การศึกษาความแม่นยำในการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่กำลังในศีรษะมนุษย์ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา

นายจิระศักดิ์ ผุยโสภา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1116-2

STUDY OF THE ACCURACY IN THE POWER FREQUENCY INDUCED-CURRENT CALCULATION IN THE HUMAN HEAD BY THE FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN METHOD

Mr.Jirasak Phuysopha

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2004

ISBN 974-53-1116-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษาความแม่นยำในการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่กำลังในศีรษะมนุษย์ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา
โดย	นายจิระศักดิ์ ผุยโสภา
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เตชะอำนาจ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุขุมวิทย์ ภูมิวุฒิสาร)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เตชะอำนาจ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. คมสัน เพ็ชรรักษ์)

.... กรรมการ

(อาจารย์ จักรพันธ์ แซ่ลี่)

จิระศักดิ์ ผุยโสภา : การศึกษาความแม่นยำในการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่กำลังในศีรษะมนุษย์ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา. (STUDY OF THE ACCURACY IN THE POWER FREQUENCY INDUCED-CURRENT CALCULATION IN THE HUMAN HEAD BY THE FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN METHOD) อ. ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เตชะอำนาจ, 85 หน้า. ISBN 974-53-1116-2.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่กำลังในศีรษะมนุษย์ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา เพื่อศึกษาลักษณะของกระแสไฟฟ้าและความแม่นยำในการคำนวณ. การคำนวณทำบนแบบจำลองอย่างง่ายและแบบจำลองศีรษะมนุษย์. แบบจำลองอย่างง่ายที่ใช้ได้แก่ทรงกระบอกและทรงกลมทั้งแบบชั้นเดียวและสองชั้นที่มีจุดศูนย์กลางร่วมหรือต่างกัน. วิทยานิพนธ์นี้ได้สร้างแบบจำลองศีรษะมนุษย์จากฐานข้อมูลทางกายวิภาคศาสตร์ โดยมีความละเอียด 4 มิลลิเมตร.

การคำนวณได้ทำที่ความถี่สูงแล้วปรับค่าคำตอบมาที่ความถี่กำลัง เพื่อลดเวลาในการคำนวณ. ความถี่ที่ใช้คำนวณจึงมีผลต่อความแม่นยำ เมื่อมากกว่า 2 MHz. นอกจากนี้สภาพนำที่ต่ำกว่า 0.5 S/m ทำให้เงื่อนไขการปรับมาตราความถี่ไม่เหมาะสม. ความคลาดเคลื่อนมีค่าสูงที่บริเวณขอบของแบบจำลอง และการใช้วิธีประมาณค่านอกช่วงแบบเชิงเส้นในบริเวณนี้สามารถลดความคลาดเคลื่อนได้ดีกับแบบจำลองเนื้อเดียวเท่านั้น. สำหรับกรณีที่แย่ที่สุดในแบบจำลองอย่างง่าย ความคลาดเคลื่อนมีค่าเฉลี่ยและค่าสูงสุดเท่ากับ 9% และ 90% ตามลำดับ. ในศีรษะมนุษย์ที่ได้รับสนามแม่เหล็ก 1/377 A/m ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมีขนาดสูงสุดประมาณ 6.58 nA/m^2 ณ บริเวณขอบ. บริเวณที่มีความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงคือ กล้ามเนื้อตรงส่วนขอบของศีรษะมนุษย์และลำคอ โดยมีขนาดประมาณ 6 ถึง 26 nA/m^2.

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต ____________

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ____________

ปีการศึกษา 2547

4470252821 : ELECTRICAL ENGINEERING
KEY WORD: FINITE DIFFERINCE TIME DOMAIN / INDUCED CURRENT / FREQUENCY SCALING / HUMAN HEAD

JIRASAK PHUYSOPHA : STUDY OF THE ACCURACY IN THE POWER FREQUENCY INDUCED-CURRENT CALCULATION IN THE HUMAN HEAD BY THE FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN METHOD. THESIS ADVISOR: ASST. PROF. BOONCHAI TECHAUMNAT, Dr.Eng., 85 pp. ISBN 974-53-1116-2.

This thesis presents the calculation of the power-frequency induced current in the human head by the finite difference time domain method to study the induced current characteristics and the calculation accuracy. The calculation has been carried out for simple models and a human head model. The simple models used here are single- and two-layer, concentric or eccentric, cylinders and spheres. A 4-mm resolution head model has been constructed from anatomy database.

To reduce the calculation time, the calculation has been done at a high frequency, and the results were then scaled to the power frequency. When the frequency is higher than 2 MHz, it affects the calculation accuracy. A conductivity smaller than 0.5 S/m is not suitable for applying the frequency scaling. The calculation error is high at the edge of the models and using linear extrapolation at the edge reduces the error well only for the homogeneous models. For the worst case of the simple models, the average and maximum errors are 9% and 90%, respectively. In the human head model under a magnetic field of 1/377 A/m, the maximum current density, approximately 6.58 nA/m^2, is located at the edge of the brain. Organs having large induced current density, about 6 to 26 nA/m^2, are the muscles at the edges of the head and neck.

Department ......Electrical Engineering...... Student's signature ....

Field of study ......Electrical Engineering...... Advisor's signature ....

Academic year ....2004..........

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องจากได้รับความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เตชะอำนาจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งกรุณาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิทยานิพนธ์ รวมทั้งได้กรุณาตรวจสอบและแก้ไขเนื้อหาวิทยานิพนธ์จนสำเร็จเรียบร้อย.

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ซึ่งประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ ดร.สุขุมวิทย์ ภูมิวุฒิสาร, อาจารย์ ดร.คมสัน เพ็ชรรักษ์ และอาจารย์ จักรพันธ์ แซ่ลี่ ที่กรุณาตรวจสอบ แก้ไขและให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์.

ท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดาและมารดา ที่ให้การสนับสนุน และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา.

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญภาพ

ภาพประกอบที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ปัจจุบันได้มีความวิตกเกี่ยวกับผลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่กำลัง (50 หรือ 60 เฮิรตซ์) ต่อสุขภาพของมนุษย์มากขึ้น. จากความวิตกนี้ โครงการ, ข้อแนะนำ (Guide Lines) และมาตรฐานต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง[1-4] ได้ถูกก่อตั้งหรือกำหนดขึ้น เพื่อศึกษาผลของสนาม หรือกำหนดขีดจำกัดของสนาม.

ค่าขีดจำกัดของสนามถูกกำหนดโดยค่าความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจากสนามนั้นๆ. การหาความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำภายในร่างกายมนุษย์โดยทั่วไป สามารถทำได้ 2 วิธีคือ การวิเคราะห์จากหุ่นมนุษย์ (Mannequin) และการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method). การวิเคราะห์จากหุ่นมนุษย์ใช้เครื่องมือวัดกระแสไฟฟ้าจากหุ่นมนุษย์โดยตรง โดยมีข้อจำกัดที่การหาเครื่องมือวัดที่เหมาะสมและความคล้ายคลึงของหุ่นมนุษย์กับร่างกายมนุษย์ยังไม่ดีพอ. วิธีเชิงตัวเลขแบ่งเป็น 2 วิธีคือ วิธีแบ่งขอบเขตและวิธีแบ่งบริเวณ. วิธีแบ่งขอบเขตเช่น วิธีชิ้นประกอบขอบเขต (Boundary Element Method) และวิธีประจุพื้นผิว (Surface Charge Method) มีความแม่นยำในการคำนวณและสามารถใช้กับบริเวณผิวโค้งได้ไม่ยาก แต่มีข้อจำกัดที่จำนวนเอลิเมนต์หรือความละเอียดในการคำนวณ. วิธีแบ่งบริเวณเช่น วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา (Finite Difference Time Domain Method: FDTD Method), วิธีผลต่างสืบเนื่องศักย์สเกลาร์ (Finite Difference Scalar Potential Method) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) มีข้อจำกัดสำหรับปัญหาที่ต้องใช้เอลิเมนต์หรือกริดจำนวนมากเช่นกัน แต่มีความเหมาะสมต่อการคำนวณบริเวณที่มีตัวกลางหลายชนิด โดยในทั่วไปจะแบ่งบริเวณออกเป็นกริดทำให้มีรูปทรงขอบเขตเป็นขั้นบันได.

ในอดีตที่ผ่านมา ได้มีการศึกษาเป็นจำนวนมากถึงสนามไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำเนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในร่างกายมนุษย์.

Kaune et al.[5] วัดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในหุ่นมนุษย์เนื้อเดียว (ภายในบรรจุน้ำเกลือ) เนื่องจากสนามไฟฟ้าความถี่ 60 เฮิร์ทซ์ และทำการวัดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองครึ่งทรงกลมภายในบรรจุน้ำเกลือซึ่งได้ผลการวัดใกล้เคียงกับสมการคำตอบเชิงวิเคราะห์ในปี ค.ศ. 1985.

Miller[6] สร้างหัววัดเล็กๆ (Miniaturized Probe) วัดสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองหนูที่มีขนาดเท่ากับหนูจริงและหุ่นมนุษย์ที่มีขนาด 1/4 เท่าของมนุษย์จริง เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ 60 เฮิร์ทซ์ ในปี ค.ศ. 1991.

Hart[7] ใช้วิธีอิมพิแดนซ์ (Impedance Method) หาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองมนุษย์เนื้อเดียวและแบบจำลองหนู เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ 60 เฮิร์ทซ์ โดยเปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้กับค่าที่วัดได้จากหุ่นมนุษย์ในปี ค.ศ. 1992.

Stuchly et al.[8] ใช้วิธีอิมพิแดนซ์หาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำและกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองเซลล์ลูกบาศก์ที่มีคุณสมบัติทางไฟฟ้าเหมือนกับเนื้อเยื่อของมนุษย์ เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในปี ค.ศ. 1994.

Stuchly et al.[9] ใช้วิธีอิมพิแดนซ์หาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองมนุษย์ที่มีความละเอียดร่างกาย 1.3 เซนติเมตรและความละเอียดศีรษะ 0.665 เซนติเมตร เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ 60 เฮิร์ทซ์ ในปี ค.ศ. 1996.

Gandhi[10] ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาพร้อมทั้งวิธีการปรับมาตราความถี่และวิธีอิมพิแดนซ์ หากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองมนุษย์ที่มีความละเอียด 1.31 เซนติเมตร เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ 60 เฮิร์ทซ์ในปี ค.ศ. 1992.

Dawson et al.[11] ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาและวิธีผลต่างสืบเนื่องศักย์สเกลาร์ หาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำและกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองทรงกลม เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ 60 เฮิร์ทซ์ และเทียบผลการคำนวณกับสมการคำตอบเชิงวิเคราะห์ในปี ค.ศ. 1996.

Dawson et al.[12] หาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำและกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองมนุษย์ เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องศักย์สเกลาร์แทนวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาและวิธีอิมพิแดนซ์ เมื่อแบบจำลองมนุษย์มีความละเอียดสูงขึ้นในปี ค.ศ. 1997.

Dimbylow[13] ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องศักย์สเกลาร์และวิธีอิมพิแดนซ์ หาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองมนุษย์ที่มีความละเอียดถึง 2 มิลลิเมตร เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ 50 เฮิร์ทซ์ ถึง 10 เมกกะเฮิรตซ์ ในปี ค.ศ. 1998.

Furse et al.[14] ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาพร้อมทั้งวิธีการปรับมาตราความถี่ หากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองมนุษย์ที่มีความละเอียด 6 มิลลิเมตร เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กความถี่ 60 เฮิรตซ์ในปี ค.ศ. 1998.

สำหรับงานวิจัยที่ได้กล่าวมาในเบื้องต้น การหากระแสเหนี่ยวนำโดยการวัดจากหุ่นมนุษย์หรือแบบจำลองจริงนั้น มีข้อจำกัดอยู่ที่ความแม่นยำของการวัดและความไม่สมบูรณ์ของหุ่นมนุษย์ในการจำลองความซับซ้อนของร่างกายมนุษย์. การคำนวณหากระแสเหนี่ยวนำโดยวิธีเชิงตัวเลขนั้น วิธีอิมพิแดนซ์มีหลักการและขั้นตอนการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนแต่มีความแม่นยำต่ำ วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาและวิธีผลต่างสืบเนื่องศักย์สเกลาร์เป็นวิธีที่นิยมใช้ในปัจจุบันและได้มีการเปรียบเทียบความแม่นยำกับสมการคำตอบเชิงวิเคราะห์. อย่างไรก็ดีผลการคำนวณความ

หนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจาก 2 วิธีนี้ มีความแตกต่างจากผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีชิ้นประกอบขอบเขตที่ใช้แบบจำลองผิวโค้ง[15, 16] อยู่มาก. ทั้งนี้อาจเป็นผลเนื่องจากผิวของรูปทรงในวิธีทั้ง 2 นั้นเป็นลักษณะขั้นบันได และในกรณีของวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลายังมีผลของการใช้วิธีการปรับมาตราความถี่และวิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์อีกด้วย.

1.1 วัตถุประสงค์

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาเบื้องต้นถึงการใช้วิธี FDTD ในการคำนวณความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองศีรษะมนุษย์. วิธีนี้สามารถคำนวณที่ความละเอียดและความซับซ้อนของแบบจำลองสูงๆ ได้ ทำให้เหมาะสำหรับการคำนวณความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองที่มีความละเอียดสูงขึ้นต่อไป. ขั้นต้นของวิทยานิพนธ์นี้ ได้ศึกษาถึงความแม่นยำของผลการคำนวณในแบบจำลองพื้นฐาน โดยเทียบกับสมการคำตอบเชิงวิเคราะห์หรือผลการคำนวณด้วยวิธีแบ่งขอบเขต (ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีชิ้นประกอบขอบเขต). จากนั้นได้ทดลองคำนวณกับแบบจำลองศีรษะมนุษย์ที่ความละเอียดสูงขึ้น.

แบบจำลองศีรษะมนุษย์ความละเอียดสูงที่ใช้ ได้สร้างจากข้อมูลของ Visible Human Project (VHP)[17] ซึ่งแสดงรายละเอียดของอวัยวะภายในร่างกายมนุษย์โดยมีความละเอียดสูงสุด 1/3 มิลลิเมตร.

ผลการศึกษาเบื้องต้นนี้จะเป็นองค์ความรู้พื้นฐานต่อไปสำหรับการใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาในการคำนวณความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองที่ใกล้เคียงกับร่างกายมนุษย์ยิ่งขึ้น หรือในกรณีของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่สูง.

1.2 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1) ศึกษาวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาในการคำนวณความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่เกิดจากสนามแม่เหล็กความถี่กำลัง 50 เฮิรตซ์.
2) เปรียบเทียบความแม่นยำในการคำนวณความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาเทียบกับสมการคำตอบเชิงวิเคราะห์หรือผลการคำนวณด้วยวิธีชิ้นประกอบขอบเขต โดยใช้แบบจำลองพื้นฐานคือ ทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้น, ทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม และทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน.
3) ทดลองคำนวณความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองศีรษะมนุษย์อย่างละเอียดโดยมีระยะระหว่างกริดประมาณ 3-4 มิลลิเมตร.

1.3 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์

เนื้อหาของวิทยานิพนธ์ในแต่ละบทมีดังนี้.

บทที่ 2 กล่าวถึง วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา และความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขที่อาจเกิดขึ้นได้.

บทที่ 3 กล่าวถึง เทคนิคและวิธีต่างๆ ที่นำมาประยุกต์ใช้ได้แก่ วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์, วิธีการแบ่งขอบเขตสนามรวมและสนามกระเจิง และวิธีปรับมาตราความถี่.

บทที่ 4 กล่าวถึง การสร้างแบบจำลองศีรษะมนุษย์จาก VHP.

บทที่ 5 กล่าวถึง ผลการศึกษาความแม่นยำในแบบจำลองพื้นฐานทั้งทรงกระบอกและทรงกลม.

บทที่ 6 กล่าวถึง ผลการคำนวณในแบบจำลองศีรษะมนุษย์แบบละเอียด.

บทที่ 7 กล่าวถึง ข้อสรุปและข้อเสนอแนะของวิทยานิพนธ์นี้.

บทที่ 2

วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา

วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้หาคำตอบของสมการแมกซ์เวลล์ในรูปอนุพันธ์บนกริดหรือจุดที่วางเรียงตัวอย่างเป็นระเบียบในบริเวณที่พิจารณา. ยี (Yee) ได้เสนอขั้นตอนวิธีสำหรับสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาอย่างมีประสิทธิ์ภาพในปี ค.ศ. 1966[18]. หลักการของวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้.

2.1 สมการแมกซ์เวลล์

สมการแมกซ์เวลล์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปอนุพันธ์สามารถเขียนได้ดังนี้.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

โดย $\vec{E}$ คือความเข้มสนามไฟฟ้า(V/m),

$\vec{H}$ คือความเข้มสนามแม่เหล็ก(A/m),

$\vec{D}$ คือความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า(C/m^2),

$\vec{B}$ คือความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก(T),

$\vec{J}$ คือความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า(A/m^2) และ

ρ คือความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตร(C/m^3).

เมื่อตัวกลางเป็นแบบเชิงเส้น, ไอโซทรอปิก และ ไม่กระจายตามความถี่ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{E}$ กับ $\vec{D}$, $\vec{H}$ กับ $\vec{B}$ และ $\vec{J}$ กับ $\vec{E}$ ได้ดังนี้

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2.6}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{2.7}$$

โดย ε คือสภาพยอม(F/m), μ คือความซาบซึมได้(H/m) และ σ คือสภาพนำ(S/m).

นำสมการที่ (2.5), (2.6) และ (2.7) แทนในสมการที่ (2.1) และ (2.2) พร้อมทั้งเขียนเคิร์ลของ $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ในรูปส่วนประกอบของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x\right] \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y\right] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right] \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right] \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right] \quad (2.13)$$

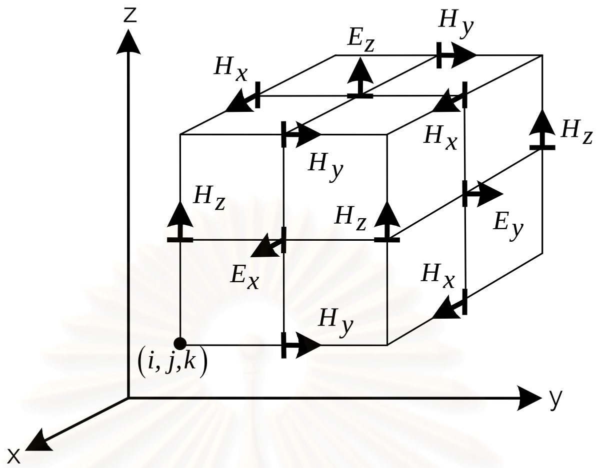
โดยมีดรรชนีล่างระบุองค์ประกอบของพิกัด (x,y,z).

2.2 ขั้นตอนวิธีของยี

ยีได้สร้างสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาจากสมการที่ (2.8) ถึง (2.13) โดยขั้นตอนวิธีของยีมีลักษณะดังนี้[19].

1) การคำนวณหาทั้งสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าตามตำแหน่งและเวลาโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ของแมกซ์เวลล์แทนการใช้สมการคลื่นหาสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าเพียงอย่างเดียว.
2) ตำแหน่งของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าและเวกเตอร์สนามแม่เหล็กในบริเวณสามมิติที่พิจารณา มีตำแหน่งสลับกันดังรูปที่ 2.1 โดย (i,j,k) คือ พิกัดตำแหน่งอ้างอิงตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ.
3) การคำนวณแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าและกลุ่มของเวกเตอร์สนามแม่เหล็ก โดยคำนวณสลับกันตามลำดับขั้นเวลา เช่น ที่เวลา $t=0$ คำนวณหา E_x, E_y และ E_z ที่เวลา $t=0.5\Delta t$ คำนวณหา H_x, H_y และ

H_z ที่เวลา $t = 1.0\Delta t$ คำนวณหา E_x, E_y และ E_z ที่เวลา $t = 1.5\Delta t$ คำนวณหา H_x, H_y และ H_z เป็นต้น(เมื่อ Δt คือเวลาระหว่างช่วงเวลาที่อยู่ติดกัน).



รูปที่ 2.1 ตำแหน่งเวกเตอร์สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนหนึ่งหน่วยเซลล์ของยี.

2.3 สมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา

กำหนดสัญลักษณ์แทนค่า U ที่ตำแหน่งและเวลาต่างๆ ด้วย

$$U(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = U\Big|_{i,j,k}^{n} \tag{2.14}$$

โดย U คือสนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็ก,

(i, j, k) คือพิกัดตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ,

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ คือระยะระหว่างกริดตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ และ

n คือลำดับขั้นเวลา.

อนุพันธ์ของ U เชิงตำแหน่งตามแนวแกน x คำนวณจากนิพจน์ผลต่างตัวกลาง(Central-Difference Expressions)

$$\frac{\partial U}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{U\Big|_{i+1/2,j,k}^{n} - U\Big|_{i-1/2,j,k}^{n}}{\Delta x}\,. \tag{2.15}$$

อนุพันธ์ของ U เชิงตำแหน่งตามแนวแกน y และ z คำนวณจากนิพจน์ผลต่างตัวกลางในลักษณะเดียวกัน.

นอกจากนี้ อนุพันธ์ของU เชิงเวลาก็เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{U\big|_{i,j,k}^{n+1/2} - U\big|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t}. \tag{2.16}$$

สมการที่ (2.8) ถึง (2.13) นำมาสร้างเป็นสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาได้ โดยใช้สมการที่ (2.14) ถึง (2.16) ดังนี้. จากสมการที่ (2.8) เมื่ออ้างอิงรูปที่ 2.1 และพิจารณา $E_X(i, j+1/2, k+1/2, n)$ สามารถเขียนแทนด้วยนิพจน์ผลต่างตัวกลางเชิงตำแหน่งและเวลาได้เป็น

$$\frac{E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \cdot \left[\begin{array}{l} \dfrac{H_z\big|_{i,j+1,k+1/2}^{n} - H_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}}{\Delta y} - \dfrac{H_y\big|_{i,j+1/2,k+1}^{n} - H_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n}}{\Delta z} \\ -\sigma_{i,j+1/2,k+1/2} E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n} \end{array} \right]. \tag{2.17}$$

เนื่องจากเราไม่สามารถหาค่าของ $E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n}$ (ที่เวลา n วิธีของยีจะเก็บค่า $\vec{\mathrm{H}}$)จึงประมาณค่าสนามไฟฟ้าให้

$$E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n} = \frac{E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{2}. \tag{2.18}$$

เมื่อนำสมการที่ (2.18) แทนในสมการที่ (2.17) พร้อมทั้งจัดรูปสมการใหม่ เราสามารถเขียน $E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n}$ ได้ดังนี้

$$E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right) E_x\big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + \left(\frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \dfrac{H_z\big|_{i,j+1,k+1/2}^{n} - H_z\big|_{i,j,k+1/2}^{n}}{\Delta y} \\ - \dfrac{H_y\big|_{i,j+1/2,k+1}^{n} - H_y\big|_{i,j+1/2,k}^{n}}{\Delta z} \end{array} \right). \tag{2.19}$$

ด้วยวิธีการเดียวกัน สมการที่ (2.9) ถึง (2.13) เขียนในรูปสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาได้ดังนี้

$$\left.E_y\right|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2}}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}}{1 + \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2}}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}} \right) \left.E_y\right|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n-1/2}$$

$$+ \left(\frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}}{1 + \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2}}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}} \right) \cdot \left(\frac{\left.H_x\right|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n} - \left.H_x\right|_{i-1/2,j+1,k}^{n}}{\Delta z} - \frac{\left.H_z\right|_{i,j+1,k+1/2}^{n} - \left.H_z\right|_{i-1,j+1,k+1/2}^{n}}{\Delta x} \right)$$

(2.20)

$$\left.E_z\right|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1}}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}}{1 + \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1}}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}} \right) \left.E_z\right|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n-1/2}$$

$$+ \left(\frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}}{1 + \dfrac{(\Delta t)\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1}}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}} \right) \cdot \left(\frac{\left.H_y\right|_{i,j+1/2,k+1}^{n} - \left.H_y\right|_{i-1,j+1/2,k+1}^{n}}{\Delta x} - \frac{\left.H_x\right|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n} - \left.H_x\right|_{i-1/2,j,k+1}^{n}}{\Delta y} \right)$$

(2.21)

$$\left.H_x\right|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n+1} = \left.H_x\right|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n}$$

$$+ \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i-1/2,j+1,k+1}} \right) \cdot \left(\frac{\left.E_y\right|_{i-1/2,j+1,k+3/2}^{n+1/2} - \left.E_y\right|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{\left.E_z\right|_{i-1/2,j+3/2,k+1}^{n+1/2} - \left.E_z\right|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2}}{\Delta y} \right)$$

(2.22)

$$H_y\Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1} = H_y\Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j+1/2,k+1}}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{E_z\Big|_{i+1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} - E_z\Big|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ -\dfrac{E_x\Big|_{i,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2} - E_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z}\end{array}\right)$$

(2.23)

$$H_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1} = H_z\Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j+1,k+1/2}}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{E_x\Big|_{i,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_x\Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \\ -\dfrac{E_y\Big|_{i+1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - E_y\Big|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}\end{array}\right).$$

(2.24)

สมการที่ (2.19) ถึง (2.24) คือสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาของสมการแมกซ์เวลล์ตามขั้นตอนวิธีของยี (โดยแสดงเป็นตัวอย่างเฉพาะบางตำแหน่ง) เมื่อตัวกลางเป็นแบบเชิงเส้น, ไอโซทรอปิก และ ไม่กระจายตามความถี่.

2.4 การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข(Numerical Dispersive)

การคำนวณเชิงตัวเลขสามารถทำให้เกิดการกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข. การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขเป็นปรากฏการณ์ที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งคำนวณจากวิธีเชิงตัวเลขมีความเร็วเฟสเชิงตัวเลขต่างจากความเป็นจริงทางกายภาพและอาจมีการลดทอนของคลื่นเชิงตัวเลขเกิดขึ้น. การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขเกี่ยวข้องกับความยาวคลื่น, ทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น และระยะระหว่างกริด ดังจะอธิบายในหัวข้อต่อไปนี้.

2.4.1 กรณีคลื่นสเกลาร์ 1 มิติ

พิจารณาสมการคลื่นสเกลาร์ 1 มิติ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (2.25)$$

ซึ่งมี c เป็นความเร็วเฟสของคลื่น(m/s).

สมการผลต่างสืบเนื่องของสมการที่ (2.25) ที่ตำแหน่งพิกัด i และลำดับขั้นเวลา n เขียนได้เป็น

$$U_i^{n+1} = (c\Delta t)^2 \left[\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2U_i^n - U_i^{n-1}. \tag{2.26}$$

กำหนดให้คลื่นที่พิจารณาเป็นคลื่นรูปไซน์ดังสมการ

$$\begin{aligned} U_i^n &= \exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t - \tilde{k} i\Delta x) \right] = \exp\left\{ \mathbf{j}[\omega n\Delta t - (\tilde{k}_{re} + \mathbf{j}\tilde{k}_{im}) i\Delta x] \right\} \\ &= \exp\left[\tilde{k}_{im} i\Delta x \right] \cdot \exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t - \tilde{k}_{re} i\Delta x) \right] \end{aligned} \tag{2.27}$$

โดย $\mathbf{j}$ คือ $\sqrt{-1}$, ω คือความเร็วเชิงมุม(rad/s) และ

$\tilde{k}$ คือค่าของจำนวนคลื่น (Wave Number) ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขซึ่งเรียกว่าจำนวนคลื่นเชิงตัวเลข (Numerical Wave Number) โดยเป็นเลขเชิงซ้อน, $\tilde{k} = \tilde{k}_{re} + \mathbf{j}\tilde{k}_{im}$ เมื่อ $\tilde{k}_{re}$ คือส่วนจริง และ $\tilde{k}_{im}$ คือส่วนจินตภาพ.

สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลข จำนวนคลื่นเชิงตัวเลขต่างจากจำนวนคลื่นทางกายภาพ. จำนวนคลื่นเชิงตัวเลขสามารถเรียกอีกชื่อว่าเวกเตอร์คลื่นเชิงตัวเลข (Numerical Wavevector) ซึ่งมีทิศตามการเคลื่อนที่ของคลื่น.

เมื่อแทนสมการที่ (2.27) ในสมการที่ (2.26) และจัดรูปสมการได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\tilde{k}$ กับ ω ดังนี้

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \arccos\left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t} \right)^2 \left[\cos(\omega\Delta t) - 1 \right] \right\} \tag{2.28}$$

สมการที่ (2.28) คือความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข (Numerical Dispersion Relation). ถ้านิยามตัวประกอบเสถียรภาพเชิงตัวเลข (Numerical Stability Factor) เป็น

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \tag{2.29}$$

และนิยามความละเอียดของการชักตัวอย่างกริด (Grid Sampling Resolution) เป็น

$$N_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta x} \tag{2.30}$$

โดย λ คือความยาวคลื่น(m)

แล้วแทนในสมการที่ (2.28) จะได้ความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขในพจน์ของ S และ N_λ ดังนี้

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x}\arccos\left\{1+\left(\frac{1}{S}\right)^2\left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right)-1\right]\right\}. \tag{2.31}$$

2.4.2 กรณี 2 มิติและ 3 มิติ

การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขในกรณี 2 มิติและ 3 มิติมีลักษณะเหมือนกับในกรณี 1 มิติ แต่มีทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย. ความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข 2 มิติ พิจารณาจากกรณีแบบแผนคลื่นทีเอ็ม (TM mode) ดังต่อไปนี้. กำหนดให้คลื่นที่พิจารณาเป็นคลื่นรูปไซน์ซึ่งมีค่าที่พิกัด $(i\Delta x, j\Delta y)$ ณ เวลา $n\Delta t$ เป็น

$$\begin{aligned} E_z\big|_{i,j}^{n} &= E_{zo}\exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t-\tilde{k}_x i\Delta x-\tilde{k}_y j\Delta y)\right] \\ &= E_{zo}\exp\left[(\tilde{k}_{x,im} i\Delta x+\tilde{k}_{y,im} j\Delta y)\right]\cdot\exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t-\tilde{k}_{x,re} i\Delta x-\tilde{k}_{y,re} j\Delta y)\right] \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} H_x\big|_{i,j}^{n} &= H_{xo}\exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t-\tilde{k}_x i\Delta x-\tilde{k}_y j\Delta y)\right] \\ &= H_{xo}\exp\left[(\tilde{k}_{x,im} i\Delta x+\tilde{k}_{y,im} j\Delta y)\right]\cdot\exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t-\tilde{k}_{x,re} i\Delta x-\tilde{k}_{y,re} j\Delta y)\right] \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} H_y\big|_{i,j}^{n} &= H_{yo}\exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t-\tilde{k}_x i\Delta x-\tilde{k}_y j\Delta y)\right] \\ &= H_{yo}\exp\left[(\tilde{k}_{x,im} i\Delta x+\tilde{k}_{y,im} j\Delta y)\right]\cdot\exp\left[\mathbf{j}(\omega n\Delta t-\tilde{k}_{x,re} i\Delta x-\tilde{k}_{y,re} j\Delta y)\right] \end{aligned} \tag{2.34}$$

โดย $\tilde{k}_x$ และ $\tilde{k}_y$ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์คลื่นเชิงตัวเลขตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ.

จากสมการที่ (2.21) ถึง (2.23) กำหนดสภาพนำ $\sigma = 0$ เมื่อพิจารณาเฉพาะ E_z, H_x และ H_y ตามแนวแกน x และ y เราสามารถเขียนสมการเหล่านี้ใหม่ได้เป็น

$$E_z\Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} = E_z\Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n-1/2} + \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i-1/2,j+1/2}}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{H_y\Big|_{i,j+1/2}^{n} - H_y\Big|_{i-1,j+1/2}^{n}}{\Delta x} \\ -\dfrac{H_x\Big|_{i-1/2,j+1}^{n} - H_x\Big|_{i-1/2,j}^{n}}{\Delta y}\end{array}\right) \tag{2.35}$$

$$H_x\Big|_{i-1/2,j+1}^{n+1} = H_x\Big|_{i-1/2,j+1}^{n} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i-1/2,j+1}}\right)\cdot\left(\frac{E_z\Big|_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2} - E_z\Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}\right) \tag{2.36}$$

$$H_y\Big|_{i,j+1/2}^{n+1} = H_y\Big|_{i,j+1/2}^{n} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j+1/2}}\right)\cdot\left(\frac{E_z\Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - E_z\Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}\right) \tag{2.37}$$

สมการที่ (2.35) ถึง (2.37) คือสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา 2 มิติแบบแผนทีเอ็ม.

แทนสมการที่ (2.32) ถึง (2.34) ลงในสมการที่ (2.35) ถึง (2.37) และจัดสมการใหม่ได้

$$H_{xo} = \frac{\Delta t E_{zo}}{\mu \Delta y}\cdot\frac{\sin(\tilde{k}_y \Delta y/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)} \tag{2.38}$$

$$H_{yo} = -\frac{\Delta t E_{zo}}{\mu \Delta x}\cdot\frac{\sin(\tilde{k}_x \Delta x/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)} \tag{2.39}$$

$$E_{zo}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t}{\varepsilon}\left[\frac{H_{xo}}{\Delta y}\sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right) - \frac{H_{yo}}{\Delta x}\sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right] \tag{2.40}$$

แทนสมการที่ (2.38) และ (2.39) ในสมการที่ (2.40) และจัดรูปสมการได้

$$\left[\frac{1}{c\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x}\sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y}\sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)\right]^2 . \tag{2.41}$$

สมการที่ (2.41) คือความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขในกรณี 2 มิติ. สำหรับกรณี 3 มิติมีความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขคล้ายกับสมการที่ (2.41) ดังนี้

$$\left[\frac{1}{c\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x}\sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y}\sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z}\sin\left(\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}\right)\right]^2. \qquad (2.42)$$

ถ้ากำหนดให้ $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ สมการที่ (2.41) และ (2.42) สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของ S และ N_λ ได้

$$\frac{1}{S^2}\sin^2\left(\frac{\pi S}{N_\lambda}\right) = \sin^2\left(\frac{\Delta\cdot\tilde{k}\cos\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta\cdot\tilde{k}\sin\phi}{2}\right) \qquad (2.43)$$

และ

$$\frac{1}{S^2}\sin^2\left(\frac{\pi S}{N_\lambda}\right) = \sin^2\left(\frac{\Delta\cdot\tilde{k}\sin\theta\cos\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta\cdot\tilde{k}\sin\theta\sin\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta\cdot\tilde{k}\cos\theta}{2}\right) \qquad (2.44)$$

ตามลำดับ โดย θ และ ϕ คือทิศการคลื่นที่ของคลื่นตามระบบพิกัดทรงกลม (r,θ,ϕ).

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราพบว่าความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขเกี่ยวข้องกับ $\tilde{k}$. หัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงผลของค่า $\tilde{k}$ ต่อปรากฏการณ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข.

2.4.3 จำนวนคลื่นเชิงตัวเลขกับปรากฏการณ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข

<u>กรณี 1 มิติ</u>

พิจารณาสมการที่ (2.31) ที่ค่า S คงที่ค่าหนึ่ง N_λ มีโอกาสทำให้ $\tilde{k}$ เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนได้. สมการที่ (2.27) แสดงว่าถ้า $\tilde{k}_{im}$ ไม่เท่ากับศูนย์ แอมพลิจูดของคลื่นจากผลการคำนวณจะผิดเพี้ยนไปจากคลื่นจริงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง.

จากนิยามความเร็วเฟสเชิงตัวเลข

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}_{re}} \qquad (2.45)$$

โดย $\tilde{v}_p$ คือความเร็วเฟสเชิงตัวเลข(m/s)

ได้แสดง $\tilde{k}_{re}$ มีความสัมพันธ์กับ $\tilde{v}_p$ ดังนั้นการกำหนด N_λ จึงส่งผลต่อ $\tilde{v}_p$ ด้วย.

<u>กรณี 2 มิติ</u>

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ การอธิบายในที่นี้เป็นกรณี 2 มิติและทิศการเคลื่อนที่ของคลื่นคือ ϕ เท่ากับ 0° และ 45°. สำหรับกรณีมุมอื่นๆ และ กรณี 3 มิติสามารถพิจารณาได้ในลักษณะคล้ายกัน.

กรณี ϕ เท่ากับ 0° เราสามารถจัดสมการที่ (2.43) ให้แสดงค่า $\tilde{k}$ ได้เป็น

$$\tilde{k} = \frac{2}{\Delta}\arcsin\left(\zeta\right) \tag{2.46}$$

โดย $\zeta = \frac{1}{S}\sin\left(\frac{\pi S}{N_\lambda}\right).$

ดังนั้น $\tilde{k}$ เป็นจำนวนจริงเมื่อ $\zeta \le 1$ หรือ $N_\lambda \ge \frac{\pi S}{\arcsin(S)}$.

เมื่อ $N_\lambda \ge \frac{\pi S}{\arcsin(S)}$ เราสามารถเขียนสมการของ $\tilde{k}_{re}$, $\tilde{k}_{im}$ และ $\tilde{v}_p$ ได้

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{re} &= \frac{2}{\Delta}\arcsin\left(\zeta\right); \\ \tilde{k}_{im} &= 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}_{re}} = \frac{\pi}{N_\lambda \arcsin\left(\zeta\right)}c. \tag{2.48}$$

เนื่องจาก $\tilde{k}_{im}$ ในสมการที่ (2.47) เท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงไม่มีความผิดเพี้ยนของแอมพลิจูดจากผลการคำนวณ.

เมื่อ $N_\lambda < \frac{\pi S}{\arcsin(S)}$ ค่า $\zeta > 1$ และ $\arcsin\left(\zeta\right)$ เป็นเลขเชิงซ้อน. ฟังก์ชันอาร์กไซน์ที่เป็นค่าเชิงซ้อนสามารถเขียนได้เป็น

$$\arcsin\left(\zeta\right) = -\mathbf{j}\ln\left\{\mathbf{j}\zeta + \sqrt{1-\zeta^2}\right\} \tag{2.49}$$

และแทนสมการที่ (2.49) ในสมการที่ (2.46) พร้อมทั้งจัดรูปแบบสมการใหม่ได้

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{\Delta} - \mathbf{j}\frac{2}{\Delta}\ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right). \tag{2.50}$$

ค่า $\tilde{k}_{re}$, $\tilde{k}_{im}$ และ $\tilde{v}_p$ จึงแสดงได้ดังสมการเหล่านี้

$$\tilde{k}_{re} = \frac{\pi}{\Delta}; \qquad \tilde{k}_{im} = -\frac{2}{\Delta}\ln\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right). \tag{2.51}$$

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}_r} = \frac{\omega}{(\pi/\Delta)} = \frac{2}{N_\lambda}c. \tag{2.52}$$

เนื่องจาก $\tilde{k}_{im}$ จากสมการที่ (2.51) ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นแอมพลิจูดของคลื่นที่คำนวณได้จะเกิดการผิดเพี้ยนไปจากคลื่นจริงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังตามพจน์ $\exp\left[\tilde{k}_{x,im}i\Delta x+\tilde{k}_{y,im}j\Delta y\right]$ ในสมการที่ (2.32) ถึง (2.34) ดังนี้

$$\begin{aligned}\exp\left(\tilde{k}_{x,im}i\Delta x+\tilde{k}_{y,im}j\Delta y\right) &= \exp\left(\tilde{k}_{im}\cos\phi i\Delta+\tilde{k}_{im}\sin\phi j\Delta\right)\\ &= \exp\left(\tilde{k}_{im}i\Delta\right) = \exp\left[-2\ln\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)i\right]\\ &= \exp(-\alpha i\Delta)\end{aligned} \tag{2.53}$$

โดย $\alpha\Delta$ คือค่าคงตัวลดทอนเลขชี้กำลังต่อกริด.

กรณี ϕ เท่ากับ 45° เราสามารถจัดสมการที่ (2.43) ให้แสดงค่า $\tilde{k}$ ได้เป็น

$$\tilde{k} = \frac{2\sqrt{2}}{\Delta}\arcsin\left(\zeta\right) \tag{2.54}$$

โดย $\zeta = \frac{1}{S\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi S}{N_\lambda}\right).$

ดังนั้น $\tilde{k}$ เป็นจำนวนจริงเมื่อ $\zeta \le 1$ หรือ $N_\lambda \ge \frac{\pi S}{\arcsin(S\sqrt{2})}$.

เมื่อ $N_\lambda \ge \frac{\pi S}{\arcsin(S\sqrt{2})}$ เราสามารถเขียนสมการของ $\tilde{k}_{re}$, $\tilde{k}_{im}$ และ $\tilde{v}_p$ ได้

$$\tilde{k}_{re} = \frac{2\sqrt{2}}{\Delta}\arcsin\left(\zeta\right); \qquad \tilde{k}_{im} = 0 \tag{2.55}$$

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}_{re}} = \frac{\pi}{N_\lambda\sqrt{2}\arcsin\left(\zeta\right)}c \tag{2.56}$$

เนื่องจาก $\tilde{k}_{im}$ ในสมการที่ (2.55) เท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงไม่มีความผิดเพี้ยนของแอมพลิจูดจากผลการคำนวณ.

เมื่อ $N_\lambda < \dfrac{\pi S}{\arcsin(S\sqrt{2})}$ ค่า $\zeta > 1$ และ $\arcsin(\zeta)$ เป็นเลขเชิงซ้อน. จากสมการที่ (2.49) และ (2.54) เราสามารถเขียนสมการของ $\tilde{k}$ ดังนี้

$$\tilde{k} = -\frac{2\sqrt{2}}{\Delta}\mathbf{j}\ln\left\{\mathbf{j}\zeta + \sqrt{1-\zeta^2}\right\}. \tag{2.57}$$

ค่า $\tilde{k}_{re}$, $\tilde{k}_{im}$ และ $\tilde{v}_p$ จึงแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\tilde{k}_{re} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Delta}; \qquad \tilde{k}_{im} = -\frac{2\sqrt{2}}{\Delta}\ln\left[\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]. \tag{2.58}$$

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}_{re}} = \frac{\omega}{(\pi\sqrt{2}/\Delta)} = \frac{\sqrt{2}}{N_\lambda}c. \tag{2.59}$$

เนื่องจาก $\tilde{k}_{im}$ จากสมการที่ (2.58) ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นแอมพลิจูดของคลื่นที่คำนวณได้จะเกิดการผิดเพี้ยนไปจากคลื่นจริงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังตามพจน์ $\exp\left[\tilde{k}_{x,im}i\Delta x + \tilde{k}_{y,im}j\Delta y\right]$ ในสมการที่ (2.32) ถึง (2.34) ดังนี้

$$\begin{aligned}\exp\left(\tilde{k}_{x,im}i\Delta x + \tilde{k}_{y,im}j\Delta y\right) &= \exp\left(\tilde{k}_{im}i\Delta\cos\phi + \tilde{k}_{im}j\Delta\sin\phi\right) \\ &= \exp\left[-(i+j)2\ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\right] = \exp\left[-2\sqrt{2}\ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)i\right]. \\ &= \exp(-\alpha\Delta i)\end{aligned} \tag{2.60}$$

จากที่กล่าวมาในหัวข้อนี้ การมีส่วนจินตภาพของจำนวนคลื่นเชิงตัวเลขมีผลต่อความผิดเพี้ยนของแอมพลิจูดของคลื่นที่คำนวณได้ และส่วนจริงมีผลต่อความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฟสเชิงตัวเลข. จำนวนคลื่นเชิงตัวเลขจะมีส่วนจินตภาพหรือไม่และส่วนจริงจะมีผลต่อความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฟสเชิงตัวเลขเท่าใด ขึ้นอยู่กับการกำหนด N_λ, S และ ทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น. ในการคำนวณเชิงตัวเลข เมื่อมีการกำหนด N_λ ที่มากพอ ความผิดเพี้ยนของแอมพลิจูดจะไม่เกิด และความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฟสเชิงตัวเลขก็น้อยลง. ส่วนท้ายนี้จะ

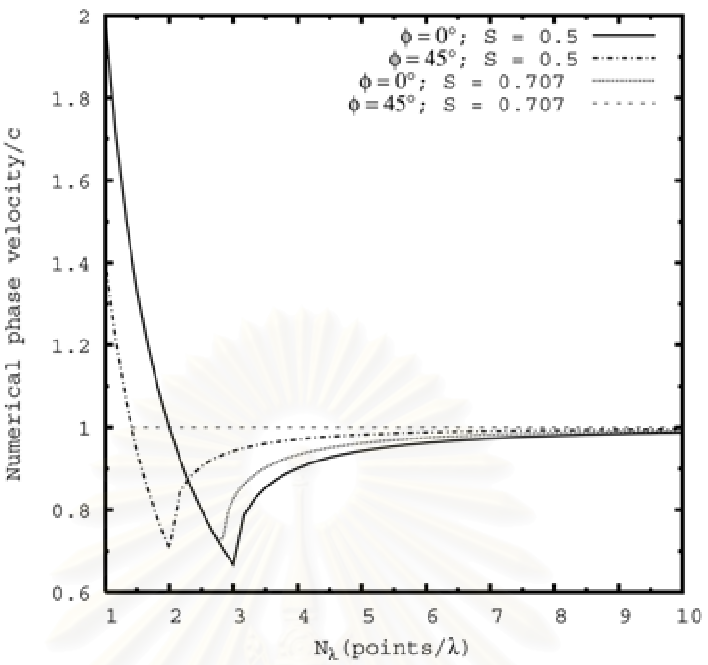
ยกกรณีศึกษาที่แสดงความสัมพันธ์ของความเร็วเฟสเชิงตัวเลขและการลดทอนของแอมพลิจูดกับ N_λ เพื่อความเข้าใจปรากฏการณ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขได้ดีขึ้น.

กรณีศึกษา

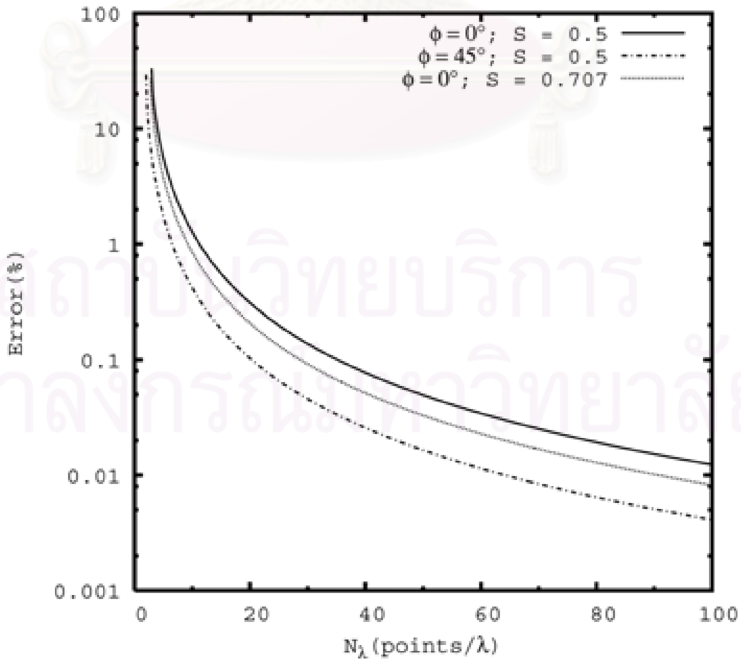
กรณีศึกษาเป็นปัญหา 2 มิติของคลื่นที่เคลื่อนที่ด้วยมุม ϕ เท่ากับ 0° และ 45°. การพิจารณาปัญหาจะแบ่งเป็นพิจารณาความเร็วเฟสเชิงตัวเลขและพิจารณาความผิดเพี้ยนของแอมพลิจูด เมื่อแปรผันค่า N_λ. ผลการพิจารณามีดังต่อไปนี้.

ความเร็วเฟสเชิงตัวเลขซึ่งเทียบบรรทัดฐานกับ c เมื่อแปรผันค่า N_λ แสดงในรูปที่ 2.2. การแปรผันค่า N_λ จะเริ่มตั้งแต่ค่าต่ำสุด $N_{\lambda,min}$ ซึ่งพิจารณาจากทฤษฎี Nyquist จนถึงค่า N_λ ที่ต้องการคือ 10.0. สำหรับปัญหานี้กำหนดพารามิเตอร์ S เท่ากับ 0.5 และ $1/\sqrt{2}$ ดังนั้นค่า $N_{\lambda,min}$ จึงเท่ากับ 1 และ 1.414 ตามลำดับ. จากรูปที่ 2.2 ค่า N_λ ณ จุดต่ำสุดของกราฟแต่ละเส้นคือค่าต่ำสุดที่ยังทำให้ $\tilde{k}$ เป็นจำนวนจริงอยู่ (หรือเรียกว่า $N_{\lambda,\,transition}$). รูปที่ 2.2 แสดงว่า $N_{\lambda,\,transition}$ ที่ S เท่ากับ 0.5 มีค่ามากกว่า $N_{\lambda,\,transition}$ ที่ S เท่ากับ $1/\sqrt{2}$ เมื่อ ϕ มีค่าเท่ากัน และ $N_{\lambda,\,transition}$ ที่ ϕ เท่ากับ 45° มีค่าน้อยกว่า $N_{\lambda,\,transition}$ ที่ ϕ เท่ากับ 0° เมื่อ S มีค่าเท่ากัน. นอกจากนี้ รูปที่ 2.2 ยังแสดงความเร็วเฟสเชิงตัวเลขของกราฟแต่ละเส้นในช่วง $[N_{\lambda,min}, N_{\lambda,\,transition})$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ N_λ ลดลงและมีค่าสูงกว่า c ที่ $N_{\lambda,min}$ ยกเว้นกรณี S เท่ากับ $1/\sqrt{2}$ และ ϕ เท่ากับ 45° ซึ่งกราฟมีลักษณะเป็นเส้นตรงตลอด. สำหรับช่วง $[N_{\lambda,\,transition}, 10.0]$ ความเร็วเฟสเชิงตัวเลขมีค่าเข้าใกล้ c มากขึ้นเมื่อ N_λ เพิ่มขึ้น. จากรูปที่ 2.2 สรุปได้ว่าการกำหนด S และมุม ϕ มีผลต่อ $N_{\lambda,\,transition}$. เมื่อค่า N_λ สูงขึ้น ความเร็วเฟสก็จะเข้าใกล้ c ยิ่งขึ้น หรือพิจารณาได้จากรูปที่ 2.3 ซึ่งแสดงความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฟสเชิงตัวเลขลดลงเมื่อ N_λ เพิ่มขึ้น โดยพิจารณาในช่วง $[N_{\lambda,\,transition}, 100.0]$. สำหรับกรณี S เท่ากับ $1/\sqrt{2}$ และ ϕ เท่ากับ 45° ไม่แสดงในรูปที่ 2.3 เนื่องจากความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำมาก (น้อยกว่า 10^{-14}).

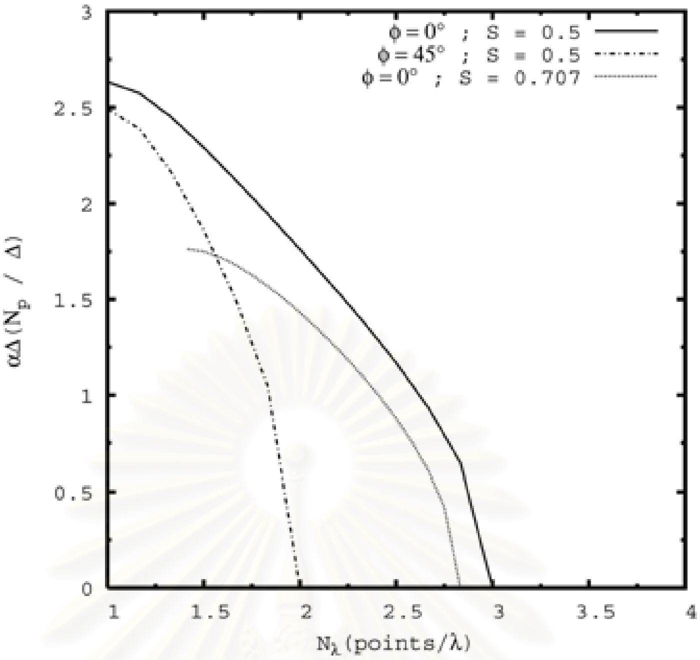
ผลการพิจารณาความผิดเพี้ยนของแอมพลิจูดแสดงจากค่าคงตัวลดทอนเลขชี้กำลังต่อกริด. รูปที่ 2.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวลดทอนเลขชี้กำลังต่อกริด เมื่อแปรผันค่า N_λ ในช่วง $[N_{\lambda,min}, 4.0)$. การลดทอนต่อกริดมีมากขึ้นเมื่อ N_λ ลดลง แต่เมื่อ N_λ ไม่น้อยกว่า $N_{\lambda,\,transition}$ การลดทอนจะไม่เกิดขึ้น. นอกจากนี้ การกำหนด S และมุม ϕ ก็มีผลต่อการลดทอนด้วย. สำหรับกรณี S เท่ากับ $1/\sqrt{2}$ และ ϕ เท่ากับ 45° ไม่ได้แสดงในรูปเพราะไม่เกิดปรากฏการณ์การลดทอน.



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเฟสเชิงตัวเลขเทียบบรรทัดฐานกับ c กับ N_{λ}



รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฟสเชิงตัวเลข กับ N_{λ}



รูปที่ 2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวลดทอนเลขชี้กำลังต่อกริด กับ N_λ

จากข้างต้นสรุปได้ว่า การเกิดปรากฏการณ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขเกี่ยวข้องกับ $\tilde{k}$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ S, ϕ และ N_λ ตามสมการความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลขในสมการที่ (2.31), (2.43) และ (2.44) สำหรับกรณี 1, 2 และ 3 มิติตามลำดับ. การกำหนดค่า S มีผลต่อความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฟสเชิงตัวเลขและการลดทอนของแอมพลิจูดจากคลื่นที่คำนวณได้ แต่ถ้าเพิ่ม N_λ มากขึ้นความคลาดเคลื่อนและการลดทอนนี้ก็จะลดลง. กรณีศึกษาแสดงการกำหนด S เท่ากับ $1/\sqrt{2}$ และ ϕ เท่ากับ 45° ไม่ได้เกิดความคลาดเคลื่อนของความเร็วเฟสเชิงตัวเลขและการลดทอนของแอมพลิจูด หรือไม่เกิดการกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข. กรณีที่ S เท่ากับ $1/\sqrt{2}$ นี้เป็นการกำหนด S ที่ค่าขีดจำกัดเสถียรภาพคูรันต์สำหรับ 2 มิติ ซึ่งจะได้อธิบายในข้อหัวเสถียรภาพ (ซึ่งเกี่ยวข้องกับ S) ต่อไป.

2.5 เสถียรภาพเชิงตัวเลข(Numerical Stability)

หัวข้อนี้จะพิจารณาเสถียรภาพเชิงตัวเลข. การขาดเสถียรภาพเชิงตัวเลขในที่นี้คือ การที่แอมพลิจูดของคลื่นเชิงตัวเลขเพิ่มขึ้นตามเวลาอย่างไม่มีที่สิ้นสุด. เสถียรภาพเชิงตัวเลขสัมพันธ์กับ Δt โดยการคำนวณจะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ Δt มีค่าอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนด. การหาขอบเขตของ Δt ทำโดยการวิเคราะห์ความถี่เชิงซ้อน. ขั้นตอนการวิเคราะห์ความถี่เชิงซ้อนมีดังนี้. ให้คลื่นที่พิจารณาเป็นคลื่นไซน์ และกำหนดความถี่เชิงมุมเป็นเลขเชิงซ้อน, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{re} + \mathbf{j}\tilde{\omega}_{im}$ เมื่อ

$\tilde{\omega}_{re}$ คือส่วนจริง และ $\tilde{\omega}_{im}$ คือส่วนจินตภาพ เราสามารถเขียนสมการคลื่น 3 มิติที่พิกัดตำแหน่ง i, j และ k ลำดับขั้นเวลา n ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{U}\Big|_{i,j,k}^{n} &= \vec{U}_o \exp\left\{\mathbf{j}\left[(\tilde{\omega}_{re}+\mathbf{j}\tilde{\omega}_{im})\, n\Delta t-\tilde{k}_x i\Delta x-\tilde{k}_y j\Delta y-\tilde{k}_z k\Delta z\right]\right\} \\ &= \vec{U}_o \exp\left(-\tilde{\omega}_{im} n\Delta t\right)\cdot \exp\left[\mathbf{j}(\tilde{\omega}_{re} n\Delta t-\tilde{k}_x i\Delta x-\tilde{k}_y j\Delta y-\tilde{k}_z k\Delta z)\right] \end{aligned} \tag{2.61}$$

โดย $\vec{U}$ คือเวกเตอร์สนามไฟฟ้าหรือเวกเตอร์สนามแม่เหล็ก.

จากความสัมพันธ์การกระจายทางความถี่เชิงตัวเลข 3 มิติในสมการที่ (2.42) เมื่อพิจารณาความถี่เชิงมุมเป็นค่าเชิงซ้อน เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\left[\frac{1}{c\Delta t}\sin\left(\frac{\tilde{\omega}\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x}\sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y}\sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z}\sin\left(\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}\right)\right]^2. \tag{2.62}$$

หรือ

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{\Delta t}\arcsin\left(\xi\right) \tag{2.63}$$

โดย $\xi = c\Delta t\sqrt{\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}\sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{\left(\Delta y\right)^2}\sin^2\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)+\frac{1}{\left(\Delta z\right)^2}\sin^2\left(\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}\right)}.$

จากสมการที่ (2.63) เมื่อ $\tilde{k}$ เป็นจำนวนจริงพบว่า

$$0 \le \xi \le c\Delta t\sqrt{\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}+\frac{1}{\left(\Delta y\right)^2}+\frac{1}{\left(\Delta z\right)^2}} \equiv \xi_{upper\ bound} \tag{2.64}$$

โดย ดรรชนีล่าง *upper bound* ระบุขอบเขตบน.

จากที่กล่าวมาข้างต้น สมการที่ (2.61) แสดงว่า แอมพลิจูดของคลื่นเชิงตัวเลขจะเพิ่มขึ้นถ้า $\tilde{\omega}_{im} < 0$ หรือลดลงถ้า $\tilde{\omega}_{im} > 0$. แอมพลิจูดจะคงที่ตลอดเวลาเมื่อ $\tilde{\omega}_{im} = 0$. สมการที่ (2.63) แสดงว่า $\tilde{\omega}_{im} \ne 0$ ก็ต่อเมื่อ $\xi > 1$. ดังนั้นการคำนวณเชิงตัวเลขมีโอกาสที่ $\tilde{\omega}_{im} \ne 0$ ได้หรือไม่ ขึ้น

อยู่กับ $\xi_{upper\ bound}$ ในสมการที่ (2.64) ว่ามีค่ามากกว่า 1 ได้หรือไม่. จากสมการที่ (2.64) เราสามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 ช่วงคือ ช่วงเสถียรภาพและช่วงไม่เสถียรภาพดังนี้.

<u>ช่วงเสถียรภาพ</u>

ช่วงนี้เป็นช่วงที่ $0 \le \xi \le 1$. โดยในช่วงนี้ เมื่อพิจารณาจากสมการที่ (2.63) ค่า $\tilde{\omega}_{im} = 0$ ดังนั้นแอมพลิจูดจึงคงที่ตลอดเวลา.

<u>ช่วงไม่เสถียรภาพ</u>

ช่วงนี้เป็นช่วงที่ $1 < \xi \le \xi_{upper\ bound}$ โดยในช่วงนี้ เมื่อพิจารณาจากสมการที่ (2.63) ค่า $\tilde{\omega}_{im} \ne 0$ ดังนั้นแอมพลิจูดจึงขาดเสถียรภาพ. กรณีจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\xi_{upper\ bound} = c\Delta t\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}} > 1. \qquad (2.65)$$

จากสมการที่ (2.65) เงื่อนไขของ Δt ที่ทำให้ $\xi_{upper\ bound} > 1$ คือ

$$\Delta t > \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}}} \equiv \Delta t_{max\text{-}3D} \qquad (2.66)$$

โดย $\Delta t_{max\text{-}3D}$ คือค่า Δt สูงสุดที่จะไม่ทำให้เกิดภาวะไม่เสถียรภาพเชิงตัวเลขอย่างแน่นอนในกรณี 3 มิติ.

สำหรับกรณีที่ $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ สมการที่ (2.66) สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta t > \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{(\Delta)^2}+\frac{1}{(\Delta)^2}+\frac{1}{(\Delta)^2}}} = \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} \equiv \Delta t_{max\text{-}3D}. \qquad (2.67)$$

สำหรับกรณี 2 มิติ และ 1 มิติคือ

$$\Delta t > \frac{\Delta}{c\sqrt{2}} \equiv \Delta t_{max\text{-}2D} \qquad (2.68)$$

$$\Delta t > \frac{\Delta}{c} \equiv \Delta t_{max\text{-}1D} \qquad (2.69)$$

จากสมการที่ (2.67) ถึง (2.69) เราสามารถเขียนสมการในรูปของขีดจำกัดเสถียรภาพคูรันต์ (Courant Stability Limit) ซึ่งการคำนวณจะมีเสถียรภาพเชิงตัวเลขก็ต่อเมื่อจำนวนคูรันต์ (S) ไม่มากกว่าขีดจำกัดเสถียรภาพคูรันต์.

กรณี 3 มิติ

$$S_{max\text{-}3D} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{2.70}$$

กรณี 2 มิติ

$$S_{max\text{-}2D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.71}$$

กรณี 1 มิติ

$$S_{max\text{-}1D} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \tag{2.72}$$

จากที่กล่าวมาในหัวข้อนี้ การคำนวณอาจเกิดภาวะไม่เสถียรภาพได้ ถ้ากำหนด Δt และ S ไม่เหมาะสม. การคำนวณให้อยู่ภายใต้ภาวะเสถียรภาพได้นั้น Δt และ S ต้องอยู่ภายในขอบเขตค่าขีดจำกัด.

บทที่ 3

เทคนิคที่ใช้ในการคำนวณ

วิทยานิพนธ์นี้ได้ประยุกต์ใช้เทคนิคต่างๆ กับการคำนวณด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาเพื่อลดหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์และเวลาในการคำนวณ. เทคนิคต่างๆ นี้ได้แก่ วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์, วิธีการแบ่งสนามรวมและสนามกระเจิง (Total-Field/Scattered-Field: TF/SF) และวิธีการปรับมาตราความถี่. รายละเอียดในแต่ละวิธีมีดังต่อไปนี้.

3.1 วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์

วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์เป็นวิธีหนึ่งที่สร้างเงื่อนไขขอบเขตการดูดซึม (Absorbing Boundary Conditions: ABCs) เพื่อให้สามารถจำลองบริเวณเปิดด้วยบริเวณปิดได้อย่างมีประสิทธิภาพ. ประโยชน์ของวิธีนี้สามารถลดหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ในการคำนวณและสามารถกำจัดคลื่นสะท้อนจากขอบเขต โดยเฉพาะเมื่อคำนวณเป็นเวลานานๆ. หลักการของวิธีนี้คือ การเพิ่มชั้นตัวกลางชนิดหนึ่งรอบขอบเขตของบริเวณปิดที่จะแทนด้วยบริเวณเปิด. คุณสมบัติของตัวกลางนี้ทำให้คลื่นที่สะท้อนจากตัวกลางนี้มีน้อยมากและคลื่นที่เคลื่อนที่เข้าไปในตัวกลางนี้ถูกลดทอนขนาดลงจนเกือบเป็นศูนย์ ดังนั้นคลื่นในบริเวณปิดของปัญหาจะมีพฤติกรรมเสมือนอยู่ในบริเวณเปิดที่มีขนาดอนันต์.

หัวข้อนี้ได้อธิบายถึงการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตการดูดซึมในกรณี 1 มิติด้วยหลักการอย่างง่ายและในกรณี 2 มิติและ 3 มิติด้วยวิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์.

3.1.1 เงื่อนไขขอบเขตการดูดซึมใน 1 มิติ

การคำนวณสนามใน 1 มิติคือการหาสนาม ณ ตำแหน่งต่างๆ จากการคำนวณโดยใช้ค่าสนามในตำแหน่งข้างเคียงทั้ง 2 ข้าง. ปัญหาจากการหาสนามที่ตำแหน่งขอบของบริเวณปิดคือเราไม่สามารถรู้ค่าสนามในตำแหน่งข้างเคียงข้างใดข้างหนึ่งได้ เนื่องจากหน่วยความจำคอมพิวเตอร์จะเก็บค่าสนามภายในขอบเขตของบริเวณปิดเท่านั้น. หลักการจำลองบริเวณเปิดใน 1 มิติคือ การกำหนดให้ค่าสนามที่ขอบของบริเวณปิด ณ เวลา $n\Delta t$ มีค่าเท่ากับค่าสนามที่อยู่ตำแหน่งถัดจากขอบของบริเวณปิดเข้าไปข้างในอีก 1 กริดเมื่อเวลา $(n-n')\Delta t$ โดย n' คือจำนวนลำดับขั้นเวลาที่คลื่นใช้ในการเคลื่อนที่เป็นระยะทางได้ 1 กริด[20].

ตัวอย่างเช่น การพิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในอากาศ. เมื่อกำหนด S =0.5 เราสามารถหาระยะทางที่คลื่นเคลื่อนที่ภายในเวลา Δt ได้จากสมการนิยามตัวประกอบเสถียรภาพในบทที่ 2 ดังนี้

$$distance = c_0 \times \Delta t = c_0 \cdot \frac{0.5\Delta x}{c_0} = 0.5\Delta x \tag{3.1}$$

โดย $distance$ คือระยะทางที่คลื่นเคลื่อนที่,

c_0 คือความเร็วของคลื่นในอากาศ(m/s).

สมการที่ (3.1) แสดงคลื่นสามารถเคลื่อนที่ได้ $0.5\Delta x$ ภายในเวลา Δt หรือ 1 กริดภายในเวลา 2 ลำดับขั้นเวลา. จากหลักการจำลองบริเวณเปิดใน 1 มิติตามที่กล่าวข้างต้น $\vec{E}$ ที่ขอบของบริเวณปิดสามารถหาได้จากสมการ

$$\vec{E}\big|_0^n = \vec{E}\big|_1^{n-2} \;;\;\; \vec{E}\big|_{edge}^n = \vec{E}\big|_{edge-1}^{n-2} \tag{3.2}$$

โดย $\vec{E}\big|_0^n$ และ $\vec{E}\big|_{edge}^n$ คือสนามที่ขอบด้านซ้ายและด้านขวาของบริเวณปิดตามลำดับ.

3.1.2 วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ใน 2 มิติ

หัวข้อนี้อธิบายวิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ในกรณี 2 มิติ. เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจวิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ หัวข้อนี้จึงอธิบายกรณี 2 มิติอย่างละเอียดก่อน ต่อจากนั้นจึงขยายไปสู่กรณี 3 มิติในหัวข้อถัดไป.

พิจารณาสมการที่ (2.10) ถึง (2.12) เป็นแบบแผนทีเอ็ม 2 มิติ. จากนั้นแปลงสมการให้อยู่ในรูปโดเมนความถี่ พร้อมเพิ่มค่าคงตัวแอนไอโซโทรปิกไม่จริง (Fictitious Anisotropic Constants) เพื่อแทนการเพิ่มชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์[21] ได้สมการ

$$\mathbf{j}\omega E_z \cdot \varepsilon_{F_z}^*(x) \cdot \varepsilon_{F_z}^*(y) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{j}\omega H_x \cdot \mu_{F_x}^*(x) \cdot \mu_{F_x}^*(y) = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{j}\omega H_y \cdot \mu_{F_y}^*(x) \cdot \mu_{F_y}^*(y) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{3.5}$$

โดย ε_F^* และ μ_F^* คือค่าคงตัวแอนไอโซโทรปิกไม่จริงและมีดรรชนีล่าง x, y และ z ระบุส่วนประกอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน,

ε , μ และ σ คือสภาพยอม(F/m), ความซาบซึมได้(H/m) และ สภาพนำ(S/m) ของแบบจำลองและบริเวณปิดรอบแบบจำลองตามลำดับ.

ค่า ε_F^* และ μ_F^* คือสภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ตามลำดับ ของชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ซึ่งในที่นี้กำหนดเป็นตัวกลางที่นำไฟฟ้า.

การกำหนดให้คลื่นที่มาตกกระทบชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ไม่ให้เกิดการสะท้อนกลับนั้น สามารถพิจารณาได้จากค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน (Γ) และอิมพิแดนซ์อินทรินซิก (Intrinsic Impedence). สำหรับคลื่นที่เคลื่อนที่เข้าไปในชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์จะลดทอนได้ก็ต่อเมื่อ ε_F^* มีส่วนจินตภาพ. ค่า ε_F^* ที่พิจารณาจึงเป็นค่าเชิงซ้อนหรือสภาพยอมสัมพัทธ์เชิงซ้อน. รูปแบบของ ε_F^* และ μ_F^* ในชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์กำหนดเป็นค่าเชิงซ้อนดังสมการ[20, 22]

$$\varepsilon_{F_z}^*(m) = \varepsilon_{F_{z,re}}(m) - \mathbf{j}\frac{\sigma_{E_z}(m)}{\omega\varepsilon_0} \tag{3.6}$$

เมื่อ $m = x$ หรือ y

$$\mu_{F_n}^*(m) = \mu_{F_{n,re}}(m) - \mathbf{j}\frac{\sigma_{H_n}(m)}{\omega\mu_0} \tag{3.7}$$

เมื่อ $m = x$ หรือ y ; $n = x$ หรือ y โดย $m \neq n$

โดย $\varepsilon_{F_{re}}$ และ $\mu_{F_{re}}$ เป็นส่วนจริง,

σ_E และ σ_H เป็นส่วนจินตภาพ และมีดรรชนีล่าง x, y และ z ระบุส่วนประกอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน,

ε_0 และ μ_0 คือสภาพยอมของอากาศ(F/m), ความซาบซึมได้ของอากาศ(H/m) ตามลำดับ.

ชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ ε_F^* และ μ_F^* เป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้[20, 23].

1) ค่าอิมพิแดนซ์อินทรินซิกจากบริเวณปัญหา (η_0) ถึงชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ (η_{pml}) มีค่าเท่ากัน (ภาวะนี้ $\Gamma = 0$ หรือคลื่นไม่เกิดการสะท้อน) ดังสมการ

$$\eta_{pml} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_F^*}{\varepsilon_F^*}} = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{3.8}$$

นั่นคือ

$$\sqrt{\frac{\mu_F^*}{\varepsilon_F^*}} = 1\,. \tag{3.9}$$

2) ค่า ε_F^* และ μ_F^* ในทิศที่ตั้งฉากกับขอบเขตต้องเป็นส่วนกลับของค่า ε_F^* และ μ_F^* ในทิศอื่นๆ ตามลำดับดังสมการ

$$\frac{1}{\varepsilon_{F_x}^*(x)} = \varepsilon_{F_y}^*(x) = \varepsilon_{F_z}^*(x) \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{F_y}^*(y)} = \varepsilon_{F_x}^*(y) = \varepsilon_{F_z}^*(y) \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{\mu_{F_x}^*(x)} = \mu_{F_y}^*(x) = \mu_{F_z}^*(x) \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\mu_{F_y}^*(y)} = \mu_{F_x}^*(y) = \mu_{F_z}^*(y)\,. \tag{3.13}$$

จากสมการที่ (3.6) และ (3.7) ได้มีการกำหนดค่าของพจน์บางพจน์ไว้ดังนี้[20, 22].

$$\varepsilon_{F_{z,re}}(m) = \mu_{F_{n,re}}(m) = 1 \tag{3.14}$$

$$\frac{\sigma_{E_z}(m)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{H_n}(m)}{\mu_0} = \frac{\sigma_F(m)}{\varepsilon_0}\,. \tag{3.15}$$

จากสมการที่ (3.14) และ (3.15) เมื่อแทนในสมการที่ (3.6) และ (3.7) จะทำให้เงื่อนไขข้อที่ 1 เป็นจริงตามสมการที่ (3.9).

จากสมการที่ (3.3) ถึง (3.5) เมื่อแทนค่า ε_F^* และ μ_F^* เข้าไปโดยใช้สมการที่ (3.6), (3.7), (3.14) และ(3.15) และเงื่อนไขข้อที่ 2 จะได้สมการที่รวมการประยุกต์วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{j}\omega E_z \cdot \left(1 - \mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1 - \mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right) \tag{3.16}$$

$$\mathbf{j}\omega H_x \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right) = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \tag{3.17}$$

$$\mathbf{j}\omega H_y \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right). \tag{3.18}$$

ในทางปฏิบัติ เราจะประมาณค่า $\sigma_F(x)$ และ $\sigma_F(y)$ จากสมการ[20, 22]

$$\sigma_F(i) = \frac{\mathrm{Xn}(i)\cdot 2\varepsilon_0}{\Delta t} \tag{3.19}$$

โดย i คือพิกัดตำแหน่ง x และ y ,

Xn คือพารามิเตอร์ช่วย ซึ่ง

$$\mathrm{Xn}(i) = 0.333\left(\frac{i}{l_{pml}}\right)^3 \tag{3.20}$$

เมื่อ $i = 1, 2, ..., l_{pml}$

โดย l_{pml} คือจำนวนกริดในชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์.

สมการที่ (3.19) และ (3.20) แสดงว่าค่า $\sigma_F = 0$ ที่บริเวณนอกชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ ดังนั้น $\sigma_F(x)$ และ $\sigma_F(y)$ จึงไม่มีผล ณ บริเวณนี้. เมื่อคลื่นเคลื่อนที่เข้าสู่ชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ σ_F หรือส่วนจินตภาพของ ε_F^* และ μ_F^* จะมีขนาดเพิ่มขึ้นตามระยะความลึกที่คลื่นเคลื่อนที่เข้าไป จึงทำให้มีการลดทอนของคลื่นเพิ่มขึ้นในชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์.

เราสามารถสร้างสมการที่ (3.16) ถึง (3.18) เป็นสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาได้ เมื่อเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ในรูปโดเมนเวลาและพิจารณาเหมือนกับหัวข้อ 2.3 ในบทที่ 2.

3.1.3 วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ใน 3 มิติ

กรณี 3 มิติมีความคล้ายคลึงกับกรณี 2 มิติ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้.

พิจารณาสมการที่ (2.8) ถึง (2.13) โดยแปลงสมการเหล่านี้ให้อยู่ในรูปโดเมนความถี่ พร้อมเพิ่มค่าคงตัวแอนไอโซโทรปิกไม่จริงเพื่อแทนการเพิ่มชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์[21] ได้สมการ

$$\mathbf{j}\omega E_x \cdot \varepsilon_{F_x}^*(x)\cdot \varepsilon_{F_x}^*(y)\cdot \varepsilon_{F_x}^*(z) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x\right] \tag{3.21}$$

$$\mathbf{j}\omega E_y \cdot \varepsilon^*_{F_y}(x)\cdot \varepsilon^*_{F_y}(y)\cdot \varepsilon^*_{F_y}(z) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y\right] \tag{3.22}$$

$$\mathbf{j}\omega E_z \cdot \varepsilon^*_{F_z}(x)\cdot \varepsilon^*_{F_z}(y)\cdot \varepsilon^*_{F_z}(z) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right] \tag{3.23}$$

$$\mathbf{j}\omega H_x \cdot \mu^*_{F_x}(x)\cdot \mu^*_{F_x}(y)\cdot \mu^*_{F_x}(z) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right] \tag{3.24}$$

$$\mathbf{j}\omega H_y \cdot \mu^*_{F_y}(x)\cdot \mu^*_{F_y}(y)\cdot \mu^*_{F_y}(z) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right] \tag{3.25}$$

$$\mathbf{j}\omega H_z \cdot \mu^*_{F_z}(x)\cdot \mu^*_{F_z}(y)\cdot \mu^*_{F_z}(z) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right]. \tag{3.26}$$

สำหรับรูปแบบของ ε^*_F และ μ^*_F ในชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์กำหนดเป็นค่าเชิงซ้อนดังสมการ[20, 22]

$$\varepsilon^*_{F_n}(m) = \varepsilon_{F_{n,re}}(m) - \mathbf{j}\frac{\sigma_{E_n}(m)}{\omega\varepsilon_0} \tag{3.27}$$

$$\mu^*_{F_n}(m) = \mu_{F_{n,re}}(m) - \mathbf{j}\frac{\sigma_{H_n}(m)}{\omega\mu_0} \tag{3.28}$$

เมื่อ $m = x, y$ หรือ z ; $n = x, y$ หรือ z โดย $m \neq n$.

ชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ ε^*_F และ μ^*_F เป็นไปตามเงื่อนไขเดียวกันกับกรณี 2 มิติคือ

1) ค่าอิมพิแดนซ์อินทรินซิกจากบริเวณปัญหา (η_0) ถึงชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ (η_{pml}) มีค่าเท่ากันดังสมการที่ (3.8) และ (3.9),

2) ค่า ε^*_F และ μ^*_F ในทิศที่ตั้งฉากกับขอบเขตต้องเป็นส่วนกลับของค่า ε^*_F และ μ^*_F ในทิศอื่นๆ ตามลำดับดังสมการที่ (3.10) ถึง (3.13) และ

$$\frac{1}{\varepsilon^*_{F_z}(z)} = \varepsilon^*_{F_x}(z) = \varepsilon^*_{F_y}(z) \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{\mu^*_{F_z}(z)} = \mu^*_{F_x}(z) = \mu^*_{F_y}(z)\,. \tag{3.30}$$

สมการที่ (3.27) และ (3.28) ได้มีการกำหนดค่าของพจน์บางพจน์ไว้เหมือนกับกรณี 2 มิติดังสมการที่ (3.14) และ (3.15) เพื่อทำให้เงื่อนไขข้อที่ 1 เป็นจริงตามสมการที่ (3.9). เมื่อแทนค่า ε^*_F

และ μ_F^* เข้าไปในสมการที่ (3.21) ถึง (3.26) โดยใช้สมการที่ (3.27), (3.28), (3.14) และ(3.15) และเงื่อนไขข้อที่ 2 จะได้สมการที่รวมการประยุกต์วิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{j}\omega E_x \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(z)}{\omega\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x\right] \quad (3.31)$$

$$\mathbf{j}\omega E_y \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(z)}{\omega\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y\right] \quad (3.32)$$

$$\mathbf{j}\omega E_z \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(z)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right] \quad (3.33)$$

$$\mathbf{j}\omega H_x \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(z)}{\omega\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right] \quad (3.34)$$

$$\mathbf{j}\omega H_y \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(z)}{\omega\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right] \quad (3.35)$$

$$\mathbf{j}\omega H_z \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(x)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(y)}{\omega\varepsilon_0}\right) \cdot \left(1-\mathbf{j}\frac{\sigma_F(z)}{\omega\varepsilon_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right]. \quad (3.36)$$

ในทางปฏิบัติ เราสามารถประมาณค่า $\sigma_F(x)$, $\sigma_F(y)$ และ $\sigma_F(z)$ จากสมการสมการที่ (3.19) และ (3.20) เมื่อ i ในสมการคือพิกัดตำแหน่ง x, y และ z.

3.2 วิธีการแบ่งสนามรวมและสนามกระเจิง

วิทยานิพนธ์นี้พิจารณาปัญหาจากแหล่งกำเนิดคลื่นระนาบ โดยใช้วิธีการแบ่งสนามรวม (Total Field) และสนามกระเจิง (Scattered Field) เพื่อให้การทำงานของวิธีชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น. วิธีนี้แยกวิเคราะห์สนามกระเจิงออกจากสนามรวมโดยให้สนามรวมเกิดจากสนามตกกระทบ (Incident Field) รวมกับสนามกระเจิง

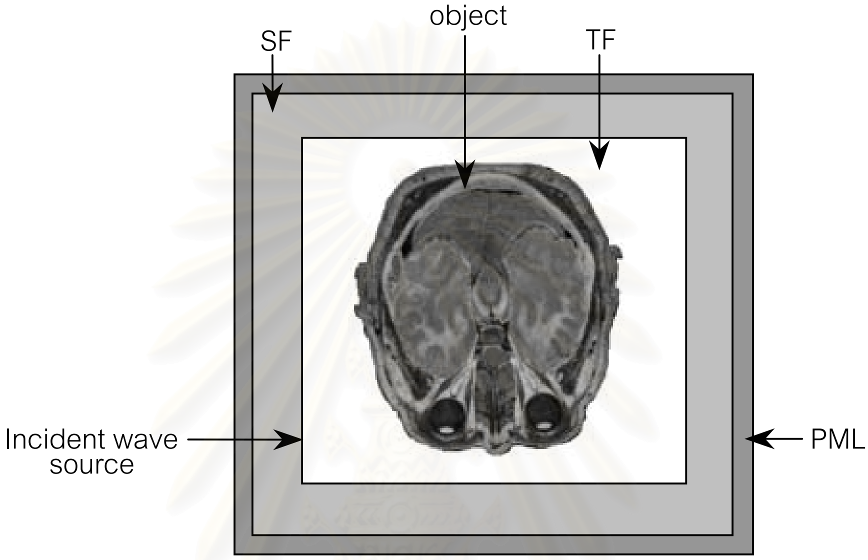
$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{scat} \quad (3.37)$$

$$\vec{H}_{total} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{scat} \quad (3.38)$$

โดยมี ดรรชนีล่าง *total, inc* และ *scat* ระบุว่าเป็นสนามรวม, สนามตกกระทบ และสนามกระเจิง ตามลำดับ.

จากสมการที่ (3.37) และ (3.38) เมื่อสนามตกกระทบเป็นสนามที่ถูกกำหนดขึ้นและทราบค่าในทุกๆ กริดและทุกๆ ช่วงเวลา สนามกระเจิงสามารถหาได้จากการนำสนามรวมลบด้วยสนามตกกระทบ.

รูปที่ 3.1 แสดงตัวอย่างการแบ่งบริเวณปิดของปัญหาด้วยวิธีการแบ่งสนามรวมและสนามกระเจิง



รูปที่ 3.1 ขอบเขตของสนามรวม (TF), สนามกระเจิง (SF), วัตถุ,
ชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ (PML) และตำแหน่งของแหล่งกำเนิดสนามตกกระทบ
ในบริเวณปิดของปัญหา

จากรูปที่ 3.1 กำหนดให้พื้นที่สี่เหลี่ยมทั้งหมดคือบริเวณปิดที่จำกัดของปัญหา. วัตถุที่สนใจอยู่ภายในบริเวณสนามรวม โดยถัดจากสนามรวมคือบริเวณสนามกระเจิง. ชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์อยู่ที่ขอบของบริเวณปิดเพื่อจำลองเป็นบริเวณเปิด. เนื่องจากขอบเขตของสนามกระเจิงอยู่ติดกับชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ ดังนั้นปริมาณของสนามก่อนเข้าสู่ชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์จึงลดลง. เมื่อปริมาณสนามที่เข้าสู่ชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ลดลงการทำงานของชั้นตัวกลางไร้คลื่นสะท้อนสมบูรณ์ก็มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น.

3.2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างสนามรวมและสนามกระเจิงที่บริเวณรอยต่อ

สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในสมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาตามขั้นตอนวิธีของยีต้องเป็นสนามที่สอดคล้องกัน (สนามรวมเหมือนกันหรือสนามกระเจิงเหมือนกัน) ทั้งหมดเท่านั้น. เนื่องจากในการคำนวณมีการแบ่งบริเวณปัญหาออกเป็นบริเวณสนามรวมและบริเวณสนาม

กระเจิง ดังนั้นที่บริเวณรอยต่อระหว่าง 2 บริเวณนี้ สนามที่นำมาใช้ในการคำนวณจะไม่สอดคล้องกันทั้งหมด. การคำนวณจึงต้องพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสนามรวมและสนามกระเจิง ณ บริเวณรอยต่อ.

<u>กรณี 1 มิติ</u>

การพิจารณาคลื่นในกรณี 1 มิติไม่ยุ่งยาก เนื่องจากบริเวณของปัญหาเป็นเส้นตรง. หลักการคือ เมื่อเรากำลังหาสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง i ให้ใช้สนามแม่เหล็กที่สอดคล้องกัน ณ ตำแหน่ง $i+1/2$ และ $i-1/2$ ในการคำนวณ. ถ้าสนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่ง $i+1/2$ หรือ $i-1/2$ ไม่เป็นสนามที่สอดคล้องกันกับสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง i ก็ต้องหาค่าสนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่ง $i+1/2$ หรือ $i-1/2$ ที่สอดคล้องกันกับสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง i ด้วยสมการที่ (3.38). กรณีหาสนามแม่เหล็กก็ใช้หลักการและการพิจารณาที่คล้ายกัน โดยใช้สมการที่ (3.37) หาค่าสนามไฟฟ้าในแบบที่ต้องการ. สังเกตว่าในสมการที่ (3.37) และ (3.38) สนามตกกระทบเป็นค่าที่เราทราบ เนื่องจากเป็นสนามจากแหล่งกำเนิดที่กำหนดขึ้นมา.

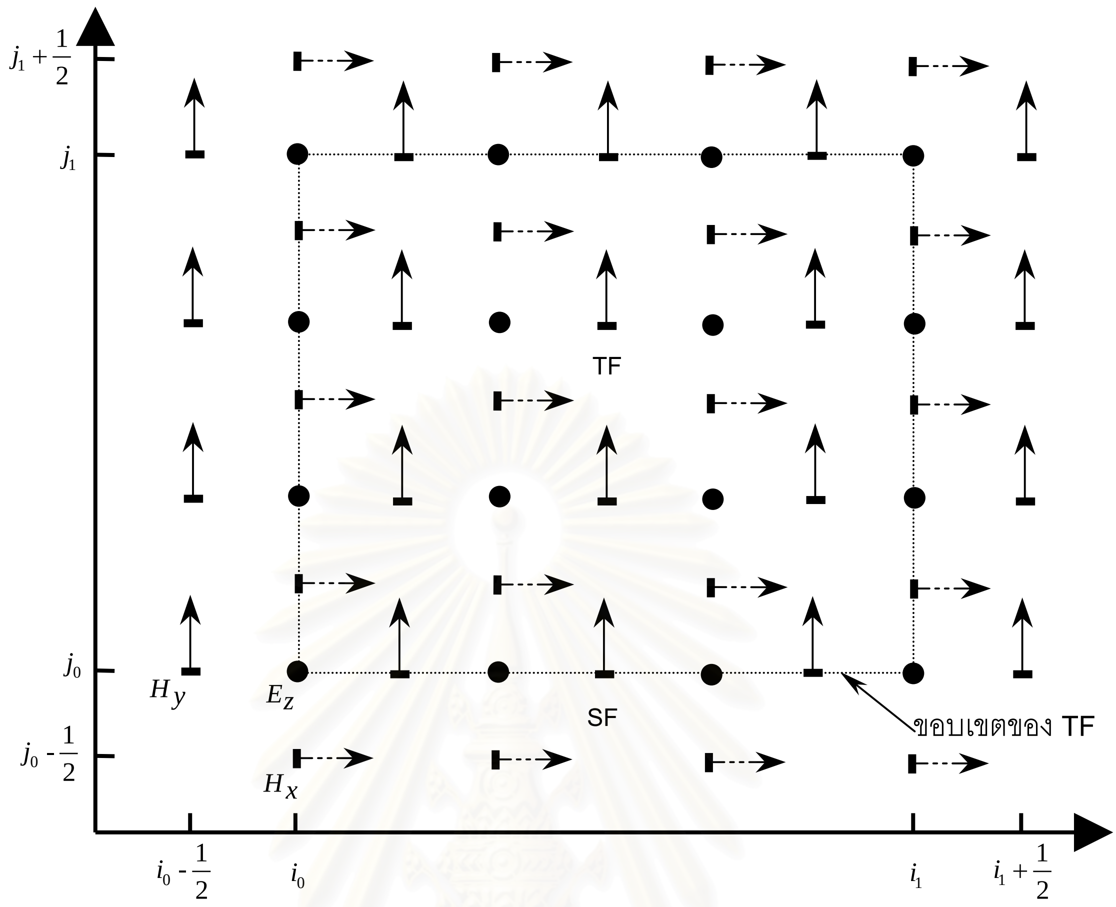
<u>กรณี 2 มิติ</u>

ใน 2 มิติ การพิจารณามีความยุ่งยากเพิ่มขึ้นจากกรณี 1 มิติ. วิทยานิพนธ์นี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามในกรณีแบบแผนทีเอ็ม 2 มิติอย่างละเอียดเพื่อที่จะขยายไปสู่กรณี 3 มิติต่อไป.

รูปที่ 3.2 แสดงตำแหน่งเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามแบบแผนทีเอ็ม 2 มิติ. ที่ขอบเขตของบริเวณสนามรวม เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสนามโดยแบ่งเป็น 4 กรณีตามขอบด้านล่าง, ด้านบน, ด้านซ้าย และด้านขวา. ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสนามเฉพาะตามขอบด้านล่าง ดังต่อไปนี้.

<u>กรณีขอบด้านล่าง</u>. สมการผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาแบบแผนทีเอ็ม 2 มิติในสมการที่ (2.35) ถึง (2.37) ในบทที่ 2 ถูกนำมาพิจารณาอีกครั้ง โดยกำหนดพิกัดตำแหน่งเป็น (i,j) ใดๆ ตามรูปที่ 3.2 ดังนี้

$$E_z\Big|_{i,j}^{n+1/2} = E_z\Big|_{i,j}^{n-1/2} + \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}\right)\cdot\left(\frac{H_y\Big|_{i+1/2,j}^{n} - H_y\Big|_{i-1/2,j}^{n}}{\Delta x} - \frac{H_x\Big|_{i,j+1/2}^{n} - H_x\Big|_{i,j-1/2}^{n}}{\Delta y}\right) \quad (3.39)$$



รูปที่ 3.2 ตำแหน่งเวกเตอร์สนามแม่เหล็กและเวกเตอร์สนามไฟฟ้า
ตามแบบแผนที่เอ็ม 2 มิติ

$$H_x\Big|_{i,j}^{n+1} = H_x\Big|_{i,j}^{n} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j}}\right)\cdot\left(\frac{E_z\Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - E_z\Big|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}\right) \tag{3.40}$$

$$H_y\Big|_{i,j}^{n+1} = H_y\Big|_{i,j}^{n} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j}}\right)\cdot\left(\frac{E_z\Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - E_z\Big|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x}\right). \tag{3.41}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.39) และรูปที่ 3.2 H_x ที่พิกัดตำแหน่งตามแนวแกนตั้งและแนวแกนนอนเท่ากับ j_0 -1/2 และ $i_0,...,i_1$ ตามลำดับเป็นสนามกระเจิง ขณะที่สนามที่เหลือในสมการเป็นสนามรวมหมด. เราสามารถแปลง H_x จากสนามกระเจิงเป็นสนามรวมโดยการใช้สมการที่ (3.38) และค่าสนามตกกระทบ ณ พิกัดตำแหน่งนั้น. สมการที่ (3.39) ที่ขอบด้านล่างนี้สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$E_z\Big|_{i,j}^{n+1/2} = E_z\Big|_{i,j}^{n-1/2} + \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{H_y\Big|_{i+1/2,j}^{n} - H_y\Big|_{i-1/2,j}^{n}}{\Delta x} \\ -\dfrac{H_x\Big|_{i,j+1/2}^{n} - \left(H_x\Big|_{i,j-1/2}^{n} + H_{x,inc}\Big|_{i,j-1/2}^{n}\right)}{\Delta y}\end{array}\right). \quad (3.42)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.40) และรูปที่ 3.2 E_z ที่พิกัดตำแหน่งตามแนวแกนตั้งและแนวแกนนอนเท่ากับ j_0 และ $i_0,...,i_1$ ตามลำดับเป็นสนามรวม ขณะที่สนามที่เหลือในสมการเป็นสนามกระเจิงหมด. เราสามารถแปลง E_z จากสนามรวมเป็นสนามกระเจิงด้วยการใช้สมการที่ (3.37) และสนามตกกระทบ ณ พิกัดตำแหน่งนั้น. สมการที่ (3.40) ที่ขอบด้านล่างนี้สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$H_x\Big|_{i,j}^{n+1} = H_x\Big|_{i,j}^{n} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j}}\right)\cdot\left(\frac{\left(E_z\Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - E_{z,inc}\Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2}\right) - E_z\Big|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}\right). \quad (3.43)$$

สำหรับการหา H_y ที่บริเวณรอยต่อขอบเขตของ TF ด้านล่างในรูปที่ 3.2 สามารถใช้สมการที่ (3.41) โดยไม่ต้องปรับรูปสมการ.

<u>กรณีขอบด้านบน</u>. เมื่อพิจารณารูปที่ 3.2 สำหรับสมการที่ (3.39) การหา E_z ที่พิกัดตำแหน่ง $j = j_1;\ i = i_0,...,i_1$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$E_z\Big|_{i,j}^{n+1/2} = E_z\Big|_{i,j}^{n-1/2} + \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{H_y\Big|_{i+1/2,j}^{n} - H_y\Big|_{i-1/2,j}^{n}}{\Delta x} \\ -\dfrac{\left(H_x\Big|_{i,j+1/2}^{n} + H_{x,inc}\Big|_{i,j+1/2}^{n}\right) - H_x\Big|_{i,j-1/2}^{n}}{\Delta y}\end{array}\right). \quad (3.44)$$

เมื่อพิจารณารูปที่ 3.2 สำหรับสมการที่ (3.40) การหา H_x ที่พิกัดตำแหน่ง $j = j_1 + 1/2;\ i = i_0,...,i_1$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$H_x\Big|_{i,j}^{n+1} = H_x\Big|_{i,j}^{n} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j}}\right)\cdot\left(\frac{E_z\Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \left(E_z\Big|_{i,j-1/2}^{n+1/2} - E_{z,inc}\Big|_{i,j-1/2}^{n+1/2}\right)}{\Delta y}\right). \quad (3.45)$$

สำหรับการหา H_y ที่บริเวณรอยต่อขอบเขตของ TF ด้านบนในรูปที่ 3.2 สามารถใช้สมการที่ (3.41) โดยไม่ต้องปรับรูปสมการ.

<u>กรณีขอบด้านซ้าย</u>. เมื่อพิจารณารูปที่ 3.2 สำหรับสมการที่ (3.39) การหา E_z ที่พิกัดตำแหน่ง $i = i_0;\ j = j_0,\ldots,j_1$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$E_z\Big|_{i,j}^{n+1/2} = E_z\Big|_{i,j}^{n-1/2} + \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{H_y\Big|_{i+1/2,j}^{n} - \left(H_y\Big|_{i-1/2,j}^{n} + H_{y,inc}\Big|_{i-1/2,j}^{n}\right)}{\Delta x} \\ -\dfrac{H_x\Big|_{i,j+1/2}^{n} - H_x\Big|_{i,j-1/2}^{n}}{\Delta y}\end{array}\right). \qquad (3.46)$$

สำหรับการหา H_x ที่บริเวณรอยต่อขอบเขตของ TF ด้านซ้ายในรูปที่ 3.2 สามารถใช้สมการที่ (3.40) โดยไม่ต้องปรับรูปสมการ.

เมื่อพิจารณารูปที่ 3.2 สำหรับสมการที่ (3.41) การหา H_y ที่พิกัดตำแหน่ง $i = i_0 - 1/2;\ j = j_0,\ldots,j_1$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$H_y\Big|_{i,j}^{n+1} = H_y\Big|_{i,j}^{n} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j}}\right)\cdot\left(\frac{\left(E_z\Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - E_{z,inc}\Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2}\right) - E_z\Big|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x}\right). \qquad (3.47)$$

<u>กรณีขอบด้านขวา</u>. เมื่อพิจารณารูปที่ 3.2 สำหรับสมการที่ (3.39) การหา E_z ที่พิกัดตำแหน่ง $i = i_1;\ j = j_0,\ldots,j_1$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$E_z\Big|_{i,j}^{n+1/2} = E_z\Big|_{i,j}^{n-1/2} + \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(H_y\Big|_{i+1/2,j}^{n} + H_{y,inc}\Big|_{i+1/2,j}^{n}\right) - H_y\Big|_{i-1/2,j}^{n}}{\Delta x} \\ -\dfrac{H_x\Big|_{i,j+1/2}^{n} - H_x\Big|_{i,j-1/2}^{n}}{\Delta y}\end{array}\right). \qquad (3.48)$$

สำหรับการหา H_x ที่บริเวณรอยต่อขอบเขตของ TF ด้านขวาในรูปที่ 3.2 สามารถใช้สมการที่ (3.40) โดยไม่ต้องปรับรูปสมการ.

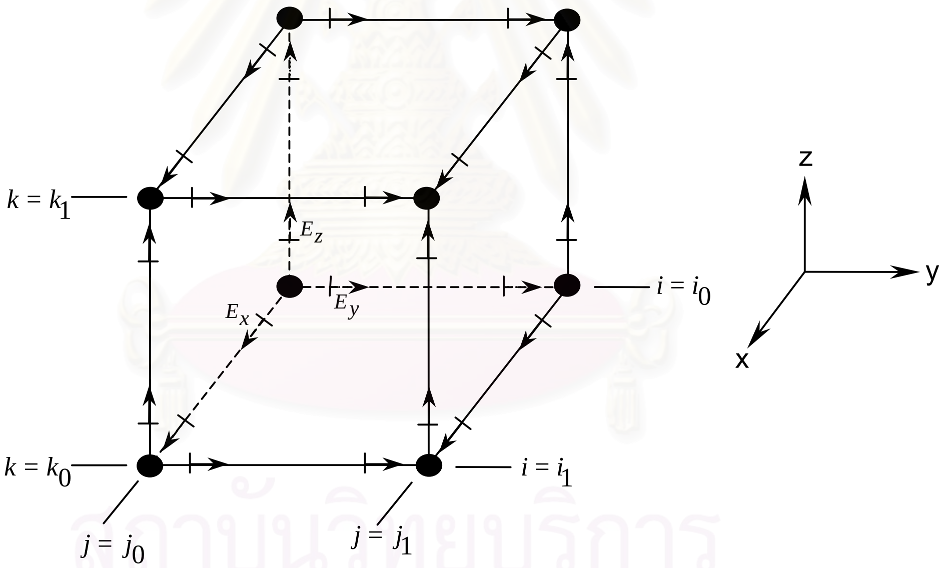
เมื่อพิจารณารูปที่ 3.2 สำหรับสมการที่ (3.41) การหา H_y ที่พิกัดตำแหน่ง $i = i_1 + 1/2;\ j = j_0,\ldots,j_1$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$H_y\Big|_{i,j}^{n+1} = H_y\Big|_{i,j}^{n} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j}}\right) \cdot \left(\frac{E_z\Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \left(E_z\Big|_{i-1/2,j}^{n+1/2} - E_{z,inc}\Big|_{i-1/2,j}^{n+1/2}\right)}{\Delta x}\right). \quad (3.49)$$

สำหรับการพิจารณากรณีแบบแผนทีอี (TE Mode) 2 มิติสามารถพิจารณาได้ในลักษณะคล้ายกัน.

<u>กรณี 3 มิติ</u>

กรณี 3 มิติคล้ายกับกรณี 2 มิติ เพียงแต่มีความซับซ้อนขึ้นตามจำนวนขอบเขตรอยต่อระหว่างบริเวณสนามรวมและบริเวณสนามกระเจิงที่มากขึ้น. กำหนดตำแหน่งขอบเขตของบริเวณสนามรวมและส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าดังรูปที่ 3.3. ส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและของสนามแม่เหล็กในตำแหน่งอื่นๆ เป็นไปตามรูปที่ 2.1 ของบทที่ 2. ความสัมพันธ์ของสนามแบ่งเป็นกรณีของด้านรอยต่อขอบเขตดังต่อไปนี้[19].



รูปที่ 3.3 ตำแหน่งขอบเขตของบริเวณสนามรวมและส่วนประกอบของสนามไฟฟ้า

ขอบเขตด้านซ้าย ณ พิกัด $\left(i = i_0 + \frac{1}{2},\dots,i_1 - \frac{1}{2};\ j = j_0;\ k = k_0,\dots,k_1\right)$

$$E_x\Big|_{i,j_0,k}^{n+1/2} = \left\{E_x\Big|_{i,j_0,k}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i,j_0,k}}{1+\frac{\sigma_{i,j_0,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j_0,k}}}\right) \cdot \left(\frac{H_{z,inc}\Big|_{i,j_0-1/2,k}^{n}}{\Delta y}\right). \quad (3.50)$$

ขอบเขตด้านซ้าย ณ พิกัด $\left(i = i_0,...,i_1;\ j = j_0;\ k = k_0 + \frac{1}{2},...,k_1 - \frac{1}{2}\right)$

$$E_z\Big|_{i,j_0,k}^{n+1/2} = \left\{E_z\Big|_{i,j_0,k}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t / \varepsilon_{i,j_0,k}}{1 + \frac{\sigma_{i,j_0,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j_0,k}}}\right) \cdot \left(\frac{H_{x,inc}\Big|_{i,j_0-1/2,k}^{n}}{\Delta y}\right). \qquad (3.51)$$

ขอบเขตด้านซ้าย ณ พิกัด $\left(i = i_0 + \frac{1}{2},...,i_1 - \frac{1}{2};\ j = j_0 - \frac{1}{2};\ k = k_0,...,k_1\right)$

$$H_z\Big|_{i,j_0-1/2,k}^{n+1/2} = \left\{H_z\Big|_{i,j_0-1/2,k}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j_0-1/2,k}}\right) \cdot \left(\frac{E_{x,inc}\Big|_{i,j_0,k}^{n}}{\Delta y}\right). \qquad (3.52)$$

ขอบเขตด้านซ้าย ณ พิกัด $\left(i = i_0,...,i_1;\ j = j_0 - \frac{1}{2};\ k = k_0 + \frac{1}{2},...,k_1 - \frac{1}{2}\right)$

$$H_x\Big|_{i,j_0-1/2,k}^{n+1/2} = \left\{H_x\Big|_{i,j_0-1/2,k}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j_0-1/2,k}}\right) \cdot \left(\frac{E_{z,inc}\Big|_{i,j_0,k}^{n}}{\Delta y}\right). \qquad (3.53)$$

ขอบเขตด้านขวา ณ พิกัด $\left(i = i_0 + \frac{1}{2},...,i_1 - \frac{1}{2};\ j = j_1;\ k = k_0,...,k_1\right)$

$$E_x\Big|_{i,j_1,k}^{n+1/2} = \left\{E_x\Big|_{i,j_1,k}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t / \varepsilon_{i,j_1,k}}{1 + \frac{\sigma_{i,j_1,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j_1,k}}}\right) \cdot \left(\frac{H_{z,inc}\Big|_{i,j_1+1/2,k}^{n}}{\Delta y}\right). \qquad (3.54)$$

ขอบเขตด้านขวา ณ พิกัด $\left(i = i_0,...,i_1;\ j = j_1;\ k = k_0 + \frac{1}{2},...,k_1 - \frac{1}{2}\right)$

$$E_z\Big|_{i,j_1,k}^{n+1/2} = \left\{E_z\Big|_{i,j_1,k}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t / \varepsilon_{i,j_1,k}}{1 + \frac{\sigma_{i,j_1,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j_1,k}}}\right) \cdot \left(\frac{H_{x,inc}\Big|_{i,j_1+1/2,k}^{n}}{\Delta y}\right). \qquad (3.55)$$

ขอบเขตด้านขวา ณ พิกัด $\left(i = i_0 + \frac{1}{2},...,i_1 - \frac{1}{2};\ j = j_1 + \frac{1}{2};\ k = k_0,...,k_1\right)$

$$H_z\Big|_{i,j_1+1/2,k}^{n+1/2} = \left\{H_z\Big|_{i,j_1+1/2,k}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j_1+1/2,k}}\right)\cdot\left(\frac{E_{x,inc}\big|_{i,j_1,k}^{n}}{\Delta y}\right). \tag{3.56}$$

ขอบเขตด้านขวา ณ พิกัด $\left(i = i_0,...,i_1;\ j = j_1 + \frac{1}{2};\ k = k_0 + \frac{1}{2},...,k_1 - \frac{1}{2}\right)$

$$H_x\Big|_{i,j_1+1/2,k}^{n+1/2} = \left\{H_x\Big|_{i,j_1+1/2,k}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j_1+1/2,k}}\right)\cdot\left(\frac{E_{z,inc}\big|_{i,j_1,k}^{n}}{\Delta y}\right). \tag{3.57}$$

ขอบเขตด้านล่าง ณ พิกัด $\left(i = i_0 + \frac{1}{2},...,i_1 - \frac{1}{2};\ j = j_0,...,j_1;\ k = k_0\right)$

$$E_x\Big|_{i,j,k_0}^{n+1/2} = \left\{E_x\Big|_{i,j,k_0}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i,j,k_0}}{1+\frac{\sigma_{i,j,k_0}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k_0}}}\right)\cdot\left(\frac{H_{y,inc}\big|_{i,j,k_0-1/2}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.58}$$

ขอบเขตด้านล่าง ณ พิกัด $\left(i = i_0,...,i_1;\ j = j_0 + \frac{1}{2},..., j_1 - \frac{1}{2};\ k = k_0\right)$

$$E_y\Big|_{i,j,k_0}^{n+1/2} = \left\{E_y\Big|_{i,j,k_0}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i,j,k_0}}{1+\frac{\sigma_{i,j,k_0}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k_0}}}\right)\cdot\left(\frac{H_{x,inc}\big|_{i,j,k_0-1/2}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.59}$$

ขอบเขตด้านล่าง ณ พิกัด $\left(i = i_0 + \frac{1}{2},...,i_1 - \frac{1}{2};\ j = j_0,...,j_1;\ k = k_0 - \frac{1}{2}\right)$

$$H_y\Big|_{i,j,k_0-1/2}^{n+1/2} = \left\{H_y\Big|_{i,j,k_0-1/2}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k_0-1/2}}\right)\cdot\left(\frac{E_{x,inc}\big|_{i,j,k_0}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.60}$$

ขอบเขตด้านล่าง ณ พิกัด $\left(i=i_0,\ldots,i_1;\ j=j_0+\frac{1}{2},\ldots,j_1-\frac{1}{2};\ k=k_0-\frac{1}{2}\right)$

$$H_x\Big|_{i,j,k_0-1/2}^{n+1/2}=\left\{H_x\Big|_{i,j,k_0-1/2}^{n+1/2}\right\}-\left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k_0-1/2}}\right)\cdot\left(\frac{E_{y,inc}\Big|_{i,j,k_0}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.61}$$

ขอบเขตด้านบน ณ พิกัด $\left(i=i_0+\frac{1}{2},\ldots,i_1-\frac{1}{2};\ j=j_0,\ldots,j_1;\ k=k_1\right)$

$$E_x\Big|_{i,j,k_1}^{n+1/2}=\left\{E_x\Big|_{i,j,k_1}^{n+1/2}\right\}-\left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i,j,k_1}}{1+\frac{\sigma_{i,j,k_1}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k_1}}}\right)\cdot\left(\frac{H_{y,inc}\Big|_{i,j,k_1+1/2}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.62}$$

ขอบเขตด้านบน ณ พิกัด $\left(i=i_0,\ldots,i_1;\ j=j_0+\frac{1}{2},\ldots,j_1-\frac{1}{2};\ k=k_1\right)$

$$E_y\Big|_{i,j,k_1}^{n+1/2}=\left\{E_y\Big|_{i,j,k_1}^{n+1/2}\right\}+\left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i,j,k_1}}{1+\frac{\sigma_{i,j,k_1}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k_1}}}\right)\cdot\left(\frac{H_{x,inc}\Big|_{i,j,k_1+1/2}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.63}$$

ขอบเขตด้านบน ณ พิกัด $\left(i=i_0+\frac{1}{2},\ldots,i_1-\frac{1}{2};\ j=j_0,\ldots,j_1;\ k=k_1+\frac{1}{2}\right)$

$$H_y\Big|_{i,j,k_1+1/2}^{n+1/2}=\left\{H_y\Big|_{i,j,k_1+1/2}^{n+1/2}\right\}-\left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k_1+1/2}}\right)\cdot\left(\frac{E_{x,inc}\Big|_{i,j,k_1}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.64}$$

ขอบเขตด้านบน ณ พิกัด $\left(i=i_0,\ldots,i_1;\ j=j_0+\frac{1}{2},\ldots,j_1-\frac{1}{2};\ k=k_1+\frac{1}{2}\right)$

$$H_x\Big|_{i,j,k_1+1/2}^{n+1/2}=\left\{H_x\Big|_{i,j,k_1+1/2}^{n+1/2}\right\}+\left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k_1+1/2}}\right)\cdot\left(\frac{E_{y,inc}\Big|_{i,j,k_1}^{n}}{\Delta z}\right). \tag{3.65}$$

ขอบเขตด้านหลัง ณ พิกัด $\left(i = i_0;\ j = j_0 + \frac{1}{2},\dots,j_1 - \frac{1}{2};\ k = k_0,\dots,k_1\right)$

$$E_y\Big|_{i_0,j,k}^{n+1/2} = \left\{E_y\Big|_{i_0,j,k}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i_0,j,k}}{1+\frac{\sigma_{i_0,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i_0,j,k}}}\right)\cdot\left(\frac{H_{z,inc}\Big|_{i_0-1/2,j,k}^{n}}{\Delta x}\right). \tag{3.66}$$

ขอบเขตด้านหลัง ณ พิกัด $\left(i = i_0;\ j = j_0,\dots,j_1;\ k = k_0 + \frac{1}{2},\dots,k_1 - \frac{1}{2}\right)$

$$E_z\Big|_{i_0,j,k}^{n+1/2} = \left\{E_z\Big|_{i_0,j,k}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i_0,j,k}}{1+\frac{\sigma_{i_0,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i_0,j,k}}}\right)\cdot\left(\frac{H_{y,inc}\Big|_{i_0-1/2,j,k}^{n}}{\Delta x}\right). \tag{3.67}$$

ขอบเขตด้านหลัง ณ พิกัด $\left(i = i_0 - \frac{1}{2};\ j = j_0 + \frac{1}{2},\dots,j_1 - \frac{1}{2};\ k = k_0,\dots,k_1\right)$

$$H_z\Big|_{i_0-1/2,j,k}^{n+1/2} = \left\{H_z\Big|_{i_0-1/2,j,k}^{n+1/2}\right\} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i_0-1/2,j,k}}\right)\cdot\left(\frac{E_{y,inc}\Big|_{i_0,j,k}^{n}}{\Delta x}\right). \tag{3.68}$$

ขอบเขตด้านหลัง ณ พิกัด $\left(i = i_0 - \frac{1}{2};\ j = j_0,\dots,j_1;\ k = k_0 + \frac{1}{2},\dots,k_1 - \frac{1}{2}\right)$

$$H_y\Big|_{i_0-1/2,j,k}^{n+1/2} = \left\{H_y\Big|_{i_0-1/2,j,k}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i_0-1/2,j,k}}\right)\cdot\left(\frac{E_{z,inc}\Big|_{i_0,j,k}^{n}}{\Delta x}\right). \tag{3.69}$$

ขอบเขตด้านหน้า ณ พิกัด $\left(i = i_1;\ j = j_0 + \frac{1}{2},\dots,j_1 - \frac{1}{2};\ k = k_0,\dots,k_1\right)$

$$E_y\Big|_{i_1,j,k}^{n+1/2} = \left\{E_y\Big|_{i_1,j,k}^{n+1/2}\right\} - \left(\frac{\Delta t/\varepsilon_{i_1,j,k}}{1+\frac{\sigma_{i_1,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i_1,j,k}}}\right)\cdot\left(\frac{H_{z,inc}\Big|_{i_1+1/2,j,k}^{n}}{\Delta x}\right). \tag{3.70}$$

ขอบเขตด้านหน้า ณ พิกัด $\left(i = i_1;\ j = j_0,\ldots,j_1;\ k = k_0 + \frac{1}{2},\ldots,k_1 - \frac{1}{2} \right)$

$$E_z\Big|_{i_1,j,k}^{n+1/2} = \left\{ E_z\Big|_{i_1,j,k}^{n+1/2} \right\} + \left(\frac{\Delta t / \varepsilon_{i_1,j,k}}{1 + \frac{\sigma_{i_1,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i_1,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{H_{y,inc}\Big|_{i_1+1/2,j,k}^{n}}{\Delta x} \right). \qquad (3.71)$$

ขอบเขตด้านหน้า ณ พิกัด $\left(i = i_1 + \frac{1}{2};\ j = j_0 + \frac{1}{2},\ldots,j_1 - \frac{1}{2};\ k = k_0,\ldots,k_1 \right)$

$$H_z\Big|_{i_1+1/2,j,k}^{n+1/2} = \left\{ H_z\Big|_{i_1+1/2,j,k}^{n+1/2} \right\} - \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i_1+1/2,j,k}} \right) \cdot \left(\frac{E_{y,inc}\Big|_{i_1,j,k}^{n}}{\Delta x} \right). \qquad (3.72)$$

ขอบเขตด้านหน้า ณ พิกัด $\left(i = i_1 + \frac{1}{2};\ j = j_0,\ldots,j_1;\ k = k_0 + \frac{1}{2},\ldots,k_1 - \frac{1}{2} \right)$

$$H_y\Big|_{i_1+1/2,j,k}^{n+1/2} = \left\{ H_y\Big|_{i_1+1/2,j,k}^{n+1/2} \right\} + \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i_1+1/2,j,k}} \right) \cdot \left(\frac{E_{z,inc}\Big|_{i_1,j,k}^{n}}{\Delta x} \right). \qquad (3.73)$$

ในสมการที่ (3.50) ถึง (3.73) ทางด้านขวามือ สนาม E_x, E_y, E_z, H_x, H_y และ H_z หาได้จากสมการที่ (2.19) ถึง (2.24) ตามลำดับ ส่วนสนามตกกระทบ $E_{x,inc}, E_{y,inc}, E_{z,inc}, H_{x,inc}, H_{y,inc}$ และ $H_{z,inc}$ ในทุกๆ พิกัดตำแหน่งและทุกๆ ลำดับขั้นเวลาเป็นสนามที่รู้ค่า (ในสมการ ลำดับขั้นทางเวลาระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กไม่ได้แสดงอย่างมีความเกี่ยวเนื่องกัน).

3.3 วิธีการปรับมาตราความถี่

การใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลาคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่ำโดยตรง ใช้เวลาในการคำนวณนาน โดยเฉพาะเมื่อแบบจำลองมีความละเอียดสูงๆ. การคำนวณจึงไม่สามารถกระทำได้โดยตรงกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่ 50 เฮิรตซ์ เนื่องจากเวลาที่ใช้มากเกินกว่าที่จะทำได้ในทางปฏิบัติ. สำหรับการคำนวณในทางปฏิบัติ วิทยานิพนธ์นี้ได้คำนวณหาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ความถี่สูงก่อน แล้วจึงปรับค่าสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำมายังความถี่ต่ำด้วยวิธีการปรับมาตราความถี่.

วิธีการปรับมาตราความถี่อาศัยภาวะสนามคล้ายสถิต (Quasi-Static Field) โดยวิธีนี้สามารถใช้ได้เมื่อขนาดของแบบจำลองที่ศึกษาเล็กกว่าความยาวคลื่นอย่างน้อย 10 เท่า และ

สภาพนำ σ สภาพยอม ε ของแบบจำลองเป็นไปตามเงื่อนไข $\|\sigma + \mathbf{j}\omega\varepsilon\| \gg \omega\varepsilon_0$ [10, 14]. จากภาวะดังกล่าว สนามไฟฟ้าภายในอากาศจะตั้งฉากกับแบบจำลอง ดังนั้นสนามไฟฟ้าภายในแบบจำลองสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตของสนามไฟฟ้าที่ผิวของแบบจำลองดังนี้.

$$\mathbf{j}\omega\varepsilon_0\vec{n}\cdot\vec{E}_{air} = \left(\sigma + \mathbf{j}\omega\varepsilon\right)\vec{n}\cdot\vec{E}_{model} \tag{3.74}$$

โดย $\vec{n}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิวของแบบจำลอง และ

ω คือความเร็วเชิงมุม(rad/s) เมื่อ

ดรรชนีล่าง *model* และ *air* ระบุภายในแบบจำลองและภายในอากาศตามลำดับ.

จากสมการที่ (3.74) เราสามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างสนามที่ความถี่ต่ำและสนามที่ความถี่สูงได้เป็น

$$\vec{E}^{l}_{model} = \frac{\omega^{l}}{\omega^{h}}\frac{(\sigma^{h} + \mathbf{j}\omega^{h}\varepsilon^{h})}{(\sigma^{l} + \mathbf{j}\omega^{l}\varepsilon^{l})}\vec{E}^{h}_{model} \approx \frac{f^{l}\sigma^{h}}{f^{h}\sigma^{l}}\vec{E}^{h}_{model} \tag{3.75}$$

โดย f คือความถี่(Hz) เมื่อ

ดรรชนีบน l และ h ระบุความถี่ต่ำและสูง ตามลำดับ.

ในทางปฏิบัติได้กำหนดให้พิจารณาค่า σ ที่ความถี่สูงเท่ากับค่า σ ที่ความถี่ต่ำ และค่า ε_r ในแบบจำลองมีค่าเท่ากับ 1 เนื่องจาก $\sigma \gg \omega\varepsilon$ จึงไม่ส่งผลกระทบต่อการคำนวณ. สมการที่ (3.75) สามารถเขียนใหม่ได้

$$\vec{E}^{l}_{model} = \frac{f^{l}}{f^{h}}\vec{E}^{h}_{model}\,. \tag{3.76}$$

สมการที่ (3.76) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามความถี่ต่ำและสนามความถี่สูงเป็นไปตามสัดส่วนของความถี่สูงที่ใช้คำนวณและความถี่ต่ำที่พิจารณา.

บทที่ 4

แบบจำลองศีรษะมนุษย์

บทนี้กล่าวถึงข้อมูลและแบบจำลองของศีรษะมนุษย์ที่ใช้ในการคำนวณ. เนื้อหาส่วนแรกกล่าวถึงที่มาและรายละเอียดของข้อมูล ต่อจากนั้นจะเป็นการสร้างแบบจำลองในการคำนวณ.

4.1 ข้อมูลของศีรษะมนุษย์

ข้อมูลของศีรษะมนุษย์ประกอบด้วยข้อมูลทางกายวิภาคศาสตร์และข้อมูลคุณสมบัติทางไฟฟ้าของอวัยวะต่างๆ ในศีรษะมนุษย์.

4.1.1 แหล่งที่มาของข้อมูล

วิทยานิพนธ์นี้ใช้ข้อมูลทางกายวิภาคศาสตร์จาก Visible Human Project (VHP) ของ National Library Medicine (NLM) ประเทศสหรัฐอเมริกา[17]. สำหรับข้อมูลคุณสมบัติทางไฟฟ้าของอวัยวะต่างๆ ในศีรษะมนุษย์ วิทยานิพนธ์นี้ใช้ข้อมูลจากสถาบันฟิสิกส์ประยุกต์ (Institute for Applied Physics) ของสภาวิจัยแห่งชาติอิตาลี (Italian National Research Council)[24].

4.1.2 รายละเอียดของข้อมูล

ข้อมูลทางกายวิภาคศาสตร์ที่ได้จาก VHP ของ NLM เป็นของศีรษะมนุษย์เพศหญิงที่มีรายละเอียดสมบูรณ์และความละเอียดทางกายวิภาคสูง. ลักษณะของข้อมูลเป็นภาพสี และแสดงภาคตัดขวางตามแนวระดับที่ความละเอียดระหว่างภาคตัดขวางเท่ากับ 1/3 มิลลิเมตร. ตัวอย่างภาคตัดขวางบางภาพแสดงในรูปที่ 4.1. สำหรับชื่ออวัยวะต่างๆ ในภาพทั้งหมดได้รับข้อมูลจากแพทย์และเว็บไซต์ของคณะแพทย์ศาสตร์ มหาวิทยาลัยฟลอริดา[25].

ข้อมูลของคุณสมบัติทางไฟฟ้าของอวัยวะต่างๆ ในศีรษะมนุษย์ที่ได้จากเอกสารอ้างอิง[24] ประกอบด้วยสภาพนำ(S/m), สภาพยอมสัมพัทธ์ และแทนเจนต์การสูญเสีย ตั้งแต่ความถี่ 10 Hz ถึง 100 GHz. คุณสมบัติทางไฟฟ้าของแบบจำลองที่ใช้ในการคำนวณ ได้แก่สภาพนำและสภาพยอมสัมพัทธ์. สำหรับการคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้ เราได้กำหนดให้สภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 1 ทั้งหมด เนื่องจาก $\sigma \gg \omega\varepsilon$ จึงไม่ส่งผลกระทบต่อการคำนวณ (ในหัวข้อที่ 3.3 ของบทที่ 3). ดังนั้นคุณสมบัติทางไฟฟ้าของแบบจำลองในการคำนวณใช้เฉพาะสภาพนำ.

วิทยานิพนธ์นี้ใช้อวัยวะต่างๆ ในศีรษะมนุษย์ทั้งหมด 43 อวัยวะ โดยสภาพนำของอวัยวะเหล่านี้ที่ความถี่ 50 เฮิรตซ์ แสดงในตารางที่ 4.1.

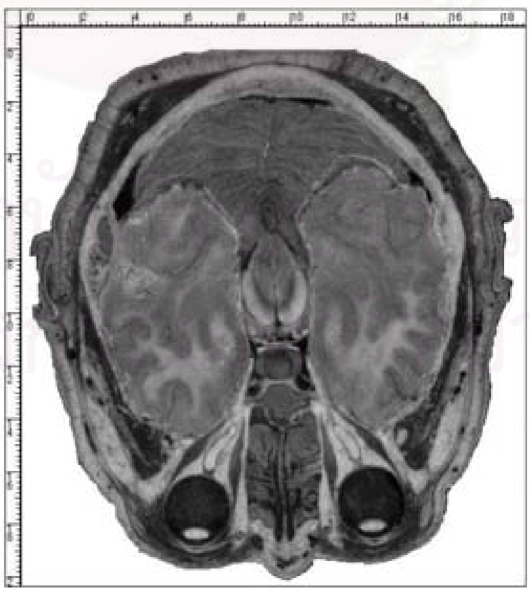
4.2 การสร้างแบบจำลองในการคำนวณ

การสร้างแบบจำลองเพื่อนำไปคำนวณจะแบ่งเป็นการทำฐานข้อมูลจากข้อมูลในหัวข้อ 4.1 และการนำฐานข้อมูลมาสร้างแบบจำลองศีรษะในการคำนวณด้วยวิธี FDTD.

4.2.1 การทำฐานข้อมูลของอวัยวะต่าง ๆ ในศีรษะมนุษย์

การทำฐานข้อมูลคือการนำข้อมูลของอวัยวะต่างๆ ในศีรษะมนุษย์ของภาพแต่ละภาคตัดขวาง (จากหัวข้อ 4.1.2) มาทำเป็นรหัสตัวเลข และเก็บในรูปแบบของไฟล์คอมพิวเตอร์. ขั้นตอนการทำฐานข้อมูลประกอบด้วย

1) กำหนดจุดในภาพภาคตัดขวางแต่ละภาพ โดยจุดแต่ละจุดมีระยะห่างตามแนวกว้างและแนวยาวของภาพเท่ากับ 2 มิลลิเมตร,
2) กำหนดตัวเลขในจุดแต่ละจุดเป็นตัวแทนชื่อและค่าคุณสมบัติทางไฟฟ้าของอวัยวะที่อยู่ ณ จุดนั้น และ
3) ใช้ความละเอียดของระยะห่างระหว่างภาคตัดขวางเท่ากับ 2 มิลลิเมตร โดยจะมีจำนวนภาพของภาคตัดขวางที่ใช้ทั้งหมดเท่ากับ 126 ภาพ.



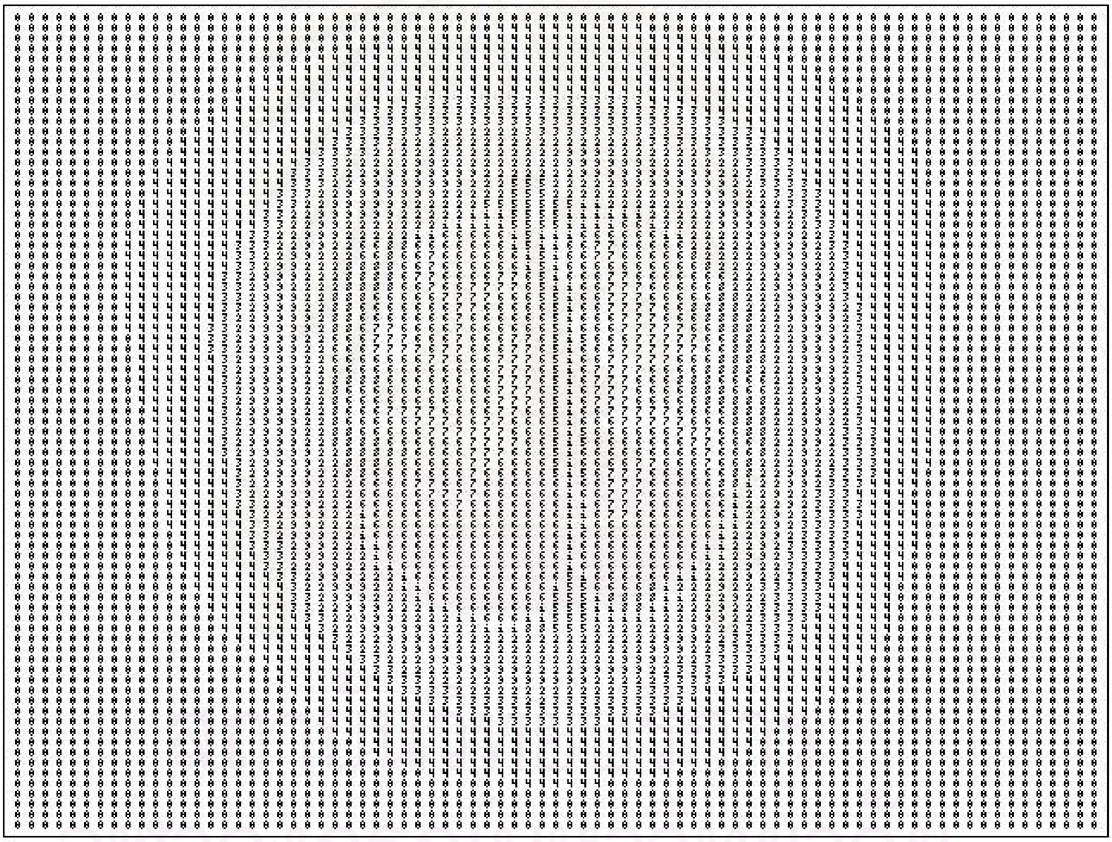
รูปที่ 4.1 ภาพภาคตัดขวางของศีรษะมนุษย์จาก VHP (แสดงแบบสเกลสีเทา)

ตารางที่ 4.1 สภาพนำของอวัยวะต่างๆ ในศีรษะมนุษย์(ที่ความถี่ 50 เฮิรตซ์)[24]

ชื่ออวัยวะ	σ (S/m)
กลุ่มอากาศ : ช่องชั้นเนื้อเยื่อหุ้มสมอง, ช่องข้างสมอง, ช่องรูพรุน, โพรงขากรรไกร, ช่องรูหู และ frontalsinus	0
กลุ่มหลอดเลือด : หลอดเลือดดำรูปคันธนู, หลอดเลือดดำในสมอง และหลอดเลือดแดง	0.2611
กระดูกฟองน้ำ	0.0807
กลุ่มเปลือกกระดูก : เพดานปาก, กระดูกสันหลัง, กระดูกแก้ม และกระดูกขากรรไกร	0.02005
กลุ่มสมองส่วนสีเทา : caudate nucleus, thalamus และputamen	0.07526
สมองส่วนสีขาว	0.05327
กลุ่มกระดูกอ่อน : กระดูกอ่อนต่อมไทรอยด์ และกระดูกอ่อนคร่อมกล่องเสียง	0.1714
สมองน้อย	0.09526
เยื่อหุ้มสมองดูรา	0.5027
เปลือกตาชั้นนอก	0.5027
ไขมัน	0.01955
กลุ่มต่อม : ต่อมใต้สมองพิทุอิทารี	0.08273
แก้วตา	0.3214
กลุ่มกล้ามเนื้อ : กล้ามเนื้อขมับ และกล้ามเนื้อรอบตา	0.2333
หลอดอาหาร	0.5214
กลุ่มผิวหนัง : เนื้อเยื่อ, เนื้อเยื่อเมมเบรนหุ้มกระดูก, เนื้อเยื่อใต้ผิวหนัง, หู และผนังและอุ้งรูจมูก	0.0004272
ไขสันหลัง	0.0247
ลิ้น	0.2714
ฟัน	0.02005
หลอดลม	0.3005
ของเหลวคล้ายวุ้น	1.5
เส้นประสาท : เส้นประสาทตา	0.0274

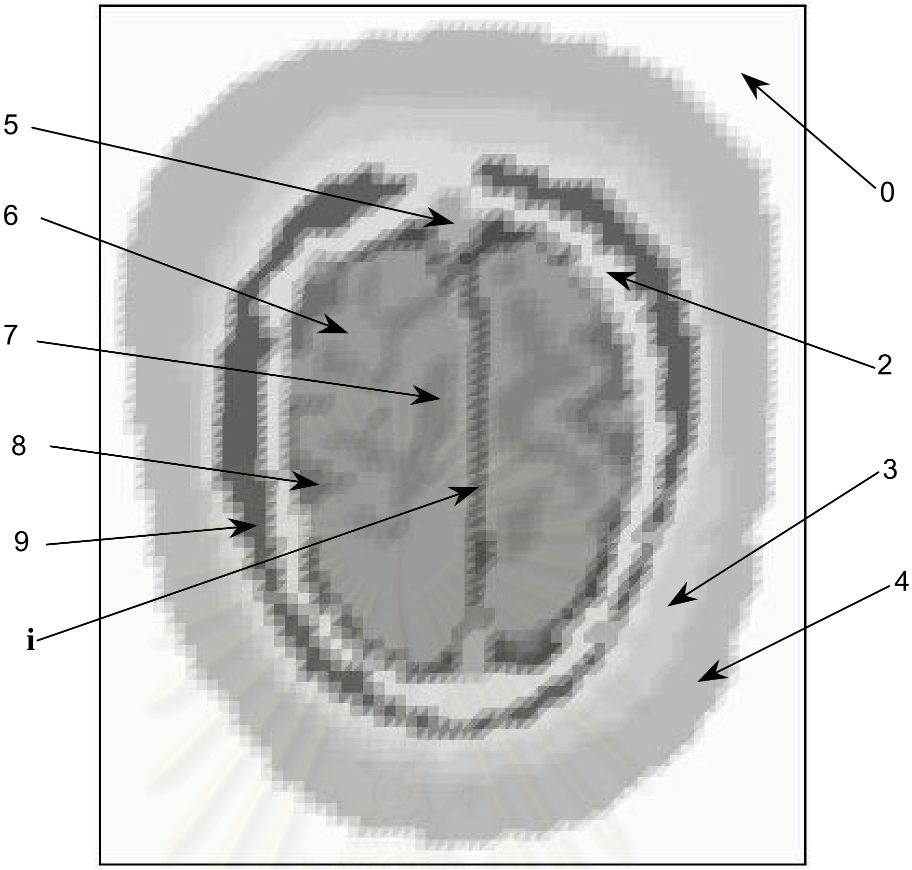
เมื่อเรานำฐานข้อมูลของแต่ละภาคตัดขวางมาซ้อนกันตามแนวดิ่ง จะได้ฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์ 3 มิติซึ่งมีลักษณะเป็นกริดเรียงกันตามระบบพิกัดคาร์ทีเซียนที่ความละเอียด $2\times2\times2$ มิลลิเมตร.

รูปที่ 4.2 แสดงตัวอย่างฐานข้อมูลของภาคตัดขวางหนึ่ง โดยกำหนดสัญลักษณ์แทนอวัยวะดังนี้ 0 คืออากาศ, 1 คือผิวหนัง(skin), 2 คือกระดูกชั้นนอก(cortex of skull), 3 คือเนื้อเยื่อเมมเบรนหุ้มกระดูก(periosteum), 4 คือเนื้อเยื่อใต้ผิวหนัง(subcutaneous tissue), 5 คือโพรง(sinus), 6 คือสมองส่วนสีเทา(gray matter), 7 คือสมองส่วนสีขาว(white matter), 8 คือช่วงชั้นใต้เยื่อหุ้มสมอง(subarachnoid space), 9 คือกระดูกชั้นกลาง(medulla of skull) และ i คือเยื่อหุ้มสมองชั้นดูรา(dura matter).

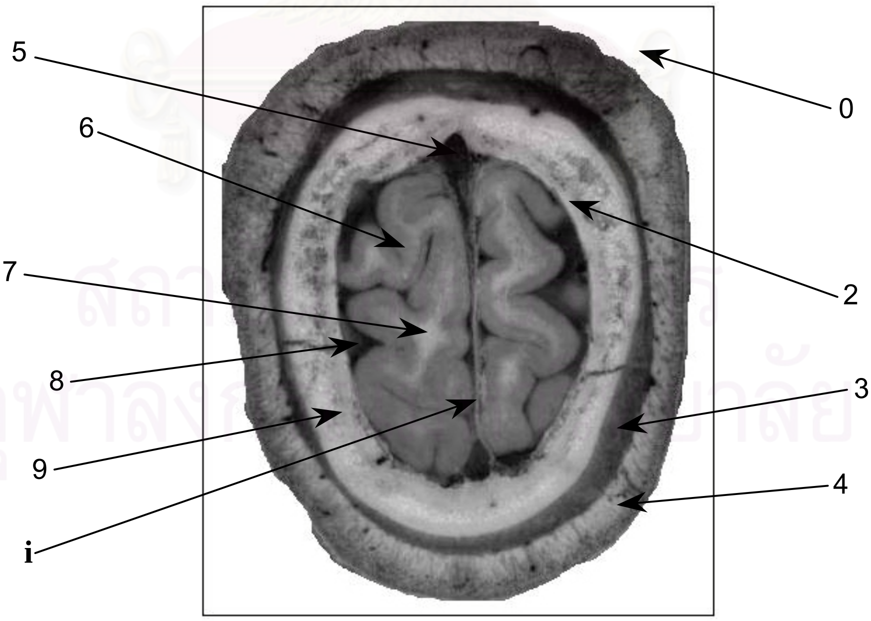


รูปที่ 4.2 ตัวอย่างฐานข้อมูลของภาคตัดขวาง

เมื่อนำฐานข้อมูลในรูปที่ 4.2 มาแสดงด้วยภาพสเกลสีเทา พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับภาพจริงได้ดังรูปที่ 4.3.



(ก) ภาพสเกลสีเทาจากฐานข้อมูลในภาคตัดขวางของรูปที่ 4.2



(ข) ภาพภาคตัดขวางจริงสำหรับรูปที่ 4.3 (ก)

รูปที่ 4.3 ภาพสเกลสีเทาจากฐานข้อมูลและภาพจริงในภาคตัดขวางหนึ่ง

สำหรับกรณีที่จำนวนและความซับซ้อนของอวัยวะมีมากขึ้นเช่นภาพภาคตัดขวางในรูปที่ 4.1 ภาพสเกลสีเทาจากฐานข้อมูลในรูปที่ 4.1 แสดงได้ดังรูปที่ 4.4.

รูปที่ 4.4 ภาพสเกลสีเทาจากฐานข้อมูลของภาคตัดขวางในรูปที่ 4.1

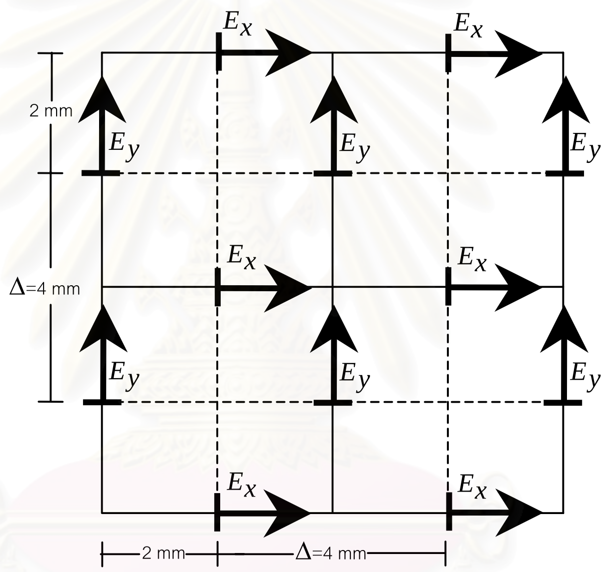
เนื่องจากฐานข้อมูลที่สร้างขึ้นมีความละเอียดน้อยกว่าข้อมูลจริงทางกายภาพ ดังนั้นภาพสเกลสีเทาจากฐานข้อมูลของแบบจำลองศีรษะมนุษย์จึงมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้างเมื่อเปรียบเทียบกับภาพของศีรษะมนุษย์จริง.

4.2.2 **การสร้างแบบจำลองศีรษะมนุษย์ในการคำนวณด้วยวิธี** FDTD

การนำฐานข้อมูลมาสร้างเป็นแบบจำลองเพื่อใช้คำนวณสามารถทำได้ 2 วิธีคือ วิธีการนำฐานข้อมูลเข้าไปคำนวณโดยตรง และวิธีการเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลก่อนนำไปคำนวณ.

<u>วิธีการนำฐานข้อมูลเข้าไปคำนวณโดยตรง</u>

วิธีนี้เป็นการกำหนดตำแหน่งที่สนใจ (ตำแหน่งที่ต้องการหาสนาม) บนจุดซึ่งได้กำหนดรหัสตัวเลขของฐานข้อมูลไว้. เนื่องจากในการคำนวณด้วยวิธี FDTD ตามขั้นตอนวิธีของยี ตำแหน่งสนามอยู่เยื้องกันตามรูปที่ 2.1 ในบทที่ 2 ดังนั้นระยะห่างระหว่างตำแหน่งของสนามชนิดเดียวกัน หรือ Δ มีขนาดเป็น 2 เท่าของความละเอียดของฐานข้อมูล. วิทยานิพนธ์นี้ใช้ฐานข้อมูลที่ความละเอียด 2 มิลลิเมตร (ตามหัวข้อ 4.2.1) ทำให้ Δ ในการคำนวณมีขนาด 4 มิลลิเมตรตามรูปที่ 4.5 โดยจุดตัดของเส้นตารางคือตำแหน่งของรหัสตัวเลขในฐานข้อมูล (เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ จึงแสดงเฉพาะสนามไฟฟ้าในรูป 2 มิติ). สังเกตว่า ความละเอียดของข้อมูลที่นำมาใช้จากฐานข้อมูลมีขนาด 4 มิลลิเมตร.



รูปที่ 4.5 ตำแหน่งสนามไฟฟ้าในฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์

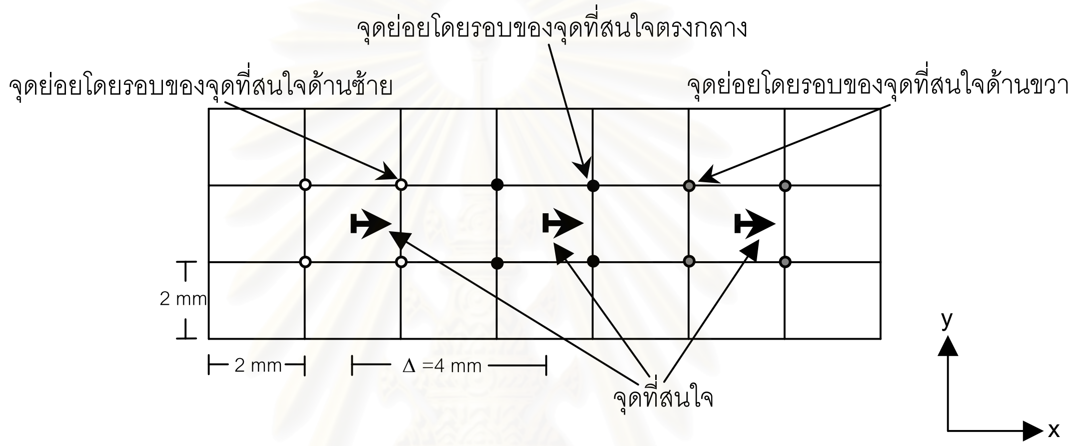
<u>วิธีการเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ ในฐานข้อมูล</u>

เนื่องจากการนำฐานข้อมูลเข้าไปคำนวณโดยตรง ข้อมูลที่นำมาใช้จากฐานข้อมูลมีความละเอียดที่หยาบขึ้นตามขนาด Δ ซึ่งมีขนาดเป็น 2 เท่าของความละเอียดของฐานข้อมูล (ดังที่กล่าวมาแล้วด้านบน). วิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ ในฐานข้อมูล เพื่อให้ข้อมูลที่จะนำมาใช้จากฐานข้อมูลมีความละเอียดมากขึ้น (เท่ากับความละเอียดของฐานข้อมูลที่มีอยู่). วิธีนี้กำหนดค่าสภาพนำที่จุดบนกริด โดยเฉลี่ยค่าสภาพนำของจุดย่อย (จากฐานข้อมูล) บนกริดโดยรอบจุดที่เราสนใจ.

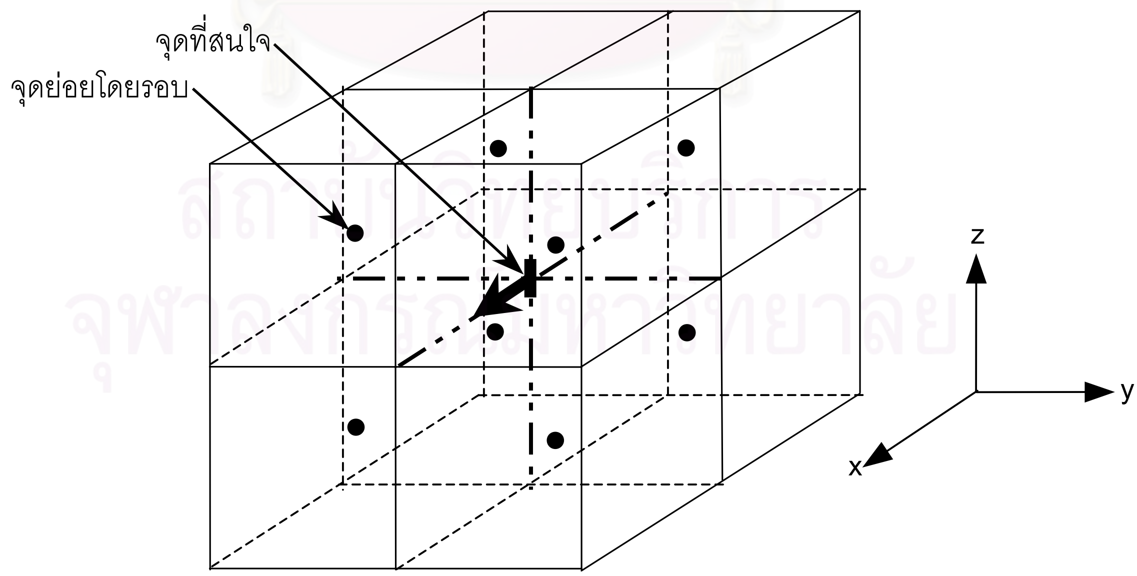
วิทยานิพนธ์นี้ทดลองกำหนด Δ เท่ากับ 4 มิลลิเมตร โดยใช้ค่าเฉลี่ยจากจุดย่อย 8 จุดโดยรอบตามลำดับ เมื่อกริดของจุดย่อยเหล่านี้อยู่ตำแหน่งในลักษณะดังรูปที่ 4.6 และ 4.7 สำหรับ

ภาพ 2 และ 3 มิติตามลำดับ. จากรูปที่ 4.6 ข้อมูลที่ใช้จากฐานข้อมูล (หรือข้อมูลที่นำมาเฉลี่ย) มีความละเอียด 2 มิลลิเมตร ขณะที่การนำฐานข้อมูลมาใช้โดยตรงตามรูปที่ 4.5 ข้อมูลที่ใช้จากฐานข้อมูลมีความละเอียด 4 มิลลิเมตร.

หลักการเฉลี่ยค่าสามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 4.7 คือ การกำหนดให้จุดที่สนใจเป็นตัวแทนของบริเวณลูกบาศก์ใหญ่. ลูกบาศก์ใหญ่ประกอบด้วยลูกบาศก์ย่อยทั้งหมด 8 ลูก โดยกำหนดจุดย่อยแต่ละจุดที่อยู่ ณ จุดศูนย์กลางของลูกบาศก์ย่อยแต่ละลูก เป็นตัวแทนของบริเวณลูกบาศก์ย่อยเหล่านั้น. ข้อมูล (สภาพนำ) ในจุดย่อยแต่ละจุดได้จากฐานข้อมูลซึ่งมีความละเอียดเท่ากับ 2 มิลลิเมตร.



รูปที่ 4.6 ตำแหน่งจุดสนใจและจุดย่อยที่ใช้เฉลี่ยในกรณี Δ เท่ากับ 4 มิลลิเมตร(2 มิติ)



รูปที่ 4.7 ตำแหน่งจุดสนใจและจุดย่อยที่ใช้เฉลี่ยในกรณี Δ เท่ากับ 4 มิลลิเมตร(3 มิติ)

บทที่ 5

ผลการคำนวณในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม

บทนี้กล่าวถึงผลการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่ 50 Hz ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องโดเมนเวลา ภายในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม. แบบจำลองที่ใช้เป็นแบบจำลองอย่างง่ายได้แก่ทรงกระบอก 1 ชั้น, ทรงกลม 1 ชั้น, ทรงกระบอกซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม, ทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม, ทรงกระบอกซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน และทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน. การพิจารณาความแม่นยำ ทำโดยเทียบผลการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงและกับผลการคำนวณด้วยวิธีชิ้นประกอบขอบเขต.

5.1 ลักษณะของสนามที่แบบจำลองได้รับและขั้นตอนการคำนวณ

แบบจำลองได้รับสนามแม่เหล็ก H_z ขนาด 1/377 A/m, ความถี่ 50 Hz. ขั้นตอนการคำนวณคือ ป้อนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า E_y และ H_z ซึ่งเคลื่อนที่ตามทิศ $+\mathrm{X}$ และ สนามแม่เหล็กไฟฟ้า $-E_y$ และ H_z ซึ่งเคลื่อนที่ตามทิศ $-\mathrm{X}$ เข้าสู่แบบจำลอง. จากกรณีนี้ ภายในแบบจำลองจะเกิดสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ $\vec{E}_{IND}$ จากสนามแม่เหล็กภายนอกขนาด $2H_z$ เท่านั้น. เนื่องจาก $\vec{E}_{IND}$ มีความถี่ต่ำ ดังนั้นการเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กจาก $\vec{E}_{IND}$ จึงไม่ถูกพิจารณา. ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ $\vec{J}_{IND}$ คำนวณได้จาก

$$\vec{J}_{IND} = \sigma \vec{E}_{IND} . \qquad (5.1)$$

วิทยานิพนธ์นี้ได้คำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ความถี่ 6 MHz, 10 MHz และ 20 MHz จากนั้นจึงปรับค่าคำตอบมาที่ 50 Hz ด้วยวิธีปรับมาตราความถี่.

5.2 แบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้น

5.2.1 ลักษณะของแบบจำลอง

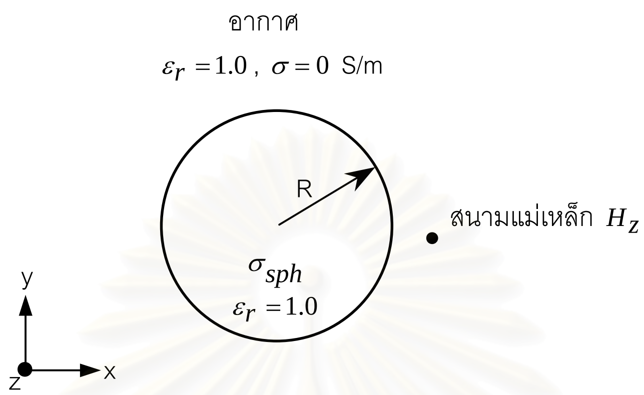
แบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0,0) วางอยู่ในอากาศภายใต้สนามแม่เหล็ก H_z ดังรูปที่ 5.1.

รายละเอียดของแบบจำลองประกอบด้วย

- รัศมี R เท่ากับ 15 cm,
- สภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 1.0 และ

- สภาพนำ σ_{sph} ของทรงกระบอกและทรงกลมมีค่าเท่ากับ 0.01, 0.05, 0.25, 0.75, 1.25 และ 1.5 S/m.

การคำนวณทำในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งกริดมีระยะห่างกัน 3 cm.



รูปที่ 5.1 แบบจำลองทรงกระบอกหรือทรงกลม 1 ชั้นภายใต้สนามแม่เหล็ก H_z

5.2.2 ค่าคำตอบจากผลเฉลยแม่นตรง

สนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่กำลังซึ่งเกิดจากสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นไปตามกฎของฟาราเดย์. สนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีทิศทางขนานกับและเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับระนาบที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กที่ได้รับ. ผลเฉลยแม่นตรงของขนาดสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบของแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้นซึ่งตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กที่ได้รับคือ

$$E_{IND} = \pi fBr \tag{5.2}$$

โดย f คือความถี่ของสนามแม่เหล็ก(Hz)

B คือขนาดของสนามแม่เหล็ก(T)

r คือระยะห่างตามแนวรัศมีของวงกลม(m).

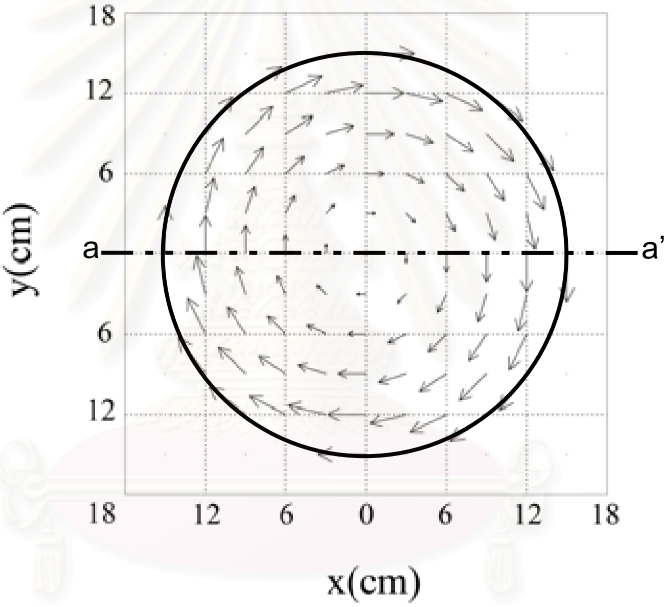
สมการที่ (5.2) แสดงว่าขนาดสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ $\vec{E}_{IND}$ แปรผันตามอัตราการเปลี่ยนแปลงตามเวลาหรือความถี่ของสนามแม่เหล็ก, ขนาดของสนามแม่เหล็ก และ ตำแหน่งหรือระยะห่างตามแนวรัศมี โดยสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมีของวงกลม. นอกจากนี้ลักษณะของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำยังแตกต่างกันไปตามลักษณะของระนาบที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กที่ได้รับของแบบจำลอง. เนื่องจากระนาบซึ่งตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กที่ได้รับของทั้ง

ทรงกระบอกและทรงกลมมีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้นสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมจึงมีลักษณะเหมือนกัน.

สำหรับแบบจำลองซึ่งมี $\sigma \neq 0$ สนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำนี้ยังทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ $\vec{J}_{IND}$ ตามสมการที่ (5.1) เคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกับสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ.

5.2.3 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลอง

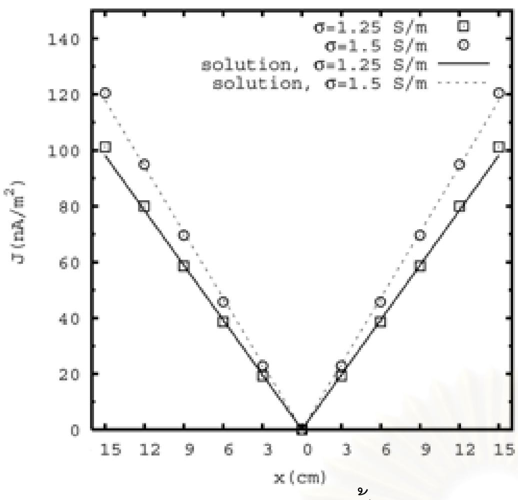
การคำนวณในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้น ได้ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่ 50 Hz บนระนาบ z=0 ของทรงกระบอกและของทรงกลมดังรูปที่ 5.2 เมื่อกำหนด σ_{sph}=1.5 S/m และคำนวณที่ความถี่ 6 MHz.



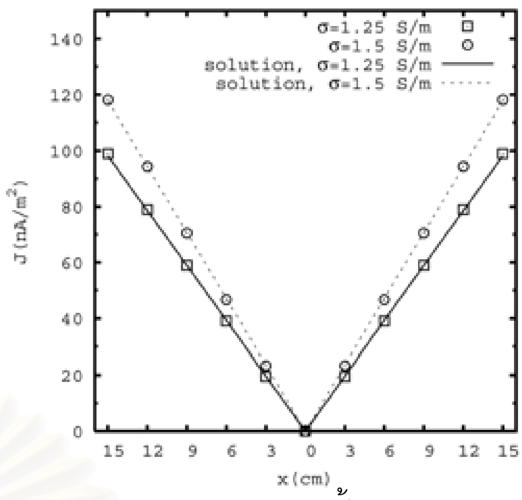
รูปที่ 5.2 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่ 50 Hz บนระนาบ z=0 ของทรงกระบอกหรือทรงกลม 1 ชั้นเมื่อ $\sigma = 1.5$ S/m และคำนวณที่ความถี่ 6 MHz

รูปที่ 5.2 แสดงว่ากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดเพิ่มขึ้นตามแนวรัศมีตามผลเฉลยแม่นตรง. ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำอยู่ในแนวเส้นรอบวงของวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม.

รูปที่ 5.3 แสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a' ในรูปที่ 5.2 เทียบกับผลเฉลยแม่นตรง เมื่อกำหนด $\sigma = 1.25$, 1.5 S/m และ คำนวณที่ความถี่ 6 MHz. จากรูปที่ 5.3 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตามแนวรัศมีและขึ้นอยู่กับ σ.



ก. ทรงกระบอก 1 ชั้น



ข. ทรงกลม 1 ชั้น

รูปที่ 5.3 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a’ ในรูปที่ 5.2 เทียบกับผลเฉลยแม่นตรง เมื่อกำหนด $\sigma = 1.25$, 1.5 S/m และ คำนวณที่ความถี่ 6 MHz

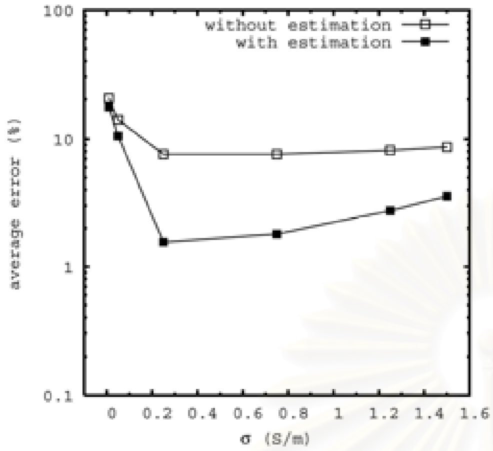
5.2.4 ความคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณ

ผลการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำถูกนำมาหาความคลาดเคลื่อน โดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง. นอกจากนี้ วิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองประมาณค่ากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่กริดบริเวณรอยต่อระหว่างผิวของแบบจำลองกับอากาศซึ่งเป็นบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูง โดยใช้วิธีประมาณค่านอกช่วงแบบเชิงเส้น เนื่องจากการกระจายของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น. รูปที่ 5.4 และ 5.5 แสดงความคลาดเคลื่อนของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบระหว่างกรณีไม่ใช้วิธีประมาณค่านอกช่วงกับกรณีใช้วิธีประมาณค่านอกช่วง.

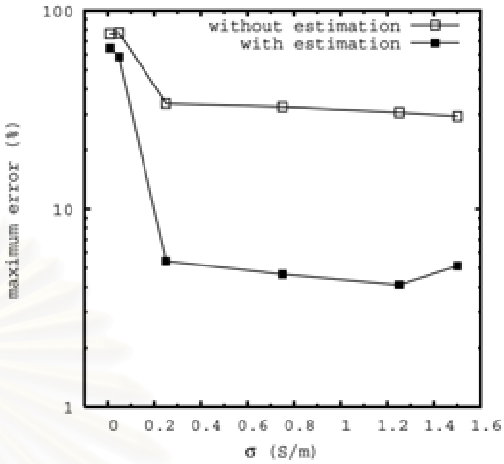
จากรูปที่ 5.4 และ 5.5 เราเห็นได้ว่าความคลาดเคลื่อนสามารถลดลงอย่างชัดเจน เมื่อใช้วิธีประมาณค่าในกรณีนี้. ความคลาดเคลื่อนมีแนวโน้มลดลงตามค่าสภาพนำที่ลดลง แต่เมื่อค่าสภาพนำลดลงจนถึงค่าหนึ่ง ความคลาดเคลื่อนจะกลับเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว โดยเฉพาะที่ค่าสภาพนำต่ำๆ ความคลาดเคลื่อนจะมีค่าสูง เนื่องจากสภาพเงื่อนไข [$|\sigma + \mathbf{j}\omega\varepsilon| \gg \omega\varepsilon_0$ (ในหัวข้อ 4.3 ของบทที่ 4)] ในการคำนวณไม่เป็นจริง.

จากรูปที่ 5.5 เราเห็นได้ว่าในช่วงของสภาพนำที่ยังไม่สูญเสียสภาพเงื่อนไขการคำนวณ เมื่อความถี่ที่ใช้ในการคำนวณมีขนาดสูงขึ้น ความคลาดเคลื่อนก็มีขนาดเพิ่มขึ้นด้วย เนื่องจากผลของปรากฏการณ์ทางผิว [ที่ความถี่ 2 MHz และ $\sigma = 1.5$ S/m ค่าความลึกผิว ($\delta = 29.05$ cm) มีค่าใกล้เคียงกับความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลางของแบบจำลอง (2R = 30 cm)]. นอกจากนี้ อัตราการ

เปลี่ยนแปลงความคลาดเคลื่อนมีขนาดสูงขึ้น (ความชันของเส้นกราฟมากขึ้น) และวิธีการประมาณค่าช่วยลดความคลาดเคลื่อนได้น้อยลง เมื่อความถี่ที่ใช้คำนวณมีขนาดสูงขึ้น.

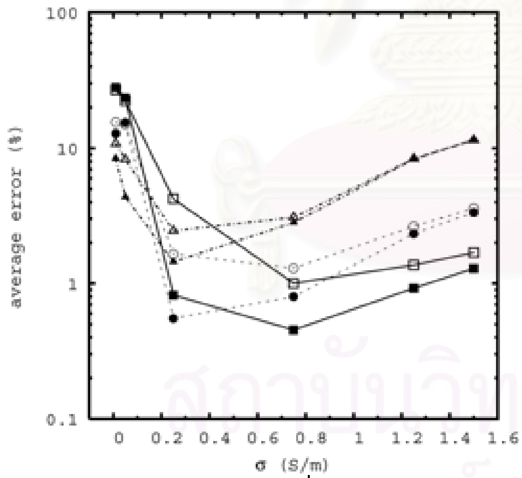


ก. ค่าเฉลี่ย

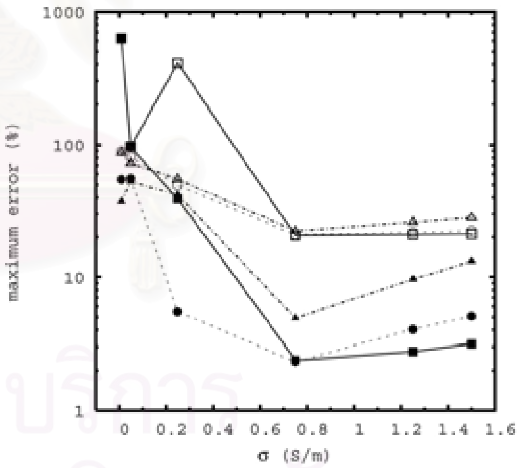


ข. ค่าสูงสุด

รูปที่ 5.4 ความคลาดเคลื่อนของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทรงกระบอก 1 ชั้น เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz



ก. ค่าเฉลี่ย



ข. ค่าสูงสุด

รูปที่ 5.5 ความคลาดเคลื่อนของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทรงกลม 1 ชั้น เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6, 10 และ 20 MHz

เมื่อ

—□— ; --○-- และ —△- คือคำนวณที่ความถี่ 6, 10 และ 20 MHz โดยไม่ใช้วิธีประมาณค่า และ

—■— ; --●-- และ —▲- คือคำนวณที่ความถี่ 6, 10 และ 20 MHz โดยใช้วิธีประมาณค่า.

5.3 แบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม

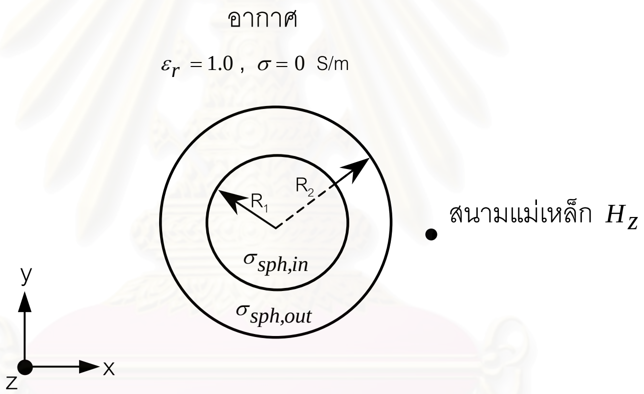
5.3.1 ลักษณะของแบบจำลอง

แบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0,0) มีรัศมีด้านในเท่ากับ R_1 และรัศมีด้านนอกเท่ากับ R_2 วางอยู่ในอากาศภายใต้สนามแม่เหล็ก H_Z ดังรูปที่ 5.6.

รายละเอียดของแบบจำลองประกอบด้วย

- R_1= 8 cm และ R_2= 16 cm,
- สภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 1.0,
- สภาพนำของวงกลมใน $\sigma_{sph,in}$ = 1.0 S/m และ
- สภาพนำของวงกลมนอก $\sigma_{sph,out}$ =1.5 S/m.

การคำนวณทำในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งกริดมีระยะห่างกัน 2 cm.



รูปที่ 5.6 แบบจำลองทรงกระบอกหรือทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม ภายใต้สนามแม่เหล็ก H_Z

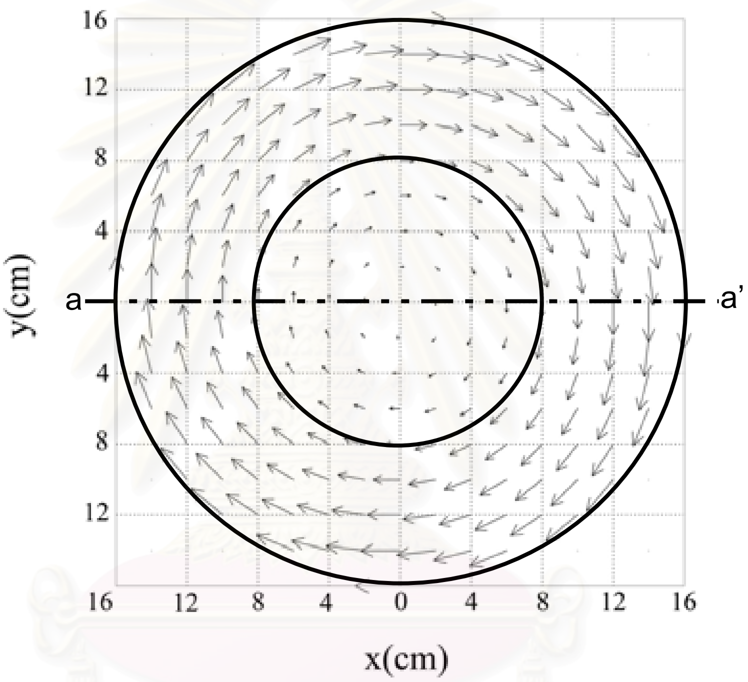
5.3.2 ค่าคำตอบจากผลเฉลยแม่นตรง

สำหรับกรณีแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม ทิศทางของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่บริเวณรอยต่อระหว่างวงกลมมีทิศขนานกับรอยต่อ. เมื่อพิจารณาร่วมกับเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่าสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่บริเวณรอยต่อมีความต่อเนื่อง. ดังนั้นผลเฉลยแม่นตรงของขนาดสนามไฟฟ้าเหนียวนำในกรณีนี้จึงเหมือนกับในกรณีแบบจำลอง 1 ชั้นตามสมการที่ 5.2. สำหรับกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในกรณีนี้ มีขนาดต่างจากในกรณีแบบจำลอง 1 ชั้น ตาม $\sigma_{sph,in}$ และ $\sigma_{sph,out}$.

5.3.3 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลอง

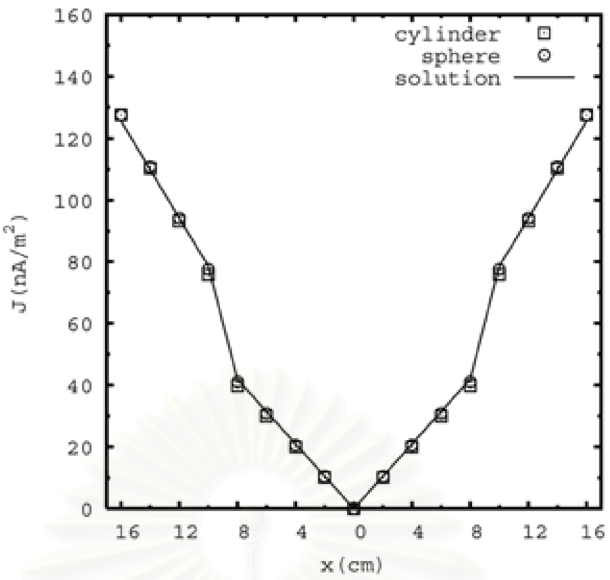
การคำนวณในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม ได้ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่ 50 Hz บนระนาบ z=0 ของทรงกระบอกและของทรงกลมดังรูปที่ 5.7 เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz.

รูปที่ 5.7 แสดงว่าทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในกรณีนี้เหมือนกับในกรณีทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้น แต่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำอย่างฉับพลันที่รอยต่อเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่าสภาพนำจาก $\sigma_{sph,in}$ เป็น $\sigma_{sph,out}$.



รูปที่ 5.7 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่ 50 Hz บนระนาบ z=0 ของทรงกระบอกหรือทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วมเมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz

รูปที่ 5.8 แสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a’ ในรูปที่ 5.7 เทียบกับผลเฉลยแม่นตรง. จากรูปที่ 5.8 แสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำอย่างฉับพลันที่รอยต่ออย่างชัดเจน. สังเกตว่า เมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 5.3 (กรณีแบบจำลอง 1 ชั้น) กับรูปที่ 5.8 (กรณีแบบจำลองซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม) พบว่าที่ระยะห่างตามแนวรัศมีเดียวกัน อัตราส่วนของขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำระหว่างในรูปที่ 5.3 กับในรูปที่ 5.8 เท่ากับอัตราส่วนของสภาพนำระหว่างในรูปที่ 5.3 กับในรูปที่ 5.8.



รูปที่ 5.8 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำของทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม ตามแนวเส้น a-a' ในรูปที่ 5.7 เทียบกับผลเฉลยแม่นตรง เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz

เนื่องจากขนาดสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำของทั้ง 2 กรณีนี้มีขนาดเท่ากันตามผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำของทั้ง 2 กรณีนี้จึงต่างกันตามสภาพนำของแต่ละกรณี. ในกรณีแบบจำลองซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำขึ้นอยู่กับทั้งตำแหน่งตามแนวรัศมีและสภาพนำเช่นเดียวกับในกรณีแบบจำลอง 1 ชั้น.

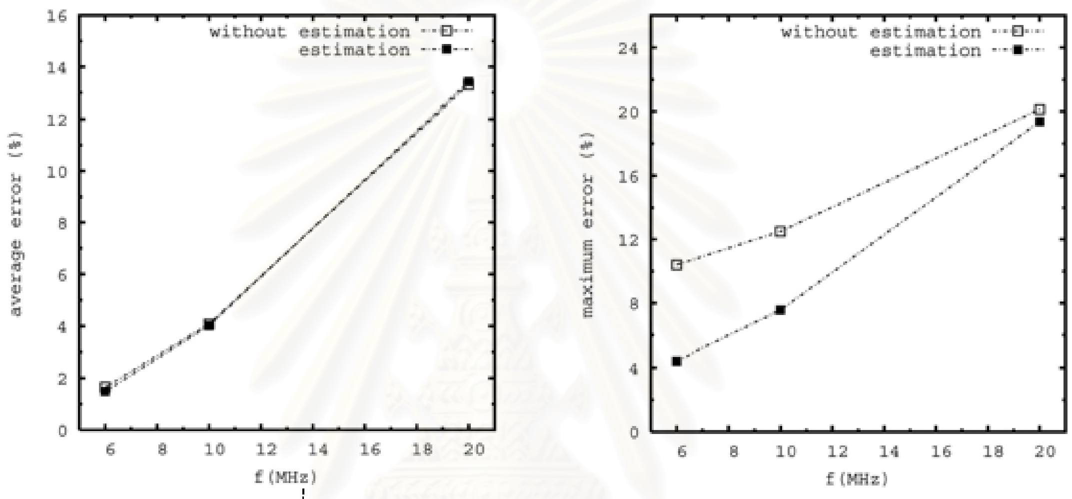
5.3.4 ความคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณ

ผลการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำถูกนำมาหาความคลาดเคลื่อน โดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง. นอกจากนี้ วิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองประมาณค่านอกช่วงกับกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่กริดบริเวณรอยต่อระหว่างวงกลมในและวงกลมนอก และบริเวณรอยต่อระหว่างผิววงกลมนอกกับอากาศซึ่งเป็นบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูง. วิธีการประมาณค่านอกช่วงเป็นแบบเชิงเส้นเช่นเดียวกับในหัวข้อ 5.2.4.

กรณีแบบจำลองทรงกระบอก เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz ถ้าไม่ใช้วิธีประมาณค่านอกช่วง ความคลาดเคลื่อนมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.816 % และค่าสูงสุดเท่ากับ 15.445 %. สำหรับกรณีที่ใช้วิธีประมาณค่านอกช่วง ความคลาดเคลื่อนมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.323 % และค่าสูงสุดเท่ากับ 6.765 %.

กรณีแบบจำลองทรงกลม ความคลาดเคลื่อนของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำเมื่อเปรียบเทียบระหว่างกรณีไม่ใช้วิธีประมาณค่านอกช่วงกับกรณีใช้วิธีประมาณค่านอกช่วง แสดงเป็นฟังก์ชันของความถี่ในรูปที่ 5.9.

จากรูปที่ 5.9 เราเห็นได้ว่าเมื่อความถี่สูงขึ้น ความคลาดเคลื่อนมีขนาดเพิ่มขึ้นซึ่งเป็นไปในลักษณะเดียวกันกับกรณีของทรงกลม 1 ชั้น. ค่าความคลาดเคลื่อนในทรงกระบอกและในรูปที่ 5.9 แสดงให้เห็นว่า วิธีประมาณค่านอกช่วงไม่สามารถช่วยลดความคลาดเคลื่อนได้อย่างชัดเจนในกรณีนี้. ดังนั้นวิธีประมาณค่านอกช่วงไม่สามารถลดความคลาดเคลื่อนในกรณีของทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วมได้ดีเท่ากับกรณีของทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้นเนื่องจากความซับซ้อนของแบบจำลองที่เพิ่มขึ้น.



ก. ค่าเฉลี่ย ข. ค่าสูงสุด

รูปที่ 5.9 ความคลาดเคลื่อนของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ
ในทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6, 10 และ 20 MHz

5.4 แบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน

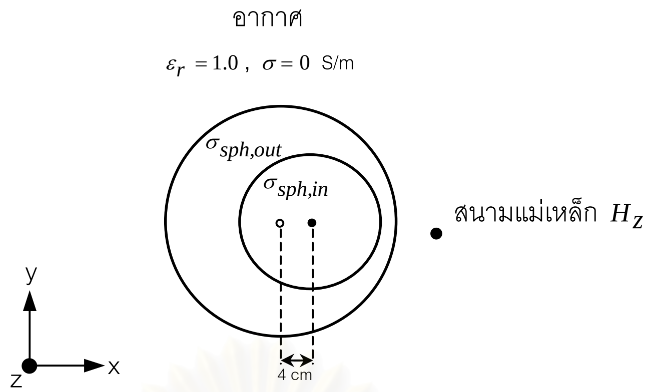
5.4.1 ลักษณะของแบบจำลอง

แบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมประกอบด้วยวงกลมในรัศมี R_1 และวงกลมนอกรัศมี R_2 วางอยู่ในอากาศภายใต้สนามแม่เหล็ก H_Z เหมือนกับกรณีแบบจำลองซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมในอยู่เยื้องจากจุดศูนย์กลางของวงกลมนอกไปทางแกน x เท่ากับ 4 cm ดังรูปที่ 5.10.

รายละเอียดของแบบจำลองประกอบด้วย

- สภาพนำของวงกลมใน $\sigma_{sph,in}$ มีค่าเท่ากับ 0.5 หรือ 2.0 S/m และ
- สภาพนำของวงกลมนอก $\sigma_{sph,out}$ มีค่าเท่ากับ 1.0 S/m.

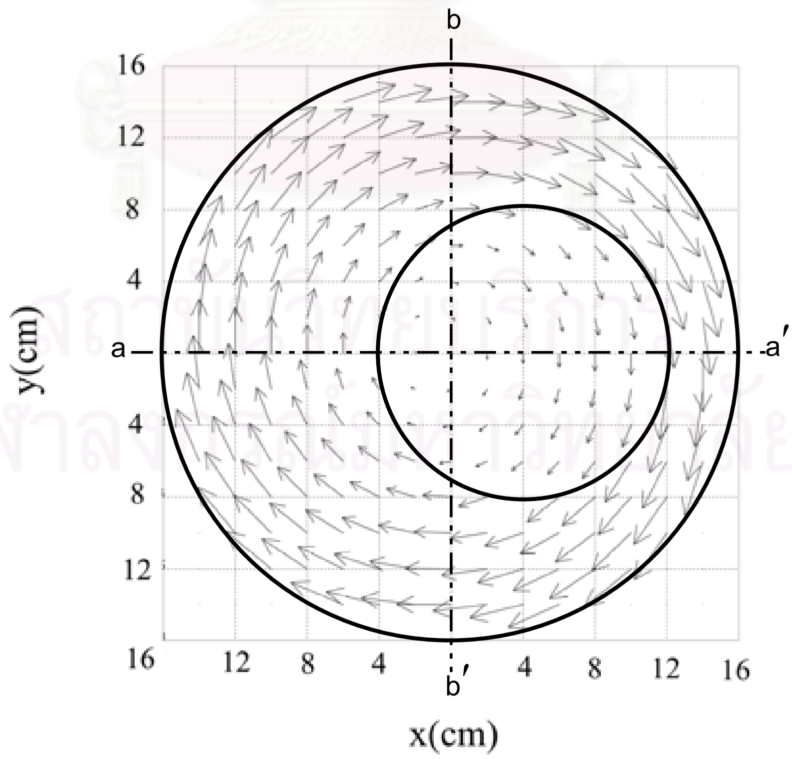
การคำนวณทำในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งกริดมีระยะห่างกัน 2 cm.



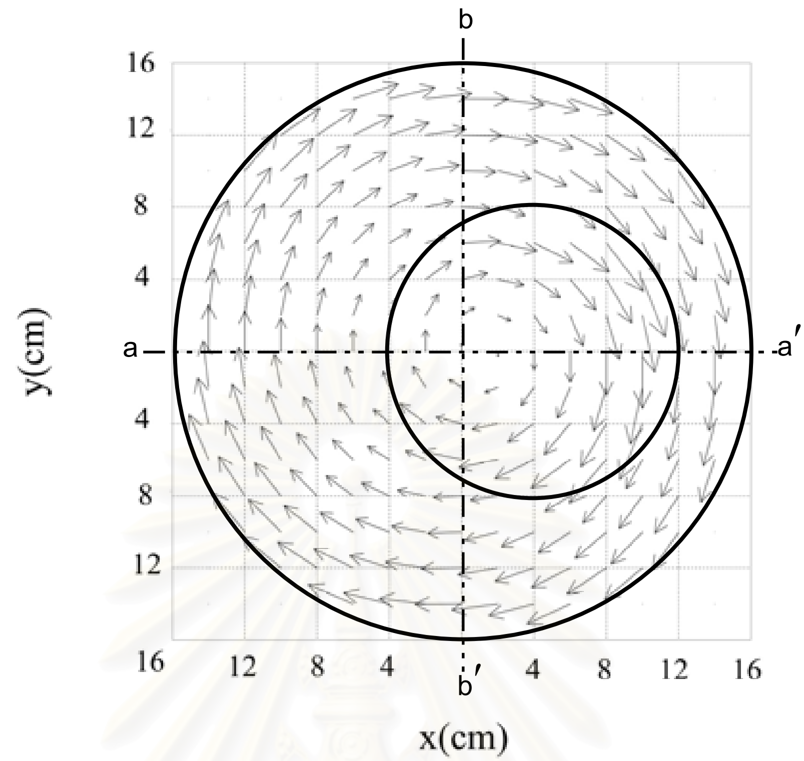
รูปที่ 5.10 แบบจำลองทรงกระบอกหรือทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน ภายใต้สนามแม่เหล็ก H_z

5.4.2 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลอง

การคำนวณในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน ได้ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่ 50 Hz บนระนาบ z=0 ของทรงกระบอกและของทรงกลม เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz ดังรูปที่ 5.11 เมื่อกำหนดให้ $\sigma_{sph,in}$ = 0.5 หรือ 2.0 S/m และ $\sigma_{sph,out}$ = 1.0 S/m.



ก. กรณี $\sigma_{sph,in} = 0.5$ S/m, $\sigma_{sph,out} = 1.0$ S/m

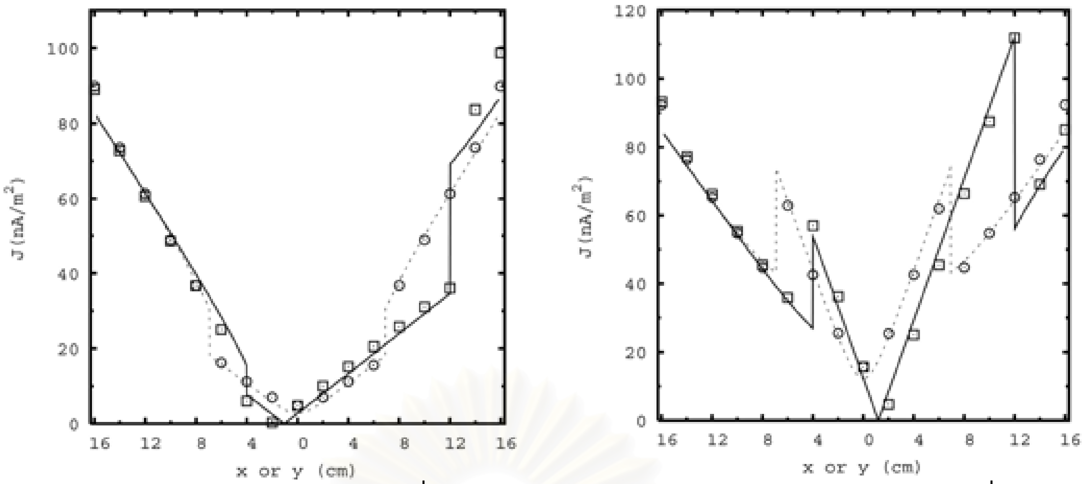


ข. กรณี $\sigma_{sph,in} = 2.0$ S/m และ $\sigma_{sph,out} = 1.0$ S/m

รูปที่ 5.11 ทิศทางและขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำความถี่ 50 Hz บนระนาบ z=0 ของทรงกระบอกหรือทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz

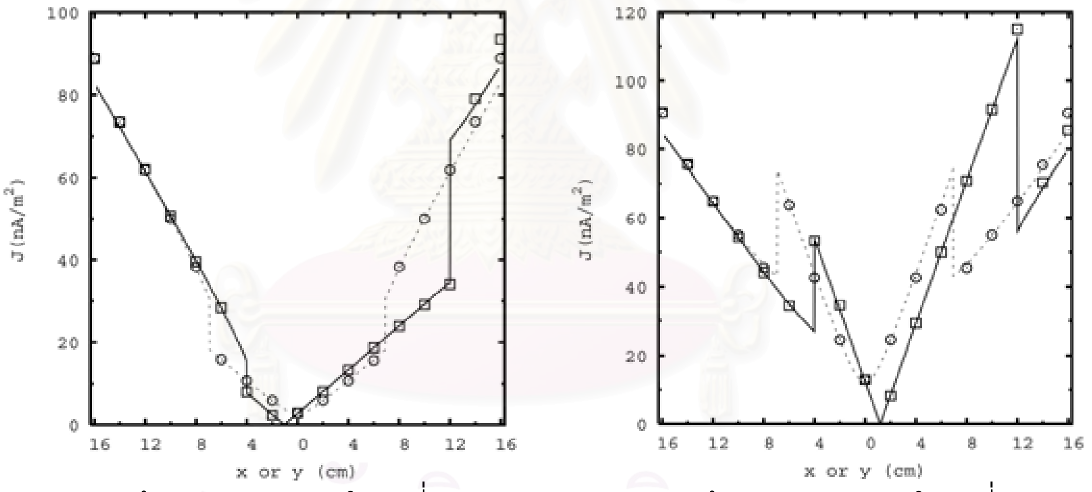
รูปที่ 5.11 แสดงให้เห็นถึงลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมมีความคล้ายคลึงกับกรณีแบบจำลอง 1 ชั้นและแบบจำลองซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม โดยขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำแปรตามสภาพนำและขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนแบบจำลอง. แต่เนื่องจากวงกลมลูกในกับลูกนอกวางตัวแบบไม่เป็นลักษณะสมมาตร ดังนั้นทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจึงมีแนวโน้มไหลเข้าสู่บริเวณที่มีค่าสภาพนำสูงกว่า.

รูปที่ 5.12 และ 5.13 แสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในรูปที่ 5.11 จากวิธี FDTD และจากวิธีชิ้นประกอบขอบเขต ในทรงกระบอกและทรงกลมตามลำดับ. ภาพ (ก) ในรูปที่ 5.11 แสดงให้เห็นว่ากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีแนวโน้มไหลเข้าสู่บริเวณขอบวงกลมนอกทางด้าน a’ โดยจากภาพ (ก) ในรูปที่ 5.12 และ 5.13 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่ากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดสูงสุดที่บริเวณใกล้กับจุด a’.



ก. บนแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในรูปที่ 5.11(ก)　　ข. บนแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในรูปที่ 5.11(ข)

รูปที่ 5.12 ขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำของทรงกระบอกซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz



ก. บนแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในรูปที่ 5.11(ก)　　ข. บนแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในรูปที่ 5.11(ข)

รูปที่ 5.13 ขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำของทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz

โดย

□ และ ○ คือบนแนวเส้น a-a’ และ b-b’ จากวิธี FDTD ตามลำดับ และ

—— และ ----- คือบนแนวเส้น a-a’ และ b-b’ จากวิธีชิ้นประกอบขอบเขต ตามลำดับ.

ในทำนองเดียวกัน ภาพ (ข) ในรูปที่ 5.11 แสดงให้เห็นว่ากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีแนวโน้มไหลเข้าสู่บริเวณขอบวงกลมในทางด้าน a’ โดยจากภาพ (ข) ในรูปที่ 5.12 และ 5.13 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่ากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดสูงสุดที่บริเวณขอบของวงกลมในทางด้านจุด a’.

นอกจากนี้ รูปที่ 5.12 และ 5.13 ยังแสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณด้วยวิธี FDTD มีความคลาดเคลื่อนจากผลการคำนวณด้วยวิธีชิ้นประกอบขอบเขตที่ขอบของแบบจำลองหรือบริเวณผิวโค้งเป็นส่วนใหญ่.

5.4.3 ความคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณ

ผลการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำถูกนำมาหาความคลาดเคลื่อน โดยการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธีชิ้นประกอบขอบเขต. สำหรับกรณีนี้ การใช้วิธีประมาณค่านอกช่วงแบบเชิงเส้นไม่เหมาะสม เนื่องจากการกระจายของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำไม่เป็นแบบเชิงเส้นดังแสดงในรูปที่ 5.12 และ 5.13. ความคลาดเคลื่อนของความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน แสดงในตารางที่ 1 และ 2 ตามลำดับ.

ตารางที่ 5.1 ความคลาดเคลื่อนของความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทรงกระบอกซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6 MHz

$\sigma_{sph,in}$ (S/m)	$\sigma_{sph,out}$ (S/m)	ความคลาดเคลื่อน (%)	
		ค่าเฉลี่ย	ค่าสูงสุด
0.5	1.0	6.382	89.183
2.0	1.0	4.513	44.332

ตารางที่ 5.2 ความคลาดเคลื่อนของความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน เมื่อคำนวณที่ความถี่ 6, 10 และ 20 MHz.

$\sigma_{sph,in}$ (S/m)	$\sigma_{sph,out}$ (S/m)	ความคลาดเคลื่อน (%) เมื่อคำนวณที่ความถี่ต่างๆ					
		6 MHz		10 MHz		20 MHz	
		ค่าเฉลี่ย	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	ค่าสูงสุด
0.5	1.0	1.689	33.959	1.979	18.140	6.460	66.567
2.0	1.0	1.849	53.201	2.917	53.193	8.541	64.064

จากตารางที่ 2 เราเห็นได้ว่าเมื่อความถี่สูงขึ้น ความคลาดเคลื่อนมีขนาดเพิ่มขึ้นซึ่งเป็นไปในลักษณะเดียวกันกับกรณีของทรงกลม 1 ชั้นและของทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม. ตารางที่ 1 และ 2 แสดงว่าความคลาดเคลื่อนในกรณีนี้ มีค่าสูงสุดเมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนในกรณีของแบบจำลองอื่น เนื่องจากแบบจำลองในกรณีนี้มีความซับซ้อนมากที่สุด. ในกรณีของแบบจำลองซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน ค่าเฉลี่ยและค่าสูงสุดของความคลาดเคลื่อนมีค่าสูงถึงประมาณ 9 % และ 90 % ตามลำดับ. นอกจากนี้ เนื่องจากการกระจายของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองซึ่งมีความซับซ้อนนี้ไม่เป็นฟังก์ชันง่ายๆ อย่างเช่นฟังก์ชันเชิงเส้น ดังนั้นการลดความคลาดเคลื่อนด้วยวิธีประมาณค่านอกช่วงแบบเชิงเส้นจึงไม่สามารถทำได้.

จากการคำนวณในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม ลักษณะทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมมีความคล้ายคลึงกัน. ลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองแต่ละรูปแบบมีความต่างกันดังต่อไปนี้.

เมื่อแบบจำลองเป็นเนื้อเดียวหรือมีสภาพนำค่าเดียว (กรณีของทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้น) ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะแปรตามระยะห่างจากจุดศูนย์กลางตามแนวรัศมี.

เมื่อแบบจำลองเป็นเนื้อผสมประกอบด้วยตัวกลาง 2 ชนิดซึ่งมีสภาพนำต่างกัน และมีลักษณะสมมาตรกับจุดพิกัด (0,0) (กรณีของทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วมกัน) ลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำเหมือนกับในแบบจำลองเนื้อเดียว แต่ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันที่บริเวณรอยต่อของตัวกลางซึ่งมีสภาพนำต่างกัน.

เมื่อแบบจำลองประกอบด้วยตัวกลาง 2 ชนิดซึ่งมีสภาพนำต่างกัน และมีลักษณะไม่สมมาตรกับจุดพิกัด (0,0) (กรณีของทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน) ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมมีความคล้ายคลึงกับในแบบจำลอง 1 ชั้นและในแบบจำลองซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม. กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีแนวโน้มไหลสู่บริเวณที่มีค่าสภาพนำสูงกว่า. ดังนั้นบริเวณที่มีค่าสภาพนำสูงกว่าจึงมีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงกว่าบริเวณที่มีค่าสภาพนำต่ำกว่า. นอกจากนี้ ขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำยังขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนแบบจำลอง โดยขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะต่างกันตามตำแหน่งบนแบบจำลอง แม้เป็นบริเวณที่มีสภาพนำเดียวกัน.

ความคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณเกี่ยวข้องกับผลของปรากฏการณ์ทางผิว, สภาพเงื่อนไขการคำนวณที่ไม่เป็นจริง และความซับซ้อนของแบบจำลอง. ในการคำนวณ การเลือก

ความถี่ของสนามแม่เหล็ก และ สภาพนำของแบบจำลองมีผลต่อปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับความคลาดเคลื่อนนี้.

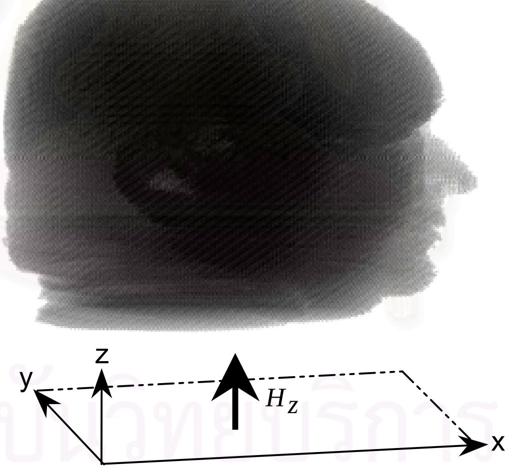
บทที่ 6

ผลการคำนวณในแบบจำลองศีรษะมนุษย์

บทนี้กล่าวถึงผลการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองศีรษะมนุษย์. แบบจำลองศีรษะมนุษย์ถูกสร้างโดยวิธีการนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เข้าไปคำนวณโดยตรงและวิธีการเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์. สำหรับรายละเอียดของแบบจำลองศีรษะมนุษย์ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4.

6.1 ลักษณะของสนามที่แบบจำลองได้รับและขั้นตอนการคำนวณ

แบบจำลองศีรษะมนุษย์อยู่ในอากาศภายใต้สนามแม่เหล็ก H_z ขนาด 1/377 A/m และความถี่ 50 Hz ดังรูปที่ 6.1. ขั้นตอนการคำนวณเหมือนกับกรณีของแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมในหัวข้อ 5.1 ของบทที่ 5.



รูปที่ 6.1 แบบจำลองศีรษะมนุษย์ภายใต้สนามแม่เหล็ก H_z

การคำนวณทำในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งกริดมีระยะห่างกัน 4 และ 8 mm. วิทยานิพนธ์นี้ได้คำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ความถี่ 20 MHz จากนั้นจึงปรับค่าคำตอบมาที่ 50 Hz ด้วยวิธีปรับมาตราความถี่ เนื่องจากที่ความถี่ 6 และ 10 MHz เวลาคำนวณนานกว่าที่ความถี่ 20 MHz ถึงประมาณ 3 และ 2 เท่าตามลำดับ (การคำนวณที่ความถี่ 20 MHz โดยกริดมีระยะห่างกัน 4 mm ใช้เวลาในการคำนวณประมาณ 2 วัน 10 ชั่วโมง).

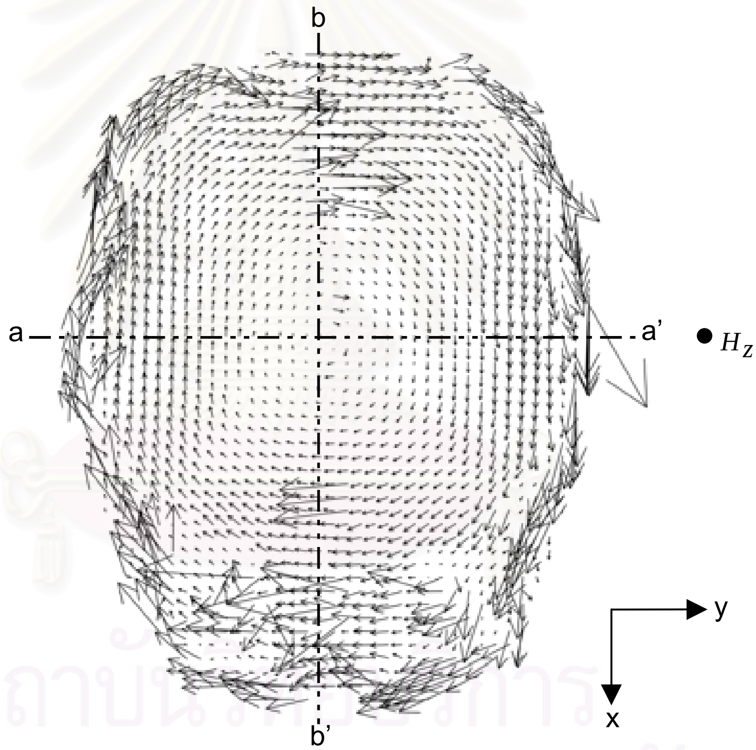
นอกจากที่ 20 MHz แล้ว วิทยานิพนธ์นี้ได้ลองคำนวณที่ความถี่ 10 MHz เมื่อกริดมีระยะห่างกัน 8 mm. ผลการคำนวณพบว่าลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำใกล้เคียงกับผลการคำนวณที่ความถี่ 20 MHz.

6.2 ผลการคำนวณเมื่อนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์มาใช้โดยตรง

6.2.1 การคำนวณเมื่อกริดมีระยะห่างกัน 4 mm

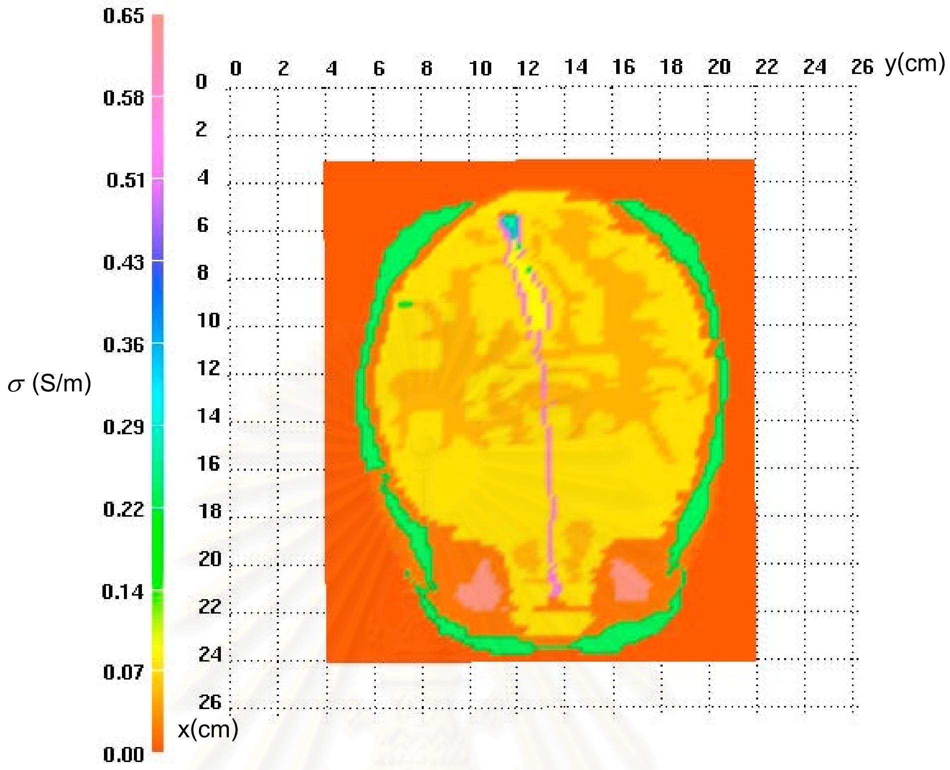
<u>ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ</u>

ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบ xy ตัดผ่านบริเวณคิ้วในแบบจำลองศีรษะมนุษย์ แสดงในรูปที่ 6.2 โดยค่าสภาพนำของอวัยวะบนระนาบนี้ แสดงด้วยสเกลสีในรูปที่ 6.3.



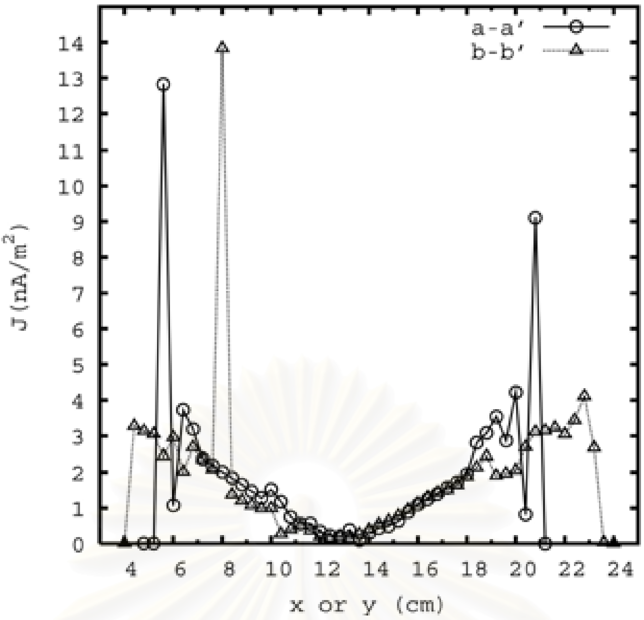
รูปที่ 6.2 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบ xy ผ่านบริเวณคิ้วของแบบจำลองศีรษะมนุษย์ เมื่อ $\Delta = 4$ mm

จากรูปที่ 6.2 เราเห็นได้ว่าลักษณะทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมมีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมทั้งแบบ 1 ชั้นและแบบซ้อน 2 ชั้น. กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดสูงในบริเวณที่มีค่าสภาพนำสูง ดังนั้นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีแนวโน้มไหลเข้าสู่บริเวณที่มีค่าสภาพนำสูง (สังเกตได้ชัดเจนจากบริเวณด้านข้างของส่วนหน้าในรูปที่ 6.2).



รูปที่ 6.3 สเกลสีแสดงค่าสภาพนำของอวัยวะบนระนาบตามแนวระดับ xy ในรูปที่ 6.2
[หมายเหตุ สำหรับแถบสีที่ $\sigma = 0.65$ S/m ถูกปรับมาจาก $\sigma = 1.5$ S/m (ตำแหน่งของตา)]

นอกจากนี้ ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำยังขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนแบบจำลอง โดยในบริเวณที่มีค่าสภาพนำเดียวกัน ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีค่าสูงสุดที่แนวขอบของบริเวณนั้น. รูปที่ 6.4 แสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนแนวเส้น a-a' และ b-b' ในรูปที่ 6.2. จากรูปที่ 6.4 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่าบริเวณที่มีค่าสภาพนำเดียวกันเช่น สมอง (ช่วงตำแหน่งตามแนวแกน x หรือ y จาก 7 ถึง 18 cm) กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนว a-a' และ b-b' มีขนาดใกล้เคียงกันตามตำแหน่ง และมีค่าสูงสุดที่ขอบของบริเวณสมอง. สำหรับช่วงขอบของแนวเส้น a-a' และ b-b' กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำของ 2 เส้นนี้มีขนาดต่างกันตามสภาพนำของอวัยวะที่ต่างกัน. เมื่อพิจารณารูปที่ 6.3 กับแนวเส้น a-a' ลักษณะสภาพนำตามแนวเส้น a-a' เกือบจะสมมาตรกัน ดังนั้นขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a' จึงเกือบจะสมมาตรกัน ในขณะที่ตามแนวเส้น b-b' ลักษณะของทั้งสภาพนำและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำไม่สมมาตรอย่างชัดเจน.

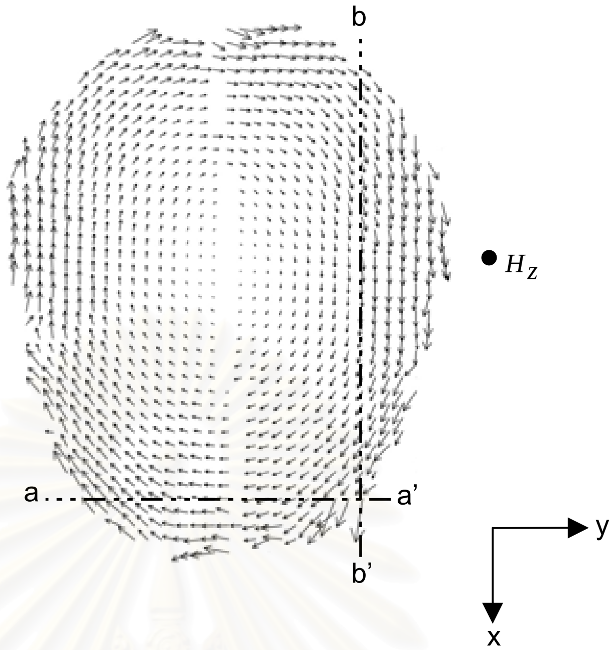


รูปที่ 6.4 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนแนวเส้น a-a' และ b-b' ในรูปที่ 6.2

<u>ลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์</u>

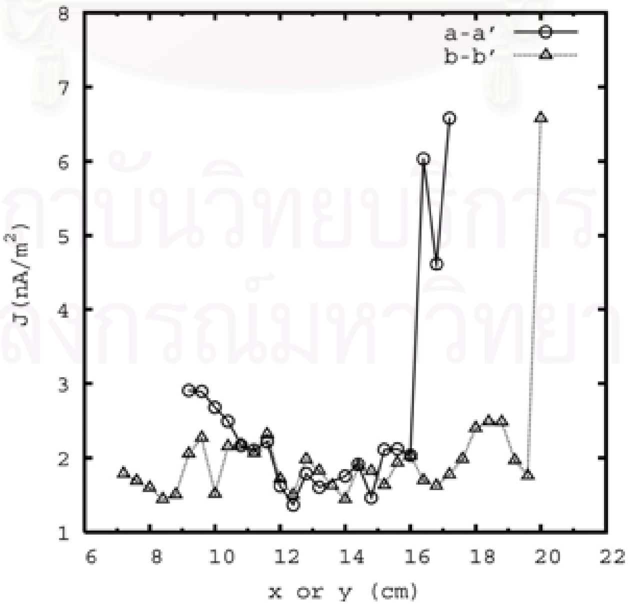
เนื่องจากความสนใจส่วนใหญ่ของการศึกษากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในร่างกายมนุษย์อยู่ที่อวัยวะซึ่งมีความสำคัญเช่นสมองและหัวใจ ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงได้แสดงลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำภายในสมองของมนุษย์. จากผลการคำนวณ ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์มีค่าสูงสุดเท่ากับ 6.5780 nA/m^2 โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1.643 nA/m^2. ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำรูปคลื่นไซน์ที่กระตุ้นเนื้อเยื่อหัวใจและประสาทอย่างรุนแรงและฉับพลันมีค่าประมาณ 1450 mA/m^2[26]. สำหรับขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ไม่เป็นอันตรายต่อร่างกายมีค่าไม่เกิน 10 mA/m^2 (ขนาดสูงสุดของกระแสไฟฟ้าที่ปรากฏในร่างกายโดยธรรมชาติ).

ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองบนระนาบตามแนวระดับ xy ที่เกิดขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุด แสดงในรูปที่ 6.5. จากรูปที่ 6.5 เราเห็นได้ว่าลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมในสมองเหมือนกับในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลมเนื้อเดียวหรือ 1 ชั้น ยกเว้นบริเวณขอบสมองซึ่งมีลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำเปลี่ยนแปลงไปตามรูปร่างของขอบสมองหรือสภาพนำของอวัยวะที่อยู่ข้างเคียง. กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมีขนาดเพิ่มขึ้นตามระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของระนาบ โดยมีค่าสูงสุดที่บริเวณขอบของสมอง.



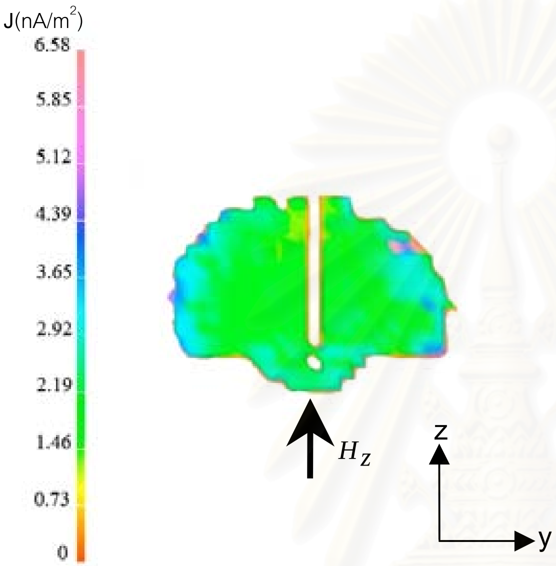
รูปที่ 6.5 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์
บนระนาบ xy ที่เกิดขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุดเมื่อ $\Delta = 4$ mm

ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในรูปที่ 6.5 (หรือแนวเส้นซึ่งผ่านตำแหน่งที่มีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุด) แสดงในรูปที่ 6.6.

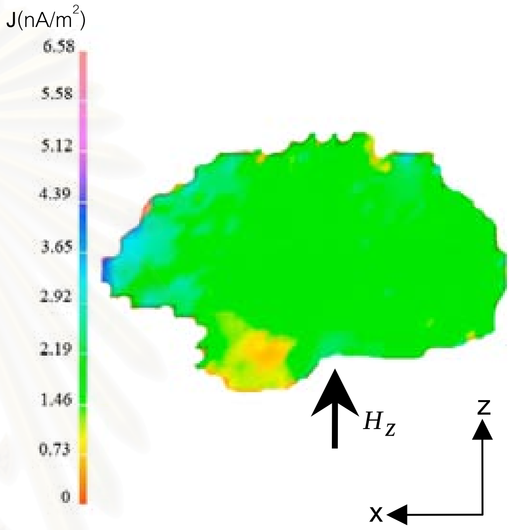


รูปที่ 6.6 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในรูปที่ 6.5

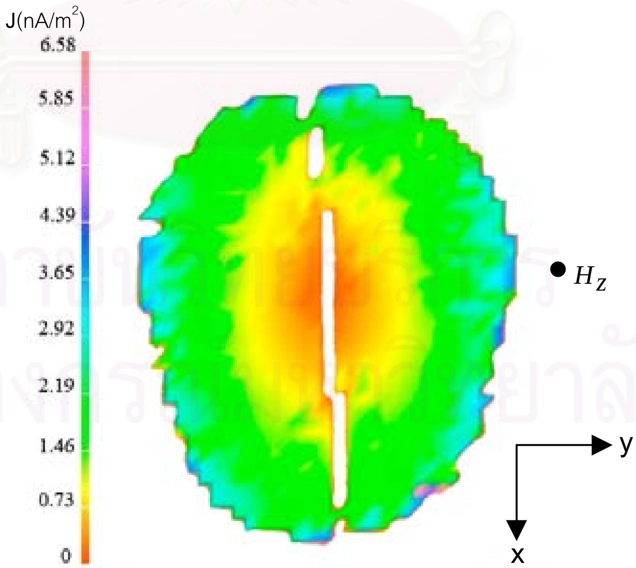
รูปที่ 6.6 แสดงว่ากระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองตามแนวเส้น a-a' และ b-b' ส่วนใหญ่มีค่าประมาณ 1-3 nA/m^2. ที่บริเวณขอบสมองทางด้าน a' และ b' กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดสูงกว่าบริเวณอื่นอย่างเด่นชัด เนื่องมาจากรูปร่างของขอบสมองและสภาพนำของอวัยวะข้างเคียงซึ่งมีผลต่อทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ. สำหรับขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบตามแนวระดับและแนวดิ่งที่เกิดขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุดแสดงในรูปที่ 6.7 (ตำแหน่งช่องว่างบริเวณกลางสมองคือ เยื่อหุ้มสมองดูรา).



ก. บนระนาบตามแนวดิ่ง yz



ข. บนระนาบตามแนวดิ่ง xz



ค. บนระนาบตามแนวระดับ xy

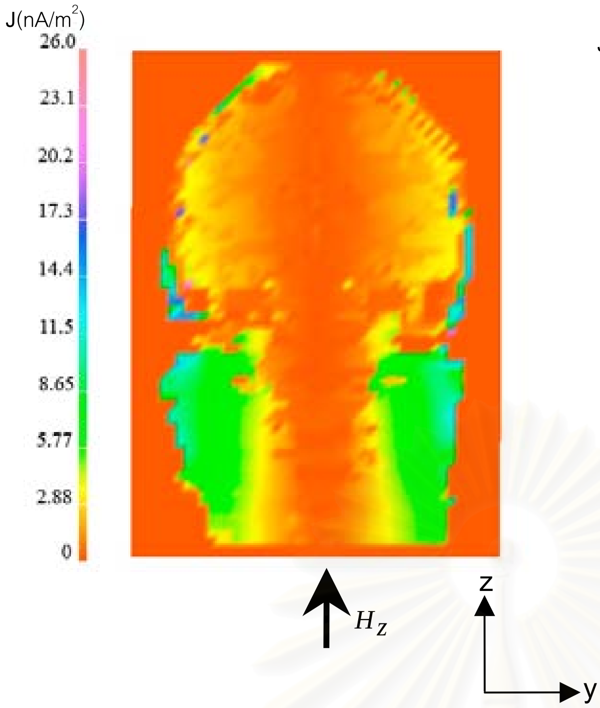
รูปที่ 6.7 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์
บนระนาบที่เกิดขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุด เมื่อ $\Delta = 4$ mm

จากภาพบนระนาบตามแนวระดับในรูปที่ 6.7 เมื่อพิจารณาขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง (หรือพิจารณาสมองมีลักษณะคล้ายทรงกลม) พร้อมกับภาพบนระนาบตามแนวดิ่งในรูปเดียวกัน เราเห็นได้ว่าบริเวณแกนสมองมีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำต่ำสุด โดยมีขนาดประมาณ 0-0.73 nA/m^2. ที่บริเวณข้างเคียงกับแกนสมองขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะมีขนาดสูงขึ้น โดยมีขนาดประมาณ 0.74-1.46 nA/m^2 และประมาณ 1.47-2.92 nA/m^2 ในบริเวณที่ถัดออกมาอีก. สำหรับบริเวณขอบของสมองมีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงเมื่อเทียบกับบริเวณอื่น โดยส่วนใหญ่มีขนาดประมาณ 2.93-4.39 nA/m^2 ขณะที่บางตำแหน่งมีขนาดสูงถึงประมาณ 5.12-6.58 nA/m^2.

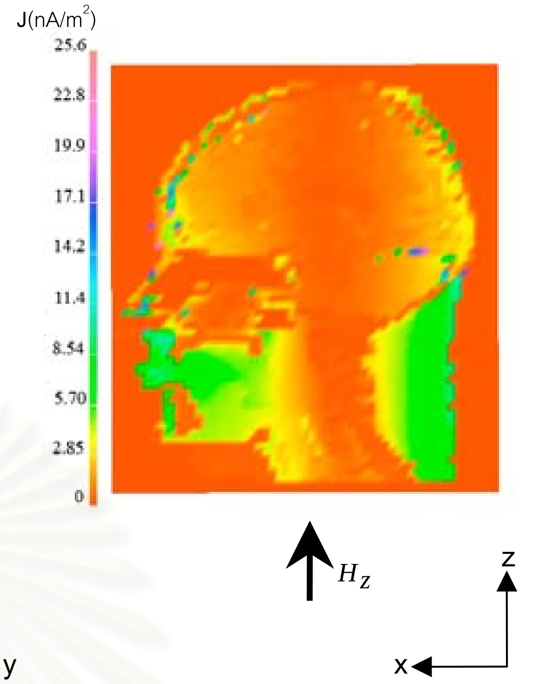
<u>ลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมในศีรษะมนุษย์</u>

หัวข้อนี้กล่าวถึงภาพรวมของขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในศีรษะมนุษย์. ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในศีรษะมนุษย์บนระนาบแสดงในรูปที่ 6.8. จากรูปที่ 6.8 กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดต่ำที่บริเวณแกนกลางของศีรษะมนุษย์ และมีขนาดเพิ่มขึ้นตามระยะห่างจากแกนกลางของศีรษะมนุษย์.

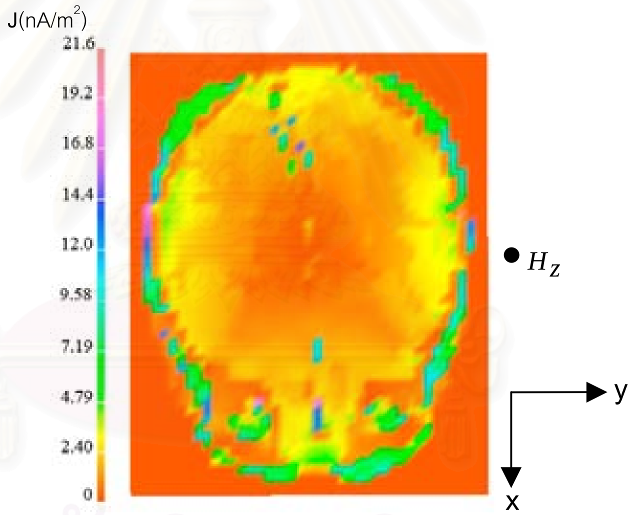
นอกจากขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะขึ้นอยู่กับระยะห่างจากแกนกลางของศีรษะมนุษย์ สภาพนำก็มีผลต่อขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำด้วย. รูปที่ 6.8 บนระนาบตามแนวดิ่ง xz และ yz แสดงให้เห็นว่าที่บริเวณขอบสมอง (แถบสีเหลืองด้านบน) และกล้ามเนื้อบริเวณลำคอ (แถบสีเขียวด้านล่าง) แม้จะมีระยะห่างจากแกนกลางของศีรษะมนุษย์เท่ากัน แต่ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในกล้ามเนื้อบริเวณลำคอสูงกว่าในบริเวณขอบสมอง เนื่องจากค่าสภาพนำของกล้ามเนื้อ (0.2333 S/m) สูงกว่าของสมอง (0.07526 S/m). บริเวณที่มีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงคือ กล้ามเนื้อบริเวณขอบของกะโหลกและของลำคอ (บริเวณแถบสีเขียวเข้มถึงแถบสีชมพูอ่อน) เนื่องจากอวัยวะที่บริเวณเหล่านี้มีค่าสภาพนำสูงและอยู่ที่ขอบของศีรษะมนุษย์ (หรือมีระยะห่างจากแกนกลางของศีรษะมนุษย์มาก) นอกจากนี้ อวัยวะที่มีค่าสภาพนำสูงมากเช่นดวงตาก็มีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงเช่นกัน แม้ตำแหน่งจะไม่อยู่ที่บริเวณขอบของศีรษะมนุษย์. สำหรับบริเวณที่มีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำต่ำคือ บริเวณแกนกลางของศีรษะมนุษย์ และอวัยวะที่มีค่าสภาพนำต่ำมากแม้ตำแหน่งจะไม่อยู่ในบริเวณแกนกลางของศีรษะมนุษย์ก็ตาม เช่นบริเวณโพรงอากาศ.



ก. บนระนาบตามแนวดิ่ง yz



ข. บนระนาบตามแนวดิ่ง xz



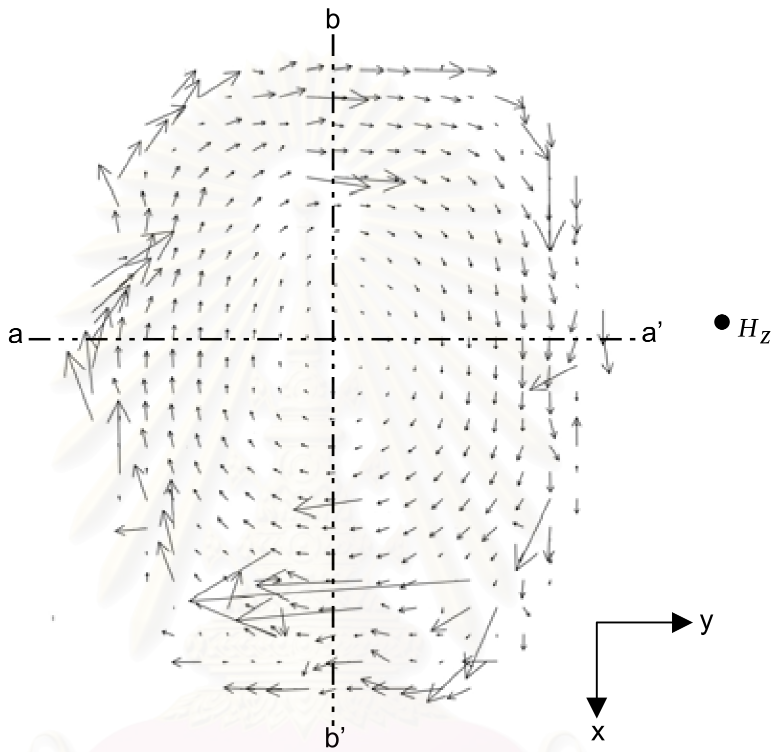
ค. บนระนาบตามแนวระดับ xy

รูปที่ 6.8 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ
ในศีรษะมนุษย์บนระนาบตามแนวระดับและแนวดิ่ง เมื่อ $\Delta = 4$ mm

6.2.2 **การคำนวณเมื่อกริดมีระยะห่างกัน** 8 mm

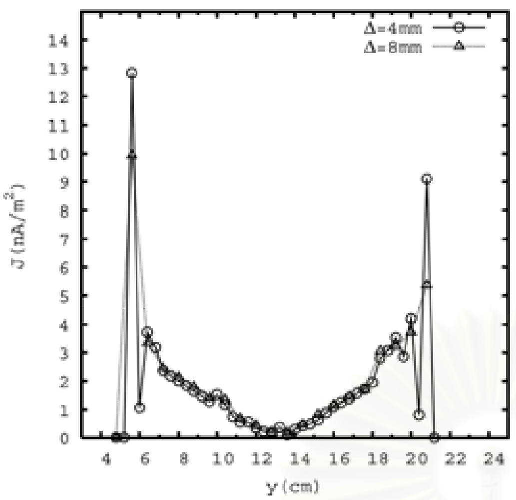
วิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการคำนวณเมื่อกริดมีระยะห่างกัน 8 mm ($\Delta = 8$ mm) เพื่อเทียบกับกรณีที่กริดมีระยะห่างกัน 4 mm ($\Delta = 4$ mm). สำหรับผลการคำนวณที่ $\Delta = 8$ mm ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบเดียวกันกับรูปที่ 6.2 ดังรูปที่ 6.9.

เมื่อเปรียบเทียบระหว่างรูปที่ 6.2 กับ 6.9 เราเห็นได้ว่า ความคลาดเคลื่อนจากขนาดซึ่งสูงผิดปกติของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในกรณี $\Delta = 4$ mm ต่ำกว่าในกรณี $\Delta = 8$ mm นอกจากนี้ แนวทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในกรณี $\Delta = 4$ mm ก็ดีกว่า. แม้ผลการคำนวณในกรณี $\Delta = 4$ mm ดีกว่าในกรณี $\Delta = 8$ mm แต่ก็ใช้จำนวนกริดและลำดับขั้นเวลาในการคำนวณมากขึ้น 2^3 และ 2 เท่าตามลำดับด้วย.

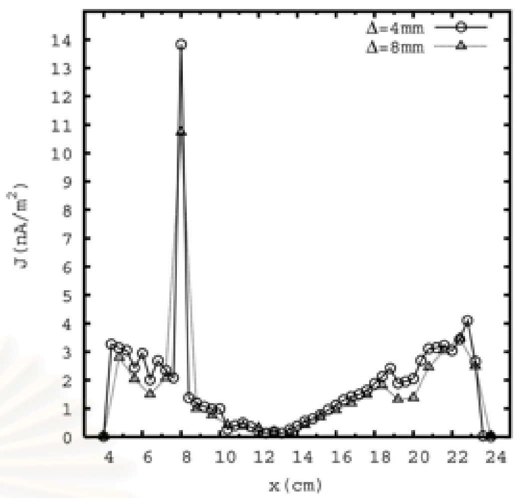


รูปที่ 6.9 ทิศทางและขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบ xy
ผ่านบริเวณคิ้วของแบบจำลองศีรษะมนุษย์ เมื่อ $\Delta = 8$ mm

ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนแนวเส้น a-a' และ b-b' ในรูปที่ 6.9 (กรณี $\Delta = 8$ mm) เทียบกับในรูปที่ 6.2 (กรณี $\Delta = 4$ mm) แสดงในรูปที่ 6.10. จากรูปที่ 6.10 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ช่วงกึ่งกลางของแนวเส้น a-a' และ b-b' หรือช่วงสมองของศีรษะมนุษย์ กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวในกรณี $\Delta = 4$ mm มีขนาดใกล้เคียงกับกรณี $\Delta = 8$ mm เนื่องจากบริเวณนี้มีสภาพนำเดียวกันหรือเป็นเนื้อเดียวกันในบริเวณกว้าง (พิจารณาได้จากรูปที่ 6.3) ดังนั้นการเปลี่ยนขนาดระยะห่างของกริดจึงไม่ส่งผลอย่างเด่นชัด. ในทางตรงกันข้าม ที่บริเวณขอบของแนวเส้น a-a' และ b-b' หรือบริเวณขอบของศีรษะมนุษย์ กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวจากกรณีทั้ง 2 กรณีนี้มีขนาดต่างกันอย่างชัดเจน เนื่องจากอวัยวะในบริเวณนี้มีขอบเขตที่แคบ ดังนั้นการเปลี่ยนขนาดระยะห่างของกริดจึงมีผลต่อการคำนวณ.



ก. บนแนวเส้น a-a’



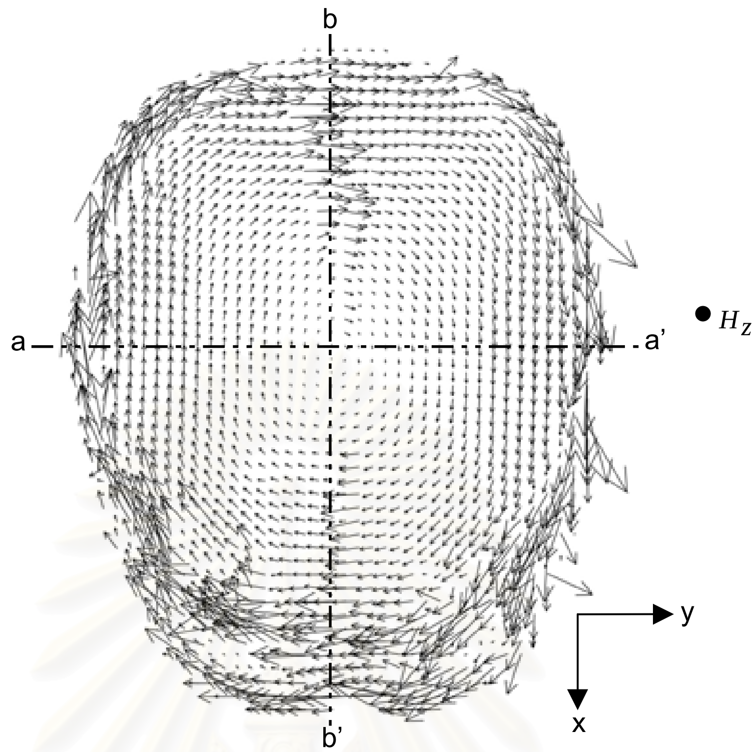
ข. บนแนวเส้น b-b’

รูปที่ 6.10 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a’ และ b-b’
ในกรณี Δ = 4 mm เทียบกับกรณี Δ = 8 mm

6.3 ผลการคำนวณในแบบจำลองศีรษะมนุษย์ซึ่งถูกสร้างโดยวิธีการเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่าง ๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์

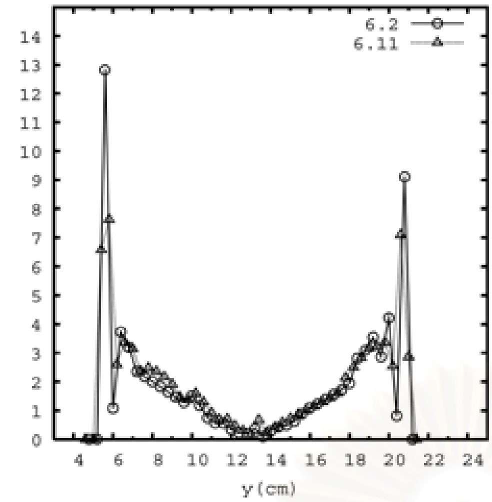
วิทยานิพนธ์นี้ได้ลองคำนวณกับแบบจำลองศีรษะมนุษย์ซึ่งถูกสร้างโดยวิธีการเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์ เพื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากวิธีการนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เข้าไปคำนวณโดยตรง. การคำนวณนี้ทำในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งกริดมีระยะห่างกัน 4 mm. ผลการคำนวณได้ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบเดียวกันกับรูปที่ 6.2 ดังรูปที่ 6.11.

จากรูปที่ 6.11 เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 6.2 เราเห็นได้ว่า ความคลาดเคลื่อนจากขนาดซึ่งสูงผิดปกติของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในกรณีเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์ ต่ำกว่า ในกรณีการนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เข้าไปคำนวณโดยตรง นอกจากนี้ แนวทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในกรณีเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์ก็ดีกว่า. ในทางตรงกันข้าม แนวทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบริเวณขอบของแบบจำลองในกรณีเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์กลับให้ผลที่แย่กว่าในกรณีการนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เข้าไปคำนวณโดยตรง.

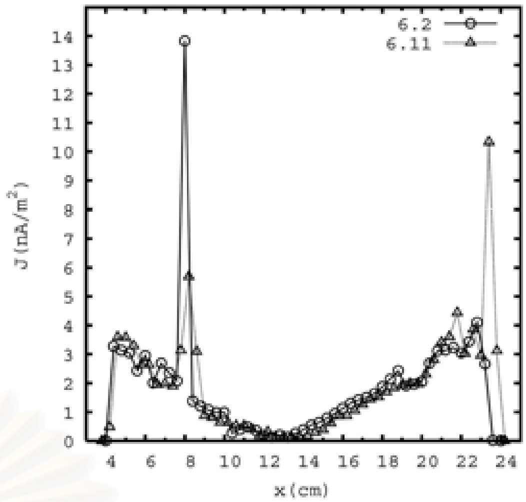


รูปที่ 6.11 ทิศทางและขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนระนาบ xy ผ่านบริเวณคิ้ว ของแบบจำลองศีรษะมนุษย์(สร้างโดยวิธีการเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์) เมื่อ $\Delta = 4$ mm

ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนแนวเส้น a-a' และ b-b' ในรูปที่ 6.11 เทียบกับในรูปที่ 6.2 แสดงในรูปที่ 6.12. จากรูปที่ 6.12 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่าช่วงกึ่งกลางของแนวเส้น a-a' และ b-b' (ช่วงตำแหน่งตามแนวแกน x หรือ y จาก 8 ถึง 19 cm โดยประมาณ) กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจาก 2 กรณีนี้มีขนาดใกล้เคียงกัน ในขณะที่ตำแหน่งในช่วงขอบของแนวเส้น a-a' และ b-b' กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจาก 2 กรณีนี้ มีขนาดแตกต่างกันตามสภาพนำในแบบจำลองของแต่ละกรณีที่ไม่เท่ากัน. ดังนั้นความสนใจในการใช้วิธีการสร้างแบบจำลองทั้ง 2 วิธีนี้จึงอยู่ที่บริเวณ (ซึ่งเป็นเนื้อเดียวกัน) หรืออวัยวะที่มีขอบเขตน้อย (เมื่อเทียบกับระยะห่างระหว่างกริด) เนื่องจากค่าสภาพนำในบริเวณหรืออวัยวะดังกล่าวนี้มีค่าไม่เท่ากันจากการใช้วิธีสร้างแบบจำลองซึ่งต่างกันของ 2 วิธีนี้.



ก. บนแนวเส้น a-a’



ข. บนแนวเส้น b-b’

รูปที่ 6.12 ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำตามแนวเส้น a-a’ และ b-b’ ในกรณีวิธีการนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เข้าไปคำนวณโดยตรง (6.2) เทียบกับ ในกรณีวิธีเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์ (6.11)

สำหรับขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์กรณีที่แบบจำลองมี Δ=8 mm และสร้างจากวิธีการนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เข้าไปคำนวณโดยตรงมีค่าสูงสุดเท่ากับ 7.913 nA/m^2 และค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1.654 nA/m^2. สำหรับกรณีที่แบบจำลองมี Δ=4 mm และสร้างจากวิธีเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์ ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์มีค่าสูงสุดเท่ากับ 5.035 nA/m^2 และมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1.667 nA/m^2.

เมื่อเปรียบเทียบขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์กรณีที่แบบจำลองสร้างจากวิธีการนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เข้าไปคำนวณโดยตรงทั้ง Δ=4 และ 8 mm กับกรณีที่แบบจำลองสร้างจากวิธีเฉลี่ยค่าสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์เมื่อ Δ=4 mm เราพบว่าค่าเฉลี่ยของขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทุกกรณีมีค่าใกล้เคียงโดยประมาณ 1.65 nA/m^2. เนื่องจากสมองเป็นบริเวณเนื้อเดียวกันที่มีขนาดกว้าง (โดยสมองมีความยาวประมาณ 13 cm เมื่อเทียบกับระยะห่างระหว่างกริดซึ่งมีขนาดแค่ 4 และ 8 mm) ดังนั้นขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบริเวณภายในสมองและค่าเฉลี่ยของขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองจากทุกกรณีจึงมีค่าไม่ต่างกันอย่างชัดเจน. สำหรับบริเวณผิวขอบโดยรอบของสมอง ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแต่ละกรณีจะแตกต่างกัน เนื่องจากค่าสภาพนำที่บริเวณดังกล่าวของแบบจำลองมีความแตกต่างกันตามแต่ละกรณี. เมื่อพิจารณาค่าสูงสุดของขนาดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมอง (ซึ่งโดยปกติจะอยู่ที่ขอบของสมอง) ค่าสูงสุดนี้จึงมีขนาดต่างกันตามแต่ละกรณี.

บทที่ 7

สรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอผลการคำนวณกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในศีรษะมนุษย์ด้วยวิธี FDTD. การคำนวณแบ่งออกเป็นในแบบจำลองอย่างง่ายและในแบบจำลองศีรษะมนุษย์. แบบจำลองศีรษะมนุษย์สร้างจากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์. ฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์คือ ข้อมูลคุณสมบัติทางไฟฟ้าของอวัยวะต่างๆ ในศีรษะมนุษย์ โดยมีลักษณะเป็นกริดเรียงกันตามระบบพิกัดคาร์ทีเซียนที่ความละเอียด 2 มิลลิเมตรและเก็บในรูปแบบของไฟล์คอมพิวเตอร์.

7.1 ผลการคำนวณในแบบจำลองอย่างง่าย

การคำนวณในแบบจำลองอย่างง่ายทำเพื่อ ตรวจสอบความแม่นยำของผลการคำนวณด้วยวิธี FDTD และศึกษาลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำภายในแบบจำลองรูปแบบต่างๆ. วิทยานิพนธ์นี้ได้คำนวณกับแบบจำลองทั้งทรงกระบอกและทรงกลม ซึ่งเป็นการคำนวณใน 2 มิติและ 3 มิติตามลำดับ. รูปแบบของแบบจำลองที่ใช้เป็นแบบจำลองของศีรษะมนุษย์อย่างง่ายได้แก่ ทรงกระบอก 1 ชั้น, ทรงกลม 1 ชั้น, ทรงกระบอกซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม, ทรงกลมซ้อน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม, ทรงกระบอกซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน และทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน.

<u>ลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ</u>

ลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีความแตกต่างกันตามรูปแบบของแบบจำลอง. รูปแบบของแบบจำลองเกี่ยวข้องกับรูปร่างและสภาพนำของตัวกลางภายในแบบจำลอง. ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมในแบบจำลองรูปแบบต่างๆ มีความคล้ายคลึงกัน.

สำหรับทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้น ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำอยู่ในแนวเดียวกันกับเส้นรอบวง โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม. ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำแปรตามระยะห่างจากจุดศูนย์กลางตามแนวรัศมี.

เมื่อทรงกระบอกและทรงกลมซ้อนกัน 2 ชั้นแบบจุดศูนย์กลางร่วม (ซึ่งประกอบด้วยตัวกลาง 2 ชนิด) ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำยังเหมือนกับในกรณีแบบจำลอง 1 ชั้น แต่ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลางเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันเนื่องจากค่าสภาพนำ.

ในกรณีที่ทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นมีจุดศูนย์กลางต่างกัน (ซึ่งประกอบด้วยตัวกลาง 2 ชนิด) ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีแนวโน้มไหลเข้าสู่ตัวกลางที่มีค่าสภาพนำสูงกว่า ทำให้ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดสูงขึ้นในตัวกลางนี้. ตำแหน่งที่มีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุดจึงอยู่ที่บริเวณขอบของตัวกลางที่มีค่าสภาพนำสูงกว่า.

<u>ความแม่นยำของผลการคำนวณ</u>

การพิจารณาความแม่นยำ ทำโดยเทียบผลการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรง และในกรณีที่ไม่ทราบผลเฉลยแม่นตรงได้เทียบผลการคำนวณกับผลการคำนวณด้วยวิธีชิ้นประกอบขอบเขต. ความคลาดเคลื่อนในการคำนวณแบ่งออกเป็นความคลาดเคลื่อนจากค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ และ ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบซึ่งซับซ้อนของแบบจำลอง. ความคลาดเคลื่อนจากค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณเกี่ยวข้องกับความถี่ของสนามที่ใช้ในการคำนวณและค่าสภาพนำของแบบจำลอง. ความถี่ของสนามและค่าสภาพนำมีผลต่อปรากฏการณ์ทางผิวและสภาพเงื่อนไข [$|\sigma + \mathbf{j}\omega\varepsilon| \gg \omega\varepsilon_0$ (ในหัวข้อ 4.3 ของบทที่ 4)].

ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบซึ่งซับซ้อนของแบบจำลองทำให้ผลการคำนวณขาดความแม่นยำมากขึ้นเช่น ตัวกลางในแบบจำลองมีจำนวนมากและขนาดเล็ก หรือรูปร่างของตัวกลางในแบบจำลองมีความซับซ้อน. จากการคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้ ความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่ซับซ้อนมากที่สุด (กรณีทรงกระบอกและทรงกลมซ้อน 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน) มีค่าเฉลี่ยและค่าสูงสุดสูงถึงประมาณ 9% และ 90% ตามลำดับ. การใช้วิธีประมาณค่านอกช่วงแบบเชิงเส้นแก้ไขความคลาดเคลื่อนที่บริเวณขอบของแบบจำลอง (บริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูงสุด) ซึ่งมีรูปร่างเป็นเส้นโค้ง ทำให้ได้ผลที่ดีขึ้นอย่างชัดเจนกับกรณีทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้นเท่านั้น.

7.2 ผลการคำนวณในแบบจำลองศีรษะมนุษย์

แบบจำลองศีรษะมนุษย์สร้างจากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์ โดยวิธีการนำฐานข้อมูลเข้าไปคำนวณโดยตรง. การคำนวณทำในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งกริดมีระยะห่างกัน 4 mm.

<u>ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ</u>

ลักษณะทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมในแบบจำลองศีรษะมนุษย์มีความคล้ายคลึงกันกับในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม. กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีทิศทางไหลเข้าสู่บริเวณที่มีค่าสภาพนำสูงกว่า ดังนั้นความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในบริเวณที่มีค่า

สภาพนำสูงกว่าจึงมีขนาดสูงกว่าในบริเวณที่มีค่าสภาพนำต่ำกว่า. ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำส่วนใหญ่มีความคลาดเคลื่อนสูงที่บริเวณขอบของแบบจำลอง.

ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ

ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแบบจำลองศีรษะมนุษย์ขึ้นอยู่กับทั้งสภาพนำและตำแหน่งบนแบบจำลอง. กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดเพิ่มขึ้นตามระยะห่างจากแกนกลางของศีรษะมนุษย์ และภายในตัวกลางที่มีสภาพนำเดียวกัน พบว่าขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในแต่ละตัวกลางมีค่าสูงสุดที่บริเวณขอบของตัวกลางนั้นๆ. ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำแปรตามค่าสภาพนำ เช่นอวัยวะที่มีค่าสภาพนำสูงมาก (เช่นลูกตา) หรือต่ำมาก (เช่นโพรงอากาศ) ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำก็จะสูงหรือต่ำตามลำดับ ไม่ว่าจะอยู่บนตำแหน่งใดของแบบจำลองก็ตาม. อวัยวะที่มีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงได้แก่กล้ามเนื้อบริเวณขอบของศีรษะและลำคอโดยมีขนาดตั้งแต่ประมาณ 6-27 nA/m^2 เมื่อได้รับสนามแม่เหล็ก 1/377 A/m เนื่องจากอวัยวะดังกล่าวมีค่าสภาพนำสูงและอยู่ที่ตำแหน่งบริเวณขอบของศีรษะมนุษย์ (ซึ่งห่างจากแกนกลางของศีรษะมนุษย์).

กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมอง

หัวข้อนี้กล่าวถึงลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในสมองมนุษย์ซึ่งเป็นอวัยวะที่มีความสำคัญ.

ทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวในสมองมนุษย์มีลักษณะคล้ายคลึงกันกับในแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม 1 ชั้น (หรือแบบจำลองเนื้อเดียว) เว้นแต่บริเวณผิวขอบของสมอง เนื่องจากมีรูปร่างและสภาพนำ (ของอวัยวะข้างเคียง) ต่างออกไป. จากผลการคำนวณได้ว่า กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีขนาดสูงสุดเท่ากับ 6.58 nA/m^2 เมื่อได้รับสนามแม่เหล็กขนาด 1/377 A/m. สำหรับขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำรูปคลื่นไซน์ที่กระตุ้นเนื้อเยื่อหัวใจและประสาท มีค่าประมาณ 1450 mA/m^2[26]. ขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำส่วนใหญ่มีค่าประมาณ 1-3 nA/m^2. สำหรับบริเวณขอบของสมองมีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงเมื่อเทียบกับส่วนอื่นของสมอง โดยบริเวณนี้มีขนาดของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงถึงประมาณ 5-6.5 nA/m^2.

เปรียบเทียบผลการคำนวณเมื่อสร้างแบบจำลองศีรษะมนุษย์ด้วยวิธีต่างๆ

วิทยานิพนธ์นี้ได้ลองสร้างแบบจำลองด้วยวิธีนำค่าเฉลี่ยของสภาพนำของอวัยวะต่างๆ จากฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์มาใช้ เพื่อเปรียบเทียบกับวิธีนำฐานข้อมูลศีรษะมนุษย์มาใช้โดยตรง. บริเวณที่สนใจจากการสร้างแบบจำลองด้วย 2 วิธีนี้คือ อวัยวะ (หรือบริเวณที่มีสภาพนำเดียวกัน)

ที่มีขอบเขตน้อยเมื่อเทียบกับระยะห่างระหว่างกริด เนื่องจากค่าสภาพนำของอวัยวะเหล่านี้ที่ได้จาก 2 วิธีมีค่าต่างกัน.

การคำนวณกับแบบจำลองที่นำค่าเฉลี่ยจากฐานข้อมูลมาใช้ มีแนวโน้มของความคลาดเคลื่อนและลักษณะของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำโดยรวมดีกว่าวิธีนำฐานข้อมูลมาใช้โดยตรง. การใช้วิธีนำค่าเฉลี่ยจากฐานข้อมูลมาใช้ให้ผลดีกว่า เนื่องจากค่าคุณสมบัติทางไฟฟ้า (σ) ในบริเวณที่คำนวณกับในแบบจำลอง (ซึ่งแทนด้วยกริด) มีความใกล้เคียงกันมากขึ้น.

7.3 ข้อเสนอแนะในการศึกษาต่อไป

หัวข้อนี้กล่าวถึงการเสนอแนะในการคำนวณเพื่อการศึกษาต่อไป. หัวข้อนี้แบ่งเป็นการคำนวณเมื่อลดระยะห่างระหว่างกริด และ การลดความคลาดเคลื่อนที่บริเวณขอบเขตของแบบจำลอง.

<u>การคำนวณเมื่อลดระยะห่างระหว่างกริด</u>

การลดระยะห่างระหว่างกริดทำเพื่อเพิ่มความละเอียดในการคำนวณ. บริเวณที่สนใจจากการเพิ่มความละเอียดด้วยวิธีนี้คือ บริเวณที่เป็นเนื้อเดียวกัน (หรือสภาพนำเดียวกัน) ซึ่งมีขอบเขตน้อยเมื่อเทียบกับระยะห่างระหว่างกริด เนื่องจากความละเอียดที่บริเวณนี้มีการเปลี่ยนแปลงมาก ดังนั้นผลการคำนวณจึงเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจน.

วิทยานิพนธ์นี้ได้ลองคำนวณในกรณีที่กริดมีระยะห่างกัน 8 mm เทียบกับ 4 mm. ผลการคำนวณในกรณีที่กริดมีระยะห่างกัน 4 mm มีแนวโน้มของความคลาดเคลื่อนและทิศทางของกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำดีกว่าในกรณี 8 mm. สำหรับการลดระยะห่างระหว่างกริดแม้จะให้ผลการคำนวณที่ดีขึ้น แต่ต้องใช้จำนวนกริดและลำดับขั้นเวลาในการคำนวณมากขึ้น เช่นถ้าลดระยะห่างระหว่างกริดลงมาครึ่งหนึ่ง ต้องใช้จำนวนจุดและลำดับขั้นเวลาเพิ่มขึ้นถึง 2^3 และ 2 เท่าตามลำดับ.

<u>การลดความคลาดเคลื่อนที่บริเวณขอบเขตของแบบจำลอง</u>

เนื่องจากวิธี FDTD โดยทั่วไปจะแบ่งบริเวณออกเป็นกริดทำให้มีรูปทรงของขอบเขตเป็นขั้นบันได ดังนั้นจากผลการคำนวณที่ได้ พบว่ามีความคลาดเคลื่อนอย่างเด่นชัดที่บริเวณขอบเขต (ทั้งผิวขอบโดยรอบของศีรษะมนุษย์ซึ่งมีลักษณะเป็นผิวโค้งหรือแบบจำลองทรงกระบอกและทรงกลม). การคำนวณด้วยวิธี FDTD จึงควรคำนึงถึงการลดความคลาดเคลื่อนที่บริเวณขอบเขตทั้งจากการปรับปรุงที่วิธี FDTD หรือจากการปรับปรุงที่วิธีการสร้างแบบจำลอง. สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้ลองใช้วิธีเฉลี่ยค่าสภาพนำและวิธีประมาณค่านอกช่วงแบบเชิงเส้นที่บริเวณขอบเขตของแบบจำลองซึ่งเป็นวิธีที่ง่าย ดังนั้นผลการคำนวณจึงอยู่ในระดับที่ดีขึ้นพอประมาณ.

รายการอ้างอิง

1. The International EMF Project[Online]. World Health Organization. Available from : http://www.who.int/peh-emf/project/en [2003].
2. National Institute of Environmental Health Sciences. NIEHS Report on Health Effects from Exposure to Power-Line Frequency Electric and Magnetic Fields. Pub. 99-4493, 1998.
3. International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection. A Reference Book Based on Guidelines on Limiting Exposure to Non-Ionizing Radiation., 1999.
4. IEEE Standards Coordinating Committee 28. IEEE Standard for Safety Levels with Respect to Human Exposure to Electromagnetic Fields, 0-3 kHz. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002.
5. Kaune, W.T. and Forsythe, W.C. Current Densities Measured in Human Models Exposed to 60-Hz Electric Fields. Bioelectromagnetics 6 (1985) : 13-32.
6. Miller, D.L. Miniature-Probe Measurements of Electric Field and Currents Induced by a 60-Hz Magnetic Field in Rat and Human Models. Bioelectromagnetics 12 (1991) : 157-171.
7. Hart, F.X. Electric Fields Induced in Rat and Human Models by 60-Hz Magnetic Field: Comparison of Calculated and Measured Values. Bioelectromagnetics 13 (November 1992) : 313-316.
8. Stuchly, M.A. and Xi, W. Modelling Induced Currents in Biological Cells Exposed to Low-Frequency Magnetic Fields. Phys. Med. Biol. 39 (1994) : 1319-1330.
9. Stuchly, M.A. and Zhao, S. Magnetic Field-Induced Currents in the Human Body in Proximity of Power Lines. IEEE Trans. on Power Delivery 11, 1 (January 1996) : 102-108.
10. Gandhi, O.P. and Chen, J.Y. Numerical Dosimetry at Power-Line Frequencies Using Anatomically Based Models. Bioelectromagnetics Supplement 1 (1992) : 43-60.
11. Dawson, T.W. and Stuchly, M.A. Analytic Validation of a Three-Dimensional Scalar-Potential Finite-Difference code for Low-Frequency Magnetic Induction. Applied Computational Electromagnetics Society Journal (1996) : 72-81.

12. Dawson, T.W.; Caputa, K. and Stuchly, M.A. Influence of Human Model Resolution on Computed Currents Induced in Organs by 60-Hz Magnetic Fields. Bioelectromagnetics 18 (1997) : 478-490.

13. Dimbylow, P.J. Induced Current Densities from Low-Frequency Magnetic Field in a 2 mm Resolution, Anatomically Realistic Model of the Body. Phys. Med. Biol. 43 (1998) : 221-230.

14. Furse, C.M. and Gandhi, O.P. Calculation of Electric Fields and Currents Induced in a Millimeter-Resolution Human Model at 60 Hz Using the FDTD Method. Bioelectromagnetics 19 (1998) : 293-299.

15. Techaumnat, B.; Hamada, S. and Takuma, T. Calculation of Current in a Human Body Induced by a Low Frequency Magnetic Field by the Curved-Element BEM. Trans. IEE of Japan 121-A, 9 (2001) : 848-853.

16. Nishio, M.; Techaumnat, B.; Hamada, S. and Takuma, T. Calculation of Induced Current in a Human Head by a Low Frequency Magnetic Dipole. Joint Conference of ACED & K-J Symposium on ED and HVE (2002) : 120-123.

17. Visible Human Projects [Online]. National Library of Medicine. Available from : http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible_human.html [2003].

18. Yee, K.S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. IEEE Trans. Antennas and Propagation 14 (1966) : 302-307.

19. Taflove, A. Computation Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston : MA: Artech Horse, 1995.

20. Sullivan, D.M. Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method. Hoes Lane : IEEE Press, 2000.

21. Sullivan, D.M. A Simplifield PML for Use with the FDTD Method. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 6, 2 (February 1996) : 97-99.

22. Sullivan, D.M. An Unsplit Step 3-D PML for Use with the FDTD Method. IEEE Microwave and Guided Wave Letters 7, 7 (July 1997) : 184-186.

23. Sacks, Z.S.; Kingsland, D.M.; Lee, R. and Lee, J.F. A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Boundary Condition. IEEE Trans. on Antennas and Propagation 43, 12 (1995) : 1460-1463.

24. Calculation of the Dielectric Properties of Body Tissues[Online]. Institute for Applied Physics of Italian National Research Council Available from : http://niremf.ifac.cnr.it/tissprop [2002].

25. The Internet Pathology Laboratory for Medical Education[Online]. Florida State University College of Medicine Available from : http://medstat.med.utah.Edu/Webpath/HISTHTML/ANATOMY/ANATOMY.html [2004].

26. Reilly, J.P. Electrical Simulation and Electropathology. England:Cambridge University Press, 1992.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายจิระศักดิ์ ผุยโสภา เกิดเมื่อวันที่ 24 มีนาคม พ.ศ. 2521 จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต เกียรตินิยมอันดับสอง สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยขอนแก่น ในปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2544.