, and results quoted from other sources used in this work are given in Chapter I. In Chapter II, we prove some results on $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$-modules and some computational lemmas needed for the rest of the thesis. In Chapter III, we calculate the action of the elements of a set of Chevalley generators for $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ on the elements of a Verma basis of V. Chapter IV does the same for $\mathfrak{o}(5, \mathbf{C})$.