

# สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

รายงานการวิจัย ฉบับสมบูรณ์

โครงการวิจัยเรื่อง

**การวิจัยและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  
เพื่อการออกแบบงานทางวิศวกรรมเครื่องกล**

***Research and Development of Finite Element  
Method for Mechanical Engineering Design***

โดย

ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

รายงานการวิจัย ฉบับสมบูรณ์

โครงการวิจัยเรื่อง



การวิจัยและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  
เพื่อการออกแบบงานทางวิศวกรรมเครื่องกล

*Research and Development of Finite Element  
Method for Mechanical Engineering Design*

โดย

ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

19 ต.ค. 2563

I18430222

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ที่ให้การสนับสนุนทุนในการทำวิจัยโครงการนี้ และขอขอบคุณ คุณสุจารี สอนงาย ผู้ให้คำแนะนำและช่วยประสานงานด้านต่างๆระหว่างผู้วิจัยกับสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยเป็นอย่างดี นอกจากนี้ยังขอขอบคุณกองส่งเสริมและประสานงานวิจัย ฝ่ายวิจัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนทุนสมทบจนโครงการวิจัยนี้บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทคัดย่อ

รายงานฉบับนี้ได้สรุปรวบรวมผลงานวิจัยที่เกิดขึ้นจากโครงการวิจัยเรื่อง “การวิจัยและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการออกแบบงานทางวิศวกรรมเครื่องกล” เนื้อหาในรายงานเริ่มจากการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์สำหรับการไหลซึ่งจำแนกออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ การไหลแบบไม่อัดตัวและแบบอัดตัวได้ โดยในการไหลแต่ละประเภทได้ประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆโดยละเอียด ทั้งสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่เกิดขึ้นนี้ได้นำไปประดิษฐ์ต่อขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันรวมสองโปรแกรม ซึ่งได้ถูกตรวจสอบกับปัญหาพื้นฐานของการไหลที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงหลายปัญหาทำให้นำไปใช้แก้ปัญหาอื่น ๆ ที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป และเพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณโดยเฉพาะในการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ซึ่งมักประกอบด้วยคลื่นช็อกที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างกะทันหัน จึงได้เสนอวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ที่สามารถสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง และในขณะเดียวกัน สร้างเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น ๆ ที่ผลลัพธ์มีการเปลี่ยนแปลงน้อย วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังกล่าวสามารถก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงสำหรับการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และในขณะเดียวกันช่วยลดเวลาในการคำนวณรวมทั้งปริมาณหน่วยความจำที่ใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ และที่สำคัญที่สุด ผู้วิเคราะห์ไม่จำเป็นต้องรู้ลักษณะผลลัพธ์ของการไหลล่วงหน้ามาก่อน กระบวนการในการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติผสมผสานกับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องอย่างเที่ยงตรงได้ในขณะเดียวกันระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและการเสียดรูปและความเค้นในของแข็งได้ทำการประดิษฐ์ขึ้น พร้อมกับการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์อีกสองโปรแกรม ซึ่งได้อธิบายอย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยละเอียด วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติซึ่งใช้ได้เป็นผลสำเร็จในการแก้ปัญหาการไหล ได้นำมาประยุกต์เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นอันเกิดจากอุณหภูมิด้วยเช่นกัน ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการไหล การถ่ายเทความร้อน และความเค้นในของแข็งนี้ ได้แสดงถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ที่สามารถช่วยให้นักวิเคราะห์ได้เข้าใจถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น

ในปัญหาเหล่านี้ อันจะนำไปสู่การปรับปรุงการออกแบบที่ดียิ่งขึ้น ผลงานต่างๆที่เกิดขึ้นจากโครงการวิจัยนี้ ก่อให้เกิดบทความทางวิชาการซึ่งได้นำไปเสนอในที่ประชุมและได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการจำนวนมาก และในขณะเดียวกัน ขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้อธิบายในรายงานนี้ รวมทั้งไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆก็ได้ประดิษฐ์ขึ้น สามารถนำไปใช้เป็นต้นแบบในการทำวิทยานิพนธ์และเพื่อการประยุกต์สู่งานวิจัยอื่นๆได้อีกต่อไป

### คำหลัก

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	(Finite Element Method)
การคำนวณการไหล-ความร้อน-ของแข็ง	(Flow-Thermal-Structural Computations)
รูปร่างซับซ้อน	(Complex Geometry)

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## Abstract

This report summarizes the results from the research project entitled "Research and Development of Finite Element Method for Mechanical Engineering Design". The report begins with the study of the Navier-Stokes partial differential equations for fluid flows which are classified into two types namely, the incompressible and compressible flow. In each flow case, the finite element method is applied to derive the corresponding finite element equations. The derived finite element equations are then used in the development of the two computer programs. These programs have been verified by solving academic-type problems before using to solve more complex problems. To improve the solution accuracy, the adaptive meshing technique has been applied to these flow problems, especially the high-speed compressible flows that normally include shock waves. The technique generates small elements in the regions of large change in solution gradients, such as in the region of shock waves, to increase the solution accuracy. At the same time, larger elements are generated in the other regions to reduce the computational time and the computer memory. Examples presented show that the technique can provide improved flow solution accuracy for general flow behavior that is not known a priori. The finite element methods for thermal and structural problems are also presented. The corresponding finite element equations are derived and two computer programs are developed. The adaptive meshing technique has also been applied to further improve the thermal and structural solution accuracy. Results obtained from the fluid-thermal-structural analysis have demonstrated the efficiency of the finite element method and the adaptive meshing technique that can help analysts to understand the behavior that occur in these problems. Such understanding will lead to further improvement in the design. Outcome of this research project have been summarized as technical papers that are presented at conferences and published in journals. The details of the finite element method presented herein and the computer program developed, in addition, can be used as basis for generating new theses as well as applying to other research works.

## สารบัญ

หน้า

กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ง
สารบัญ	จ
สารบัญภาพ	ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์	ด
บทที่ 1    บทนำ	1
1.1    ความสำคัญและความเป็นมาของงานวิจัย	1
1.2    วัตถุประสงค์และขอบเขตของการวิจัย	2
1.3    วิธีดำเนินการวิจัยโดยสรุป	3
1.4    ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย	4
บทที่ 2    ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์	5
2.1    สมการอนุพันธ์มวล	7
2.2    สมการอนุพันธ์โมเมนต์ม	8
2.3    สมการอนุพันธ์พลังงาน	11
2.4    สมการความเค้นในของไหล	15
2.5    เงื่อนไขขอบเขต	16

<b>บทที่ 3</b>	<b>การประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว</b>	<b>18</b>
3.1	ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	18
3.2	การใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม	22
3.3	การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	23
3.4	การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน	27
3.5	การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์	30
<b>บทที่ 4</b>	<b>ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหล แบบหนืดแต่ไม่อัดตัว</b>	<b>37</b>
4.1	ขั้นตอนการคำนวณ	37
4.2	รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์	39
4.3	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า	39
4.4	ลักษณะของไฟล์ผลลัพธ์	42
<b>บทที่ 5</b>	<b>ผลจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหล แบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาต่าง ๆ</b>	<b>43</b>
5.1	การไหลหมุนวนในช่องว่าง	43
5.2	การไหลในท่อโรงไฟฟ้า กฟผ.	50
5.3	การไหลจากการพาความร้อนในช่องจัดรัศ	54
5.4	การไหลจากการพาความร้อนในระหว่างผิวท่อ	58
5.5	การไหลในช่องทางที่มีกล่องสี่เหลี่ยมอุดมุมสูงกั้นกลาง	60
5.6	การจำลองการหมุนเวียนของอากาศในอาคารรูปโดม	63



<b>บทที่ 6</b>	<b>การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้</b>	66
6.1	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบอนุกรม	66
6.2	การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	70
6.3	การประดิษฐ์เมตริกซ์ยาโคบี	74
<b>บทที่ 7</b>	<b>ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหล ความเร็วสูงแบบอัดตัวได้</b>	81
7.1	ขั้นตอนการคำนวณ	81
7.2	รายละเอียดของโปรแกรม	82
7.3	เพิ่มข้อมูลข้อมูลนำเข้าและเพิ่มข้อมูลผลลัพธ์	82
7.4	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม	84
<b>บทที่ 8</b>	<b>ระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ</b>	87
8.1	แนวคิดในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	87
8.2	ขั้นตอนและวิธีการ	88
8.3	ตัวอย่างการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหา คลื่นช็อคบนพื้นเอียง	90
<b>บทที่ 9</b>	<b>การประยุกต์การจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ</b>	96
9.1	ปัญหาคลิ้นช็อค	96
9.2	ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อค	100
9.3	ปัญหาการขยายตัวของความเร็วสูง	103
9.4	ปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อคสองครั้ง	108
9.5	ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ	112

บทที่ 10	ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นจากอุณหภูมิ	117
10.1	สมการเชิงอนุพันธ์	117
10.2	เงื่อนไขขอบเขต	119
10.3	การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	120
บทที่ 11	การประยุกต์การจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นจากอุณหภูมิ	125
11.1	พารามิเตอร์ที่ใช้ในการจัดเอลิเมนต์สำหรับแต่ละปัญหา	125
11.2	การถ่ายเทความร้อนในแผ่นโลหะจากการใช้ความร้อนซึ่งเคลื่อนที่ไปตามขอบ	126
11.3	การเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นจากอุณหภูมิ	131
บทที่ 12	บทสรุป	136
12.1	สรุปและวิจารณ์	136
บรรณานุกรม		139
บทความทางวิชาการที่เกิดขึ้นจากงานวิจัยนี้		
ก.	บทความทางวิชาการเรื่อง "A Finite Element Method for Viscous Incompressible Flow Analysis" <i>Thammasat International Journal of Science and Technology</i> , Vol. 3, No. 2, July 1998, pp. 60-68.	142
ข.	บทความทางวิชาการเรื่อง "Transient Finite Element Thermal Analysis Using Adaptive Mesh Movement" <i>Journal of Energy, Heat and Mass Transfer</i> , Vol. 19, 1997, pp. 153-158.	152

ค.	บทความทางวิชาการเรื่อง "Adaptive Finite Element Technique for High-Speed Compressible Flows" <i>Thammasat International Journal for Science and Technology</i> , Vol. 3, No. 1, January 1998, pp. 55-56.	159
ง.	บทความทางวิชาการเรื่อง "A Finite Element Method for Viscous Incompressible Thermal Flows" Accepted for publication in <i>Science Asia, Journal of Science Society of Thailand</i> , 1999.	171
จ.	บทความทางวิชาการเรื่อง "Adaptive Finite Element Technique for Viscous Flow Analysis" Submitted for publication in the <i>ASEAN Journal on Science &amp; Technology for Development</i> , 1999.	179
ฉ.	บทความทางวิชาการเรื่อง "Adaptive Cell-centered Finite Element Technique for Compressible Flows" Submitted for publication in the <i>Journal of Energy, Heat and Mass Transfer</i> , 1999.	192
ภาคผนวก ก	โปรแกรมคอมพิวเตอร์การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว (LOWFLOW)	203
ภาคผนวก ข	โปรแกรมคอมพิวเตอร์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (HIFLOW)	219
ภาคผนวก ค	โปรแกรมคอมพิวเตอร์การถ่ายเทความร้อน (HEAT)	242
ภาคผนวก ง	โปรแกรมคอมพิวเตอร์การเสียรูปและความเค้น (STRESS)	248

เลขหม่            ๑๓  
 "                    ๑๓ ๑5  
 เลขทะเบียน 009814  
 วัน,เดือน,ปี 13 ธ.ค. ๕2

## สารบัญภาพ

	หน้า
รูป 2.1	ความสมดุลของการไหลของมวลผ่านปริมาตรควบคุม 7
รูป 2.2	ความสมดุลของแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหล 8
รูป 2.3	อัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ปริมาตรควบคุมของของไหล 11
รูป 2.4	อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม 12
รูป 2.5	โดเมนของการไหลและเงื่อนไขขอบเขต 16
รูป 3.1	การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ 18
รูป 3.2	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งจุดต่อ 19
รูป 3.3	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ 22
รูป 3.4	ความดันที่กระทำบนด้านหนึ่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ 34
รูป 3.5	การถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ด้านหนึ่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ 36
รูป 4.1	แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW 38
รูป 5.1	การไหลหมุนวนในช่องว่างสี่เหลี่ยม 43
รูป 5.2	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบหยาบและเงื่อนไขขอบเขต 44
รูป 5.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบปานกลางและเงื่อนไขขอบเขต 44
รูป 5.4	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบละเอียดและเงื่อนไขขอบเขต 45
รูป 5.5	ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบ เมื่อ $Re = 100$ 45

รูป 5.6	ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ $Re = 100$	46
รูป 5.7	ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ $Re = 100$	46
รูป 5.8	การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ $Re = 100$	47
รูป 5.9	การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ $Re = 100$	47
รูป 5.10	การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ $Re = 100$	47
รูป 5.11	ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ $Re = 400$	48
รูป 5.12	ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ $Re = 400$	48
รูป 5.13	ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ $Re = 400$	49
รูป 5.14	การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ $Re = 400$	49
รูป 5.15	การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ $Re = 400$	50
รูป 5.16	การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ $Re = 400$	50
รูป 5.17	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการไหลในท่อโรงไฟฟ้า	51
รูป 5.18	ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของความเร็วที่เกิดขึ้นในท่อ	51

รูป 5.19	รายละเอียดลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณมุมซ้ายบนของท่อ	52
รูป 5.20	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ในท่อเหล็กหลังจากใส่แผ่นโลหะ	52
รูป 5.21	ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของความเร็วในท่อหลังจากใส่แผ่นโลหะแล้ว	53
รูป 5.22	รายละเอียดลักษณะการไหลบริเวณปลายแผ่นโลหะทั้งสอง	53
รูป 5.23	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	54
รูป 5.24	การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณี $Ra = 10^4$	55
รูป 5.25	การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณี $Ra = 10^5$	56
รูป 5.26	การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการไหลที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด	57
รูป 5.26	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนในระหว่างผิวท่อ	58
รูป 5.28	ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและรูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนในระหว่างผิวท่อที่มีอุณหภูมิต่างกัน $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ และ $Ra = 3000$	59
รูป 5.29	ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและรูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนในระหว่างผิวท่อที่มีอุณหภูมิต่างกัน $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ และ $Ra = 1000$	59
รูป 5.30	การเปรียบเทียบค่าการนำความร้อนสมมูลที่ผิวด้านใน	60
รูป 5.31	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลในช่องทางที่มีกล่องสี่เหลี่ยมอุณหภูมิสูงกึ่งกลาง	61
รูป 5.32	ผลลัพธ์การไหลในช่องทางไหลที่มีกล่องสี่เหลี่ยมอุณหภูมิสูงกึ่งกลาง	62
รูป 5.33	ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิสำหรับกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านบนและด้านล่างถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อน	62

รูป 5.35	ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิสำหรับกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านบนถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อนแต่ผนังด้านล่างมีอุณหภูมิ 40 °C	63
รูป 5.35	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการหมุนเวียนของอากาศในอาคารรูปโดม	64
รูป 5.36	ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่อากาศเย็นถูกเป่าเข้าด้วยความเร็วต่ำ	64
รูป 5.37	ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่อากาศเย็นถูกเป่าเข้าด้วยความเร็วสูง	65
รูป 6.1	โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบอัดตัวได้	69
รูป 6.2	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสำหรับการไหลแบบอัดตัวได้	70
รูป 6.3	เอลิเมนต์ซ้าย L และเอลิเมนต์ขวา R ที่มีด้าน $\delta$ ร่วมกัน	72
รูป 7.1	แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW	82
รูป 7.2	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหล 3 เท่าของเสียงผ่านพื้นเอียง	84
รูป 7.3	ผลลัพธ์การกระจายของความดันและเวกเตอร์ความเร็วที่คำนวณได้	85
รูป 7.4	ผลลัพธ์การกระจายของความดันและความเร็ว $u$ ซึ่งคำนวณได้จากการใช้ขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กลง	85
รูป 8.1	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่วางตัวในแนวแกนหลัก X-Y บนระนาบ x-y	88
รูป 8.2	ปัญหาค้นหาคอนพื้นที่เอียง	90
รูป 8.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง	91
รูป 8.4	รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง	92
รูป 8.5	รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง	93

รูป 8.6	รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง	94
รูป 8.7	การเปรียบเทียบการกระจายของความหนาแน่นจากวิธีต่าง ๆ กัน	95
รูป 9.1	ปัญหาคลื่นช็อกโค้งจากการไหลความเร็วกว้างเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก	97
รูป 9.2	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้น จากการไหลเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก	97
รูป 9.3	รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก	98
รูป 9.4	รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก	99
รูป 9.5	รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก	99
รูป 9.6	ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อก	100
รูป 9.7	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้น สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อก	101
รูป 9.8	รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อก	101
รูป 9.9	รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อก	102
รูป 9.10	รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อก	103
รูป 9.11	ปัญหาการขยายตัวของ การไหลความเร็วสูง	103
รูป 9.12	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้น สำหรับปัญหาการขยายตัวของ การไหลความเร็วสูง	104



รูป 9.13	รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการขยายตัวของการไหลความเร็วสูง	105
รูป 9.14	รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการขยายตัวของการไหลความเร็วสูง	106
รูป 9.15	รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการขยายตัวของการไหลความเร็วสูง	107
รูป 9.16	ปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อคสองครั้ง	108
รูป 9.17	รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาสะท้อนคลื่นช็อคสองครั้ง	109
รูป 9.18	รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อคสองครั้ง	110
รูป 9.19	รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่น ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อคสองครั้ง	111
รูป 9.20	ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ	112
รูป 9.21	ลักษณะการแบ่งรูปปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่ใช้เอลิเมนต์ แบบสม่ำเสมอและผลการกระจายตัวของความเร็ว	112
รูป 9.22	ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็ว บริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณ A)	113
รูป 9.23	ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็ว บริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณ B)	113
รูป 9.24	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและการกระจายตัว ของความเร็วกรณีที่ผ่านมาการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	113
รูป 9.25	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและการกระจายตัว ของความเร็วกรณีที่ผ่านมาการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	114

รูป 9.26	รายละเอียดของการไหลบริเวณใกล้ช่องแคบและบริเวณที่เกิดการหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบ (บริเวณ C)	114
รูป 9.27	รายละเอียดของการไหลบริเวณใกล้ช่องแคบและบริเวณที่เกิดการหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบ (บริเวณ D)	115
รูป 9.28	รายละเอียดของการไหลบริเวณใกล้ช่องแคบและบริเวณที่เกิดการหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบ (บริเวณ E)	115
รูป 9.29	ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบกรณีผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	115
รูป 11.1	ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในแผ่นโลหะจากการให้ความร้อนซึ่งเคลื่อนที่ได้ไปตามขอบ	127
รูป 11.2	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ไม่ได้จัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้น	128
รูป 11.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้น	130
รูป 11.4	การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่ขอบบนบริเวณความร้อนตกกระทบบนผิวระหว่างผลเฉลยแม่นยำและผลจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและแบบอัตโนมัติ	132
รูป 11.5	ผลลัพธ์การกระจายของความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิจากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ต่างกัน	134

## คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่ของเอลิเมนต์
[A]	เมตริกซ์คงที่เชิงความเร็ว
a	ความเร่ง
{B}	เวกเตอร์ความร้อนผ่านขอบเอลิเมนต์
[B]	เมตริกซ์คงที่เชิงอนุพันธ์ x หรือเมตริกซ์เพื่อหาความเครียด
[C]	เมตริกซ์คงที่เชิงอนุพันธ์ y หรือเมตริกซ์ความยืดหยุ่นของของแข็ง
[D <sub>x</sub> ]	เมตริกซ์การนำความร้อนในแกน x
[D <sub>y</sub> ]	เมตริกซ์การนำความร้อนในแกน y
E	ฟลักซ์ความร้อนในแกน x
{E <sub>I</sub> }	ฟลักซ์แบบไม่หนีดในแกน x
{E <sub>V</sub> }	ฟลักซ์แบบหนีดในแกน x
e	พลังงานภายใน
F	ฟลักซ์ความร้อนในแกน y
[F]	เมตริกซ์เชิงแรง
{F <sub>I</sub> }	ฟลักซ์แบบไม่หนีดในแกน y
{F <sub>V</sub> }	ฟลักซ์แบบหนีดในแกน y
f	แรงเนื่องจากน้ำหนักในตัว
[G]	เมตริกซ์คงที่เชิงพื้นที่
H <sub>i</sub>	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความดัน
[H]	เมตริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความดัน
H	ความกว้างของเอลิเมนต์
[I]	เมตริกซ์เอกลักษณ์

[K]	เมตริกซ์แรงเฉื่อยหรือเมตริกซ์ความแข็งแรง
k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
$L_i$	ฟังก์ชันพิคตของพื้นที่
M	ค่ามัคนัมเบอร์
[M]	เมตริกซ์คงที่ความหนืดหรือเมตริกซ์มวล
m	มวล
$N_i$	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็ว
[N]	เมตริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็ว
$n_x, n_y$	ทิศทางโคซายน์
p	ความดัน
[Q]	เมตริกซ์เนื่องจากแรงที่ผิว
Q	ปริมาณฟลักซ์ความร้อน
R	ค่าคงตัวสากลของแก๊ส
[R]	เมตริกซ์คงที่เนื่องจากแรงที่ผิว
{R}	เวกเตอร์การผลิตความร้อนภายในเอลิเมนต์
Ra	เรย์เลห์นัมเบอร์
Re	เรย์โนลด์นัมเบอร์
[S]	เมตริกซ์ผลรวมเชิงความหนืด
T	แรงที่ผิว
t	เวลา
{U}	เวกเตอร์ของปริมาณอนุรักษ์
u	ความเร็วในแกน x
v	ความเร็วในแกน y
X-Y	โคออร์ดิเนตหลัก

x-y	โคออร์ดิเนตทั่วไป
{ $\sigma$ }	เวกเตอร์ของค่าความเค้นย่อย
$\sigma$	ความเค้นในแนวตั้งฉาก
{ $\delta$ }	เวกเตอร์ของค่าการเสียรูปย่อย
{ $\epsilon$ }	เวกเตอร์ของค่าความเครียดย่อย
{ $\epsilon_0$ }	เวกเตอร์ของค่าความเครียดย่อยเนื่องจากอุณหภูมิ
$\epsilon$	ความเครียดหรือพลังงานรวม
$\rho$	ความหนาแน่น
$\mu$	ความหนืดจลนศาสตร์
$\nu$	ความหนืดพลศาสตร์หรืออัตราส่วนปัวซองส์
$\tau$	ความเค้นเฉือน
$\gamma$	อัตราส่วนความร้อนจำเพาะ
$\alpha$	สัมประสิทธิ์การขยายตัว

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของงานวิจัย

การออกแบบงานต่างๆทางวิศวกรรมเครื่องกลในปัจจุบัน ต้องการความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์และระเบียบวิธีการคำนวณเพื่อให้งานที่ออกแบบมานั้นมีประสิทธิภาพที่สูงสุด โดยเฉพาะอย่างยิ่ง งานต่างๆในปัจจุบันล้วนมีรูปทรงที่ซับซ้อน ยกตัวอย่างเช่น การออกแบบโครงสร้างของรถยนต์ที่มีส่วนประกอบอันซับซ้อน ซึ่งเมื่อเกิดการชนแล้วยุบตัว ห้องผู้โดยสารจะยุบตัวน้อยที่สุดทำให้ผู้ขับขี่ปลอดภัย หรือการออกแบบรูปทรงของรถยนต์ที่มีความโค้งมนที่เหมาะสมทำให้อากาศไหลผ่านลำตัวรถยนต์ได้สะดวก เพื่อช่วยลดแรงต้านของอากาศในขณะขับขี่ ซึ่งจะเป็นผลโดยตรงกับการประหยัดน้ำมัน รวมไปถึงการออกแบบเครื่องยนต์ของรถยนต์ให้มีรูปร่างที่สามารถถ่ายเทความร้อนได้ดี เพื่อลดระดับอุณหภูมิในห้องเครื่องยนต์ อันเป็นผลต่อเนื่องในการลดความเค้นอันเกิดขึ้นจากอุณหภูมิ การคำนวณความแข็งแรงของโครงสร้างรถยนต์ที่มีรูปร่างซับซ้อน ลักษณะสภาวะของอากาศที่ไหลผ่านตัวรถที่โค้งมน ไปจนถึงระดับอุณหภูมิของเครื่องยนต์นี้ ต่างอยู่ในขอบข่ายของงานการออกแบบทางวิศวกรรมเครื่องกลซึ่งเกี่ยวข้องกับกลศาสตร์ในของแข็ง (Solid Mechanics) การไหลของของเหลว (Fluid Flows) และการถ่ายเทความร้อน (Heat Transfer) ตามลำดับ

ระเบียบวิธีการคำนวณ (Computational methods) เพื่อหาความแข็งแรงของโครงสร้างของรถยนต์ สภาวะของอากาศที่ไหลผ่านลำตัวรถ รวมทั้งระดับอุณหภูมิและความเค้นที่เกิดขึ้นบนเครื่องยนต์นั้นมีหลายระเบียบวิธี แต่เนื่องจากปัญหาเหล่านี้ล้วนถูกออกแบบให้มีรูปร่างที่ซับซ้อน ระเบียบวิธีการคำนวณที่ได้รับความนิยมและเริ่มใช้กันโดยแพร่หลายในขณะนี้ คือ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีที่เริ่มต้นมาจากการใช้การคำนวณเพื่อหาความแข็งแรงของโครงสร้างเครื่องบินซึ่งปกติจะมีรูปร่างที่ซับซ้อน จากนั้นจึงได้ถูกนำไปประยุกต์เพื่อวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นในโครงสร้างต่างๆ (Structural analysis) แล้วจึงได้ถูกนำมาประยุกต์เข้ากับงานอื่นๆทางวิศวกรรมเครื่องกล ซึ่งงานส่วนใหญ่ยังคงเป็นงานที่เกี่ยวข้องกับความแข็งแรงของของแข็ง (Solid mechanics) เช่น การออกแบบเฟืองเกียร์ การ

ออกแบบชิ้นส่วนต่างๆในเครื่องจักรกล ในปัจจุบัน มีปัญหาทางวิศวกรรมด้านอื่นๆอีกเป็นจำนวนมากนอกเหนือไปจากปัญหาทางด้านโครงสร้างหรือปัญหาของความแข็งแรงในชิ้นงานที่ต้องการการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากปัญหาทางด้านอื่นๆเหล่านี้ ล้วนมีรูปร่างที่ซับซ้อนทำให้การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเดิมๆเป็นได้ลำบาก อาทิเช่น ปัญหาทางด้านการไหล (Fluid flows) ผ่านรูปทรงใดๆ และปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน (Heat transfer) ในชิ้นงานที่มีรูปร่างซับซ้อน ดังที่ได้กล่าวมาในตอนต้น

การคำนวณปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาด้านต่างๆเหล่านี้ ต้องการองค์ประกอบหลายๆประการ นับตั้งแต่ความรู้ความเข้าใจในสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) ทางวิศวกรรมศาสตร์ที่สอดคล้องกับปัญหานั้นๆ ความรู้ในการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้อย่างถูกต้อง ความรู้พื้นฐานในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical methods) ต่างๆ รวมไปถึงความรู้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน ตลอดจนความสามารถในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ได้อย่างพอเพียง องค์ประกอบเหล่านี้ หากได้ผสมผสานกันอย่างเหมาะสมควบคู่ไปกับการทำวิจัยและพัฒนาแล้ว จะก่อให้เกิดระเบียบขั้นตอนของการคำนวณซึ่งสามารถทำนายปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นได้ การผสมผสานความรู้ต่างๆเหล่านี้ นอกจากจะช่วยแก้ปัญหาต่างๆดังที่ต้องการได้แล้ว ยังมีผลต่อการศึกษาด้านการคำนวณสำหรับงานวิศวกรรมในอนาคตเป็นอย่างยิ่ง เพราะกระบวนการดังกล่าว ตั้งอยู่บนรากฐานของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถประยุกต์เข้าแก้ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนใดๆได้ ทั้งนี้เนื่องจากงานทางวิศวกรรมในปัจจุบันจะถูกออกแบบให้มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อน อันเป็นผลมาจากความต้องการในรูปทรงที่สวยงาม มีความแข็งแรงและใช้ปริมาณวัสดุที่น้อยที่สุด

## 1.2 วัตถุประสงค์และขอบเขตของการวิจัย

โครงการวิจัยนี้เป็นโครงการของงานวิจัยพื้นฐาน (Basic research) ในการพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาต่างๆที่เกี่ยวข้องกับงานทางวิศวกรรมเครื่องกล ซึ่งประกอบด้วยปัญหาทางด้านการไหลทั้งแบบการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (Compressible flow) และการไหลความเร็วต่ำแบบไม่อัดตัว (Incompressible flow) ปัญหาการถ่ายเทความร้อน และปัญหาการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็ง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแก้ปัญหาต่างๆเหล่านี้ จะประดิษฐ์ขึ้นอย่างเป็นขั้นเป็นตอน รวมทั้งการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันซึ่งสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย และสามารถทำการคำนวณได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วน

บุคคลที่มีใช้กันโดยทั่วไป อันจะทำให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เผยแพร่ได้กว้างขวางมากยิ่งขึ้น ผลงานทางด้านวิชาการใหม่ๆที่เกิดขึ้นจากโครงการวิจัยนี้จะทำการเผยแพร่โดยการนำเสนอในที่ประชุมทางวิชาการและตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการต่างๆ และเนื่องจากผลงานวิจัยที่เกิดขึ้นจากโครงการวิจัยนี้ได้แสดงขั้นตอนการประดิษฐ์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่างๆกันโดยละเอียด จึงสามารถนำไปศึกษาหรือทำวิทยานิพนธ์ในสาขาอื่นๆที่มีความคล้ายคลึงกันได้ รวมทั้งการสานต่อสู่การทำงานวิจัยในระดับสูงได้อีกต่อไป

### 1.3 วิธีดำเนินการวิจัยโดยสรุป

การวิจัยของโครงการวิจัยนี้ได้ดำเนินไปอย่างเป็นขั้นเป็นตอนตามแผนงานที่ได้วางไว้ตั้งแต่เริ่มโครงการ ขั้นตอนการวิจัยโดยสรุป เริ่มจากการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวีย-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) พร้อมกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) โดยทั่วไปของการไหลตั้งอธิบายในบทที่ 2 จากนั้นจึงเริ่มประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และคอมพิวเตอร์โปรแกรมที่สอดคล้องกันดังแสดงในบทที่ 3 และ 4 ตามลำดับ ประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และคอมพิวเตอร์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนี้ได้แสดงโดยการวิเคราะห์ปัญหาการไหลหลายรูปแบบผ่านรูปทรงที่มีความซับซ้อนต่างๆกันในบทที่ 5 จากนั้นในบทที่ 6 เป็นการนำเสนอปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ซึ่งเป็นปัญหาที่เริ่มได้รับความสนใจในปัจจุบันในการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาผลลัพธ์ ทั้งนี้เนื่องจากลักษณะของการไหลชนิดนี้มักมีความซับซ้อนอันเกิดจากคลื่นช็อค (Shock wave) ซึ่งเป็นสภาวะของการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงจากระดับหนึ่งผ่านแนวคลื่นช็อคไปสู่อีกระดับหนึ่งโดยฉับพลัน สมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลชนิดนี้และการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ รวมทั้งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันได้อธิบายโดยละเอียดในบทที่ 6 และ 7 ตามลำดับ

ผลลัพธ์ต่างๆที่คำนวณได้จากการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับปัญหาการไหลทั้งแบบไม่อัดตัวและแบบอัดตัวได้แสดงให้เห็นถึงความต้องการในการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง ในขณะที่เดียวกัน เอลิเมนต์ขนาดใหญ่กว่าสามารถนำมาใช้ในบริเวณอื่นๆที่ผลลัพธ์มีการเปลี่ยนแปลงน้อยเพื่อช่วยลดเวลาในการคำนวณลง ก่อให้เกิดระเบียบวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังอธิบายในบทที่ 8 ซึ่งได้นำไปประยุกต์แก้ปัญหาการไหลต่างๆกันหลายปัญหาดังแสดงในบทที่ 9



ในทำนองเดียวกัน ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้นำมาประยุกต์เพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและการเสีรูปรวมทั้งความเค้นในของแข็งในบทที่ 10 ระเบียบวิธีการจัดเอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อช่วยปรับปรุงประสิทธิภาพของการแก้ปัญหาการไหลได้นำมาประยุกต์กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นในของแข็งเช่นกัน เพื่อคำนวณลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและความเค้นอันเนื่องจากอุณหภูมิ (Thermal stress) ดังอธิบายในบทที่ 11

#### 1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ก่อให้เกิดระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยคำอธิบายอย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยละเอียดสำหรับการแก้ปัญหาทางด้านการไหล การถ่ายเทความร้อน และความแข็งแรงในของแข็ง สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาเหล่านี้ได้นำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน เพื่อแสดงให้เห็นถึงศักยภาพของการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมเครื่องกล กระบวนการดังกล่าวนี้สามารถนำไปใช้ในการศึกษาหรือดัดแปลงเพื่อการทำวิทยานิพนธ์หรืองานวิจัยชนิดอื่นๆได้โดยตรง ในขณะเดียวกัน ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากโครงการวิจัยนี้ซึ่งใช้ทำการคำนวณได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั่วไป สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปแบบอื่นๆ รวมทั้งสามารถนำไปใช้เป็นต้นแบบในการทำงานวิจัยอื่นๆต่อไป เพื่อช่วยยกระดับความรู้ความสามารถของนิสิตนักศึกษาและนักวิจัยในประเทศไทยในการใช้ระเบียบวิธีการคำนวณที่ตั้งอยู่บนรากฐานของสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อแก้ปัญหาและออกแบบงานทางวิศวกรรม ซึ่งจะช่วยผลักดันงานวิจัยทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีการคำนวณของประเทศให้เจริญรุดหน้ามากยิ่งขึ้นไป

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นจากโครงการวิจัยนี้ รวมทั้งระเบียบวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อช่วยเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ ซึ่งในขณะเดียวกันลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณและปริมาณหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงนั้น ได้ก่อให้เกิดบทความทางวิชาการขึ้นรวมทั้งสิ้น 6 บทความ ซึ่ง 4 บทความได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการ ส่วนอีก 2 บทความได้เสนอไปแล้วและกำลังรอการตอบรับรายละเอียดของบทความทางวิชาการเหล่านี้ได้แสดงในหัวข้อ “บทความทางวิชาการที่เกิดขึ้นจากงานวิจัยนี้” ในตอนท้ายของรายงานวิจัยนี้

## บทที่ 2

### ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์

ในปัจจุบัน การออกแบบผลิตภัณฑ์ต่างๆเพื่อใช้ในชีวิตประจำวันหรือในภาคอุตสาหกรรม ผู้ออกแบบต้องคำนึงถึงประสิทธิภาพของการใช้งานรวมทั้งลักษณะรูปร่างของผลิตภัณฑ์นั้นๆ ยกตัวอย่างเช่น การออกแบบรูปทรงของรถยนต์ ผู้ออกแบบต้องตระหนักถึงความแข็งแรงของโครงสร้าง ความปลอดภัยหากเกิดการชน การประหยัดน้ำมัน รวมไปถึงความสวยงาม การออกแบบเพื่อให้เกิดการประหยัดน้ำมันอาจทำได้หากออกแบบรูปทรงของรถยนต์นั้นให้มีลักษณะที่เพรียวลม เช่น รูปทรงตอนส่วนหน้าของรถ นับตั้งแต่กระโปรงรถ กระจกหน้า และกันชนต้องมีรูปร่างที่โค้งมน ในขณะที่ด้านท้ายของรถยนต์ต้องมีลักษณะเพรียวลมเพื่อป้องกันการเกิดลักษณะการหมุนวนของอากาศ (Recirculation) ที่จะหน่วงการขับเคลื่อนของตัวรถทำให้ใช้น้ำมันมากขึ้น เนื่องจากโครงสร้างของรถยนต์โดยปรกติจะมีลักษณะที่ซับซ้อน การคำนวณความแข็งแรงของโครงสร้างจึงเป็นสิ่งจำเป็น ในขณะที่ลักษณะการไหลของอากาศผ่านตัวรถนั้นเป็นสิ่งจำเป็นไม่น้อยไปกว่ากัน หากปรากฏการณ์ต่างๆเหล่านี้สามารถทราบได้ก่อนการนำแบบที่ออกมาแล้วนั้นไปสร้างเป็นของจริง จะช่วยประหยัดค่าใช้จ่ายไปได้มาก ยิ่งไปกว่านั้น ผู้ออกแบบจะเกิดความมั่นใจในรูปทรงของผลิตภัณฑ์นั้นว่าจะก่อให้เกิดประสิทธิภาพได้สูงสุด หลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูก (Trial and error) ดังที่อาจเคยใช้กันมาในอดีต

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ชนิดหนึ่งที่ได้รับการพัฒนาและเป็นที่นิยมใช้กันมากในปัจจุบัน เพราะสามารถประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาต่างๆที่มีรูปร่างที่ซับซ้อนโดยทั่วไป (Zienkiewicz, 1991) ปัญหาในงานวิศวกรรมส่วนใหญ่ที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ได้ถูกนำไปใช้กันมากคือปัญหาที่เกี่ยวกับความแข็งแรงในของแข็ง (Hughes, 1987 และ Cook, 1989) เช่น การคำนวณความแข็งแรงของโครงสร้างสะพาน รถยนต์ เฟืองเกียร์ ฯลฯ เนื่องจากระเบียบวิธีดังกล่าว ตั้งอยู่บนรากฐานของคณิตศาสตร์และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ทำให้ระเบียบวิธีนี้ได้เริ่มถูกนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาสำหรับงานวิศวกรรมในสาขาอื่นๆในปัจจุบัน

ตลอดระยะเวลาประมาณ 30 ปีที่ผ่านมา การคำนวณลักษณะการไหลของของเหลวมักจะทำโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องนี้เป็นระเบียบวิธีที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจแต่ไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่มี

ความเที่ยงตรงสูงหากรูปร่างของปัญหานั้นมีลักษณะที่ซับซ้อน (Lam, 1994) ปัญหาของการไหล อาจจำแนกออกได้เป็น 4 ประเภทใหญ่ๆ กล่าวคือ: (1) การไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัว (Inviscid incompressible flow), (2) การไหลแบบไม่หนืดแต่อัดตัวได้ (Inviscid compressible flow), (3) การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว (Viscous incompressible flow), และ (4) การไหลแบบหนืดและอัดตัวได้ (Viscous compressible flow) การไหลประเภทแรกซึ่งคือการไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัวนั้น ตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่สำคัญ กล่าวคือ การไหลนี้มีความเร็วต่ำทำให้ความหนาแน่นของของไหลนั้นคงที่สม่ำเสมอและของไหลนั้นไม่มีความหนืด ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาประเภทนี้ในสมัยแรกๆ (Oden, 1974 และ Gallagher, 1975) การไหลประเภทที่ 2 และ 4 ซึ่งเป็นแบบอัดตัวได้ กล่าวคือความหนาแน่นของของไหลนั้นเปลี่ยนแปลงไปได้ตามตำแหน่งต่างๆ โดยปรกติจะเกิดขึ้นกับปัญหาของการไหลที่มีความเร็วสูง เช่น การไหลผ่านเครื่องบินที่บินเร็วกว่าเสียง (Peraire, 1988 และ Hassan, 1991) เป็นต้น ซึ่งการคำนวณปรากฏการณ์การไหลชนิดนี้กำลังอยู่ในระดับการทำวิจัยและยังต้องการการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นไปอีก

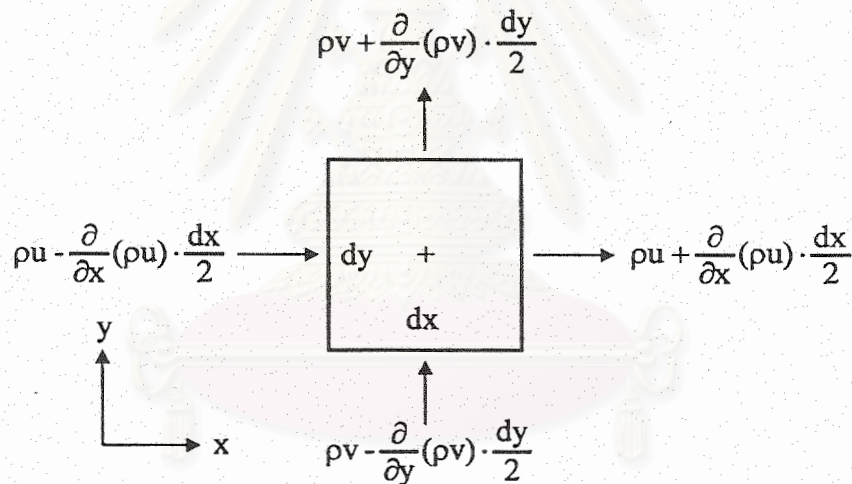
การไหลประเภทที่ 3 ซึ่งเป็นการไหลแบบมีความหนืดและความหนาแน่น (Density) ของของไหลที่ถูกจัดว่ามีความสม่ำเสมอตลอดขอบเขตของการไหลนั้น จัดได้ว่ามีความสำคัญต่อการออกแบบงานต่างๆ ในทางวิศวกรรมในปัจจุบันมากเช่นกัน ตัวอย่างของปัญหาที่สอดคล้องกับการไหลประเภทนี้ ได้แก่ การไหลผ่านรถยนต์ การไหลของสายน้ำในลำคลองที่มีความคดเคี้ยวลงสู่บึง การไหลหมุนวนของอากาศภายในห้องทำงาน ฯลฯ ปัญหาเหล่านี้เป็นการไหลแบบมีความหนืดซึ่งหากสามารถคำนวณปรากฏการณ์ของลักษณะการไหลได้ จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการออกแบบได้มากยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่น การติดตั้งเครื่องปรับอากาศในห้องทำงาน หากตำแหน่งที่ติดตั้งนั้นก่อให้เกิดจุดอับที่มุมห้องอันเกิดจากการหมุนวนของอากาศในบริเวณนั้นแล้ว จะทำให้การถ่ายเทอากาศเป็นไปได้ไม่ดี หากผู้ออกแบบสามารถทราบปรากฏการณ์ดังกล่าวได้ล่วงหน้าก่อนการติดตั้งจริง ก็หลีกเลี่ยงสิ่งที่ไม่พึงประสงค์ดังกล่าวได้ และในขณะเดียวกันผู้ออกแบบสามารถทำการคำนวณหาตำแหน่งการติดตั้งที่เหมาะสมมากที่สุด อันจะก่อให้เกิดการหมุนเวียนของอากาศภายในห้องที่ดีที่สุด เป็นต้น

การแก้ปัญหาของการไหลประเภทที่ 3 ซึ่งเป็นการไหลแบบมีความหนืดนี้ ตัวไม่รู้ค่าประกอบด้วยค่าของความเร็วของการไหลในทิศทางต่างๆกัน (Velocity components) ค่าของความดัน (Pressure) และอุณหภูมิ (Temperature) ณ ตำแหน่งใดๆ ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้คำนวณมาได้จากระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ซึ่งประกอบด้วยสมการอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear partial differential equations) หลายสมการ ดังนั้นในบทนี้จะเป็นการแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) ที่อธิบายลักษณะของการไหลผ่านรูปทรงต่างๆภายใต้เงื่อนไข

ไซขอบเขต (Boundary conditions) ใดๆ สำหรับการไหลโดยทั่วไปนั้น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์จะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับ (1) การอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) (2) การอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum) และ (3) การอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy) สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) อันประกอบไปด้วยตัวแปรตาม (Dependent variables) ที่ไม่ทราบค่าหลายตัวแปร อันได้แก่ ตัวแปรของความเร็วในทิศต่างๆกัน ตัวแปรของความดัน และตัวแปรของอุณหภูมิ

## 2.1 สมการอนุรักษ์มวล

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลในสองมิติสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยนำกฎการอนุรักษ์มวลมาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุม (Control volume) ของของไหลที่มีความลึกหนึ่งหน่วย ดังแสดงในรูป 2.1



รูป 2.1 ความสมดุลของการไหลของมวลผ่านปริมาตรควบคุม

จากกฎการอนุรักษ์มวลซึ่งกล่าวไว้ว่ามวลของสสารไม่มีการสูญหาย ดังนั้นเมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุมในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในปริมาตรควบคุมจะมีค่าเท่ากับอัตราการไหลสุทธิของมวลของของไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุม ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy &= \left[ \rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \cdot \frac{dx}{2} \right] dy + \left[ \rho v - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \cdot \frac{dy}{2} \right] dx \\ &\quad - \left[ \rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \cdot \frac{dx}{2} \right] dy - \left[ \rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \cdot \frac{dy}{2} \right] dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

โดย  $\rho$  แทนความหนาแน่นของของไหล (Fluid density)

$u$  แทนความเร็วของของไหลในแนวแกน  $x$

$v$  แทนความเร็วของของไหลในแนวแกน  $y$

สมการ (2.1) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.2)$$

ซึ่งเขียนในรูปแบบแบบเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.3)$$

โดย  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$  (2.4)

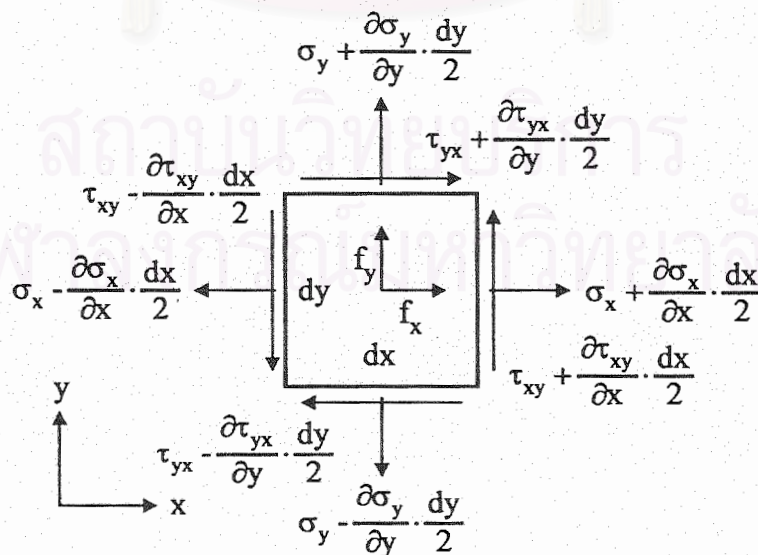
$\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j}$  (2.5)

$\hat{i}$  แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน  $x$

$\hat{j}$  แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน  $y$

## 2.2 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในสองมิติสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยนำกฎข้อที่สองของนิวตันมาประยุกต์ใช้กับชิ้นส่วนของไหลที่มีความลึกหนึ่งหน่วย ดังแสดงในรูป 2.2



รูป 2.2 ความสมดุลของแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหล

จากกฎข้อที่สองของนิวตันซึ่งกล่าวไว้ว่า แรงลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลของวัตถุนั้นกับความเร่ง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.6)$$

$$\text{โดย } \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad (2.7)$$

$F_x$  แทนแรงกระทำบนวัตถุในแนวแกน x

$F_y$  แทนแรงกระทำบนวัตถุในแนวแกน y

m แทนมวลของวัตถุ

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad (2.8)$$

$a_x$  แทนความเร่งของวัตถุในแนวแกน x

$a_y$  แทนความเร่งของวัตถุในแนวแกน y

เนื่องจากสมการ (2.6) อยู่ในรูปแบบเวกเตอร์ ดังนั้นจึงกระจายให้อยู่ในรูปแบบสเกลาร์ได้เป็น

$$F_x = ma_x \quad (2.9a)$$

$$F_y = ma_y \quad (2.9b)$$

แรงลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุประกอบด้วย แรงวัตถุ (Body force) และแรงที่ผิว (Surface force) แรงวัตถุเป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุโดยไม่มีการสัมผัส อันได้แก่ แรงเนื่องจากความโน้มถ่วง แรงทางไฟฟ้า และแรงแม่เหล็ก เป็นต้น ส่วนแรงที่ผิวเป็นแรงที่กระทำบนพื้นผิวของวัตถุโดยตรง ได้แก่ แรงเนื่องจากความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเฉือน เมื่อพิจารณาแรงลัพธ์ที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหลในแนวแกน x ในรูป 2.2 จะเห็นได้ว่าแรงวัตถุมีค่าเท่ากับ  $\rho f_x dx dy$  ส่วนแรงที่ผิวมีค่าเท่ากับ

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy - \left( \sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx$$

และเมื่อนำมารวมกันจะได้

$$F_x = \rho f_x dx dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy \quad (2.10)$$

โดย  $f_x$  แทนแรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน x

$\sigma_x$  แทนความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x

$\tau_{yx}$  แทนความเค้นเฉือนในแนวแกน x บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y

ความเร็ว  $u$  ในแกน  $x$  นั้นเป็นฟังก์ชันของโคออร์ดิเนต  $x, y$  และเวลา  $t$

$$u = u(x, y, t) \quad (2.11)$$

การหาอนุพันธ์ของความเร็ว  $u$  ในแนวแกน  $x$  เมื่อเทียบกับเวลา กระทำได้โดยการใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule) ดังนี้

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (2.12)$$

เนื่องจากพจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.9a) คือ

$$ma_x = \rho dx dy \cdot \frac{du}{dt} \quad (2.13)$$

แทนสมการ (2.12) ลงในสมการ (2.13) จะได้

$$ma_x = \rho dx dy \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.14)$$

นำผลที่ได้จากสมการ (2.10) และ (2.14) แทนลงไปนสมการ (2.9a) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.15)$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u \right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.16)$$

และเมื่อพิจารณาพจน์ต่างๆทางด้านซ้ายของสมการ (2.16) จะเห็นได้ว่า

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) - u \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.18)$$

แทนสมการ (2.17) และ (2.18) ลงในสมการ (2.16) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) - u \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.19)$$

เนื่องจากพจน์ต่างๆที่ปรากฏอยู่ในวงเล็บสี่เหลี่ยมของสมการ (2.19) นั้นคือสมการ (2.3) ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (2.19) จึงลดรูปมาเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.20)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาแรงลัพธ์ที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหลในแนวแกน  $y$  ในรูป 2.2 แล้วดำเนินการตามขั้นตอนที่ได้แสดงไว้ข้างต้น จะได้ผลดังนี้

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (2.21)$$

ซึ่งสามารถเขียนในอีกรูปแบบหนึ่งได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (2.22)$$

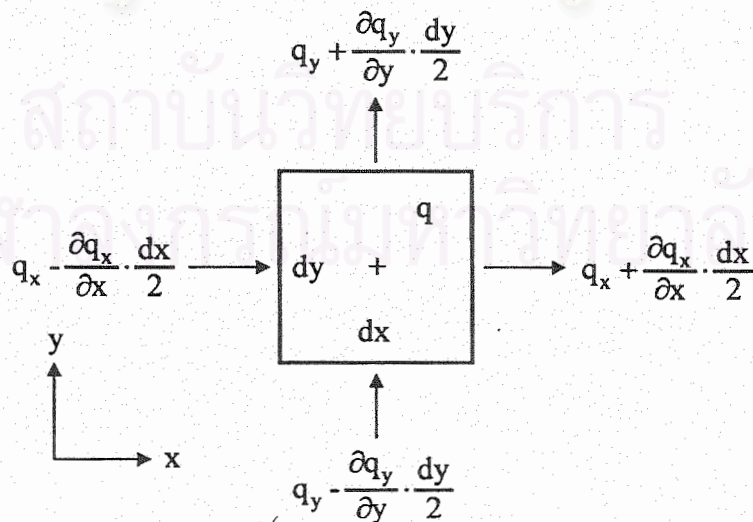
โดย  $f_y$  แทนแรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในแนวแกน  $y$

$\sigma_y$  แทนความเค้นตั้งฉากในแนวแกน  $y$

$\tau_{xy}$  แทนความเค้นเฉือนในแนวแกน  $y$  บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน  $x$

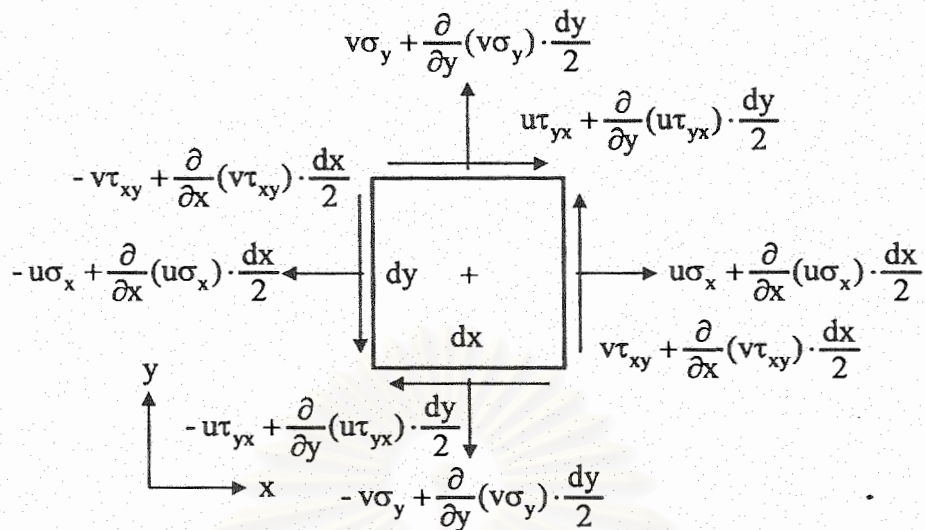
### 2.3 สมการอนุรักษ์พลังงาน

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานในสองมิติสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ โดยนำกฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์มาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุมของของไหลที่มีความลึกหนึ่งหน่วย ดังแสดงในรูป 2.3 และ 2.4



รูป 2.3 อัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ปริมาตรควบคุมของของไหล





รูป 2.4 อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม

จากกฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ซึ่งกล่าวไว้ว่า พลังงานที่เพิ่มขึ้นภายในปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับผลรวมของความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุมกับงานซึ่งกระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเพื่อเปรียบเทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (2.23)$$

โดย  $E_t$  แทนพลังงานรวมของปริมาตรควบคุม

$Q$  แทนความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุม

$W$  แทนงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม

พลังงานรวมของปริมาตรควบคุมประกอบไปด้วย พลังงานภายใน (Internal energy) พลังงานจลน์ (Kinetic energy) และพลังงานศักย์ (Potential energy) ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานรวมของปริมาตรควบคุม คือ

$$\frac{dE_t}{dt} = \rho dx dy \cdot \frac{d}{dt} \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \vec{f} \cdot \vec{r} \right) \quad (2.24)$$

โดย  $e$  แทนพลังงานภายในของของไหลต่อหนึ่งหน่วยมวล

$$\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} \quad (2.25)$$

$\vec{r}$  แทนเวกเตอร์แสดงตำแหน่งของของไหล

อัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ปริมาตรเป็นผลมาจาก ความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง และการถ่ายเทความร้อนอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ จากรูป 2.3 จะเห็นได้ว่า อัตราการผลิตความร้อนมีค่าเท่ากับ  $\rho q dx dy$  และอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับ

$$\left( q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy + \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy + \left( q_y - \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx$$

เมื่อนำมารวมกันจะได้

$$\frac{dQ}{dt} = \rho q dx dy + \left( - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.26)$$

โดย  $q$  แทนความร้อนที่ผลิตได้เองต่อหนึ่งหน่วยมวล  
 $q_x$  แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน  $x$   
 $q_y$  แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน  $y$

อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูป 2.4 เป็นอัตราการทำงานอันเนื่องมาจากความเค้นที่ผิวของปริมาตรควบคุม โดยอ้างอิงมาจากรูป 2.2 ซึ่งมีค่าดังสมการ

$$\frac{dW}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\sigma_y) \right] dx dy \quad (2.27)$$

แทนสมการ (2.24), (2.26) และ (2.27) ลงในสมการ (2.23) แล้วจัดรูปใหม่ได้

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{f} \cdot \vec{V} = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\sigma_y) \quad (2.28)$$

และจากสมการ (2.28) หากให้  $\epsilon$  แทนผลรวมของพลังงานภายในและพลังงานจลน์ดังนี้

$$\epsilon = e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \quad (2.29)$$

สมการ (2.28) จะเปลี่ยนรูปมาเป็น

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\sigma_y) + \rho (uf_x + vf_y) \quad (2.30)$$

เนื่องจากค่า  $\varepsilon$  เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง  $(x,y)$  และเวลา  $(t)$  ดังนั้น

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (2.31)$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (2.30) จะได้

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} \right) &= \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\sigma_y) + \rho (uf_x + vf_y) \end{aligned} \quad (2.32)$$

เนื่องจากค่าทางด้านซ้ายของสมการ (2.32) คือ

$$\rho \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} \right) = \rho \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \varepsilon \right) \quad (2.33)$$

และเนื่องจาก

$$\rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (2.34)$$

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot (\rho\varepsilon \vec{V}) - \varepsilon \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.35)$$

ดังนั้น สมการ (2.32) จึงกลายมาเป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varepsilon) - \varepsilon \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho\varepsilon \vec{V}) &= \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\sigma_y) + \rho (uf_x + vf_y) \end{aligned} \quad (2.36)$$

นอกจากนั้น พจน์ในวงเล็บใหญ่ของสมการ (2.36) เหมือนกับสมการ (2.3) ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (2.36) จึงลดรูปมาเป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varepsilon) + \nabla \cdot (\rho\varepsilon \vec{V}) &= \rho q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\sigma_y) + \rho (uf_x + vf_y) \end{aligned} \quad (2.37)$$

จากกฎของฟูรีเยร์ (Fourier's law) อัตราการถ่ายเทความร้อนของวัตถุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic material) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.38a)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.38b)$$

โดย  $k$  แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล (Fluid thermal conductivity)

$T$  แทนอุณหภูมิของของไหล (Fluid temperature)

เมื่อนำสมการ (2.38a-b) แทนลงในสมการ (2.37) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla \cdot (\rho \epsilon \vec{V}) &= \rho q + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_y) + \rho (u f_x + v f_y) \end{aligned} \quad (2.39)$$

## 2.4 สมการความเค้นในของไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมและการอนุรักษ์พลังงานนั้นเกี่ยวข้องกับความเค้นที่กระทำบนชิ้นส่วนของของไหล ความเค้นดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความดันและความเร็ว (Anderson, 1995) ได้ดังนี้

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.40)$$

$$\sigma'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.41)$$

โดย  $p$  แทนความดันรวม (Total pressure) ของของไหล

$\delta_{ij}$  แทน Kronecker delta ซึ่ง  $\delta_{ij} = 1$  เมื่อ  $i = j$  และ  $\delta_{ij} = 0$  เมื่อ  $i \neq j$

$\mu$  แทนความหนืดพลศาสตร์ของของไหล (Fluid dynamic viscosity)

$\lambda$  แทน Second viscosity coefficient

และจากสมมติฐานของสโตคส์ (Stokes's hypothesis) ซึ่งกำหนดว่า (Schlichting, 1968)

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (2.42)$$

แทนค่า  $\lambda$  จากสมการ (2.42) ลงในสมการ (2.41) จะได้

$$\sigma'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.43)$$

และหาก  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $\sigma'_{11} = \sigma'_x$ ,  $\sigma'_{12} = \tau'_{xy}$ ,  $\sigma'_{21} = \tau'_{yx}$ ,

$\sigma'_{22} = \sigma'_y$  สมการ (2.43) ก่อให้เกิด

$$\sigma'_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.44a)$$

$$\sigma'_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.44b)$$

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.44c)$$

ดังนั้นความเค้นที่กระทำบนชิ้นส่วนของของไหล คือ

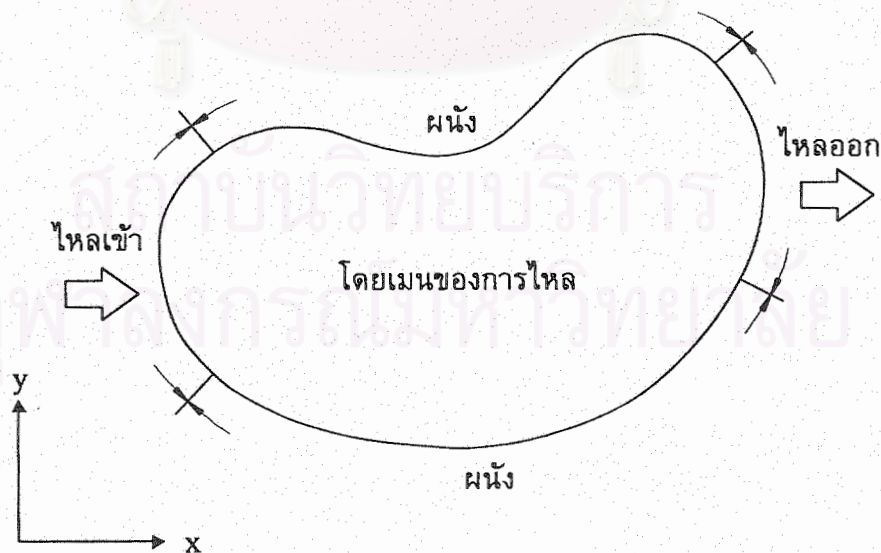
$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.45a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.45b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.45c)$$

## 2.5 เงื่อนไขขอบเขต

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 2.1 ถึง 2.3 มีความสัมพันธ์กันและก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว ผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตของโดเมนของการไหล ซึ่งโดยทั่วไปแล้วเงื่อนไขขอบเขตของโดเมนของการไหลดังแสดงในรูป 2.5 ประกอบไปด้วย



รูป 2.5 โดเมนของการไหลและเงื่อนไขขอบเขต

(1) เงื่อนไขขอบเขตที่ช่องทางที่ของไหลไหลเข้า ( $S_i$ ) ซึ่งโดยปกติจะกำหนดความเร็วและอุณหภูมิของของไหลดังนี้

$$u = u_i(x, y) \quad (2.46a)$$

$$v = v_i(x, y) \quad (2.46b)$$

$$T = T_i(x, y) \quad (2.46c)$$

(2) เงื่อนไขขอบเขตที่ช่องทางที่ของไหลไหลออก ( $S_o$ ) ซึ่งโดยปกติจะกำหนดแรงที่กระทำบนขอบเขตดังนี้

$$P_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m \quad (2.47a)$$

$$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad (2.47b)$$

โดย  $P_x$  แทนแรงที่กระทำบนขอบเขตในแนวแกน x

$P_y$  แทนแรงที่กระทำบนขอบเขตในแนวแกน y

$l, m$  แทนทิศทางโคซายน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขต

(3) เงื่อนไขขอบเขตที่ผนัง ( $S_w$ ) ซึ่งกำหนดความเร็วของของไหลที่ผนัง และอุณหภูมิของของไหลที่ผนังหรือฟลักซ์ความร้อน (Heat flux) ที่ถ่ายเทเข้าสู่โดเมนของการไหลผ่านผนังดังนี้

$$u = u_w(x, y) \quad (2.48a)$$

$$v = v_w(x, y) \quad (2.48b)$$

$$T = T_w(x, y) \quad \text{หรือ} \quad q_s = q_w(x, y) \quad (2.48c)$$

โดย  $q_s$  แทนฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่โดเมนของการไหลผ่านผนัง



### บทที่ 3

## การประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว

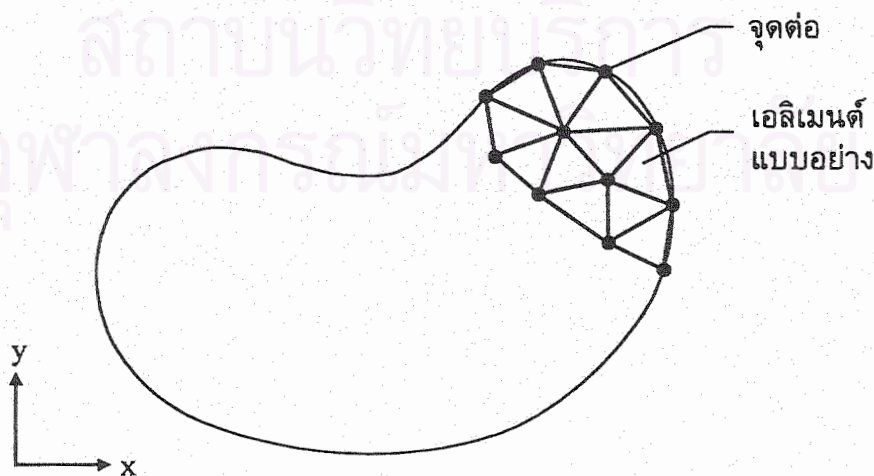
ในบทนี้ จะแสดงขั้นตอนการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว โดยเริ่มตั้งแต่การอธิบายขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเมตริกซ์ที่เกี่ยวข้องต่างๆ จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหล รวมทั้งการประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้นั้นอยู่ในรูปแบบสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear equations)

### 3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาทั่วไปด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยขั้นตอนทั้งหมด 6 ขั้นตอน (เคชะอำไพ, 2542) ดังต่อไปนี้

#### ขั้นตอนที่ 1

การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูป 3.1 เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (Nodes) ของเอลิเมนต์ (Elements) ที่อยู่ติดกัน ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ต้องหาผลลัพธ์ของปัญหานั้น



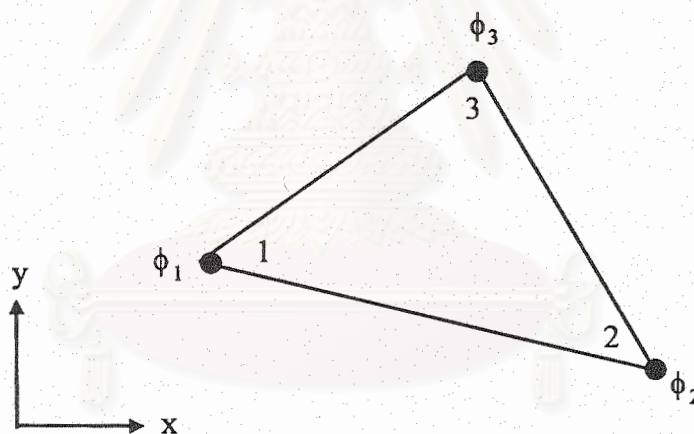
รูป 3.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

## ขั้นตอนที่ 2

การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับรูปแบบเอลิเมนต์ ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์ จำนวนตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ (Nodal unknown) และเงื่อนไขความเข้ากันได้ (Compatibility condition) ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วย 3 จุดต่อดังแสดงในรูป 3.2 มีตำแหน่งของตัวไม่ทราบค่า ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ) อยู่ที่จุดต่อหมายเลข 1, 2 และ 3 ตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้เป็นผลลัพธ์ของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ ซึ่งอาจเป็นค่าการเคลื่อนตัวในทิศทางต่างๆในปัญหาทางด้านของแข็ง หรือเป็นอุณหภูมิของวัตถุในปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรือเป็นความเร็วของของไหลในปัญหาการไหล ลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi(x, y) = N_1(x, y) \cdot \phi_1 + N_2(x, y) \cdot \phi_2 + N_3(x, y) \cdot \phi_3 \quad (3.1)$$

โดย  $N_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$  แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์



รูป 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งจุดต่อ

สมการ (3.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\phi(x, y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2a)$$

หรือ

$$\phi(x, y) = [N] \{\phi\} \quad (3.2b)$$

(1x3) (3x1)

โดย  $[N]$  แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$  แทนเวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์



### ขั้นตอนที่ 3

การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (Element equations) ยกตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูป 3.2 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (3.3a)$$

หรือ

$$\begin{matrix} [k]_e & \{\phi\}_e & = & \{F\}_e \\ (3 \times 3) & (3 \times 1) & & (3 \times 1) \end{matrix} \quad (3.3b)$$

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นหัวใจที่สำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (3.3) กระทำได้โดย

- (1) วิธีการโดยตรง (Direct approach) เป็นวิธีที่ทำความเข้าใจได้ง่ายที่สุด แต่ไม่สามารถนำไปประยุกต์ไปแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนในหลายมิติได้
- (2) วิธีการแปรผัน (Variational approach) เป็นวิธีที่นิยมใช้ในระยะเริ่มแรกโดยประยุกต์เข้ากับปัญหาทางด้านโครงสร้างเป็นส่วนใหญ่
- (3) วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) เป็นวิธีที่นำไปใช้ได้สะดวกที่สุดเนื่องจากสามารถประดิษฐ์สมการของเอลิเมนต์ได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ

### ขั้นตอนที่ 4

การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการซึ่งอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\sum (\text{Element equations}) = [k]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (3.4)$$

### ขั้นตอนที่ 5

การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาลงในสมการ (3.4) แล้วจึงทำการแก้สมการดังกล่าวเพื่อหาค่าของ  $\{\phi\}_{\text{sys}}$  ซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ ตัวไม่ทราบค่าที่กล่าวถึงนี้อาจจะเป็นค่าการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งต่างๆของโครงสร้าง หรือเป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆของปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรือเป็นความเร็วของของไหลในปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น

## ขั้นตอนที่ 6

การคำนวณค่าอื่นๆที่ต้องการทราบ เช่น เมื่อทราบค่าการเคลื่อนตัวจะสามารถคำนวณหาความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ได้ หรือเมื่อทราบอุณหภูมิที่จุดต่างๆจะสามารถคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนได้ หรือเมื่อทราบความเร็วของของไหลจะสามารถคำนวณหาอัตราการไหลได้ เป็นต้น

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ อันประกอบด้วยสมการอนุรักษ์มวล (2.3) สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (2.20 และ 2.22) และสมการอนุรักษ์พลังงาน (2.39) ดังอธิบายในบทที่ 2 อยู่ในรูปแบบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear coupled partial differential equations) เพื่อลดความซับซ้อนของปัญหาและก่อให้เกิดความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกันได้ง่ายขึ้น งานวิจัยนี้จะพิจารณาถึงการไหลแบบไม่อัดตัวในสภาวะอยู่ตัว โดยละทิ้งผลของการกระจายพลังงาน ความหนืด นอกจากนั้นจะสมมุติว่าแกน  $y$  จะอยู่ในแนวตั้งเสมอ ก่อให้เกิดผลจากน้ำหนักของของไหลรวมทั้งแรงลอยตัวเนื่องจากอุณหภูมิในแกน  $y$  เท่านั้น สมมุติฐานเหล่านี้นอกจากจะช่วยให้การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นไปได้อย่างง่ายขึ้นแล้ว ยังเป็นผลทำให้การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นไปได้อย่างยิ่งขึ้นด้วย ระบบสมการอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ดังอธิบายในบทที่ 2 จึงลดรูปลงเป็น

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (3.6a)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g [1 - \beta(T - T_0)] \quad (3.6b)$$

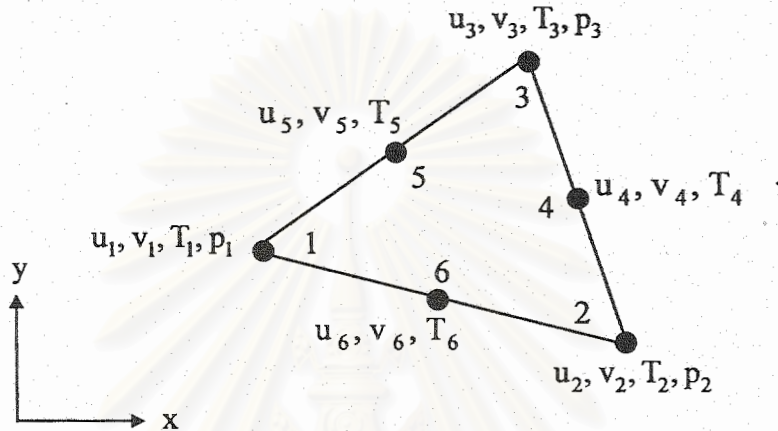
สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.7)$$

โดย  $\beta$  แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (Coefficient of thermal expansion) ของของไหล และ  $T_0$  แทนอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลที่ไม่เกิดการลอยตัว

### 3.2 การใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม

ไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมจะนำมาใช้ในการศึกษานี้ ซึ่งจะมีผลโดยตรงกับการใช้ระเบียบวิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในบทที่ 9 ต่อไป เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่นำมาศึกษานี้ ดังแสดงในรูป 3.3 ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าทั้งหมด 21 ตัว



รูป 3.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

ได้แก่  $u, v, T$  อย่างละ 6 ตัว และ  $p$  อีก 3 ตัว ซึ่งต้องการจำนวนสมการทั้งสิ้น 21 สมการต่อหนึ่งเอลิเมนต์ในการหาค่าของตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้ การสมมุติลักษณะการกระจายของความเร็ว อุณหภูมิ และความดันภายในเอลิเมนต์ จะอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$u(x, y) = [N] \{u\} = N_{\alpha} u_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.8)$$

(1x6)(6x1)

$$v(x, y) = [N] \{v\} = N_{\alpha} v_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.9)$$

(1x6)(6x1)

$$T(x, y) = [N] \{T\} = N_{\alpha} T_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.10)$$

(1x6)(6x1)

$$p(x, y) = [H] \{p\} = N_{\lambda} p_{\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

(1x3)(3x1)

โดย  $[N]$  แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์อันดับสอง

$[H]$  แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์อันดับหนึ่ง

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ทั้งสองแบบของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$N_1 = L_1^2 - L_1(L_2 + L_3) \quad (3.12a)$$

$$N_2 = L_2^2 - L_2(L_3 + L_1) \quad (3.12b)$$

$$N_3 = L_3^2 - L_3(L_1 + L_2) \quad (3.12c)$$

$$N_4 = 4L_2L_3 \quad (3.12d)$$

$$N_5 = 4L_3L_1 \quad (3.12e)$$

$$N_6 = 4L_1L_2 \quad (3.12f)$$

$$H_i = L_i \quad , i = 1, 2, 3 \quad (3.13)$$

โดย  $L_i$  แทนฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าคงที่ต่างๆดังนี้

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad , i = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

โดย  $A$  แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งคำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

### 3.3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวกระทำได้โดย นำวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษดกต่าง (เดชะอำไพ, 2542) มาประยุกต์ใช้กับสมการ (3.5) ถึง (3.7) หลักการของวิธีนี้ก็คือ นำฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting function) ซึ่งในที่นี้เลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ มาคูณกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์มีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\int_A N_\alpha [\rho(uu_{,x} + vv_{,y}) - \sigma_{x,x} - \tau_{yx,y}] dA = 0 \quad (3.17a)$$

$$\int_A N_\alpha [\rho(uv_{,x} + vv_{,y}) - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} + \rho g[1 - \beta(T - T_0)]] dA = 0 \quad (3.17b)$$

$$\int_A N_\alpha \left[ \rho c (u_{T,x} + v_{T,y}) - (kT_{,x})_{,x} - (kT_{,y})_{,y} \right] dA = 0 \quad (3.17c)$$

$$\int_A H_\lambda (u_{,x} + v_{,y}) dA = 0 \quad (3.17d)$$

สมการ (3.17a-d) นี้ ประกอบด้วยสมการทั้งหมด 21 สมการ ซึ่งมีจำนวนเท่ากับตัวไม่ทราบค่า 21 ตัว ของเอลิเมนต์นั้นๆ

จากนั้นจึงนำทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) มาประยุกต์ใช้กับสมการ (3.17a-c) เพื่อก่อให้เกิดค่าอินทิกรัลบนขอบเขตของเอลิเมนต์ (Element boundary integrals) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \sigma_{x,x} dA &= \int_A (N_\alpha \sigma_x)_{,x} dA - \int_A N_{\alpha,x} \sigma_x dA \\ &= \int_{S_0} N_\alpha \sigma_x l dS_0 - \int_A N_{\alpha,x} \sigma_x dA \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \tau_{yx,y} dA &= \int_A (N_\alpha \tau_{yx})_{,y} dA - \int_A N_{\alpha,y} \tau_{yx} dA \\ &= \int_{S_0} N_\alpha \tau_{yx} m dS_0 - \int_A N_{\alpha,y} \tau_{yx} dA \end{aligned} \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \tau_{xy,x} dA &= \int_A (N_\alpha \tau_{xy})_{,x} dA - \int_A N_{\alpha,x} \tau_{xy} dA \\ &= \int_{S_0} N_\alpha \tau_{xy} l dS_0 - \int_A N_{\alpha,x} \tau_{xy} dA \end{aligned} \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \sigma_{y,y} dA &= \int_A (N_\alpha \sigma_y)_{,y} dA - \int_A N_{\alpha,y} \sigma_y dA \\ &= \int_{S_0} N_\alpha \sigma_y m dS_0 - \int_A N_{\alpha,y} \sigma_y dA \end{aligned} \quad (3.19b)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha (kT_{,x})_{,x} dA &= \int_A (N_\alpha kT_{,x})_{,x} dA - \int_A N_{\alpha,x} kT_{,x} dA \\ &= \int_{S_w} N_\alpha kT_{,x} l dS_w - \int_A N_{\alpha,x} kT_{,x} dA \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha (kT_{,y})_{,y} dA &= \int_A (N_\alpha kT_{,y})_{,y} dA - \int_A N_{\alpha,y} kT_{,y} dA \\ &= \int_{S_w} N_\alpha kT_{,y} m dS_w - \int_A N_{\alpha,y} kT_{,y} dA \end{aligned} \quad (3.20b)$$

แทนค่าอินทิกรัลในสมการ (3.18) ถึง (3.20) ลงในสมการ (3.17a-c) จะได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \rho (u u_{,x} + v u_{,y}) dA + \int_A N_{\alpha,x} \sigma_x dA + \int_A N_{\alpha,y} \tau_{yx} dA \\ = \int_{S_0} N_\alpha (\sigma_x l + \tau_{yx} m) dS_0 \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \rho (u v_{,x} + v v_{,y}) dA + \int_A N_{\alpha,x} \tau_{xy} dA + \int_A N_{\alpha,y} \sigma_y dA + \int_A N_\alpha \rho g [l - \beta(T - T_0)] dA \\ = \int_{S_0} N_\alpha (\tau_{xy} l + \sigma_y m) dS_0 \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \rho c (u T_{,x} + v T_{,y}) dA + \int_A N_{\alpha,x} k T_{,x} dA + \int_A N_{\alpha,y} k T_{,y} dA \\ = \int_{S_w} N_\alpha (k T_{,x} l + k T_{,y} m) dS_w \end{aligned} \quad (3.21c)$$

จากนั้นจึงแทนค่าความเค้นจากสมการ (2.45a-c) ลงไปในสมการ (3.21a-c) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha (u u_{,x} + v u_{,y}) dA - \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,x} p dA + 2v \int_A N_{\alpha,x} u_{,x} dA + v \int_A N_{\alpha,y} (u_{,y} + v_{,x}) dA \\ = \frac{1}{\rho} \int_{S_0} N_\alpha P_x dS_0 \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha (u v_{,x} + v v_{,y}) dA + v \int_A N_{\alpha,x} (u_{,y} + v_{,x}) dA - \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,y} p dA + 2v \int_A N_{\alpha,y} v_{,y} dA \\ - g\beta \int_A N_\alpha T dA = \frac{1}{\rho} \int_{S_0} N_\alpha P_y dS_0 - g(1 + \beta T_0) \int_A N_\alpha dA \end{aligned} \quad (3.22b)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha (u T_{,x} + v T_{,y}) dA + \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,x} T_{,x} dA + \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,y} T_{,y} dA \\ = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_\alpha q_w dS_w \end{aligned} \quad (3.22c)$$

$$\text{โดย } P_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m \quad (3.23a)$$

$$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad (3.23b)$$

$$q_w = k T_{,x} l + k T_{,y} m \quad (3.24)$$

$\nu$  แทนความหนืดจลนศาสตร์ของของไหล (Fluid kinematics viscosity) ซึ่งเป็นไปตามสมการ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.25)$$

การแทนค่าของความเร็ว อุณหภูมิ และความดันจากสมการ (3.8) ถึง (3.11) ลงในสมการ (3.12a-c) และ (3.17d) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta = Q_{\alpha^u} \quad (3.26a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta - K_{\alpha\beta} T_\beta = Q_{\alpha^v} - C_\alpha - D_\alpha \quad (3.26b)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta T_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta T_\gamma + M_{\alpha\beta^{xx}} T_\beta + M_{\alpha\beta^{yy}} T_\beta = Q_{\alpha^T} \quad (3.26c)$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \quad (3.26d)$$

สัมประสิทธิ์ต่างๆในสมการ (3.26a-d) เป็นเมตริกซ์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ของเอลิเมนต์และอินทิกรัลบนขอบทางออก  $S_o$  หรือขอบผนัง  $S_w$  ของเอลิเมนต์ดังสมการต่อไปนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x} dA \quad (3.27a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} dA \quad (3.27b)$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda dA \quad (3.27c)$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda dA \quad (3.27d)$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (3.27e)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + 2v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (3.27f)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = v \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} dA \quad (3.27g)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = v \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (3.27h)$$

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \quad (3.27i)$$

$$M_{\alpha\beta yy} = \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (3.27j)$$

$$K_{\alpha\beta} = g\beta \int_A N_{\alpha} N_{\beta} dA \quad (3.27k)$$

$$Q_{\alpha u} = \frac{1}{\rho} \int_{S_0} N_{\alpha} P_x dS_0 \quad (3.27l)$$

$$Q_{\alpha v} = \frac{1}{\rho} \int_{S_0} N_{\alpha} P_y dS_0 \quad (3.27m)$$

$$Q_{\alpha T} = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_{\alpha} q_w dS_w \quad (3.27n)$$

$$C_{\alpha} = g \int_A N_{\alpha} dA \quad (3.27o)$$

$$D_{\alpha} = g\beta T_0 \int_A N_{\alpha} dA \quad (3.27p)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในสมการ (3.26a-d) นั้น อยู่ในรูปแบบระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น วิธีการแก้ระบบสมการดังกล่าวจะอธิบายในหัวข้อ 3.4 ส่วนการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.27a-p) จะถูกอธิบายโดยละเอียดในหัวข้อ 3.5 ต่อไป

### 3.4 การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในสมการ (3.26a-d) นั้น เป็นระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งการหาผลลัพธ์ของระบบสมการดังกล่าวไม่สามารถกระทำได้โดยการคำนวณเพียงครั้งเดียว จึงจำเป็นต้องทำการประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration method) เพื่อหาผลลัพธ์ดังนี้

หากพิจารณาระบบสมการแบบไม่เชิงเส้นซึ่งประกอบด้วย  $n$  สมการ ดังนี้

$$[K(x)]\{x\} = \{R\} \quad (3.28)$$

โดย  $\{x\}$  แทนเวกเตอร์เมตริกซ์ของตัวไม่รู้ค่า และ หาก  $\{x\}$  ในสมการ (3.28) นี้ ไม่ใช่ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง จะก่อให้เกิดฟังก์ชันค่าตกค้างดังนี้

$$\{F(x)\} = [K(x)]\{x\} - \{R\} \quad (3.29)$$



ซึ่งสำหรับแต่ละสมการคือ

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n K_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_j - R_i \quad (3.30)$$

โดย  $i=1,2,\dots,n$  และจากอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) ค่าของฟังก์ชันค่าตกค้างที่  $\{x + \Delta x\}$  คือ

$$F_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \Delta x_j \quad (3.31)$$

หากค่า  $\{x + \Delta x\}$  เป็นค่าของผลลัพธ์แม่นยำ ฟังก์ชันค่าตกค้างจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (3.31) จึงก่อให้เกิดระบบสมการที่มี  $\{\Delta x\}$  เป็นตัวไม่ทราบค่าในรูปแบบดังนี้

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \Delta x_j = -F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.32)$$

ดังนั้น การนาระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันมาประยุกต์ใช้กับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมการ (3.26a-d) จึงเริ่มต้นจากการเขียนฟังก์ชันค่าตกค้างในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$F_{\alpha u} = K_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda}^x p_\lambda + S_{\alpha\beta}^{xx} u_\beta + S_{\alpha\beta}^{xy} v_\beta - Q_{\alpha u} \quad (3.33a)$$

$$F_{\alpha v} = K_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda}^y p_\lambda + S_{\alpha\beta}^{yx} u_\beta + S_{\alpha\beta}^{yy} v_\beta - K_{\alpha\beta} T_\beta - Q_{\alpha v} + C_\alpha + D_\alpha \quad (3.33b)$$

$$F_{\alpha T} = K_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta T_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta T_\gamma + M_{\alpha\beta}^{xx} T_\beta + M_{\alpha\beta}^{yy} T_\beta - Q_{\alpha T} \quad (3.33c)$$

$$F_{\beta p} = H_{\beta\mu}^x u_\mu + H_{\beta\mu}^y v_\mu \quad (3.33d)$$

หลังจากแทนฟังก์ชันค่าตกค้างในสมการ (3.33a-d) ลงในสมการ (3.32) จะได้ระบบสมการของค่าที่เพิ่มขึ้นของตัวไม่ทราบค่าต่างๆ ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & 0 & K_{up} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{vT} & K_{vp} \\ K_{Tu} & K_{Tv} & K_{TT} & 0 \\ K_{pu} & K_{pv} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_\beta \\ \Delta v_\beta \\ \Delta T_\beta \\ \Delta p_\lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{\alpha u} \\ F_{\alpha v} \\ F_{\alpha T} \\ F_{\beta p} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

(21x21)                      (21x1)                      (21x1)

โดยที่เมตริกซ์ต่างๆทางด้านซ้ายของสมการ (3.34) คือ

$$K_{uu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \quad (3.35a)$$

$$K_{uv} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \quad (3.35b)$$

$$K_{up} = -H_{\alpha\lambda^x} \quad (3.35c)$$

$$K_{vu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \quad (3.35d)$$

$$K_{vv} = K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \quad (3.35e)$$

$$K_{vT} = -K_{\alpha\beta} \quad (3.35f)$$

$$K_{vp} = -H_{\alpha\lambda^y} \quad (3.35g)$$

$$K_{Tu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} T_\gamma \quad (3.35h)$$

$$K_{Tv} = K_{\alpha\beta\gamma^y} T_\gamma \quad (3.35i)$$

$$K_{TT} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + M_{\alpha\beta^{xx}} + M_{\alpha\beta^{yy}} \quad (3.35j)$$

$$K_{pu} = H_{\beta\mu^x} \quad (3.35k)$$

$$K_{pv} = H_{\beta\mu^y} \quad (3.35l)$$

ในสมการ (3.34) นี้ ค่า  $\Delta u_\beta, \Delta v_\beta, \Delta T_\beta$  และ  $\Delta p_\lambda$  เป็นค่าที่เพิ่มขึ้นของตัวไม่ทราบค่าของการคำนวณครั้งที่  $i$  โดยค่า  $u_\gamma, v_\gamma$  และ  $T_\gamma$  ในสมการ (3.35a-l) เป็นค่าของตัวไม่ทราบค่าของการคำนวณครั้งที่  $i-1$  จึงจะเริ่มทำการคำนวณต่อไปได้ ระเบียบวิธีการทำซ้ำนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อ ความคลาดเคลื่อนรวม (Overall error) มีค่าน้อยกว่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ ค่าความคลาดเคลื่อนรวมนี้คิดเป็นเปอร์เซ็นต์โดยคำนวณจาก

$$\text{Overall error} = \frac{\text{Error}}{\text{Sum}} \times 100\% \quad (3.36)$$

$$\text{โดย Error} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (\Delta u_i + \Delta v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIT}} (\Delta T_j) + \sum_{k=1}^{\text{NPOIP}} (\Delta p_k) \quad (3.37a)$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIT}} (T_j) + \sum_{k=1}^{\text{NPOIP}} (p_k) \quad (3.37b)$$

เมื่อ NPOIV แทนจำนวนจุดต่อทั้งหมดของความเร็ว

NPOIT แทนจำนวนจุดต่อทั้งหมดของอุณหภูมิ

NPOIP แทนจำนวนจุดต่อทั้งหมดของความดัน

### 3.5 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆในสมการ (3.27a-p) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ โดยเริ่มจากการเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในสมการ (3.12) และ (3.13) ในรูปแบบเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{matrix} \{N\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ (6 \times 6) \end{matrix} \begin{matrix} \{R\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} \quad (3.38)$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

โดย

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

จากนั้นจึงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ เมื่อเทียบกับตัวแปร  $x$  และ  $y$  ดังนี้

$$\begin{matrix} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ (6 \times 6) \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} \right\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} \quad (3.42a)$$

$$\begin{matrix} \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ (6 \times 6) \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} \right\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} \quad (3.42b)$$

แทนค่า  $\{R\}$  จากสมการ (3.41) ลงในสมการ (3.42a-b) จะได้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} = [A] [B] \{H\}_{(6 \times 6)(6 \times 3)(3 \times 1)} \quad (3.43a)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} = [A] [C] \{H\}_{(6 \times 6)(6 \times 3)(3 \times 1)} \quad (3.43b)$$

โดย

$$[B] = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

เนื่องจาก [A], [B] และ [C] เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ ในขณะที่ {R} และ {H} เป็นเมตริกซ์ของฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x และ y ดังนั้นการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จึงเป็นเพียงการอินทิเกรตผลคูณของฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้โดยใช้สูตรที่ว่า (เดชะอำไพ, 2542)

$$\int_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A \quad (3.46)$$

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.27a-p) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้รูปแบบของเทนเซอร์ ดังต่อไปนี้

เอลิเมนต์เมตริกซ์  $K_{\alpha\beta\gamma}^x, K_{\alpha\beta\gamma}^y$

เนื่องจากสมการ (3.38) และ (3.43a-b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$N_\alpha = A_{\alpha\xi} R_\xi \quad (3.47)$$

$$N_{\alpha,x} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} \quad (3.48a)$$

$$N_{\alpha,y} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_{\eta} \quad (3.48b)$$

โดย  $\alpha, \xi = 1, 2, \dots, 6$  และ  $\eta = 1, 2, 3$  แทนสมการ (3.47) และ (3.48a-b) ลงในสมการ (3.27a-b) จะได้

$$K_{\alpha\beta\gamma}^x = A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A R_{\xi} R_{\eta} H_{\mu} dA \quad (3.49a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^y = A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A R_{\xi} R_{\eta} H_{\mu} dA \quad (3.49b)$$

โดย  $\alpha, \xi, \beta, \eta, \gamma, \lambda = 1, 2, \dots, 6$  และ  $\mu = 1, 2, 3$  ค่าอินทิกรัลในสมการ (3.49a-b) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A R_{\xi} R_{\eta} H_1 dA = \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 120 & 12 & 12 & 6 & 24 & 24 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad (3.50a)$$

$$\int_A R_{\xi} R_{\eta} H_2 dA = \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \\ 12 & 120 & 12 & 24 & 6 & 24 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \quad (3.50b)$$

$$\int_A R_{\xi} R_{\eta} H_3 dA = \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 120 & 24 & 24 & 6 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.50c)$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์  $H_{\alpha\lambda}^x, H_{\alpha\lambda}^y$

แทนสมการ (3.48a-b) ลงในสมการ (3.27a-c) จะได้

$$H_{\alpha\lambda}^x = \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} \int_A H_{\eta} H_{\lambda} dA \quad (3.51a)$$

$$H_{\alpha\lambda}^y = \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} \int_A H_\eta H_\lambda dA \quad (3.51b)$$

โดย  $\alpha, \xi = 1, 2, \dots, 6$  และ  $\eta, \lambda = 1, 2, 3$  ซึ่งค่าอินทิกรัลในสมการ (3.51a-b) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A H_\eta H_\lambda dA = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์  $S_{\alpha\beta}^{xx}, S_{\alpha\beta}^{yy}, S_{\alpha\beta}^{xy}, S_{\alpha\beta}^{yx}, M_{\alpha\beta}^{xx}, M_{\alpha\beta}^{yy}$

แทนสมการ (3.48a-b) ลงในสมการ (3.27e-j) จะได้

$$S_{\alpha\beta}^{xx} = 2\nu A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA + \nu A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA \quad (3.53a)$$

$$S_{\alpha\beta}^{yy} = \nu A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA + 2\nu A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA \quad (3.53b)$$

$$S_{\alpha\beta}^{xy} = \nu A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA \quad (3.53c)$$

$$S_{\alpha\beta}^{yx} = \nu A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA \quad (3.53d)$$

$$M_{\alpha\beta}^{xx} = \frac{k}{\rho c} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA \quad (3.54a)$$

$$M_{\alpha\beta}^{yy} = \frac{k}{\rho c} A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu dA \quad (3.54b)$$

โดย  $\alpha, \xi, \beta, \lambda = 1, 2, \dots, 6$  และ  $\eta, \mu = 1, 2, 3$  ซึ่งค่าอินทิกรัลในสมการ (3.54a-d) และ (3.53a-b) สามารถคำนวณได้จากสมการ (3.52)

เอลิเมนต์เมตริกซ์  $K_{\alpha\beta}$

แทนสมการ (3.47) ลงในสมการ (3.27k) จะได้

$$K_{\alpha\beta} = g\beta A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} \int_A R_\xi R_\eta dA \quad (3.55)$$

โดย  $\alpha, \xi, \beta, \eta = 1, 2, \dots, 6$  ซึ่งค่าอินทิกรัลในสมการ (3.55) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A R_\xi R_\eta dA = \frac{2A}{720} \begin{bmatrix} 24 & 4 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 24 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 24 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์  $C_\alpha, D_\alpha$

แทนสมการ (3.47) ลงในสมการ (3.27o-p) จะได้

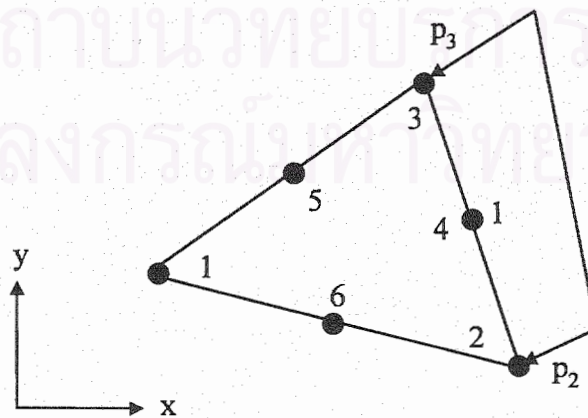
$$C_\alpha = g A_{\alpha\xi} \int_A R_\xi dA \quad (3.57a)$$

$$D_\alpha = g \beta T_0 A_{\alpha\xi} \int_A R_\xi dA \quad (3.57b)$$

โดย  $\alpha, \xi = 1, 2, \dots, 6$  ค่าอินทิกรัลในสมการ (3.57a-b) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A R_\xi dA = \frac{2A}{24} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์  $Q_{\alpha u}, Q_{\alpha v}$



รูป 3.4 ความดันที่กระทำบนด้านหนึ่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

เมตริกซ์  $Q_{\alpha_u}$  และ  $Q_{\alpha_v}$  นี้ เป็นเวกเตอร์เมตริกซ์เนื่องจากแรงที่ผิวในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนขอบเขตของเอลิเมนต์ การประติษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ทั้งสองนี้กระทำได้โดย พิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อใดๆที่มีความดันกระทำตลอดด้าน 23 ที่มีความยาว 1 ดังแสดงในรูป 3.4 แล้วทำการอินทิเกรตตลอดด้านดังกล่าวของเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในรูปแบบดังนี้

$$Q_{\alpha_u} = -\frac{p_2 l_y}{6\rho} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{p_3 l_y}{6\rho} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.59a)$$

$$Q_{\alpha_v} = -\frac{p_2 l_x}{6\rho} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{p_3 l_x}{6\rho} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.59b)$$

โดย  $p_2$  แทนความดันที่จุดต่อหมายเลข 2

$p_3$  แทนความดันที่จุดต่อหมายเลข 3

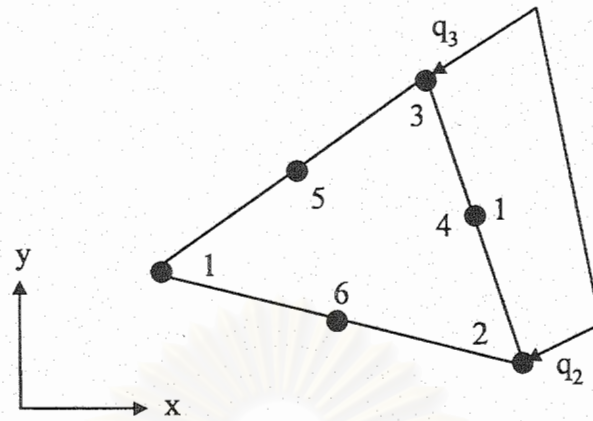
$l_x$  แทนความยาวของภาพฉายของด้าน 23 ของเอลิเมนต์บนแกน x

$l_y$  แทนความยาวของภาพฉายของด้าน 23 ของเอลิเมนต์บนแกน y

เอลิเมนต์เมตริกซ์  $Q_{\alpha_T}$

เมตริกซ์  $Q_{\alpha_T}$  นี้ เป็นเวกเตอร์เมตริกซ์เนื่องจากการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนขอบเขตของเอลิเมนต์เช่นเดียวกับ  $Q_{\alpha_u}$  และ  $Q_{\alpha_v}$  การประติษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์  $Q_{\alpha_T}$  นี้กระทำได้โดย พิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อใดๆที่มีการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ตลอดด้าน 23 ที่มีความยาว 1 ดังแสดงในรูป 3.5 แล้วทำการอินทิเกรตตลอดด้านดังกล่าวของเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในรูปแบบดังนี้





รูป 3.5 การถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ด้านหนึ่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

$$Q_{\alpha T} = \frac{q_2 l}{6pc} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{q_3 l}{6pc} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

- โดย  $q_2$  แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ที่จุดต่อหมายเลข 2  
 $q_3$  แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ที่จุดต่อหมายเลข 3  
 $q_4$  แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ที่จุดต่อหมายเลข 4  
 1 แทนความยาวของด้าน 23 ของเอลิเมนต์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาี้ สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวได้โดยตรง ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวจะนำเสนอในบทที่ 4 ต่อไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 4

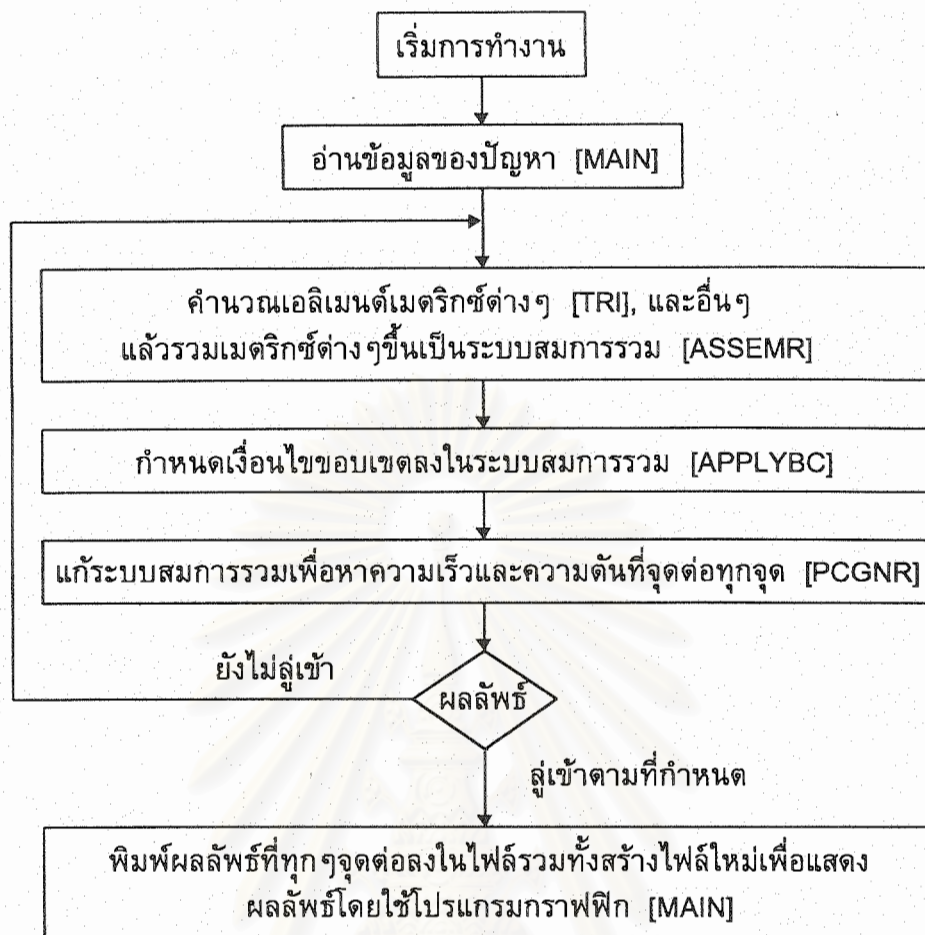
### ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นรวมทั้งขั้นตอนการประยุกต์กระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในบทที่ 3 ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันเพื่อใช้ในการวิเคราะห์การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว โดยจุดประสงค์หลักของการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้คือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวสามารถทำการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้โดยสะดวกและทำความเข้าใจได้โดยง่าย รวมทั้งยังสามารถทำการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในงานวิจัยอื่นๆที่เกี่ยวข้องกันได้ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นนี้ได้ตั้งชื่อให้ชื่อว่า LOWFLOW ซึ่งมีรายละเอียดดังอธิบายในหัวข้อต่อไป

#### 4.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นนี้ เริ่มจากโปรแกรมหลัก (Main program) ซึ่งประกอบด้วยโปรแกรมย่อย (Subroutine) ทั้งหมด 13 โปรแกรมย่อย ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมได้แสดงในรูป 4.1 โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

- 4.1.1 อ่านข้อมูลของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากไฟล์ข้อมูลนำเข้าซึ่งประกอบด้วย
  - จำนวนจุดต่อของความเร็ว (Velocity nodes) และอุณหภูมิ (Temperature nodes)
  - จำนวนจุดต่อของความดัน (Pressure nodes)
  - จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์
  - จำนวนเอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่บนขอบเขตที่ต้องกำหนดความดัน
  - จำนวนเอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่บนขอบเขตที่ต้องกำหนดฟลักซ์ความร้อน
  - จำนวนรอบของกระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน
  - ค่าของความคลาดเคลื่อนที่ใช้เป็นเงื่อนไขในการหยุดการคำนวณ



รูป 4.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW

- คุณสมบัติต่างๆของของไหล ได้แก่ ความหนาแน่น ความหนืดพลศาสตร์ สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน อุณหภูมิเฉลี่ย รวมไปถึงความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วง
- ข้อมูลของทุกจุดต่อ ได้แก่ หมายเลขประจำจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของจุดต่อและพิกัดของจุดต่อ
- ข้อมูลของทุกเอลิเมนต์ ได้แก่ หมายเลขประจำเอลิเมนต์และจุดต่อที่อยู่บนเอลิเมนต์นั้นๆ
- ข้อมูลของขอบเขตที่ต้องกำหนดความดัน ได้แก่ หมายเลขบอกลำดับและจุดต่อที่อยู่บนด้านของเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบเขตดังกล่าว
- ข้อมูลของขอบเขตที่ต้องกำหนดฟลักซ์ความร้อน ได้แก่ หมายเลขบอกลำดับ และจุดต่อที่อยู่บนด้านของเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบเขตดังกล่าว

4.1.2 จัดการข้อมูลเบื้องต้นโดยการเรียกโปรแกรมย่อย COUNT เพื่อนำข้อมูลนำเข้ามาสรางข้อมูลใหม่เพิ่มขึ้น โดยข้อมูลที่สร้างขึ้นนี้จะทำให้ทราบว่าที่แต่ละจุดต่อ มีเอลิเมนต์ใดบ้างที่ใช้จุดต่อนั้นร่วมกัน ซึ่งเป็นข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการทำงานในโปรแกรมย่อยอื่นๆต่อไป

4.1.3 เข้าสู่กระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งเริ่มต้นโดยการเรียกโปรแกรมย่อย TRI เพื่อสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 3.5 แล้วทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC

4.1.4 นำไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่กำหนดเงื่อนไขขอบเขตแล้วมารวมกันเป็นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเวกเตอร์ค่าดักคังโดยการเรียกโปรแกรมย่อย ASSEMR

4.1.5 คำนวณเวกเตอร์เมตริกซ์ของแรงและการถ่ายเทความร้อนผ่านผนังโดยการเรียกโปรแกรมย่อย FORCE และ HEATFLUX ตามลำดับ แล้วนำไปรวมกับเวกเตอร์ค่าดักคังที่ได้จากโปรแกรมย่อย ASSEMR

4.1.6 แก่ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าความเร็ว อุณหภูมิและความดันที่ทุกจุดต่อ โดยการเรียกโปรแกรมย่อย PCGNR

4.1.7 ตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่ได้ ถ้าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์มีค่าต่ำกว่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ต้องไปทำงานต่อในหัวข้อ 4.1.8 แต่ถ้าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ยังมีค่าสูงกว่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ต้องกลับไปทำการคำนวณตั้งแต่หัวข้อ 4.1.3 ใหม่จนกว่าผลลัพธ์ที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าที่กำหนดไว้

4.1.8 พิมพ์ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ลงในไฟล์ผลลัพธ์และไฟล์ใหม่เพื่อนำไปใช้ในการแสดงลักษณะต่างๆของการไหลด้วยโปรแกรมกราฟฟิก ซึ่งได้แก่ รูปแบบการไหล ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ และลักษณะการกระจายของความดัน

## 4.2 รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก ที่ท้ายเล่มของรายงานวิจัยนี้

## 4.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW ประกอบด้วยส่วนต่างๆทั้งหมด 7 ส่วนดังต่อไปนี้

#### 4.3.1 ลักษณะทั่วไปของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์

บรรทัดแรก จำนวนบรรทัดที่อธิบายลักษณะทั่วไปของปัญหา

บรรทัดต่อมา คำอธิบายลักษณะทั่วไปของปัญหาเท่ากับจำนวนบรรทัดที่ระบุไว้

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

2

FREE CONVECTION IN SQUARE ENCLOSURE AT RA = 100000  
THE MODEL CONSISTS OF 441 NODES AND 200 ELEMENTS

#### 4.3.2 รายละเอียดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายรายละเอียดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

บรรทัดต่อมา จำนวนจุดต่อของความเร็วและอุณหภูมิ จำนวนจุดต่อของความดัน  
จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด จำนวนเอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่บนขอบเขตที่ต้อง  
กำหนดความดัน จำนวนเอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่บนขอบเขตที่ต้องกำหนด  
ฟลักซ์ความร้อน จำนวนรอบของกระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน  
ความคลาดเคลื่อนที่ใช้เป็นเงื่อนไขในการหยุดกระบวนการทำซ้ำของ  
นิวตัน-ราฟสัน

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

NPOIV	NPOIP	NELEM	NFREE	NFLUX	NITER	TOL
441	121	200	0	20	20	0.1

#### 4.3.3 คุณสมบัติต่างๆของของไหล

บรรทัดแรก คำอธิบายคุณสมบัติของของไหล

บรรทัดที่สอง ค่าของคุณสมบัติของของไหล

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

DENSITY	VISCOSITY	THERM EXP	SPEC CV	THERM CON	REF TEMP	GRAVITY
1.00000	3.46400	3.00000	.00866	.03000	40.00000	10.00000

#### 4.3.4 ข้อมูลของทุกจุดต่อ

บรรทัดแรก คำอธิบายทั่วไป

บรรทัดต่อมา หมายเลขของจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของ u, v, T และ p (0 = เปลี่ยนแปลงได้, 1 = ไม่เปลี่ยนแปลง) พิกัดในแนวแกน x และ y ค่าของ u, v, T และ p ที่ใช้ในการคำนวณรอบแรก ฟลักซ์ความร้อน

## ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

NODAL BOUNDARY CONDITIONS AND COORDINATES [441]:

1	1	1	1	0	.00000	.00000	.00000	.00000	20.00000	.00000	.00000
2	1	1	0	0	.10000	.00000	.00000	.00000	40.00000	.00000	.00000
3	1	1	0	0	.20000	.00000	.00000	.00000	40.00000	.00000	.00000
4	1	1	0	0	.30000	.00000	.00000	.00000	40.00000	.00000	.00000

## 4.3.5 การจัดเรียงจุดต่อภายในเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายทั่วไป

บรรทัดต่อมา หมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขของจุดต่อ 6 หมายเลข (ดูรูป 3.3)

## ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ELEMENT NODAL CONNECTION [200]:

1	1	13	12	123	124	122
2	1	2	13	126	122	125
3	2	3	13	128	126	127
4	3	14	13	130	128	129

## 4.3.6 ข้อมูลของขอบเขตที่ต้องกำหนดความดัน

บรรทัดแรก คำอธิบายทั่วไป

บรรทัดต่อมา (ถ้ามี) หมายเลขแสดงลำดับ หมายเลขของจุดต่อ 3 หมายเลขในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (ถ้าเป็นเอลิเมนต์ในรูป 3.4 หมายเลขของจุดต่อทั้ง 3 ก็คือ 2 4 3)

## ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ELEMENT NODAL CONNECTION FOR OUTFLOW [0]:

## 4.3.7 ข้อมูลของขอบเขตที่ต้องกำหนดฟลักซ์ความร้อน

บรรทัดแรก คำอธิบายทั่วไป

บรรทัดต่อมา (ถ้ามี) หมายเลขแสดงลำดับ หมายเลขของจุดต่อ 3 หมายเลขในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (ถ้าเป็นเอลิเมนต์ในรูป 3.5 หมายเลขของจุดต่อทั้ง 3 ก็คือ 2 4 3)

## ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ELEMENT NODAL CONNECTION FOR HEATFLUX [20]:

1	1	125	2
2	2	127	3
3	3	133	4
4	4	135	5

#### 4.4 ลักษณะของไฟล์ผลลัพธ์

ไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW มีลักษณะดังต่อไปนี้

บรรทัดแรก	คำอธิบายทั่วไป
บรรทัดที่สอง	คำอธิบายผลลัพธ์
บรรทัดต่อมา	หมายเลขของจุดต่อ ค่าของ u, v, T และ p

ตัวอย่างในไฟล์ผลลัพธ์

NODAL SOLUTIONS [441]:

NODE	U-VELOCITY	V-VELOCITY	TEMPERATURE	PRESSURE
1	.000000E+00	.000000E+00	.200000E+02	.512180E+01
2	.000000E+00	.000000E+00	.226212E+02	.511971E+01
3	.000000E+00	.000000E+00	.246106E+02	.510273E+01
4	.000000E+00	.000000E+00	.259273E+02	.508673E+01

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

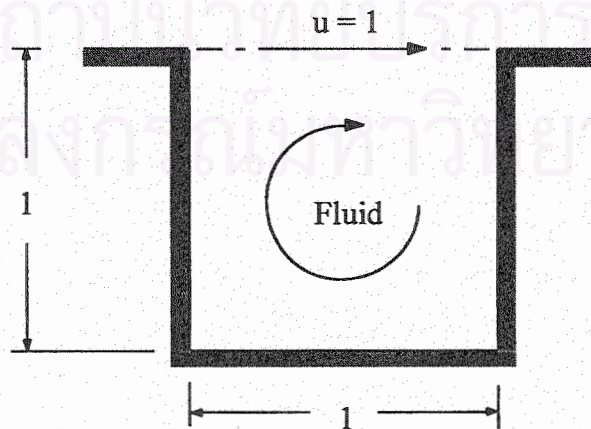
## บทที่ 5

### ผลจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาต่าง ๆ

ในบทที่ 5 นี้ จะนำเสนอผลจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นดังอธิบายในบทที่ 4 ซึ่งเกิดจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในบทที่ 3 เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว ความถูกต้องโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW นี้ได้ทำการตรวจสอบโดยใช้แก้ปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงหลายปัญหาก่อนนำมาใช้แก้ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากขึ้น เพื่อแสดงถึงประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนี้สำหรับการแก้ปัญหาดังกล่าวโดยทั่วไป

#### 5.1 การไหลหมุนวนในช่องว่าง (Cavity flow)

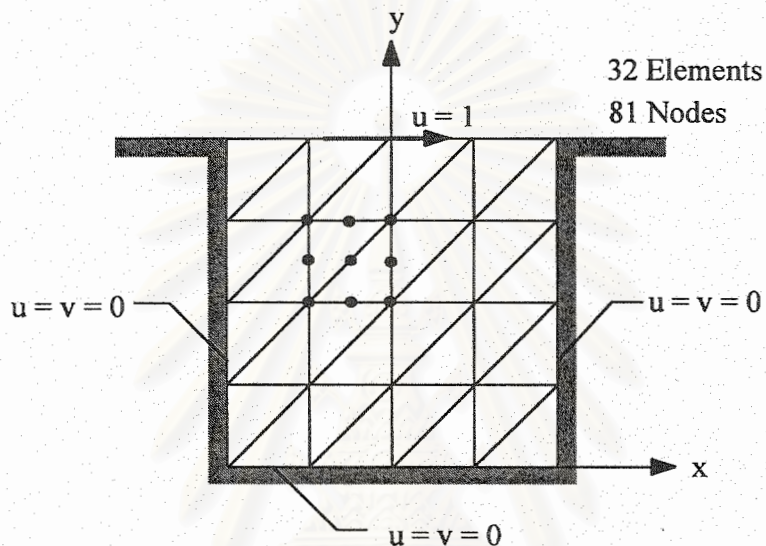
รูป 5.1 แสดงปัญหาการไหลหมุนวนในช่องว่างสี่เหลี่ยม ปัญหานี้เป็นปัญหาการไหลใน 2 มิติ ซึ่งสามารถนำมาใช้ตรวจสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นได้เป็นอย่างดีเนื่องจากมีผลเฉลยแท้จริง (Ramaswamy และคณะ, 1991) ปัญหาดังกล่าวประกอบด้วยช่องว่างสี่เหลี่ยมขนาด  $1 \times 1$  หน่วย บรรจุด้วยของเหลว ตอนขอบบนของช่องว่างนี้ของเหลวถูกกำหนดให้เคลื่อนตัวด้วยความเร็ว  $u = 1$  ไปในทิศทางด้านขวา การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวก่อให้เกิดการหมุนวนของของเหลวภายในช่องว่างในทิศตามเข็มนาฬิกา



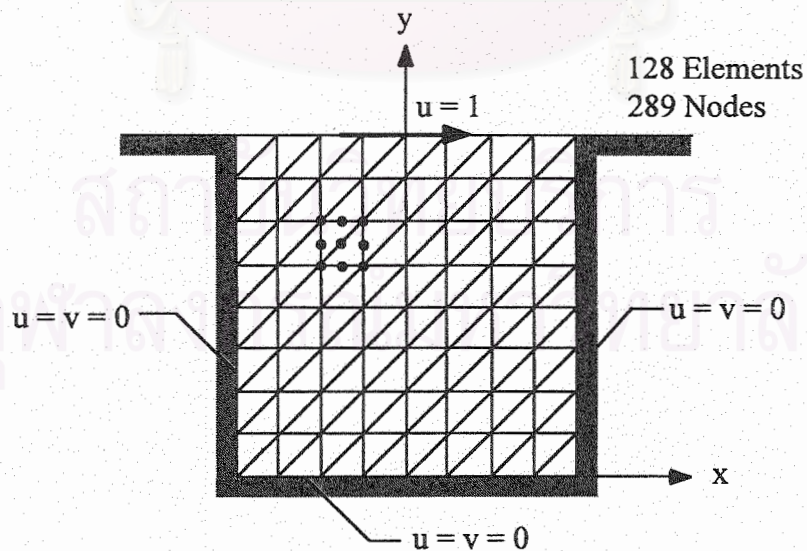
รูป 5.1 การไหลหมุนวนในช่องว่างสี่เหลี่ยม



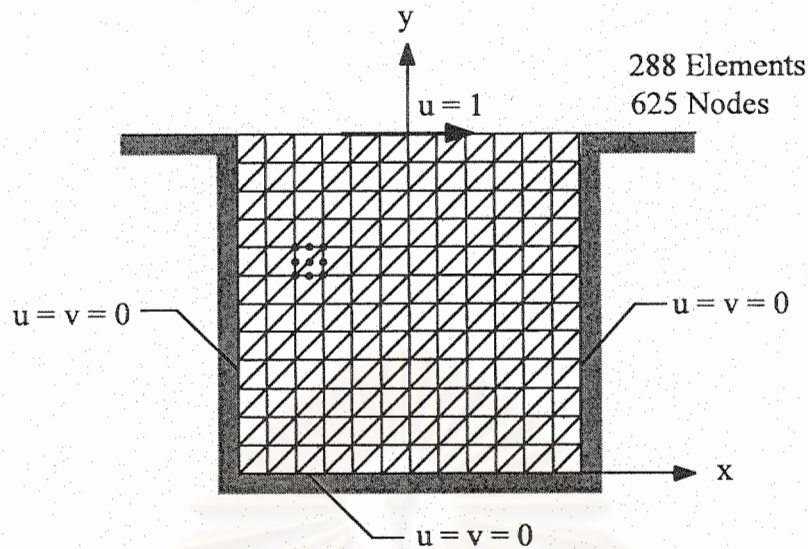
รูป 5.2-5.4 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 รูปแบบ พร้อมเงื่อนไขขอบเขต กล่าวคือ (ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบหยาบซึ่งประกอบด้วย 32 เอลิเมนต์ และ 81 จุดต่อ (ข) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบปานกลางซึ่งประกอบด้วย 128 เอลิเมนต์ และ 289 จุดต่อ และ (ค) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบละเอียดซึ่งประกอบด้วย 288 เอลิเมนต์ และ 625 จุดต่อ ในการคำนวณยังได้แบ่งออกเป็น 2 กรณี กล่าวคือ กรณีที่ เรย์โนลด์ส้นัมเบอร์ (Re) มีค่าเท่ากับ 100 และ 400



รูป 5.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบหยาบและเงื่อนไขขอบเขต

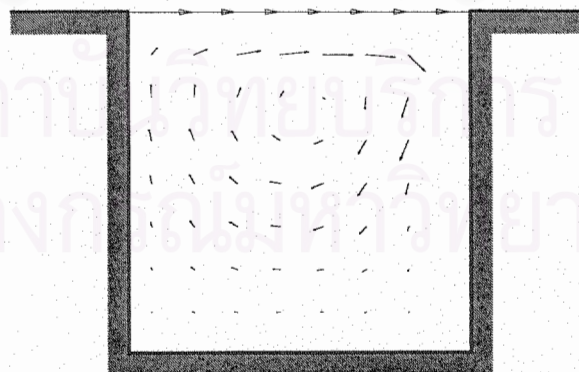


รูป 5.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบปานกลางและเงื่อนไขขอบเขต

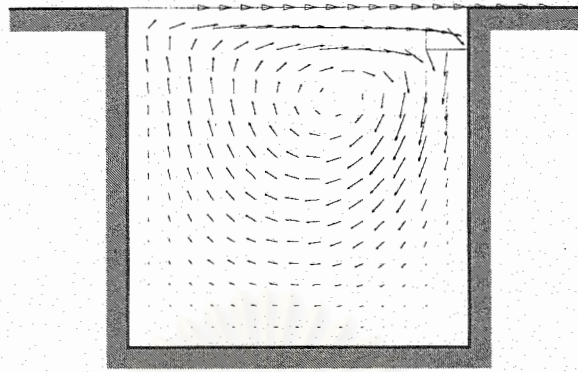


รูป 5.4 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบละเอียดและเงื่อนไขขอบเขต

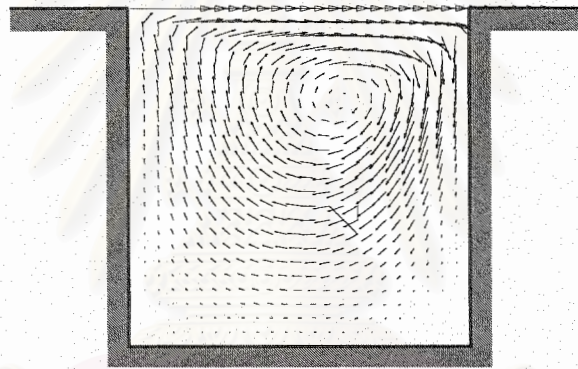
รูป 5.5-5.7 แสดงลักษณะการไหลหมุนวนที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามในกรณีที่  $Re = 100$  เมื่อเปรียบเทียบรูปทั้งสามนี้จะพบว่าความละเอียดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้นั้นขึ้นตรงกับความละเอียดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ โดยเฉพาะดังแสดงในรูป 5.7 ซึ่งได้จากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียด รูป 5.7 นี้ยังแสดงให้เห็นว่า จุดศูนย์กลางของการหมุนวนสำหรับกรณีที่  $Re = 100$  นี้ มีตำแหน่งค่อนข้างไปทางด้านขวาบ้นจากจุดกลางช่องว่างสี่เหลี่ยมนี้



รูป 5.5 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ  $Re = 100$

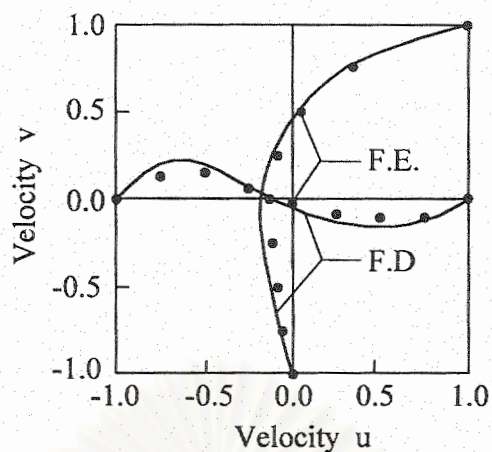


รูป 5.6 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ  $Re = 100$

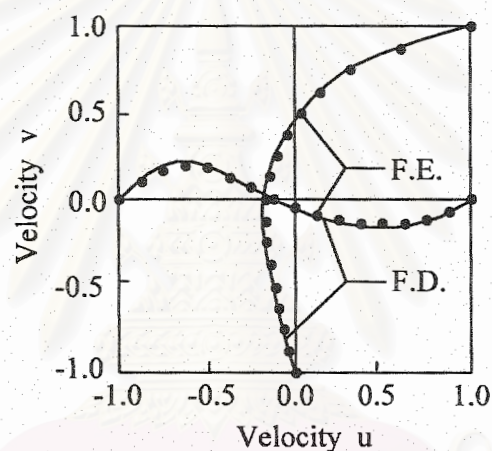


รูป 5.7 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียด เมื่อ  $Re = 100$

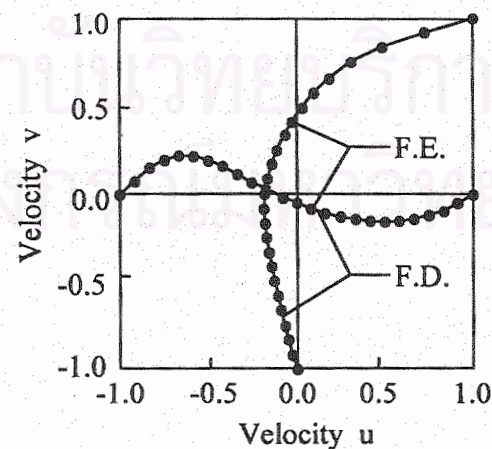
ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ต่างกันสามารถแสดงได้โดยชัดเจนดังแสดงในรูป 5.8-5.10 ซึ่งเป็นการพล็อตความเร็ว  $u(y)$  ที่ตำแหน่ง  $x = 0$  และความเร็ว  $v(x)$  ที่ตำแหน่ง  $y = 0.5$  โดยการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์แท้จริงที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องที่ทำการจัดแบ่งรูปแบบที่มีความละเอียดสูงซึ่งในรายงานวิจัยนี้ขอเรียกผลลัพธ์นี้ว่าผลลัพธ์แท้จริง รูปทั้งสามแสดงให้เห็นว่า ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นเพิ่มมากขึ้นเมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น สำหรับในกรณีนี้  $Re = 100$  นี้ ผลแตกต่างระหว่างผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นกับผลเฉลยแท้จริงค่อนข้างน้อยถึงแม้จะใช้รูปแบบไฟไนต์แบบหยาบดังแสดงในรูป 5.8 แต่หากเพิ่มจำนวน เอลิเมนต์ให้มากขึ้นเช่นใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียด ผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแท้จริงมากดังแสดงในรูป 5.10



รูป 5.8 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากกรุปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ  $Re = 100$



รูป 5.9 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากกรุปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ  $Re = 100$

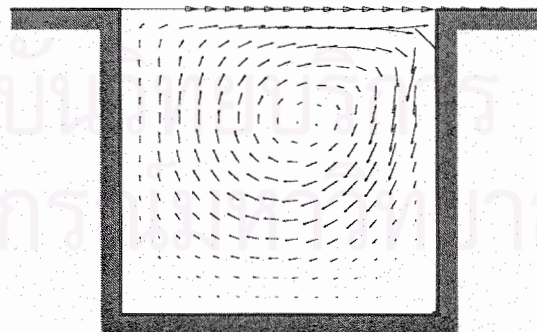


รูป 5.10 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากกรุปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ  $Re = 100$

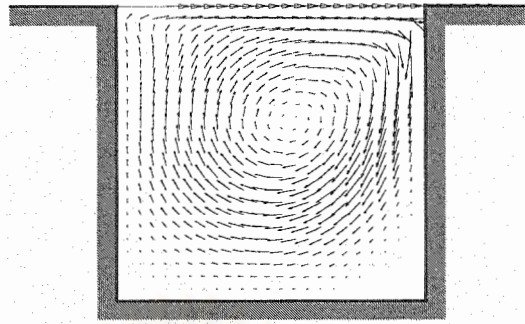
โดยปกติ ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใดๆจะลดลงหาก เรย์โนลด์์นัมเบอร์นั้นมามีค่ามากขึ้น ปัญหานี้จึงได้ถูกทำซ้ำอีกครั้งสำหรับกรณีที่  $Re = 400$  รูป 5.11-5.13 แสดงลักษณะการไหลหมุนวนในกรณีใหม่นี้ จากการพิจารณาผลลัพธ์ของการไหลหมุนวนจากรูป 5.13 จะพบว่าจุดศูนย์กลางของการหมุนวนนั้นเคลื่อนตัวเข้าใกล้กึ่งกลางของช่องว่างสี่เหลี่ยมเมื่อเปรียบเทียบกับรูป 5.7 ( $Re = 100$ )



รูป 5.11 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ  $Re = 400$

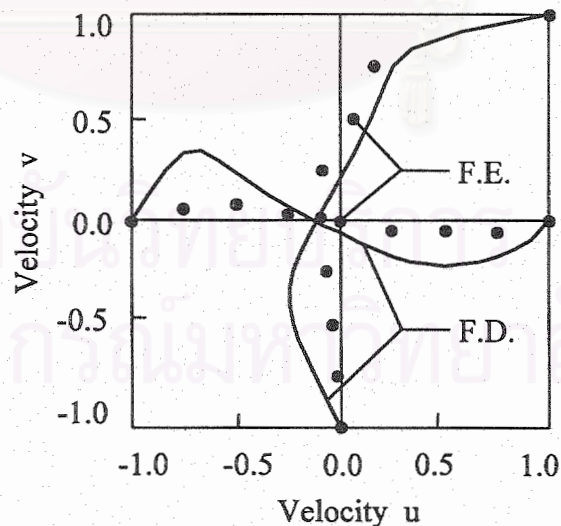


รูป 5.12 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ  $Re = 400$

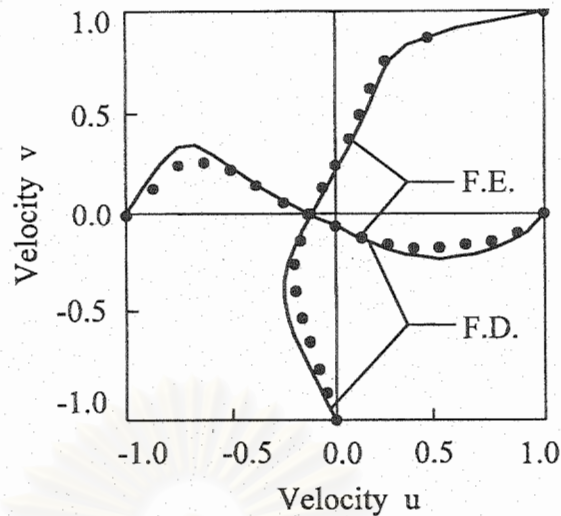


รูป 5.13 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ  $Re = 400$

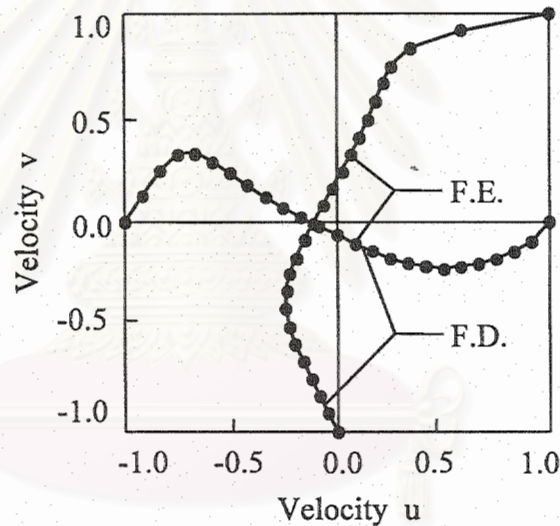
ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในกรณีใหม่นี้เมื่อ  $Re = 400$  สามารถเห็นได้ชัดจากรูป 5.14-5.16 โดยการพล็อตความเร็ว  $u(y)$  ที่ตำแหน่ง  $x = 0$  และความเร็ว  $v(x)$  ที่ตำแหน่ง  $y = 0.5$  รูป 5.14 แสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบนี้มีความแตกต่างจากผลลัพธ์แท้จริงอย่างเห็นได้ชัด ในขณะที่ผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดยังคงสามารถให้ความเที่ยงตรงสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์แท้จริง



รูป 5.14 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ  $Re = 400$



รูป 5.15 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ  $Re = 400$

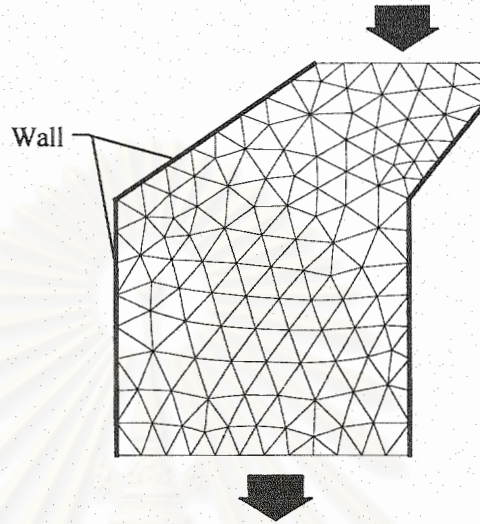


รูป 5.16 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ  $Re = 400$

## 5.2 การไหลในท่อโรงไฟฟ้า กฟผ.

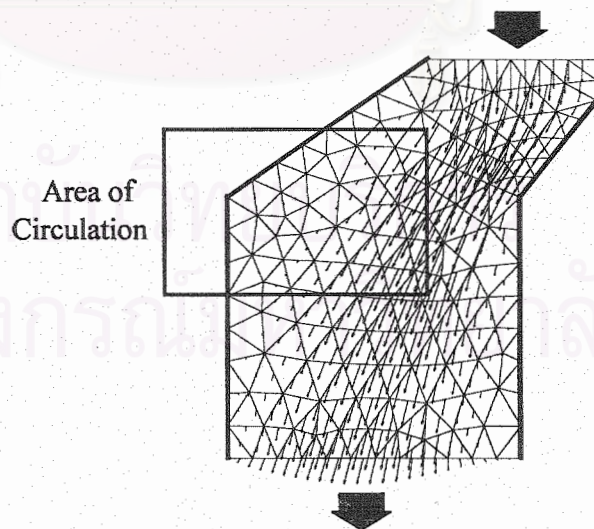
ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW ได้นำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลในท่อเอียงที่มีพื้นที่หน้าตัดไม่สม่ำเสมอแสดงในรูป 5.17 การไหลในท่อดังกล่าวเกิดขึ้นในส่วนของโรงจักรพระนครเหนือ การไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทย จ.นนทบุรี จากการไหลในท่อดังกล่าว ก่อให้เกิดการผุกร่อนในบริเวณมุมซ้ายของท่อ ซึ่งวิศวกรได้คาดว่าเป็นผลมาจากความเร็วของการไหลในบริเวณนั้นมีค่าต่ำและอาจมีการไหล

หมุนวน (Flow Circulation) เกิดขึ้นด้วย รูป 5.17 นี้ยังได้แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 233 เอลิเมนต์ และ 516 จุดต่อ ในการวิเคราะห์ได้กำหนดการ กระจายของการไหลเข้าตอนบนของท่อในรูปของพาราโบลาซึ่งมีค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 100



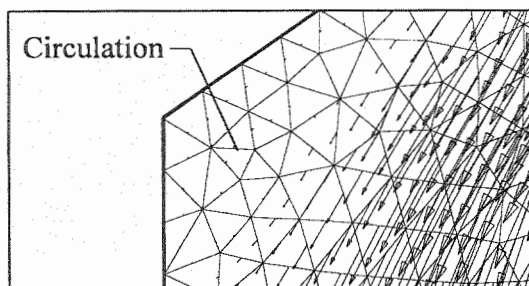
รูป 5.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการไหลในท่อโรงไฟฟ้า กฟผ.

รูป 5.18 แสดงผลลัพธ์ของการกระจายของความเร็วในท่อซึ่งคำนวณได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW รูป 5.18 นี้ แสดงถึงลักษณะการไหลจากตอนบนของท่อลงสู่ตอนล่างของท่อ โดยบริเวณมุมซ้ายของท่อเกิดการไหลหมุนวน รายละเอียดของการไหลหมุนวนในบริเวณนี้ได้ขยายให้เห็นได้ชัดเจนในรูป 5.19



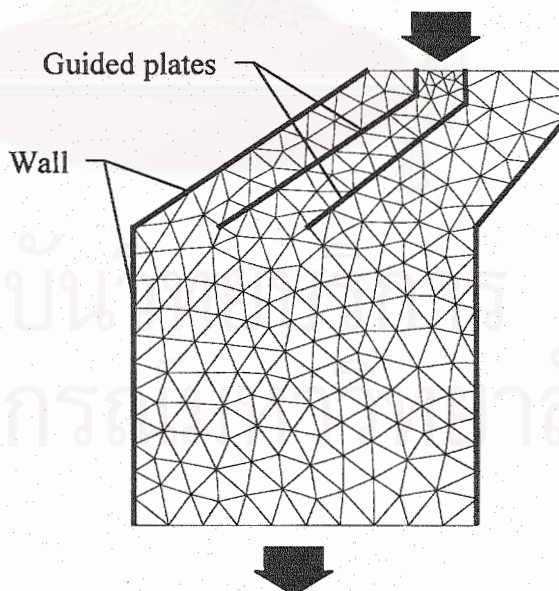
รูป 5.18 ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของความเร็วที่เกิดขึ้นในท่อ (รายละเอียดในกรอบได้ขยายและแสดงในรูป 5.19)





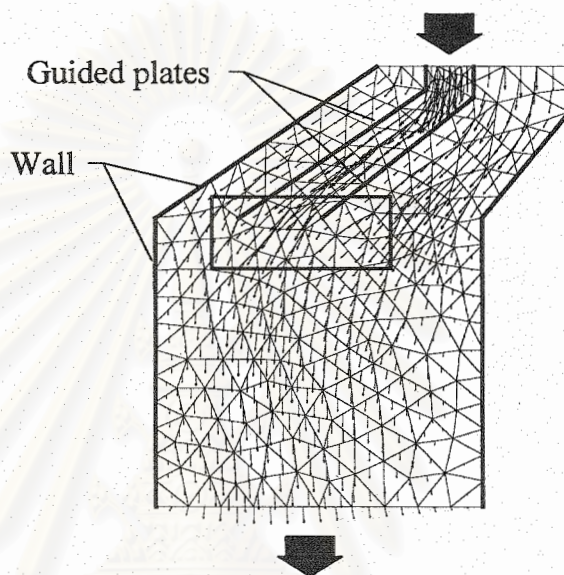
รูป 5.19 รายละเอียดลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณมุมซ้ายบนของท่อ (ใช้ประกอบกับรูป 5.18)

เพื่อหลีกเลี่ยงการไหลหมุนวนที่เกิดขึ้นบริเวณมุมบนซ้ายของท่อ วิศวกรได้ใส่แผ่นโลหะเพื่อกำกับทิศทางของการไหลจำนวน 2 แผ่น ลงในท่อ ดังแสดงในรูป 5.20 และเพื่อวิเคราะห์ลักษณะของการไหลที่เกิดขึ้นหลังจากการใส่แผ่นเหล็กนี้ลงไปแล้ว จึงได้สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 5.20 นี้ ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 388 เอลิเมนต์ และ 869 จุดต่อ

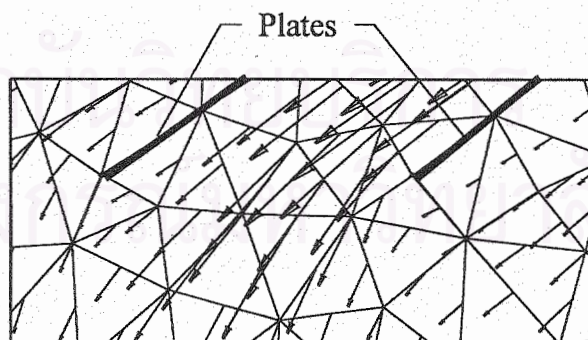


รูป 5.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ในท่อเหล็กจากใส่แผ่นโลหะ

จากนั้น ด้วยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่นี้ จึงได้ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำการวิเคราะห์อีกครั้ง ผลลัพธ์ลักษณะของการไหลที่เกิดขึ้นได้แสดงในรูป 5.21 ซึ่งแสดงถึงการไหลที่ค่อนข้างสม่ำเสมอในท่อโดยที่การหมุนวนที่เคยเกิดขึ้นในท่อครั้งแรกได้หายไป รูป 5.22 ได้แสดงรายละเอียดลักษณะการไหลบริเวณปลายแผ่นโลหะทั้งสอง



รูป 5.21 ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของความเร็วในท่อหลังจากใส่แผ่นโลหะแล้ว (รายละเอียดในกรอบได้ขยายและแสดงในรูป 5.22)

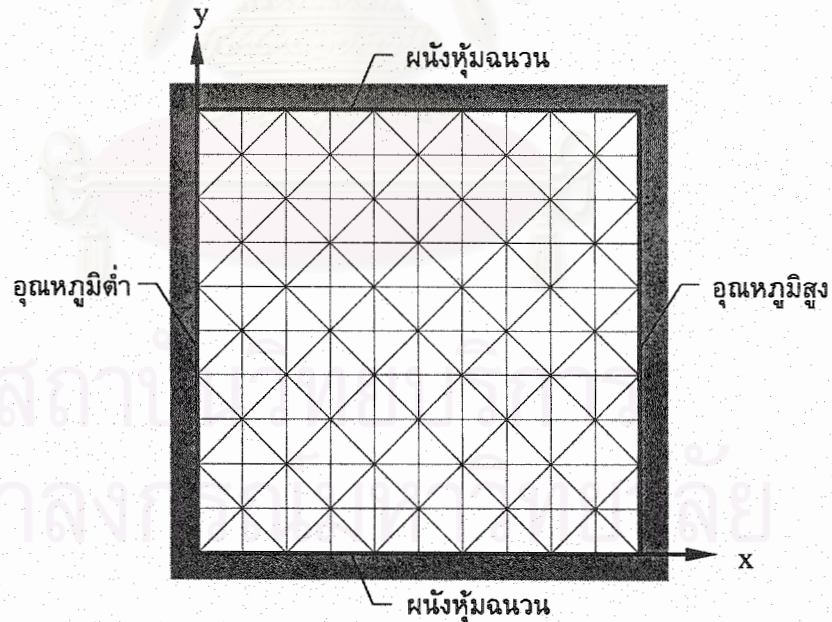


รูป 5.22 รายละเอียดลักษณะการไหลบริเวณปลายแผ่นโลหะทั้งสอง (ใช้ประกอบกับรูป 5.21)

ตัวอย่างนี้ได้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถช่วยวิศวกรในการทำความเข้าใจในปรากฏการณ์ของการไหลที่เกิดขึ้น เพื่อสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องทำให้เกิดประสิทธิภาพการทำงานที่สูงสุด

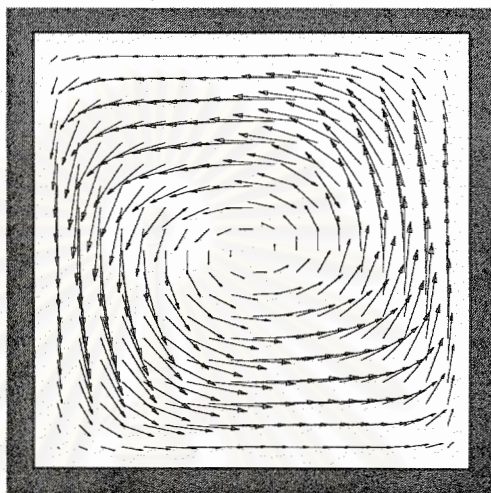
### 5.3 การไหลจากการพาความร้อนในช่องจัดรัศ

ตัวอย่างดังแสดงในหัวข้อ 5.1 เป็นการไหลหมุนวนที่ไม่ได้เกิดขึ้นจากอิทธิพลของความแตกต่างในระดับอุณหภูมิ ตัวอย่างดังที่จะแสดงในหัวข้อ 5.3 นี้ เป็นการไหลหมุนวนซึ่งเกิดขึ้นจากความแตกต่างในระดับอุณหภูมิของของไหล รูป 5.23 แสดงลักษณะของปัญหาซึ่งประกอบด้วยของไหลในช่องจัดรัศ ผังบนและล่างเป็นฉนวน ผังด้านขวามีอุณหภูมิสูง ในขณะที่ผังก้านซ้ายนั้นมีอุณหภูมิต่ำ ความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผังก้านตั้งทั้งสองดังกล่าวก่อให้เกิดการไหลหมุนวนในทิศทวนเข็มนาฬิกา รูป 5.23 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 200 เอลิเมนต์ 441 จุดต่อ

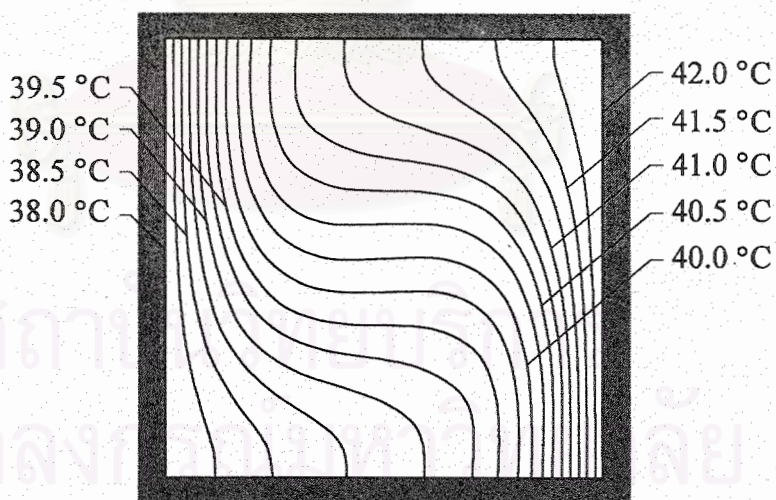


รูป 5.23 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ผลลัพธ์ของการไหลที่เกิดขึ้นจากการใช้ไฟในดีโอดีเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในกรณีของค่าเรย์เลห์ (Rayleigh number) เท่ากับ  $10^4$  ได้แสดงในรูป 5.24



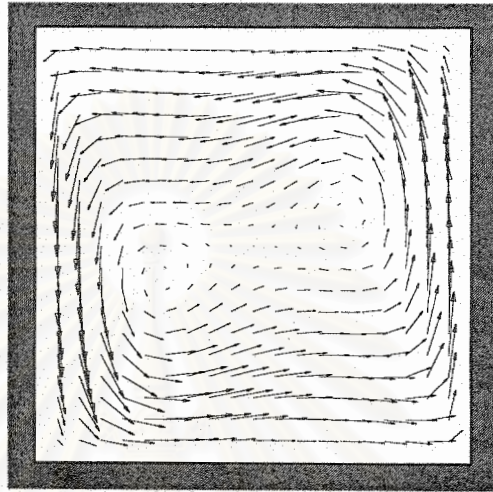
(ก) ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของความเร็ว



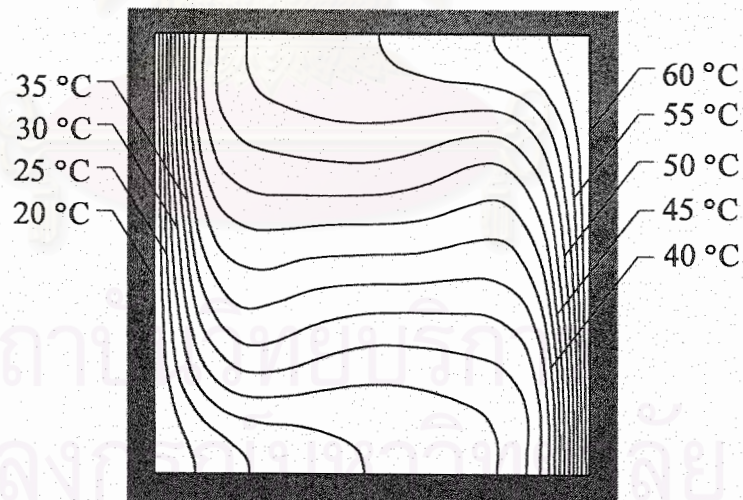
(ข) ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ

รูป 5.24 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  
ในกรณี  $Ra = 10^4$

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ถูกนำมาคำนวณอีกครั้งโดยเปลี่ยนค่าเรย์เลห์ไปเป็น  $10^5$  ซึ่งก่อให้เกิดลักษณะของการไหลที่แตกต่างออกไปดังแสดงในรูป 5.25 รูป 25 (ก) แสดงเวกเตอร์ของความเร็วซึ่งบ่งถึงการไหลหมุนวนจำนวนสองวง



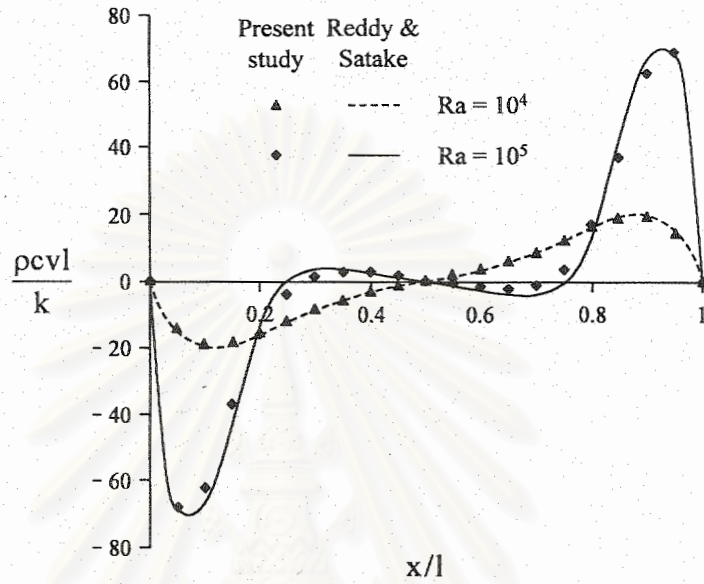
(ก) ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของความเร็ว



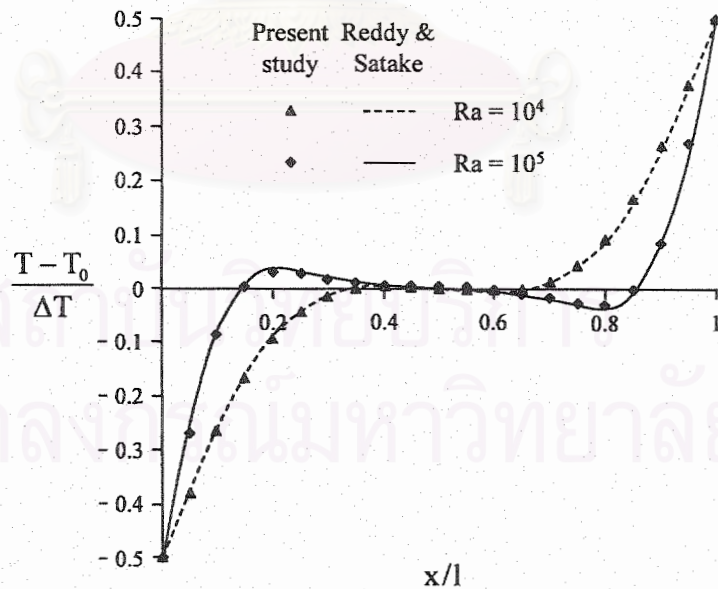
(ข) ผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ

รูป 5.25 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  
ในกรณีที่  $Ra = 10^5$

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในทั้งสองกรณีของค่าเรย์เลย์นี้ได้นำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์อื่น (Reddy & Satake, 1980) ดังแสดงในรูป 5.26 ซึ่งแสดงถึงประสิทธิภาพและความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนี้



(ก) ความเร็วไร้มิติในแนวดิ่ง

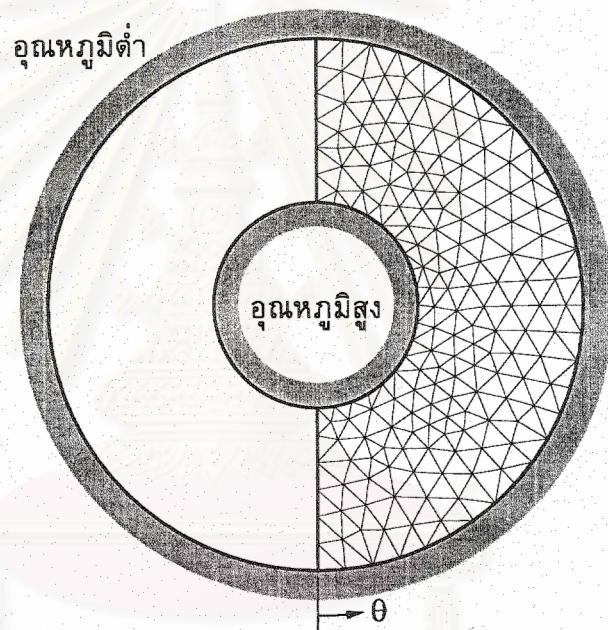


(ข) อุณหภูมิไร้มิติ

รูป 5.26 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการไหลที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด

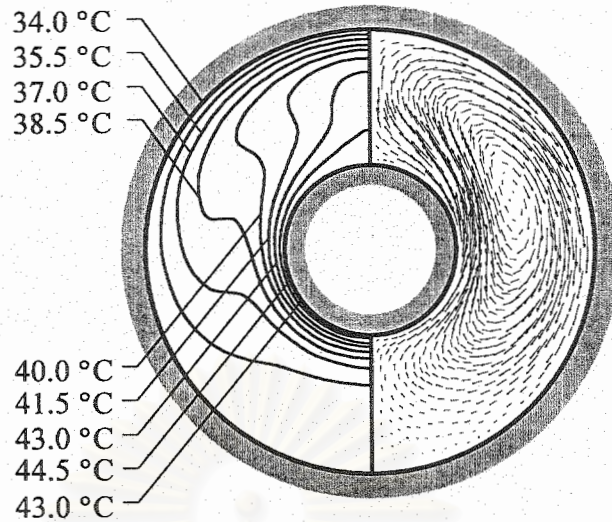
#### 5.4 การไหลจากการพาความร้อนในระหว่างผิวท่อ

เพื่อแสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการประยุกต์เข้ากับรูปร่างที่มีผิวโค้งและซับซ้อนมากขึ้น ปัญหาของการไหลระหว่างผิวท่อสองชั้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิที่ต่างกันดังแสดงในรูป 5.27 ได้นำมาศึกษา รูป 5.27 นี้ยังได้แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 338 เอลิเมนต์ครอบคลุมครึ่งขวาของปัญหาเนื่องจากลักษณะของการไหลมีความสมมาตร



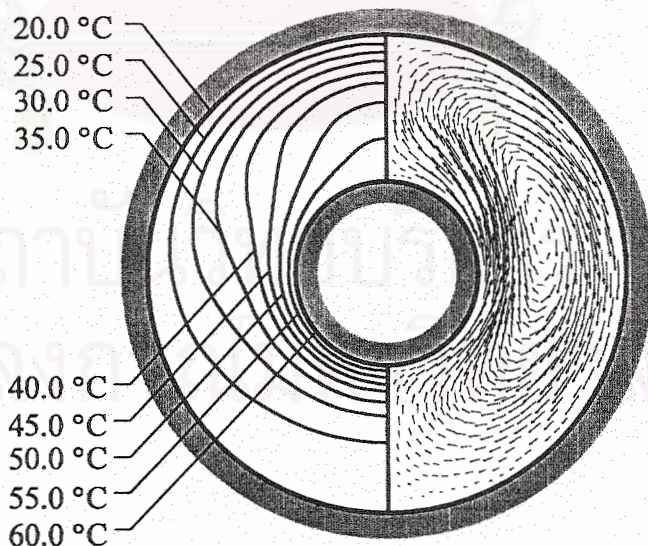
รูป 5.27 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนในระหว่างผิวท่อ

รูป 5.28 แสดงผลลัพธ์ของการไหลที่คำนวณได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ทางด้านขวาของรูปแสดงเวกเตอร์ความเร็วของการไหลส่วนทางด้านซ้ายแสดงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ ซึ่งในกรณีนี้ทั้งสองของท่อมีอุณหภูมิ  $12^{\circ}\text{C}$  โดยมีค่าเรย์เลห์เท่ากับ 3000



รูป 5.28 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและรูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อน  
ในระหว่างผิวท่อที่มีอุณหภูมิต่างกัน  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $Ra = 3000$

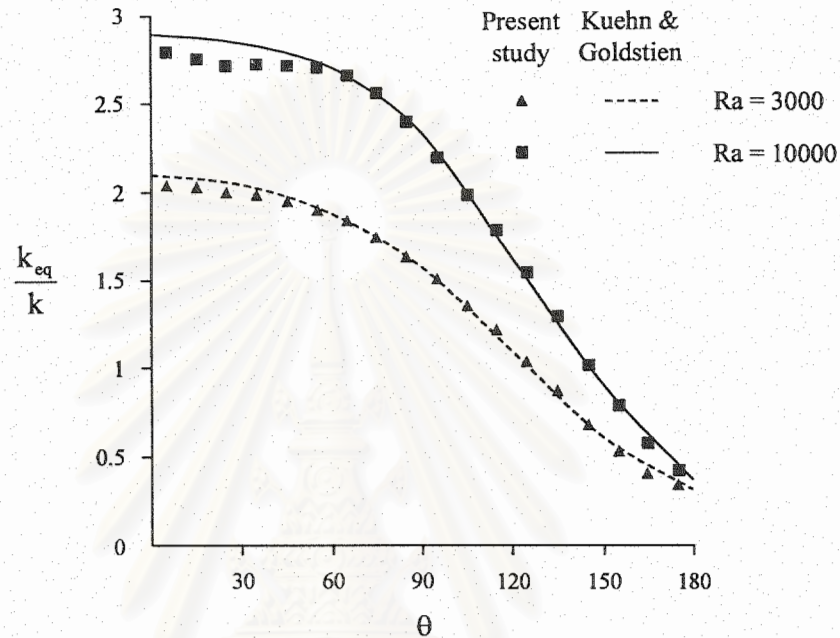
ปัญหาของการรำหล่นี้ได้ทำการคำนวณซ้ำอีกครั้งสำหรับกรณีที่มีท่อที่มีอุณหภูมิ  
ต่างกัน  $14\text{ }^{\circ}\text{C}$  โดยมีค่าเรย์เลห์เท่ากับ  $1000$  ผลลัพธ์ของการไหลที่เกิดขึ้นได้แสดงในรูป  
5.29 ถึงแม้ว่าลักษณะของเวกเตอร์ความเร็วของการไหลยังคงคล้ายกับกรณีแรก แต่ลักษณะ  
การกระจายของอุณหภูมินั้นเปลี่ยนแปลงไปค่อนข้างมาก



รูป 5.29 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและรูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อน  
ในระหว่างผิวท่อที่มีอุณหภูมิต่างกัน  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $Ra = 1000$



รูป 5.30 แสดงการเปรียบเทียบของผลลัพธ์ที่ได้ในรูปแบบของค่าการนำความร้อนสมมูล (Equivalent conductivity) ตลอดขอบผิวในสำหรับการไหลในทั้งสองกรณีกับผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่อง (Finite difference method) โดย Kuehn และ Goldstein

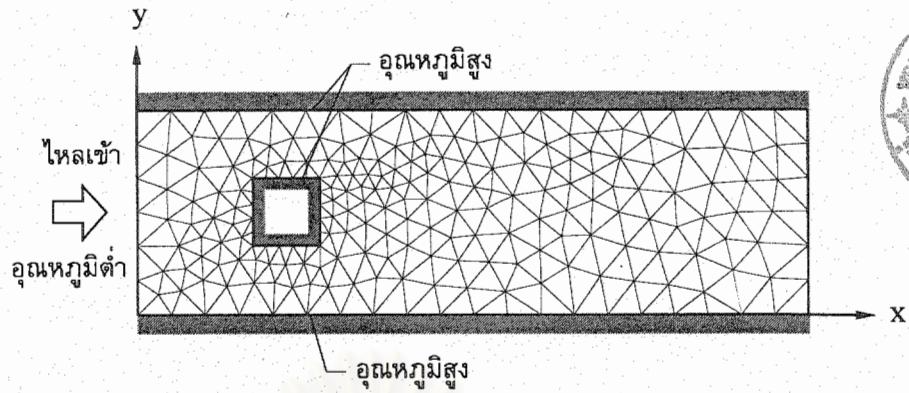


รูป 5.30 การเปรียบเทียบค่าการนำความร้อนสมมูลที่ผิวด้านใน

รูป 5.30 นี้ แสดงถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และคอมพิวเตอร์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น รวมทั้งเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ก่อนนำไปประยุกต์เข้ากับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป

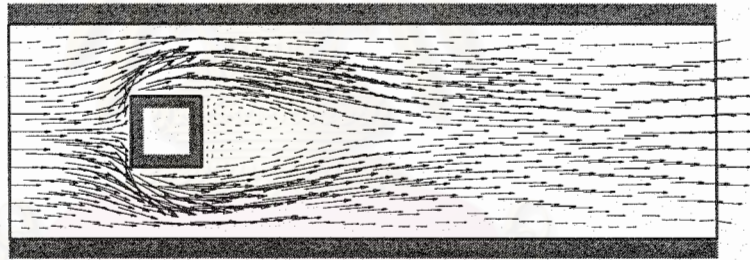
## 5.5 การไหลในช่องทางที่มีกล่องสี่เหลี่ยมมุมทู่สูงกั้นกลาง

รูป 5.31 แสดงลักษณะของปัญหาของการไหลของน้ำเย็นผ่านช่องทางที่ผิวนั้นมีอุณหภูมิสูง โดยในระหว่างช่องทางนั้นมีทรงกระบอกรูปสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิสูงวางขวางการไหลไว้ ในการทำการคำนวณได้สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 392 เอลิเมนต์

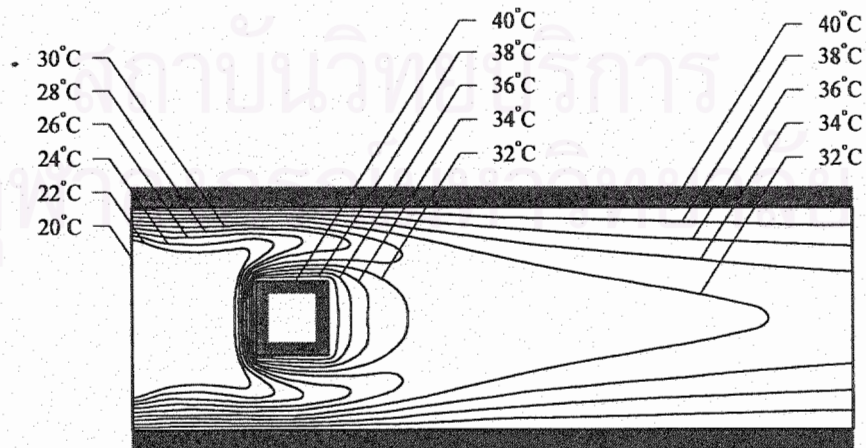


รูป 5.31 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลในช่องทางที่มีกล่องสี่เหลี่ยม  
อุณหภูมิสูงกั้นกลาง

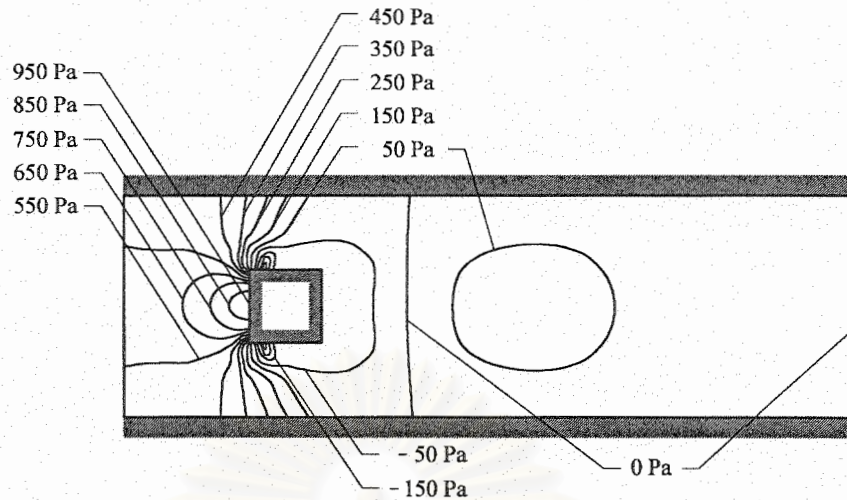
รูป 5.32 (ก)-(ค) แสดงผลลัพธ์ของเวกเตอร์การไหล การกระจายของอุณหภูมิ และการกระจายของความดันที่เกิดขึ้น เมื่อกำหนดให้ค่าเรย์โนลด์สของน้ำเย็นในขณะไหลเข้า เท่ากับ 100 ที่อุณหภูมิ 20 °C โดยที่ผิวช่องทางการไหลและผิวทรงกระบอกสี่เหลี่ยมกั้นกลางต่างมีอุณหภูมิ 40 °C



(ก) เวกเตอร์ความเร็วของการไหล



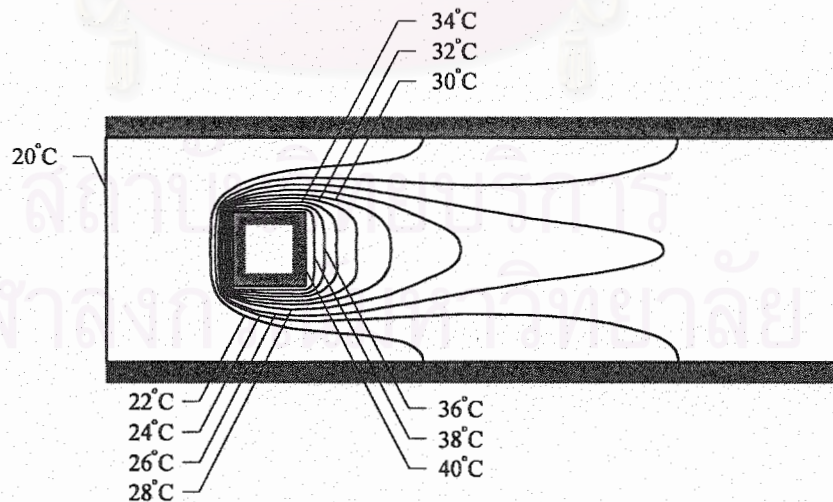
(ข) การกระจายของอุณหภูมิ



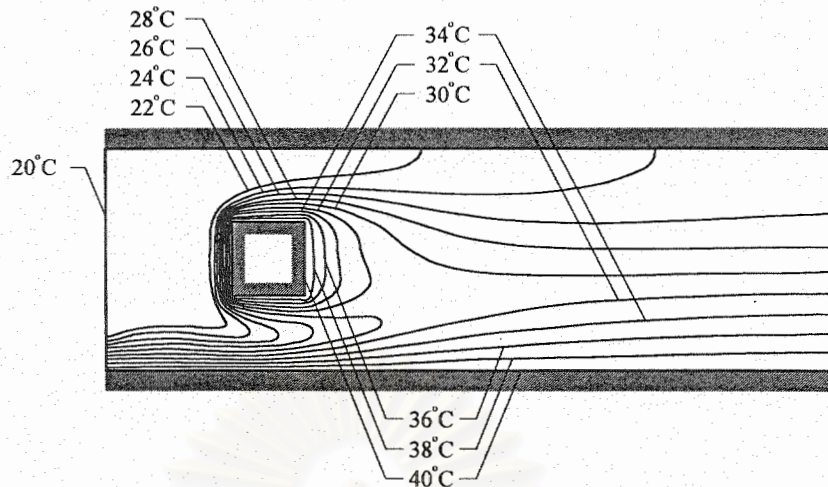
(ค) การกระจายของความดัน

รูป 5.32 ผลลัพธ์การไหลในช่องทางการไหลที่มีกล่องสี่เหลี่ยมมุมสูงกั้นกลาง

เพื่อแสดงศักยภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น จึงได้เปลี่ยนแปลงเงื่อนไขขอบเขตของผนังบนและล่างของช่องทางการไหล รูป 5.33 แสดงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเมื่อทั้งผนังด้านบนและล่างนั้นต่างมีเงื่อนไขขอบเขตของการหุ้มด้วยฉนวนความร้อน ในขณะที่รูป 5.34 แสดงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเมื่อผนังด้านบนถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อนแต่ผนังด้านล่างมีอุณหภูมิที่  $40^{\circ}\text{C}$



รูป 5.33 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิสำหรับกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านบนและด้านล่างถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อน

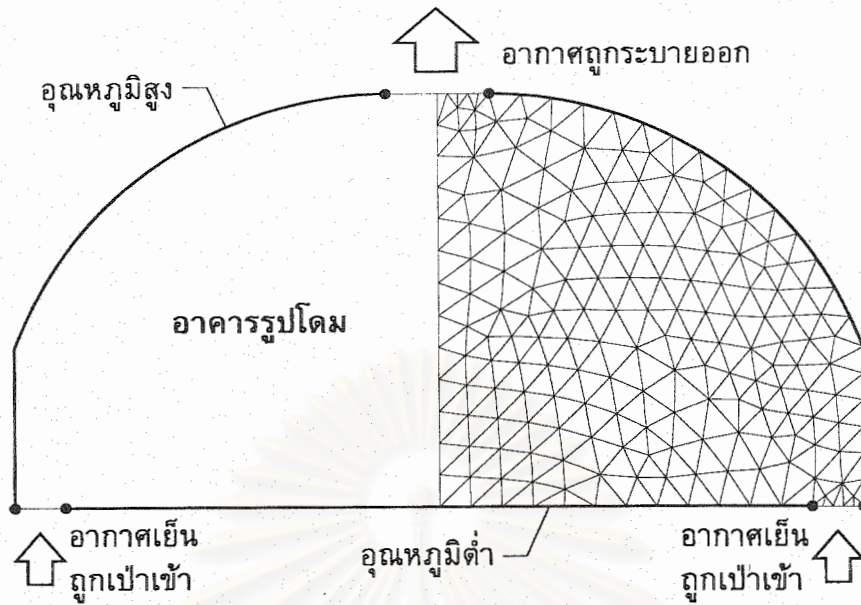


รูป 5.34 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิสำหรับกรณีที่เกิดไฟไหม้ในห้องสี่เหลี่ยมที่ถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อนแต่ผนังด้านล่างมีอุณหภูมิ 40 °C

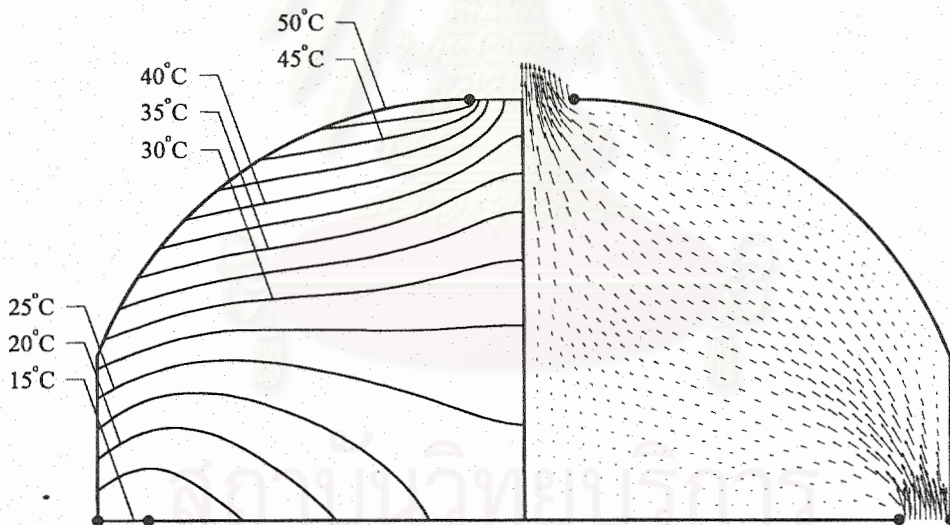
## 5.6 การจำลองการหมุนเวียนของอากาศในอาคารรูปโดม

เพื่อแสดงประสิทธิภาพและประโยชน์ของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาทางปฏิบัติ จึงได้ศึกษาหาลักษณะของการไหลและระดับของอุณหภูมิเพื่อจำลองการหมุนเวียนของอากาศในอาคารรูปโดม รูป 5.35 แสดงรูปแบบอาคารรูปโดมที่มีหลังคาโค้ง อากาศเย็นถูกเป่าเข้าทางมุมล่างทั้งสองของอาคารและปล่อยออกที่หลังคากลางอาคาร ระดับอุณหภูมิที่ผนังและหลังคาได้กำหนดให้ค่อยๆเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องตามความสูงของหลังคาเพื่อจำลองปริมาณความร้อนจากแสงแดดที่ตกกระทบลงบนหลังคาของอาคาร เนื่องจากปัญหามีความสมมาตร ดังนั้นเนื้อที่เพียงครึ่งหนึ่งของอาคารจึงนำมาใช้ในการคำนวณ รูป 5.35 นี้ ยังได้แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมรวมทั้งสิ้น 342 เอลิเมนต์

จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ โดยอากาศเย็นถูกเป่าเข้าที่มุมทั้งสองของอาคารที่ความเร็วต่ำ ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ถูกนำมาคำนวณผลลัพธ์ของการไหลในกรณีนี้ รูป 5.36 แสดงเวกเตอร์ความเร็วของการไหลในอาคารทางด้านขวาของรูปและลักษณะการกระจายของอุณหภูมิของอากาศภายในอาคารทางด้านซ้ายของรูป ซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปของทั้งความเร็วของการไหลและระดับของอุณหภูมิในอาคาร



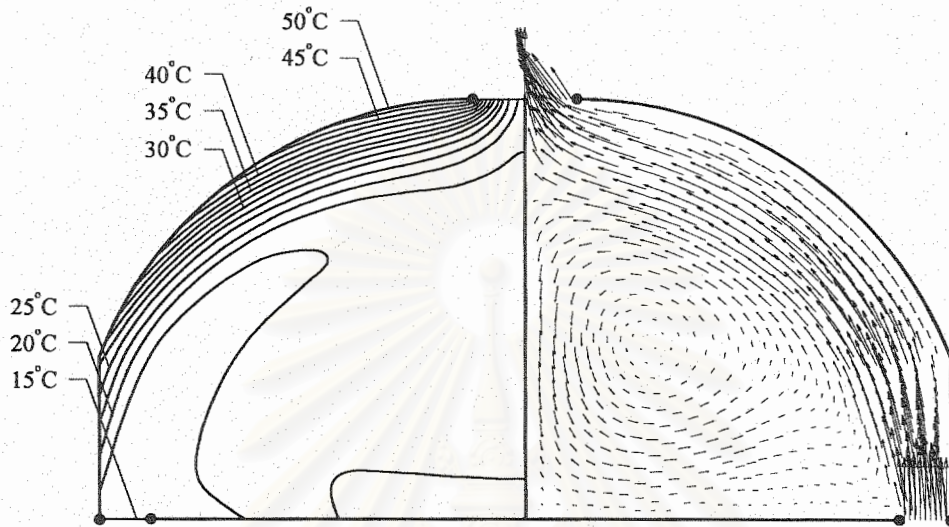
รูป 5.35 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการหมุนเวียนของอากาศในอาคารรูปโดม



รูป 5.36 ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่อากาศเย็นถูกเป่าเข้าด้วยความเร็วต่ำ

รูป 5.37 แสดงผลลัพธ์ลักษณะของการไหลและระดับอุณหภูมิในกรณีที่อากาศเย็นถูกเป่าเข้าด้วยความเร็วสูงขึ้นเป็น 10 เท่าของกรณีแรก ลักษณะเวกเตอร์ของการไหลทางด้านขวาของรูปแสดงถึงการหมุนวน (Circulation) ของอากาศซึ่งไม่ได้เกิดขึ้นในกรณี

แรก ในขณะที่ระดับอุณหภูมิทางด้านซ้ายของรูปแสดงถึงอากาศส่วนใหญ่ในอาคารมีอุณหภูมิต่ำ โดยอุณหภูมิจะสูงขึ้นในบริเวณชั้นที่แคบๆติดกับหลังคาของอาคาร ทั้งนี้สืบเนื่องมาจากอากาศเย็นถูกเป่าเข้ามาในอาคารด้วยความเร็วสูงขึ้น



รูป 5.37 ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่อากาศเย็นถูกเป่าเข้าด้วยความเร็วสูง

ตัวอย่างทั้งหมด 6 ตัวอย่างที่ได้นำเสนอในบทนี้ หลายตัวอย่างเป็นตัวอย่างที่ใช้ในการตรวจสอบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น รวมทั้งไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้แต่งขึ้นเช่นกัน ในขณะที่อีกหลายตัวอย่างเป็นตัวอย่างที่ใช้แสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เพื่อช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาของการไหลในหลายๆกรณีผ่านรูปแบบที่มีลักษณะซับซ้อน ผลลัพธ์ที่ได้ทั้งหมดดังแสดงในตัวอย่างต่างๆนี้ได้มาจากการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั้งสิ้น ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ ดังนั้น หากต้องการความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่สูงมากขึ้นจึงจำเป็นต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น ซึ่งมีผลโดยตรงกับปริมาณหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้อยู่ แต่อย่างไรก็ตาม ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาแล้วยังคงเหมือนเดิมโดยไม่ต้องเปลี่ยนแปลงส่วนใดๆในตัวโปรแกรมทั้งสิ้น ยกเว้นในบรรทัดที่แสดงตัวเลขของหน่วยความจำที่ต้องการใช้สำหรับปัญหานั้นๆ ซึ่งแสดงอยู่ในตอนต้นของตัวโปรแกรมเท่านั้น

## บทที่ 6

### การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

การวิเคราะห์ปัญหาของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (High-speed compressible flow) เริ่มมีบทบาทสำคัญต่อทั้งการศึกษาในระดับอุดมศึกษาและการวิจัยระดับสูงในปัจจุบัน การไหลที่มีลักษณะดังกล่าวเกิดขึ้นกับปัญหาหลาย ๆ อย่างซึ่งค่าใช้จ่ายในการออกแบบนั้นค่อนข้างสูง ลักษณะของปัญหาครอบคลุมตั้งแต่ การไหลของของไหลภายนอก (External flows) เช่นการคำนวณหาภาวะการเปลี่ยนแปลงของอากาศผ่านเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูงซึ่งการไหลของอากาศรอบลำตัวเครื่องบินเกิดการอัดตัวได้ รวมไปถึงปัญหาการไหลของของไหลภายใน (Internal flows) เช่นการคำนวณหาสภาวะของแก๊สในเครื่องยนต์แบบกังหันที่มีความเร็วสูง เป็นต้น ความยากลำบากในการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้สืบเนื่องมาจากปรากฏการณ์ในการไหลมักประกอบด้วยคลื่นช็อค (Shock wave) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะของการไหลโดยฉับพลัน ยกตัวอย่างเช่นการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ของอากาศผ่านพื้นเอียงจะก่อให้เกิดคลื่นช็อคในแนวเฉียงขึ้นจากพื้นเอียงนั้น ความหนาแน่นของอากาศทั้งสองด้านของคลื่นช็อคนี้จะมีค่าคงที่แต่อยู่ในระดับที่ต่างกัน กล่าวคือความหนาแน่นของอากาศเกิดการเปลี่ยนแปลงโดยฉับพลันผ่านคลื่นช็อคนั้น ดังนั้น ในแง่ของการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการคำนวณใด ๆ ก็ตาม จึงจำเป็นต้องสร้างขนาดของเอลิเมนต์หรือตาข่าย (Mesh) ที่มีขนาดเล็กมากในบริเวณของคลื่นช็อคนั้น ประกอบกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์ของปัญหานี้อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (Set of nonlinear partial differential equations) ทำให้การคำนวณเป็นไปด้วยความลำบาก ใช้ปริมาณหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์มาก และเวลาที่ใช้ในการคำนวณสูง

#### 6.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบอนุรักษ

สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบหนืดและอัดตัวได้นั้น (Viscous compressible flow) ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอนุรักษ (Conservation form) ได้ดังนี้ (Anderson, 1991)

$$\frac{\partial}{\partial t} \{U\} + \frac{\partial}{\partial x} \{E_1 - E_v\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_1 - F_v\} = 0 \quad (6.1)$$

โดยเวกเตอร์  $\{U\}$  ประกอบด้วยตัวแปรอนุรักษ์ ดังนี้

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

โดย  $\rho$  แทนความหนาแน่น,  $u$  และ  $v$  แทนความเร็วในแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ, และ  $e$  แทนพลังงานรวม เวกเตอร์  $\{E_I\}$  และ  $\{F_I\}$  ประกอบด้วยค่าฟลักซ์แบบไม่หนืดในแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ ดังนี้

$$\{E_I\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho ue + Pu \end{Bmatrix} ; \quad \{F_I\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho ve + Pv \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

โดย  $p$  แทนความดัน เวกเตอร์  $\{E_V\}$  และ  $\{F_V\}$  ประกอบด้วยค่าฟลักซ์แบบหนืดในแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ ดังนี้

$$\{E_V\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ u\sigma_x + v\tau_{xy} - q_x \end{Bmatrix} ; \quad \{F_V\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ u\tau_{xy} + v\sigma_y - q_y \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

พลังงานรวม (Total energy)  $\varepsilon$  คือ

$$\varepsilon = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (6.5)$$

โดย  $e$  แทนพลังงานภายใน

$$e = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (6.6)$$

และสำหรับแก๊สสมบูรณ์แบบ (Perfect gas) ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่น  $\rho$  และความดัน  $P$  คือ

$$P = (\gamma - 1) \rho \left( \varepsilon - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) \quad (6.7)$$



และสำหรับการไหลที่เป็นไปตามกฎของแก๊สอุดมคติ (Ideal gas law) ซึ่งมีความสัมพันธ์ที่ว่า

$$P = \rho RT \quad (6.8)$$

โดย  $T$  แทนอุณหภูมิและ  $R$  แทนค่าคงตัวสากลของแก๊ส (Universal gas constant) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่าความร้อนจำเพาะดังนี้

$$R(c_p - c_v) = (\gamma - 1)c_v \quad (6.9)$$

โดย

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (6.10)$$

ในสมการ (6.4) ค่าของความเค้นในทิศทางต่างๆกันนั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความเร็ว  $u$  และ  $v$  คือ

$$\sigma_x = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.11a)$$

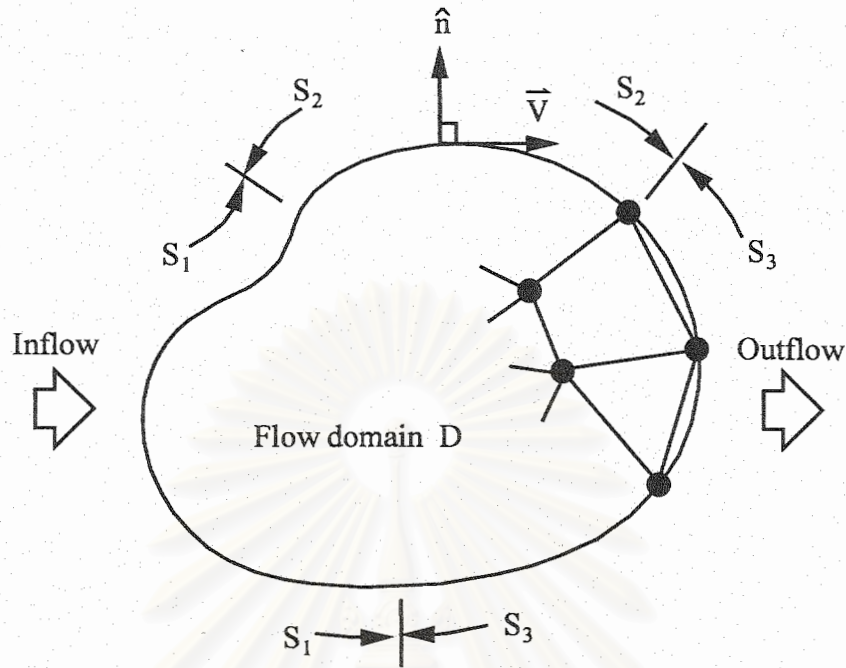
$$\sigma_y = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (6.11b)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.11c)$$

ส่วน  $q_x$  และ  $q_y$  คือปริมาณความร้อนในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของอุณหภูมิโดยใช้กฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{และ} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (6.12)$$

การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (6.1) จำเป็นต้องประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต รูป 6.1 แสดงเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบอัดตัวได้ซึ่งโดยทั่วไปประกอบด้วยแบบอย่างที่แตกต่างกันต่อไปนี้คือ: (1) ดลอดขอบ  $S_1$  จะทำการกำหนดตัวแปรอนุรักษ์ดังแสดงในสมการ (6.2) สำหรับการไหลเข้าแบบเร็วกว่าเสียง (Supersonic inflow), (2) ดลอดขอบ  $S_2$  ซึ่งเป็นผนังจะบังคับให้ทิศความเร็ว  $\vec{V}$  ของการไหลนั้นขนานไปกับขอบของผนัง นั่นคือกำหนดให้  $\vec{V} \cdot \hat{n} = 0$  โดย  $\hat{n}$  คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผนังนั้น และ (3) ดลอดขอบ  $S_3$  ซึ่งเป็นขอบของการไหลออก จะไม่กำหนดเงื่อนไขใดๆ เลยหากสภาพของการไหลออกนั้นเร็วกว่าเสียง แต่หากสภาพการไหลออกนั้นเป็นแบบต่ำกว่าเสียง (Subsonic outflow) จะกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของความดัน  $P$  ซึ่งปกติในทางปฏิบัติเป็นค่าที่ทราบหรือสามารถหาได้โดยง่ายเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอื่นๆ



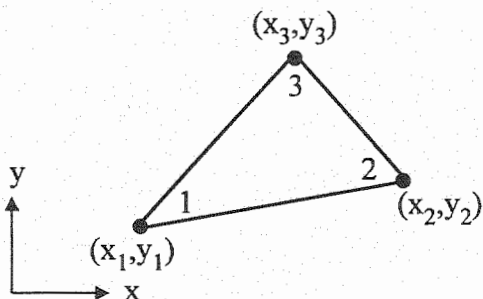
รูป 6.1 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบไม่อัดตัวได้

ในการจำลองรูปแบบของปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้นี้ จะใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูป 6.2 ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามารถจำลองรูปแบบของปัญหาการไหลได้ง่าย สะดวกในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์และสามารถประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่จะนำเสนอในบทที่ 8 ได้ ในการไหลชนิดนี้ จะพิจารณาให้ค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์มีค่าคงที่ ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จากค่าเฉลี่ยของค่าของบนจุดต่อทุกจุดของเอลิเมนต์นั้นๆ ดังนี้

$$U_{ele} = \frac{(U_1 + U_2 + U_3)}{3} \quad (6.13)$$

เมื่อ  $U_{ele}$  แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ  $U_i, i = 1, 2, 3$  แทนค่าของการไหลบนจุดต่อของเอลิเมนต์ ส่วนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ( $\Omega$ ) สามารถคำนวณได้จาก

$$\Omega = \frac{1}{2} [x_2(y_3 + y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (6.14)$$



รูป 6.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสำหรับการไหลแบบอัดตัวได้

## 6.2 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

เพื่อให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจในขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเริ่มพิจารณาการไหลแบบไม่มีความหนืดแต่อัดตัวได้ ในกรณีนี้สมการ (6.1) ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}\{U\} + \frac{\partial}{\partial x}\{E\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F\} = 0 \quad (6.15a)$$

โดย

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho ue + Pu \end{Bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho ve + Pv \end{Bmatrix} \quad (6.15b)$$

เนื่องจากทั้งสี่สมการในสมการ (6.15) นี้ต่างอยู่ในรูปแบบเดียวกัน จึงสามารถพิจารณาเพียงสมการหนึ่งสมการใดในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (6.16)$$

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เริ่มจากนำสมการ (6.15) ซึ่งอยู่ในรูปแบบอนุกรมมาจัดให้อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนเอลิเมนต์ (Gnoffo, 1986) ดังนี้

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (6.17)$$

และเพื่อก่อให้เกิดความสะดวกในการทำความเข้าใจและการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป สมการ (6.17) นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของแทนเซอร์ คือ

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (6.18)$$

โดย  $F_i$ ,  $i=1,2$  แทนปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืดในแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ ส่วน  $x_i$ ,  $i=1,2$  แทนพิกัดในแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ

จากนั้นจึงทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) เข้ากับสมการ (6.18) จะได้

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} n_i F_i d\Gamma = 0 \quad (6.19)$$

โดย  $n_i$  แทนทิศทางโคไซน์ (Direction cosines) บนด้านของเอลิเมนต์

พจน์แรกในสมการ (6.19) แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าคุณสมบัติของการไหลเชิงอนุรักษ์ของเอลิเมนต์เทียบกับเวลาภายในเอลิเมนต์ และพจน์ที่สองในสมการแทนปริมาณฟลักซ์ที่ผ่านด้านต่างๆของเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของค่าคุณสมบัติของการไหลเชิงอนุรักษ์ภายในเอลิเมนต์ ขึ้นอยู่กับปริมาณฟลักซ์ที่มีการแลกเปลี่ยนบนด้านต่างๆของเอลิเมนต์นั้น เนื่องจากพจน์แรกในสมการ (6.19) สามารถจัดให้อยู่ในรูปผลต่างแบบไปข้างหน้า (Forward difference) เทียบกับเวลาและสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลเฉลี่ยที่เวลา  $m+1$  และ  $m$  ดังนี้

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega = \frac{\Delta U}{\Delta t} \Omega = \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} \Omega \quad (6.20)$$

และพจน์ที่สองในสมการ (6.19) สามารถแสดงให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\int_{\Gamma} n_i F_i d\Gamma = \int_{\Gamma} F_n d\Gamma \quad (6.21)$$

โดย  $F_n$  แทนปริมาณฟลักซ์ที่ผ่านในทิศทางตั้งฉากกับด้านของเอลิเมนต์นั้น ซึ่งคือ

$$F_n = F_x \cdot n_x + F_y \cdot n_y$$

$$\text{หรือ } \{F_n\} = \begin{Bmatrix} \rho u n_x + \rho v n_y \\ (\rho u^2 + P) n_x + \rho u v n_y \\ \rho u v n_x + (\rho v^2 + P) n_y \\ u(\rho \varepsilon + P) n_x + v(\rho \varepsilon + P) n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho U_n \\ \rho u U_n + P n_x \\ \rho v U_n + P n_y \\ \rho \varepsilon U_n + P U_n \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

โดย 
$$U_n = u \cdot n_x + v \cdot n_y \quad (6.23a)$$

และ 
$$V_t = -u \cdot n_y + v \cdot n_x \quad (6.23b)$$

นำสมการ (6.20) และสมการ (6.21) แทนลงในสมการ (6.19) จะได้

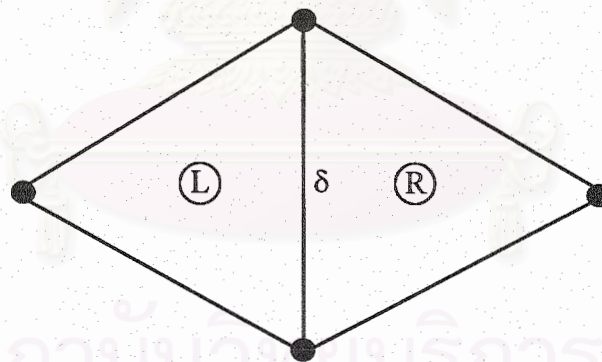
$$U^{m+1} - U^m = -\frac{\Delta t}{\Omega} \int_{\Gamma} F_n d\Gamma \quad (6.24)$$

สมการ (6.24) แสดงการหาผลต่างของค่าของตัวแปรเชิงอนุรักษ์บนเอลิเมนต์ โดยคำนวณจากผลรวมของปริมาณฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดที่ผ่านทุกด้านของเอลิเมนต์ หากแทนปริมาณฟลักซ์ที่แท้จริง  $F_n$  ด้วยปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลข  $\tilde{F}_n$  ที่ผ่านในแต่ละด้านของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม สมการ (6.24) จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$U^{m+1} - U^m = -\frac{\Delta t}{\Omega} \left[ \sum_{n=1}^3 \int_{\Gamma} \tilde{F}_n d\Gamma \right] \quad (6.25)$$

สำหรับปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลข  $\tilde{F}_n$  ที่ผ่านด้านร่วมของเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูป 6.3 นั้น คำนวณได้จาก (Roe, 1981) คำนวณได้จากปริมาณฟลักซ์

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{2}(F_{nR} + F_{nL}) - \frac{1}{2}|A|(U_R - U_L) \quad (6.26)$$



รูป 6.3 เอลิเมนต์ซ้าย L และเอลิเมนต์ขวา R ที่มีด้าน  $\delta$  ร่วมกัน

โดย  $F_{nL}, F_{nR}$  แทนปริมาณฟลักซ์ตามสมการ (6.22) ของเอลิเมนต์ทางด้านซ้ายและด้านขวา

$U_L, U_R$  แทนค่าคุณสมบัติเชิงอนุรักษ์ตามสมการ (6.2) ของเอลิเมนต์ทางด้านซ้ายและด้านขวา ตามลำดับ

A แทนเมตริกซ์แบบยาโคบี (Jacobian matrix) ของเวกเตอร์ฟลักซ์แบบไม่หนืด เมื่อเทียบกับตัวแปรเชิงอนุรักษ์บนด้านร่วมของเอลิเมนต์ (Gnoffo, 1986) ดังนี้

$$A = \frac{\partial F}{\partial u} = R \Lambda R^{-1} \quad (6.27)$$

พจน์แรกทางด้านขวามือของสมการ (6.26) เป็นปริมาณฟลักซ์ที่มีการแลกเปลี่ยนบนด้านร่วมของเอลิเมนต์ทั้งสอง โดยใช้ค่าเฉลี่ยของปริมาณฟลักซ์ของเอลิเมนต์ทางด้านซ้ายและด้านขวา ส่วนพจน์ที่สองทางด้านขวามือของสมการ (6.26) เป็นพจน์ของการแพร่กระจายเทียม (Artificial dissipation) ซึ่งอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังแสดงในสมการ (6.27) รายละเอียดของการประดิษฐ์เมตริกซ์ยาโคบีจะแสดงในหัวข้อ 6.3 ต่อไป

เมื่อพิจารณาปริมาณฟลักซ์ที่มีการแลกเปลี่ยนบนด้านหนึ่งของเอลิเมนต์ ซึ่งมีความยาว  $\delta$  จากสมการ (6.26) ที่เวลา  $m+1$  จะได้

$$\int_{\Gamma} \tilde{F}_n d\Gamma = -\frac{\delta}{2} [F_{nR}^{m+1} + F_{nL}^{m+1} - |A|^{m+1} (U_R^{m+1} - U_L^{m+1})] \quad (6.28)$$

แทนสมการ (6.28) ลงในสมการ (6.25) จะได้

$$\Delta U = -\frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^3 \delta_n [F_{nR}^{m+1} + F_{nL}^{m+1} - |A|^{m+1} (U_R^{m+1} - U_L^{m+1})] \quad (6.29)$$

จากนั้นทำการประมาณค่าตัวแปร และฟลักซ์เชิงอนุพันธ์เอลิเมนต์  $U_L^{m+1}$  และ  $F_{nL}^{m+1}$  ที่เวลา  $m+1$  โดย

$$U_L^{m+1} \approx U_L^m \quad (6.30a)$$

$$F_{nL}^{m+1} \approx F_{nL}^m + |A|^{m+1} \Delta U \quad (6.30b)$$

แล้วแทนลงในสมการ (6.29) ก่อให้เกิดสมการดังนี้

$$\left[ I + \frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^3 \delta_n |A|^{m+1} \right] \Delta U = -\frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^3 \delta_n [F_{nR}^{m+1} + F_{nL}^m - |A|^{m+1} (U_R^{m+1} - U_L^m)] \quad (6.31)$$

ในการทำการคำนวณ จะประยุกต์วิธีทำซ้ำ (iteration method) และแทนค่าคุณสมบัติต่างๆ ที่ช่วงเวลา  $m+1$  ด้วยค่าคุณสมบัติที่ได้จากวิธีทำซ้ำครั้งหลังสุด ซึ่งแทนด้วยเครื่องหมาย \* ดังนี้

$$\left[ I + \frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^3 \delta_n |A|^* \right] \Delta U = -\frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^3 \delta_n [F_{nR}^* + F_{nL}^m - |A|^* (U_R^* - U_L^m)] \quad (6.32)$$

กระบวนการทำซ้ำจะสิ้นสุดลงเมื่อ

$$\text{ค่าความผิดพลาด} = \sqrt{\sum_{n=1}^{n_{le}} (U^{m+1} - U^m)^2} \quad (6.33)$$

น้อยกว่าค่าที่กำหนดให้ จากนั้นจึงทำการกระจายค่าคุณสมบัติของการไหลบนเอลิเมนต์ไปยังจุดต่อ  $i$  ใดๆ โดยค่าที่จุดต่อนั้นคำนวณจาก

$$U_i = \frac{U_{e1} + U_{e2} + \dots + U_{en}}{n} \quad (6.34)$$

โดย  $n$  แทนจำนวนเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อ  $i$  นั้น

### 6.3 การประดิษฐ์เมตริกซ์ยาโคบี

สมการการอนุรักษ์ (6.16) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอื่นได้โดยการประยุกต์กฎลูกโซ่ (Chain rule) ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\tilde{A} \cdot \tilde{\nabla}) U = 0 \quad (6.36)$$

สำหรับการหารูปแบบของเมตริกซ์แบบยาโคบีนั้น จะเริ่มจากการอ้างอิงกับตัวแปรปฐมภูมิ (Primitive variables) โดยเมื่อพิจารณาสมการ (6.16) ในรูปตัวแปรปฐมภูมิ จะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\tilde{A} \cdot \tilde{\nabla}) W = 0 \quad (6.37)$$

โดย  $W$  แทนเมตริกซ์ของตัวแปรปฐมภูมิ และ  $\tilde{A}$  แทนเมตริกซ์แบบยาโคบีของปริมาณฟลักซ์ปฐมภูมิซึ่งอยู่ในรูป

$$W = \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ P \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

และ  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{A}_x \cdot \mathbf{n}_x + \tilde{A}_y \cdot \mathbf{n}_y$

$$= \begin{bmatrix} un_x + vn_y & \rho n_x & \rho n_y & 0 \\ 0 & un_x + vn_y & 0 & \frac{n_x}{\rho} \\ 0 & 0 & un_x + vn_y & \frac{n_y}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 n_x & \rho c^2 n_y & un_x + vn_y \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

หากกำหนดให้  $M$  เป็นเมตริกซ์การแปลงค่า (Transformation matrix) ระหว่างตัวแปรเชิงอนุพันธ์กับตัวแปรปฐมภูมิ ดังนี้

$$M = \frac{\partial U}{\partial W}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \alpha & \rho u & \rho v & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \quad (6.40a)$$

ดังนั้น

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \beta\alpha & -\beta u & -\beta v & \beta \end{bmatrix} \quad (6.40b)$$

โดย

$$\alpha = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (6.41a)$$

และ

$$\beta = \gamma - 1 \quad (6.41b)$$

สมการ (6.36) สามารถใช้ความสัมพันธ์ของเมตริกซ์การแปลงค่าและจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$M \frac{\partial W}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\nabla}) M W = 0 \quad (6.42)$$

นำเมตริกซ์  $M^{-1}$  คูณหน้าทั้งสองข้างของสมการ (6.42) จะได้สมการที่อยู่ในรูปตัวแปรปฐมภูมิอีกหนึ่งสมการ คือ

$$\frac{\partial W}{\partial t} + M^{-1} (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\nabla}) M W = 0 \quad (6.43)$$



เปรียบเทียบสมการ (6.37) กับสมการ (6.43) จะได้

$$\bar{A} = M^{-1} \tilde{A} M \quad (6.44)$$

เมตริกซ์แบบยาโคบี  $\tilde{A}$  สามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์แบบเจาะจง (Eigen-vector matrix) และเมตริกซ์ของค่าเจาะจง (Eigenvalue matrix) ได้ดังนี้

$$\tilde{A} = L \Lambda L^{-1} \quad (6.45)$$

เมื่อ  $L$  แทนเมตริกซ์แบบเจาะจง

$L^{-1}$  แทนเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจง

$\Lambda$  แทนเมตริกซ์ของค่าเจาะจงซึ่งเป็นเมตริกซ์เฉียง (Diagonal matrix) ประกอบด้วยค่าเจาะจง  $\lambda$  (Eigenvalue) ในแนวทแยงของเมตริกซ์

โดยเมตริกซ์ของค่าเจาะจง คำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\det |\lambda I - \tilde{A}| = 0 \quad (6.46)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - un_x + vn_y & \rho n_x & \rho n_y & 0 \\ 0 & \lambda - un_x + vn_y & 0 & \frac{n_x}{\rho} \\ 0 & 0 & \lambda - un_x + vn_y & \frac{n_y}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 n_x & \rho c^2 n_y & \lambda - un_x + vn_y \end{bmatrix} = 0 \quad (6.47)$$

$$(\lambda - U)^2 [(\lambda - U)^2 - c^2] = 0 \quad (6.48)$$

โดย  $U = U_n = un_x + vn_y$

สมการ (6.48) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ  $\lambda$  มีค่าดังแสดงด้วยเมตริกซ์  $\Lambda$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U-c \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

ส่วนเมตริกซ์  $L^{-1}$  ซึ่งเป็นเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจง สามารถคำนวณได้จากการนำค่าบนแถวของเมตริกซ์คูณกับเมตริกซ์แบบยาโคบีในแต่ละค่าเจาะจง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

หากพิจารณาแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 1 ซึ่งก็คือ  $U$

$$[l_{11} \ l_{12} \ l_{13} \ l_{14}] [\tilde{A}] = \lambda_1 [l_{11} \ l_{12} \ l_{13} \ l_{14}] \quad (6.50)$$

จะได้สมการทั้งหมด 4 สมการ คือ

$$l_{11}U = l_{11}U \quad (6.51a)$$

$$l_{11}\rho n_x + l_{12}U + l_{14}\rho c^2 n_x = l_{12}U \quad (6.51b)$$

$$l_{11}\rho n_y + l_{13}U + l_{14}\rho c^2 n_y = l_{13}U \quad (6.51c)$$

$$\frac{l_{12}n_x}{\rho} + \frac{l_{13}n_y}{\rho} + l_{14}U = l_{14}U \quad (6.51d)$$

จากสมการ (6.51b)-(6.51c) จะได้ว่า  $l_{11} = -c^2 l_{14}$  และสมการ (6.51a) แสดงว่า  $l_{11}$  เป็นค่าใด ๆ ก็ได้ ในที่นี้หากกำหนดให้  $l_{11} = 1$  และจากสมการ (6.51d) จะได้ว่า  $l_{12} = -\frac{n_y}{n_x} l_{13}$  ซึ่งหากกำหนดให้  $l_{12} = 0$  จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 1 ดังนี้

$$[l_{11} \ l_{12} \ l_{13} \ l_{14}] = [-c^2 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (6.52)$$

หากพิจารณาแถวที่ 2 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 2 ซึ่งก็คือ  $U$  ซึ่งเหมือนกับแถวที่ 1 แต่กำหนดให้  $l_{21} = 0$  และ  $l_{22} = \rho$  จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 2 ดังนี้

$$[l_{21} \ l_{22} \ l_{23} \ l_{24}] = [0 \ -\rho n_x \ \rho n_y \ 0] \quad (6.53)$$

หากพิจารณาแถวที่ 3 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 3 ซึ่งก็คือ  $U+c$  ได้สมการ 4 สมการ คือ

$$l_{31}U = l_{31}(U+c) \quad (6.54a)$$

$$l_{31}\rho n_x + l_{32}U + l_{34}\rho c^2 n_x = l_{32}(U+c) \quad (6.54b)$$

$$l_{31}\rho n_y + l_{33}U + l_{34}\rho c^2 n_y = l_{33}(U+c) \quad (6.54c)$$

$$\frac{l_{32}n_x}{\rho} + \frac{l_{33}n_y}{\rho} + l_{34}U = l_{34}(U+c) \quad (6.54d)$$

จากสมการ (6.54a) จะได้ว่า  $l_{31} = 0$  สมการ (6.54b) จะได้  $l_{32} = l_{34}\rho c^2 n_x$  และสมการ (6.54c) จะได้  $l_{33} = l_{34}\rho c^2 n_y$  หากนี้กำหนดให้  $l_{34} = 1$  จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 3 ดังนี้

$$[l_{31} \ l_{32} \ l_{33} \ l_{34}] = [0 \ \rho c^2 n_x \ \rho c^2 n_y \ 1] \quad (6.55)$$

หากพิจารณาแถวที่ 4 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 4 ซึ่งก็คือ  $U-c$  ได้สมการ 4 สมการดังนี้

$$l_{41}U = l_{41}(U-c) \quad (6.56a)$$

$$l_{41}\rho n_x + l_{42}U + l_{44}\rho c^2 n_x = l_{42}(U-c) \quad (6.56b)$$

$$l_{41}\rho n_y + l_{43}U + l_{44}\rho c^2 n_y = l_{43}(U-c) \quad (6.56c)$$

$$\frac{l_{42}n_x}{\rho} + \frac{l_{43}n_y}{\rho} + l_{44}U = l_{44}(U-c) \quad (6.56d)$$

จากสมการ (6.56a) จะได้ว่า  $l_{41} = 0$  สมการ (6.56b) จะได้  $l_{42} = l_{44}\rho c^2 n_x$  และสมการ (6.56c) จะได้  $l_{43} = l_{44}\rho c^2 n_y$  หากนี้กำหนดให้  $l_{44} = 1$  จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 4 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\rho c^2 n_x & -\rho c^2 n_y & 1 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

เมื่อนำสมการ (6.52), (6.53), (6.55) และ (6.57) มารวมกัน จะได้เมตริกซ์  $L^{-1}$  และเมตริกซ์  $L$  ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho n_y & \rho n_x & 0 \\ 0 & \rho c n_x & \rho c n_y & 1 \\ 0 & -\rho c n_x & -\rho c n_y & 1 \end{bmatrix} \quad (6.58a)$$

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & -\frac{n_y}{\rho} & \frac{n_x}{2\rho c} & -\frac{n_x}{2\rho c} \\ 0 & \frac{n_x}{\rho} & \frac{n_y}{2\rho c} & -\frac{n_y}{2\rho c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.58b)$$

นำสมการ (6.45) แทนลงในสมการ (6.44) และได้เมตริกซ์แบบยาโคบีดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{A} &= MLAL^{-1}M^{-1} \\ &= RAR^{-1} \end{aligned} \quad (6.59)$$

เมื่อ  $R = ML$  และ  $R^{-1} = L^{-1}M^{-1}$  คือ

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & -n_y & \frac{u+cn_x}{2c^2} & \frac{u-cn_x}{2c^2} \\ -\frac{v}{c^2} & n_x & \frac{v+cn_y}{2c^2} & \frac{v-cn_y}{2c^2} \\ -\frac{\alpha}{c^2} & V & \frac{\alpha+Uc}{2c^2} + \frac{1}{2\beta} & \frac{\alpha-Uc}{2c^2} + \frac{1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (6.60a)$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \beta\alpha - c^2 & -\beta u & -\beta v & \beta \\ V & -n_y & n_x & 0 \\ \beta\alpha - Uc & cn_x - \beta u & cn_y - \beta v & \beta \\ \beta\alpha + Uc & -cn_x - \beta u & -cn_y - \beta v & \beta \end{bmatrix} \quad (6.60b)$$

โดย

$$U = U_n = un_x + vn_y \quad (6.61a)$$

$$V = V_t = -un_y + vn_x \quad (6.61b)$$

$$\alpha = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (6.61c)$$

$$\beta = \gamma - 1 \quad (6.61d)$$

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (6.61e)$$

$$P = \frac{\rho(\gamma-1)}{\gamma} [H - \alpha] \quad (6.61f)$$

$$H = \gamma \varepsilon - \frac{(\gamma-1)}{2} (u^2 + v^2) \quad (6.61g)$$

สำหรับค่าคุณสมบัติของการไหลบนด้านร่วมของเอลิเมนต์ที่พิจารณา ซึ่งนำไปแทนลงในเมตริกซ์ต่างๆของสมการ (6.60) นั้น จะถูกประมาณค่าด้วยวิธีการหาค่าเฉลี่ยของโรย (Roe, 1981) ซึ่งคำนวณจาก

$$\hat{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (6.62a)$$

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (6.62b)$$

$$\hat{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (6.62c)$$

$$\hat{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (6.62d)$$

โดยค่า  $\hat{U}, \hat{V}$  และ  $\hat{c}$  นั้นคำนวณโดยใช้ค่าคุณสมบัติจากสมการ (6.62) ดังนี้

$$\hat{U} = \hat{u} n_x + \hat{v} n_y \quad (6.63a)$$

$$\hat{V} = -\hat{u} n_y + \hat{v} n_x \quad (6.63b)$$

$$\hat{P} = \frac{\hat{\rho}(\gamma-1)}{\gamma} \left[ \hat{H} - \frac{1}{2}(\hat{u}^2 + \hat{v}^2) \right] \quad (6.63c)$$

$$c^2 = \frac{\gamma \hat{P}}{\hat{\rho}} \quad (6.63d)$$

สมการต่างๆที่ได้นำเสนอในบทที่ 6 นี้ จะนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน เพื่อใช้แก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ รายละเอียดของการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ รวมทั้งลักษณะไฟล์ข้อมูลต่างๆจะอธิบายพร้อมตัวอย่างในบทที่ 7 ต่อไป

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 7

### ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังอธิบายในบทที่ 6 ได้ถูกนำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันอย่างเป็นขั้นเป็นตอน เพื่อใช้แก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ได้เขียนขึ้นโดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ซึ่งสามารถทำความเข้าใจได้ง่ายและสะดวกในการตรวจสอบความถูกต้องโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ได้ตั้งชื่อให้ว่า HIFLOW โดยมีรายละเอียดดังอธิบายในหัวข้อต่างๆ ต่อไปนี้

#### 7.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ประกอบด้วยโปรแกรมย่อย 4 โปรแกรม มีรายละเอียดและขั้นตอนการคำนวณดังนี้

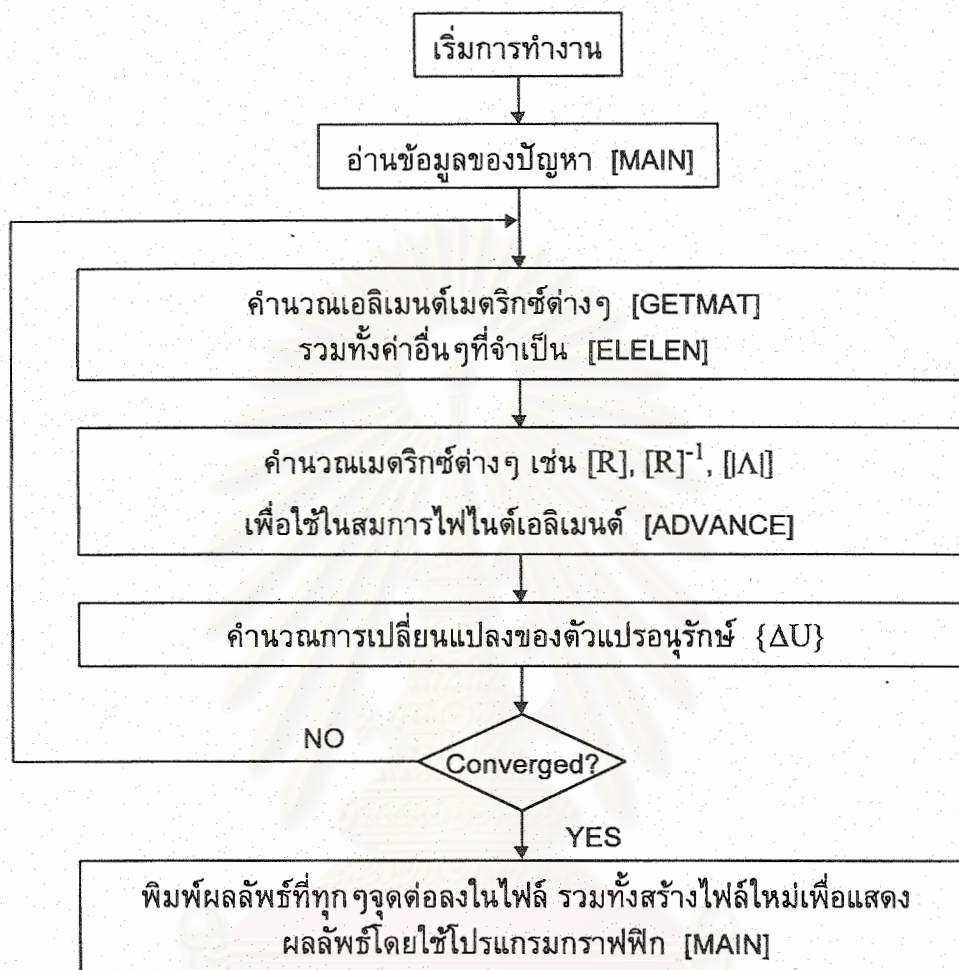
4.1.1 อ่านแฟ้มข้อมูลนำเข้า (Input file) ของปัญหาการไหล ซึ่งประกอบด้วยจำนวนจุดต่อทั้งหมด จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด จำนวนขอบทั้งหมด ค่าคุณสมบัติของการไหล จำนวนรอบในการคำนวณ หมายเลขของจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์ พิกัดของจุดต่อ เงื่อนไขเริ่มต้นของการไหลซึ่งประกอบด้วย ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็ว  $u$  ในแกนแนว  $x$  ค่าความเร็ว  $v$  ในแนวแกน  $y$  และค่าพลังงานรวม และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา โดยเรียกโปรแกรมย่อย [INPUT]

4.1.2 สร้างเมตริกซ์ของไฟไนต์เอลิเมนต์และประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตต่างๆ เพื่อใช้ในการคำนวณ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SIDE] [GETMAT] และ [ELELEN]

4.1.3 แก้มการหาค่าผลลัพธ์ด้วยวิธีการทำซ้ำ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [COMPUTE]

4.1.4 เก็บผลลัพธ์ที่ได้ในแฟ้มข้อมูลผลลัพธ์ (Output file) เพื่อนำไปแสดงการกระจายของผลลัพธ์ต่างๆของปัญหาการไหล โดยเรียกโปรแกรมย่อย [OUTPUT]

ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถสรุปโดยใช้แผนภูมิการทำงาน (Flow chart) ดังแสดงในรูป 7.1



รูป 7.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW

## 7.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั้งหมดแสดงอยู่ในภาคผนวก ข ตอนท้ายเล่มของรายงานวิจัยนี้

## 7.3 เพิ่มข้อมูลนำเข้าและเพิ่มข้อมูลผลลัพธ์

ลักษณะเพิ่มข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ประกอบด้วย 6 ส่วน ดังต่อไปนี้

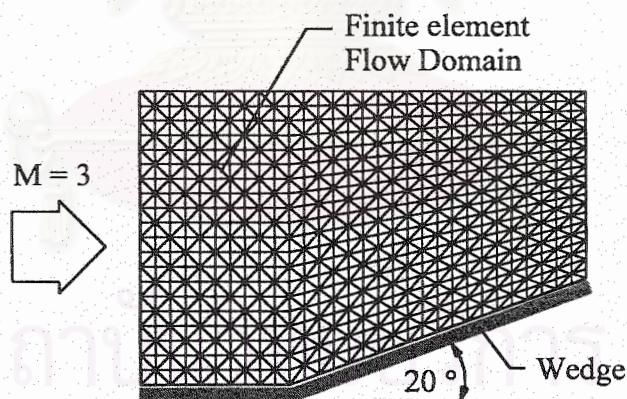
ส่วนที่ 1	ขนาดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์		
บรรทัดแรก	คำอธิบายจำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อและจำนวนขอบของปัญหา		
บรรทัดที่สอง	จำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อและจำนวนขอบของปัญหา		
ตัวอย่าง	NELEM 900	NPOIN 496	NBOUN 90
ส่วนที่ 2	ค่าคุณสมบัติของการไหลและค่าที่ใช้ในการคำนวณ		
บรรทัดแรก	คำอธิบายค่าสัดส่วนของค่าความร้อนจำเพาะ ค่ากำหนดสำหรับการตรวจสอบค่าเจาะจง จำนวนรอบในการคำนวณ		
บรรทัดที่สอง	ค่าสัดส่วนของค่าความร้อนจำเพาะ ค่ากำหนดสำหรับการตรวจสอบค่าเจาะจง จำนวนรอบในการคำนวณ		
ตัวอย่าง	GAMMA 1.4	EPSLAM 0.01	NTIME 2000
ส่วนที่ 3	การจัดเรียงจุดต่อภายในเอลิเมนต์		
บรรทัดแรก	คำอธิบายรายละเอียดพร้อมจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด		
บรรทัดต่อมา	หมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อ 3 จุดต่อ		
ตัวอย่าง	ELEMENT NODAL CONNECTION [ 900] : 1 1 33 32		
ส่วนที่ 4	ตำแหน่งพิกัดของจุดต่อ		
บรรทัดแรก	คำอธิบายรายละเอียดพร้อมจำนวนจุดต่อทั้งหมด		
บรรทัดต่อมา	หมายเลขจุดต่อ พิกัดในแนวแกน x พิกัดในแนวแกน y		
ตัวอย่าง	NODAL COORDINATES [ 496] : 1 0.0 0.0		
ส่วนที่ 5	เงื่อนไขเริ่มต้นของการไหล		
บรรทัดแรก	คำอธิบายรายละเอียดพร้อมจำนวนจุดต่อทั้งหมด		
บรรทัดต่อมา	หมายเลขจุดต่อ ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็ว u ในแนวแกน x ค่าความเร็ว v ในแนวแกน y ค่าพลังงานทั้งหมด		
ตัวอย่าง	NODAL INITIAL CONDITIONS [ 496] : 1 1.0 0.0 0.698412		



ส่วนที่ 6	เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบของปัญหา			
บรรทัดแรก	คำอธิบายรายละเอียดพร้อมจำนวนขอบทั้งหมด			
บรรทัดต่อมา	หมายเลขจุดต่อ	หมายเลขจุดต่อ	หมายเลขเอลิเมนต์	เงื่อนไขขอบเขต
ตัวอย่าง	BOUNDARY CONDITIONS [ 90 ] :			
	32	1	1	1

#### 7.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม

เพื่อแสดงการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW สำหรับการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ และเพื่อเป็นการทดสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น จึงได้ทำการคำนวณปรากฏการณ์การไหลด้วยความเร็วที่เร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียงที่ทำมุม  $20^\circ$  ปัญหานี้เป็นปัญหาพื้นฐานซึ่งสามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับผลลัพธ์แม่นยำ (Bertin and Smith, 1989) รูป 7.2 แสดงโดเมนของการไหลและรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,200 เอลิเมนต์ และ 651 จุดต่อ

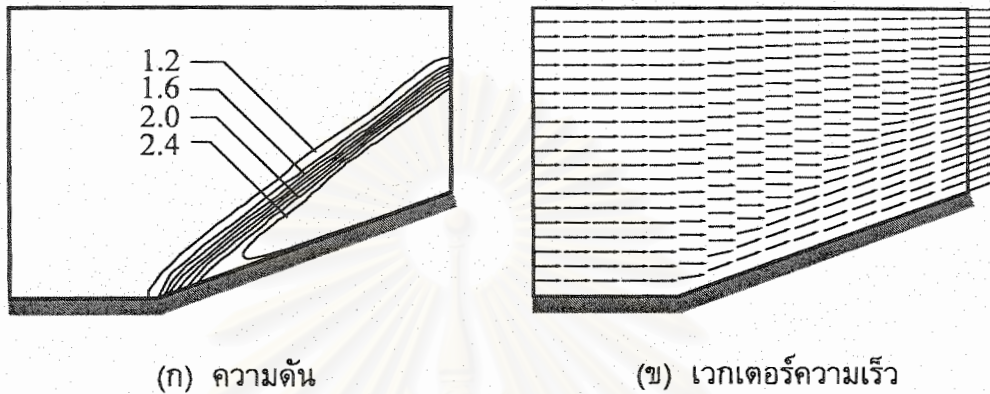


รูป 7.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหล 3 เท่าของเสียงผ่านพื้นเอียง

ผลลัพธ์การกระจายของความดันและลักษณะของความเร็วในการไหลผ่านพื้นเอียงที่คำนวณได้จากโปรแกรม HIFLOW ได้แสดงในรูป 7.3 (ก-ข) การกระจายของความดันและความเร็วในรูปนี้แสดงให้เห็นถึงปรากฏการณ์ของคลื่นช็อกที่เกิดขึ้นในแนวเฉียงกับพื้นเอียง ความถูกต้องของมุม  $(\beta)$  ของคลื่นช็อกนี้สามารถตรวจสอบได้จากสมการ (Anderson, 1991)

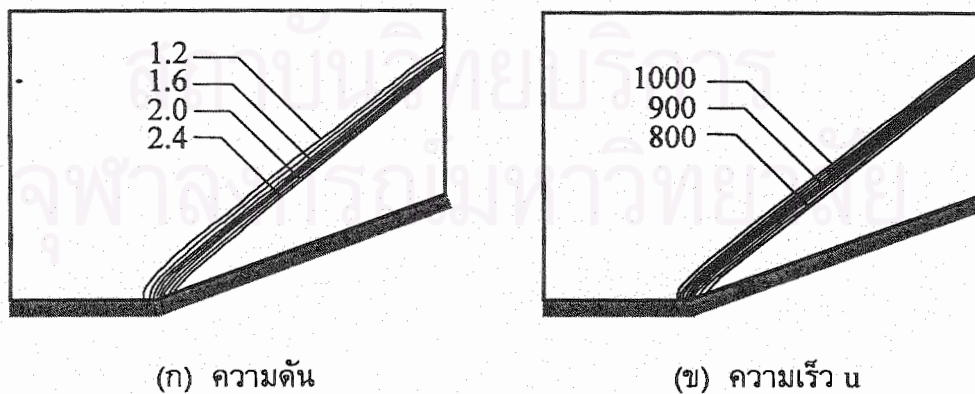
$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M^2 \sin \beta - 1}{M^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2}$$

โดย  $\theta$  แทนมุมของพื้นเอียงซึ่งสำหรับตัวอย่างนี้คือ  $20^\circ$



รูป 7.3 ผลลัพธ์การกระจายของความดันและเวกเตอร์ความเร็วที่คำนวณได้

ลักษณะของคลื่นช็อกในรูป 7.3 (ก) นั้นมีความหนาค่อนข้างมาก ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในแนวของคลื่นช็อกนั้นมีขนาดค่อนข้างใหญ่ ดังนั้นหากต้องการให้ผลลัพธ์ของคลื่นช็อกที่คำนวณได้มีความคมมากขึ้น เอลิเมนต์ที่ใช้จึงจำเป็นต้องมีการมีขนาดเล็กลง รูป 7.4 แสดงผลลัพธ์ของปัญหานี้อีกครั้งโดยเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ขึ้นเป็น 3,000 เอลิเมนต์ และ 1,586 จุดต่อ ทำให้คลื่นช็อกที่คำนวณได้นั้นมีความหนาลดลง



รูป 7.4 ผลลัพธ์การกระจายของความดันและความเร็ว u ซึ่งคำนวณได้จากการใช้ขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กลง

หากพิจารณาลักษณะการกระจายของความดันดังเช่นแสดงในรูป 7.4 (ก) จะพบว่าความดันทั้ง 2 ด้านของคลื่นช็อคนั้นมีค่าคงที่แต่อยู่ในระดับที่ต่างกัน ความดันดังกล่าวเปลี่ยนแปลงโดยฉับพลันผ่านคลื่นช็อค ในขณะเดียวกัน หากพิจารณาลักษณะของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์จำนวนมากที่ใช้บนพื้นที่ทั้ง 2 ด้านของคลื่นช็อคนั้นไม่ได้ก่อประโยชน์ในการคำนวณมากนัก กล่าวคือสามารถใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ขึ้นในพื้นที่เหล่านี้ได้ แต่ในทางตรงข้าม เอลิเมนต์ตลอดแนวคลื่นช็อคยังมีขนาดเล็กเพียงพอเป็นผลให้คลื่นช็อคที่คำนวณได้นั้นมีความหนามากเกินไป จำเป็นต้องลดขนาดเอลิเมนต์ตลอดแนวคลื่นช็อคลงอีก

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากปัญหานี้แสดงให้เห็นถึงความต้องการในการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กๆตลอดแนวคลื่นช็อคเพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ แต่ในขณะเดียวกันควรใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ขึ้นในบริเวณอื่นๆเพื่อลดจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ใช้ในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจะมีผลโดยตรงในการลดปริมาณหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์และเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณ

เนื่องจากปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ล้วนประกอบด้วยปรากฏการณ์ของคลื่นช็อคที่เกิดขึ้นเป็นส่วนใหญ่ ดังนั้นก่อนใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW เพื่อวิเคราะห์ปัญหาอื่นๆต่อไป บทที่ 8 จะอธิบายขั้นตอนการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อใช้เพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในแนวคลื่นช็อค และใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆเพื่อลดปริมาณหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 8

### ระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

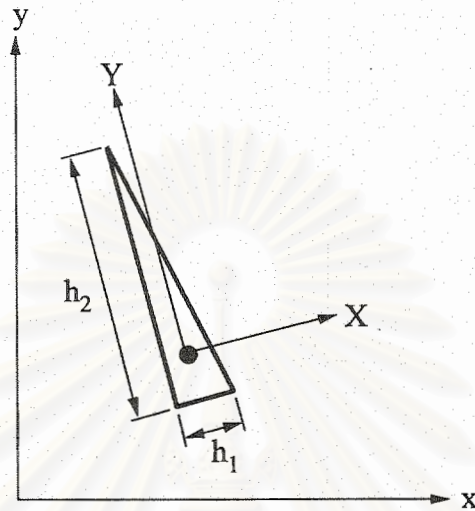
#### 8.1 แนวคิดในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ตั้งเช่นตัวอย่างของการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงซึ่งก่อให้เกิดคลื่นช็อกในแนวเฉียงกับพื้นเอียงนั้น ลักษณะของการกระจายของผลลัพท์ที่เกิดขึ้น เช่นการกระจายของความหนาแน่นหรือความเร็วจะมีค่าคงที่ที่ระดับๆหนึ่ง จากนั้นจะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างกะทันหันผ่านคลื่นช็อกไปสู่ค่าคงที่อีกที่ระดับหนึ่ง ลักษณะการกระจายของผลลัพท์เช่นนี้ก่อให้เกิดปัญหาในการคำนวณ กล่าวคือความเที่ยงตรงหรือความถูกต้องของผลลัพท์ที่คำนวณได้ตามแนวช็อกจะต่ำ แต่ในขณะเดียวกัน เวลาที่ใช้ไปในการคำนวณจะสูงหากใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดของเอลิเมนต์เท่าๆกันตลอดพื้นที่โดเมนของการไหล สาเหตุสำคัญที่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเท่าๆกันตลอดพื้นที่ทั้งหมดก็เพราะว่าในทางปฏิบัติสำหรับปัญหาทั่วไป ผู้ทำการคำนวณจะไม่ทราบว่าเกิดช็อกในลักษณะเช่นใดและวางตัวอยู่บริเวณไหน การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก นอกจากจะใช้เวลาในการคำนวณมากแล้วยังต้องการปริมาณหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่สูงมากขึ้นตามไปด้วย

ดังนั้น แนวคิดของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คือการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากตามแนวคลื่นช็อกเพื่อสามารถจับการเปลี่ยนแปลงของผลลัพท์ได้อย่างเที่ยงตรง และในขณะเดียวกัน สร้างเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพท์น้อยเพื่อลดปริมาณหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และที่สำคัญที่สุด กระบวนการการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวควรเกิดขึ้นโดยอัตโนมัติ โดยที่ผู้ทำการคำนวณไม่จำเป็นต้องทราบลักษณะการกระจายของผลลัพท์ และบริเวณที่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กๆล่วงหน้ามาก่อน

รูป 8.1 แสดงแนวคิดสำหรับการสร้างลักษณะของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เหมาะสมในระนาบ  $x-y$  กล่าวคือ หากแนวของคลื่นช็อกวางตัวอยู่ในแนว  $Y$  ดังนั้น เอลิเมนต์นี้ควรมีขนาดสั้นในแนว  $X$  ที่ตั้งฉากกับแนว  $Y$  เพื่อสามารถจับการเปลี่ยนแปลงของผลลัพท์ผ่านคลื่นช็อกได้โดยฉับพลัน ดังนั้น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมนี้จึงควรมีความกว้าง  $h_1$  ในทิศทางแกน  $X$  ที่ค่อนข้างสั้นเมื่อเปรียบเทียบกับความสูง  $h_2$  ในทิศทาง  $Y$  ทั้งนี้ก็เพื่อที่

จะก่อให้เกิดผลลัพธ์จากการคำนวณที่มีความเที่ยงตรงสูงในทิศทาง  $X$  ได้ ซึ่งหมายถึงว่า สิ่งจำเป็นที่จะต้องทำการคำนวณหาคือ ทิศแกน  $X$  และ  $Y$  รวมทั้งขนาด  $h_1$  และ  $h_2$  ที่เหมาะสมสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนี้



รูป 8.1 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่วางตัวในแนวแกนหลัก X-Y บนระนาบ x-y

## 8.2 ขั้นตอนและวิธีการ

ในการคำนวณหาทิศทาง  $X$  และ  $Y$  รวมทั้งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $h_1$  และ  $h_2$  ที่เหมาะสม สามารถทำได้โดยใช้หลักการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (Principal stresses) จากแนวคิดกลศาสตร์ของแข็ง (Solid mechanics) กล่าวคือหากทราบค่าความเค้น  $\sigma_x$  และ  $\sigma_y$  ในแนวแกน  $x$  และ  $y$  และความเค้นเฉือน  $\tau_{xy}$  สามารถคำนวณหาความเค้นในแนวแกนหลัก  $\sigma_X$  และ  $\sigma_Y$  ได้ รวมทั้งทิศทางความเค้นหลักทั้งสองนี้

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

ในการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ปัญหาใดปัญหาหนึ่งซึ่งประกอบด้วยคลื่นช็อค จำเป็นต้องสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณคลื่นช็อค ซึ่งเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของความหนาแน่นสูง ดังนั้นหากเริ่มจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบแรกใดๆ สามารถทำการคำนวณค่าต่างๆของการเปลี่ยนแปลงความชันของความหนาแน่นในเมตริกซ์ต่อไปนี้ได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

โดย  $p$  แทนค่าความหนาแน่น ในการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองต่างๆในเมตริกซ์ข้างบนนี้ สามารถเริ่มจากการสมมูลลักษณะการกระจายของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งบนเอลิเมนต์ดังนี้

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = [N(x,y)] \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \quad (8.3)$$

โดย  $[N(x,y)]$  แทนฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ และเวกเตอร์ทางด้านขวามือของสมการ (8.3) ประกอบด้วยค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น ซึ่งคำนวณได้จาก (Zienkiewicz and Zhu, 1987)

$$[M] \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (8.4)$$

โดย  $[M]$  คือ เมตริกซ์มวล และ  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$  คือ ค่าเฉลี่ยความชันของความหนาแน่นของเอลิเมนต์นั้น กระบวนการในรูปของสมการ (8.3)-(8.4) จะทำซ้ำอีกครั้งเพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองต่างๆที่ปรากฏในสมการ (8.2) จากนั้นจึงใช้หลักการของกลศาสตร์ของแข็งเพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองในแนวแกนหลัก X และ Y

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

ค่าอนุพันธ์อันดับสองในแนวแกนหลัก X และ Y นี้ จึงนำไปคำนวณหาค่าขนาด  $h_1$  และ  $h_2$  ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจาก (Rachowicz, et al, 1989)

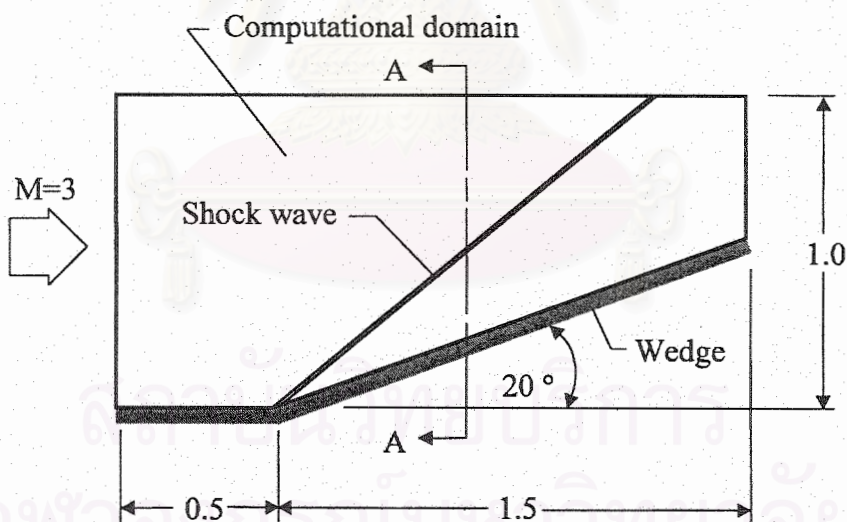
$$h_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} = h_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} = h_{\min} \text{Max} \left( \frac{\partial^2 p}{\alpha X^2}, \frac{\partial^2 p}{\alpha Y^2} \right) \quad (8.6)$$

โดย  $h_{\min}$  คือค่าความกว้างต่ำสุดของทุกเอลิเมนต์สำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ที่จะทำการสร้างขึ้น และ  $\text{Max} \left( \frac{\partial^2 p}{\alpha X^2}, \frac{\partial^2 p}{\alpha Y^2} \right)$  คือค่าสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสองที่เกิดขึ้นตามจุดต่อต่างๆในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เดิม

หลังจากที่คำนวณขนาดเอลิเมนต์  $h_1$  และ  $h_2$  ใหม่ตามตำแหน่งต่างๆของโดเมนการไหลได้แล้ว การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหม่นี้จึงเริ่มขึ้นได้ โดยเริ่มจากการสร้างเอลิเมนต์ตามขอบเขตของโดเมนการไหลที่มีขนาดตามผลของการคำนวณจากสมการ (8.6) จากนั้นเอลิเมนต์อื่นๆก็จะถูกสร้างขึ้นตามบริเวณถัดจากขอบนั้นเข้ามายังพื้นที่ส่วนในโดยขนาดและการวางตัวของเอลิเมนต์ต่างๆเหล่านี้ได้มาจากค่า  $h$  และทิศแนวแกนหลักที่คำนวณได้ กระบวนการการสร้างเอลิเมนต์จะสิ้นสุดต่อเมื่อเอลิเมนต์ได้ถูกสร้างจนเต็มพื้นที่ของโดเมนการไหลนั้น วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังนี้ได้อธิบายในหัวข้อ 8.1-8.2 ได้นำมาประยุกต์เข้ากับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ผ่านพื้นเอียงดังอธิบายในหัวข้อต่อไป

### 8.3 ตัวอย่างการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหาคลิ้นช็อคบนพื้นเอียง

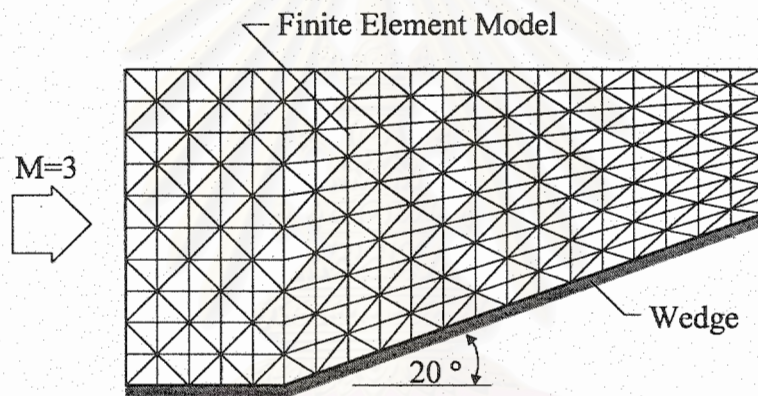
รูป 8.2 อธิบายปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ผ่านพื้นเอียงซึ่งทำมุม  $20^\circ$  โดยการไหลผ่านช่องทางขอบด้านซ้ายของภาพด้วยความเร็วที่เร็วกว่าเสียง 3 เท่า ก่อให้เกิดคลื่นช็อคในทิศเฉียงขึ้นจากพื้นเอียงดังแสดงในรูป



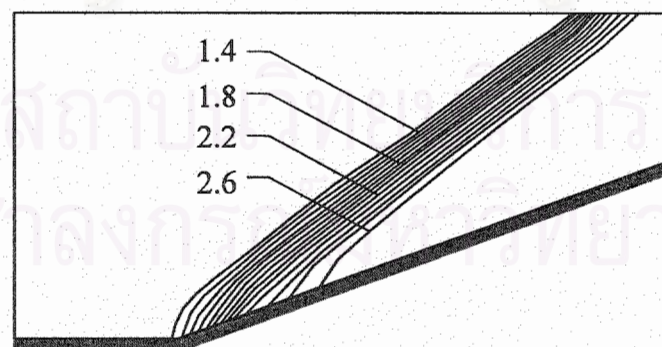
รูป 8.2 ปัญหาคลิ้นช็อคบนพื้นเอียง

รูป 8.3 (ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะถูกสร้างขึ้นโดยวิธีธรรมชาติ กล่าวคือ หากไม่ทราบล่วงหน้าว่าจะเกิดปรากฏการณ์ของคลื่นช็อคในลักษณะเช่นใด ก็จะสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเท่าๆกันตลอดพื้นที่ของการไหล รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 400 เอลิเมนต์

และ 231 จุดต่อ จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้จึงใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นและอธิบายในบทที่ 7 เพื่อทำการคำนวณ ผลลัพธ์ที่ได้ เช่น ลักษณะการกระจายของความหนาแน่นได้แสดงโดยการใช้เส้นชั้น (Contour lines) ในรูป 8.3 (ข) ผลลัพธ์ดังกล่าวแสดงถึงคลื่นช็อกที่เกิดขึ้นจากมุมของพื้นเอียงนั้นและวางตัวในแนวเฉียงกับพื้นเอียง ลักษณะของคลื่นช็อกที่คำนวณได้นี้ไม่มีความคมที่เพียงพอ ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ในแนวคลื่นช็อกนั้นมีขนาดใหญ่เกินไป หากต้องการผลลัพธ์ของคลื่นช็อกที่มีความคมมากขึ้น จำเป็นต้องลดขนาดของเอลิเมนต์ลง รูป 8.3 (ข) นี้ยังแสดงให้เห็นว่า เอลิเมนต์จำนวนมากจากขอบทางเข้าด้านซ้ายจนมาถึงคลื่นช็อก รวมทั้งเอลิเมนต์หลังคลื่นช็อก ไม่ก่อให้เกิดประโยชน์ในความเที่ยงตรงของผลลัพธ์นักเนื่องจากการกระจายของความหนาแน่นในบริเวณนี้คงที่ ซึ่งหมายความว่าอาจใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ขึ้นในบริเวณนี้ได้ เพื่อช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณและปริมาณหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปที่ไม่มีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

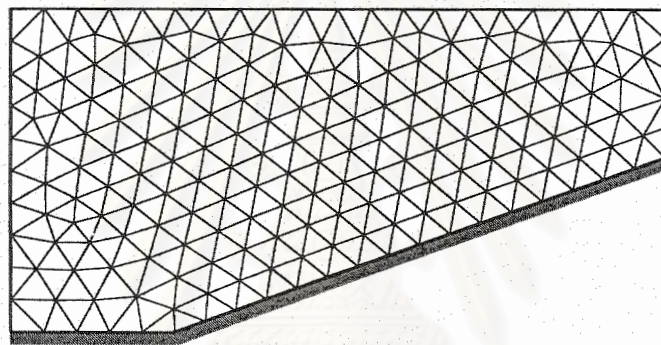


(ข) เส้นชั้นแสดงลักษณะการกระจายความหนาแน่นของการไหล

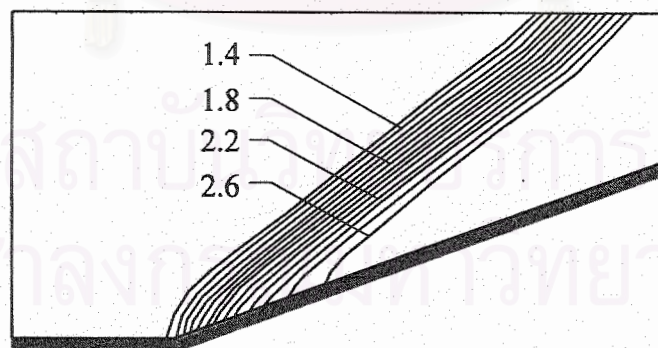
รูป 8.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง



เอลิเมนต์ขนาดเล็กๆที่วางตัวในแนวคลื่นช็อคสามารถสร้างขึ้นได้จากวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังอธิบายในหัวข้อ 8.1-8.2 การใช้วิธีนี้เริ่มต้นจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเอลิเมนต์สม่ำเสมอเท่าๆกันตลอดทั้งโดเมนของการไหลดังเช่น แสดงในรูป 8.4 (ก) ซึ่งประกอบด้วย 344 เอลิเมนต์ และ 201 จุดต่อ จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มแรกนี้เองจึงทำการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ซึ่งก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการไหลดังเช่นการกระจายความหนาแน่นในรูป 8.4 (ข) ซึ่งแสดงถึงแนวคลื่นช็อคในลักษณะคล้ายการกับรูป 8.3 (ข) ที่มีความหนาของช็อคค่อนข้างมากเนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในแนวของคลื่นช็อคต่างมีขนาดค่อนข้างใหญ่



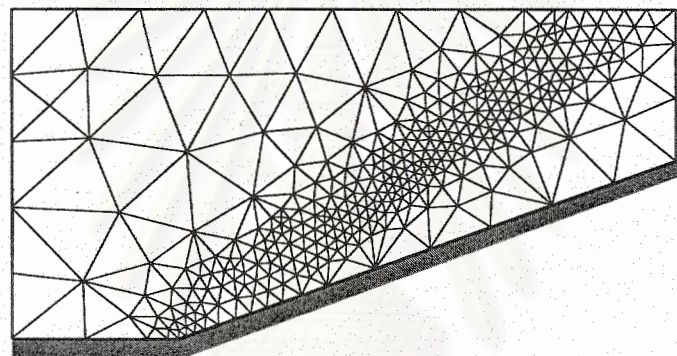
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แรก



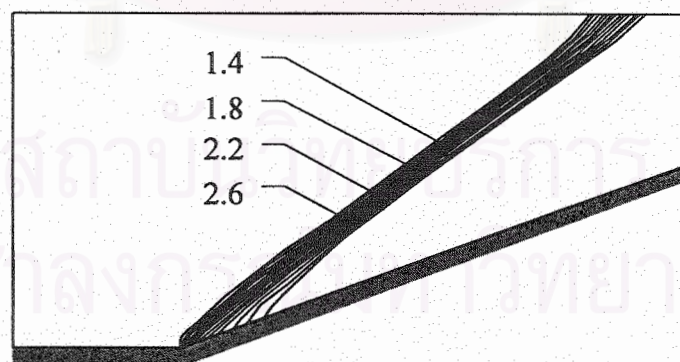
(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูป 8.4 รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง

จากผลลัพธ์การกระจายของความหนาแน่นดังแสดงในรูป 8.4 (ข) นี้เอง รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้ระเบียบวิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ดังอธิบายในหัวข้อ 8.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองที่สร้างขึ้นมานี้ได้แสดงในรูป 8.5 (ก) ซึ่งประกอบด้วย 667 เอลิเมนต์ และ 357 จุดต่อ โดยมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กถูกสร้างขึ้นโดยอัตโนมัติในแนวของคลื่นช็อก และในขณะเดียวกัน เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ขึ้นได้ถูกสร้างขึ้นในบริเวณอื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงของการกระจายความหนาแน่นต่ำ จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองนี้เอง โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ได้ใช้คำนวณอีกครั้ง ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการกระจายความหนาแน่นของการไหลดังแสดงในรูป 8.5 (ข) ซึ่งจะเห็นได้ว่าคลื่นช็อกที่คำนวณได้นั้นมีความหนาแน่นลดลง ทั้งนี้เนื่องมาจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในแนวคลื่นช็อกนั้นต่างมีขนาดเล็กลง



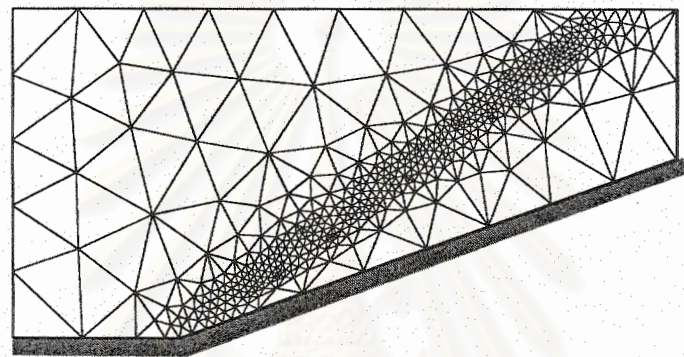
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอง



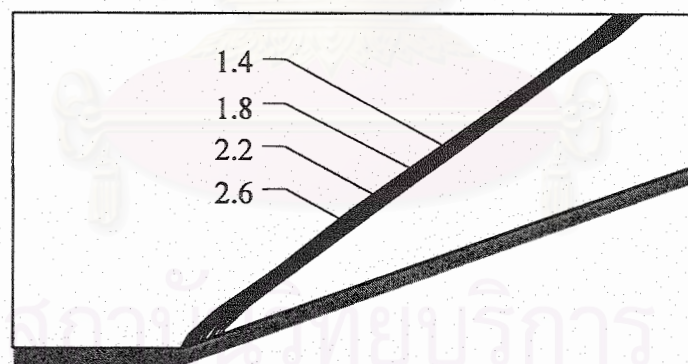
(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูป 8.5 รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง

จากผลลัพธ์ของการกระจายความหนาแน่นที่ได้ดังแสดงในรูป 8.5 (ข) นี้ กระบวนการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติได้ประยุกต์ใช้อีกครั้งก่อให้เกิดรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามดังแสดงในรูป 8.6 (ก) ซึ่งประกอบด้วย 970 เอลิเมนต์ และ 506 จุดต่อ ผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นของการไหลที่คำนวณได้โดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามนี้ได้แสดงในรูป 8.6 (ข) ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความคมของคลื่นช็อคที่ชัดเจนมากขึ้น เนื่องจากเอลิเมนต์ขนาดเล็กมากได้ถูกสร้างขึ้นโดยอัตโนมัติในแนวของคลื่นช็อค แต่ในขณะเดียวกัน เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้ถูกสร้างขึ้นในบริเวณอื่นๆ ซึ่งเป็นผลช่วยลดเวลาทั้งหมดที่ใช้ไปการคำนวณ



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สาม

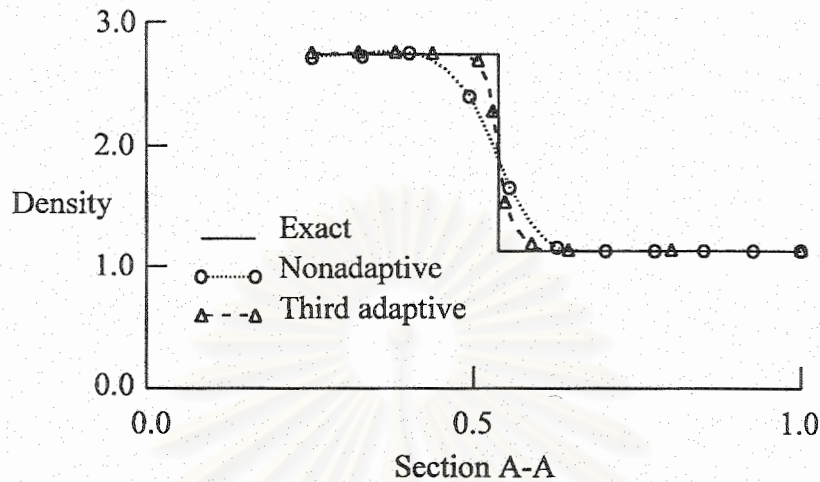


(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูป 8.6 รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียง

รูป 8.7 แสดงการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นของของไหลโดยฉับพลันผ่านคลื่นช็อค (ตลอดแนวตัด A-A ที่แสดงในรูป 8.2) ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact solution) ผลลัพธ์จากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไป

(Nonadaptive solution) ในรูป 8.3 และผลลัพธ์จากการใช้รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (Adaptive solution) ในรูป 8.6



รูป 8.7 การเปรียบเทียบการกระจายของความหนาแน่นจากวิธีต่างๆกัน

ส่วนเวลาที่ใช้ไปในการคำนวณสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ต่างๆกันบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (Pentium 166 MHz processor) สามารถสรุปได้ดังนี้

รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์	จำนวนเอลิเมนต์	เวลาคำนวณ (วินาที)
ทั่วไปไม่อัตโนมัติ (รูป 8.3)	400	54
อัตโนมัติที่หนึ่ง (รูป 8.4)	344	48
อัตโนมัติที่สอง (รูป 8.5)	669	86
อัตโนมัติที่สาม (รูป 8.6)	970	122

จากตัวอย่างการไหลความเร็วสูงผ่านพื้นเอียงนี้จะเห็นได้ว่า วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นดำเนินการเป็นขั้นตอน ซึ่งถึงแม้จะต้องใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์หลายรูปแบบ แต่กระบวนการดังกล่าวสามารถนำไปสู่ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง โดยผู้ทำการคำนวณไม่จำเป็นต้องทราบปรากฏการณ์ของผลลัพธ์ล่วงหน้ามาก่อน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงอื่นๆทั่วไป ซึ่งปรากฏการณ์ลักษณะของการไหลจะมีความซับซ้อนมากกว่าปัญหาในตัวอย่างนี้ การประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้าแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงที่มีความซับซ้อนมากขึ้นได้นำเสนอในบทที่ 9 ต่อไป

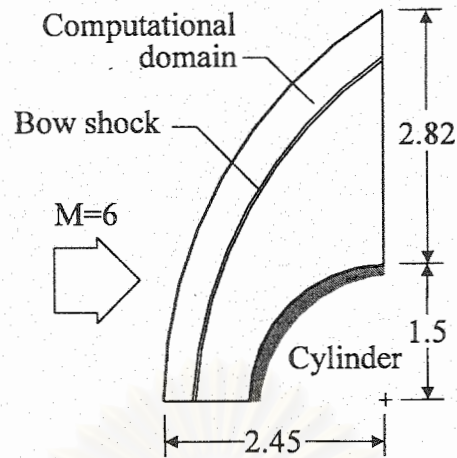
## บทที่ 9

### การประยุกต์การจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เข้ากับปัญหาการไหล

เพื่อแสดงประสิทธิภาพของวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังได้อธิบายในบทที่ 8 เข้ากับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 7 ปัญหาการไหลความเร็วสูงหลายๆปัญหาที่ก่อให้เกิดลักษณะการกระจายของการไหลในหลายๆรูปแบบได้นำเสนอในบทนี้ ปัญหาการไหลความเร็วสูงเหล่านี้ก่อให้เกิดคลื่นช็อกในลักษณะต่างๆกัน นับตั้งแต่คลื่นช็อกที่มีลักษณะโค้งคลื่นช็อกที่เกิดการสะท้อนได้ ฯลฯ ปัญหาการไหลความเร็วสูงในบทนี้ สามารถแสดงประสิทธิภาพของระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้ยังได้นำไปประยุกต์เข้ากับปัญหาความเร็วต่ำแบบไม่อัดตัว ดังที่ได้อธิบายในบทที่ 3 และไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW ในบทที่ 4 ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้นโดยใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยลง

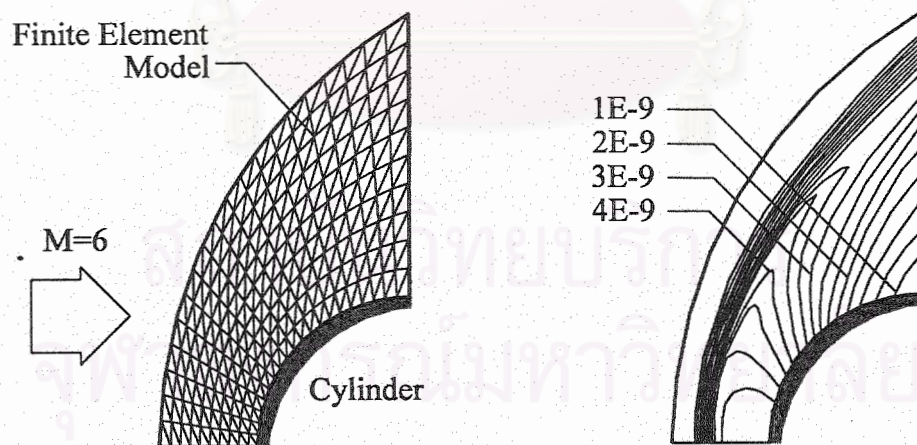
#### 9.1 ปัญหาคลื่นช็อกโค้ง

รูป 9.1 แสดงโดเมนของการไหลความเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก ซึ่งมีรัศมีเท่ากับ 3 การไหลความเร็วสูงดังกล่าวก่อให้เกิดช็อกโค้ง (Bow shock) ในตอนหน้าของทรงกระบอก ในทางปฏิบัติ ตำแหน่งและรูปร่างของช็อกโค้งนี้ไม่สามารถทราบได้ง่าย ดังนั้นจึงเป็นการยากที่จะสร้างเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่ต้องตลอดแนวช็อกโค้งนี้เพื่อจะได้ผลลัพธ์ของช็อกที่มีความคมชัด ปัญหานี้จึงเป็นปัญหาที่เหมาะสมในการทดสอบประสิทธิภาพและประโยชน์ที่จะได้รับจากวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติผสมผสานกับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น



รูป 9.1 ปัญหาคลื่นช็อกโค้งจากการไหลความเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก

รูป 9.2 (ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นโดยวิธีทั่วไปที่ไม่ได้ใช้วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 400 เอลิเมนต์ และ 231 จุดต่อ ผลลัพธ์การกระจายของความหนาแน่นซึ่งคำนวณได้จากการใช้โปรแกรม HIFLOW ได้แสดงด้วยเส้นชั้นในรูป 9.2 (ข) การกระจายดังกล่าวแสดงถึงช็อกโค้งซึ่งค่อนข้างหนาเนื่องจากขนาดของเอลิเมนต์ในบริเวณนั้นมีขนาดค่อนข้างใหญ่ ส่วนทางด้านหลังของช็อกโค้งนี้ การไหลมีความหนาแน่นลดลงตามลำดับตามแนวของการไหลผ่านพื้นผิวทรงกระบอก

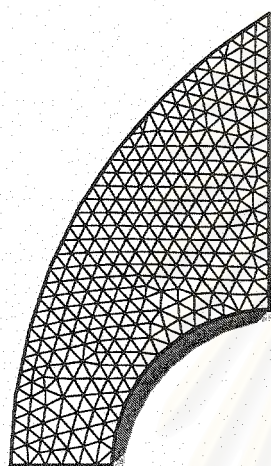


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปที่ไม่มีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

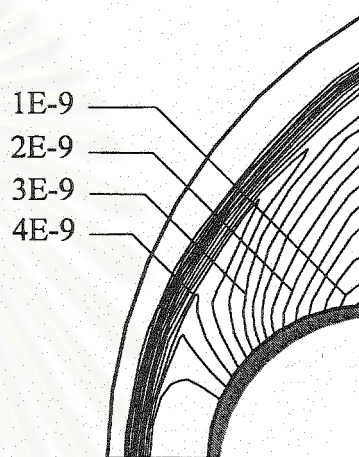
(ข) เส้นชั้นแสดงลักษณะการกระจายความหนาแน่นของการไหล

รูป 9.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก

การประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหานี้เริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มแรกซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอ ดังเช่นแสดงในรูป 9.3 (ก) ซึ่งประกอบด้วย 572 เอลิเมนต์ และ 325 จุดต่อ จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แรกนี้เอง โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ได้ใช้คำนวณหาลักษณะของการไหล ผลลัพธ์ความหนาแน่นของการไหลที่เกิดขึ้นได้แสดงเส้นชั้นในรูป 9.3 (ข)



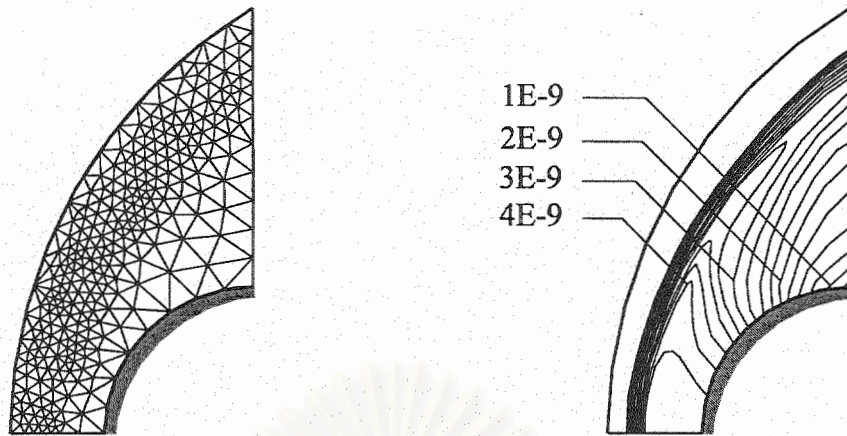
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แรก



(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูป 9.3 รูปแบบของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลความเร็วที่เสถียร 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก

จากผลลัพธ์การกระจายของความหนาแน่นในรูป 9.3 (ข) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 8.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองนี้ได้แสดงในรูป 9.4 (ก) ซึ่งประกอบด้วย 548 เอลิเมนต์ และ 299 จุดต่อ ผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นของการไหลซึ่งคำนวณได้ที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองนี้ได้แสดงในรูป 9.4 (ข) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าคลื่นช็อคโค้งนั้นมีความคมชัดมากขึ้นเนื่องจากเอลิเมนต์ขนาดเล็กได้ถูกสร้างขึ้นในบริเวณคลื่นช็อคโค้งนั้น

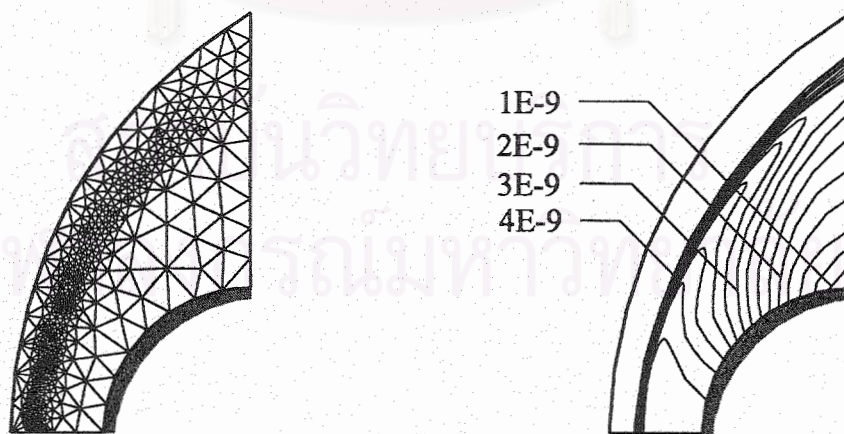


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอง

(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูป 9.4 รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก

จากผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นในรูป 9.4 (ข) กระบวนการซึ่งประกอบด้วยการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่โดยอัตโนมัติและการคำนวณหาผลลัพธ์ที่สอดคล้องกันได้ทำซ้ำอีกครั้ง รูป 9.5 (ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามซึ่งประกอบด้วย 956 เอลิเมนต์ และ 501 จุดต่อ เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากได้ถูกสร้างขึ้นโดยอัตโนมัติในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามนี้ เป็นผลให้คลื่นช็อกโค้งที่คำนวณได้มีความคมชัดมากยิ่งขึ้นอีกดังแสดงในรูป 9.5 (ข) ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นที่สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงโดยลักษณะรูปแบบของผลลัพธ์นั้นผู้วิเคราะห์อาจไม่ทราบมาก่อนทำการคำนวณ



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สาม

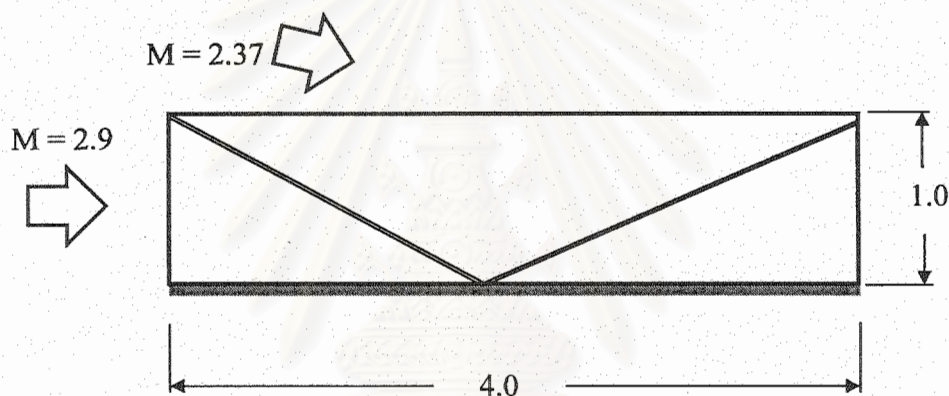
(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูป 9.5 รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นจากการไหลเร็วกว่าเสียง 6 เท่า ผ่านรูปทรงกระบอก



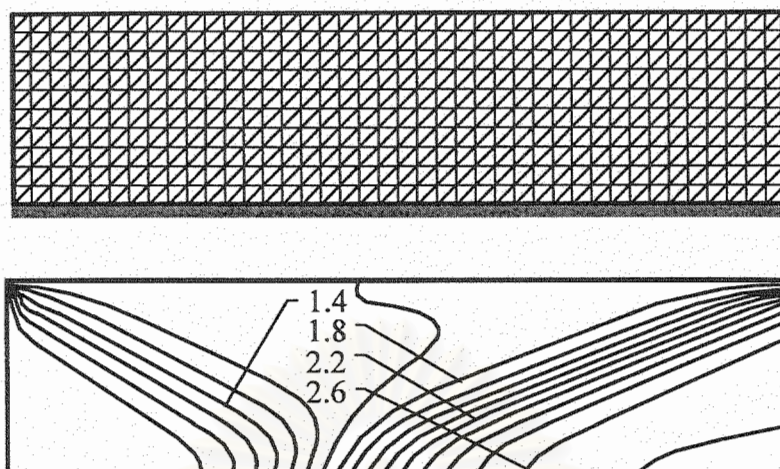
## 9.2 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อค

รูป 9.6 แสดงการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ที่มีความซับซ้อนเพิ่มมากขึ้นเนื่องจากเกิดการสะท้อนของคลื่นช็อคหลังจากกระทบพื้นระนาบ คลื่นช็อคทางด้านซ้ายของรูปเกิดจากการไหลความเร็วที่ต่างกัน กล่าวคือ การไหลเร็วกว่าเสียง 2.9 เท่า ผ่านช่องทางของด้านซ้ายของภาพ และการไหลเร็วกว่าเสียง 2.37 เท่า ในทิศทางทำมุม  $11^\circ$  กับแนวระนาบ ช็อคดังกล่าวเมื่อกระทบพื้นจะเกิดการสะท้อนในทิศทางเฉียงขึ้น ดังแสดงในรูป



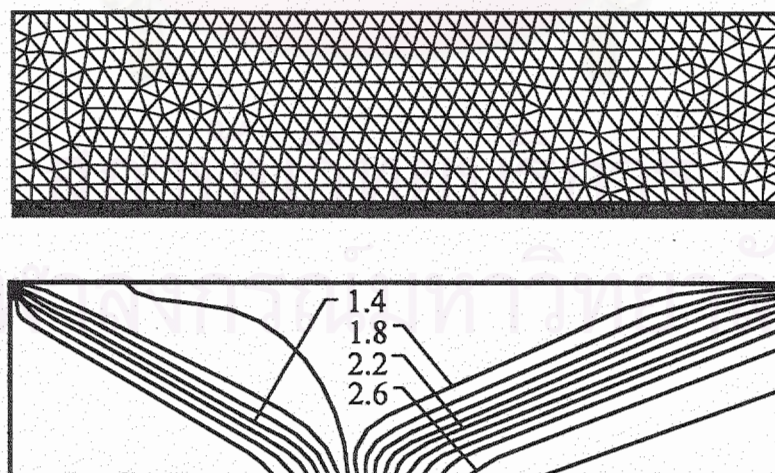
รูป 9.6 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อค

รูป 9.7 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาที่สามารถสร้างขึ้นได้โดยทั่วไปและผลลัพธ์การกระจายของความหนาแน่นของการไหลที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ ลักษณะการกระจายของความหนาแน่นที่คำนวณได้แสดงให้เห็นว่าเอลิเมนต์ที่ใช้มีขนาดใหญ่เกินไปในบริเวณแนวช็อค ทำให้ช็อคที่ทั้งก่อนตกกระทบและหลังจากเกิดการสะท้อนมีความหนาแน่นมาก ช็อคที่เกิดขึ้นมีความหนาแน่นค่อนข้างมากเนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในแนวช็อคมีขนาดใหญ่เกินไปทั้งๆที่ปัญหานี้ใช้จำนวนเอลิเมนต์ค่อนข้างมากแล้ว กล่าวคือ 800 เอลิเมนต์ และ 451 จุดต่อ



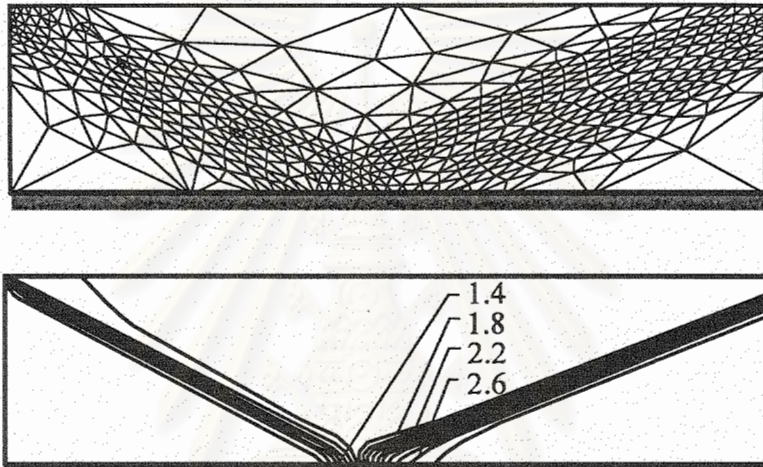
รูป 9.7 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อค

ในการประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติควบคู่ไปกับการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนั้น เริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบแรกที่มีเอลิเมนต์ขนาดสม่ำเสมอดังเช่นแสดงในรูป 9.8 ซึ่งประกอบด้วย 844 เอลิเมนต์ และ 475 จุดต่อ ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการกระจายความหนาแน่นที่สอดคล้องกันดังแสดงในรูป



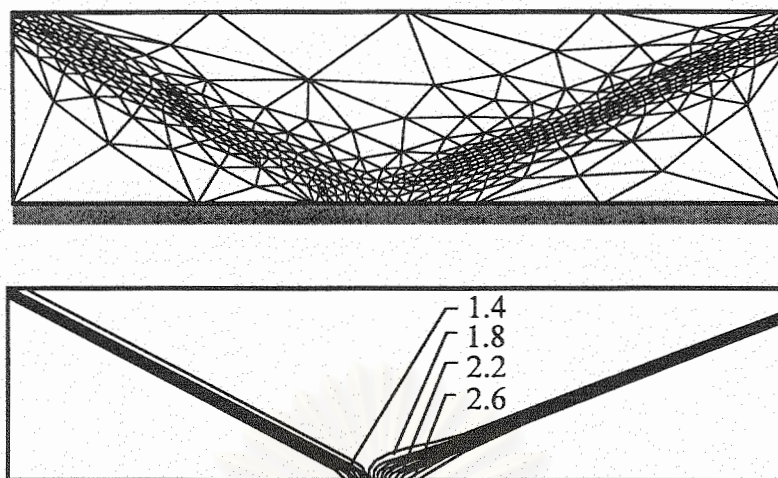
รูป 9.8 รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อค

ผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นของการไหลที่เกิดขึ้นดังแสดงในรูป 9.8 ได้นำไปสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองจากการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อก่อให้เกิดเอลิเมนต์ขนาดเล็กลงในบริเวณคสันช็อคแต่เอลิเมนต์ในบริเวณอื่นมีขนาดใหญ่ขึ้น เป็นผลให้จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด (831 เอลิเมนต์ และ 445 จุดต่อ) นั้น น้อยกว่าที่ใช้ในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แรก ดังแสดงในรูป 9.9 เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณคสันช็อคนี้ส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความเที่ยงตรงสูงขึ้นผลลัพธ์ของการกระจายความหนาแน่นใหม่ที่ได้แสดงในรูป 9.9 เช่นกัน



รูป 9.9 รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนของคสันช็อค

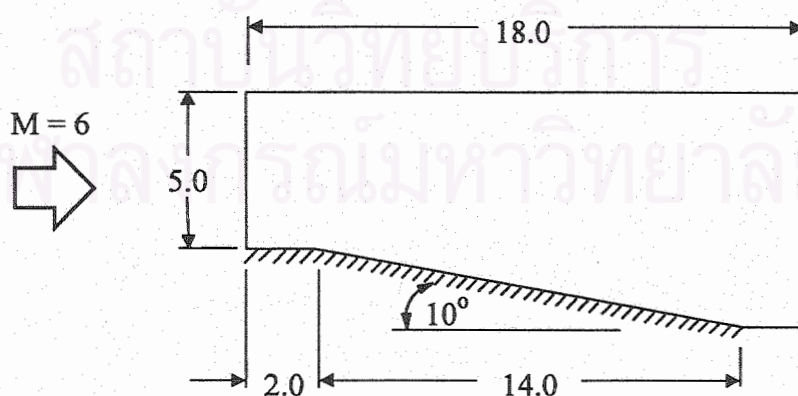
กระบวนการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมดังกล่าวได้กระทำซ้ำอีกครั้ง ก่อให้เกิดรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามและผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นที่สอดคล้องกันดังแสดงในรูป 9.10 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามนี้ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 845 เอลิเมนต์ และ 444 จุดต่อ ซึ่งมีปริมาณใกล้เคียงกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์อื่นๆ (รูป 9.7-9) แต่สามารถให้ความคมชัดของคสันช็อคสูงทั้งที่ก่อนตกกระทบพื้นและหลังจากการสะท้อนแล้ว ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ขนาดเล็กได้ถูกสร้างขึ้นโดยอัตโนมัติในบริเวณแนวช็อค และเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้ถูกสร้างในบริเวณอื่นๆที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์น้อย



รูป 9.10 รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อค

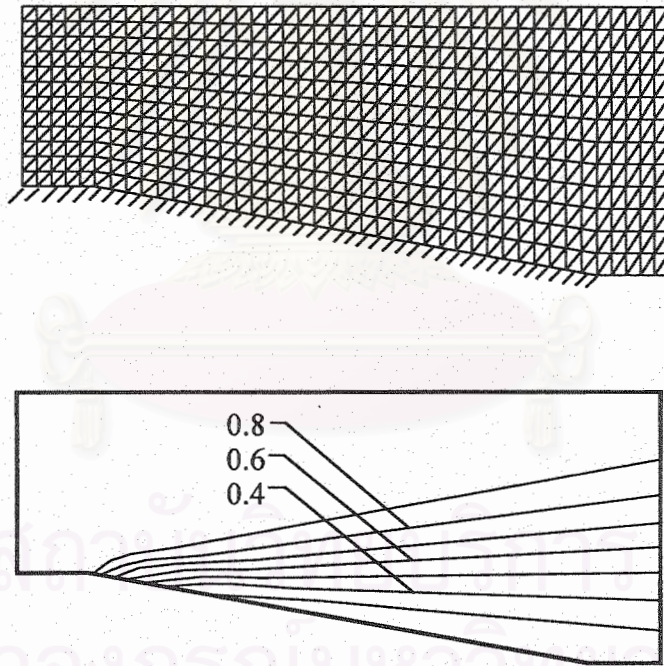
### 9.3 ปัญหาการขยายตัวของการไหลความเร็วสูง

ปัญหาการไหลความเร็วสูงบางปัญหาอาจไม่มีการก่อดัวของแนวคลื่นช็อคที่เห็นเด่นชัด ดังเช่น ปัญหาการขยายตัวของของไหล (Flow expansion) ขณะที่เกิดการไหลด้วยความเร็วสูงผ่านพื้นที่หน้าตัดที่มีความกว้างเพิ่มขึ้น รูป 9.11 อธิบายรูปแบบปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดที่มีมุมขยายตัว  $10^\circ$  ซึ่งจะเป็นผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของการไหลจากมากไปน้อย โดยเฉพาะตรงมุมที่เริ่มมีการขยายตัวของพื้นที่หน้าตัดนั้นจะเกิดการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นโดยฉับพลัน รูป 9.11 ยังได้แสดงขนาดพื้นที่ที่จะใช้ในการคำนวณสำหรับสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



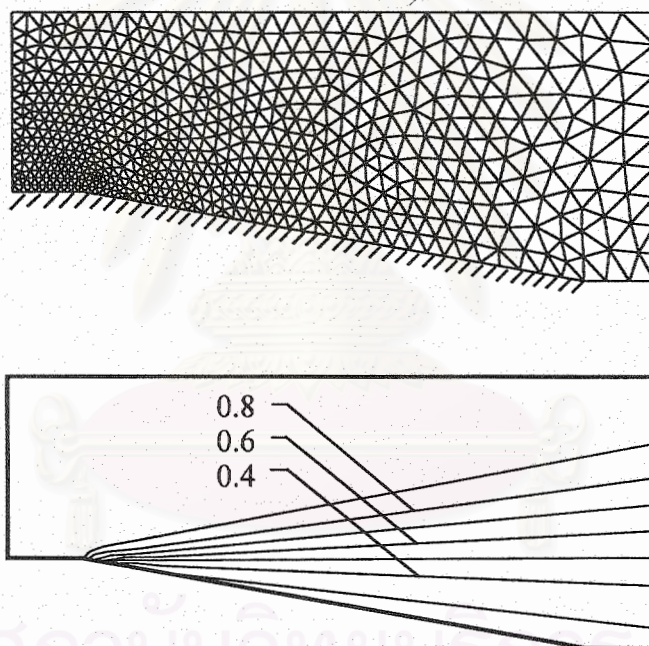
รูป 9.11 ปัญหาการขยายตัวของการไหลความเร็วสูง

รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแรกที่สร้างขึ้นประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,008 เอลิเมนต์ และ 559 จุดต่อ เรียงตัวกันอย่างเป็นระเบียบดังแสดงในรูป 9.12 เป็นรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไปที่ไม่ได้ใช้การจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นได้นำมาใช้เพื่อวิเคราะห์หาลักษณะของการไหลก่อให้เกิดผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นดังแสดงในรูป 9.12 กล่าวคือ ความหนาแน่นมีค่าลดลงจากมากไปน้อย โดยเริ่มจากจุดมุมที่พื้นที่หน้าตัดเพิ่มมากขึ้น ลักษณะการกระจายความหนาแน่นที่จุดมุมนี้ไม่มีความชัดเจนเพียงพอ ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในบริเวณนั้นมีขนาดเล็กไม่เพียงพอ



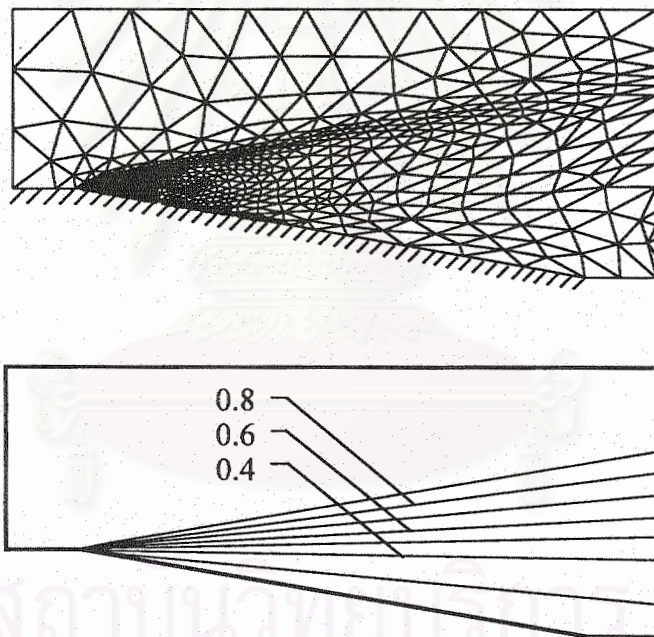
รูป 9.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการขยายตัวของการไหลความเร็วสูง

รูป 9.13 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มแรกจากการใช้วิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ซึ่งประกอบด้วย 1,131 เอลิเมนต์ และ 621 จุดต่อ จากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เองก่อให้เกิดผลลัพธ์ลักษณะการกระจายความหนาแน่นโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ดังแสดงในรูป 9.13 เช่นกัน



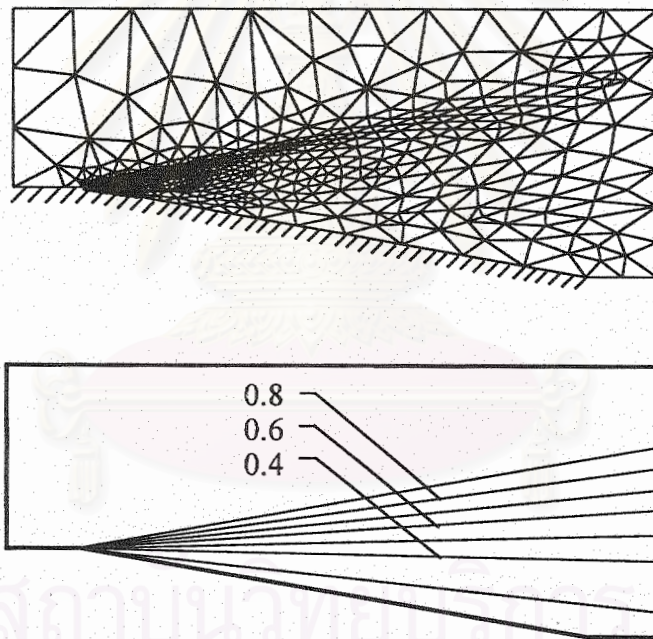
รูป 9.13 รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการขยายตัวของกรไหลความเร็วสูง

ผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นที่คำนวณได้ดังแสดงในรูป 9.13 ได้นำมาใช้ในการสร้างเอลิเมนต์รูปแบบที่สองด้วยวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวน 990 เอลิเมนต์ และ 548 จุดต่อ ดังแสดงในรูป 9.14 เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากให้ถูกสร้างขึ้นโดยอัตโนมัติในบริเวณจุดมุมที่พื้นที่หน้าตัดเพิ่มขึ้นเนื่องจากเกิดการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นสูง รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สองนี้ได้ใช้เพื่อการวิเคราะห์หาการกระจายความหนาแน่นใหม่ที่สอดคล้องกัน ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้แสดงในรูป 9.14 เช่นกัน



รูป 9.14 รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการขยายตัวของกาไหลความเร็วสูง

จากผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นในรูป 9.14 กระบวนการที่ประกอบด้วย การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่และการหาผลลัพธ์การไหลที่สอดคล้องกันได้ทำซ้ำอีกครั้ง รูป 9.15 แสดงรูปแบบที่สามจากการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ซึ่งประกอบด้วย 1,071 เอลิเมนต์ และ 565 จุดต่อ และลักษณะการกระจายของความหนาแน่นของการไหลที่คำนวณได้ ความคมชัดของผลลัพธ์ที่ได้ แสดงถึงประสิทธิภาพของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่สามารถสร้างเอลิเมนต์ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงสูงของความหนาแน่น แต่ในขณะเดียวกัน สร้างเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆ เพื่อช่วยลดเวลาในการคำนวณ และปริมาณหน่วยความจำที่ใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์

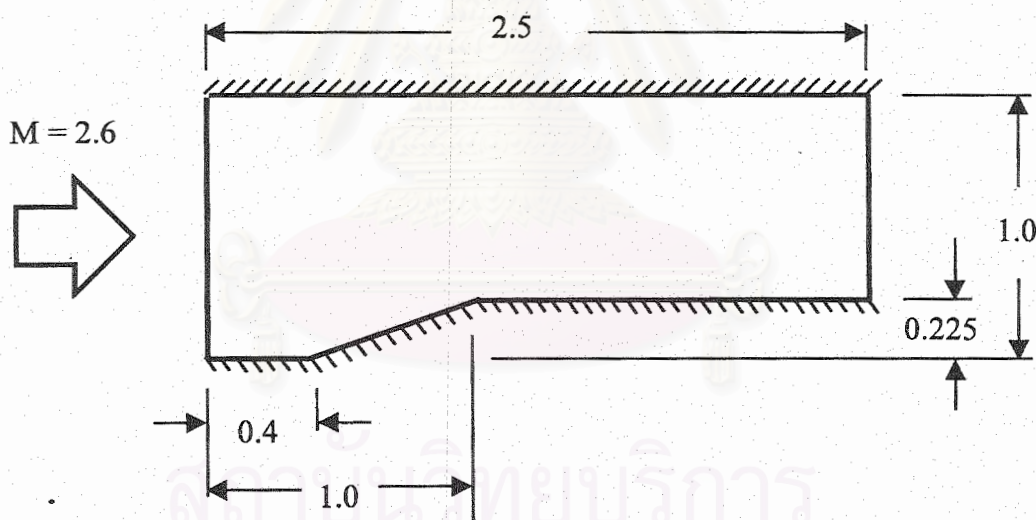


รูป 9.15 รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้น สำหรับปัญหาการขยายตัวของการไหลความเร็วสูง



#### 9.4 ปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อคสองครั้ง

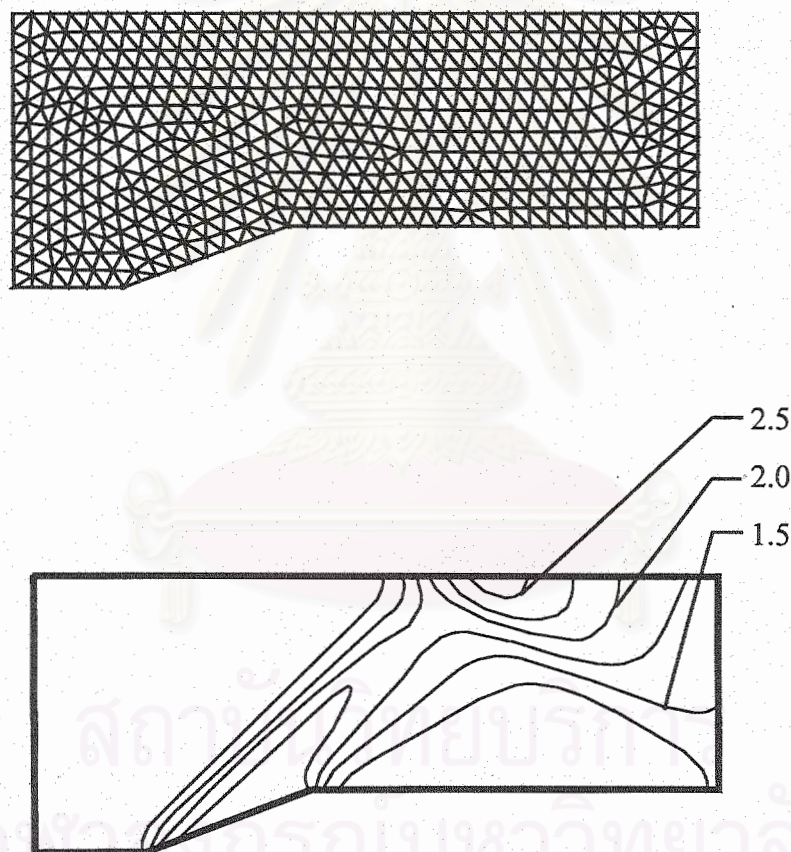
ปัญหาการไหลความเร็วสูงในระหว่างผนังช่องว่างที่มีหน้าตัดไม่คงที่ ก่อให้เกิดคลื่นช็อคตกกระทบผนังและเกิดการสะท้อนกลับ ช็อคที่สะท้อนกลับอาจถูกกระทบด้วยปรากฏการณ์อื่นของการไหลทำให้ลักษณะของการไหลมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไปอีก ดังเช่น ปัญหาในรูป 9.16 ซึ่งเป็นการไหลเร็วกว่าเสียง 2.6 เท่า เข้าทางด้านซ้ายของช่องว่างที่มีความกว้างหนึ่งหน่วย หลังจากเกิดการไหลผ่านไปในระยะ 0.4 หน่วย ความกว้างของช่องว่างนั้นลดขนาดลงด้วยพื้นเอียงเป็นระยะ 0.6 หน่วย จากนั้นจึงมีความกว้างคงที่ที่ 0.775 หน่วยตลอดจนถึงทางออก ลักษณะการไหลในช่องว่างของปัญหานี้ค่อนข้างซับซ้อน อันประกอบด้วยแนวคลื่นช็อคที่เกิดขึ้นจากพื้นเอียงตรงมุมแรกของพื้นล่าง แนวคลื่นช็อคที่กระทบผนังบนแล้วสะท้อนกลับซึ่งจะถูกกระทบด้วยการไหลแบบขยายตัว (Flow expansion) อันเกิดจากมุมที่สองของพื้นล่าง



รูป 9.16 ปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อคสองครั้ง

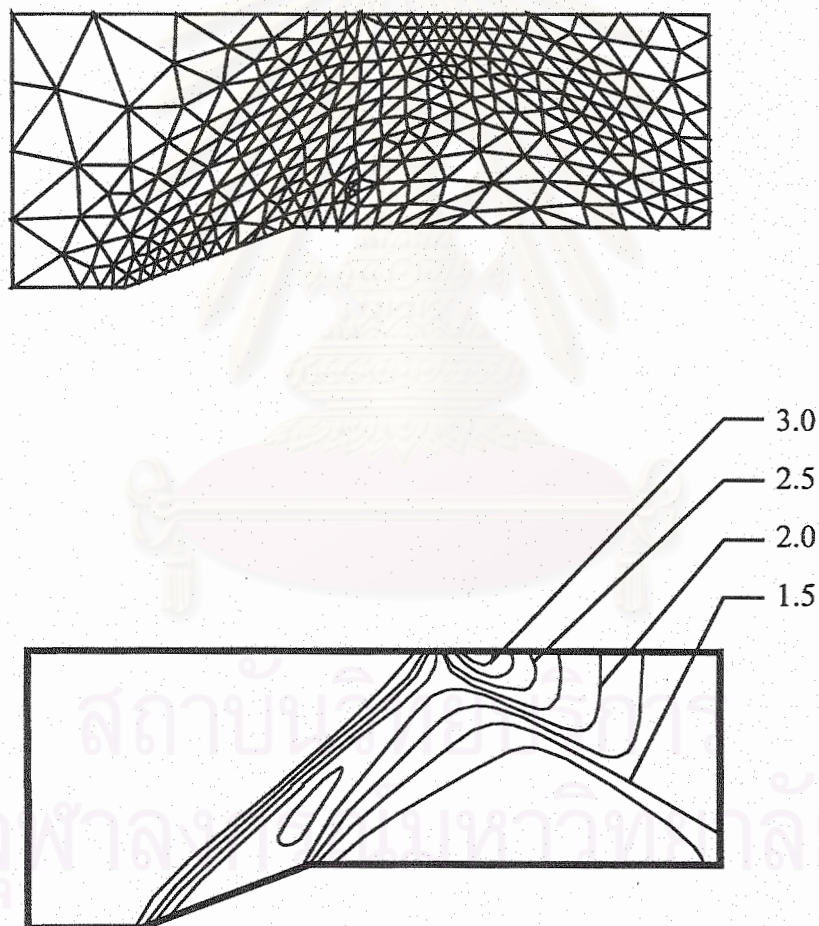
ด้วยการใช้วิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบแรก อันประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเท่าๆกันจำนวน 890 เอลิเมนต์ และ 500 จุดต่อ ได้ทำการสร้างขึ้นดังแสดงในรูป 9.17 และจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เอง ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ได้ทำการคำนวณเพื่อวิเคราะห์ลักษณะการไหลที่

เกิดขึ้น ผลลัพธ์ของการกระจายความหนาแน่นที่คำนวณได้ได้แสดงในรูป 9.17 เช่นกัน ลักษณะการกระจายความหนาแน่นที่ได้แสดงถึงคลื่นช็อกที่เกิดขึ้นจากพื้นเอียงจากมุมแรกของพื้นล่าง คลื่นช็อกนี้ได้กระทบผนังบนและสะท้อนกลับ และระหว่างการสะท้อนกลับได้ถูกกระทบด้วยการไหลแบบขยายตัวที่เกิดขึ้นจากมุมที่สองของพื้นล่าง ผลลัพธ์ของคลื่นช็อกต่างๆที่เกิดขึ้นนี้ไม่มีความคมชัดเนื่องจากขนาดของเอลิเมนต์ที่ใช้ตลอดแนวคลื่นช็อกนั้นมีขนาดใหญ่เกินไป ลักษณะของคลื่นช็อกที่เกิดขึ้นในรูปนี้ยังบอกเป็นนัยว่า ความคมชัดของช็อกที่สะท้อนกลับนั้นขึ้นอยู่กับความคมชัดของช็อกก่อนกระทบผิวบนโดยตรง



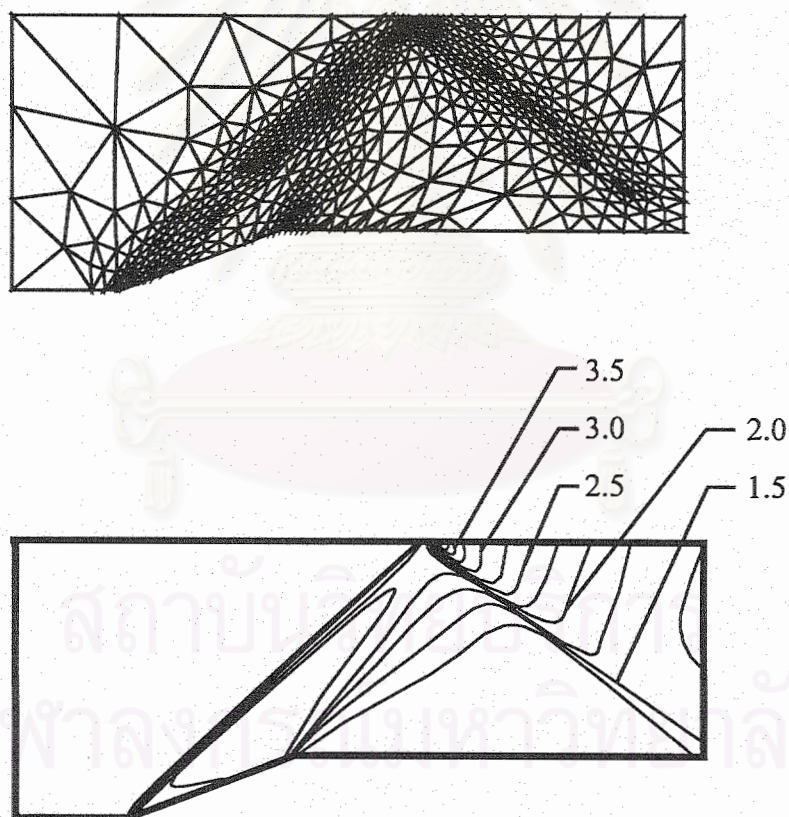
รูป 9.17 รูปแบบแรกของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อกสองครั้ง

จากผลลัพธ์ลักษณะการกระจายความหนาแน่นของการไหลในรูป 9.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองได้สร้างขึ้นโดยใช้วิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สองนี้ประกอบด้วย 530 เอลิเมนต์ และ 300 จุดต่อ ดังแสดงในรูป 9.18 เอลิเมนต์ขนาดเล็กตามแนวคลื่นช็อกได้สร้างขึ้นโดยอัตโนมัติเนื่องจากเป็นบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาแน่นสูง จากนั้น จึงใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาผลลัพธ์ ลักษณะการกระจายความหนาแน่นของการไหลที่คำนวณได้ได้แสดงในรูป 9.18 เช่นกัน ซึ่งแสดงถึงคลื่นช็อกที่มีความคมชัดขึ้นทั้งก่อนและหลังกระทบผนังบน



รูป 9.18 รูปแบบที่สองของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อกสองครั้ง

ผลลัพธ์การกระจายความหนาแน่นในรูป 9.18 ได้นำมาใช้ในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามด้วยการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามที่เกิดขึ้นนี้ได้แสดงในรูป 9.19 ซึ่งประกอบด้วย 1,080 เอลิเมนต์ และ 580 จุดต่อ เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากได้สร้างขึ้นในแนวคลื่นช็อกโดยอัตโนมัติ รวมทั้งบริเวณมุมที่สองของพื้นล่างซึ่งเกิดการไหลแบบขยายตัวโดยฉับพลันทำให้การเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นสูงในบริเวณนั้น จากนั้นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงถูกใช้เพื่อคำนวณหาผลลัพธ์ลักษณะของการไหล ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในรูปแบบของการกระจายความหนาแน่นได้แสดงในรูป 9.19 ซึ่งแสดงถึงคลื่นช็อกที่คมชัด โดยเริ่มเกิดจากพื้นเอียงตรงมุมของผนังล่าง จากนั้นจึงกระทบผนังบนแล้วสะท้อนกลับ แต่ในขณะที่สะท้อนกลับนี้เองได้ถูกกระทบด้วยการไหลแบบขยายตัวทำให้ความหนาแน่นของการไหลด้านหลังคลื่นช็อกที่สะท้อนกลับแล้วนี้มีการเปลี่ยนแปลงและซับซ้อนมากขึ้น

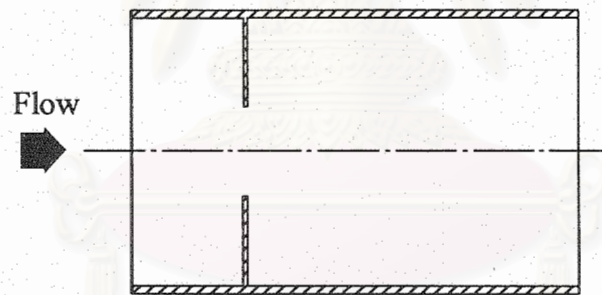


รูป 9.19 รูปแบบที่สามของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและความหนาแน่นที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการสะท้อนคลื่นช็อกสองครั้ง

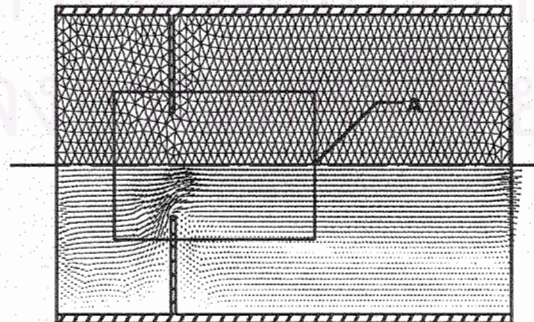
## 9.5 ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ

ตัวอย่างต่างๆดังอธิบายในหัวข้อ 9.1 ถึง 9.4 แสดงประสิทธิภาพของการประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ซึ่งลักษณะของผลลัพธ์ของการไหลประกอบด้วยคลื่นช็อก ส่งผลให้เกิดความแม่นยำในผลลัพธ์ที่คำนวณได้ และในขณะเดียวกัน ช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณรวมทั้งปริมาณหน่วยความจำที่จำเป็นบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลง ในหัวข้อนี้ จะแสดงการประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาการไหลความเร็วต่ำแบบไม่อัดตัว กล่าวคือใช้ร่วมกับไฟไนต์เอลิเมนต์คอมพิวเตอร์โปรแกรม LOWFLOW ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นและอธิบายในบทที่ 4

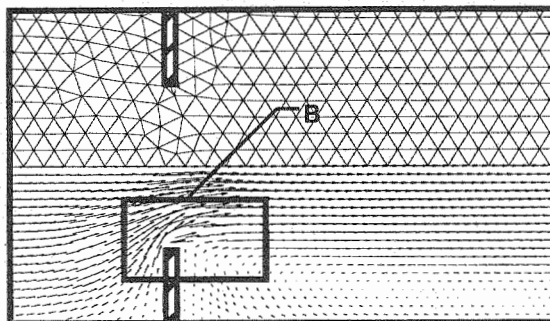
รูป 9.20 อธิบายปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ โดยมีการไหลเข้ามาทางด้านซ้ายของรูปด้วยค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 50 ดังแสดงในรูป 9.20 เนื่องจากปัญหาดังกล่าวมีความสมมาตร ดังนั้นจึงสามารถที่จะพิจารณาเฉพาะครึ่งล่างหรือครึ่งบนของปัญหาเท่านั้น รูป 9.21 แสดงการแบ่งรูปปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ที่มีความสม่ำเสมออันประกอบด้วย 1,638 เอลิเมนต์ รูปดังกล่าวได้แสดงการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ไว้ครึ่งล่างของปัญหาด้วย รายละเอียดของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบถูกแสดงไว้ในรูป 9.22 และรายละเอียดที่ละเอียดยิ่งขึ้นในบริเวณดังกล่าวถูกแสดงไว้ในรูป 9.23



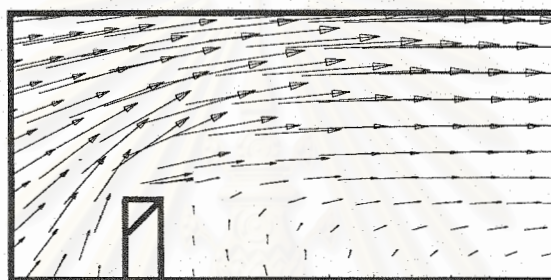
รูป 9.20 ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ



รูป 9.21 ลักษณะการแบ่งรูปปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่ใช้เอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอ และผลการกระจายตัวของความเร็ว

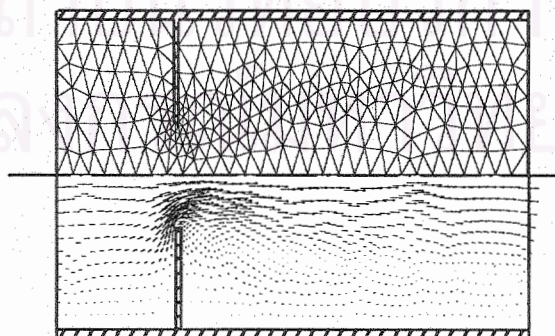


รูป 9.22 ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณ A)



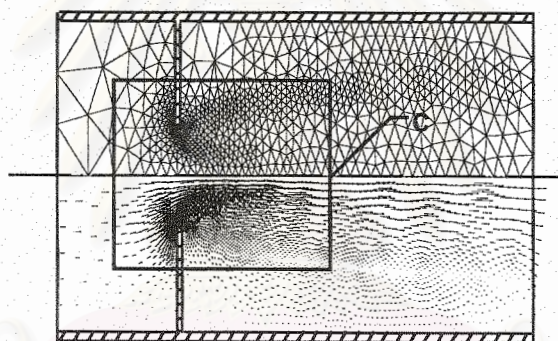
รูป 9.23 ลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณ B)

ค่าความเร็วที่คำนวณได้ในกรณีที่ใช้อิเล็กเมนต์แบบสม่ำเสมอ ได้ถูกนำไปใช้ในการคำนวณปรับขนาดอิเล็กเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 1 ทำให้ได้ลักษณะการแบ่งรูปปัญหาใหม่ดังครึ่งบนของรูป 9.24 ซึ่งประกอบด้วย 701 อิเล็กเมนต์ ส่วนครึ่งล่างของรูปแสดงลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่เกิดขึ้น

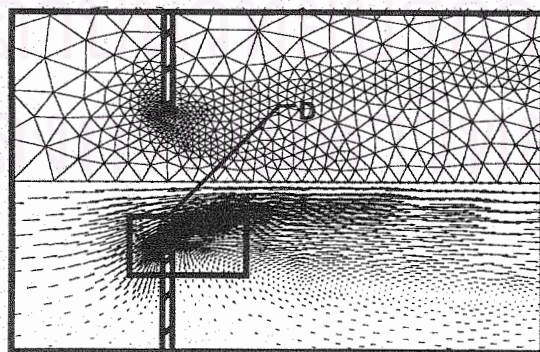


รูป 9.24 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและการกระจายตัวของความเร็วกรณีที่ผ่านการปรับขนาดอิเล็กเมนต์ครั้งที่ 1

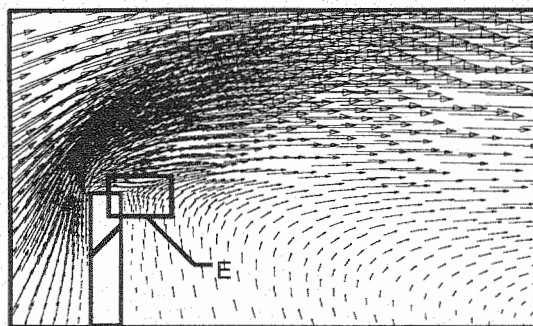
ผลการคำนวณความเร็วของกรณีที่ผ่านมาการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 นี้ได้นำไปใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ทำให้ได้ลักษณะรูปปัญหาที่ประกอบด้วย 1,620 เอลิเมนต์ แม้ว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นในการทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 นี้จะมีจำนวนเกือบเท่ากับกรณีที่แบ่งรูปปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอ แต่ผลลัพธ์ของปัญหาการไหลที่คำนวณได้ดังแสดงในรูป 9.25 สามารถให้รายละเอียดของการไหลบริเวณที่ใกล้ช่องแคบได้เป็นอย่างดี ผลลัพธ์ของพฤติกรรมการไหลดังในแสดงรูป 9.26 ถึงรูป 9.28 ได้ให้รายละเอียดของการไหลบริเวณใกล้ช่องแคบและบริเวณที่เกิดการหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบได้เป็นอย่างดี รูป 9.29 แสดงถึงผลจากการคำนวณของการกระจายตัวของความดันในกรณีที่ผ่านมาการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ผลการกระจายตัวของความเร็วและความดันดังกล่าวแสดงให้เห็นถึงความสามารถของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่นำมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถที่จะช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาและช่วยเพิ่มความเข้าใจในลักษณะของการไหลที่มีความซับซ้อนได้มากยิ่งขึ้น



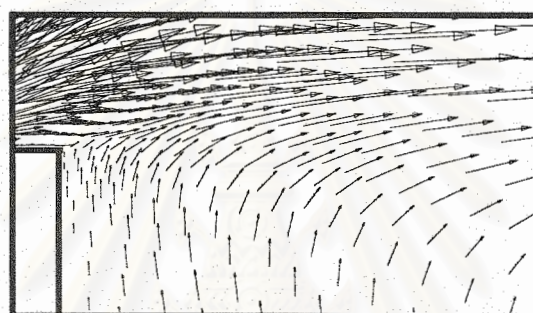
รูป 9.25 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและการกระจายตัวของความเร็วกรณีที่ผ่านมาการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



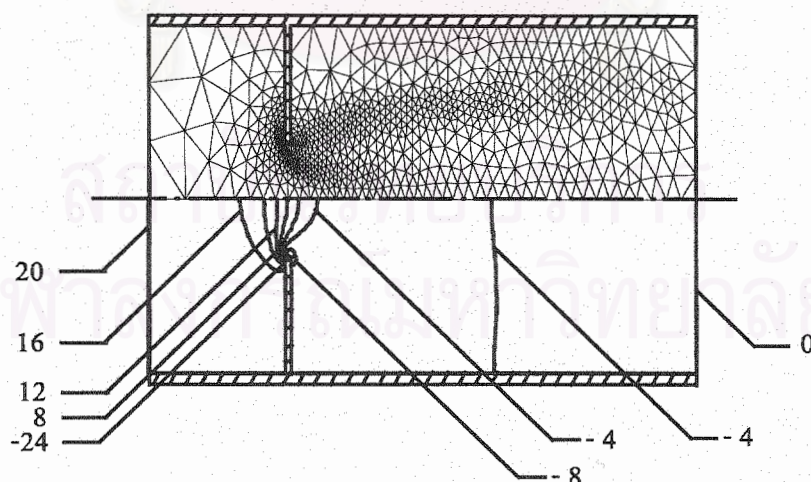
รูป 9.26 รายละเอียดของการไหลบริเวณใกล้ช่องแคบและบริเวณที่เกิดการหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบ (บริเวณ C)



รูป 9.27 รายละเอียดของการไหลบริเวณใกล้ช่องแคบและบริเวณที่เกิดการหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบ (บริเวณ D)



รูป 9.28 รายละเอียดของการไหลบริเวณใกล้ช่องแคบและบริเวณที่เกิดการหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบ (บริเวณ E)



รูป 9.29 ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบกรณีผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



ปัญหาของการไหลในแบบต่างๆหลายปัญหาดังที่ได้อธิบายในบทนี้ โดยเฉพาะปัญหาต่างๆที่การไหลมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการใช้วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้กับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ผลลัพธ์ของการไหลที่คำนวณได้จะมีความเที่ยงตรงสูง เนื่องจากเอลิเมนต์ขนาดเล็กได้สร้างขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง เช่น ตลอดแนวคลื่นช็อกทำให้ลักษณะของคลื่นช็อกที่คำนวณได้มีความคมชัด ในขณะเดียวกัน เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้สร้างขึ้นในบริเวณอื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นน้อย ทำให้ช่วยลดเวลาในการคำนวณและปริมาณหน่วยความจำที่ใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ลง และที่สำคัญที่สุด ผู้ทำการวิเคราะห์ที่ไม่จำเป็นต้องทราบลักษณะของผลลัพธ์ว่าเป็นเช่นใดล่วงหน้ามาก่อน กระบวนการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสามารถนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องได้ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นในทางปฏิบัติเพราะการวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านรูปแบบซับซ้อนใดๆโดยทั่วไป ผู้ทำการวิเคราะห์ไม่อาจทราบผลลัพธ์ลักษณะของการไหลที่จะเกิดขึ้นได้ กระบวนการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่น่าเสนอในบทนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ นอกเหนือจากการไหลได้ ในบทต่อไปจะแสดงการผสมผสานระเบียบวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นในของแข็งด้วยเช่นกัน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 10

### ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการถ่ายเทความร้อน และความเค้นจากอุณหภูมิ

ในบทต่างๆที่ผ่านมา ได้อธิบายการวิเคราะห์ปัญหาการไหลหลายๆชนิดโดยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ทดสอบกับตัวอย่างหลายๆตัวอย่าง นอกจากนั้น ยังได้ประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้สูงขึ้น และในขณะเดียวกันเพื่อลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณรวมทั้งปริมาณหน่วยความจำที่ใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ ในบทนี้จะเสนอการพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง ซึ่งก่อให้เกิดการกระจายของอุณหภูมิในลักษณะต่างๆกัน อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปนี้ทำให้ของแข็งเกิดการเสียรูปและเกิดความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิตามมา และเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็งเช่นกัน

#### 10.1 สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบอนุรักษ

เริ่มจากปัญหาการถ่ายเทความร้อน ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิซึ่งแปรผันกับโคออร์ดิเนตและเวลา สามารถคำนวณได้จากสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบอนุรักษ (Conservation form) ได้ดังนี้ (Holman, 1991)

$$\frac{\partial}{\partial x}(U) + \frac{\partial}{\partial x}(E) + \frac{\partial}{\partial y}(F) = 0 \quad (10.1)$$

โดย H แทนปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้น และ

$$U = \rho c T \quad (10.2a)$$

$$E = -k \partial T / \partial x \quad (10.2b)$$

$$F = -k \partial T / \partial y \quad (10.2c)$$

โดย  $\rho$  แทนความหนาแน่นของของแข็ง,  $c$  แทนสัมประสิทธิ์การจุความร้อน,  $T$  แทนอุณหภูมิ,  $k$  แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน,  $E$  และ  $F$  แทนปริมาณฟลักซ์ในแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน ลักษณะการเสียรูปในของแข็งอันเนื่องมาจากอุณหภูมิสามารถคำนวณได้จากสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบอนุพัทธ์ได้ดังนี้ (Ugural, 1975)

$$\frac{\partial}{\partial x} \{E_s\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_s\} = 0 \quad (10.3)$$

โดย

$$\{E_s\}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (10.4a)$$

$$\{F_s\}^T = \begin{bmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (10.4b)$$

ในที่นี้  $\sigma_x$  และ  $\sigma_y$  แทนความเค้นในแนวแกน x และ y และ  $\tau_{xy}$  แทนความเค้นเฉือนจากกฎของฮุก (Hooke's law) ความเค้นเหล่านี้สามารถเขียนในรูปของความเครียดต่างๆ (Strain components) ได้ดังนี้

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon - \epsilon_0\} \quad (10.5)$$

โดย

$$\{\sigma\}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

$$\{\epsilon\}^T = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

และความเครียดเหล่านี้สัมพันธ์กับค่าการเสียรูปในแกนต่างๆ (Displacement components) ดังนี้

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10.8a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10.8b)$$

และ [C] คือเมตริกซ์ความยืดหยุ่นของของแข็งนั้น

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

โดย E แทนค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (Modulus of elasticity) และ  $\nu$  แทนอัตราส่วนปัวซองส์ (Poisson's ratio)

ทางด้านขวาของสมการ (10.5) เวกเตอร์  $\{\epsilon_0\}$  แทนความเครียดเนื่องจากอุณหภูมิ (Thermal strain) ดังนี้

$$\{\epsilon_0\}^T = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0] \quad (10.10)$$

โดย  $\alpha$  แทนค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัว (Coefficient of thermal expansion) และ  $\Delta T$  แทนอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป

$$\Delta T = T(x,y) - T_0 \quad (10.11)$$

โดย  $T_0$  แทนอุณหภูมิที่ไม่มีความเค้นเกิดขึ้น

## 10.2 เงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนอาจประกอบด้วย

(ก) การกำหนดอุณหภูมิ (Specified temperature) เช่น

$$T = T_1(x,y,t) \quad (10.12a)$$

(ข) การกำหนดปริมาณความร้อน (Specified heating) ที่ขอบ เช่น

$$q_x n_x + q_y n_y = -q_s \quad (10.12b)$$

(ค) การเกิดการพาความร้อน (Convection) ขึ้นที่ขอบ เช่น

$$q_x n_x + q_y n_y = h(T - T_\infty) \quad (10.12c)$$

โดย  $T_1$  แทนอุณหภูมิที่กำหนด  $q_s$  แทนปริมาณความร้อนที่ขอบ  $n_x$  และ  $n_y$  แทนทิศทางโคซายน์ (Direction cosines) ของเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับขอบนั้น  $h$  แทนสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (Convection coefficient) และ  $T_\infty$  แทนอุณหภูมิรอบข้างที่เกิดการพาความร้อนนั้น

สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะไม่อยู่ตัว (Transient heat transfer) จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (Initiate condition) ดังนี้

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad (10.13)$$

ส่วนเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาของแข็งนั้น โดยปรกติจะประกอบด้วย

- (ก) การกำหนดค่าการเสียรูป (Specified displacements) ให้ หรือ  
 (ข) การกำหนดความเค้นที่ขอบ (Tractions) ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (10.14)$$

โดย  $S_x$  และ  $S_y$  แทนความเค้นที่ขอบในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ และ  $n_x$  และ  $n_y$  แทนทิศทางโคซายน์ของเวกเตอร์หน่วย (Unit vector) ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

### 10.3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื่องจากปัญหาการถ่ายเทความร้อนเป็นปัญหามายไตสภาวะไม่อยู่ตัว ดังนั้นระเบียบวิธีการคำนวณแบบชัดแจ้งซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา (Explicit time marching) จึงได้นำมาประยุกต์ใช้เข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กระบวนการนี้ประกอบด้วยการประยุกต์อนุกรมเทเลอร์เพื่อใช้คำนวณผลลัพธ์ที่ขึ้นอยู่กับเวลาและการใช้วิธีของกัลเลอร์คิน (Galerkin) เพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการสมมุติฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation function) ของฟังก์ชันความร้อน  $E$  และ  $F$  ให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันกับของอุณหภูมิ (Dechaumphai, 1989) ดังนี้

$$T(x, y, t) = [N(x, y)]\{T(t)\} \quad (10.15a)$$

$$E(x, y, t) = [N(x, y)]\{E(t)\} \quad (10.15b)$$

$$F(x, y, t) = [N(x, y)]\{F(t)\} \quad (10.15c)$$

โดย  $[N(x, y)]$  แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน จากนั้นจึงประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$[M]\{\Delta U\}^{n+1} = \Delta t ([D_x]\{E\}^n + [D_y]\{F\}^n + \{R\}^n + \{B\}^n) \quad (10.16)$$

โดย  $[M]$  แทนเมตริกซ์มวลในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่  $A$  ของเอลิเมนต์นั้น

$$[M] = \int_A \{N\}[N]dA \quad (10.17)$$

และ  $\Delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n$  เมตริกซ์ทางด้านขวาของสมการ (10.16) อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ A และรอบขอบ S ของเอลิเมนต์นั้น ดังนี้

$$[D_x] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [N] dA \quad (10.18a)$$

$$[D_y] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} [N] dA \quad (10.18b)$$

$$\{R\} = \int_S \{N\} H dA \quad (10.18c)$$

$$\{B\} = \int_S \{N\} [N] dS \{q\} \quad (10.18d)$$

โดยเวกเตอร์  $\{q\}$  แทนปริมาณความร้อนที่ไหลผ่านที่ขอบนั้น ซึ่งอาจจะเป็นการกำหนดปริมาณความร้อนให้ดังแสดงในสมการ (10.12b) หรืออาจจะเป็นปริมาณความร้อนเนื่องจากการพาตั้งแสดงในสมการ (10.12c) เป็นต้น

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆดังแสดงในสมการ (10.18a-d) สามารถประดิษฐ์ขึ้นเพื่อนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง เช่น หากใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ เมตริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายใน คือ

$$[N] = [N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y)] \quad (10.19)$$

โดย  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ดังนี้

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (10.20)$$

ในสมการ (10.20) นี้ A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์ซึ่งคำนวณได้จากโคออร์ดิเนตของจุดต่อทั้งสาม

$$A = \frac{1}{2} [x_2 (y_3 - y_1) + x_1 (y_2 - y_3) + x_3 (y_1 - y_2)] \quad (10.21)$$

และ  $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$  คือ

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (10.22)$$

ดังนั้น เมตริกซ์ต่างๆในสมการ (10.17) และ (10.18 a-d) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ดังนี้

$$[M] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

$$[D_x] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (10.24a)$$

$$[D_y] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (10.24b)$$

$$\{R\} = \frac{HA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (10.24c)$$

$$\{B\} = \ell \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (10.24d)$$

โดย  $\ell$  คือความยาวด้านของเอลิเมนต์บนขอบนั้น และ  $q_1$  และ  $q_2$  คือปริมาณความร้อนที่จุดต่อทั้งสองของด้านนั้น

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณการเสียรูปและความเค้นเนื่องจากอุณหภูมินั้นสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันโดยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่างลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (10.3) ซึ่งแสดงความสมดุลย์ของของแข็ง ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบดังนี้

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (10.25)$$

โดย  $[K]$  แทนเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปของอินทิกรัลบนพื้นที่ของเอลิเมนต์นั้น ดังนี้

$$[K] = \int_A [B]^T [C][B] dA \quad (10.26)$$

ในที่นี้  $[B]$  คือเมตริกซ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเสียรูป

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (10.27)$$

โดย  $\{\delta\}$  แทนเวกเตอร์ของการเสียรูปที่จุดต่อ สมการ (10.27) สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมคือ

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (10.28)$$

นั่นคือ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (10.29)$$

เนื่องจากเมตริกซ์  $[B]$  นี้และเมตริกซ์  $[C]$  ดังแสดงในสมการ (10.9) ต่างเป็นเมตริกซ์ที่คงที่ ดังนั้น เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์แสดงในสมการ (10.26) สามารถอินทิเกรตได้โดยตรง ก่อให้เกิดสมการที่สามารถนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ดังนี้

$$[K] = [B]^T [C] [B] A \quad (10.30)$$

เวกเตอร์ทางด้านขวาของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (10.25) เป็นเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป ซึ่งอยู่ในรูปของอินทิกรัลบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\{F\} = \int_A [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} dA \quad (10.31)$$

และในทำนองเดียวกัน เนื่องจากเมตริกซ์  $[B]$ ,  $[C]$ ,  $\{\varepsilon_0\}$  ดังแสดงในสมการ (10.29), (10.9) และ (10.10) ต่างเป็นเมตริกซ์ที่คงที่ ดังนั้นสมการ (10.31) จึงสามารถอินทิเกรตได้โดยตรง ก่อให้เกิดสมการที่สามารถนำไปใช้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ดังนี้

$$\{F\} = [B]^T [C] (T - T_0) A \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.32)$$



หลังจากคำนวณการเสียรูปที่เกิดขึ้นได้แล้ว จึงสามารถคำนวณหาความเค้นในแต่ละเอลิเมนต์ได้โดยการแทนสมการ (10.27) ลงในสมการ (10.5) ก่อให้เกิดสมการสำหรับหาความเค้นที่สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงเช่นกัน ดังนี้

$$\{\sigma\} = [C][B]\{\delta\} - [C]\{\epsilon_0\} \quad (10.33)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นบนนี้เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาการเสียรูปรวมทั้งความเค้นที่เกิดขึ้นจากอุณหภูมิ ได้นำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์จำนวน 2 โปรแกรม โดยตั้งชื่อให้ว่าโปรแกรม HEAT และ STRESS ซึ่งมีรายละเอียดดังแสดงในภาคผนวก ค และ ง ตามลำดับ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั้งสองนี้ได้นำไปประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ทั้งในปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นในของแข็ง และเพื่อแสดงศักยภาพวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้ในการประยุกต์เข้ากับปัญหาอื่น ๆ นอกเหนือไปจากปัญหาของการไหล ตัวอย่างของการประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อใช้วิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นในของแข็งที่เกิดขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป ได้แสดงโดยละเอียดในบทต่อไป

## บทที่ 11

### การประยุกต์การจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับ ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นจากอุณหภูมิ

บทที่ 10 ได้อธิบายขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการถ่ายเทความร้อนและความเค้นในของแข็ง สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นได้นำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยตรงเพื่อใช้วิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิและความเค้นในของแข็งเนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป ในการวิเคราะห์ปัญหาใดๆด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงนั้น จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมาก แต่การใช้เอลิเมนต์จำนวนมากเป็นผลโดยตรงต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ รวมทั้งหน่วยความจำที่จำเป็นต้องจัดหาให้บนเครื่องคอมพิวเตอร์

บทที่ 8 ได้แสดงวิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยได้ประยุกต์เข้ากับปัญหาการไหลหลายๆตัวอย่างในบทที่ 9 ปัญหาเหล่านี้ประกอบด้วยคลื่นช็อคที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์โดยฉับพลัน ทำให้จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากตลอดแนวของคลื่นช็อค แต่ในขณะเดียวกัน สามารถใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นซึ่งช่วยลดจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดลง ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงสูงขึ้นและประสิทธิภาพในการคำนวณก็สูงตามขึ้นไปด้วยเช่นกัน

ในบทนี้ จึงเป็นการประยุกต์วิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาความเค้นในของแข็ง เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสำหรับการแก้ปัญหาโดยทั่วไปที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์หาผลลัพธ์

#### 11.1 พารามิเตอร์ที่ใช้ในการจัดเอลิเมนต์สำหรับแต่ละปัญหา

ในปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ เอลิเมนต์ขนาดเล็กได้สร้างขึ้นตลอดแนวคลื่นช็อคซึ่งเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของไหลสูง ดังนั้นค่าความหนาแน่น  $\rho$  จึงเป็นพารามิเตอร์ที่ใช้ในสมการ (8.5) เพื่อคำนวณหาขนาดของ

เอลิเมนต์ ในทำนองเดียวกัน สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน เอลิเมนต์ขนาดเล็กควรถูกสร้างขึ้นในบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิสูง เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้น ดังนั้นอุณหภูมิ  $T$  จึงควรเป็นพารามิเตอร์ที่ใช้ในสมการ (8.5) เพื่อคำนวณขนาดของเอลิเมนต์

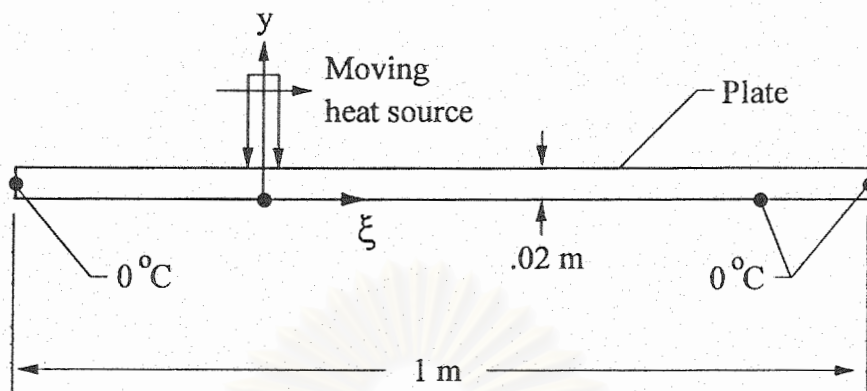
ทั้งค่าความหนาแน่น  $\rho$  สำหรับปัญหาการไหล และค่าอุณหภูมิ  $T$  สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนนั้น ต่างเป็นค่าแบบสเกลาร์ (Scalar quantity) ไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางและต่างสะดวกต่อการใช้ในการคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ได้โดยตรง

สำหรับปัญหาของของแข็ง ค่าที่ต้องการทราบคือการเสียรูปซึ่งขึ้นอยู่กับระยะที่เสียรูปไปในทิศทาง  $x$  และ  $y$  และค่าความเค้นที่ประกอบด้วย  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  และ  $\tau_{xy}$  ส่วนในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เอลิเมนต์ขนาดเล็กควรสร้างขึ้นในบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูง ดังนั้นค่าความเค้นจึงควรเป็นพารามิเตอร์เพื่อใช้คำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ แต่เนื่องจากค่าความเค้นเป็นปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) และมีถึง 3 ค่า ดังนั้นค่าความเค้นที่เลือกใช้เป็นพารามิเตอร์จึงควรประกอบด้วยค่าความเค้นย่อยทั้งสามนี้ ค่าความเค้นซึ่งประกอบด้วยค่าความเค้นย่อยทั้งสามที่เลือกใช้ในที่นี้คือ ค่าความเค้นแบบพอนมิสซ์ (Von Mises stress) ดังนี้

$$\sigma_{\text{Von Mises}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2} \quad (11.1)$$

## 11.2 การถ่ายเทความร้อนในแผ่นโลหะจากการให้ความร้อนซึ่งเคลื่อนที่ไปตามขอบ

เพื่อแสดงประสิทธิภาพของวิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน ตัวอย่างการคำนวณหาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิในแผ่นโลหะยาวเรียว (กว้าง 0.02 ม. x ยาว 1.0 ม.) ดังแสดงในรูป 11.1 ได้นำเสนอในบทนี้ อุณหภูมิตลอดขอบปลายทั้งสองข้างและขอบล่างถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์องศาเซลเซียส ในขณะที่ขอบบนมีการให้ความร้อนด้วยปริมาณ  $420 \text{ W/cm}^2$  ซึ่งมีความกว้างเพียง 0.01 ม. และความร้อนนี้เคลื่อนตัวจากปลายซ้ายไปยังปลายขวาด้วยความเร็ว 0.01 m/sec ปัญหานี้คล้ายกับปัญหาของการเชื่อมแผ่นเหล็กตลอดแนวขอบบนซึ่งจะก่อให้เกิดอุณหภูมิสูงในบริเวณจุดเชื่อมนั้น



รูป 11.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในแผ่นโลหะจากการให้ความร้อนซึ่งเคลื่อนที่ได้ไปตามขอบ

จากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่างๆของตัวอย่างนี้ สามารถประดิษฐ์ผลเฉลยแม่นยำซึ่งอยู่ในรูปแบบของอนุกรมอนันต์ได้ดังนี้

$$T(\xi, y) = \frac{4qHe^{-H\xi}}{kL} \left\{ \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \left[ \sin\left(\frac{\alpha\xi}{w}\right) \frac{\sinh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n h)} \right] \right. \\ \left. \left[ \sin\alpha \cosh(Hw) - \frac{\alpha}{w} \cos\alpha \sinh(Hw) \right] \right. \\ \left. + \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \left[ \sin\left(\frac{\alpha\xi}{w}\right) \frac{\sinh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n x)} \right] \right. \\ \left. \left[ \cos\alpha \sinh(Hw) + \frac{\alpha}{w} \sin\alpha \cosh(Hw) \right] \right\} \quad (11.2)$$

โดยจุดศูนย์กลางและแกนโคออร์ดิเนต  $\xi$ - $y$  ได้แสดงในรูป 11.1 ในสมการ (11.2) นี้  $q$  คือปริมาณความร้อนที่เคลื่อนไปตามขอบบน  $h$  คือความกว้างของแผ่นโลหะ และ  $H$  ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของแผ่นโลหะ ดังนี้

$$H = \frac{\rho c v}{2k} \quad (11.3)$$

ซึ่ง  $\rho$  แทนความหนาแน่นของแผ่นโลหะ  $c$  แทนความร้อนจำเพาะ  $v$  แทนความเร็วของปริมาณความร้อนที่เคลื่อนที่ตลอดขอบบน และ  $k$  แทนค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของแผ่นโลหะ นอกจากนั้น พารามิเตอร์  $\alpha$  และ  $\lambda_n$  ในสมการ (11.2) คือ

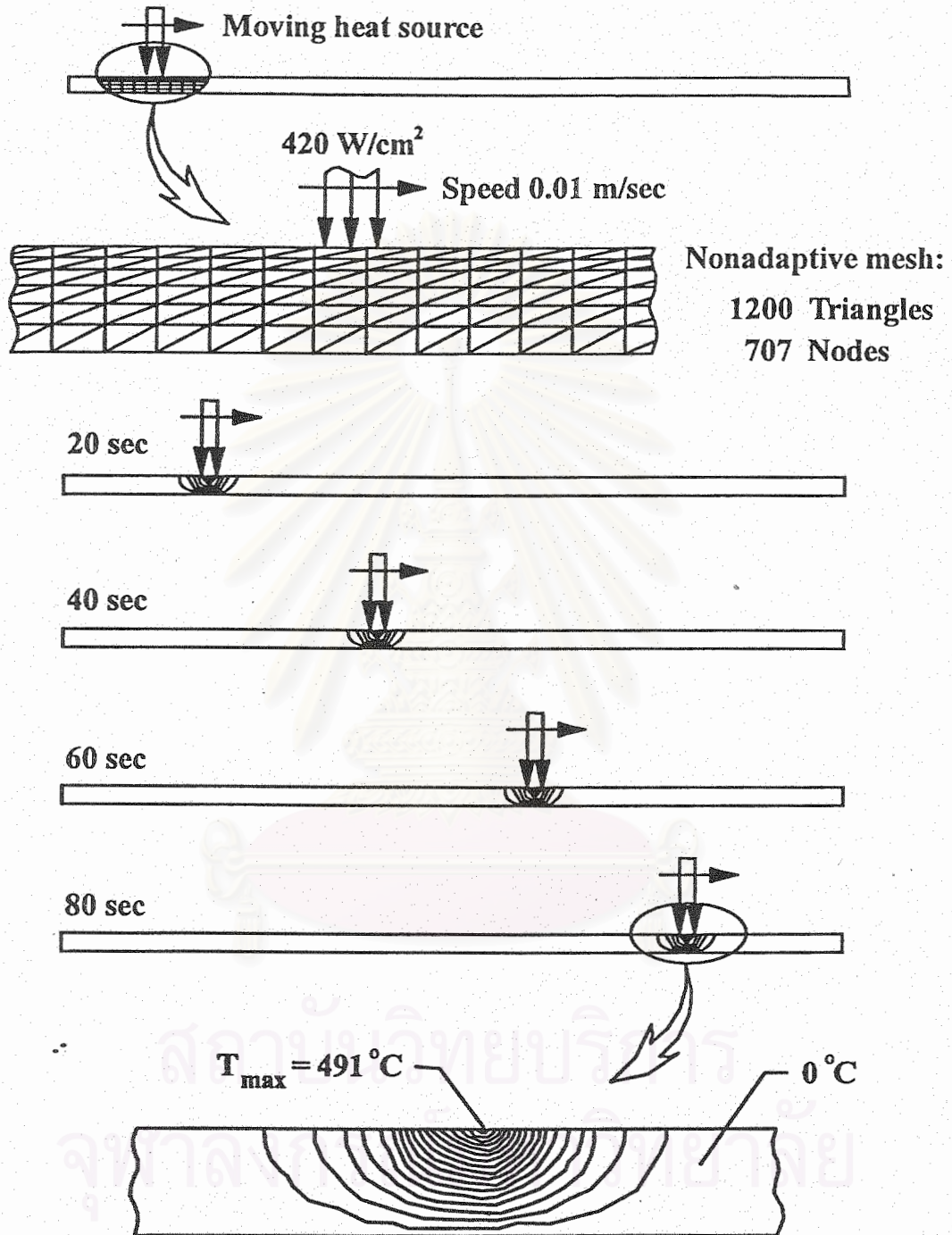
$$\alpha = \frac{n \pi w}{2L} \quad \text{และ} \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + H^2} \quad (11.4)$$

โดย  $L$  แทนความยาวของแผ่นโลหะ และ  $w$  แทนความกว้างของปริมาณความร้อนซึ่งเคลื่อนที่ตลอดขอบบน

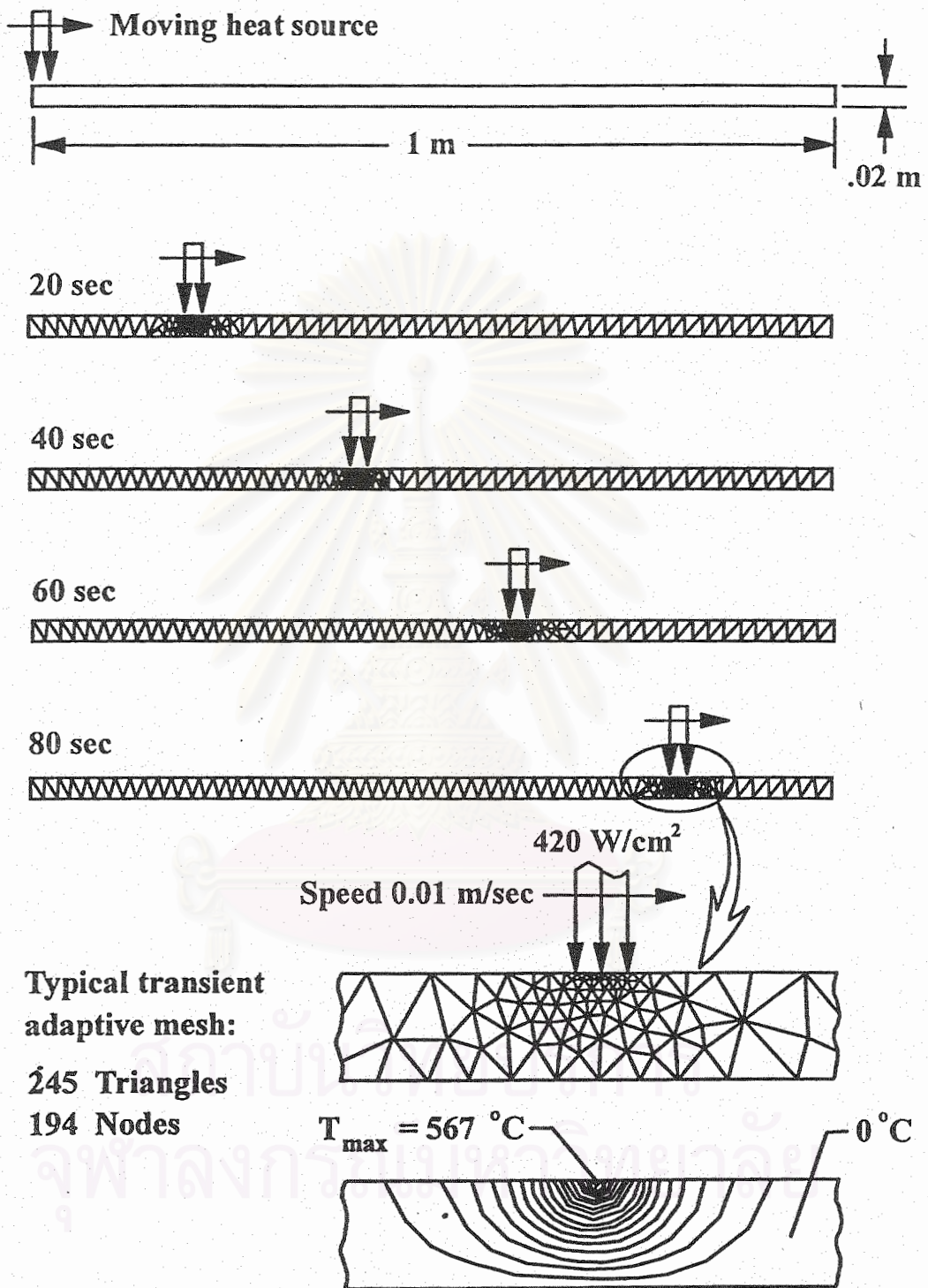
ในการวิเคราะห์หาการกระจายของอุณหภูมิที่แปรผันไปตามตำแหน่งของปริมาณความร้อนที่เคลื่อนที่ไปตลอดขอบบนซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาด้วยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาที่ใช้กันอยู่นั้น มักเริ่มจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเท่าๆกันตามแนวยาวของแผ่นโลหะ ดังเช่นแสดงในส่วนบนของรูป 11.2 เอลิเมนต์เหล่านี้มีความกว้างค่อนข้างน้อยโดยเฉพาะบริเวณใกล้ขอบบนเพื่อให้สามารถจับลักษณะการกระจายของอุณหภูมิซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงสูงบริเวณขอบบนนี้ได้ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ไม่มีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,200 เอลิเมนต์ และ 707 จุดต่อ

รูปเล็กในตอนกลางของรูป 11.2 แสดงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่คำนวณได้ ณ เวลาที่ต่างกันในขณะที่ตำแหน่งการให้ความร้อนได้เคลื่อนตัวไปตามขอบบนจากซ้ายไปขวา โดยรูปล่างสุดในรูป 11.2 นี้ แสดงรายละเอียดการกระจายของอุณหภูมิในบริเวณตำแหน่งที่ความร้อนตกกระทบบ อุณหภูมิสูงสุดที่คำนวณได้จากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้มีค่าเท่ากับ  $491^{\circ}\text{C}$  ซึ่งต่ำกว่าผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการ (11.2) ที่มีค่า  $580^{\circ}\text{C}$  อยู่ถึง 15% ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนี้เป็นผลโดยตรงจากการใช้ขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กไม่เพียงพอ เวลาทั้งหมดที่ใช้ไปบนเครื่องคอมพิวเตอร์เวอร์คสเตชันเพื่อคำนวณปัญหาทำให้เสร็จสมบูรณ์ประมาณ 1,200 วินาที

ปัญหานี้ได้วิเคราะห์ซ้ำอีกครั้งแต่เป็นการใช้ระเบียบวิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ในขณะที่ตำแหน่งการให้ปริมาณความร้อนเคลื่อนตัวไป รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับตัวเข้ากับลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นได้แสดงในรูป 11.3 ณ เวลาที่ต่างๆกัน เอลิเมนต์ขนาดเล็กได้สร้างขึ้นโดยอัตโนมัติในบริเวณตำแหน่งที่ความร้อนตกกระทบบเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิสูง รูปเล็กในตอนล่างของรูป 11.3 นี้ แสดงรายละเอียดการจัดตัวของเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณตำแหน่งที่ความร้อนตกกระทบบและผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิที่คำนวณได้ในบริเวณนั้น อุณหภูมิสูงสุดตรงตำแหน่งที่ความร้อนตกกระทบบคือ  $567^{\circ}\text{C}$  ซึ่งต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงไปเพียง 2% และเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณซึ่งรวมเวลาที่ใช้ในการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติด้วยประมาณ 900 วินาที ซึ่งน้อยกว่าเวลาที่ใช้กับรูปแบบ



รูป 11.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ไม่ได้จัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ  
และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้น



รูป 11.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้น

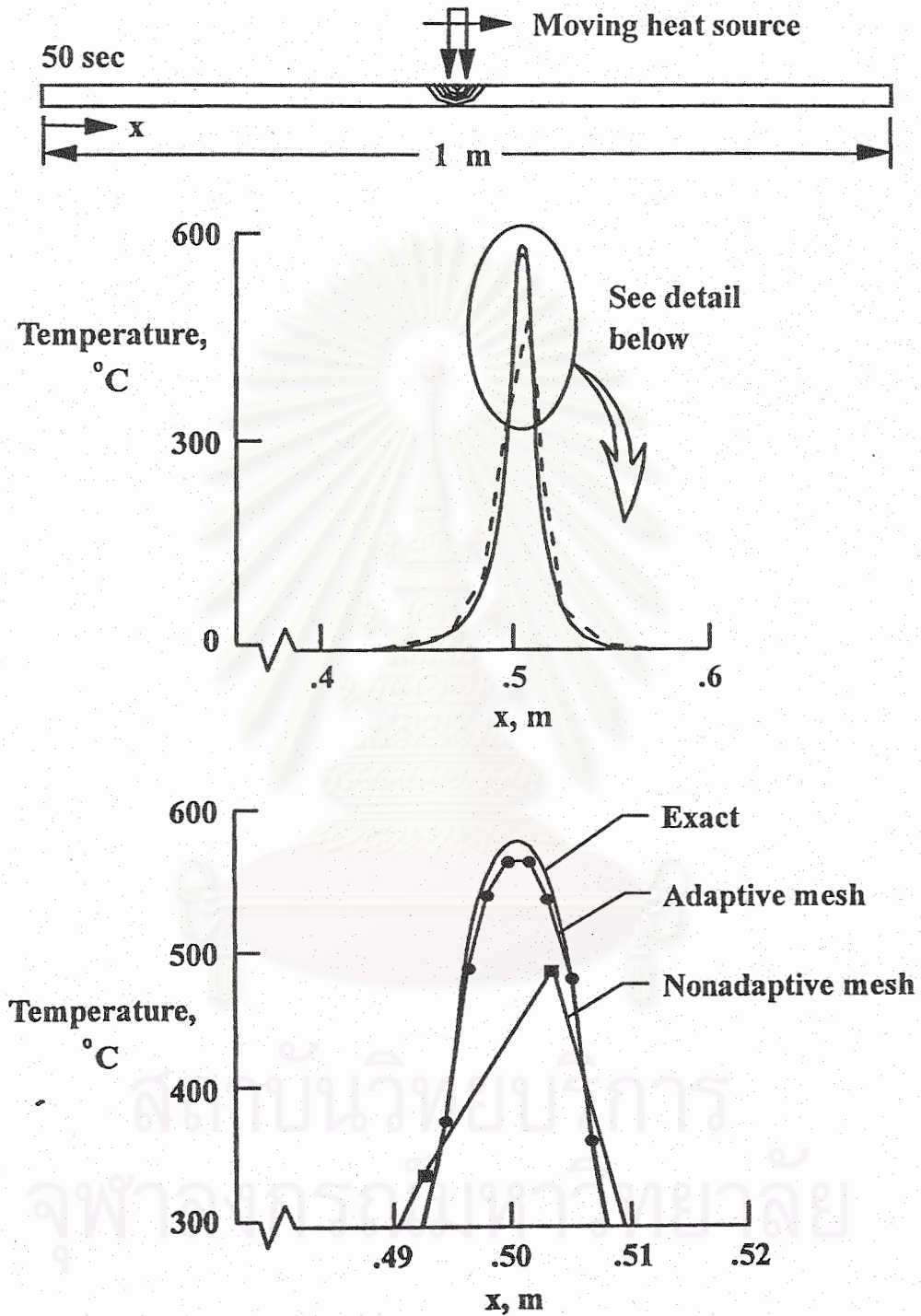
ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาในรูป 11.2 อยู่ประมาณ 25% เวลาที่ใช้ในการคำนวณซึ่งลดน้อยลงไปในสี่ปีเนื่องจากเหตุผลหลักที่ว่า รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นใช้จำนวนเอลิเมนต์น้อยกว่ารูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา

รูป 11.4 เปรียบผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิตลอดขอบบนของแผ่นโลหะในบริเวณตำแหน่งที่ปริมาณความร้อนตกกระทบ ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและรูปแบบที่ได้รับการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ กับผลเฉลยแม่นยำ รูปนี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่ก่อให้เกิดผลลัพธ์ซึ่งมีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำ ในขณะที่ผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ธรรมดานั้นมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงไม่สมจริงเพียงพอ และผิดพลาดค่อนข้างมากเนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในนั้นยังมีขนาดใหญ่เกินไปสำหรับปัญหานี้

### 11.3 การเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นจากอุณหภูมิ

ความเที่ยงตรงของลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่คำนวณได้จากปัญหาการถ่ายเทความร้อนจะมีผลโดยตรงต่อความเที่ยงตรงของการคำนวณลักษณะของการเสียรูปและความเค้น (Thermal stress) ในแผ่นโลหะ เนื่องจากผลเฉลยแม่นยำของการเสียรูปและความเค้นในแผ่นโลหะซึ่งเป็นผลมาจากการกระจายของอุณหภูมิในสมการ (11.2) นั้นไม่สามารถหาได้ และเนื่องจากความต้องการในการสร้างผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อสามารถใช้อ้างอิงตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ต่างๆที่จะคำนวณต่อไปได้ จึงได้สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดดังแสดงทางด้านซ้ายของรูป 11.5 (ก) ขึ้นซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากถึง 8,640 เอลิเมนต์ และ 4,557 จุดต่อ พร้อมกับกำหนดลักษณะการกระจายของอุณหภูมิด้วยผลเฉลยแม่นยำจากสมการ (11.2) ผลลัพธ์ของการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยการตรึงขอบล่างของแผ่นโลหะได้แสดงทางด้านขวาของรูป 11.5 (ก) รูปดังกล่าวแสดงการนูนขึ้นของขอบบนตรงตำแหน่งที่มีอุณหภูมิสูงเนื่องจากปริมาณความร้อนตกกระทบ เส้นชั้นในรูปนี้แสดงถึงการกระจายของความเค้นซึ่งเกิดความเค้นแบบอัดตัว (Compressive stress) มีค่าสูงสุดเท่ากับ -40 ksi ที่ขอบบน และแบบดึงตัว (Tensile stress) ที่ขอบล่างเท่ากับ +40 ksi จะเห็นได้ว่าการกระจายของความเค้นที่เกิดขึ้นทำให้แผ่นโลหะอยู่ในสภาวะสมดุลย์ แต่การกระจายของความเค้นนี้มีลักษณะต่างไป





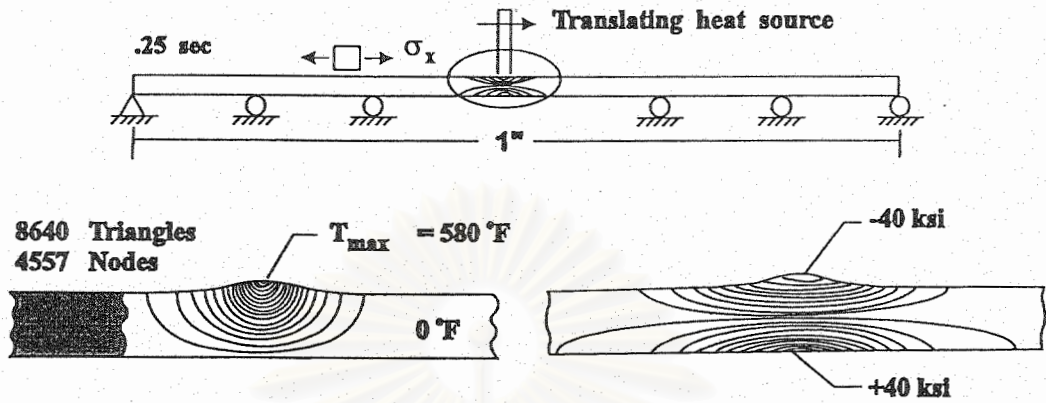
รูป 11.4 การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่ขอบบนบริเวณความร้อนกระทบระหว่างผลเฉลยแม่นยำและผลจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและแบบอัตโนมัติ

จากลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ ความแตกต่างดังกล่าวบอกเป็นนัยว่า หากต้องการผลลัพธ์ทั้งการกระจายของอุณหภูมิและความเค้นที่มีความเที่ยงตรงทั้งคู่ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาการเสีรูปและความเค้นจึงไม่ควรเป็นรูปแบบเดียวกัน

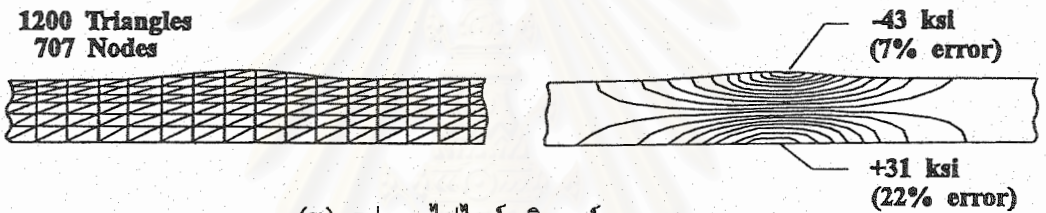
รูป 11.5 (ข) แสดงการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาที่ไม่มีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อกำหนดการเสีรูปและความเค้นที่เกิดขึ้น ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้แสดงทางด้านขวาของรูป 11.5 (ข) นี้ ซึ่งเกิดความเค้นสูงสุดที่ขอบบนและล่างเท่ากับ -43 ksi และ +31 ksi โดยมีความคลาดเคลื่อนจากผลลัพธ์อ้างอิงในรูป 11.5 (ก) ถึง 7% และ 22% ตามลำดับ ความคลาดเคลื่อนของความเค้นที่ขอบล่างนั้นมีค่าค่อนข้างสูงเมื่อเปรียบเทียบกับความคลาดเคลื่อนที่ขอบบน ทั้งนี้เป็นผลโดยตรงเนื่องจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เป็นรูปแบบที่เหมาะสมกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่สร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กใกล้ขอบบนเพื่อต้องการจับลักษณะการกระจายของอุณหภูมิให้ได้เที่ยงตรง

ในเชิงเดียวกัน รูป 11.5 (ค) แสดงการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้รับการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนเพื่อกำหนดการเสีรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นในแผ่นโลหะ ลักษณะการเสีรูปและความเค้นที่คำนวณได้ได้แสดงในรูปเล็กทางด้านขวามือของรูป 11.5 (ค) ซึ่งเกิดความเค้นสูงสุดที่ขอบบนและล่างเท่ากับ -41 ksi และ +32 ksi มีค่าความคลาดเคลื่อน 2% และ 20% ตามลำดับ ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนใกล้เคียงกับที่เกิดขึ้นในรูป 11.5 (ข) ซึ่งความคลาดเคลื่อนสูงสุดนั้นเกิดที่ขอบล่างและเอลิเมนต์ในบริเวณนั้นมีขนาดใหญ่เกินไปจากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนมาแก้ปัญหาความเค้นในของแข็ง

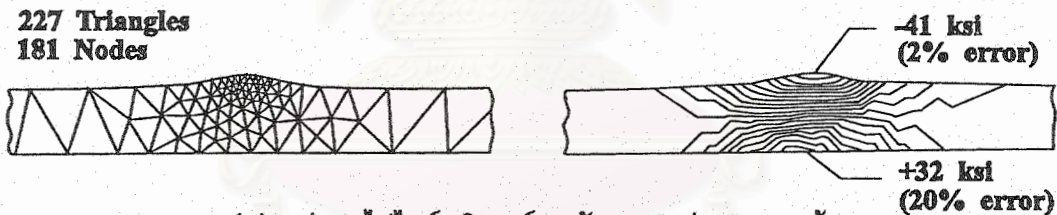
ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 11.1 ในการสร้างเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติสำหรับการแก้ปัญหาความเค้นในของแข็งนั้น พารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมควรเป็นค่าความเค้นแบบฟอนมิสซ์ซึ่งเป็นผลรวมของความเค้นย่อยต่างๆ เพื่อว่ารูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นจะประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูง หลักการดังกล่าวได้นำมาประยุกต์เข้ากับปัญหาแผ่นโลหะนี้ รูป 11.5 (ง) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นโดยอัตโนมัติจากการใช้ความเค้นแบบฟอนมิสซ์เป็นพารามิเตอร์ในการสร้างเอลิเมนต์ต่างๆ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้แสดงทางด้านขวาของรูป 11.5 (ง) นี้ ซึ่งมีความเค้นสูงสุดที่ขอบบนและล่างเท่ากับ -39 ksi และ +39 ksi ตามลำดับ โดยต่างมีค่าความคลาดเคลื่อนเพียง 2% จากผลลัพธ์อ้างอิงในรูป 11.5 (ก)



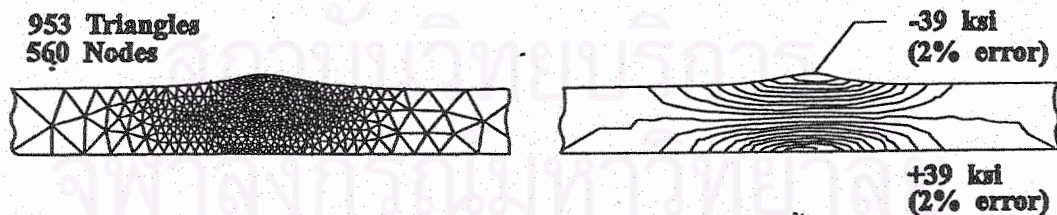
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียด



(ข) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา



(ค) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากปัญหาการถ่ายเทความร้อน



(ง) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับคำนวณความเค้น

รูป 11.5 ผลลัพธ์การกระจายของความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิจากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ต่าง ๆ กัน

ตัวอย่างที่อธิบายในบทนี้ แสดงถึงการประยุกต์วิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน และปัญหาความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็ง ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นตรงอยู่กับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นจากการใช้พารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับปัญหานั้น สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน อุณหภูมิสามารถใช้เป็นพารามิเตอร์ในการสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิมาก ในขณะที่ความเค้นแบบฟอนมิสส์ควรใช้เป็นพารามิเตอร์ในการสร้างเอลิเมนต์สำหรับปัญหาความเค้นในของแข็ง รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นจะประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กตามตำแหน่งที่ต้องการความเที่ยงตรงของผลลัพธ์สูง ในขณะที่เดียวกันเอลิเมนต์ขนาดใหญ่จะสร้างขึ้นในบริเวณอื่นเพื่อช่วยลดเวลาในการคำนวณและปริมาณหน่วยความจำที่ต้องใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ เนื่องจากลักษณะผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาโดยทั่วไปนั้นไม่อาจทราบได้โดยล่วงหน้า การใช้วิธีจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในดังที่แสดงโดยตัวอย่างในบทนี้ จึงเป็นกระบวนการที่จะช่วยผู้วิเคราะห์ให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงด้วยการคำนวณอย่างมีประสิทธิภาพ



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 12

### บทสรุปและวิจารณ์

#### 12.1 สรุปและวิจารณ์

โครงการวิจัยนี้เป็นงานวิจัยพื้นฐานในการพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อนำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาต่างๆทางวิศวกรรมเครื่องกล อันประกอบด้วยปัญหาที่เกี่ยวข้องกับ: (1) การไหลของของเหลว; (2) การถ่ายเทความร้อน; และ (3) ความแข็งแรงในของแข็ง ตามลำดับ ขั้นตอนหลักโดยสรุปเริ่มจากการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ทางคณิตศาสตร์สำหรับแต่ละปัญหา การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ รวมทั้งการตรวจสอบความถูกต้องของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้กับปัญหาพื้นฐานต่างๆก่อนนำไปใช้แก้ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนอื่นๆต่อไป นอกเหนือจากขั้นตอนการดำเนินการดังกล่าวนี้แล้ว ยังได้ปรับปรุงและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีประสิทธิภาพในการคำนวณและให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงมากยิ่งขึ้นไป ผลงานที่เกิดขึ้นจากโครงการวิจัยนี้ นอกจากจะประกอบด้วยรายละเอียดของขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆที่สอดคล้องกันแล้ว ยังก่อให้เกิดบทความทางวิชาการจำนวนมากหลายบทความที่ได้นำไปเผยแพร่ในการประชุมทางวิชาการและได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการต่างๆด้วยเช่นกัน

โครงการวิจัยนี้ เริ่มต้นจากการศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) สำหรับปัญหาการไหลในบทที่ 2 โดยจำแนกการไหลออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ การไหลแบบไม่อัดตัว (Incompressible flow) และการไหลแบบอัดตัวได้ (Compressible flow) สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวนั้นเป็นการไหลที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันทั่วไป เช่น การไหลหมุนเวียนของอากาศภายในห้อง การไหลของอากาศผ่านลำตัวรถยนต์ การไหลของของเหลวในท่อรูปร่างซับซ้อนต่างๆ ฯลฯ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการออกแบบงานทางวิศวกรรมเครื่องกลในปัจจุบัน สมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์สำหรับการไหลประเภทนี้ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทที่ 3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่เกิดขึ้นได้นำไปประดิษฐ์ต่อขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOWFLOW ที่สอดคล้องกัน ขั้นตอนการคำนวณ ลักษณะไฟล์ข้อ

มูลต่างๆ รวมทั้งการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมได้อธิบายในบทที่ 4 เมื่อเกิดความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดีแล้ว จึงได้นำไปใช้แก้ปัญหาต่างๆที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นดังแสดงในบทที่ 5 เช่น การไหลในท่อโรงไฟฟ้า กฝผ. การไหลในช่องทางที่มีกล่องสี่เหลี่ยมมุมทู่สูงกึ่งกลาง และการจำลองการหมุนเวียนของอากาศในอาคารรูปโดม เป็นต้น

การไหลประเภทที่สองเป็นการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ซึ่งได้เริ่มเข้ามามีบทบาทต่อทั้งการทำวิจัยและการเรียนในระดับบัณฑิตศึกษา สืบเนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีที่เหมาะสมเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากกว่าวิธีอื่นๆ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้จึงเริ่มได้รับความสนใจเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ซึ่งผลลัพธ์มักประกอบด้วยคลิ่นช็อคที่มีการเปลี่ยนแปลงสภาวะของการไหล เช่นความหนาแน่นจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งโดยฉับพลัน ขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลชนิดนี้ รวมทั้งการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ HIFLOW ที่สอดคล้องกัน ได้อธิบายโดยละเอียดในบทที่ 6 และ 7 ตามลำดับ

เนื่องจากปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้มักประกอบด้วยคลิ่นช็อคที่มีการเปลี่ยนแปลงสภาวะของการไหลอย่างฉับพลันดังกล่าว การเปลี่ยนแปลงนี้จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง แต่การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากจะทำให้ประสิทธิภาพในการคำนวณลดลง ดังนั้น บทที่ 8 จึงอธิบายแนวคิดในการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ กล่าวคือ สร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณของคลิ่นช็อคที่มีการเปลี่ยนแปลงสภาวะการไหลสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง และในขณะเดียวกัน สร้างเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆ เพื่อลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณและปริมาณหน่วยความจำที่ต้องการบนเครื่องคอมพิวเตอร์

การจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติดังที่ได้อธิบายในบทที่ 8 นี้ ได้ประยุกต์เข้ากับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทที่ 7 เพื่อแก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และแบบไม่อัดตัวหลายๆปัญหาดังแสดงในบทที่ 9 นับตั้งแต่ปัญหาคลิ่นช็อคแบบตรงและแบบโค้ง ไปจนถึงการสะท้อนของคลิ่นช็อค ปัญหาการที่คลิ่นช็อคถูกกระทบด้วยสภาวะการไหลจากแหล่งอื่น รวมทั้งปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ ตัวอย่างเหล่านี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติซึ่งสามารถสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่เหมาะสมก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรง โดยลักษณะของผลลัพธ์ไม่จำเป็นต้องทราบล่วงหน้ามาก่อนคุณสมบัติดังกล่าวเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการแก้ปัญหาในงานต่างๆทางวิศวกรรม เพราะปัญหาโดยทั่วไปนั้นล้วนมีรูปร่างที่ซับซ้อน ทำให้ไม่ง่ายในการที่จะทราบลักษณะของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นล่วงหน้า ก่อนทำการวิเคราะห์จริงๆได้

สมการเชิงอนุพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการถ่ายเทความร้อน และที่เกี่ยวข้องกับการเสียรูปและความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต ต่างๆ ได้อธิบายในบทที่ 10 จากนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ทำการประดิษฐ์ขึ้นจากสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ ผลของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ก่อให้เกิดระเบียบวิธีการคำนวณซึ่งได้นำไปเขียนขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ HEAT และ STRESS ที่สอดคล้องกันเพื่อใช้แก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นตามลำดับ โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้ได้ทำการตรวจสอบจนมีความมั่นใจในความถูกต้อง จากนั้นจึงทำการประยุกต์การจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อให้การแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและความเค้นเนื่องจากอุณหภูมินั้นมีประสิทธิภาพสูงขึ้น ตัวอย่างที่ใช้คือการคำนวณลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและความเค้นในแผ่นโลหะซึ่งมีการให้ความร้อนที่เคลื่อนที่ได้ตลอดขอบ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนอกจากจะมีความเที่ยงตรงสูงแล้ว ยังสามารถลดเวลาที่ใช้ไปในการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปที่ใช้กันในปัจจุบันซึ่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบของเอลิเมนต์ในขณะที่ทำการคำนวณ

ประโยชน์ที่เกิดขึ้นจากโครงการวิจัยนี้ นอกจากจะก่อให้เกิดไฟไนต์เอลิเมนต์ โปรแกรมคอมพิวเตอร์และบทความทางวิชาการต่างๆ ที่ได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการแล้ว สิ่งที่ผู้วิจัยมีความตั้งใจเป็นอย่างมากที่จะให้เกิดขึ้นจากโครงการวิจัยนี้ คือการ แสดงขั้นตอนโดยละเอียดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นลงในรายงานวิจัย ฉบับนี้ ขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว สามารถนำไปประยุกต์เพื่อ ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมอื่นๆ เช่น การหา ลักษณะการกระจายของค่าศักย์ไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กในงานวิศวกรรมไฟฟ้าได้ เป็นต้น ในขณะที่เดียวกันไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆ ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นและได้อธิบาย โดยละเอียดในรายงานวิจัยนี้ สามารถนำไปใช้เป็นต้นแบบในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์ โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการทำวิทยานิพนธ์เพื่อใช้แก้ปัญหาอื่นๆ เพื่อช่วยยกระดับ ความรู้ความสามารถของนิสิตนักศึกษาและนักวิจัยในประเทศไทย ซึ่งจะเป็นผลต่อการ สนับสนุนงานวิจัยทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีการคำนวณของประเทศให้มีความ เจริญรุดหน้ามากยิ่งขึ้นไป

## บรรณานุกรม

### ภาษาไทย

ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม, พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

### ภาษาอังกฤษ

Anderson, J. D., Modern Compressible Flow, 2nd Ed., McGrawHill, New York, 1990.

Anderson, J. D., Fundamental of Aerodynamics, McGraw-Hill International, 1991.

Anderson, J. D., Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill International, 1995.

Bertin, J. J. and Smith, M. L., Aerodynamics for Engineers, 2nd Ed., Prentice-Hall International, 1989.

Brueckner, F. P. and Heinrich, J. C., "Petrov-Galerkin Finite Element Model for Compressible Flows," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 32, 1991, pp. 255-274.

Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3d ed., Wiley, New York, 1989.

Dechaumphai, P., Thornton, E. A. and Wieting, A. R., "Flow-Thermal-Structural Study of Aerodynamically Heated Leading Edges," *J. Spacecraft & Rockets*, Vol, 26, 1989, pp. 201-209.

Gallagher, R. H., Oden, J. T., Taylor, C. and Zienkiewicz, O. C. (eds.), Finite Element in Fluids, Vols. 1 and 2, Proceeding of the Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems held at the University College of Swansea, Wales, 1974, Wiley, New York, 1975.



- Gnoffo, P. A., "Application of Program LAURA to Three-Dimension AOTV Flowfields," AIAA paper No. 86-0565, 1986.
- Hassan, O., Morgan, K. and Peraire, J., "An Implicit Finite Element Method for High Speed Flows," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 32, 1991, pp. 183-205.
- Holman, J. P., Heat Transfer, Seventh Ed., McGraw-Hill, New York, 1992.
- Hughes, T. J. R., Liu, W. K. and Brooks, A., "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *J. Comp. Phys.*, Vol. 30, No. 1, January 1979, pp. 1-60.
- Jiang, B-N. "A Least-Squares Finite Element Method for Incompressible Navier-Stokes Problems," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 14, 1992, pp. 843-895.
- Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., "An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders," *J. Fluid Mechanics*, Vol. 74, 1976, pp. 695-719.
- Kawahara, M., Yoshimura, N., Nakagawa, K. and Ohsaka, H., "Steady and Unsteady Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Fluid," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 10, 1976, pp. 437-456.
- Lam, C., Applied Numerical Methods for Partial Differential Equations, Prentice Hall, New York, 1994.
- Morton, D. W. and Baines, M. J., Numerical Methods for Fluid Dynamics, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- Oden, J. T., Zienkiewicz, O. C., Gallagher, R. H. and Taylor, C. (eds.), Finite Element Methods in Flow Problems, Proceedings of the International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems held at University College of Swansea, Wales, January 1974, University of Alabama Press, Huntsville, 1974.
- Peraire, J., Vahati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C., "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations," *J. Comp. Physics*, Vol. 72, 1987, pp. 449-466.

- Peraire, J. J., Peiro, Formaggia, L., Morgan, k and Zienkiewicz, O. C. "Finite Element Euler Computations in Three Dimensions," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26, 1988, pp. 2135-2159.
- Rachowicz, W., Oden, J. T. and Demkowicz, L., "Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy," Texas Institute for Computational Mechanics, University of Texas of Austin, Report 89-03, 1989, p. 56.
- Ramaswamy, B. and Jue, T. C., "A Segregated Finite Element Formulation of Navier-Stokes Equations under Laminar Conditions," *Finite Element Analysis and Design*, Vol. 9, 199, pp. 257-270.
- Reddy, J. N. and Satake, A., "A Comparison of a Penalty Finite Element Model with the Stream Function-Vorticity Model of Natural Convection in Enclosures", *J. Heat Transfer*, Vol. 102, 1980, pp. 659-666.
- Rice, J. G. and Schnipke, R. J., "A Monotone Streamline Upwind Finite Element Method for Convection-Dominated Flows," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, 1985, pp. 313-327.
- Schlichting, H., Boundary-Layer Theory, 6<sup>th</sup> Ed., McGraw-Hill, New York, 1968.
- Ugural, A. C. and Fenster, S. K., Advanced Strength and Applied Elasticity, Elsevier North-Holland Publishing, New York, 1975.
- Yamada, Y., Ito, K., Yokouchi, Y., Yamano, T. and Ohtsubo, T., "Finite Element Analysis of Steady Fluid and Metal Flow", Finite Element in Fluid, Edited by Gallagher, R. H., et. al., John Wiley and Sons, New York, 1975, pp. 73-94.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method, Fourth Ed., McGraw-Hill International, 1991
- Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 24, 1987, pp. 337-357.

บทความทางวิชาการ เรื่อง

*A Finite Element Method for  
Viscous Incompressible Flow Analysis*

ได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการ

**Thammasat International Journal  
of Science and Technology**

Volume 3, Number 2, 1998

# A Finite Element Method for Viscous in Compressible Flow Analysis

P. Dechaumphai, J. Triputtarat and S. Sikkhabandit  
Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering  
Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand.

## Abstract

A finite element method for viscous incompressible flow analysis is presented. The flow is classified into two types namely: the flow with negligible inertia for slow moving fluid, and with inertia for a more general flow. Finite element equations corresponding to these flows are derived and are used in the development of the computer programs that can be executed on standard personal computers. The derived finite element equations and the computer programs have been verified by solving academic-type examples that have exact solutions before applying to solve more complex flow problems.

## 1. Introduction

The finite element method is one of the numerical methods that has received popularity due to its capability for solving complex structural problems [1,2]. The method has been extended to solve problems in several other fields such as in the field of heat transfer [3,4], electromagnetics [5], biomechanics [6], etc. In spite of the great success of the method in these fields, its application to fluid mechanics, particularly to viscous flows, is still under intensive research. This is due to the fact that the governing differential equations for general flow problems consist of several coupled equations which are inherently nonlinear. Accurate numerical solutions thus require a vast amount of computer time and data storage. One way to minimize the amount of computer time and data storage used is to employ an adaptive meshing technique [7,8]. The technique places small elements in the regions of large change in the solution gradients to increase solution accuracy, and at the same time, uses large elements in the other regions to reduce the computational time and computer memory.

As the first step toward accurate flow solutions using the adaptive meshing technique, this paper investigates and develops a finite element formulation suitable for analyses of general incompressible flow problems. The selected formulation is evaluated in this paper and will be used together with the adaptive meshing technique in the future. The paper starts with viscous incompressible flow with negligible inertia for slow moving fluid. The corresponding Navier-Stokes equations are used to derive the finite element equations. The computational procedure used in the development of the computer program is described. The same process is repeated but for viscous incompressible flow with inertia for general flow. Several examples and applications are then presented to evaluate and demonstrate the capability of the finite element formulation for analysis of viscous incompressible flows.

## 2. Viscous Incompressible Flow With Negligible Inertia

### 2.1 Governing Equations

The fundamental laws used to solve fluid motion in a general form are the law of: (a) conservation of mass or continuity equation, (b) conservation of momentum, and (c) conservation of energy, which constitute a set of coupled, nonlinear, partial differential equations. For low-speed incompressible flow, the fluid density and the flow temperature are assumed constant, and only the continuity equation and the momentum equations are needed for the analysis. These differential equations for the two-dimensional steady-state flow are,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1b)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1c)$$

where  $u$  and  $v$  are the velocity components in the  $x$  and  $y$  direction, respectively;  $p$  is the pressure,  $\mu$  is the fluid viscosity coefficient and  $\rho$  is the fluid density.

The case of viscous incompressible flow with negligible inertia can be categorized by low Reynolds number, which represents the ratio of inertial forces to viscous forces in a fluid motion. When the Reynolds number is very small, the inertial forces are insignificant compared to the viscous forces and can be omitted from the governing momentum equations, Eqs. (1b-c). Small Reynolds numbers characterize slow moving flows and flows of very viscous fluids. In this case, the set of differential equations (Eqs. (1a-c)) for constant fluid properties reduces to a simpler form and can be rewritten in compact form as,

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad (2a)$$

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0 \quad (2b)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \quad (2c)$$

where the stress components are,

$$\sigma_x = -p + 2\mu u_{,x} \quad (3a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu v_{,y} \quad (3b)$$

$$\tau_{xy} = \mu(u_{,y} + v_{,x}) \quad (3c)$$

The differential equations, Eqs. (2a-c), are to be solved together with appropriate boundary conditions of either specifying velocity components along edge  $S_1$ ,

$$u = u_1(x, y) \quad (4a)$$

$$v = v_1(x, y) \quad (4b)$$

or surface tractions along edge  $S_2$ ,

$$T_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m \quad (5a)$$

$$T_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m \quad (5b)$$

where  $\ell$  and  $m$  are the direction cosines of the unit vector normal to the boundary edge.

### 2.2 Finite Element Formulation

The basic unknowns for the two-dimensional viscous incompressible flow problem corresponding to the continuity Eq. (1a) and the two momentum Eqs. (1b-c) are the velocity components  $u$ ,  $v$  and the pressure  $p$ . The six-node triangular element suggested in Ref. [9] is used in this study. The element assumes quadratic interpolation for the velocity component distributions and linear interpolation for the pressure distribution according to their highest derivative orders in the differential Eqs. (1a-c) as,

$$u(x, y) = N_\alpha u_\alpha \quad (6a)$$

$$v(x, y) = N_\alpha v_\alpha \quad (6b)$$

$$p(x, y) = H_\lambda p_\lambda \quad (6c)$$

where  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ;  $\lambda = 1, 2, 3$ ;  $N_\alpha$  and  $H_\lambda$  are the element interpolation functions for the velocity and pressure, respectively.

To derive the finite element equations, the method of weighted residuals [4] is applied to the momentum Eqs. (2b-c) and the continuity Eq. (2a),

$$\int_A N_\alpha (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) dA = 0 \quad (7a)$$

$$\int_A N_\alpha (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dA = 0 \quad (7b)$$



$$\int_A H_i(u_x + v_y) dA = 0 \quad (7c)$$

where A is the element area. Gauss's theorem is then applied to Eqs. (7a-b) to generate the boundary integral terms associated with the surface tractions. With the use of Eqs. (5a-b), Eqs. (7a-b) become,

$$\int_A [(2\mu u_x - p) N_{\alpha,x} + \mu(u_y + v_x) N_{\alpha,y}] dA = \int_{S_1} N_\alpha T_x dS \quad (8a)$$

$$\int_A [\mu(u_y + v_x) N_{\alpha,x} + (2\mu u_y - p) N_{\alpha,y}] dA = \int_{S_2} N_\alpha T_y dS \quad (8b)$$

Applying the element velocity component distributions and the pressure distribution, Eqs. (6a-c), the finite element equations can be written in the form,

$$(2\mu M_{\alpha\beta^{xx}} + \mu M_{\alpha\beta^{yy}}) u_\beta + \mu M_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda = R_{\alpha^x} \quad (9a)$$

$$\mu M_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + (\mu M_{\alpha\beta^{xx}} + 2\mu M_{\alpha\beta^{yy}}) v_\beta - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda = R_{\alpha^y} \quad (9b)$$

$$H_{\beta\lambda^x} u_\beta + H_{\beta\lambda^y} v_\beta = 0 \quad (9c)$$

where

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \quad (10a)$$

$$M_{\alpha\beta^{yy}} = \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (10b)$$

$$M_{\alpha\beta^{xy}} = \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (10c)$$

$$M_{\alpha\beta^{yx}} = \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} dA \quad (10d)$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda dA \quad (10e)$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda dA \quad (10f)$$

$$R_{\alpha^x} = \int_{S_1} N_\alpha T_x dS \quad (10g)$$

$$R_{\alpha^y} = \int_{S_2} N_\alpha T_y dS \quad (10h)$$

These element matrices can be evaluated in closed form ready for computer programming. Details of the derivation for these element matrices are omitted herein for brevity.

### 2.3 Computational Procedure

The closed form finite element matrices, Eqs. (10a-h), for the six-node triangular element are used in the development of a computer program. The program is written in FORTRAN and can be executed on standard personal computers. For each element, the element equations (9a-c) which consist of 15 equations are established. These element equations are then assembled to form up a system of equations for the problem considered. Appropriate boundary conditions are then applied before solving for the unknowns of the nodal velocity components and pressures. It should be noted that the element equations (9a-c) are linear, thus the system of equations can be solved directly. Both the finite element matrices derived and the computer program developed have been verified by a number of simple examples that have exact solutions such as the one described in the next section prior to applying to solve more complex problems.

### 2.4 Example

To evaluate the finite element computer program developed, the fully-developed flow between parallel plates (Poiseuille flow) as shown in Fig. 1 is used. The inlet velocity profile is in the form of parabolic distribution given by,

$$u(y) = \frac{4y}{h^2} (h-y) \quad (11)$$

The exact velocity profile at any x-location can be derived [10] and written in the form,

$$u(y) = \frac{y}{2\mu} (y-h) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (12)$$

The finite element model with 12 triangles and 35 nodes and the boundary conditions are shown in Fig. 2. With this model, the computer program was used to solve flow field velocity and pressure distributions. Figure 3 shows the predicted flow velocity profiles which are identical along the x-direction of the flow. These predicted velocity profiles are identical to the exact solution, Eq.

(12), as compared in Fig. 4. Figure 5 shows the predicted pressure distributions on the lower and upper plates and on the center line along the flow direction. These predicted pressure distributions agree with the exact solution,

$$p(x) = -\frac{8\mu}{h^2} (x-30) \quad (13)$$

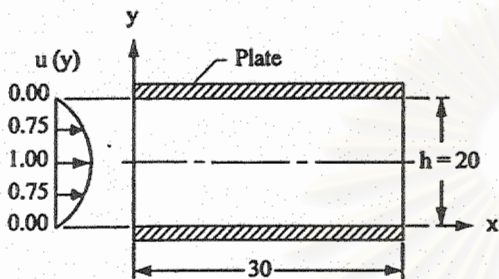


Fig. 1 - Flow between parallel plates.

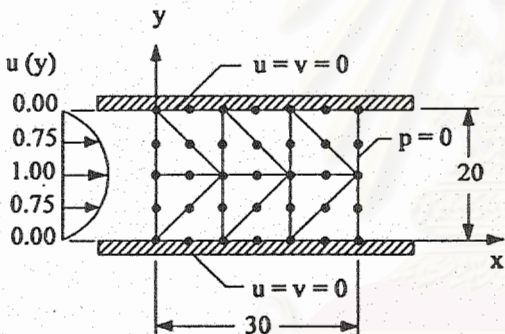


Fig. 2 - Finite element model and boundary conditions for flow between parallel plates.

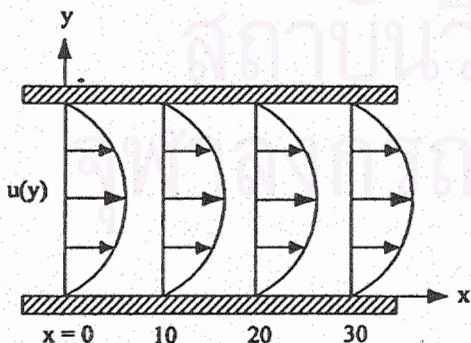


Fig. 3 - Predicted flow velocity profiles

along x-direction of flow between parallel plates.

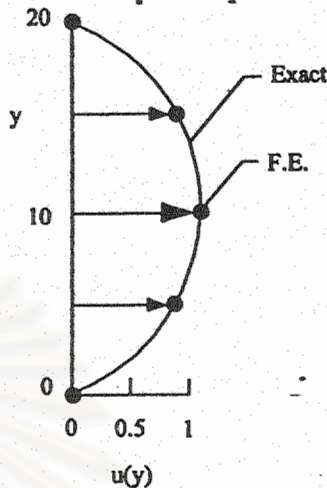


Fig. 4 - Comparative flow velocity profiles between exact and finite element solutions.

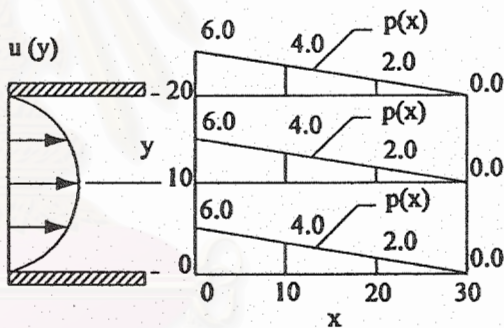


Fig. 5 - Predicted pressure distributions along x-direction.

### 3. Viscous Incompressible Flow With Inertia

#### 3.1 Governing Equations

For more general flow problems, the Navier-Stokes equations, Eqs. (1a-c), must be solved. These equations are inherently nonlinear because of the presence of the inertia terms shown on the right-hand-side of Eqs. (1b-c). These Navier-Stokes equations are rewritten in compact form for clarity in the derivation of finite element equations in the next section,

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad (14a)$$

$$u u_{,x} + v u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} = 0 \quad (14b)$$

$$u v_{,x} + v v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} = 0 \quad (14c)$$

where the stress components are now defined by,

$$\sigma_x = -p/\rho + 2\nu u_{,x} \quad (15a)$$

$$\sigma_y = -p/\rho + 2\nu v_{,y} \quad (15b)$$

$$\tau_{xy} = \nu(u_{,y} + v_{,x}) \quad (15c)$$

and the kinematics viscosity,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (16)$$

The above set of coupled nonlinear partial differential equations, Eqs. (14a-c), are solved simultaneously with the boundary conditions of specified velocity components (Eqs. (4a-b)) or surface tractions (Eqs. (5a-b)) along edges.

### 3.2 Finite Element Formulation

The method of weighted residuals [4] is applied to the differential equations, Eqs. (14a-c), to derive the finite element equations in the same fashion as for the case of flow with negligible inertia. The same six-node triangular element with the velocity component and pressure distributions given by Eqs. (6a-c) is used. The procedure leads to the finite element equations in the nonlinear form as,

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta = Q_{\alpha^x} \quad (17a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta = Q_{\alpha^y} \quad (17b)$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \quad (17c)$$

where the coefficients in element matrices are in form of the integrals over the element area  $A$  and along the edge  $S_2$  as,

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x} dA \quad (18a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} dA \quad (18b)$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda dA \quad (18c)$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda dA \quad (18d)$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = \int_A 2\nu N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + \int_A \nu N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (18e)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \int_A \nu N_{\alpha,y} N_{\beta,x} dA \quad (18f)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = \int_A \nu N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (18g)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \int_A \nu N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + \int_A 2\nu N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (18h)$$

$$Q_{\alpha^x} = \int_{S_1} N_\alpha T_x dS \quad (18i)$$

$$Q_{\alpha^y} = \int_{S_2} N_\alpha T_y dS \quad (18j)$$

These element matrices can be evaluated in closed form and detailed derivation is omitted herein for brevity.

### 3.3 Computational Procedure

The derived finite element equations, Eqs. (17a-c), are nonlinear. These nonlinear algebraic equations are solved using the Newton-Raphson iteration technique [11] by first writing the unbalanced values from a given set of solutions for the finite element Eqs. (17a-c) as,

$$F_{\alpha^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta - Q_{\alpha^x} \quad (19a)$$

$$F_{\alpha^y} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\beta + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta - Q_{\alpha^y} \quad (19b)$$

$$F_\mu = H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \quad (19c)$$

The application of the Newton-Raphson iteration technique leads to a set of algebraic equations with the incremental unknowns in the form,

$$G_{\alpha\beta^x} \Delta u_\beta + L_{\alpha\beta^y} \Delta v_\beta - H_{\alpha\lambda^x} \Delta p_\lambda = F_{\alpha^x} \quad (20a)$$

$$L_{\alpha\beta^x} \Delta u_\beta + G_{\alpha\beta^y} \Delta v_\beta - H_{\alpha\lambda^y} \Delta p_\lambda = F_{\alpha^y} \quad (20b)$$

$$H_{\beta\mu^x} \Delta u_\beta + H_{\beta\mu^y} \Delta v_\beta = F_\mu \quad (20c)$$

where

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \quad (21a)$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \quad (21b)$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \quad (21c)$$



$$L_{\alpha\beta}y = K_{\alpha\beta\gamma}y u_{\gamma} + S_{\alpha\beta\gamma}x \quad (21d)$$

In these Eqs. (21a-d),  $u_{\gamma}$  and  $v_{\gamma}$  are the values of the velocity components at the  $i^{\text{th}}$  iteration. The iteration process is terminated if the percentage of the overall error is less than the specified value.

The final form of the finite element equations, Eqs. (20-21), and the iteration procedure described are used in the development of the second finite element computer program. The program is also written in FORTRAN and can be executed on standard personal computers. The main objective in the development of this computer program is such that it follows the formulation derived, easy to understand, and will be used together with the adaptive meshing technique later. Both the formulation derived and the computer program developed have been verified by several examples that have exact solution and/or experimental results before applying to solve more complex flow problems. Selected examples and an application are presented in the next section.

### 3.4 Examples and Application

The first example selected for evaluating the finite element computer program for viscous incompressible flow with inertia is the Couette flow problem. The problem geometry and the boundary conditions are shown in Fig. 6. The top plate moves to the right with the velocity of  $u=1$  while the bottom plate moves to the left with the velocity of  $u=-0.5$ . The finite element model consisting of 18 elements and 49 nodes is also shown in the figure. The exact  $u$ -velocity distribution for the entire flow field can be derived [10] and is given by,

$$u(y) = 1.5y - 0.5 \quad (22)$$

The problem was analyzed by the computer program developed and the predicted flow velocity profiles which are identical at any  $x$ -location along the flow direction as shown in Fig. 7. These predicted velocity profiles are compared and found to be identical to the exact solution, Eq. (22), as shown in Fig. 8.

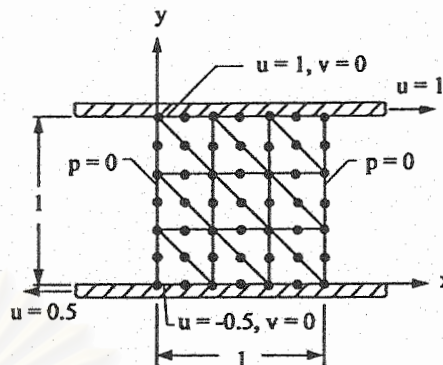


Fig. 6 - Finite element model and boundary conditions for Couette flow.

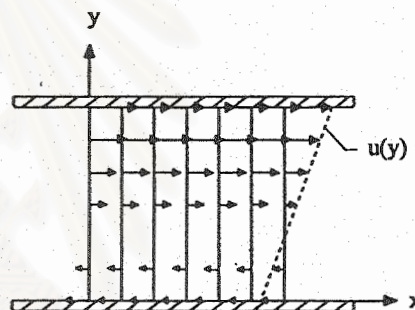


Fig. 7 - Predicted flow velocity profiles along  $x$ -direction for Couette flow.

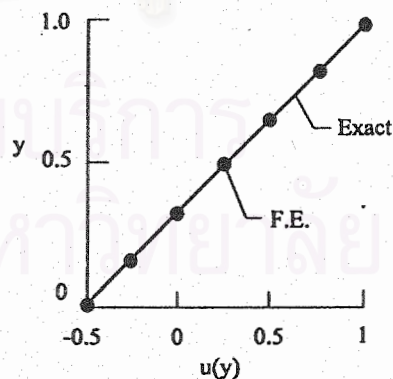


Fig. 8 - Comparative flow velocity profile between exact and finite element solutions.

To demonstrate the capability of the computer program for solving flow behavior of a more complex problem, a flow through a duct is simulated shown in Fig. 9. The duct is in the main electricity generating plant of the Electricity Generating Authority located at the northern section of Bangkok, Thailand. As shown in the figure, the duct has uncommon shape with varying cross-sectional area. Flow circulation that causes erosion is suspected at the upper left corner of the duct. Figure 9 also shows the finite element model with 233 triangles and 516 nodes. The flow velocity profile at the top inlet of the duct is assumed in the form of parabola with the Reynolds number of 100.

With the problem statement and the finite element model shown in Fig. 9, the finite element computer program was used to predict the flow behavior. The result of the flow field is shown by the velocity vectors in Fig. 10. The velocity vectors indicate the area of flow circulation as previously suspected. Details of the flow circulation behavior in this area is enlarged and shown in Fig. 11.

To avoid the flow circulation, two guided plates are placed at the top section of the duct to control the flow behavior as shown in Fig. 12. The figure also shows the finite element model that consists of 388 triangles and 869 nodes. The analysis was repeated and the predicted flow velocity vectors are shown in Fig. 13. The figure indicates the disappearance of the flow circulation. Figure 14 also highlights the detail of the flow behavior near the plate exits. The predicted flow solutions demonstrate the capability of the finite element formulation and the computer program developed that can help engineers to increase understanding of the flow behavior in order to solve the problem or to improve the design.

#### 4. Concluding Remarks

A finite element method for analysis of viscous incompressible flow problems is presented. The Navier-Stokes equations consisting of the conservation of mass and momentums are solved. The flow is classified into two types, i.e., the flow with negligible

inertia for slow moving fluid, and with inertia for a more general flow. For both types, the finite element equations were derived and the corresponding computer programs have been developed. These computer programs will be used together with the adaptive meshing technique in the future to improve the flow solution accuracy as well as to reduce the computational time and memory.

In the case of flow with negligible inertia for slow moving fluid, the finite element equations are linear and a direct solution technique can be used to solve nodal unknowns. For a more general flow, the inertia terms are included in the Navier-Stokes equations resulting in nonlinear differential equations. The derived finite element equations are thus nonlinear requiring an iterative technique solver. The Newton-Raphson iteration method is applied to solve the nodal unknowns.

Both the finite element formulations and the corresponding computer programs developed have been evaluated by several example problems that have exact solutions and/or experimental data before applying to solve more complex flow problems. Two selected examples that have exact solutions and an application of complex flow behavior through an uncommon shape of duct with varying cross-sectional area are presented in this paper. These example problems demonstrate the capability of the finite element formulations and the computer programs that can provide insight to the complex flow behaviors in order to help solving problems as well as improving the design.

#### 5. Acknowledgement

The author is pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) and the National Research Council of Thailand (NRCT), Bangkok, Thailand, for supporting this research work.

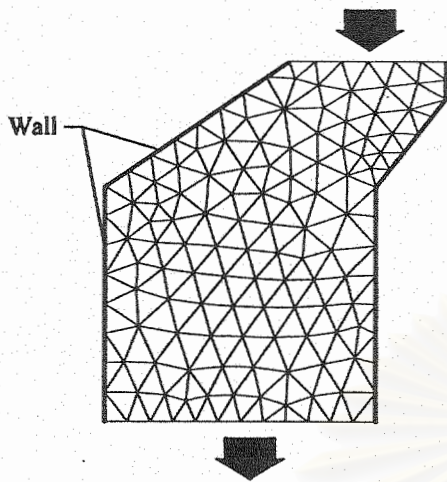


Fig. 9 - Finite element model with 233 triangles and 516 nodes for flow through a duct.

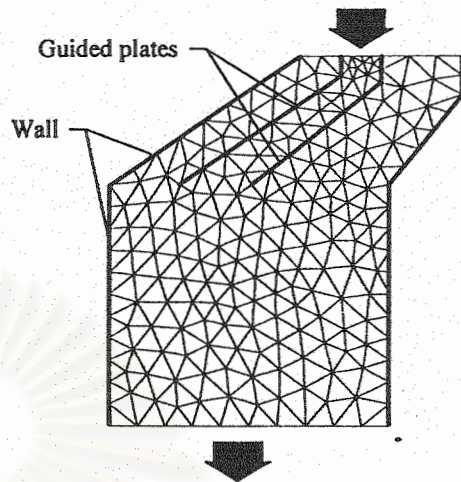


Fig. 12 - Finite element model using 388 triangles and 869 nodes for flow through duct with guided plates.

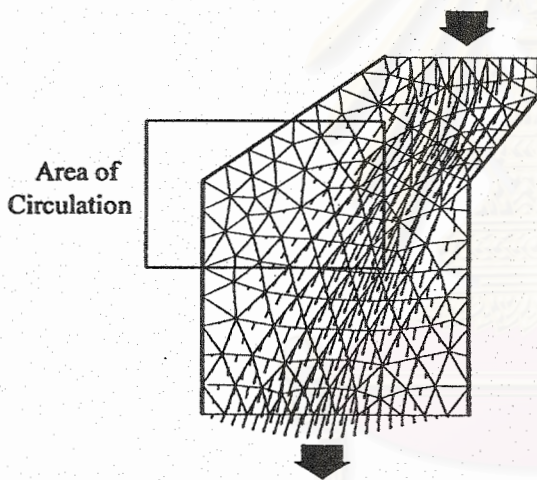


Fig. 10 - Predicted flow behavior by velocity vectors with area of circulation.

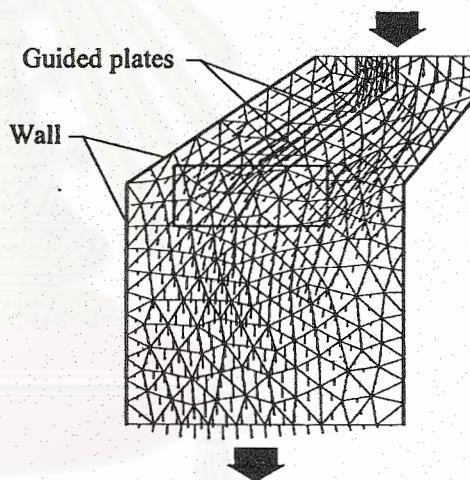


Fig. 13 - Predicted flow velocity vectors in duct with guided plates.

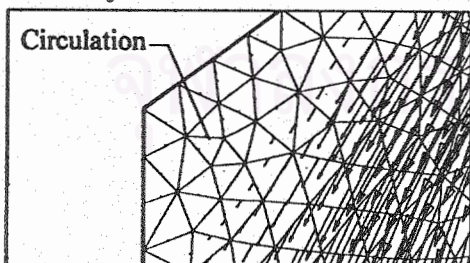


Fig. 11 - Detail of flow circulation in the area highlighted in Fig. 10.

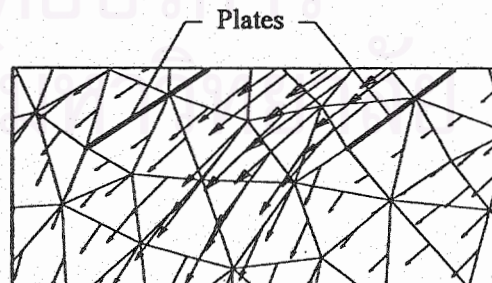


Fig. 14 - Detail of flow behavior in the area highlighted in Fig. 13.

## 6. Nomenclatures

A	Element area
F	Unbalanced value
H	Pressure interpolation function
K	Element matrix
$\ell, m$	Direction cosines
M	Element matrix
N	Velocity interpolation function
p	Pressure
Q, R	Element traction vectors
S	Surface
T	Tractions
u, v	Velocity components
x, y	Coordinates
$\nu$	Kinematic viscosity
$\mu$	Dynamic viscosity
$\rho$	Density
$\sigma$	Normal stress
$\tau$	Shearing stress

## 7. References

- [1] Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E. (1989), Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3 ed., Wiley & Sons, New York.
- [2] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1991), The Finite Element Method, 4 ed., McGraw-Hill International.
- [3] Lewis, R.W. Morgan, K. Thomas, H.R. and Seetharamu, K.N. (1996), The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis, John Wiley & Sons, New York.
- [4] Dechaumphai, P. (1994), Finite Element Method in Engineering, Chulalongkorn University Press, Bangkok.
- [5] Jin, J. (1993), The Finite Element Method in Electromagnetics, John Wiley & Sons, New York.
- [6] Gallagher, R.H. Simon, B.R. Johnson, P.C. and Gross, J.F. (1982), Finite Elements in Biomechanics, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Peraire, J., Vahidati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C. (1987), Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computation, Comp. Phys., Vol. 72 pp. 449-466.
- [8] Dechaumphai, P. (1995), Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems, Energy, Heat & Mass Transfer, Vol. 17 pp.87-94.
- [9] Yamada, Y., Ito, K., Yokouchi, Y., Yamano, T. and Ohtsubo, T. (1975), Finite Element Analysis of Steady Fluid and Metal Flow. Finite Element in Fluid, Edited by Gallagher, R.H., et, al., John Wiley and Sons, New York.
- [10] White, F.M. (1991), Viscous Fluid Flow, 2 ed., McGraw-Hill, New York.
- [11] Dechaumphai, P. (1995), Numerical Methods in Engineering, Chulalongkorn University Press, Bangkok.

บทความทางวิชาการ เรื่อง

*Transient Finite Element Thermal Analysis  
Using Adaptive Mesh Movement*

ได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการ

**Journal of Energy, Heat and Mass Transfer**

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Volume 19, 1997

## Transient Finite Element Thermal Analysis Using Adaptive Mesh Movement

PRAMOTE DECHAUMPHAI

Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand

### Abstract

*An adaptive mesh movement technique is combined with the finite element method to solve for solutions of transient heat transfer problems. The adaptive mesh movement technique and the finite element method are described. The effectiveness of the combined techniques that are implemented in a single computer program is evaluated by an example of a plate subjected to a moving heat source. The example demonstrates that the adaptive mesh movement technique significantly reduces the number of finite elements required for the problem and, at the same time, increases the analysis solution accuracy as compared to the results produced using uniform finite element meshes.*

### Introduction

An adaptive meshing technique [1] has been shown to improve the efficiency and accuracy of the steady-state high-speed flow analysis by the finite element method [2]. The technique has been extended and applied successfully to steady-state thermal and structural analyses of the structure [3]. The technique generates a new mesh based on the solution obtained from an earlier mesh. The new mesh consists of small elements in the regions with large changes in solution gradients and large elements in the regions where the gradient changes are small. For time-dependent thermal problems, especially where the thermal loads (such as the heat source) have magnitudes which vary with time and move along the body of the structure, the mesh employed must adapt itself both in time and space (mesh movement) to accurately capture the transient temperature response. This paper extends the adaptive meshing technique to deal with transient thermal problems and demonstrates its effectiveness in accurately predicting the transient temperature response in the structure. The equations for heat conduction in the structure and a finite element solution algorithm are briefly described. The basic concepts of the transient adaptive meshing technique and its incorporation in the solution process is explained. The effectiveness of the adaptive meshing technique is demonstrated by the transient thermal analysis of a plate subjected to a moving heat source.

### Thermal Analysis Procedure

The thermal response of the structure in two dimensions is governed by the energy equation that can be written in the conservation form as

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = H \quad (1)$$

where the conservation variable  $U$  and the heat flux components  $E$  and  $F$  are

$$U = \rho c T \quad (2a)$$

$$E = q_x = -k \partial T / \partial x \quad (2b)$$

$$F = q_y = -k \partial T / \partial y \quad (2c)$$

and  $H$  is the heat source. The heat flux components  $q_x$  and  $q_y$  are related to the temperature gradients by Fourier's law.

An explicit time-marching finite-element scheme, the Taylor-Galerkin algorithm described in [4], is used to solve the heat transfer equation (1). The basic concept of the Taylor-Galerkin algorithm is to use: 1) Taylor-series expansion in time to establish recurrence relations for time marching, and 2) the method of weighted residuals with Galerkin's criterion for spatial discretization. The key feature of the algorithm is to assume the distribution of the

element heat fluxes  $E$  and  $F$  in the same form as the element temperature distribution  $T$ , that is

$$\begin{aligned} T(x,y,t) &= [N(x,y)] \{T(t)\} \\ E(x,y,t) &= [N(x,y)] \{E(t)\} \\ F(x,y,t) &= [N(x,y)] \{F(t)\} \end{aligned} \quad (3)$$

where  $[N(x,y)]$  are the element interpolation fractions, and  $\{T(t)\}$ ,  $\{E(t)\}$  and  $\{F(t)\}$  are the vectors of the element nodal quantities. The assumption of a linear distribution of element fluxes  $E$  and  $F$ , which are interpolated in the same form as the dependent variables (i.e.  $T$ , as shown in Eq. (3)), is widely used in the computational fluid dynamics [4].

The finite element equations are derived from (1) by using the Taylor-series expansion to establish recurrence relations for time marching and the method of weighted residuals with Galerkin's criterion for spatial discretization. In the application of the method of weighted residuals, the governing differential equation, (1) is multiplied by the weighting function,  $[N(x,y)]$ , and integrated over the element area  $A$ . Integration by parts is performed to produce element integral terms and the boundary surface integral terms for application of different types of thermal boundary conditions. Details of the derivation follows the conventional finite element approach are described in [5]. The finite element equations obtained are in the form

$$[M] \{\Delta U\}^{n+1} = \Delta t \left( [D_x] \{E\}^n + [D_y] \{F\}^n + \{R\}^n + \{B\}^n \right) \quad (4)$$

where  $[M]$  is the mass matrix defined by,

$$[M] = \int_A [N] [N] dA \quad (5)$$

and  $\Delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n$ . On the right hand side of Eq. (4),  $\Delta t$  denotes the time step, and the matrices  $[D_x]$  and  $[D_y]$  are,

$$[D_x] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [N] dA \quad (6a)$$

$$[D_y] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} [N] dA \quad (6b)$$

The element nodal vector  $\{R\}$  associated with the heat source  $H$  is defined as,

$$\{R\} = \int_A \{N\} H dA \quad (7)$$

The vector  $\{B\}$  representing the boundary nodal vector is defined as,

$$\begin{aligned} \{B\} &= \int_s \{N\} [N] ds (1\{E\} + m\{F\}) \\ &= \int_s \{N\} [N] ds \{q\} \end{aligned} \quad (8)$$

where  $I$  and  $m$  are the components of a unit vector normal to the element boundary. The vector  $\{q\}$  appearing in this equation may be replaced by different types of boundary conditions,

$$q = \begin{cases} 0 & \text{(insulated)} \\ q_s & \text{(specified heating)} \\ h(T_s - T_r) & \text{(surface convection)} \\ \epsilon \sigma (T_s^4 - T_\infty^4) & \text{(surface radiation)} \end{cases} \quad (9)$$

The finite element matrices shown in Eqs. (5-8) can be evaluated in closed form (i.e. numerical integration is not required). For example, the element interpolation function matrix for the three-node triangular element is,

$$[N] = [N_1(x,y) \ N_2(x,y) \ N_3(x,y)] \quad (10)$$

where  $N_i(x,y)$ ,  $i=1,2,3$ , are the element interpolation functions given by,

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (11)$$

Where  $A$  is the element area, and the coefficients,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  are functions of the element nodal coordinates given in detail in [5]. With these element interpolation functions, the finite element matrix  $[D_x]$ , as an example, is

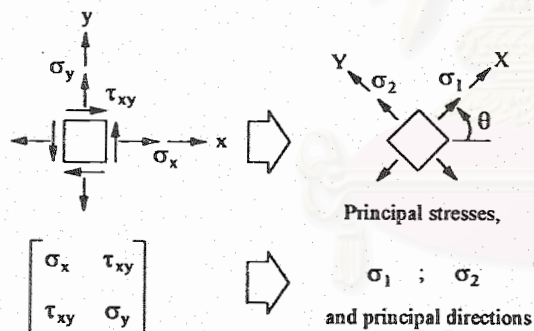
$$[D_x] = \frac{1}{12A} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Other finite element matrices shown in Eqs. (5-8) can be evaluated in the same manner. In addition, if the mass matrix in Eq. (5) is lumped, the finite element equations (Eq. (4)) can be solved explicitly, thus avoiding the solution of a set of simultaneous equations.

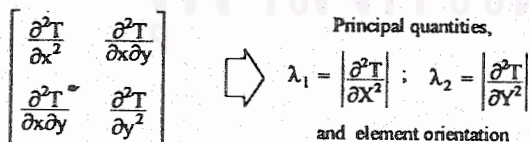
Adaptive Mesh Movement Technique

The basic idea of adaptive meshing is to construct a completely new mesh based on the solution obtained from a previous mesh. The new mesh will have small elements in regions with large changes in solution gradients and large elements in the regions where the gradient changes are small. Element sides are aligned with principal directions of a solution variable (such as the temperature) to provide the most accurate solution with a minimum number of elements. As an example, the shorter element side will be in the direction of the largest change in the temperature gradients. At a typical node in the old mesh, the second derivative of the temperature, gradient to capture the detailed temperature distribution.

To determine the element sizes and their orientations, the solid mechanics concept of determining principal stresses and their directions from a given state of stress is employed as illustrated in Fig.1(a). The same idea is applied for adaptive meshing as shown in Fig.1 (b). Small and clustered elements are needed in regions of large change in the temperature gradients. At a typical node in the old mesh, the second derivatives of the temperature,  $T$ ,



(a) Determination of principal stresses and their directions from a given state of stress



(b) Determination of meshing indicators and element orientation  
 Fig. 1: Analogy between the concept of principal stress in solid mechanics and the determination of meshing indicators for adaptive finite elements

with respect to the global coordinates  $x$  and  $y$  are first computed,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

The determination of these second derivatives is as follows. The first derivative (e.g. with respect to  $x$ ) is assumed to vary over an element in the form,

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = [N(x,y)] \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \tag{14}$$

where the vector on the right hand side contains the unknown nodal values of the first derivative. These unknown nodal values are obtained by solving,

$$[M] \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \tag{15}$$

where  $\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}$  is the computed constant element gradient. The process is repeated to determine the second derivative  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ . Determination of the other second derivatives which appear in Eq. (13) are performed in the same fashion.

Once these second derivatives are computed, the eigenvalues ( $\lambda$ ), which represent the principal quantities in the principal directions  $X$  and  $Y$  (Fig. 1 (b)) where the cross derivatives vanish, are determined,

$$\lambda_1 = \left| \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right| \quad \text{and} \quad \lambda_2 = \left| \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right| \tag{16}$$

The eigenvalues are the meshing indicators and are used to determine the new element spacings  $h_1$  and  $h_2$  in the two principal directions using the condition that

$$h_1^2 \lambda_1 = h_2^2 \lambda_2 = \text{constant} \tag{17}$$

This condition results from distributing the finite element interpolation error equally, a requirement for an optimal mesh. The eigenvalues are calculated for all the nodes in the old mesh leading to the final condition of



$$h_1^2 \lambda_1 = h_2^2 \lambda_2 = \text{constant} = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (18)$$

where  $\lambda_{\max}$  is the maximum eigenvalue in the model. Using this condition and specifying the required minimum element spacing  $h_{\min}$ , the new element spacings based on the solution of the old mesh are obtained. These new element spacings provide a new finite element mesh with small elements in the regions where accurate solutions are needed, as well as large elements in other regions to reduce the problem size and computational time.

The technique has been applied successfully for constructing adaptive meshes for the steady-state analysis of fluid, thermal, and structural problems [3]. In the present study of transient problems, small elements are usually needed in regions near the applied loads. As the loads move, these refined regions follow the loads so that the details of the transient solution can be captured. The adaptive meshing is performed at a specified multiple of the analysis time step to reduce the computational time. The adaptive meshing and the finite element solution procedures are merged into a single computer program to maximize the overall computational efficiency. The capability of these combined techniques for transient heat transfer problems is demonstrated by the following example.

**Example**

To demonstrate the capability of the adaptive meshing technique in reducing the numbers of finite elements, the analysis computational time, and the solution error for time-dependent problems, the transient thermal analysis of a long plate subjected to a moving heat source along an edge is considered. A steel plate with dimensions of 1.00 x .02 m, in Fig.2, is subjected to an intense moving heat source along the top edge. The heat source of 420 W/cm<sup>2</sup> is simulated as a square pulse of 0.01-m- wide that moves at a speed of 0.01 m/sec. With the boundary condition of 0°C along the other three edges as

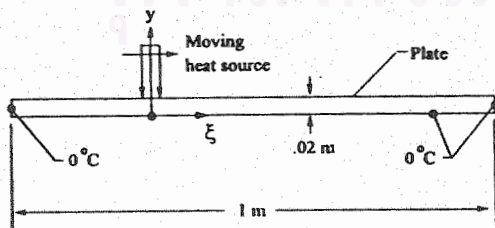


Fig. 2: Thermal analysis model of a plate subjected to a moving heat source

indicated in the figure, the exact plate temperature response can be derived [6] in form of infinite series as,

$$T(\xi, y) = \frac{4qHe^{-H\xi}}{kL} \left\{ \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[ \sin\left(\frac{\alpha\xi}{w}\right) \frac{\sinh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n h)} \right] \right. \\ \left. \left[ \sin \alpha \cosh(Hw) - \frac{\alpha}{w} \cos \alpha \sinh(Hw) \right] \right. \\ \left. + \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[ \sin\left(\frac{\alpha\xi}{w}\right) \frac{\sinh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n h)} \right] \right. \\ \left. \left[ \cos \alpha \sinh(Hw) + \frac{\alpha}{w} \sin \alpha \cosh(Hw) \right] \right\} \quad (19)$$

where the origin and the directions of the  $\xi - y$  coordinate system are shown in Fig.2,  $q$  is the moving heat source,  $h$  is plate width, and  $H$  is the parameter defined by,

$$H = \frac{\rho cv}{2k} \quad (20)$$

where  $\rho$  is the plate density,  $c$  is the specific heat,  $v$  is the velocity of the moving heat source, and  $k$  is the plate thermal conductivity. The parameters  $\alpha$  and  $\lambda_n$  in Eq. (19) are defined by

$$\alpha = \frac{n\pi w}{2L} \quad \text{and} \quad \lambda_n = \frac{\sqrt{n^2\pi^2}}{L^2} + H^2 \quad (21)$$

where  $L$  is the plate length, and  $w$  is the width of the moving heat source that is simulated by a square pulse.

A nonadaptive mesh consisting of 1200 elements and 707 nodes, shown in Fig. 3, is first used to predict the transient thermal response as the heat source moves across the model. The mesh represents a typical finite element model that would normally be used to analyze such heat transfer problem. An explicit time marching scheme (Eq. (4) with lumped mass matrix) is employed for marching the analysis in time by using the maximum allowable time step (the allowable time step [5] is constrained by a stability criterion from the minimum element length in the model). To complete the analysis, a total of 50,000 time steps is needed which requires approximately 1,200 CPU seconds on a typical minicomputer workstation. The predicted transient response at four different times and a detail of the temperature contours at a typical time are also shown

FINITE ELEMENT THERMAL ANALYSIS

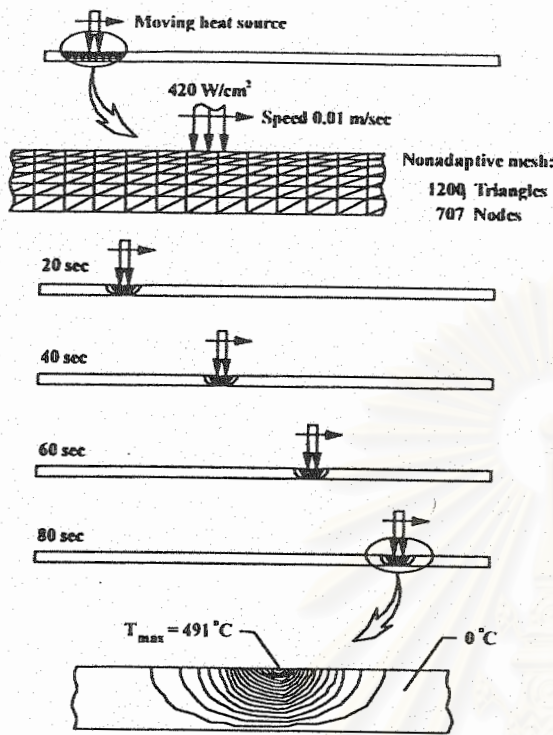


Fig. 3: Nonadaptive finite element mesh and transient temperature response as the heat source moves across the plate

in Fig.3. The figure shows high temperatures and temperature gradients at the heat source impingement location with a predicted peak temperature of 491°C. The exact solution (Eq. (19)) for the peak temperature is 580°C. Thus the error in the peak temperature predicted by using this nonadaptive mesh is about 15%.

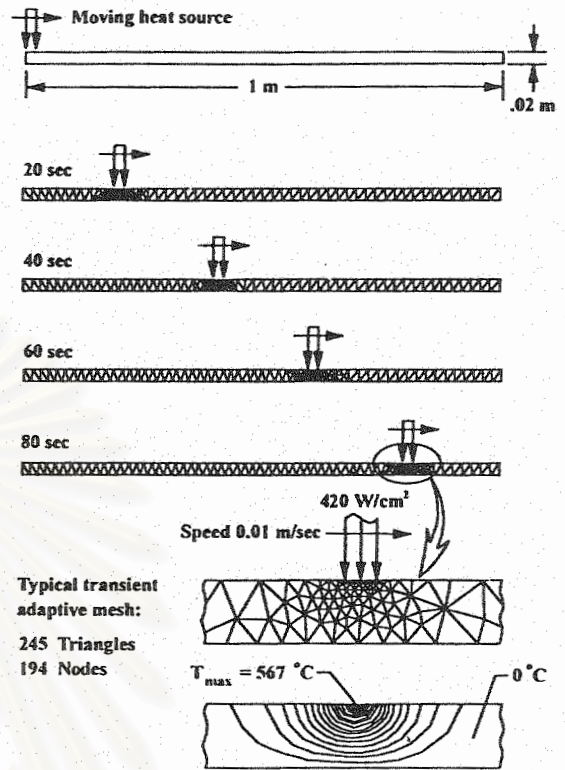


Fig. 4: Transient adaptive finite element meshes and temperature response as the heat source moves across the plate

The same transient thermal analysis is repeated but with adaptive meshes. As the heat source moves along the top edge of the plate, the mesh adapts with refined elements to capture the steep temperature gradients near the heat source impingement locations as shown in Fig.4. The mesh is derefined with larger elements away from the heat source

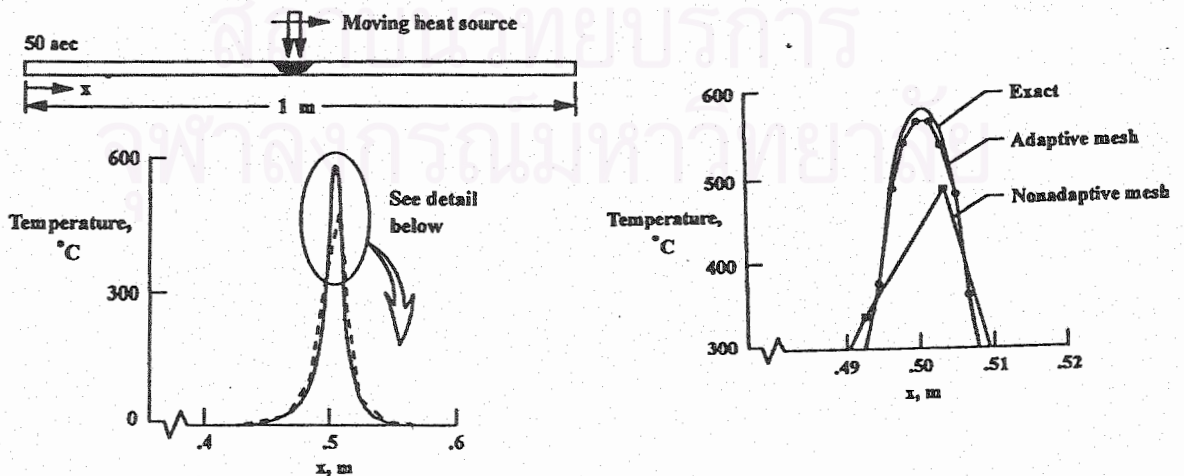


Fig. 5: Comparison of the exact temperature solution and the predicted temperatures from the adaptive and nonadaptive meshes

## PRAMOTE DECHAUMPHAI

because the temperature gradients diminish. In the process, the remeshing is performed at every 500 analysis time steps (i.e. after the heat source has traveled about half of its width). The total CPU time on the same minicomputer workstation for both the remeshing and the analysis solution is 900 seconds (55% of this CPU time is used in the remeshing process). This total CPU time represents a 25% reduction from that required by the nonadaptive mesh. Less computational time is required because fewer number of unknowns (25% relative to the nonadaptive mesh. Less computational time is required because fewer number of unknowns (25% relative to the nonadaptive mesh) are employed. Furthermore, because the adaptive mesh is refined near the heat source impingement location, a more accurate peak temperature of 567°C is obtained which is only about 2% from the exact solution. The exact and the predicted temperature distributions along the top surface are shown in Fig.5(a). A scale enlargement that provides a better comparison of these temperature distributions at the heat source impingement location is shown in Fig.5(b). This latter figure demonstrates that the adaptive mesh provides improved temperature solution accuracy for both the magnitude and the distribution compared to the standard nonadaptive mesh.

### Conclusions

An adaptive mesh movement technique for transient thermal analysis was presented. The technique generates small elements in the regions with large change in temperature gradients to provide accurate temperature distribution, and large elements in other regions where the gradient changes are small to reduce the numbers of finite elements and the computational time. The capability of the technique combining with the finite solution method was demonstrated by an example of a plate subjected to a moving heat source. The example showed that the transient adaptive meshes significantly increased the analysis solution accuracy using fewer elements and required less computational time compared to a standard nonadaptive mesh.

### Nomenclature

A	=	element area
{B}	=	boundary nodal vector, Eq.(8)
c	=	specific heat
[D <sub>x</sub> ],[D <sub>y</sub> ]	=	element matrices, Eq.(6)
E,F	=	x and y heat flux components
H	=	heat source
h	=	convection coefficient
h <sub>1</sub> , h <sub>2</sub>	=	element spacings

k	=	thermal conductivity
L	=	plate length, Eq.(21)
l <sub>m</sub>	=	direction cosines
[M]	=	mass matrix
[N]	=	element interpolation function matrix
q	=	moving heat source, Eq.(19)
{q}	=	element heat load vector
q <sub>x</sub> , q <sub>y</sub>	=	x and y heat flux components
q <sub>s</sub>	=	specified surface heating
{R}	=	element nodal vector, Eq.(7)
t	=	time
T	=	temperature
T <sub>s</sub>	=	surface temperature
T <sub>r</sub>	=	surrounding medium temperature for convection
T <sub>∞</sub>	=	surrounding medium temperature for radiation
U	=	Conservation variable
v	=	velocity
w	=	heat source width, Eq.(21)
x,y	=	coordinate directions
X,Y	=	principal directions
ε	=	emissivity
λ <sub>1</sub> , λ <sub>2</sub>	=	strain components
ρ	=	density
sigma	=	Stefan-Boltzmann constant
σ <sub>x</sub> , σ <sub>y</sub> , τ <sub>xy</sub>	=	stress components
σ <sub>1</sub> , σ <sub>2</sub>	=	principal stresses
ξ	=	local coordinate

### References

1. Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C., Adaptive remeshing for compressible flow computations, *Journal of Computational Physics*, 72, 449-466 (1987).
2. Dechaumphai, P., and Wieting, A.R., Coupled fluid-thermal structural analysis for aerodynamically heated structures, *Finite Element Analysis in Fluids*, Edited by Chung, T.J. and Karr, G.R., The University of Alabama in Huntsville Press 1965-1971 (1989).
3. Dechaumphai, P., Evaluation of an adaptive unstructured remeshing technique for integrated fluid-thermal structural analysis, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 5, 599-606 (1991).
4. Dechaumphai, P., Thornton, E.A., and Wieting, A.R., Flow-thermal- structural study of aerodynamically heated leading edges, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 26, 201-209 (1989).
5. Dechaumphai, P., *Finite element method in engineering*, Chulalongkorn University Press, Bangkok 140-152 (1994).
6. McGowan, D.M., Camarda, C.J., and Scotti, S.J., A simplified method for thermal analysis of a cowl leading edge subject to intense localized heating NASA TP-16505 1990.

บทความทางวิชาการ เรื่อง

*Adaptive Finite Element Technique  
for High-Speed Compressible Flows*

ได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางวิชาการ

**Thammasat International Journal  
of Science and Technology**

Volume 3, Number 1, 1998

# Adaptive Finite Element Technique for high-speed Compressible flows

P. Dechaumphai, P. Janphaisaeng

Chulalongkorn University  
Bangkok 10330, Thailand

## Abstract

An upwind cell-centered finite element formulation is combined with an adaptive meshing technique for solving high-speed compressible flow problems. The finite element formulation and its computational procedure are described. A corresponding computer program that can be executed on standard personal computers has been developed. An adaptive meshing technique is applied to increase the analysis solution accuracy, and at the same time, to minimize the computer time and memory. The efficiency of the combined method is evaluated by examples of high-speed compressible flows past a wedge and a cylinder.

## 1. Introduction

High-speed compressible flows past a typical geometry normally include complex flow characters, such as shock waves, flow expansions, thin boundary layers, shock-shock interactions, and shock-boundary layer interactions [1,2]. In addition, resolution of these flow characters is required to accurately predict aerodynamic pressure and skin friction distributions as well as aerodynamic heating rates on the geometry surfaces. These quantities are important and critical for the design of high-speed structural configurations. Most of these flow features are characterized by steep gradients that need robust analysis computational techniques with dense mesh refinement for high flow-behavior resolution. These requirements mean that the high-speed compressible flow analysis always involves large-scale computations with vast amounts of computer time and data storage.

The analysis computational techniques that have been developed and used in the past few decades are based on the finite difference method [3]. During the past decade, several finite element algorithms have been under development to alleviate the difficulty of the analysis computation due to complex geometry of the flow field. The algorithms include the

Taylor-Galerkin algorithm [4], the Petrov-Galerkin algorithm [5], the least-squares algorithm [6], and the upwind cell-centered algorithm [7].

In this paper, the upwind cell-centered algorithm is combined with the adaptive meshing technique [8,9] to improve the finite element analysis solution accuracy and reduce the computational time as well as the required computer memory. The upwind cell-centered algorithm is selected because of its robustness in capturing shock with less formulation complexity compared to other algorithms. The adaptive meshing technique is applied to place small elements in the region of large change in the solution gradients to increase solution accuracy and, at the same time, to place larger elements in the other regions to reduce the computational time and memory. The paper starts by explaining the theoretical formulation for high-speed compressible flow analysis and the solution procedure that leads to the development of a computer program. The basic idea behind the adaptive meshing technique is then described. Finally, the combined technique is evaluated by analyzing the problems of high-speed compressible flow past a wedge and a cylinder. Results are compared with those

obtained from the conventional technique that uses nonadaptive meshes.

## 2. Theoretical Formulation and Solution Procedure

### 2.1 Governing Differential Equations

The equations for high-speed inviscid laminar compressible flow are governed by the conservation for mass, momentum, and energy. These equations in two dimensions are written in the conservation form [10] as,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{U\} + \frac{\partial}{\partial x}\{E\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F\} = 0 \quad (1)$$

The vector  $\{U\}$  contains the conservation variables defined by,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (2)$$

where  $\rho$  is the fluid density,  $u$  and  $v$  are the velocity components, and  $\varepsilon$  is the total energy. The vectors  $\{E\}$  and  $\{F\}$  consist of the inviscid fluxes in the  $x$  and  $y$  directions, respectively. These inviscid flux vectors are given by,

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u \varepsilon + pu \end{Bmatrix}; \{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \varepsilon + pv \end{Bmatrix} \quad (3)$$

where  $p$  is the pressure. The total energy consists of the internal energy and the kinetic energy defined by,

$$\varepsilon = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (4)$$

where  $e$  is the internal energy that can be written in the form,

$$e = c_v T \quad (5)$$

where  $c_v$  is the specific heat at constant volume, and  $T$  is the temperature.

### 2.2 Analysis Solution Algorithm

The explicit upwind cell-centered finite element algorithm is applied to solve the Euler Eqs. (1-3). The basic concept behind the algorithm is to determine the flux across element interfaces using Roe's averaging procedure [7]. The average inviscid flux  $\bar{G}$  (The "overbar" denotes average quantity normal to the element interface between the left element L and the right element R) is given by,

$$\bar{G} = \frac{1}{2} [G_L + G_R + |A^*|(U_L - U_R)] \quad (6)$$

The last term in Eq. (6) may be viewed as artificial diffusion needed for solution stability. This diffusion is represented by the product of the Jacobian matrix  $[A^*]$  and the difference between the left and right element conservation variables  $U_L$  and  $U_R$ . The Jacobian matrix  $[A^*]$  is defined by,

$$[A^*] = [R]^{-1} [[\Lambda]] [R] \quad (7)$$

where

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{u}{c^2} & -m & \frac{u+c}{2c^2} & \frac{u-c}{2c^2} \\ -\frac{v}{c^2} & \ell & \frac{v+c}{2c^2} & \frac{v-c}{2c^2} \\ -\frac{\alpha}{c^2} & v & \frac{\alpha+Uc}{2c^2} + \frac{1}{2\beta} & \frac{\alpha-Uc}{2c^2} + \frac{1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[[\Lambda]] = \begin{bmatrix} |U| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |U| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |U+c| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |U-c| \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha\beta - c^2 & -\beta u & -\beta v & \beta \\ -v & -m & \ell & 0 \\ \alpha\beta - Uc & c_x - \beta u & c_y - \beta v & \beta \\ \alpha\beta + Uc & -c_x - \beta u & -c_y - \beta v & \beta \end{bmatrix} \quad (10)$$

In these matrices,

$$\begin{aligned} U &= ul + vm & ; & \quad V = -um + vl \\ c_x &= c\ell & ; & \quad c_y = cm & ; & \quad c^2 = \gamma p/\rho \\ \alpha &= (u^2 + v^2)/2 & ; & \quad \beta = \gamma - 1 \end{aligned}$$

where  $\ell$  and  $m$  are the direction cosines of the unit vector normal to that side, and  $\gamma$  is the specific heat ratio.

Increments of the conservation variables,  $\Delta U = U^{n+1} - U^n$ , where  $n$  is the  $n^{\text{th}}$  time step, are determined from,

$$\left[ [I] + \frac{\Delta t}{A} \sum [A^*] \frac{S}{2} \right] \{\Delta U\} = -\frac{\Delta t}{A} \sum S \{\bar{G}\} \quad (11)$$

where  $[I]$  is the identity matrix,  $\Delta t$  is the time step,  $A$  is the element area,  $S$  is the length of element side where summation is performed for all sides.

### 2.3 Computational Procedure and Computer Program

The element Eq. (11) consists of four equations for solutions of the conservation variables. These equations are solved iteratively for each element by the Gauss-Seidel technique [11]. Thus the algorithm requires relatively low computer memory even for a finite element model with a large number of elements. This Eq. (11) is used in the development of a computer program for analysis of high-speed inviscid compressible flows. The program is written in FORTRAN and has been developed for running on standard personal computers. The program employs explicit time integration technique by requiring initial conditions of the conservation variables for the entire flow field at the beginning of the computation. With proper time steps, converged solution is obtained when the change of the conservation variables for all elements is less than the specified tolerance or the specified total number of time steps. This program is used together with the adaptive meshing technique which is described in the next section. The efficiency of the combined procedure is evaluated by the analysis of high-speed compressible flows past a wedge and a cylinder which are presented in the example section.

### 3. Adaptive Meshing Technique

Adaptive mesh-generation techniques may be classified into two major categories: 1) refinement/derefinement, and 2) remeshing. The first category, the adaptive refinement/derefinement technique, can be further classified into three subcategories: a) the  $h$  method, b) the  $p$  method, and c) the  $r$  method. In the  $h$  method, the elements in the initial mesh are refined into smaller elements or derefined into larger elements [12]. The  $p$  method maintains the geometry of the elements of the initial mesh but increases (or decreases) the order of the polynomials used for the element interpolation functions [13]. The  $r$  method keeps the number of elements and their connectivities the same but relocates the nodes [14].

The remeshing technique, the second adaptive mesh-generation category, generates an entirely new mesh based on the solution obtained from an earlier mesh [8,9]. The technique is combined with the upwind cell-centered finite element formulation in this paper to solve high-speed compressible flow problems. The idea is to construct a new mesh that consists of small elements in the regions with large change in solution gradients and large elements in the other regions where the change in solution gradients is small. As an example, small elements are needed in the regions of shock waves to capture shock resolution, whereas larger elements can be used in the free-stream regions because the flow behavior is uniform. To determine proper element sizes at different locations in the flow field, the solid-mechanics concept of determining the principal stresses from a given state of stresses at a point is employed. Since the fluid density changes abruptly across the shock waves, the density distribution can be used as an indicator in the determination of proper element sizes.

Because small elements must be placed in the region of the shock wave where large changes in density gradients occur, the second derivatives of the density at a point with respect to global coordinates  $x$  and  $y$  are needed to compute,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Then the principal quantities in the principal directions  $X$  and  $Y$  where the cross derivatives vanish, are determined,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

The magnitude of the larger principal quantity is then selected,

$$\lambda = \max \left( \left| \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (14)$$

This value is used to compute proper element size  $h$  at that location from the condition [15],

$$h^2 \lambda = \text{constant} = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (15)$$

where  $h_{\min}$  is the specified minimum element size, and  $\lambda_{\max}$  is the maximum principal quantity for the entire model.

Based on the condition shown in Eq. (15), the element size is generated according to the given minimum element size  $h_{\min}$ . Specifying too small  $h_{\min}$  may result in a model with an excessive number of elements. On the other hand, specifying too large  $h_{\min}$  may result in inadequate solution accuracy or excessive analysis and remeshing cycles. These factors must be considered prior to generating a new mesh. Note that, because the technique generates an entirely new mesh with different nodal locations from the old mesh, interpolation of the solution from the old to the new mesh should be used to increase the analysis solution convergence.

#### 4. Examples

Two examples are presented to evaluate the capability of the upwind cell-centered finite element formulation combining with the adaptive remeshing technique for analysis of high-speed compressible flows. The two

examples are a Mach 3 flow over a wedge and a Mach 6 flow over a cylinder. All computations were made on standard personal computer with Pentium 166 MHz processor.

##### 4.1 Mach 3 Flow Past a Wedge

The problem statement of a Mach 3 flow past a wedge is described by Fig. 1. The flow enters through the left boundary of the computational domain and creates an oblique shock wave as highlighted in the figure. Figure 2(a) shows a typical standard finite element model that consists of structured mesh with 400 triangular elements and 231 nodes. With this finite element model, the computer program developed was used to compute the solutions. A typical solution of density distribution in the form of the contour lines is presented in Fig. 2 (b). The figure shows an oblique shock generated from the corner of the inclined surface. The computed oblique shock is not sharp because the elements along the shock line are not small enough. Such a solution suggests the need of small elements clustered along the shock line to provide better shock resolution.

Small elements along the shock line for improving shock resolution can be generated by using the adaptive meshing technique described in the preceding section. The technique starts from generating a relatively uniform mesh such as that shown in Fig. 3(a) with 344 elements and 201 nodes. With this first mesh, the fluid analysis is performed to obtain the corresponding flow solution as illustrated by the density contours in Fig. 3(b). Based on this flow solution and the use of the adaptive meshing technique, the second mesh is created as shown in Fig. 4(a). This second mesh consists of 669 elements and 357 nodes with smaller elements clustered along the shock line and larger elements in the free stream region. The fluid analysis is then repeated to yield a flow solution as illustrated by the density contours in Fig. 4(b). The entire process is repeated again to generate a third adaptive mesh with 970 elements and 506 nodes and the corresponding flow solution of density contours as shown in Figs. 5(a) and 5(b), respectively. The final flow solution as shown in Fig. 5(b) indicates good solution accuracy for oblique shock because small elements are generated



along the shock line. And since larger elements are used in the other regions, thus the total CPU time for the fluid analysis is minimized. Each analysis requires approximately 1,200 time steps for a converged solution. Table 1 compares the computational times, in seconds on a standard personal computer with Pentium 166 MHz processor, needed for the finite models in Figs. 2-5. Figure 6 shows the improvement of the shock resolution (along section A-A in Fig. 1) from the third adaptive mesh by comparing with the exact solution and the nonadaptive mesh solution.

**Table 1. Comparative CPU times needed by nonadaptive and adaptive finite element meshes for flow past a wedge.**

Mesh	No. of elements	CPU time (sec)
Nonadaptive (Fig. 2)	400	54
1st Adaptive (Fig. 3)	344	48
2nd Adaptive (Fig. 4)	669	86
3rd Adaptive (Fig. 5)	970	122

#### 4.2 Mach 6 Flow Past a Cylinder

To further evaluate the upwind cell-centered finite element formulation combining with the adaptive remeshing technique, the analysis of a Mach 6 flow past a cylinder is performed. The problem statement and the sketch of the flow behavior are shown in Fig. 7. The flow behavior is more complex than that in the previous example. The flow field includes a bow shock detached in front of the cylinder. The flow is subsonic near the centerline between the bow shock and the cylinder. Away from this region, the flow behind the weaker part of the bow shock becomes supersonic with variation of all flow variables.

The analysis is first performed by using a nonadaptive finite element mesh as shown in Fig. 8(a). The mesh consists of 400 elements and 231 nodes. The corresponding predicted density distribution represented by contour lines

is presented in Fig. 8(b). The figure shows that the computed bow shock is not sharp because the element sizes are too large along the shock line. However, the predicted flow density behind the bow shock is reasonably good because the flow field changes gradually. The solution from this initial study using nonadaptive mesh thus suggests the need of clustered small elements along the bow shock for better shock resolution. It should be noted that, in general, the shape and location of the bow shock are not known to the analyst a priori. The use of the adaptive remeshing technique that will be explained next can be used to overcome such difficulty.

The combined finite element analysis and adaptive meshing technique starts from generating a relatively uniform mesh such as that shown in Fig. 9(a) with 572 elements and 325 nodes. The fluid analysis is performed to yield the corresponding flow solution shown by the density contours in Fig. 9(b). Based on this flow solution, the adaptive remeshing technique is then used to generate the second adaptive mesh consisting of 548 elements and 299 nodes as shown in Fig. 10(a). The fluid analysis is then performed to yield the corresponding flow solution such as the density contours shown in Fig. 10(b). The process is repeated again to generate the third mesh as shown in Fig. 11(a) with 956 elements and 501 nodes. Small elements are clustered along the bow shock as can be seen clearly in this figure. After the fluid analysis is performed using this third mesh, good quality of flow resolution with sharp bow shock is obtained as shown in Fig. 11(b). Comparison of the computational times required for converged solutions using 6,000 time steps on a standard personal computer with Pentium 166 MHz processor is shown in Table 2 for the nonadaptive and adaptive meshes in Figs. 8-11. Figure 12 also highlights the improved shock resolution along the flow centerline obtained from the third adaptive mesh comparing with the exact solution and the nonadaptive mesh solution. This example demonstrates the capability of the combined finite element method and the adaptive remeshing technique that can provide improved flow solution accuracy for general flow behavior that is not known a priori.

**Table 2. Comparative CPU times needed by nonadaptive and adaptive meshes for flow past a cylinder.**

Mesh	No. of elements	CPU time (sec)
Nonadaptive (Fig. 8)	400	270
1st Adaptive (Fig. 9)	572	378
2nd Adaptive (Fig. 10)	548	363
3rd Adaptive (Fig. 11)	956	605

### 5. Concluding Remarks

A finite element method based on an upwind cell-centered algorithm for analysis of high-speed inviscid compressible flow is presented. The method is combined with an adaptive remeshing technique to improve the flow solution accuracy. The technique generates an entirely new mesh based on the solution obtained from a previous mesh. The new mesh consists of clustered elements in the regions with large change in solution gradients to provide higher solution accuracy. At the same time, larger elements are generated in the other regions to reduce the computational time and required computer memory. The finite element formulation was presented and the basic idea behind the adaptive meshing technique was described.

Two examples of high-speed compressible flows were presented to assess the effectiveness of the combined method. These examples are the Mach 3 flow past a wedge and the Mach 6 flow past a cylinder. All computations were performed on standard personal computers. Depending on the number of unknowns on different meshes used in the two examples, typical analysis requires a relatively small computational time on a standard personal computer with Pentium 166 MHz processor. The two examples demonstrate that the combined method can provide high solution accuracy at reduced computational time and memory for analysis of high-speed compressible flow problems.

### 6. Acknowledgment

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) and the National Research Council of Thailand (NRCT), Bangkok, Thailand, for supporting this research work.

### 7. References

- [1] Anderson, J.D., Jr. (1982), *Modern Compressible Flow With Historical Perspective*, McGraw-Hill, New York.
- [2] Anderson, J.D., Jr. (1991), *Fundamentals of Aerodynamics*, 2 ed., McGraw-Hill, New York.
- [3] Hirsch, C. (1990), *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons, New York.
- [4] Dechaumphai, P. and Wieting, A.R. (1989), Coupled Fluid-Thermal-Structural Analysis for Aerodynamically Heated Structures, pp. 165-171, In T.J. Chung and G.R., Karr, *Finite Element Analysis in Fluids*, Univ. of Alabama in Huntsville Press, Huntsville, Alabama.
- [5] Hughes, T.J.R. (1987), Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods with Special Reference to the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations. *Numer. Methods Fluids*, Vol.7, pp.1261-1275.
- [6] Jiang, B.N. and Carey, G.F. (1988), A Stable Least-Squares Finite Element Method for Nonlinear Hyperbolic Problems, *Numer. Methods Fluids*, Vol.8, pp.933-942.
- [7] Gnoffo, P.A. (1986), Application of Program LAURA to Three-Dimensional AOTV Flowfields, *AIAA Paper*, Vol. 86-0565.
- [8] Dechaumphai, P. (1995), Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems. *Energy, Heat & Mass Transfer*, Vol.17, pp.87-94.
- [9] Peraire, J., Vahjdati, M., Morgan, K., and Zienkiewicz, O.C. (1987), Adaptive Re-meshing for Compressible Flow

- Computation, Comp. Phys., Vol.72, pp. 449-466.
- [10] Dechaumphai, P. (1994), Finite Element Method in Engineering, Chulalongkorn University Press, Bangkok.
  - [11] Dechaumphai, P. (1995), Numerical Methods in Engineering, Chulalongkorn University Press, Bangkok.
  - [12] Ramakrishnan, R., Bey, K.S. and Thornton, E.A. (1990), Adaptive Quadrilateral and Triangular Finite-Element Scheme for Compressible Flows, AIAA Journal, Vol.28, pp.51-59.
  - [13] Dechaumphai, P. and Thornton, E.A. (1982), Nodeless Variable Finite Elements for Improved Thermal-Structural Analysis, the International Conference on Finite-Element Methods, pp.139-144.
  - [14] Lohner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C. (1984), Adaptive Grid Refinement for Compressible Euler and Navier-Stokes Equations, The International Conference on Accuracy Estimates and adaptive Refinements in Finite-Element Computations, pp.189-202.
  - [15] Oden, J.T. and Carey, G.F. (1981), Finite Elements: Mathematical Aspects, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

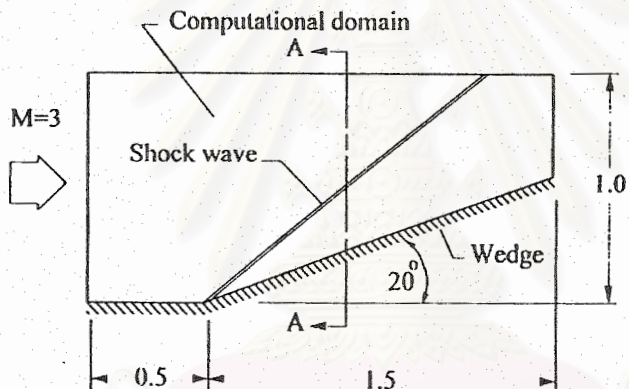
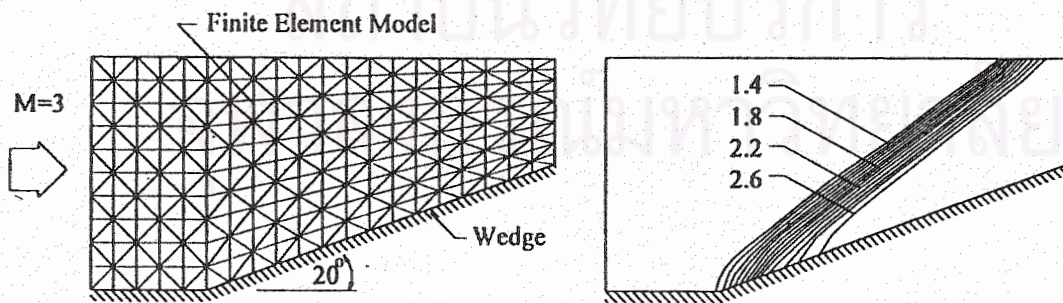
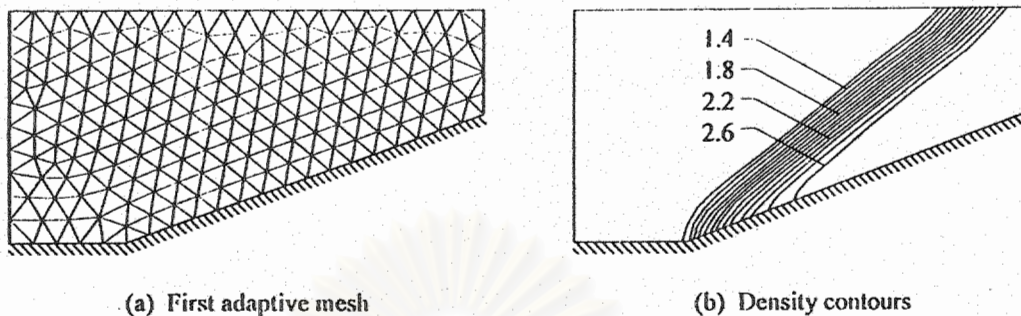


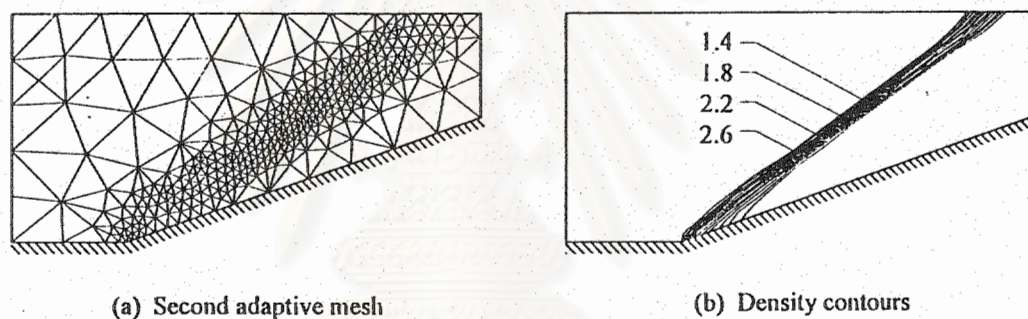
Fig. 1 - Mach 3 flow past a wedge.



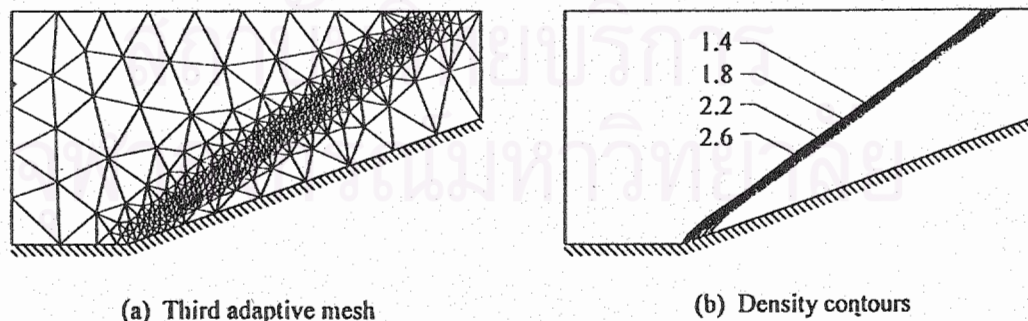
(a) Nonadaptive mesh (b) Density contours  
 Fig. 2 - Nonadaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 3 flow past a wedge.



**Fig. 3 - First adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 3 flow past a wedge.**



**Fig. 4 - Second adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 3 flow past a wedge.**



**Fig. 5 - Third adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 3 flow past a wedge.**

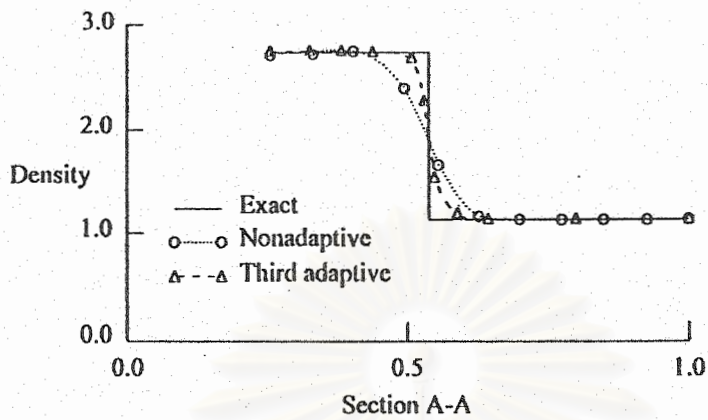


Fig. 6 - Comparative density distributions along section A-A of Fig. 1 between the exact, the nonadaptive mesh, and the third adaptive mesh solutions.

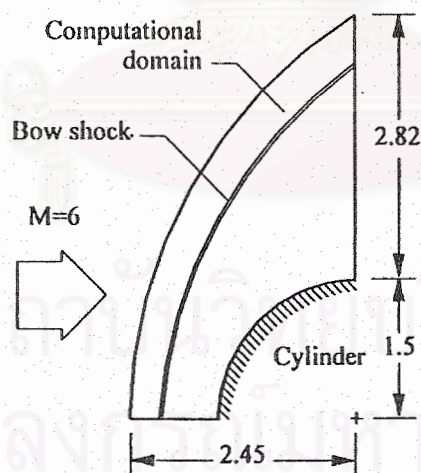


Fig. 7 - Mach 6 flow past a cylinder.

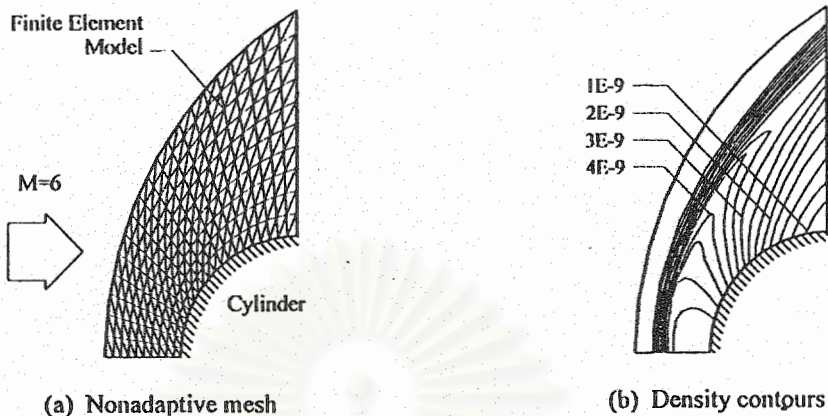


Fig. 8 - Nonadaptive finite element and corresponding density contours for Mach 6 flow past a cylinder.

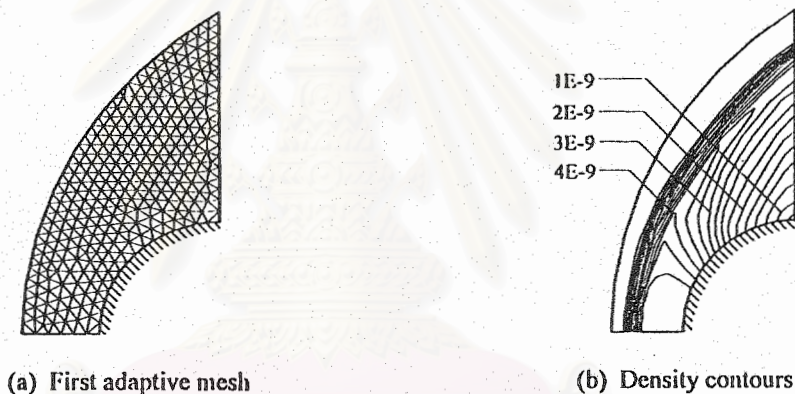


Fig. 9 - First adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 6 flow past a cylinder.

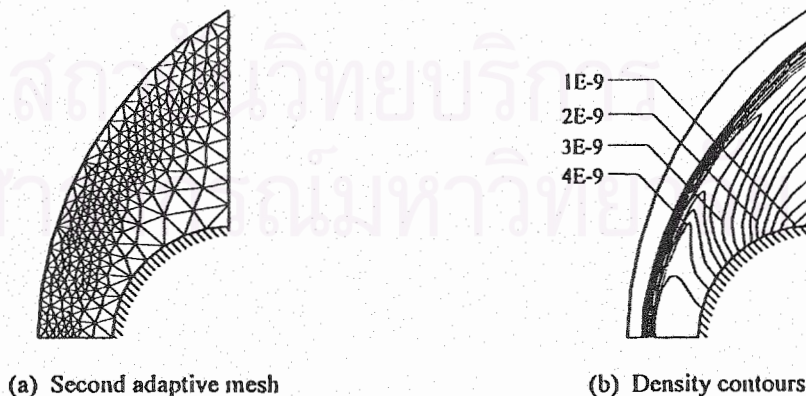


Fig.10 - Second adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 6 flow past a cylinder.

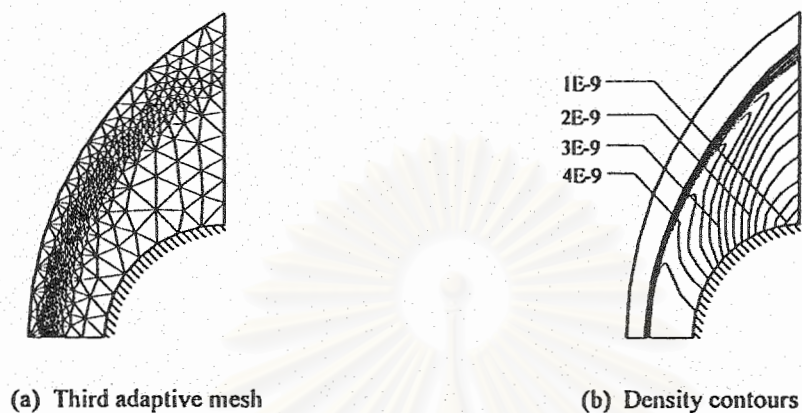


Fig. 11 - Third adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 6 flow past a cylinder.

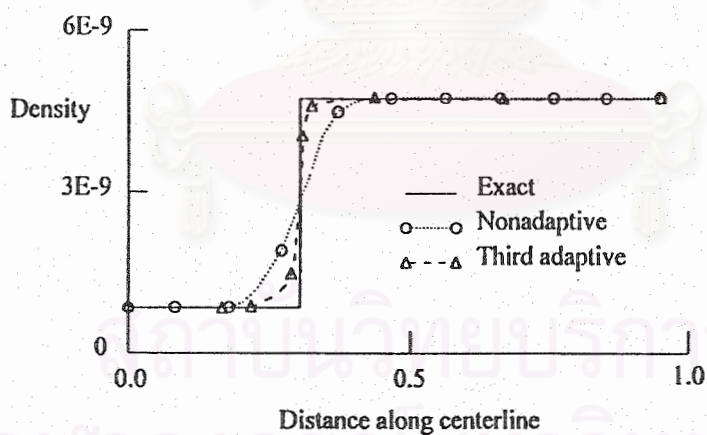


Fig. 12 - Comparative density distributions along the flow centerline between the exact, the nonadaptive mesh, and the third adaptive mesh solutions.

บทความทางวิชาการ เรื่อง

*A Finite Element Method for Viscous  
Incompressible Thermal Flows*

Accepted for Publication in the

**Science Asia**

**Journal of Science Society of Thailand**

1999



Pramote Dechaumphai

Professor

Worasit Kanjanakijkasem

Graduate Student

Mechanical Engineering Department

Chulalongkorn University

Bangkok, Thailand

# A Finite Element Method for Viscous Incompressible Thermal Flows

*A finite element method for steady-state viscous incompressible thermal flows has been developed. The finite element equations are derived from a set of coupled nonlinear Navier-Stokes equations that consists of the conservation of mass, momentum, and energy equations. These derived finite element equations are validated by developing a corresponding finite element computer program that can be executed on standard personal computers. The developed finite element formulation has been evaluated by solving viscous incompressible thermal flows past irregular geometries with different boundary conditions.*

## 1. Introduction

Viscous incompressible thermal flows have been the subject of many theoretical and numerical investigation. The problem is relatively complex due to the coupling between the energy equation and the equations governing the fluid motion [1,2]. These equations constitute a set of coupled nonlinear differential equations which is difficult to solve especially with irregular flow geometries and boundary conditions. In the past, the finite difference method has been the most popular method to analyze such problem. Although the finite difference method can provide accurate solution over a wide range of the Rayleigh numbers, the method is not convenient for irregular configuration. Moreover, nonuniform meshes with fine discretization can not be used easily by the finite difference method in the region of complex flow behavior.

The finite element method is one of the numerical methods that has received popularity due to its capability for solving complex structural problems [3,4]. The method has been extended to solve problems in several other fields such as in the field of heat transfer [5,6], electromagnetics [7], biomechanics [8], etc. In spite of the great success of the method in these fields, its application to fluid mechanics, particularly to viscous flows, is still under intensive research. This is due to the fact that the governing differential equations for general flow problems consist of several coupled equations which are inherently nonlinear. Accurate numerical solutions thus require a vast amount of computer time and data storage. One way to minimize the amount of computer time and data storage used is to employ an adaptive meshing technique [9,10]. The technique places small elements in the regions of large change in the solution gradients to increase solution accuracy, and at the same time, uses large elements in the other regions to reduce the computational time and computer memory.

As the first step toward accurate flow solutions using the adaptive meshing technique, this paper develops a finite element formulation suitable for analysis of general viscous incompressible thermal flow problems. The formulation evaluated in this paper will be used with the adaptive meshing technique in the future. The paper starts from the Navier-Stokes equations together with the energy equation to derive the corresponding finite element equations. The computational procedure used in the development of the computer program is described. The finite element equations derived and the computer program developed are then evaluated by examples of free convection in a square enclosure, free convection in concentric cylinders, and flow in a channel with a built-in high temperature rectangular cylinder.

## 2. Governing Equations

The fundamental laws used to solve the fluid flow problems are the law of: (a) conservation of mass or continuity equation, (b) conservation of momentums, and (c) conservation of energy, which constitute a set of coupled, nonlinear, partial differential equations. For laminar incompressible thermal flow, the buoyant force is included herein as a body force in the y-momentum equation [11]. If the effects of radiation and viscous dissipation are neglected, as well as the internal heat generation is omitted, the differential equations for the two-dimensional steady-state thermal flow are,

$$u_x + v_y = 0 \quad (1)$$

$$\rho(uu_x + vv_y) = \sigma_{xx} + \tau_{xy,y} \quad (2a)$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = \tau_{xy,x} + \sigma_{yy} - \rho g [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2b)$$

$$\rho c(uT_x + vT_y) = (kT_x)_x + (kT_y)_y \quad (3)$$

where  $u$  and  $v$  are the velocity components in the  $x$  and  $y$  direction, respectively;  $T$  is the fluid temperature,  $T_0$  is the reference temperature for which buoyant force vanishes,  $\rho$  is the

fluid density,  $g$  is the gravitational constant,  $\beta$  is the volumetric coefficient of thermal expansion,  $c$  is the fluid specific heat, and  $k$  is the fluid thermal conductivity. The stress components are defined by,

$$\sigma_x = -p + 2\mu u_{,x} \quad (4a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu v_{,y} \quad (4b)$$

$$\tau_{xy} = \mu(u_{,y} + v_{,x}) \quad (4c)$$

where  $p$  is the total pressure and  $\mu$  is the fluid dynamic viscosity.

The partial differential equations, Eqs. (1-3), are to be solved together with appropriate boundary conditions (see Fig. 1) of,

(1) Specifying velocity components ( $u_i, v_i$ ) and fluid temperature ( $T_i$ ) along inflow boundary ( $S_i$ ).

$$u = u_i(x, y) \quad (5a)$$

$$v = v_i(x, y) \quad (5b)$$

$$T = T_i(x, y) \quad (5c)$$

(2) Specifying surface tractions ( $P_x, P_y$ ) along outflow boundary ( $S_o$ ).

$$P_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad (6a)$$

$$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad (6b)$$

where  $l$  and  $m$  are direction cosines of the unit vector normal to the boundary.

(3) Specifying velocity components ( $u_w, v_w$ ) and fluid temperature ( $T_w$ ) or heat flux ( $q_w$ ) that flows into or out from domain along wall boundary ( $S_w$ ).

$$u = u_w(x, y) \quad (7a)$$

$$v = v_w(x, y) \quad (7b)$$

$$T = T_w(x, y) \text{ or } q = q_w(x, y) \quad (7c)$$

### 3. Finite Element Formulation

The basic unknowns for the incompressible thermal flow governing differential equations, Eqs. (1-3), after substituting of the stress components from Eq. (4), are the velocity components  $u, v$ , the temperature  $T$ , and the pressure  $p$ . The six-node triangular element as suggested in Ref. [12] for non-isothermal flow is used in this paper for the development of the finite element equations. The element assumes quadratic interpolation for the velocity component and the temperature distributions and linear interpolation for the pressure distribution according to their highest derivative orders in the differential Eqs. (1-3) as,

$$u(x, y) = N_\alpha u_\alpha \quad (8a)$$

$$v(x, y) = N_\alpha v_\alpha \quad (8b)$$

$$T(x, y) = N_\alpha T_\alpha \quad (8c)$$

$$p(x, y) = H_\lambda p_\lambda \quad (8d)$$

where  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ;  $\lambda = 1, 2, 3$ ;  $N_\alpha$  are the element interpolation functions for the velocity components and the

temperature, and  $H_\lambda$  are the element interpolation functions for the pressure.

To derive the finite element equations, the method of weighted residuals [6] is applied to the momentum Eqs. (2a-b), the energy Eq. (3), and the continuity Eq. (1),

$$\int_A N_\alpha \rho (u u_{,x} + v u_{,y}) dA = \int_A N_\alpha (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) dA \quad (9a)$$

$$\int_A N_\alpha \rho (u v_{,x} + v v_{,y}) dA = \int_A N_\alpha (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dA - \int_A N_\alpha \rho g [1 - \beta(T - T_0)] dA \quad (9b)$$

$$\int_A N_\alpha \rho c (u T_{,x} + v T_{,y}) dA = \int_A N_\alpha [(k T_{,x})_{,x} + (k T_{,y})_{,y}] dA \quad (9c)$$

$$\int_A H_\lambda (u_{,x} + v_{,y}) dA = 0 \quad (9d)$$

where  $A$  is the element area. For the six-node triangular element, Eqs. (9a-d) consist of 21 finite element equations. Gauss's theorem is then applied to Eqs. (9a-c) to generate the boundary integral terms associated with the surface tractions and heat flux. With the use of Eqs. (5-7), Eqs. (9a-c) become,

$$\int_A N_\alpha \rho (u u_{,x} + v u_{,y}) dA + \int_A (N_{\alpha,x} \sigma_x + N_{\alpha,y} \tau_{xy}) dA = \int_{S_o} N_\alpha P_x dS_o \quad (10a)$$

$$\int_A N_\alpha \rho (u v_{,x} + v v_{,y}) dA + \int_A (N_{\alpha,x} \tau_{xy} + N_{\alpha,y} \sigma_y) dA = \int_{S_o} N_\alpha P_y dS_o - \int_A N_\alpha \rho g [1 - \beta(T - T_0)] dA \quad (10b)$$

$$\int_A N_\alpha \rho c (u T_{,x} + v T_{,y}) dA + \int_A N_{\alpha,x} (k T_{,x}) dA + \int_A N_{\alpha,y} (k T_{,y}) dA = \int_{S_w} N_\alpha q_s dS_w \quad (10c)$$

Substituting the element velocity component distributions, the temperature distribution, and the pressure distribution from Eqs. (8a-d), and the stress components from Eqs. (4a-c), the finite element equations can be written in the form,

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^x} u_\beta + S_{\alpha\beta^y} v_\beta = Q_{\alpha^x} \quad (11a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha^y} p_\lambda - K_{\alpha\beta} T_\beta + S_{\alpha\beta^x} u_\beta + S_{\alpha\beta^y} v_\beta = Q_{\alpha^y} - C_\alpha - D_\alpha \quad (11b)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta T_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta T_\gamma + M_{\alpha\beta^x} T_\beta + M_{\alpha\beta^y} T_\beta = Q_{\alpha^T} \quad (11c)$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \quad (11d)$$

where the coefficients in element matrices are in the form of the integrals over the element area  $A$  and along the element edges  $S_o$  and  $S_w$  as,

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x} dA \quad (12a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} dA \quad (12b)$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda dA \quad (12c)$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda dA \quad (12d)$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2\nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + \nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (12e)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + 2\nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (12f)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (12g)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} dA \quad (12h)$$

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA \quad (12i)$$

$$M_{\alpha\beta^{yy}} = \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (12j)$$

$$K_{\alpha\beta} = g\beta \int_A N_\alpha N_\beta dA \quad (12k)$$

$$Q_{\alpha^u} = \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_x dS_o \quad (12l)$$

$$Q_{\alpha^v} = \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_y dS_o \quad (12m)$$

$$Q_{\alpha^T} = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_\alpha q_s dS_w \quad (12n)$$

$$C_\alpha = g \int_A N_\alpha dA \quad (12o)$$

$$D_\alpha = g\beta T_\theta \int_A N_\alpha dA \quad (12p)$$

where  $\nu$  is the fluid kinematics viscosity defined by,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (13)$$

These element matrices are evaluated in closed-form ready for computer programming. Details of the derivation for these element matrices are omitted herein for brevity.

#### 4. Computational Procedure

The derived finite element equations, Eqs. (11a-d), are nonlinear. These nonlinear algebraic equations are solved by applying the Newton-Raphson iteration technique [13] by first

writing the unbalanced values from the set of the finite element Eqs.(11a-d) as,

$$F_{\alpha^u} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} P_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta - Q_{\alpha^u} \quad (14a)$$

$$F_{\alpha^v} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} P_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta - K_{\alpha\beta} T_\beta - Q_{\alpha^v} + C_\alpha + D_\alpha \quad (14b)$$

$$F_{\alpha^T} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta T_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta T_\gamma + M_{\alpha\beta^{xx}} T_\beta + M_{\alpha\beta^{yy}} T_\beta - Q_{\alpha^T} \quad (14c)$$

$$F_{\beta^p} = H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \quad (14d)$$

This leads to a set of algebraic equations with the incremental unknowns of the element nodal velocity components, temperatures, and pressures in the form,

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & 0 & K_{up} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{vT} & K_{vp} \\ K_{Tu} & K_{Tv} & K_{TT} & 0 \\ K_{pu} & K_{pv} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_\beta \\ \Delta v_\beta \\ \Delta T_\beta \\ \Delta P_\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_{\alpha^u} \\ F_{\alpha^v} \\ F_{\alpha^T} \\ F_{\beta^p} \end{bmatrix} \quad (15)$$

where

$$K_{uu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \quad (16a)$$

$$K_{uv} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \quad (16b)$$

$$K_{up} = -H_{\alpha\lambda^x} \quad (16c)$$

$$K_{vu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \quad (16d)$$

$$K_{vv} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \quad (16e)$$

$$K_{vT} = -K_{\alpha\beta} \quad (16f)$$

$$K_{vp} = -H_{\alpha\lambda^y} \quad (16g)$$

$$K_{Tu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} T_\gamma \quad (16h)$$

$$K_{Tv} = K_{\alpha\beta\gamma^y} T_\gamma \quad (16i)$$

$$K_{TT} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + M_{\alpha\beta^{xx}} + M_{\alpha\beta^{yy}} \quad (16j)$$

$$K_{pu} = H_{\beta\mu^x} \quad (16k)$$

$$K_{pv} = H_{\beta\mu^y} \quad (16l)$$

In the above Eqs. (16a-l),  $u_\gamma$  and  $v_\gamma$  are the values of the velocity components and  $T_\gamma$  is the values of the temperature at the  $i^{\text{th}}$  iteration. The iteration process is terminated if the percentage of the overall change compared to the previous iteration is less than the specified value.

The final form of the finite element equations, Eqs. (15-16), and the iteration procedure described are used in the development of a finite element computer program that can be executed on standard personal computers. The program has been verified by solving a number of examples that have known results before applying to solve more complex flow problems. Selected examples are presented in the next section.

## 5. Examples

In order to evaluate the finite element formulation and demonstrate its capability, three examples of viscous incompressible thermal flows are presented herein.

### 5.1 Free convection in a square enclosure

The first example for validating the finite element formulation developed is the problem of free convection in a square enclosure. The square enclosure, shown in Fig. 2, is bounded by the two vertical plates with specified temperatures of  $20^{\circ}\text{C}$  and  $60^{\circ}\text{C}$  and insulated plates on the top and bottom surfaces. The problem was analyzed by other technique [14] for which the result can be used for comparison. The finite element model consisting of 200 elements and 441 nodes, as shown in Fig. 2, is used in this study. Figures 3(a-b) show the predicted velocity and temperature distributions, respectively, for the case with the Rayleigh number of  $10^4$ . The figures show relatively smooth flow velocity vectors that circulate in the counterclockwise direction and the smooth temperature distribution. The same analysis is repeated but with the Rayleigh number of  $10^5$ . Different flow patterns of the velocity and temperature distributions are obtained as shown in Figs. 4(a-b). The flow velocity pattern indicates two regions of circulation, both in counterclockwise direction. The predicted velocity profiles and the temperature distributions along the mid-height of the square enclosure for both flow cases are compared with the results from Ref. [14] as shown in Figs. 5(a-b), respectively. The figures show good agreement of the solutions for both the flow cases.

### 5.2 Free convection in concentric cylinders

The second example is the problem of free convection in the annular space between long, horizontal concentric cylinders. The finite element model consisting of 271 elements and 600 nodes is shown in Fig. 6. The concentric cylinders has high temperature on the inner cylinder and lower temperature on the outer cylinder. Two analysis cases with the temperature difference between the inner and outer cylinders of  $5^{\circ}\text{C}$  and  $10^{\circ}\text{C}$  (Rayleigh numbers of 2500 and 5000) are performed. Figure 7(a) shows the predicted fluid temperature distribution and velocity vectors for the case with the Rayleigh number of 2500. The figure shows smooth temperature distribution and flow velocity pattern that circulates in the clockwise direction. However, for the case with higher Rayleigh number of 5000, the flow velocity pattern has changed to two regions of circulation with a small region of counterclockwise flow pattern appears on the upper portion of the cylinders as shown in Fig. 7(b). These results highlight a more complex flow behavior that can occur from a slight change of the boundary condition.

### 5.3 Flow in a channel with a built-in high temperature rectangular cylinder

To further demonstrate the capability of the finite element formulation developed for a more complex problem, the problem of viscous thermal flow through a channel with a built-in high temperature rectangular cylinder as shown in Fig. 8 is selected. The flow at temperature of  $20^{\circ}\text{C}$  and Reynold number of 100 enters through the left boundary of a channel that has temperatures on both the upper and lower walls of  $40^{\circ}\text{C}$ . The fluid flows past the built-in rectangular cylinder that also has higher temperature of  $40^{\circ}\text{C}$ . The finite element model used for the analysis, as shown in the figure, consists of 390 elements and 852 nodes.

The predicted flow solutions are shown in Figs. 9(a-c). Figure 9(a) shows the velocity pattern of the fluid that flows past the rectangular cylinder with two small regions of circulation occur behind it. Fig. 9(b) shows the predicted temperature contours with increased fluid temperature near both of the walls and the rectangular cylinder. Fig. 9(c) shows the predicted flow pressure distribution that causes the fluid to flow from the left to the right of the channel.

To demonstrate that the finite element formulation can handle different boundary conditions easily, the analysis is repeated for the case when both the upper and lower walls are insulated. Figure 10(a) shows the predicted temperature contours indicating that the fluid temperature increases as it flows past the high temperature rectangular cylinder. Fig. 10(b) also shows the predicted temperature contours for the case when the upper wall is insulated and the lower wall temperature is maintained at  $40^{\circ}\text{C}$ . These results demonstrate the capability of the finite element formulation developed that can provide insight into the complexity of the viscous thermal flow behaviors under different boundary conditions.

## 6. Concluding Remarks

A finite element method for steady-state viscous incompressible thermal flow is presented. The finite element equations were derived from the governing flow equations that consist of the conservation of mass, momentum, and energy equations. The derived finite element equations are nonlinear requiring an iterative technique solver. The Newton-Raphson iteration method is applied to solve these nonlinear equations for solutions of the nodal velocity components, temperatures, and pressures. The corresponding computer program that can be executed on standard personal computers has been developed. The finite element formulation developed have been verified and evaluated by the three examples of free convection in a square

enclosure, free convection in concentric cylinders, and flow in a channel with a built-in high temperature rectangular cylinder. The examples demonstrate the capability of the finite element formulation that can provide insight to complex viscous thermal flow behaviors.

### 7. Acknowledgement

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) for supporting this research work.

### 8. References

1. White, F. M., Viscous Fluid Flow, Second Ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
2. Anderson, J. D. Jr., Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill, Singapore, 1995.
3. Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third Ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.
4. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method, Fourth Ed., McGraw-Hill, 1991.
5. Lewis, R. W. Morgan, K. Thomas, H. R. and Seetharamu, K. N., The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1996.
6. Dechaumphai, P., Finite Element Method in Engineering, Second Ed., Chulalongkorn University Press, Bangkok, 1999.
7. Jin, J., The Finite Element Method in Electromagnetics, John Wiley & Sons, New York, 1993.
8. Gallagher, R. H. Simon, B. R. Johnson, P. C. and Gross, J. F., Finite Elements in Biomechanics, John Wiley & Sons, New York, 1982.
9. Peraire, J. Vahidati, M. Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C., "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 72, 1987, pp. 449-466.
10. Dechaumphai, P., "Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems," *Energy, Heat & Mass Transfer*, Vol. 17, 1995, pp. 87-94.
11. Huebner, K. H. and Thornton, E. A., The Finite Element Method for Engineers, Second Ed., John Wiley & Sons, New York, 1982.
12. Yamada, Y. Ito, K. Yokouchi, Y. Yamano, T. and Ohtsubo, T., "Finite Element Analysis of Steady Fluid and Metal Flow," *Finite Element in Fluid*, Edit by Gallagher, R. H., et, al., John Wiley & Sons, New York, 1975.
13. Dechaumphai, P., Numerical Methods in Engineering, Second Ed., Chulalongkorn University Press, Bangkok, 1999.
14. Reddy, J. N. and Satake, A., "A Comparison of a Penalty Finite Element Model with the Stream Function-Vorticity Model of Natural Convection in Enclosures," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, 1980, pp. 659-666.

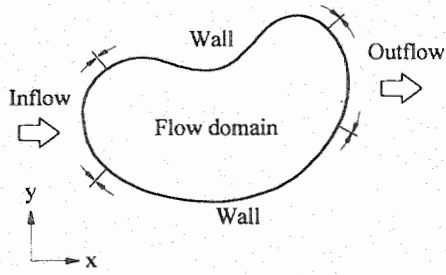


Fig. 1 - Flow domain and boundary conditions.

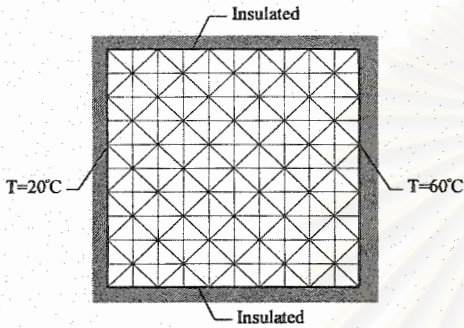


Fig. 2 - Finite element model and boundary conditions of free convection in a square enclosure.

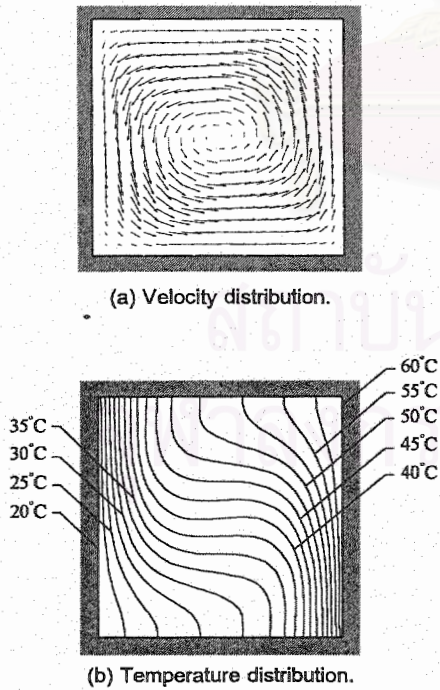
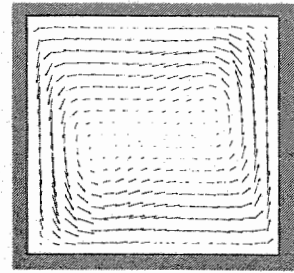
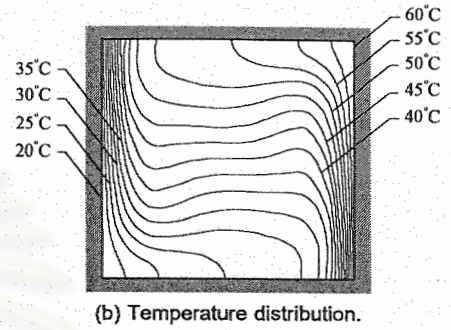


Fig. 3 - Flow solutions for free convection in a square enclosure with  $Ra = 10^4$ .

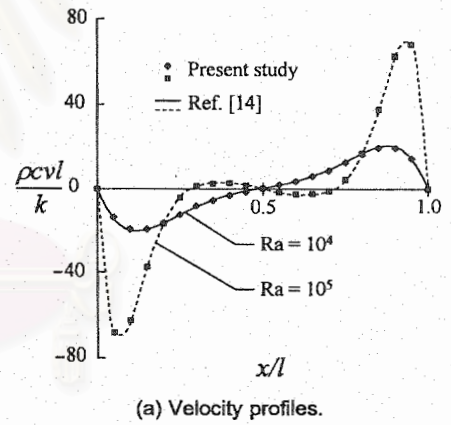


(a) Velocity distribution.

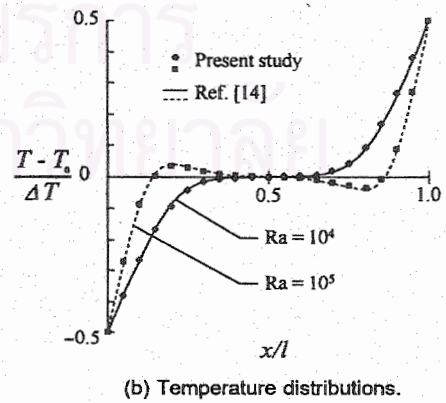


(b) Temperature distribution.

Fig. 4 - Flow solutions for free convection in a square enclosure with  $Ra = 10^5$ .



(a) Velocity profiles.



(b) Temperature distributions.

Fig.5 - Comparative flow solutions along the mid-height of the square enclosure.

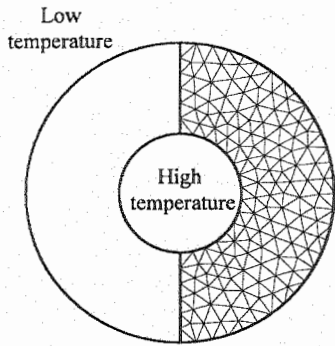
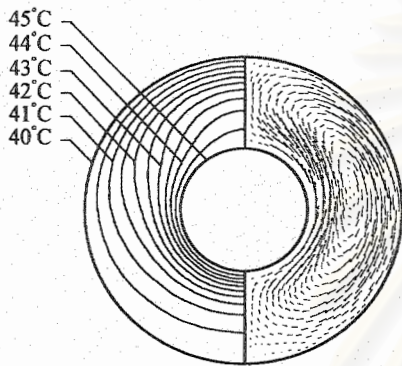
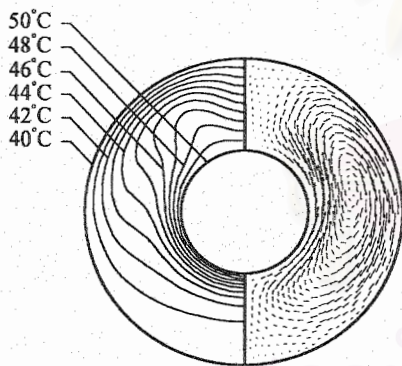


Fig. 6 - Finite element model of free convection in concentric cylinders.



(a)  $Ra = 2500$ .



(b)  $Ra = 5000$ .

Fig. 7 - Predicted velocity vectors and isotherms of free convection in concentric cylinders.

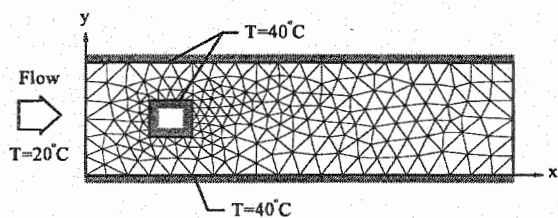
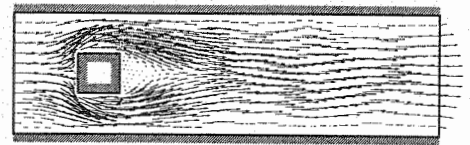
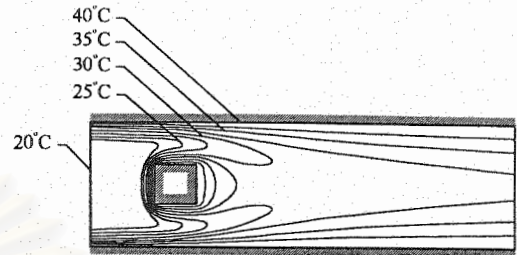


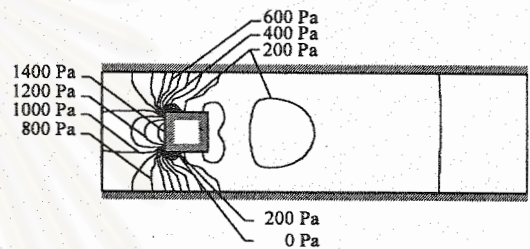
Fig. 8 - Finite element model and boundary conditions for flow in a channel with a built-in high temperature rectangular cylinder.



(a) Predicted velocity vectors.

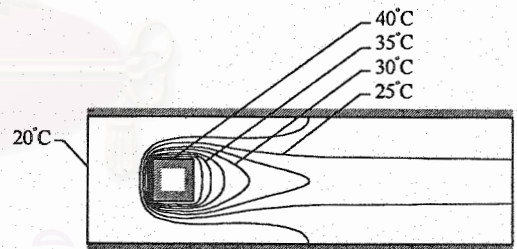


(b) Predicted temperature distributions.

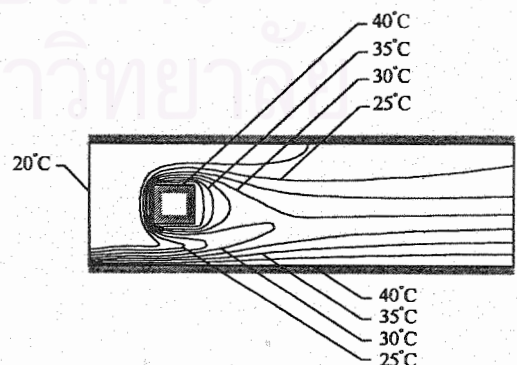


(c) Predicted pressure distributions.

Fig. 9 - Flow solutions in a channel with built-in high temperature rectangular cylinder.



(a) Both wall insulated.



(b) Only top wall insulated.

Fig. 10 - Predicted flow temperature distribution in a channel with built-in high temperature rectangular cylinder.

บทความทางวิชาการ เรื่อง

*Adaptive Finite Element Technique  
for Viscous Flow Analysis*

Submitted for Publication in the

**ASEAN Journal of Science and  
Technology for Development**

1999



Pramote Dechaumphai  
Professor

Supatpong Sikkhabandit  
Graduate Student

Mechanical Engineering Department  
Chulalongkorn University  
Bangkok, Thailand

# Adaptive Finite Element Technique for Viscous Flow Analysis

*A finite element method for analysis of viscous incompressible flow is presented. The finite element formulation and the computational procedure are described. The corresponding computer program that can be executed on standard personal computers has been developed. The method is combined with adaptive meshing technique to increase the solution accuracy, and at the same time, to minimize the computational time and computer memory required. The efficiency of the combined method is evaluated by examples of flow past a cylinder, flow in a sudden enlargement duct, and flow through an orifice.*

## 1. Introduction

The use of the finite element method to solve fluid flow problems has increased its popularity. This is due to the fact that the governing differential equations for general flow problems consist of several coupled equations which are inherently nonlinear. Together with complex flow geometries and general boundary conditions that increase the difficulty of the problem, the finite element method is more attractive comparing to other numerical methods [1-3]. Despite its capability and popularity as mentioned, accurate finite element solution still requires a vast amount of computer time and data storage [4-5].

One way to minimize the amount of computer time and data storage used is to employ adaptive mesh-generation techniques. The techniques may be classified into two major categories: 1) refinement/derefinement, and 2) remeshing. The first category, the adaptive refinement/derefinement technique, can be further classified into three subcategories: a) the  $h$  method, b) the  $p$  method, and c) the  $r$  method. In the  $h$  method, the elements in the initial mesh are refined into smaller elements or derefined into larger elements [6]. The  $p$  method maintains the geometry of the elements of the initial mesh but increases (or decreases) the order of the polynomials used for the element interpolation functions [7]. The  $r$  method keeps the number of elements and their connectivities the same but relocates the nodes [8].

In this paper, the finite element method for viscous incompressible flows [9] is combined with the adaptive meshing technique [10,11] to improve the finite element analysis solution accuracy and reduce the computational time as well as the computer memory. The adaptive meshing technique will place small elements in the region of large change in the solution gradients to increase solution accuracy, and at the same time, will place larger elements in the other regions to reduce the

computational time and computer memory. The paper starts by explaining the finite element formulation and the corresponding solution procedure that leads to the development of a computer program. The basic idea behind the adaptive meshing technique is then described. Finally, the efficiency of the combined method is evaluated by examples of flow past a cylinder, flow in a sudden enlargement duct, and flow through an orifice.

## 2. Theoretical Formulation and Solution Procedure

### 2.1 Governing equations

The fundamental laws used to solve fluid motion in a general form [12] are the law of: (a) conservation of mass or continuity equation, (b) conservation of momentum, and (c) conservation of energy, which constitute a set of coupled, nonlinear, partial differential equations. For low-speed incompressible flow, the fluid density and the flow temperature are assumed constant, and only the continuity equation and the momentum equations are needed for the analysis. These differential equations for the two-dimensional steady-state flow are,

$$u_x + v_y = 0 \quad (1a)$$

$$u u_x + v u_y - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} = 0 \quad (1b)$$

$$u v_x + v v_y - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} = 0 \quad (1c)$$

where  $u$  and  $v$  are the velocity components in the  $x$  and  $y$  direction, respectively. The stress components  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  and  $\tau_{xy}$  are defined by

$$\sigma_x = \frac{-p}{\rho} + 2\nu u_x \quad (2a)$$

$$\sigma_y = \frac{-p}{\rho} + 2\nu v_y \quad (2b)$$

$$\tau_{xy} = \nu(u_y + v_x) \quad (2c)$$

and where  $p$  is the pressure,  $\nu$  is the kinematic viscosity which can be written in form of the viscosity,  $\mu$ , and density,  $\rho$ , as,

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (3)$$

The differential equations, Eqs. (1a-c), are to be solved with appropriate boundary conditions which are either specifying velocity components along edge  $S_1$ ,

$$u(x, y) = u_1(x, y) \quad (4a)$$

$$v(x, y) = v_1(x, y) \quad (4b)$$

or surface tractions along edge  $S_2$ ,

$$T_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad (5a)$$

$$T_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad (5b)$$

where  $l$  and  $m$  are the direction cosines of the unit vector normal to the boundary edge.

## 2.2 Finite element formulation

The basic unknowns for the two-dimensional viscous incompressible flow problem corresponding to the continuity Eq. (1a) and the two momentum Eqs. (1b-c) are the velocity components  $u$ ,  $v$  and the pressure  $p$ . The six-node triangular element suggested in Ref. [4] is used in this study. The element assumes quadratic interpolation for the velocity component distributions and linear interpolation for the pressure distribution according to their highest derivative orders in the differential Eqs. (1a-c) as,

$$u(x, y) = N_\alpha u_\alpha \quad (6a)$$

$$v(x, y) = N_\alpha v_\alpha \quad (6b)$$

$$p(x, y) = H_\lambda p_\lambda \quad (6c)$$

where  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ;  $\lambda = 1, 2, 3$ ;  $N_\alpha$  and  $H_\lambda$  are the element interpolation functions for the velocity and pressure, respectively.

To derive the finite element equations, the method of weighted residuals [13] is applied to the momentum Eqs. (1b-c) and the continuity Eq. (1a),

$$\int_A N_i (u u_{,x} + v u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y}) dA = 0 \quad (7a)$$

$$\int_A N_i (u v_{,x} + v v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y}) dA = 0 \quad (7b)$$

$$\int_A H_i (u_{,x} + v_{,y}) dA = 0 \quad (7c)$$

where  $A$  is the element area. Gauss's theorem [13] is then applied to Eqs. (7a-b) for generating the element boundary integrals. The process gives,

$$\int_A N_i (u u_{,x} + v u_{,y}) dA + \int_A (N_{i,x} \sigma_x) dA + \int_A (N_{i,y} \tau_{xy}) dA = \int_{S_2} N_i T_x dS \quad (8a)$$

$$\int_A N_i (u v_{,x} + v v_{,y}) dA + \int_A (N_{i,x} \tau_x) dA + \int_A (N_{i,y} \sigma_y) dA = \int_{S_2} N_i T_y dS \quad (8b)$$

$$\int_A H_i (u_{,x} + v_{,y}) dA = 0 \quad (8c)$$

By substituting the stress components in terms of pressure and velocity gradients from Eqs. (2a-c), the above equations (8a-b) become,

$$\int_A N_i u u_{,x} dA + \int_A N_i v u_{,y} dA - \int_A N_{i,x} \frac{p}{\rho} dA + \int_A 2\nu N_{i,x} u_{,x} dA + \int_A \nu N_{i,y} u_{,y} dA + \int_A \nu N_{i,y} v_{,x} dA = \int_{S_2} N_i T_x dS \quad (9a)$$

$$\int_A N_i u v_{,x} dA + \int_A N_i v v_{,y} dA - \int_A N_{i,y} \frac{p}{\rho} dA + \int_A \nu N_{i,x} u_{,y} dA + \int_A \nu N_{i,x} v_{,x} dA + \int_A 2\nu N_{i,y} v_{,y} dA = \int_{S_2} N_i T_y dS \quad (9b)$$

From the assumed element velocity components, their derivatives are,

$$u_{,x} = N_{\alpha,x} u_\alpha \quad u_{,y} = N_{\alpha,y} u_\alpha \quad (10a)$$

$$v_{,x} = N_{\alpha,x} v_\alpha \quad v_{,y} = N_{\alpha,y} v_\alpha \quad (10b)$$

Substituting Eqs. (6a-c, 10a-b) into Eqs. (8c, 9a-b) leads to the finite element equations that can be written in tensor form as,

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - \frac{1}{\rho} H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^xx} u_\beta + S_{\alpha\beta^xy} v_\beta = Q_{\alpha^x} \quad (11a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - \frac{1}{\rho} H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^yx} u_\beta + S_{\alpha\beta^yy} v_\beta = Q_{\alpha^y} \quad (11b)$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \quad (11c)$$

where the coefficients in these equations are defined by,

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x} dA \quad (12a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} dA \quad (12b)$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda dA \quad (12c)$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda dA \quad (12d)$$

$$S_{\alpha\beta^xx} = \int_A 2\nu N_{\alpha,x} N_{\beta,x} dA + \int_A \nu N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (12e)$$

$$S_{\alpha\beta^xy} = \int_A \nu N_{\alpha,y} N_{\beta^x} dA \quad (12f)$$

$$S_{\alpha\beta^yx} = \int_A \nu N_{\alpha^x} N_{\beta,y} dA \quad (12g)$$

$$S_{\alpha\beta^yy} = \int_A \nu N_{\alpha,x} N_{\beta^y} dA + \int_A 2\nu N_{\alpha,y} N_{\beta,y} dA \quad (12h)$$

$$Q_{\alpha^x} = \int_{S_2} N_i T_x dS \quad (12i)$$

$$Q_{\alpha^y} = \int_{S_2} N_i T_y dS \quad (12j)$$

## 2.3 Computational procedure

The finite element equations, as shown in Eqs. (11a-c), are nonlinear to be solved by an iterative procedure. The Newton-Raphson iteration method is selected in this study. The method requires writing the unbalance values in the form,

$$F_{\alpha^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - \frac{1}{\rho} H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^xx} u_\beta + S_{\alpha\beta^xy} v_\beta - Q_{\alpha^x} \quad (13a)$$

$$F_{\alpha^y} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - \frac{1}{\rho} H_{\alpha\lambda^y} P_\lambda + S_{\alpha\beta^y x} u_\beta + S_{\alpha\beta^y y} v_\beta - Q_{\alpha^y} \quad (13b)$$

$$F_\mu = H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \quad (13c)$$

Then application of the method leads to a set of algebraic equations with incremental unknowns in the form,

$$\begin{bmatrix} G_{\alpha\beta^x} & L_{\alpha\beta^y} & -\frac{1}{\rho} H_{\alpha\lambda^x} \\ L_{\alpha\beta^x} & G_{\alpha\beta^y} & -\frac{1}{\rho} H_{\alpha\lambda^y} \\ H_{\beta\mu^x} & H_{\beta\mu^y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_\beta \\ \Delta v_\beta \\ \Delta p_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\alpha^x} \\ F_{\alpha^y} \\ F_\mu \end{bmatrix} \quad (14)$$

where the coefficients in the above equations are,

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^x x} \quad (15a)$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^y y} \quad (15b)$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^y x} \quad (15c)$$

$$L_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^x y} \quad (15d)$$

These coefficients which are in form of element matrices can be evaluated in closed-form for triangular elements ready for computer programming. Details of the derivation for these element matrices are omitted herein for brevity. In these Eqs. (15a-d),  $u_\gamma$  and  $v_\gamma$  are the values of the velocity components at the  $i^{\text{th}}$  iteration. The iteration process is terminated if the change in percentage of the overall errors of the nodal unknowns from the previous iteration is less than the specified value.

The closed form of the finite element matrices derived and the iteration procedure described are used in the development of a computer program that can be executed on standard personal computers. The main objectives in development of this computer program is such that it follows the formulation derived, easy to understand, and used together with the adaptive meshing technique which is explained in the next section. Both the finite element matrices derived and the computer program developed have been verified by a number of examples that have exact solutions prior to applying to solve more complex problems.

#### 2.4 Adaptive meshing technique

The idea behind the adaptive meshing technique presented herein is to construct a new mesh based on the solution obtained from the previous mesh. The new mesh will consist small elements in the regions with large change in solution gradients and large elements in the other regions where the change in solution gradients is small. As an example of a flow past a cylinder, small elements are needed near the cylinder surface to capture detailed flow field, whereas larger elements can be used in the region far away from the cylinder because the flow behavior is almost uniform. To determine proper element sizes at different locations in the flow field, the solid-mechanics concept of determining the principal stresses from a given state of stresses at a point is

employed. Since small elements are needed in the regions of complex flow behavior, thus the velocity distribution can be used as an indicator in the determination of proper element sizes.

To determine proper element sizes, the second derivatives of the flow velocity with respect to the global coordinates  $X$  and  $Y$  are first computed,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

where  $V$  is the magnitude of the two velocity components  $u$  and  $v$ ,

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (17)$$

The principal quantities in the principal directions  $X$  and  $Y$  where the cross derivatives vanish, are then determined,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

The magnitude of the larger principal quantity is then selected,

$$\lambda = \max \left( \left| \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (19)$$

This value is used to compute proper element size  $h$  at that locations from the conditions [14],

$$h^2 \lambda = \text{constant} = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (20)$$

where  $h_{\min}$  is the specified minimum element size, and  $\lambda_{\max}$  is the maximum principal quantity for the entire model.

Based on the condition shown in Eq. (20), proper element sizes are generated according to the given minimum element size  $h_{\min}$ . Specifying too small  $h_{\min}$  may result in a model with an excessive number of elements. On the other hand, specifying too large  $h_{\min}$  may result inadequate solution accuracy or excessive analysis and remeshing cycles. These factors must be considered prior to generating a new mesh.

### 3. Examples

Three examples are presented to evaluate the capability of the finite element formulation combining with the adaptive meshing technique for analysis of incompressible flows. The three examples are flow past a cylinder, flow in a sudden enlargement duct, and flow through an orifice. All computations were made on standard personal computer with Pentium 166 MHz. processor.

#### 3.1 Flow past a cylinder

To demonstrate the capability of the adaptive meshing technique combining with the finite element method developed for viscous incompressible flow analysis, the problem of flow past a cylinder [15] is selected. The flow enters through the left boundary edge with the Reynolds number of 50 as shown in Fig. 1. Due to

the symmetry of the flow solution, only half of the domain is analyzed. The adaptive meshing technique starts from creating a relatively uniform mesh as shown in Fig. 2. This initial mesh consists of 1,433 elements. Such a large number of elements is needed because, for a given flow problem in general, the flow solution is not known a priori. A large number of small elements are normally used to capture meaningful flow behavior. Element sizes for this problem are small in order to adequately represent the round surface of the cylinder. The predicted velocity distribution is shown in Fig. 3. Figure 4 shows the change in the flow magnitude and direction near the cylinder surface with flow recirculation occurs behind the cylinder. These figures suggest that smaller elements are needed near the cylinder surface to capture accurate flow behavior. At the same time, larger elements can be used in the region far away from the cylinder to reduce the total number of unknowns, the computational time and the computer memory.

The flow velocity distribution obtained from the initial mesh as shown in Fig. 3 is then used to determine new element sizes for generating the second adaptive as described in section 2.4. The second adaptive mesh consisting of 583 elements is shown in Fig. 5. The figure shows smaller elements are generated in the region near the cylinder surface where large change in velocity gradients occurs. At the same time, larger elements are generated in other regions away from the cylinder. With this second adaptive mesh, the finite element analysis is then performed and the corresponding flow velocity solution is shown in Fig. 6.

The entire procedure is repeated again to generate the third adaptive mesh with 671 elements as shown in Fig. 7. The corresponding flow solution of velocity distribution is shown in Fig. 8. Detailed flow velocities near the cylinder surface is shown in Fig. 9. The figure shows that the adaptive finite element mesh can provide improved flow behavior near top cylinder surface including detailed flow recirculation behind the cylinder as compared to the results from the initial uniform mesh. Figure 10 also highlights the velocity profile along the section A-A (see Fig. 9) on top of the cylinder surface. The figure indicates a smooth velocity profile is obtained due to small elements are generated in this critical boundary layer for this adaptive mesh.

### 3.2 Flow in a sudden enlargement duct

To demonstrate the adaptive meshing capability for viscous incompressible flow, the flow behavior in a sudden enlargement duct [16] is analysed. The flow enters with a parabolic profile at Reynolds number of 100 through a channel of a duct with sudden enlargement as shown in Fig. 11. The first adaptive mesh

consisting of 1,490 elements with relatively uniform element sizes is first generated as shown in Fig. 12. The predicted velocity distribution from this mesh is shown in Fig. 13. With this solution, the second adaptive mesh is then constructed as shown in Fig. 14. The mesh consists only 780 elements which is approximately a half of those used in the first mesh. The corresponding predicted velocity distribution is shown in Fig. 15. The figure shows improved resolution of the velocity distribution because smaller elements are constructed in the region of large change in the velocity gradients whereas larger elements are generated in the other regions in order to reduce the computational time and computer memory. The entire process is repeated to generate the third mesh that consists of 1,100 elements as shown in Fig. 16. The predicted velocity and pressure distributions from this third adaptive mesh are shown in Figs. 17 and 18, respectively. These figures show improved flow solutions that include detailed flow velocity behavior with the region of flow recirculation beneath the flow inlet.

### 3.3 Flow through an orifice

To further demonstrate the adaptive meshing capability for capturing a more complex flow behavior, the problem of flow through an orifice is analysed. The flow enters from the left boundary of an orifice with the Reynolds number of 50 as shown in Fig. 19. Due to symmetry of the flow solution, only the upper or the lower half of the orifice can be analysed. Figure 20 shows the first adaptive mesh on the upper half that consists of 1,638 elements with relatively uniform element sizes. The figure also shows the predicted velocity distribution on the lower half. Detailed finite element mesh and velocity distributions near the orifice are shown in Fig. 21 with an enlargement in Fig. 22. With the predicted velocity distribution from the first mesh, the second adaptive mesh is constructed and the flow solution is carried out as shown in Fig. 23. This second adaptive mesh consists of only 701 elements with small elements automatically generated near the orifice where the large change in velocity gradients occurs. The entire process is then repeated to generate the third adaptive mesh with 1,620 elements as shown in Fig. 25. Even though the total number of elements generated in this third mesh is about the same as the first uniform mesh, the corresponding flow solution as shown in Fig. 25 can provide detailed flow resolution near the orifice. Detailed flow behaviors as shown in Figs. 26-27 indicate the increased flow velocity vectors that merge with flow from recirculation behind the orifice. Figure 28 shows the predicted pressure distribution from the third adaptive mesh. The predicted flow solutions from this third adaptive mesh demonstrates the capability of the combined adaptive meshing technique and the finite element method that can provide insight and help analysts to increase understanding of the complex flow behavior.

#### 4. Concluding Remarks

An adaptive meshing technique is combined with a finite element method for analysis of viscous incompressible flow problems. The finite element formulation and its computational procedure is first described. The Navier-Stokes equations consisting of the conservation of mass and momentums are solved. The corresponding finite element equations are derived and a corresponding computer program that can be executed on standard personal computers has been developed. The finite element method is combined with an adaptive meshing technique to improve the flow solution accuracy. The adaptive meshing technique generates an entirely new mesh based on the solution obtained from a previous mesh. The new mesh consists of clustered elements in the regions with large change in the velocity gradients to provide higher solution accuracy. At the same time, larger elements are generated in the other regions to reduce the computational time and computer memory.

The efficiency of the combined adaptive finite element method has been evaluated by the three viscous incompressible flow problems of flow past cylinder, flow in a sudden enlargement duct, and flow through an orifice. Results from these examples demonstrate that the combined method can provide detailed flow solution behaviors at a reduced computational time and computer memory.

#### 5. Acknowledgement

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) for supporting this research work.

#### 6. References

- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method, Fourth Ed., McGraw-Hill International, 1991.
- Hughes, T. J. R., Liu, W. K., and Brooks, A., "Review of Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 30, 1979, pp. 1-60.
- Kawahara, M., Yoshimura, N., Nakagawa, K., and Ohsaka, H., "Steady and Unsteady Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Fluid," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 1976, pp. 437-456.
- Yamada, Y., Ito, K., Yokouchi, T., and Ohtsubo, T., "Finite Element Analysis of Steady Fluid and Metal Flow," Finite Element in Fluid, Edited by Gallagher, R. H., et. al., John Wiley and Sons, New York, 1975.
- Zienkiewicz, O. C., Liu, Y. C., and Huang, G. C., "Error Estimates and Convergence Rates for Various Incompressible Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp. 2191-2202.
- Ramakrishnan, R., Bey, K.S. and Thornton, E. A. "Adaptive Quadrilateral and Triangular Finite Element Scheme for Compressible Flows," *AIAA Journal*, Vol. 28, 1990, pp. 51-59.
- Dechaumphai, P. and Thornton, E. A. "Nodeless Variable Finite Elements for Improved Thermal-Structural Analysis," *The International Conference on Finite Element Methods*, 1982, pp. 139-144.
- Lohner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C. "Adaptive Grid Refinement for Compressible Euler and Navier-Stokes Equations" *The International Conference on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, 1984, pp. 189-202.
- Dechaumphai, P., Tripattarat, J. and Sikkhabandit, S., "A Finite Element Method for Viscous Incompressible Flow Analysis," *Thammasat International Journal of Science and Technology*, Vol. 3, No. 2, 1998, pp. 60-68.
- Peraire, J., Vahjdati, M., Morgan, K., and Zienkiewicz, O. C., "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computation," *Journal of Computational Physics*. Vol. 72, 1987, pp. 449-466.
- Dechaumphai, P. "Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems," *Energy, Heat and Mass transfer*, Vol. 17, 1995, pp. 87-94.
- White, F. M., Viscous Fluid Flow, Second Ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- Dechaumphai, P., Finite Element Method in Engineering, Second Ed., Chulalongkorn University Press, Bangkok, 1999.
- Oden, J. T. and Carey, G. F., Finite Elements: Mathematical Aspects, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, New York, 1968.
- Gartling, D. K., "A Test Problem for Outflow Boundary Conditions - Flow Over a Backward Facing Step," *International of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, 1990, pp. 953-967.

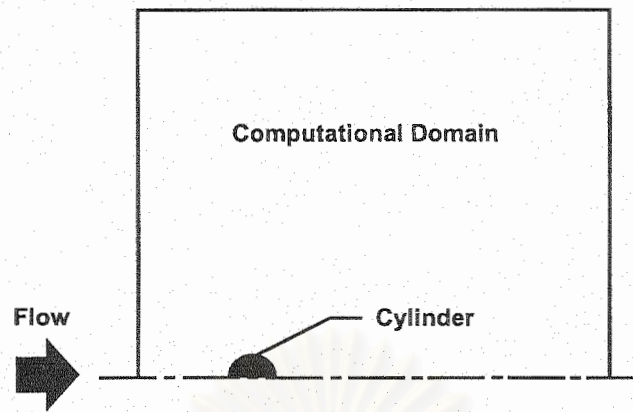


Fig. 1 – Flow past a cylinder.

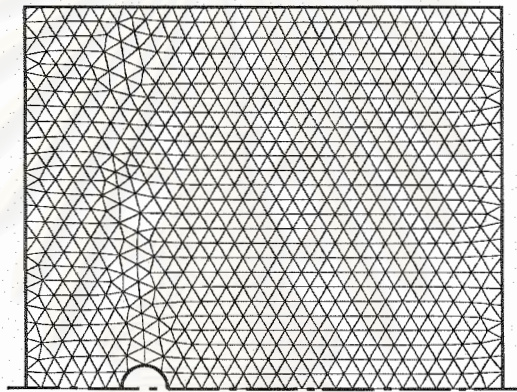


Fig. 2 – Initial finite element mesh for flow past a cylinder.

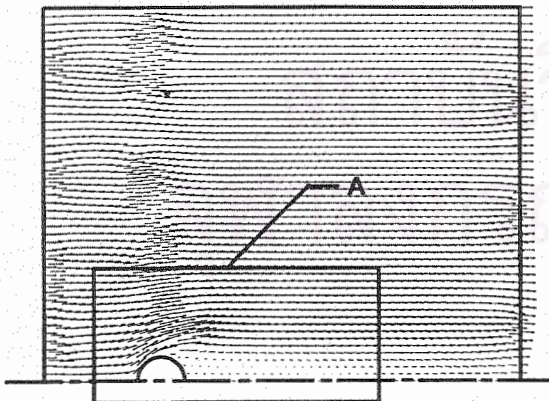


Fig. 3 – Predicted flow velocity distribution from the initial finite element mesh.

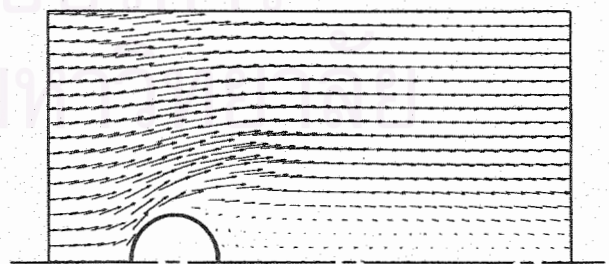


Fig. 4 – Detailed flow behavior near cylinder surface (insert A in Fig. 3 the initial mesh).

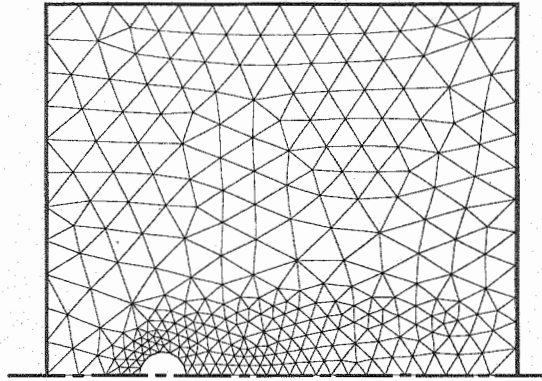


Fig. 5 – The second adaptive finite element mesh for flow past a cylinder.

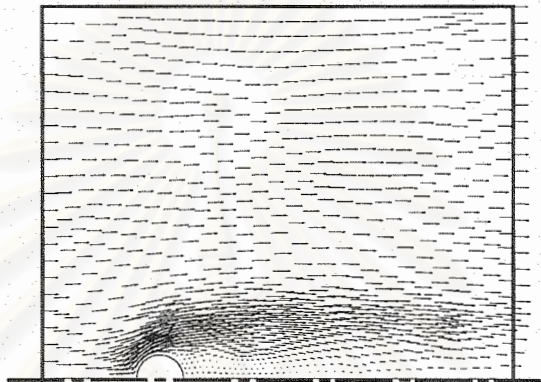


Fig. 6 – Predicted flow velocity distribution from the second adaptive finite element mesh.

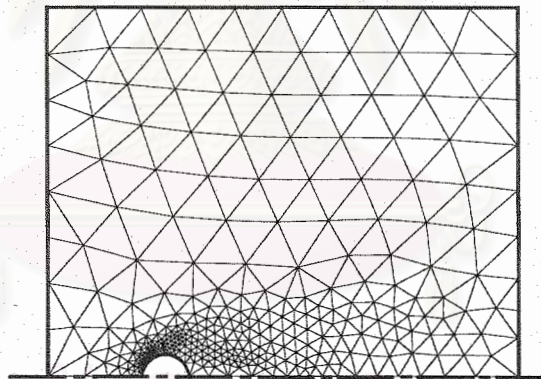


Fig. 7 – The third adaptive finite element mesh for flow past a cylinder.

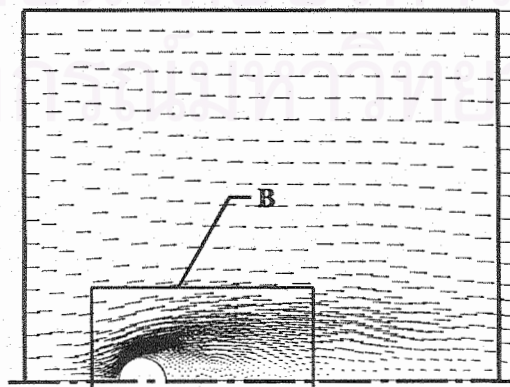


Fig. 8 – Predicted flow velocity distribution from the third adaptive finite element mesh.

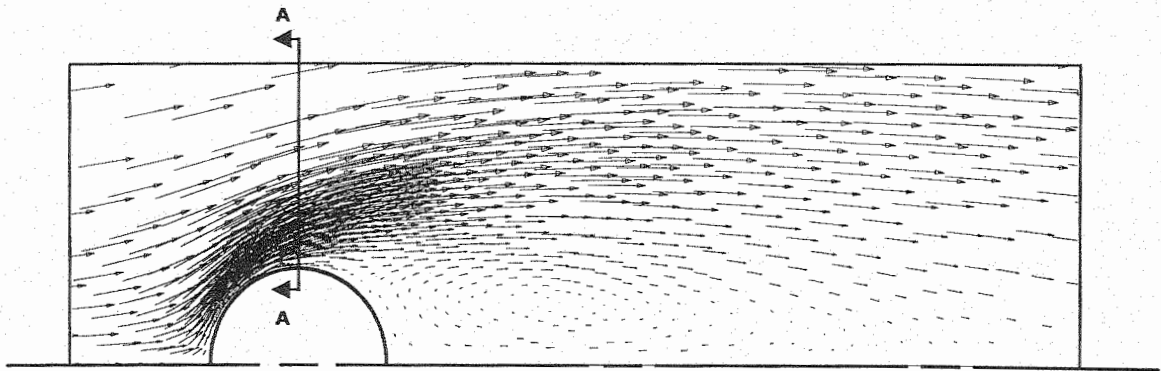


Fig. 9 – Detailed flow behavior near cylinder surface (insert B in Fig. 8) for the third adaptive mesh.

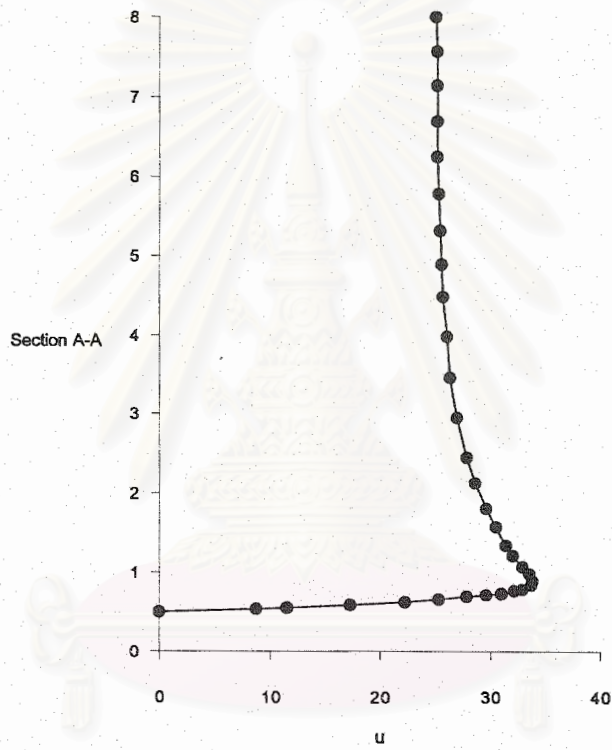


Fig. 10 – Flow velocity profile along section A-A in Fig. 7.

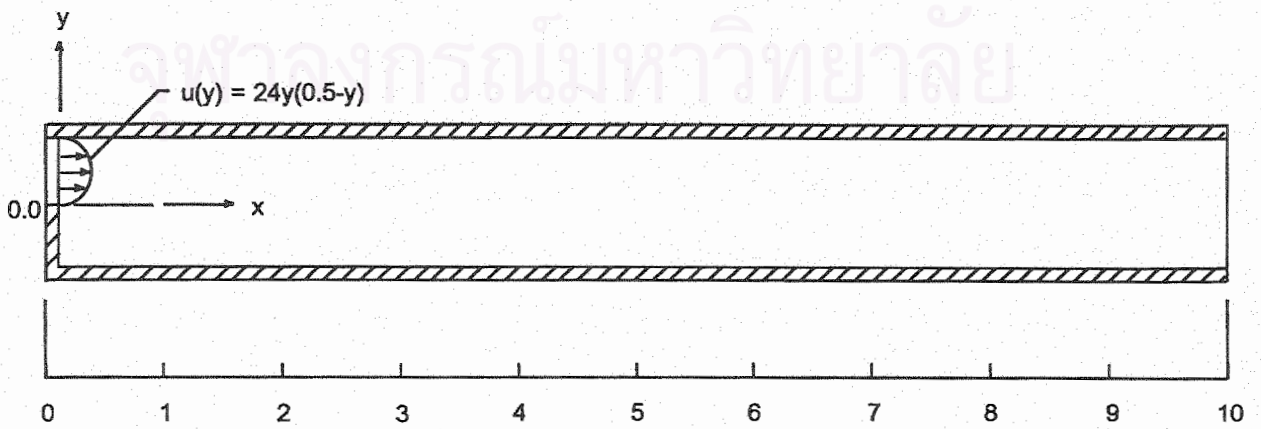


Fig. 11 - Flow in a sudden enlargement duct.



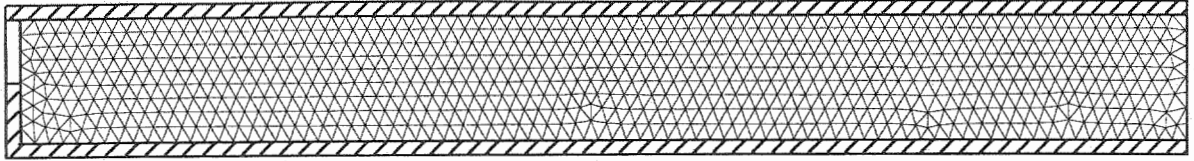


Fig. 12 – First adaptive mesh for flow in a sudden enlargement duct.

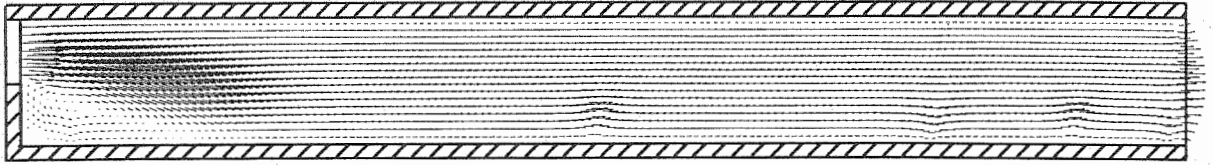


Fig. 13 – Predicted velocity distribution from the first adaptive mesh.

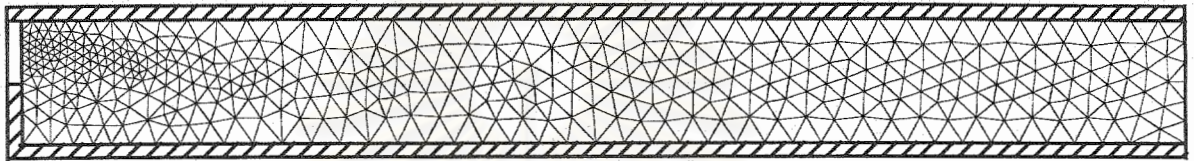


Fig. 14 – Second Adaptive mesh for flow in a sudden enlargement duct.

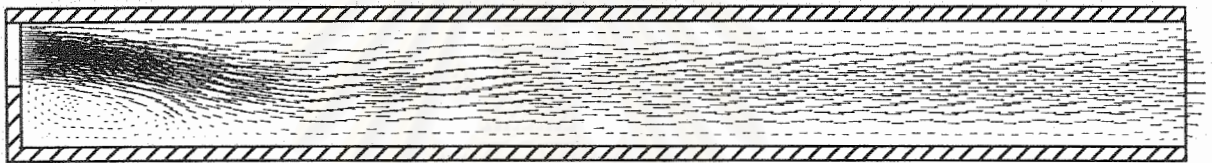


Fig. 15 - Predicted velocity distribution from the second adaptive mesh.

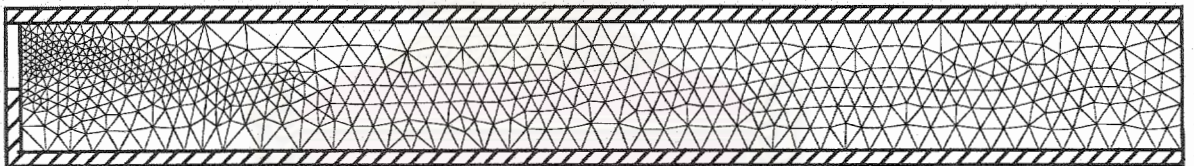


Fig. 16 – Third adaptive mesh for flow in a sudden enlargement duct.

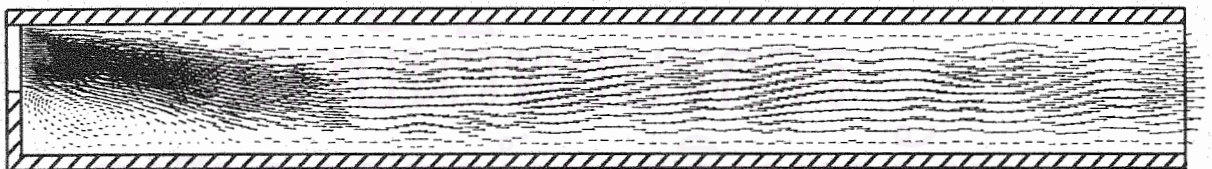


Fig. 17 – Predicted velocity distribution from the third adaptive mesh.

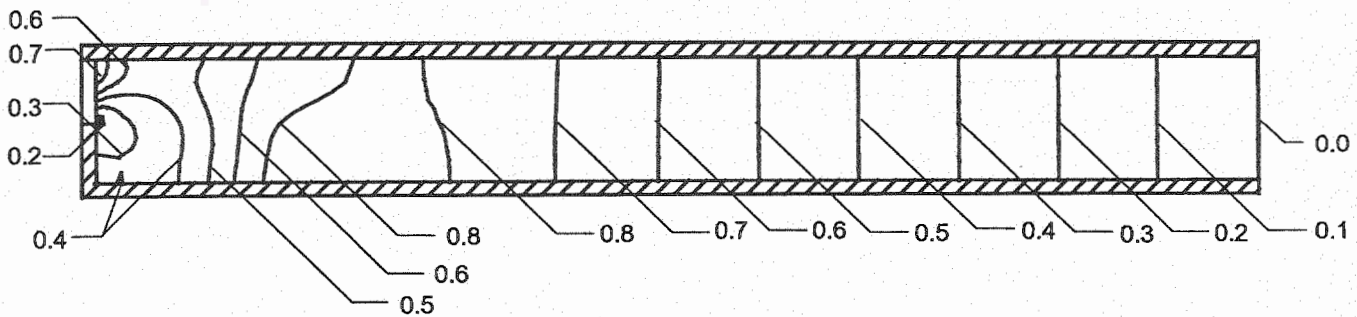


Fig. 18 – Predicted pressure distribution from the third adaptive mesh

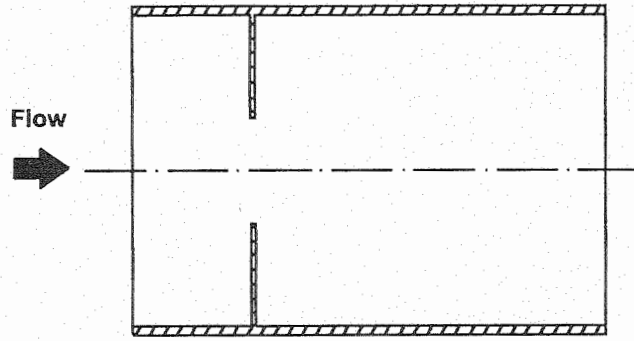


Fig. 19 – Flow through an orifice.

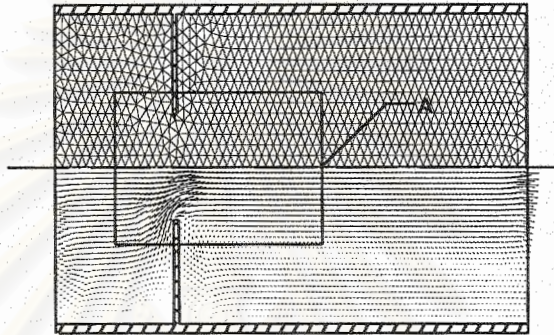


Fig. 20 – First adaptive mesh and predicted velocity distribution for flow through an orifice.

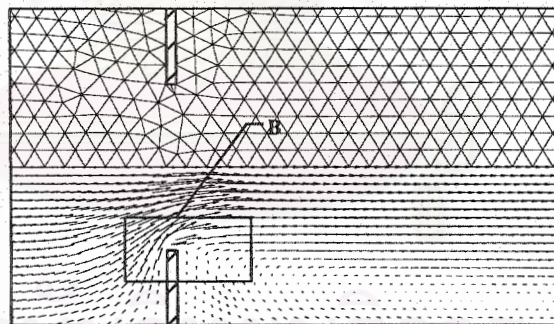


Fig. 21 – Detailed mesh and predicted velocity distribution of insert A in Fig. 20.

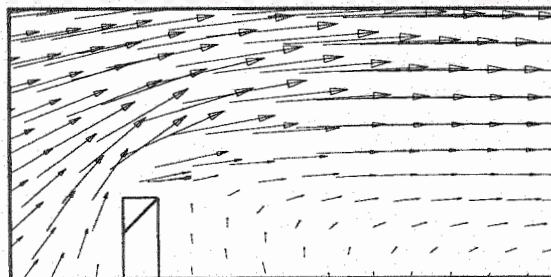


Fig. 22 – Detailed velocity distribution near the orifice of insert B in Fig. 21.

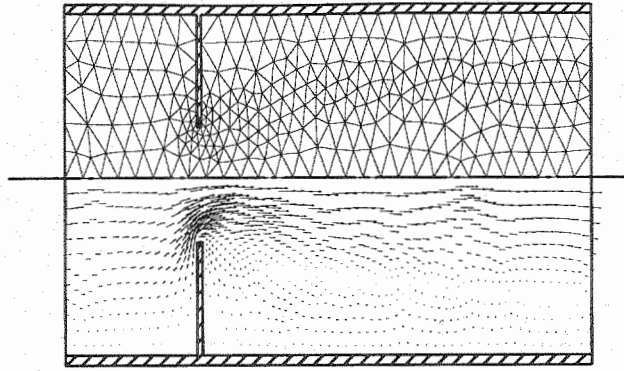


Fig. 23 - Second adaptive mesh and predicted velocity distribution for flow through an orifice.

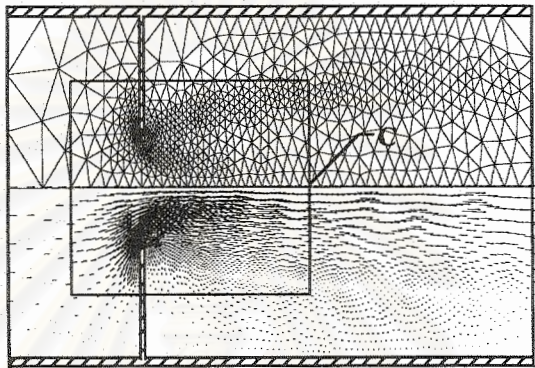


Fig. 24 - Third adaptive mesh and predicted velocity distribution for flow through an orifice.

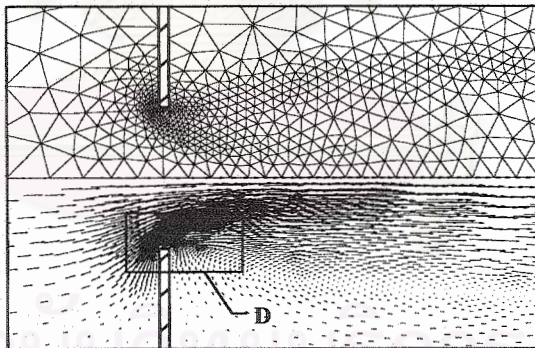


Fig. 25 - Detail mesh and predicted velocity distribution of insert C in Fig. 24.

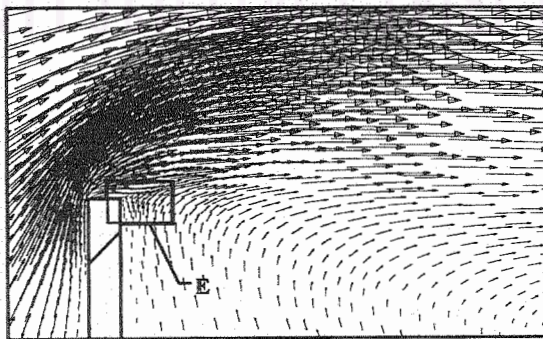


Fig. 26 - Detailed velocity distribution of insert D in Fig. 25.

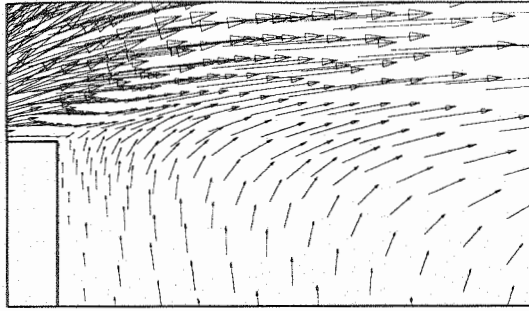


Fig. 27 – Detailed velocity distribution of insert E in Fig. 26.

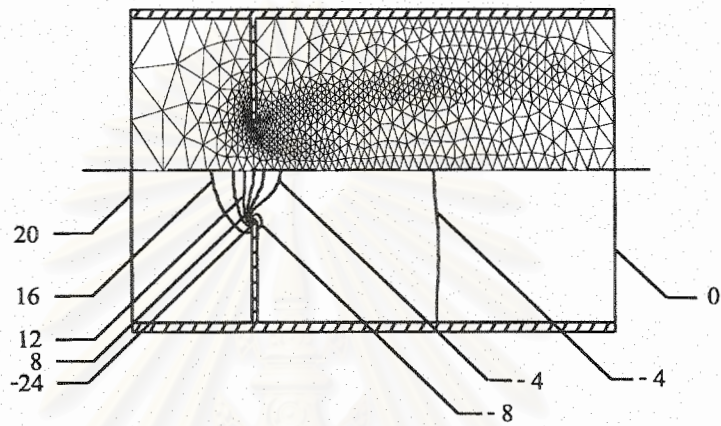


Fig. 28 – Predicted pressure distribution from the third adaptive mesh.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทความทางวิชาการ เรื่อง

*Adaptive Cell-Centered Finite Element  
Technique for Compressible Flows*

Submitted for Publication in the

**Journal of Energy, Heat and Mass Transfer**

1999

# Adaptive Cell-Centered Finite Element Technique for Compressible Flows

PRAMOTE DECHAUMPHAI AND WIROJ LIMTRAKARN

Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand

## Abstract

*An adaptive cell-centered finite element technique for analysis of high-speed compressible flows is presented. The analysis formulation and the computational procedure are described. The formulation is validated by developing a corresponding computer program that can be executed on standard personal computers. The method is combined with an adaptive meshing technique to increase the solution accuracy, and at the same time, to minimize the computational time and computer memory required. The efficiency of the combined method is evaluated by examples of oblique shock reflection at a wall, Mach 6 flow past an expansion ramp, and Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps.*

## Introduction

High-speed compressible flows past a typical geometry normally include complex flow characters, such as shock waves, flow expansions, thin boundary layers, shock-shock interactions, and shock-boundary layer interactions [1,2]. In addition, resolution of these flow characters is required to accurately predict aerodynamic pressure and skin friction distributions as well as aerodynamic heating rates on the geometry surfaces. These quantities are important and critical for the design of high-speed structural configurations. Most of these flow features are characterized by steep gradients that need robust analysis computational techniques with dense mesh refinement for high flow-behavior resolution. These requirements mean that the high-speed compressible flow analysis always involves large-scale computations with vast amount of computer time and data storage.

The analysis computational techniques that have been developed and used in the past few decades are based on the finite difference method [3]. Until recently since the past decade, several finite element algorithms have been under development to alleviate the difficulty of the analysis computation due to complex geometry of the flow field. The algorithms include the Taylor-Galerkin algorithm [4], the Petrov-Galerkin algorithm

[5], the least-squares algorithm [6], and the upwind cell-centered algorithm [7].

In this paper, the upwind cell-centered algorithm is combined with the adaptive meshing technique [8,9] to improve the finite element analysis solution accuracy and reduce the computational time as well as the computer memory. The upwind cell-centered algorithm is selected because of its robustness in capturing shock with less formulation complexity compared to other algorithms. The adaptive meshing technique is applied to place small elements in the region of large change in the solution gradients to increase solution accuracy and, at the same time, to place larger elements in the other regions to reduce the computational time and memory. The paper starts by explaining the theoretical formulation for high-speed compressible flow analysis and the solution procedure that lead to the development of the computer program. The basic idea behind the adaptive meshing technique is then described. Finally, the combined technique is evaluated by analyzing the problems of high-speed compressible flows of oblique shock reflection at a wall, Mach 6 flow past an expansion ramp, and Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps. Results are compared with those obtained from the conventional technique that uses nonadaptive meshes.

## Theoretical Formulation and Solution Procedure

### Governing Equations:

The equations for high-speed inviscid laminar compressible flow are governed by the conservation of mass, momentum, and energy. These equations, in two dimensions, are written in the conservation form [10] as,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{U\} + \frac{\partial}{\partial x}\{E\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F\} = 0 \quad (1)$$

The vector  $\{U\}$  contains the conservation variables defined by,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (2)$$

where  $\rho$  is the fluid density,  $u$  and  $v$  are the velocity components, and  $\varepsilon$  is the total energy. The vectors  $\{E\}$  and  $\{F\}$  consist of the inviscid fluxes in the  $x$  and  $y$  directions, respectively. These inviscid flux vectors are given by,

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u \varepsilon + pu \end{Bmatrix}; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v u \\ \rho v \varepsilon + pv \end{Bmatrix} \quad (3)$$

where  $p$  is the pressure. The total energy consists of the internal energy and the kinetic energy defined by,

$$\varepsilon = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (4)$$

where  $e$  is the internal energy that can be written in the form,

$$e = c_v T \quad (5)$$

where  $c_v$  is the specific heat at constant volume, and  $T$  is the temperature.

### Analysis Solution Algorithm:

The integral form of the Euler equation, (1) for an element of domain  $\Omega$  is first written,

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\{U\}d\Omega = - \int \frac{\partial}{\partial x}\{E\}d\Omega - \int \frac{\partial}{\partial y}\{F\}d\Omega \quad (6)$$

The Gauss divergence theorem is then applied to the terms on right-hand-side of equation (6) as,

$$- \int \frac{\partial}{\partial x}\{E\}d\Omega - \int \frac{\partial}{\partial y}\{F\}d\Omega = - \int_{\Gamma_e} \{G\} \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (7)$$

where flux vector  $\{G\}$  is the combination of the flux vectors,  $\{E\}$  and  $\{F\}$ , and  $\hat{n}$  is the unit vector normal to the element boundary  $\Gamma_e$ .

Equation (7) is evaluated by summing the normal fluxes from all the sides,  $\Gamma_e$ , for each element. The fluxes normal to the element sides are then approximated by the numerical inviscid fluxes,  $\bar{G}$ , which are the average quantities normal to the element sides, i.e.,

$$- \int_{\Gamma_e} \{G\} \cdot \hat{n} d\Gamma = - \sum \delta \{\bar{G}\} \quad (8)$$

where  $\delta$  is the length of element sides and the summation is performed for all the sides.

By substituting equation (8) into (6), and applying an explicit time marching algorithm [11], equation (6) becomes,

$$\frac{(U^{n+1} - U^n) A_e}{\Delta t} = - \sum \delta \{\bar{G}\} \quad (9)$$

where  $U^{n+1}$  and  $U^n$  are the conservation variables at time steps  $n+1$  and  $n$ , respectively,  $\Delta t$  is the time step and  $A_e$  is the element area.

The basic concept behind the upwind cell-centered algorithm used in this paper is to determine the flux across element interfaces by Roe's averaging procedure [7]. The average inviscid flux  $\bar{G}$  is given by,

$$\bar{G} = \frac{1}{2} [G_L + G_R + |A^*| (U_L - U_R)] \quad (10)$$

where the subscripts  $L$  and  $R$  denote the left and right elements, respectively. The last term in equation (10) may be viewed as artificial diffusion needed for solution stability. This diffusion is represented by the product of the

Jacobian matrix  $[A^*]$  and the difference between the left and right element conservation variables  $U_L$  and  $U_R$ . The Jacobian matrix  $[A^*]$  is defined by,

$$[A^*] = [R]^T [A] [R] \quad (11)$$

where

$$[R]^T = \begin{bmatrix} -\frac{l}{c^2} & 0 & \frac{l}{2c^2} & \frac{l}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & -m & \frac{u+c_x}{2c^2} & \frac{u-c_x}{2c^2} \\ -\frac{v}{c^2} & \ell & \frac{v+c_y}{2c^2} & \frac{v-c_y}{2c^2} \\ -\frac{\alpha}{c^2} & V & \frac{\alpha+Uc}{2c^2} + \frac{l}{2\beta} & \frac{\alpha-Uc}{2c^2} + \frac{l}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} |U| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |U| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |U+c| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |U-c| \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha\beta - c^2 & -\beta u & -\beta v & \beta \\ -V & -m & \ell & 0 \\ \alpha\beta - Uc & c_x - \beta u & c_y - \beta u & \beta \\ \alpha\beta + Uc & -c_x - \beta u & -c_y - \beta u & \beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

In these matrices,

$$\begin{aligned} U &= ul + vm & ; & & V &= -um + vl \\ c_x &= c\ell & ; & & c_y &= cm & ; & & c &= \frac{\gamma p}{\rho} \\ \alpha &= (u^2 + v^2)/2 & ; & & \beta &= \gamma - 1 \end{aligned}$$

where  $\ell$  and  $m$  are the direction cosines of the unit vector normal to that side, and  $\gamma$  is the specific heat ratio. Then the increments of the conservation variables,  $\Delta U = U^{m+1} - U^m$ , are determined from,

$$\left[ [I] + \frac{\Delta t}{A_e} \sum [ |A^*| ] \frac{\delta}{2} \right] \{ \Delta U \} = \frac{-\Delta t}{A_e} \sum \delta \{ \bar{G} \} \quad (15)$$

where  $[I]$  is the identity matrix.

### Adaptive meshing technique:

Adaptive mesh-generation techniques may be classified into two major categories: 1) refinement/derefinement, and 2) remeshing. The first category, the adaptive refinement/redefinement technique, can be further classified into three subcategories: a) the h method, b) the p method, and c) the r method. In the h method, the elements in the initial mesh are refined into smaller elements or derefined into larger elements [12]. The p method maintains the geometry of the elements of the initial mesh but increases (or decreases) the order of the polynomials used for the element interpolation functions [13]. The r method keeps the number of elements and their connectivities the same but relocates the nodes [14].

The remeshing technique, the second adaptive mesh-generation category, generates an entirely new mesh based on the solution obtained from an earlier mesh [8,9]. The technique is combined with the upwind cell-centered finite element formulation in this paper to solve for solutions of high-speed compressible flow problems. The idea is to construct a new mesh that consists of small elements in the regions with large change in solution gradients and large elements in the other regions where the change in solution gradients is small. As an example, small elements are needed in the regions of shock waves to capture shock resolution, where as larger elements can be used in the free-stream regions because the flow behavior is uniform. To determine proper element sizes at different locations in the flow field, the solid-mechanics concept of determining the principal stresses from a given state of stresses at a point is employed. Since the fluid density changes abruptly across the shock waves, thus the density distribution can be used as an indicator in the determination of proper element size.

Because small elements must be placed in the region the shock wave where large changes in the density gradients occur, thus the second derivatives of the density at a point with respect to global coordinates  $x$  and  $y$  are needed to compute,



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Then the principal quantities in the principal directions  $X$  and  $Y$  where the cross derivatives vanish, are determined,

$$\lambda_1 = \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|, \quad \lambda_2 = \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right| \quad (17)$$

These principal quantities are then used to compute proper element sizes  $h_1$  and  $h_2$  in the two principal directions using the condition [15],

$$h_1^2 \lambda_1 = h_2^2 \lambda_2 = \text{constant} = h_{min}^2 \lambda_{max} \quad (18)$$

where  $h_{min}$  is the specified minimum element size, and  $\lambda_{max}$  is the maximum principal quantity for the entire model.

Based on the condition shown in equation (18), the element size is generated according to the given minimum element size  $h_{min}$ . Specifying too small  $h_{min}$  may result in a model with an excessive number of elements. On the other hand, specifying too large  $h_{min}$  may result in inadequate solution accuracy or excessive analysis and meshing cycles. These factors must be considered prior to generating a new mesh. Note that, because the technique generates an entirely new mesh with different nodal locations from the old mesh, interpolation of the solution from the old to the new mesh should be used to increase the analysis solution convergence.

### Examples

Three examples are presented to evaluate the capability of the upwind cell-centered finite element formulation combining with the adaptive meshing technique for analysis of high-speed compressible flows. The three examples are the oblique shock reflection at a wall, Mach 6 flow past an expansion ramp, and Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps. All computations were made on standard personal computer with Pentium 100 MHz processor.

### Oblique shock reflection at a wall:

The problem statement of an oblique shock reflection at a wall is described in Fig. 1. The Mach 2.9 and Mach 2.37 flows enter through the left and the top boundaries of the computational domain resulting in an oblique shock wave from the top-left corner. This shock wave is incident and reflected by the wall as highlighted in the figure. Figure 2(a) shows a typical uniform finite element model that consists of structured mesh with 800 triangular elements and 451 nodes. With this finite element model, the computer program developed was used to carry out for the solutions. A typical solution of density distribution in form of the contour lines is presented in Fig. 2(b). The figure shows a shock reflecting from a wall. The computed shock is not sharp because the elements along the shock lines are not small enough. Such solution suggests the use of small elements clustered along the shock line to provide better shock resolution.

Small elements along the shock line for improved shock resolution can be generated by using the adaptive meshing technique described in the preceding section. The technique starts from generating a relatively uniform mesh such as shown in Fig. 3(a) with 844 elements and 475 nodes. With the first mesh, the fluid analysis is performed to obtain the corresponding flow solution as illustrated by the density contours in Fig. 3(b). Based on this flow solution and the use of the adaptive meshing technique, the second mesh is created as shown in Fig. 4(a). This second mesh consists of 831 elements and 445 nodes with smaller elements clustered along the shock line and larger elements in the free stream region. The fluid analysis is then repeated to yield a flow solution as illustrated by the density contours in Fig. 4(b). The entire process is repeated again to generate a third adaptive mesh with 845 elements and 444 nodes and the corresponding flow solution of density contours as shown in Fig. 5(a) and 5(b), respectively. The final solution as shown in Fig. 5(b) indicates good solution accuracy for shock reflection because small elements generated along the shock line. And since larger elements are used in the other regions, thus the total CPU time for fluid analysis is minimized. A typical analysis requires a total of 900 time steps for a converged solution with approximately 90 to

180 CPU seconds on standard computer with Pentium 100 MHz processor.

### Mach 6 Flow Past an Expansion Ramp:

The problem statement of a Mach 6 flow past an expansion ramp is described in Fig. 6. The flow creates mach waves from an expansion ramp as highlighted in the figure. Figure 7(a) shows a nonadaptive finite element mesh with 1,008 elements and 559 nodes. The corresponding predicted density distribution represented by contour lines is presented in Fig. 7(b). The figure shows that the resolution of the computed mach waves from an expansion corner are not good enough due to the element sizes are too large. The solution from this initial study using nonadaptive mesh thus suggests the need of clustered small elements in the region of the expansion corner for better solution.

Small elements near the expansion corner for improving mach wave solution can be generated by using the adaptive meshing technique. The technique starts from generating a relatively uniform mesh such as that shown in Fig. 8(a) with 1,131 elements and 621 nodes. The fluid analysis is performed to yield the corresponding flow solution shown by the density contours in Fig. 8(b). Based on this flow solution, the adaptive meshing technique is then used to generate the second adaptive mesh with 990 elements and 548 nodes as shown in Fig. 9(a). The fluid analysis is then repeated to obtain a flow solution as illustrated by the density contours in Fig. 9(b). The entire process is repeated again to generate the third mesh as shown in Fig. 10(a) with 1,071 elements and 565 nodes. Small elements are clustered around the expansion corner as can be seen clearly in this figure. After the fluid analysis is performed using this third mesh, good quality of flow resolution with mach wave is obtained as shown in Fig. 10(b).

### Mach 2.6 Flow in a Channel with Compression and Expansion Ramps:

To further evaluate the upwind cell-centered finite element formulation combining with the adaptive meshing technique, the analysis of Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps is performed. The problem statement and the sketch of the flow behavior are shown in Fig. 11. The flow

behavior is more complex than those in the previous examples. The flow creates an oblique shock from the compression ramp that impinges at the middle of the upper wall resulting in a reflecting shock. The reflecting shock also intersects with the mach waves generated from the expansion ramp.

The analysis is first performed by using a nonadaptive finite element mesh as shown in Fig. 12(a). The mesh consists of 912 elements and 507 nodes. The corresponding predicted density distribution represented by contour lines is presented in Fig. 12(b). The figure shows that the computed shock waves are not sharp and mach wave resolution around the expansion corner is not good due to the element sizes are too large. The solution from this initial study using nonadaptive mesh thus suggests the need of clustered small elements along shock lines and at the expansion corner for better shock resolution. It should be noted that the flow behavior of intersected zone is not known to the analyst a priori. The use of the adaptive meshing technique that will be explained next can be used to overcome such difficulty.

The combined finite element analysis and adaptive meshing technique starts from generating a relatively uniform mesh such as that shown in Fig. 13(a) with 887 elements and 495 nodes. The fluid analysis is performed to yield the corresponding flow solution shown by the density contours in Fig. 13(b). Based on this flow solution, the adaptive meshing technique is then used to generate the second adaptive mesh that consists of 525 elements and 296 nodes as shown in Fig. 14(a). The flow analysis is then performed to yield the corresponding flow solution such as the density contours shown in Fig. 14(b). The process is repeated again to generate the third mesh as shown in Fig. 15(a) with 1,077 elements and 581 nodes. Small elements are clustered along the oblique and reflecting shock and around the expansion corner as can be seen clearly in this figure. After the fluid analysis is performed using the third mesh, good quality of fluid solution with sharp shock lines and clear mach waves is obtained as shown in Fig. 15(b). This example demonstrates the capability of the combined finite element method and the adaptive meshing technique that can provide improved flow solution accuracy for general flow behavior that are not known a priori.

## Concluding Remarks

A finite element method based on an upwind cell-centered algorithm for analysis of high-speed inviscid compressible flow is presented. The method is combined with an adaptive meshing technique to improve the flow solution accuracy. The technique generates an entirely new mesh based on the solution obtained from the previous mesh. The new mesh consists of clustered elements in the regions with large change in solution gradients to provide high solution accuracy. At the same time, large elements are generated in the other regions to minimize the computational time and computer memory. The finite element formulation was presented and the basic idea behind the adaptive meshing technique was described.

Three examples of high-speed compressible flows were presented to assess the effectiveness of the combined method. These examples are the oblique shock reflection at a wall, Mach 6 flow past an expansion ramp and Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps. All computations were performed on standard personal computers. Depending on the number of unknowns on different meshes used in the three examples, typical analysis requires approximately 90 to 180 CPU seconds on standard personal computer with Pentium 100 MHz processor. The three examples demonstrate that the combined method can provide high solution accuracy at reduced computational time and computer memory for analysis of high-speed compressible flow problems.

## Acknowledgement

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) for supporting this research work.

## Nomenclature

$A_e$	= element area
$[A^*]$	= Jacobian matrix
$e$	= internal energy
$\{E\}$	= x inviscid flux
$\{F\}$	= y inviscid flux
$c_v$	= specific heat at constant volume

$\{G\}$	= combination of the inviscid flux vector, $\{E\}$ and $\{F\}$
$\bar{G}$	= average inviscid flux
$h_1, h_2$	= element spacing
$[I]$	= identity matrix
$l, m$	= direction cosines
$\hat{n}$	= unit normal vector
$p$	= pressure
$x, y$	= coordinate directions
$X, Y$	= principle directions
$u, v$	= x and y velocity
$\{U\}$	= conservation variable
$\Gamma_e$	= element boundary
$\Omega$	= element domain
$\delta$	= length of element sides
$\varepsilon$	= total energy
$\lambda_1, \lambda_2$	= strain components
$\rho$	= density

## References

1. Anderson, J. D. Jr., Modern Compressible Flow With Historical Prospective, McGraw-Hill, New York, 1982.
2. Anderson, J. D. Jr., Fundamentals of Aerodynamics, Second Ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
3. Hirsh, C., Numerical Computation of Internal and External Flows, John Wiley & Sons, New York, 1990.
4. Dechaumphai, P. and Weiting, A. R., "Coupled Fluid-Thermal-Structural Analysis for Aerodynamically Heated Structures," *Finite Element Analysis in Fluids*, edited by T. J. Chung and G. R. Karr, Univ. Of Alabama in Huntsville Press, Huntsville, AL, April 1989, pp. 165-171.
5. Hughes, T. J. R., "Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods With Special Reference to the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 7, 1987, pp. 1261-1275.
6. Jiang, B. N. and Carey, G. F., "A stable Least-Squares Finite Element Method for Non-linear Hyperbolic Problems," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, 1988, pp. 933-942.

7. Gnoffo, P. A., "Application of Program LAURA to three-dimensional AOTV Flowfields," AIAA Paper 86-0565, January, 1986.
8. Dechaumphai, P., "Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems," *Journal Of Energy, Heat & Mass Transfer*, Vol. 17, No. 2, 1995, pp. 87-94.
9. Peraire, J. Vahjdati, M., Morgan, K., and Zienkiewicz, O. C., "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computation," *Journal Of Computational Physics*, Vol. 72, 1987, pp. 449-466.
10. Dechaumphai, P., Finite Element Method in Engineering, Second Ed., Chulalongkorn University Press, Bangkok, 1999.
11. Dechaumphai, P., Numerical Method in Engineering, Second Ed., Chulalongkorn University Press, Bangkok, 1999.
12. Ramakrishnan, R., Bey, K. S. and Thornton, E. A., "Adaptive Quadrilateral and Triangular Finite-Element Scheme for Compressible Flows," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 1, 1990, pp. 51-59.
13. Dechaumphai, P. and Thornton, E. A., "Nodeless Variable Finite Elements for Improved Thermal-Structure Analysis," *The International Conference on Finite Element Methods*, 1982, pp. 139-144.
14. Lohner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C., "Adaptive Grid Refinement for Compressible Euler and Navier-Stokes Equations," *The International Conference on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, 1984, pp. 189-202.
15. Oden, J. T. and Carey, G. F., Finite Elements: Mathematical Aspects. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

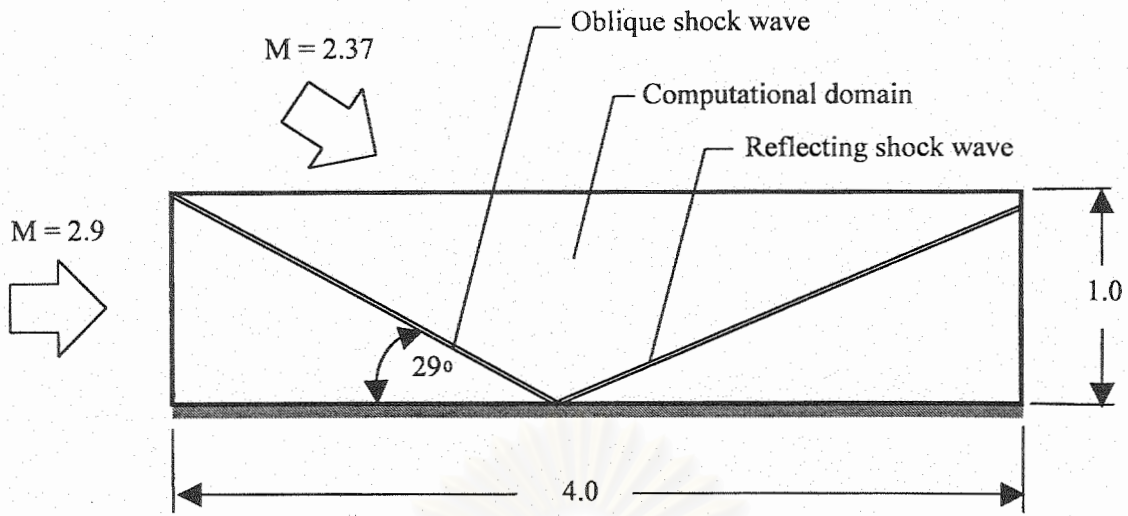
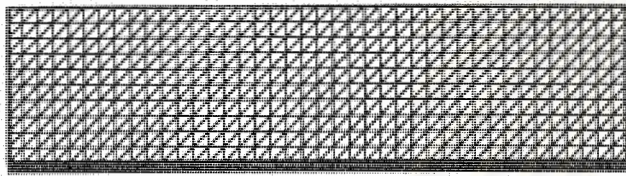
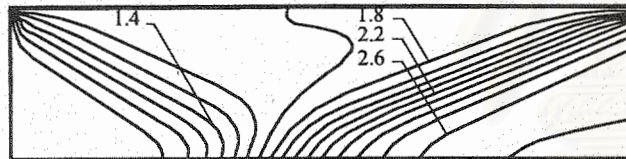


Fig. 1 - Oblique shock reflection at a wall.

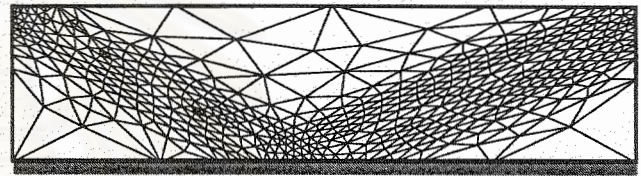


(a) Nonadaptive mesh

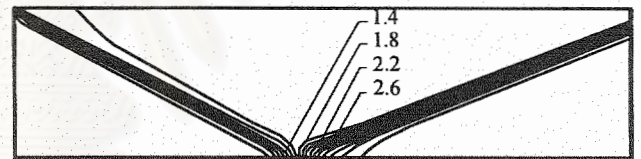


(b) Density contours

Fig. 2 - Nonadaptive finite element mesh and corresponding density contours for oblique shock reflection at a wall.

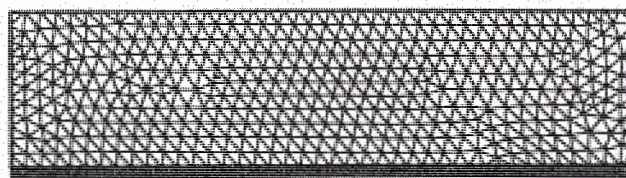


(a) Second adaptive mesh

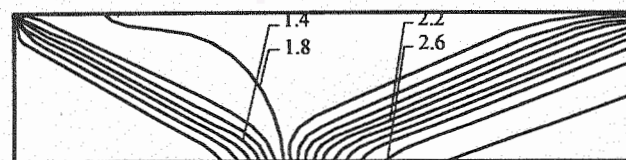


(b) Density contours

Fig. 4 - Second adaptive finite element mesh and corresponding density contours for oblique shock reflection at a wall.

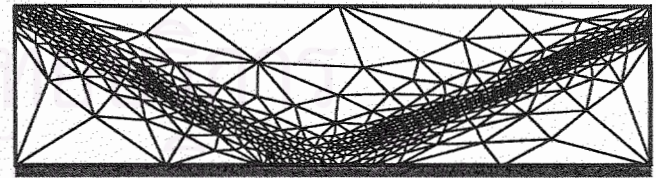


(a) First adaptive mesh

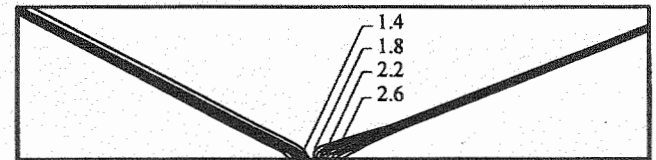


(b) Density contours

Fig. 3 - First adaptive finite element mesh and corresponding density contours for oblique shock reflection at a wall.



(a) Third adaptive mesh



(b) Density contours

Fig. 5 - Third adaptive finite element mesh and corresponding density contours for oblique shock reflection at a wall.

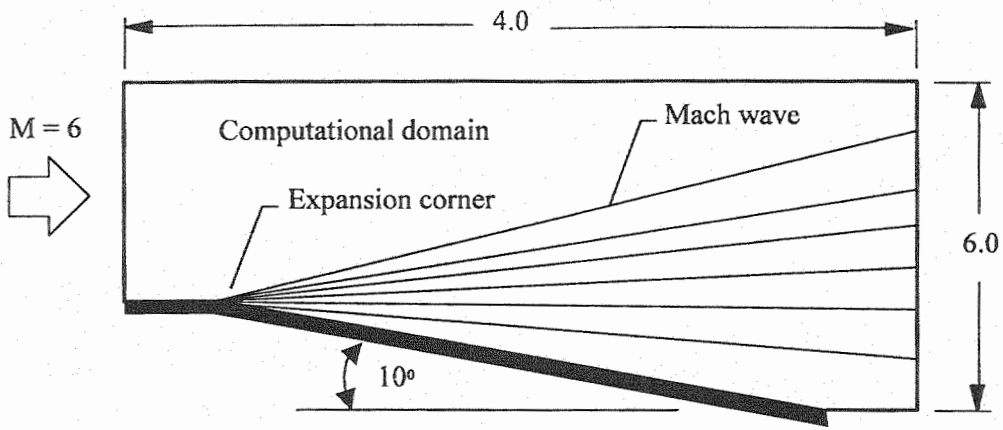
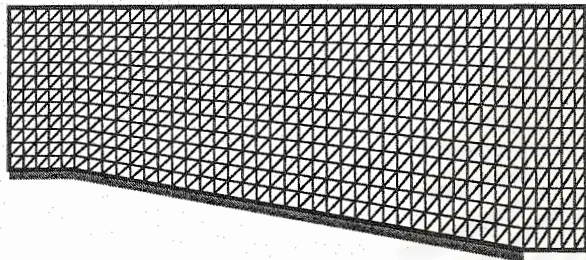
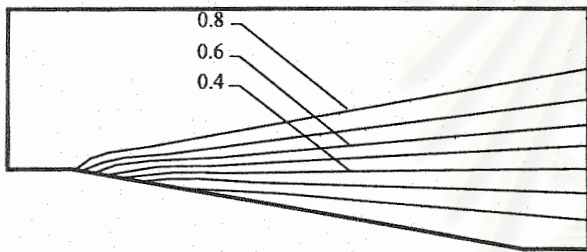


Fig. 6 - Mach 6 flow past an expansion ramp.

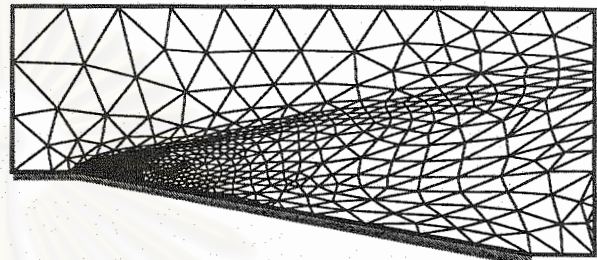


(a) Nonadaptive mesh

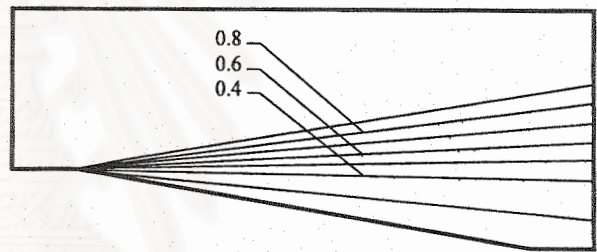


(b) Density contours

Fig. 7 - Nonadaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 6 flow past an expansion ramp.

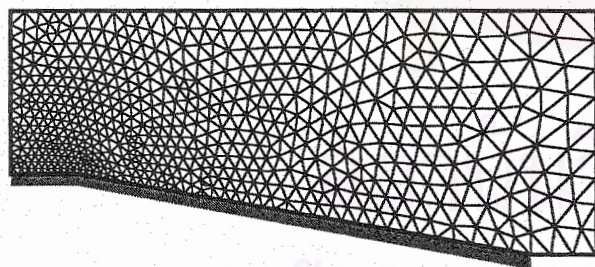


(a) Second adaptive mesh

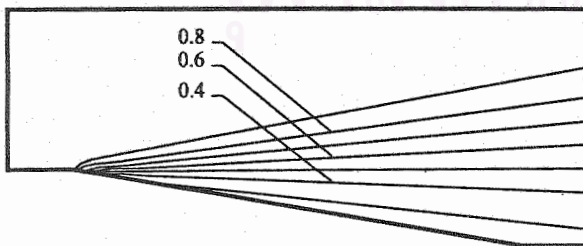


(b) Density contours

Fig. 9 - Second adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 6 flow past an expansion ramp.

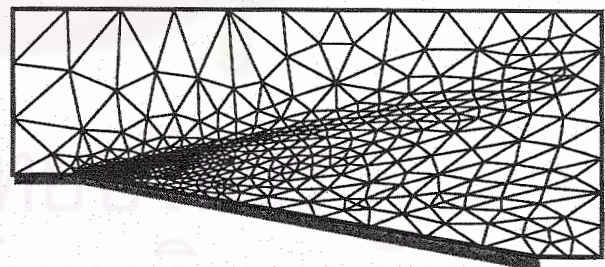


(a) First adaptive mesh

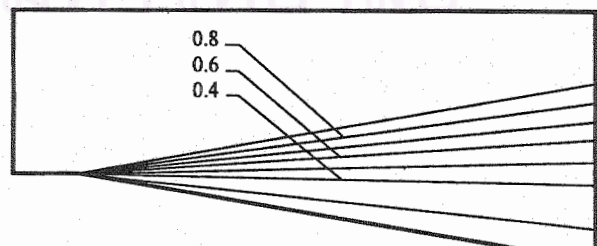


(b) Density contours

Fig. 8 - First adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 6 flow past an expansion ramp.



(a) Third adaptive mesh



(b) Density contours

Fig. 10 - Third adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 6 flow past an expansion ramp.

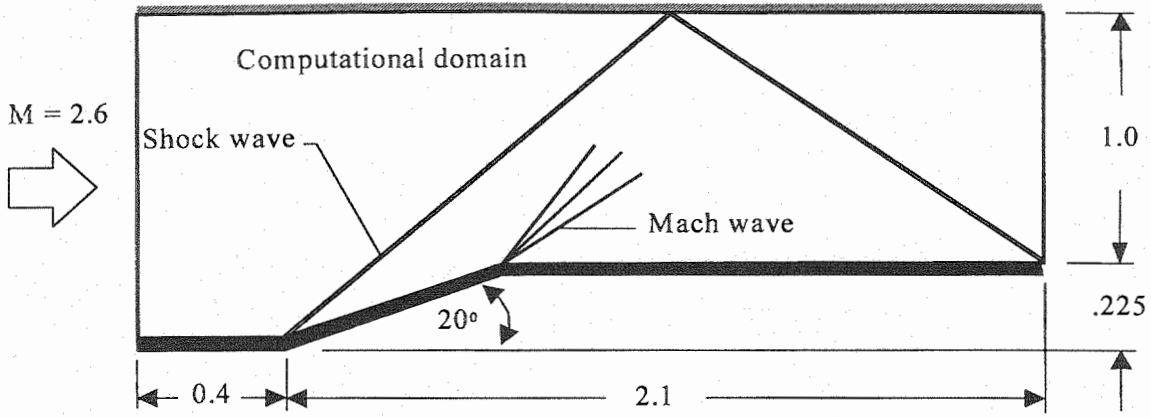
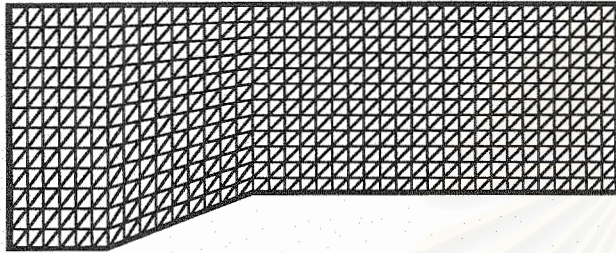
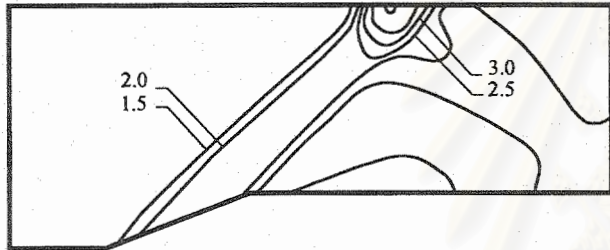


Fig. 11 - Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps.

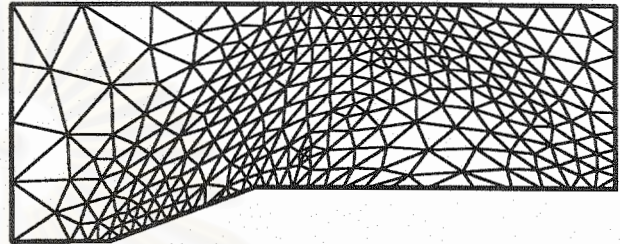


(a) Nonadaptive mesh



(b) Density contours

Fig. 12 - Nonadaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps.

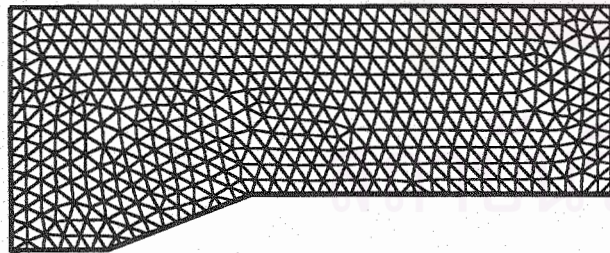


(a) Second adaptive mesh



(b) Density contours

Fig. 14 - Second adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps.

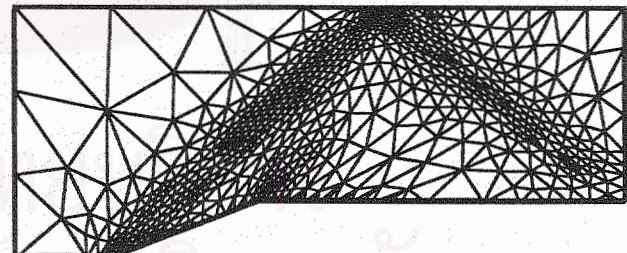


(a) First adaptive mesh

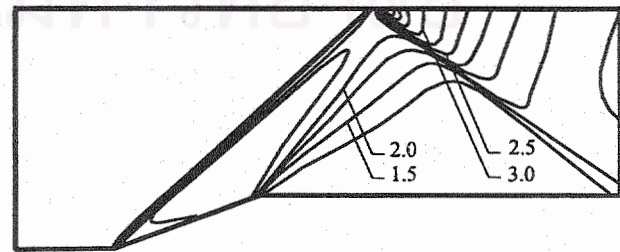


(b) Density contours

Fig. 13 - First adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps.



(a) Third adaptive mesh



(b) Density contours

Fig. 15 - Third adaptive finite element mesh and corresponding density contours for Mach 2.6 flow in a channel with compression and expansion ramps.

ภาคผนวก ก

รายละเอียดไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์  
การไหลแบบหนีดแต่ไม่อัดตัว (LOWFLOW)

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



```

C PROGRAM LOWFLOW
C
C A FINITE ELEMENT COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING NAVIER-STOKES
C EQUATIONS FOR VISCOUS INCOMPRESSIBLE THERMAL FLOWS.
C DR. PRAMOTE DECHAUMPHAI
C FACULTY OF ENGINEERING
C CHULALONGKORN UNIVERSITY
C
C THE VALUES DECLARED IN THE PARAMETER STATEMENT BELOW SHOULD
C BE ADJUSTED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS AND TYPES
C OF COMPUTERS:
C
C MXPOIV = MAXIMUM NUMBER OF VEL. & TEMP. NODES IN THE MODEL
C MXPOIP = MAXIMUM NUMBER OF PRESSURE NODES IN THE MODEL
C MXELE = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C MXFREE = MAXIMUM NUMBER OF OUTFLOW BOUNDARIES
C MXFLUX = MAXIMUM NUMBER OF HEATED BOUNDARIES
C MXLINK = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS THAT USE SAME NODES
C NMAX = MAXIMUM NUMBER OF NON-ZERO COEFFICIENTS
C ITMAX = MAXIMUM ITERATIONS FOR CONJUGATE GRADIENTS
C
C PARAMETER (MXPOIV=2000, MXPOIP=500, MXELE=1000, MXFREE=100,
C * MXFLUX= 100, MXLINK= 10 )
C PARAMETER (NMAX=900000, ITMAX=20000)
C PARAMETER (MXNEQ=3*MXPOIV+MXPOIP)
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C DIMENSION COORD(MXPOIV,2), TEXT(20)
C DIMENSION UVEL(MXPOIV), VVEL(MXPOIV), TEMP(MXPOIV), PRES(MXPOIV)
C DIMENSION FLUX(MXPOIV)
C DIMENSION B(MXNEQ), BN(MXNEQ), AAS(MXNEQ)
C DIMENSION AKELE(21,21,MXELE), RELE(21,MXELE)
C DIMENSION ICOUNT(MXPOIV), IASSEM(MXPOIV,MXLINK)
C DIMENSION SOL(MXNEQ), DSOL(MXNEQ)
C DIMENSION P(MXNEQ), R(MXNEQ), Z(MXNEQ), Q(MXNEQ)
C DIMENSION SA(NMAX), SB(NMAX), SC(NMAX)
C CHARACTER*20 NAME1, NAME2, NAME3, NAME4
C
C INTEGER IJA(NMAX), IJB(NMAX), IJC(NMAX)
C INTEGER INTMAT(MXELE,6), INTOUT(MXFREE,4), INTFLUX(MXFLUX,4)
C INTEGER IBCU(MXPOIV), IBCV(MXPOIV), IBCT(MXPOIV), IBCP(MXPOIV)
C
C 10 WRITE(6,20)
C 20 FORMAT(/,' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:', /)
C READ(5,'(A)',ERR=10) NAME1
C OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C OPEN(UNIT=9, FILE='CHECK.OUT', STATUS='NEW')
C
C READ TITLE OF COMPUTATION:

```

```

C READ(7,*) NLines
C DO 30 ILINE=1,NLines
C READ(7,35) TEXT
C 35 FORMAT(20A4)
C 30 CONTINUE
C
C READ INPUT DATA:
C
C READ(7,35) TEXT
C WRITE(9,45)
C 45 FORMAT(' NPOIV NPOIP NELEM NFREE NFLUX NITER TOL')
C READ(7,*) NPOIV, NPOIP, NELEM, NFREE, NFLUX, NITER, TOL
C WRITE(9,55) NPOIV, NPOIP, NELEM, NFREE, NFLUX, NITER, TOL
C 55 FORMAT(6I8, F8.2)
C IF(NPOIV.GT.MXPOIV) WRITE(6,65) NPOIV
C 65 FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOIV TO',I5)
C IF(NPOIV.GT.MXPOIV) STOP
C IF(NPOIP.GT.MXPOIP) WRITE(6,75) NPOIP
C 75 FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOIP TO',I5)
C IF(NPOIP.GT.MXPOIP) STOP
C IF(NELEM.GT.MXELE) WRITE(6,85) NELEM
C 85 FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO',I5)
C IF(NELEM.GT.MXELE) STOP
C IF(NFREE.GT.MXFREE) WRITE(6,95) NFREE
C 95 FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXFREE TO',I5)
C IF(NFREE.GT.MXFREE) STOP
C IF(NFLUX.GT.MXFLUX) WRITE(6,105) NFLUX
C 105 FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXFLUX TO',I5)
C IF(NFLUX.GT.MXFLUX) STOP
C
C READ FLUID PROPERTIES:
C
C READ(7,35) TEXT
C WRITE(9,115)
C 115 FORMAT(' DENSITY VISCOSITY THERM EXP SPEC CV',
C * ' THERM CON REF TEMP GRAVITY' )
C READ(7,*) DEN, VIS, TEXP, CV, TCON, TREF, GRA
C WRITE(9,125) DEN, VIS, TEXP, CV, TCON, TREF, GRA
C 125 FORMAT(7F10.3)
C
C READ NODAL COORDINATES, BOUNDARY CONDITIONS, THEIR VALUES:
C
C READ(7,35) TEXT
C WRITE(9,135) NPOIV
C 135 FORMAT(' NODAL INFORMATION (NODE NO., U-V-T-P BC, X-Y COORD,',
C * ' U-V-T-P VALUES): [' , I4, ']' )
C DO 150 IP=1,NPOIV
C READ(7,*) I, IBCU(I), IBCV(I), IBCT(I), IBCP(I),
C * (COORD(I,K), K=1,2), UVEL(I), VVEL(I),

```

```

*      TEMP(I), PRES(I), FLUX(I)
WRITE(9,145) I, IBCU(I), IBCV(I), IBCT(I), IBCP(I),
*      (COORD(I,K), K=1,2), UVEL(I), VVEL(I),
*      TEMP(I), PRES(I), FLUX(I)
145 FORMAT(I4, 4I3, 7E10.4)
IF(I.NE.IP) WRITE(6,155) IP
155 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
IF(I.NE.IP) STOP
150 CONTINUE
C
C   READ ELEMENT NODAL CONNECTIONS:
C
READ(7,35) TEXT
WRITE(9,165) NELEM
165 FORMAT(' ELEMENT NODAL CONNECTIONS: (', I4, ')')
DO 180 IE=1,NELEM
READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,6)
WRITE(9,175) I, (INTMAT(I,J), J=1,6)
175 FORMAT(7I8)
IF(I.NE.IE) WRITE(6,185) IE
185 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
IF(I.NE.IE) STOP
180 CONTINUE
C
C   READ OUTFLOW BOUNDARY INFORMATION:
C
READ(7,35) TEXT
WRITE(9,195) NFREE
195 FORMAT(' OUTFLOW INFORMATION (NO., 3 NODE NO.): (', I4, ')')
IF (NFREE.NE.0) THEN
DO 210 IB=1,MXFREE
READ(7,*) (INTOUT(IB,J), J=1,4)
WRITE(9,205) (INTOUT(IB,J), J=1,4)
205 FORMAT(4I8)
IF(INTOUT(IB,1).NE.IB) WRITE(6,215) IB
215 FORMAT(/, ' OUTFLOW INFORMATION NO.', I5, ' IN DATA FILE IS',
*      ' MISSING')
210 CONTINUE
ENDIF
C
C   READ SPECIFIED HEAT FLUX BOUNDARY INFORMATION:
C
READ(7,35) TEXT
WRITE(9,225) NFLUX
225 FORMAT(' SPECIFIED HEAT FLUX INFORMATION (NO., 3 NODE NO.): (',
*      I4, ')')
IF (NFLUX.NE.0) THEN
DO 240 IB=1,MXFLUX
READ(7,*) (INTFLUX(IB,J), J=1,4)
WRITE(9,205) (INTFLUX(IB,J), J=1,4)

```

```

IF(INTFLUX(IB,1).NE.IB) WRITE(6,235) IB
235 FORMAT(/, ' SPECIFIED HEAT FLUX INFORMATION NO.', I5, ' IN DATA'
*      ' FILE IS MISSING')
240 CONTINUE
ENDIF
C
WRITE(6,300) NPOIV, NPOIV, NPOIP, NELEM, NFREE, NITER, TOL
300 FORMAT(' THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF:', /,
*      ' NUMBER OF VELOCITY NODES =', I6, /,
*      ' NUMBER OF TEMPERATURE NODES =', I6, /,
*      ' NUMBER OF PRESSURE NODES =', I6, /,
*      ' NUMBER OF ELEMENTS =', I6, /,
*      ' NUMBER OF OUTFLOW BOUNDARY =', I6, /,
*      ' WITH NUMBER OF ITERATIONS REQUIRED =', I6, /,
*      ' OR SPECIFIED STOPPING TOLERANCE =', F6.2 )
C
DO 400 I=1,NPOIV
SOL(I) = UVEL(I)
SOL(I+NPOIV) = VVEL(I)
SOL(I+NPOIV+NPOIV) = TEMP(I)
400 CONTINUE
DO 410 I=1,NPOIP
SOL(I+NPOIV+NPOIV+NPOIV) = PRES(I)
410 CONTINUE
C
NEQ = 3*NPOIV + NPOIP
CALL COUNT(INTMAT, ICOUNT, IASSEM, MXPOIV, MXELE, MXLINK)
C
ENTER ITERATION LOOP:
C
DO 500 ITER=1,NITER
C
RESET ELEMENT AND SYSTEM EQUATIONS:
C
DO 510 I=1,21
DO 510 J=1,21
DO 510 K=1,MXELE
AKELE(I,J,K) = 0.
510 CONTINUE
DO 520 I=1,21
DO 520 J=1,MXELE
RELE(I,J) = 0.
520 CONTINUE
DO 530 I=1,NMAX
SA(I) = 0.
SB(I) = 0.
SC(I) = 0.
IJA(I) = 0
IJB(I) = 0
IJC(I) = 0

```

```

530 CONTINUE
C
C   DETERMINE REFERENCE TEMPERATURE:
C
  TMAX = SOL(2*NPOIV+1)
  TMIN = TMAX
  DO 540 I=2*NPOIV+1,3*NPOIV
    IF (SOL(I).GT.TMAX) THEN
      TMAX = SOL(I)
    ENDIF
    IF (SOL(I).LT.TMIN) THEN
      TMIN = SOL(I)
    ENDIF
  540 CONTINUE
  TREF = (TMAX + TMIN)/2.
C
  WRITE(6,545) ITER
545 FORMAT(/, 3X, ' * PERFORMING COMPUTATION AT ITERATION NUMBER',
*       I3, ':')
C
C   ESTABLISH ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS:
C
  WRITE(6,555)
555 FORMAT(8X, ' ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
*       ' ASSEMBLING ELEMENT EQS.' )
C
  CALL TRI( MXPOIV, MXELE, MXNEQ, DEN, VIS, TEXP,
*       CV, TCON, TREF, GRA, COORD, INTMAT,
*       AKELE, RELE, SOL, IBCU, IBCV, IBCT, IBCP)
C
C   ASSEMBLE SYSTEM STIFFNESS MATRIX:
C
  IJB(1) = NEQ + 2
  K = NEQ + 1
C
  DO 560 IJ=1,MXNEQ
  CALL ASSEMA(INTMAT, AKELE, AAS, 1, MXPOIV, MXNEQ, MXELE,
*       ICOUNT, IASSEM, IJ, MXLINK )
C
C   CREAT ROW SPARSE STORAGE OF A:
C
  CALL SPRSIN(AAS, NEQ, NMAX, K, IJ, SB, IJB)
560 CONTINUE
C
C   ASSEMBLE RESIDUAL MATRICES FOR SYSTEM RESIDUALS:
C
  WRITE(6,565)
565 FORMAT(8X, ' ASSEMBLING SYSTEM RESIDUALS VECTOR')
C
  CALL ASSEMR(MXPOIV, MXELE, MXNEQ, INTMAT, RELE, B)

```

```

C
  IF (NFREE.NE.0) THEN
    CALL FORCE( B, COORD, INTOUT, PRES, MXPOIV,
*       MXNEQ, MXFREE, DEN )
  ENDIF
C
  IF (NFLUX.NE.0) THEN
    CALL HEATFLUX( B, COORD, INTFLUX, FLUX, MXPOIV, MXNEQ,
*       MXFLUX, DEN, CV )
  ENDIF
C
C   SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR NODAL INCREMENTS:
C
  WRITE(6,570)
570 FORMAT(8X, ' SOLVING SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR',
*       ' NODAL INCREMENTS' )
C
  DO 580 I=1,NEQ
  BN(I) = 0.0
580 CONTINUE
  DO 590 I=1,NEQ
  P(I) = 0.0
  R(I) = 0.0
  Z(I) = 0.0
  Q(I) = 0.0
590 CONTINUE
C
  CALL SPRSTM(SB, IJB, SB, IJB, NMAX, SC, IJC)
  CALL SPRSAX(SB, IJB, B, BN, NEQ, NMAX)
C
C   APPLY CONJUGATE GRADIENT METHOD TO NORMAL EQUATION:
C
  WRITE(6,600) MXNEQ
600 FORMAT(8X, ' ( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS TO BE SOLVED )')
  WRITE(6,*) ' APPLYING CONJUGATE GRADIENT METHOD '
  CALL PCGNR(NEQ, SC, IJC, BN, MXNEQ, P, R, Z, Q, DSOL,
*       ITMAX, NMAX )
C
C   CHECK FOR CONVERGENCE:
C
  UP = 0.
  DOWN = 0.
  DO 610 I=1,NEQ
  ERROR = DSOL(I)
  UP = UP + ABS(ERROR) *
  VALUE = SOL(I)
  DOWN = DOWN + ABS(VALUE)
610 CONTINUE
  RATIO = UP*100./DOWN
  WRITE(6,615) RATIO

```

```

615 FORMAT(6X, 'CURRENT SOLUTION HAS GLOBAL ERROR OF',
*      F8.2, ' %')
WRITE(9,625) ITER, RATIO
625 FORMAT(6X, 'ITERATION NO.', I5, ' HAS GLOBAL ERROR OF',
*      F8.2, ' %')
IF(RATIO.GT.TOL) GO TO 650
C
C SOLUTION CONVERGED WITHIN THE SPECIFIED TOLERANCE:
C
WRITE(6,635)
635 FORMAT(/, 3X, ' *** SOLUTION CONVERGED WITHIN SPECIFIED',
*      ' TOLERANCE ***', // )
GO TO 700
650 CONTINUE
C
C UPDATE NODAL SOLUTIONS:
C
DO 660 I=1,NEQ
SOL(I) = SOL(I) + DSOL(I)
660 CONTINUE
500 CONTINUE
C
C SOLUTION NOT CONVERGED WITHIN THE SPECIFIED TOLERANCE:
C
WRITE(6,665)
665 FORMAT(/, 3X, ' ??? SOLUTION NOT CONVERGED WITHIN',
*      ' SPECIFIED TOLERANCE ???', // )
C
700 CONTINUE
WRITE(9,705) TREF
705 FORMAT(6X, 'REFERENCE TEMPERATURE = ', F7.4)
C
C PRINT OUT SOLUTIONS OF NODAL VELOCITIES, TEMPERATURES
C AND PRESSURES:
C
710 WRITE(6,715)
715 FORMAT(' PLEASE ENTER FILE NAME FOR SOLUTIONS:', /)
READ(5, '(A)', ERR=710) NAME2
OPEN(UNIT=8, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=710)
WRITE(8,725) NPOIV
725 FORMAT(' NODAL SOLUTIONS [', I4, ']:',
*      '//, 2X, 'NODE', 6X, 'U-VELOCITY', 6X, 'V-VELOCITY',
*      5X, 'TEMPERATURE', 8X, 'PRESSURE', / )
C
ROFF = 1.E-6
DO 730 IEQ=1,NEQ
VALUE = SOL(IEQ)
IF(ABS(VALUE).LT.ROFF) SOL(IEQ) = 0.
730 CONTINUE
C

```

```

DO 740 IP=1,NPOIP
IEQU = IP
IEQV = NPOIV + IP
IEQT = 2*NPOIV + IP
IEQP = 3*NPOIV + IP
WRITE(8,735) IP, SOL(IEQU), SOL(IEQV), SOL(IEQT), SOL(IEQP)
735 FORMAT(I6, 4E16.6)
740 CONTINUE
DO 750 IP=NPOIP+1,NPOIV
IEQU = IP
IEQV = NPOIV + IP
IEQT = 2*NPOIV + IP
WRITE(8,755) IP, SOL(IEQU), SOL(IEQV), SOL(IEQT)
755 FORMAT(I6, 3E16.6)
750 CONTINUE
C
STOP
END
C
C-----
C
SUBROUTINE COUNT(INTMAT, ICOUNT, IASSEM, MXPOIV, MXELE, MXLINK)
DIMENSION INTMAT(MXELE,6), ICOUNT(MXPOIV), IASSEM(MXPOIV,MXLINK)
DO 10 I=1,MXPOIV
ICOUNT(I) = 0
10 CONTINUE
DO 100 I=1,MXELE
DO 200 J=1,6
N = INTMAT(I,J)
ICOUNT(N) = ICOUNT(N) + 1
IC = ICOUNT(N)
IF(IC.GT.MXLINK) WRITE(*,125) IC
125 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXLINK TO', I5)
IF(IC.GT.MXLINK) STOP
IASSEM(N,IC) = I
200 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE APPLYBC(MXPOIV, MXELE, AKELE, RELE, INTMAT,
*      IBCU, IBCV, IBCT, IBCP, IE)
C
APPLY BOUNDARY CONDITIONS BEFORE SOLVING FOR NODAL INCREMENTS
WITH CONDITION CODES OF:
C
0 = FREE TO CHANGE (INCREMENTS COMPUTED)
1 = FIXED AS SPECIFIED (INCREMENTS FIXED AS ZERO)
C

```

```

C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION AKELE(21,21,MXELE), RELE(21,MXELE)
C      DIMENSION INTMAT(MXELE,6)
C      INTEGER IBCU(MXPOIV), IBCV(MXPOIV), IBCT(MXPOIV), IBCP(MXPOIV)
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL U-VELOCITIES:
C      DO 100 IEQ=1,6
C      IEQU = INTMAT(IE,IEQ)
C      IF(IBCQ(IEQU).EQ.0) GO TO 100
C
C      DO 110 IR=1,21
C      IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 110
C      AKELE(IR,IEQ,IE) = 0.
110 CONTINUE
C
C      DO 120 IC=1,21
C      AKELE(IEQ,IC,IE) = 0.
120 CONTINUE
C      AKELE(IEQ,IEQ,IE) = 1.
C      RELE(IEQ,IE) = 0.
C
C      100 CONTINUE
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL V-VELOCITIES:
C      DO 200 IEQ=1,6
C      IEQV = INTMAT(IE,IEQ)
C      IF(IBCQ(IEQV).EQ.0) GO TO 200
C
C      DO 210 IR=1,21
C      IF(IR.EQ.IEQ+6) GO TO 210
C      AKELE(IR,IEQ+6,IE) = 0.
210 CONTINUE
C
C      DO 220 IC=1,21
C      AKELE(IEQ+6,IC,IE) = 0.
220 CONTINUE
C      AKELE(IEQ+6,IEQ+6,IE) = 1.
C      RELE(IEQ+6,IE) = 0.
C
C      200 CONTINUE
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL TEMPERATURES:
C      DO 300 IEQ=1,6
C      IEQT = INTMAT(IE,IEQ)

```

```

      IF(IBCT(IEQT).EQ.0) GO TO 300
C
C      DO 310 IR=1,21
C      IF(IR.EQ.IEQ+12) GO TO 310
C      AKELE(IR,IEQ+12,IE) = 0.
310 CONTINUE
C      DO 320 IC=1,21
C      AKELE(IEQ+12,IC,IE) = 0.
320 CONTINUE
C      AKELE(IEQ+12,IEQ+12,IE) = 1.
C      RELE(IEQ+12,IE) = 0.
C
C      300 CONTINUE
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL PRESSURES:
C      DO 400 IEQ=1,3
C      IEQP = INTMAT(IE,IEQ)
C      IF(BCP(IEQP).EQ.0) GO TO 400
C
C      DO 410 IR=1,21
C      IF(IR.EQ.IEQ+18) GO TO 410
C      AKELE(IR,IEQ+18,IE) = 0.
410 CONTINUE
C
C      DO 420 IC=1,21
C      AKELE(IEQ+18,IC,IE) = 0.
420 CONTINUE
C      AKELE(IEQ+18,IEQ+18,IE) = 1.
C      RELE(IEQ+18,IE) = 0.
C
C      400 CONTINUE
C      RETURN
C      END
C-----
C      SUBROUTINE ASSEMA(INTMAT, A, B, ITYPE, MXPOIV, MXNEQ, MXELE,
C      *                ICOUNT, IASSEM, N, MXLINK)
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C      DIMENSION A(21,21,MXELE), B(MXNEQ)
C      DIMENSION INTMAT(MXELE,6), ICOUNT(MXPOIV), IASSEM(MXPOIV,MXLINK)
C
C      RESET STIFFNESS MATRICES:
C      DO 10 I=1,MXNEQ
C      B(I) = 0.

```

```

10 CONTINUE
C
IF (N.LE.MXPOIV) THEN
N1 = N
NN = 0
ELSE
IF ((N.GT.MXPOIV).AND.(N.LE.2*MXPOIV)) THEN
N1 = N - MXPOIV
NN = 1
ELSE
IF ((N.GT.2*MXPOIV).AND.(N.LE.3*MXPOIV)) THEN
N1 = N - 2*MXPOIV
NN = 2
ELSE
N1 = N - 3*MXPOIV
NN = 3
ENDIF
ENDIF
ENDIF
IC = ICOUNT(N1)
C
C
ASSEMBLE STIFFNESS MATRICES:
C
IF (ITYPE.EQ.0) THEN
C
C
ITYPE = 0; COMPUTE [A]
C
DO 100 IE=1,IC
IA = IASSEM(N1,IE)
DO 30 I=1,6
II = INTMAT(IA,I)
IF (II.EQ.N1) THEN
C
DO 40 J=1,6
JJ = INTMAT(IA,J)
K = J + 6
KK = MXPOIV + JJ
L = J + 12
LL = 2*MXPOIV + JJ
B(JJ) = B(JJ) + A(I+6*NN,J,IA)
B(KK) = B(KK) + A(I+6*NN,K,IA)
B(LL) = B(LL) + A(I+6*NN,L,IA)
C
40 CONTINUE
C
DO 50 J=1,3
JJ = INTMAT(IA,J)
K = J + 18
KK = 3*MXPOIV + JJ
B(KK) = B(KK) + A(I+6*NN,K,IA)
50 CONTINUE

```

```

C
C
C
30 ENDIF
CONTINUE
100 CONTINUE
C
ELSE
C
DO 200 IE=1,IC
IA = IASSEM(N1,IE)
DO 130 I=1,6
II = INTMAT(IA,I)
IF (II.EQ.N1) THEN
C
DO 140 J=1,6
JJ = INTMAT(IA,J)
K = J + 6
KK = MXPOIV + JJ
L = J + 12
LL = 2*MXPOIV + JJ
B(JJ) = B(JJ) + A(J,I+6*NN,IA)
B(KK) = B(KK) + A(K,I+6*NN,IA)
B(LL) = B(LL) + A(L,I+6*NN,IA)
C
140 CONTINUE
C
DO 150 J=1,3
JJ = INTMAT(IA,J)
K = J + 18
KK = 3*MXPOIV + JJ
B(KK) = B(KK) + A(K,I+6*NN,IA)
150 CONTINUE
C
C
C
130 ENDIF
CONTINUE
200 CONTINUE
C
C
C
ENDIF
RETURN
END
C
-----
C
SUBROUTINE ASSEMR(MXPOIV, MXELE, MXNEQ, INTMAT, RELE, B)
C
C
ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS FOR SYSTEM EQUATIONS:
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
DIMENSION RELE(21,MXELE), B(MXNEQ)
DIMENSION INTMAT(MXELE,6)

```

```

C
C   RESET SYSTEM LOAD VECTOR:
C
C   DO 100 I=1,MXNEQ
C   B(I) = 0.
100 CONTINUE
C
C   ASSEMBLING SYSTEM LOAD VECTOR:
C
C   CONTRIBUTION OF VALUES ASSOCIATED WITH U & V VELOCITIES:
C
C   DO 500 IE=1,MXELE
C
C   DO 200 I=1,6
C   II = INTMAT(IE,I)
C   K = I + 6
C   KK = MXPOIV + II
C   B(II) = B(II) + RELE(I,IE)
C   B(KK) = B(KK) + RELE(K,IE)
200 CONTINUE
C
C   CONTRIBUTION OF VALUES ASSOCIATED WITH TEMPERATURE:
C
C   DO 300 I=1,6
C   II = INTMAT(IE,I)
C   K = I + 12
C   KK = 2*MXPOIV + II
C   B(KK) = B(KK) + RELE(K,IE)
300 CONTINUE
C
C   CONTRIBUTION OF VALUES ASSOCIATED WITH PRESSURE:
C
C   DO 400 I=1,3
C   II = INTMAT(IE,I)
C   K = I + 18
C   KK = 3*MXPOIV + II
C   B(KK) = B(KK) + RELE(K,IE)
400 CONTINUE
C
C   500 CONTINUE
C
C   RETURN
C   END
C
-----
C
C   SUBROUTINE SPRSIN(AAS, N, NMAX, K, IJ, SB, IJB)
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

```

C   DIMENSION AAS(N), SB(NMAX), IJB(NMAX)
C
C   SB(IJ) = AAS(IJ)
C   DO 10 J=1,N
C   IF (ABS(AAS(J)).GE.1E-16) THEN
C   IF (J.NE.IJ) THEN
C   K = K + 1
C   IF (K.GT.NMAX) PAUSE ' NMAX TOO SMALL IN SPRSIN'
C   SB(K) = AAS(J)
C   IJB(K) = J
C   ENDIF
C   ENDIF
10 CONTINUE
C   IJB(IJ+1) = K+1
C   RETURN
C   END
C
-----
C
C   SUBROUTINE SPRSTM(SA, IJA, SB, IJB, NMAX, SC, IJC)
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C   DIMENSION SA(NMAX), SB(NMAX), SC(NMAX)
C   DIMENSION IJA(NMAX), IJB(NMAX), IJC(NMAX)
C
C   K = 0
C   IF (IJA(1).NE.IJB(1)) PAUSE 'SPRSTM SIZES DO NOT MATCH'
C   K = IJA(1)
C   IJC(1) = K
C   DO 14 I=1,IJA(1)-2
C   DO 13 J=1,IJB(1)-2
C   IF (I.EQ.J) THEN
C   SUM = SA(I)*SB(J)
C   ELSE
C   SUM = 0.DO
C   ENDIF
C   MB = IJB(J)
C   DO 11 MA=IJA(I),IJA(I+1)-1
C   IJMA = IJA(MA)
C   IF (IJMA.EQ.J) THEN
C   SUM = SUM + SA(MA)*SB(J)
C   ELSE
C   IF (MB.LT.IJB(J+1)) THEN
C   IJMB = IJB(MB)
C   IF (IJMB.EQ.I) THEN
C   SUM = SUM + SA(I)*SB(MB)
C   MB = MB + 1
C   GOTO 2
C   ELSE IF (IJMB.LT.IJMA) THEN

```

```

        MB = MB + 1
        GOTO 2
    ELSE IF(IJMB.EQ.IJMA) THEN
        SUM = SUM + SA(MA)*SB(MB)
        MB = MB + 1
        GOTO 2
    ENDIF
ENDIF
ENDIF
11 CONTINUE
DO 12 MBB=MB,IJB(J+1)-1
    IF (IJB(MBB).EQ.I) THEN
        SUM = SUM + SA(I)*SB(MBB)
    ENDIF
12 CONTINUE
IF (I.EQ.J) THEN
    SC(I) = SUM
ELSE IF (ABS(SUM).GT.1E-16) THEN
    IF (K.GT.NMAX) PAUSE 'SPRSTM: NMAX TOO SMALL'
    SC(K) = SUM
    IJC(K) = J
    K = K + 1
ENDIF
13 CONTINUE
IJC(I+1) = K
14 CONTINUE
WRITE(*,*) ' ',K
RETURN
END
C
-----
C
SUBROUTINE SPRSAX( SB, IJB, X, B, N, NMAX)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
DIMENSION B(N), SB(NMAX), X(N), IJB(NMAX)
C
IF(IJB(1).NE.N+2) PAUSE 'MISMATCHED VECTOR AND MATRIX IN SPRSAX'
DO 11 I=1,N
    B(I) = SB(I)*X(I)
DO 12 K=IJB(I),IJB(I+1)-1
    B(I) = B(I) + SB(K)*X(IJB(K))
12 CONTINUE
11 CONTINUE
RETURN
END
C
-----
C

```

```

SUBROUTINE PCGNR(N, SA, IJA, BN, MXNEQ, P, R, Z, Q, X,
* ITMAX, NMAX )
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
DIMENSION SA(NMAX), IJA(NMAX), BN(MXNEQ)
DIMENSION P(MXNEQ), R(MXNEQ), Q(MXNEQ), X(MXNEQ), Z(MXNEQ)
C
ITER1 = 0
TOL1 = 1.E-6
DO 140 I=1,N
    X(I) = 0.0
140 CONTINUE
CALL ATIMES(SA, IJA, X, R, N, NMAX)
DO 150 J=1,N
    R(J) = BN(J) - R(J)
150 CONTINUE
C
500 IF (ITER1.LE.ITMAX) THEN
    ITER1 = ITER1 + 1
    CALL ASOLVE(N, R, Z, SA, NMAX)
    BKNUM = 0.0
    DO 160 J=1,N
        BKNUM = BKNUM + Z(J)*R(J)
160 CONTINUE
    IF (ITER1.EQ.1) THEN
        DO 170 J=1,N
            P(J) = Z(J)
170 CONTINUE
    ELSE
        BK = BKNUM/BKDEN
        DO 180 J=1,N
            P(J) = Z(J) + BK*P(J)
180 CONTINUE
    ENDIF
    CALL ATIMES( SA, IJA, P, Q, N, NMAX )
    BKDEN = BKNUM
    AKDEN = 0.0
    DO 190 J=1,N
        AKDEN = AKDEN + P(J)*Q(J)
190 CONTINUE
    AK = BKNUM/AKDEN
    DO 200 J=1,N
        X(J) = X(J) + AK*P(J)
        R(J) = R(J) - AK*Q(J)
200 CONTINUE
    BNRM = SNRM( N, BN )
    ERR1 = SNRM( N, R )/BNRM
205 FORMAT(' ITER = ',I5,' ERR = ',F14.10)
    IF (ERR1.GT.TOL1) GOTO 500

```



```

C      ENDIF
C      RETURN
C      END
C-----
C      SUBROUTINE ATIMES( SA, IJA, X, B, N, NMAX )
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION B(N), X(N), SA(NMAX), IJA(NMAX)
C      IF(IJA(1).NE.N+2) PAUSE 'MISMATCHED VECTOR AND MATRIX IN ATIMES'
C      DO 10 I=1,N
C          B(I) = 0.0
10 CONTINUE
C      DO 11 I=1,N
C          B(I) = SA(I)*X(I)
C      DO 12 K=IJA(I),IJA(I+1)-1
C          B(I) = B(I) + SA(K)*X(IJA(K))
12 CONTINUE
11 CONTINUE
C      RETURN
C      END
C-----
C      SUBROUTINE ASOLVE(N, B, X, SA, NMAX)
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION B(N), X(N), SA(NMAX)
C      DO 10 I=1,N
C          X(I) = B(I)/SA(I)
10 CONTINUE
C      RETURN
C      END
C-----
C      FUNCTION SNRM(N, SX)
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION SX(N)
C      SNRM = 0.0
C      DO 10 I=1,N
C          SNRM = SNRM + SX(I)*SX(I)
10 CONTINUE
C      SNRM = SQRT(SNRM)

```

```

RETURN
END
C-----
C      SUBROUTINE TRI(MXPOIV, MXELE, MXNEQ, DEN, VIS, TEXP,
*                   CV, TCON, TREF, GRA, COORD, INTMAT,
*                   AKELE, RELE, SOL, IBCU, IBCV, IBCT, IBCP)
C      ESTABLISH ALL ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM TO FORM UP
C      SYSTEM EQUATIONS
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION COORD(MXPOIV,2)
C      DIMENSION SOL(MXNEQ)
C      DIMENSION A(6,6), B(6,3), C(6,3), G(3,3), R(6,6), F(6,6,3)
C      DIMENSION UELE(6), VELE(6), TELE(6), PELE(3)
C      DIMENSION SXX(6,6), SXY(6,6), SYX(6,6), SYY(6,6)
C      DIMENSION TXX(6,6), TYY(6,6), CAB(6,6)
C      DIMENSION HX(3,6), HY(3,6), HXT(6,3), HYT(6,3)
C      DIMENSION ABGXUG(6,6), AGBXUG(6,6), AGBYVG(6,6)
C      DIMENSION ABGYVG(6,6), ABGXVG(6,6), ABGYUG(6,6)
C      DIMENSION ABGXTG(6,6), ABGYTG(6,6)
C      DIMENSION CUU(6,6), CVV(6,6), CVU(6,6), CUV(6,6), CTT(6,6)
C      DIMENSION AKELE(21,21,MXELE), RELE(21,MXELE)
C      DIMENSION FX(6), FY(6), FT(6), FI(3)
C      DIMENSION IBCU(MXPOIV), IBCV(MXPOIV), IBCT(MXPOIV), IBCP(MXPOIV)
C      INTEGER INTMAT(MXELE,6)
C      SET UP [A] MATRIX BASED ON TENSOR NOTATIONS:
C      DO 10 I=1,6
C      DO 10 J=1,6
C          A(I,J) = 0.
10 CONTINUE
C      A(1,1) = 1.
C      A(2,2) = 1.
C      A(3,3) = 1.
C      A(4,4) = 4.
C      A(5,5) = 4.
C      A(6,6) = 4.
C      A(1,5) = -1.
C      A(1,6) = -1.
C      A(2,4) = -1.
C      A(2,6) = -1.
C      A(3,4) = -1.
C      A(3,5) = -1.

```

```

C COMPUTE KINEMATIC VISCOSITY:
C ANEW = VIS/DEN
C LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C DO 500 IE=1,MXELE
C FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C II = INTMAT(IE,1)
C JJ = INTMAT(IE,2)
C KK = INTMAT(IE,3)
C LL = INTMAT(IE,4)
C MM = INTMAT(IE,5)
C NN = INTMAT(IE,6)
C XG1 = COORD(II,1)
C XG2 = COORD(JJ,1)
C XG3 = COORD(KK,1)
C YG1 = COORD(II,2)
C YG2 = COORD(JJ,2)
C YG3 = COORD(KK,2)
C AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
C IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
5 FORMAT(/,' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
* ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
* ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
* ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---')
C IF(AREA.LE.0.) STOP
C AREA2 = 2.*AREA
C B1 = (YG2 - YG3)/AREA2
C B2 = (YG3 - YG1)/AREA2
C B3 = (YG1 - YG2)/AREA2
C C1 = (XG3 - XG2)/AREA2
C C2 = (XG1 - XG3)/AREA2
C C3 = (XG2 - XG1)/AREA2
C SET UP [B] AND [C] MATRICES BASED ON TENSOR NOTATIONS:
C DO 30 I=1,6
C DO 30 J=1,3
C B(I,J) = 0.
C C(I,J) = 0.
30 CONTINUE
C B(1,1) = 2.*B1
C B(2,2) = 2.*B2
C B(3,3) = 2.*B3
C B(4,2) = B3

```

```

B(4,3) = B2
B(5,1) = B3
B(5,3) = B1
B(6,1) = B2
B(6,2) = B1
C(1,1) = 2.*C1
C(2,2) = 2.*C2
C(3,3) = 2.*C3
C(4,2) = C3
C(4,3) = C2
C(5,1) = C3
C(5,3) = C1
C(6,1) = C2
C(6,2) = C1

```

```

C SET UP [G] MATRIX:
C

```

```

FAC = AREA/12.
FAC2 = 2.*FAC
G(1,1) = FAC2
G(2,2) = FAC2
G(3,3) = FAC2
G(1,2) = FAC
G(1,3) = FAC
G(2,1) = FAC
G(2,3) = FAC
G(3,1) = FAC
G(3,2) = FAC

```

```

C SER UP [R] MATRIX:
C

```

```

FAC = AREA/360.
FAC2 = 2.*FAC
FAC4 = 4.*FAC
FAC6 = 6.*FAC
FAC24 = 24.*FAC
R(1,1) = FAC24
R(1,2) = FAC4
R(1,3) = FAC4
R(1,4) = FAC2
R(1,5) = FAC6
R(1,6) = FAC6
R(2,2) = FAC24
R(2,3) = FAC4
R(2,4) = FAC6
R(2,5) = FAC2
R(2,6) = FAC6
R(3,3) = FAC24
R(3,4) = FAC6
R(3,5) = FAC6

```

```
R(3,6) = FAC2
R(4,4) = FAC4
R(4,5) = FAC2
R(4,6) = FAC2
R(5,5) = FAC4
R(5,6) = FAC2
R(6,6) = FAC4
DO 35 I=1,6
DO 35 J=1,6
R(J,I) = R(I,J)
```

35 CONTINUE

C  
C SET UP [F] MATRIX BASED ON TENSOR NOTATIONS:  
C

```
FACTOR = 2.*AREA/5040.
F4 = FACTOR*4.
F6 = FACTOR*6.
F12 = FACTOR*12.
F24 = FACTOR*24.
F120 = FACTOR*120.
```

C  
F(1,1,1) = F120  
F(1,2,1) = F12  
F(1,3,1) = F12  
F(1,4,1) = F6  
F(1,5,1) = F24  
F(1,6,1) = F24  
F(2,2,1) = F24  
F(2,3,1) = F4  
F(2,4,1) = F6  
F(2,5,1) = F4  
F(2,6,1) = F12  
F(3,3,1) = F24  
F(3,4,1) = F6  
F(3,5,1) = F12  
F(3,6,1) = F4  
F(4,4,1) = F4  
F(4,5,1) = F4  
F(4,6,1) = F4  
F(5,5,1) = F12  
F(5,6,1) = F6  
F(6,6,1) = F12  
DO 40 I=1,6  
DO 40 J=I,6  
F(J,I,1) = F(I,J,1)

40 CONTINUE

C  
F(1,1,2) = F24  
F(1,2,2) = F12  
F(1,3,2) = F4

```
F(1,4,2) = F4
F(1,5,2) = F6
F(1,6,2) = F12
F(2,2,2) = F120
F(2,3,2) = F12
F(2,4,2) = F24
F(2,5,2) = F6
F(2,6,2) = F24
F(3,3,2) = F24
F(3,4,2) = F12
F(3,5,2) = F6
F(3,6,2) = F4
F(4,4,2) = F12
F(4,5,2) = F4
F(4,6,2) = F6
F(5,5,2) = F4
F(5,6,2) = F4
F(6,6,2) = F12
DO 50 I=1,6
DO 50 J=I,6
F(J,I,2) = F(I,J,2)
```

50 CONTINUE

C  
F(1,1,3) = F24  
F(1,2,3) = F4  
F(1,3,3) = F12  
F(1,4,3) = F4  
F(1,5,3) = F12  
F(1,6,3) = F6  
F(2,2,3) = F24  
F(2,3,3) = F12  
F(2,4,3) = F12  
F(2,5,3) = F4  
F(2,6,3) = F6  
F(3,3,3) = F120  
F(3,4,3) = F24  
F(3,5,3) = F24  
F(3,6,3) = F6  
F(4,4,3) = F12  
F(4,5,3) = F6  
F(4,6,3) = F4  
F(5,5,3) = F12  
F(5,6,3) = F4  
F(6,6,3) = F4  
DO 60 I=1,6  
DO 60 J=I,6  
F(J,I,3) = F(I,J,3)

60 CONTINUE

C  
C EXTRACT ELEMENT NODAL U, V, P:

```

C
UELE (1) = SOL (II)
UELE (2) = SOL (JJ)
UELE (3) = SOL (KK)
UELE (4) = SOL (LL)
UELE (5) = SOL (MM)
UELE (6) = SOL (NN)
VELE (1) = SOL (II+MXPOIV)
VELE (2) = SOL (JJ+MXPOIV)
VELE (3) = SOL (KK+MXPOIV)
VELE (4) = SOL (LL+MXPOIV)
VELE (5) = SOL (MM+MXPOIV)
VELE (6) = SOL (NN+MXPOIV)
TELE (1) = SOL (II+MXPOIV+MXPOIV)
TELE (2) = SOL (JJ+MXPOIV+MXPOIV)
TELE (3) = SOL (KK+MXPOIV+MXPOIV)
TELE (4) = SOL (LL+MXPOIV+MXPOIV)
TELE (5) = SOL (MM+MXPOIV+MXPOIV)
TELE (6) = SOL (NN+MXPOIV+MXPOIV)
PELE (1) = SOL (II+MXPOIV+MXPOIV+MXPOIV)
PELE (2) = SOL (JJ+MXPOIV+MXPOIV+MXPOIV)
PELE (3) = SOL (KK+MXPOIV+MXPOIV+MXPOIV)

C
C
C
C
COMPUTE [SXX], [SXY], [SYX], [SYY], [TXX], [TYY],
[CAB] MATRICES:

DO 100 IA=1,6
DO 100 IB=1,6
CXX = 0.
CYY = 0.
CXY = 0.
CYX = 0.
YTT = 0.
DO 110 I=1,6
DO 110 J=1,3
DO 110 K=1,3
DO 110 L=1,6
CXX = CXX + A(IA,I)*B(I,J)*A(IB,L)*B(L,K)*G(J,K)
CYY = CYY + A(IA,I)*C(I,J)*A(IB,L)*C(L,K)*G(J,K)
CXY = CXY + A(IA,I)*C(I,J)*A(IB,L)*B(L,K)*G(J,K)
CYX = CYX + A(IA,I)*B(I,J)*A(IB,L)*C(L,K)*G(J,K)
110 CONTINUE
DO 120 I=1,6
DO 120 J=1,6
YTT = YTT + A(IA,I)*R(I,J)*A(IB,J)
120 CONTINUE
SXX(IA,IB) = 2.*ANEW*CXX + ANEW*CYY
SXY(IA,IB) = ANEW*CXY
SYX(IA,IB) = ANEW*CYX
SYY(IA,IB) = ANEW*CXX + 2.*ANEW*CYY

```

```

TXX(IA,IB) = TCON/DEN/CV*CXX
TYY(IA,IB) = TCON/DEN/CV*CYY
CAB(IA,IB) = -GRA*TEXP*YTT
100 CONTINUE
C
C
C
COMPUTE [HX] AND [HY] MATRICES:
C
DO 150 IA=1,3
DO 150 IB=1,6
CX = 0.
CY = 0.
DO 160 I=1,6
DO 160 J=1,3
CX = CX + A(IA,I)*B(I,J)*G(J,IA)
CY = CY + A(IA,I)*C(I,J)*G(J,IA)
160 CONTINUE
HX(IA,IB) = CX
HY(IA,IB) = CY
150 CONTINUE
C
C
C
THEN THE CORRESPONDING TWO MATRICES ON THE UPPER RIGHT ARE:
C
DO 170 IA=1,3
DO 170 IB=1,6
HXT(IB,IA) = -HX(IA,IB)/DEN
HYT(IB,IA) = -HY(IA,IB)/DEN
170 CONTINUE
C
C
C
COMPUTE ALL MATRICES ASSOCIATED WITH THE INERTIA TERMS:
C
DO 200 IA=1,6
DO 200 IB=1,6
CABGXUG = 0.
CAGBXUG = 0.
CAGBYVG = 0.
CABGYVG = 0.
CABGXVG = 0.
CAGBYUG = 0.
CABGXTG = 0.
CABGYTG = 0.
DO 210 I=1,6
DO 210 J=1,6
DO 210 K=1,6
DO 210 L=1,6
DO 210 M=1,3
CABGXUG = CABGXUG
* + A(IA,I)*A(IA,J)*A(K,L)*B(L,M)*F(I,J,M)*UELE(K)
CAGBXUG = CAGBXUG
* + A(IA,I)*A(K,J)*A(IA,L)*B(L,M)*F(I,J,M)*UELE(K)
CAGBYVG = CAGBYVG

```

```

*      + A(IA,I)*A(K,J)*A(IB,L)*C(L,M)*F(I,J,M)*VELE(K)
CABGYVG = CABGYVG
*      + A(IA,I)*A(IB,J)*A(K,L)*C(L,M)*F(I,J,M)*VELE(K)
CABGXVG = CABGXVG
*      + A(IA,I)*A(IB,J)*A(K,L)*B(L,M)*F(I,J,M)*VELE(K)
CABGYUG = CABGYUG
*      + A(IA,I)*A(IB,J)*A(K,L)*C(L,M)*F(I,J,M)*UELE(K)
CABGXTG = CABGXTG
*      + A(IA,I)*A(IB,J)*A(K,L)*B(L,M)*F(I,J,M)*TELE(K)
CABGYTG = CABGYTG
*      + A(IA,I)*A(IB,J)*A(K,L)*C(L,M)*F(I,J,M)*TELE(K)
210 CONTINUE
ABGXUG(IA,IB) = CABGXUG
AGBXUG(IA,IB) = CABGXUG
AGBYVG(IA,IB) = CABGYVG
ABGYVG(IA,IB) = CABGYVG
ABGXVG(IA,IB) = CABGXVG
ABGYUG(IA,IB) = CABGYUG
ABGXTG(IA,IB) = CABGXTG
ABGYTG(IA,IB) = CABGYTG
200 CONTINUE
C
DO 220 I=1,6
DO 220 J=1,6
CUU(I,J) = ABGXUG(I,J) + AGBXUG(I,J) + AGBYVG(I,J) + SXX(I,J)
CVV(I,J) = ABGYVG(I,J) + AGBYVG(I,J) + AGBXUG(I,J) + SYY(I,J)
CVU(I,J) = ABGXVG(I,J) + SYX(I,J)
CUV(I,J) = ABGYUG(I,J) + SXY(I,J)
CTT(I,J) = AGBXUG(I,J) + AGBYVG(I,J) + TXX(I,J) + TYY(I,J)
220 CONTINUE
C
C      THEN THE MATRIX (21X21) ON LHS OF THE ELEMENT EQS. IS:
C
DO 230 I=1,21
DO 230 J=1,21
AKELE(I,J,IE) = 0.
230 CONTINUE
C
DO 240 I=1,6
DO 250 J=1,6
AKELE(I ,J ,IE) = CUU(I,J)
AKELE(I+6,J+6,IE) = CVV(I,J)
AKELE(I ,J+6,IE) = CUV(I,J)
AKELE(I+6,J ,IE) = CVU(I,J)
250 CONTINUE
DO 260 J=1,3
AKELE(I ,J+18,IE) = HXT(I,J)
AKELE(I+6,J+18,IE) = HYT(I,J)
260 CONTINUE
240 CONTINUE

```

```

DO 270 I=1,3
DO 270 J=1,6
AKELE(I+18,J ,IE) = HX(I,J)
AKELE(I+18,J+6,IE) = HY(I,J)
270 CONTINUE
DO 280 I=1,6
DO 280 J=1,6
AKELE(I+6,J+12,IE) = CAB(I,J)
280 CONTINUE
DO 290 I=1,6
DO 290 J=1,6
AKELE(I+12,J ,IE) = ABGXTG(I,J)
AKELE(I+12,J+6 ,IE) = ABGYTG(I,J)
AKELE(I+12,J+12,IE) = CTT(I,J)
290 CONTINUE
C
C      BEGIN COMPUTING THE RESIDUALS ON RHS OF ELEMENT EQS.:
C
DO 300 I=1,6
TERM1 = 0.
TERM2 = 0.
TERM3 = 0.
TERM4 = 0.
TERM5 = 0.
DO 310 J=1,6
TERM1 = TERM1 + ABGXUG(I,J)*UELE(J)
TERM2 = TERM2 + ABGYUG(I,J)*VELE(J)
TERM4 = TERM4 + SXX(I,J)*UELE(J)
TERM5 = TERM5 + SXY(I,J)*VELE(J)
310 CONTINUE
DO 320 J=1,3
TERM3 = TERM3 + HXT(I,J)*PELE(J)
320 CONTINUE
FX(I) = TERM1 + TERM2 + TERM3 + TERM4 + TERM5
300 CONTINUE
C
DO 350 I=1,6
TERM1 = 0.
TERM2 = 0.
TERM3 = 0.
TERM4 = 0.
TERM5 = 0.
TERM6 = 0.
DO 360 J=1,6
TERM1 = TERM1 + ABGXVG(I,J)*UELE(J)
TERM2 = TERM2 + ABGYVG(I,J)*VELE(J)
TERM4 = TERM4 + SYX(I,J)*UELE(J)
TERM5 = TERM5 + SYY(I,J)*VELE(J)
TERM6 = TERM6 + CAB(I,J)*TELE(J)
360 CONTINUE

```

```

DO 370 J=1,3
TERM3 = TERM3 + HYT(I,J)*PELE(J)
370 CONTINUE
FY(I) = TERM1 + TERM2 + TERM3 + TERM4 + TERM5 + TERM6
350 CONTINUE
DO 380 I=4,6
FY(I) = FY(I) + GRA*AREA/3.*(1.+TEXP*TREF)
380 CONTINUE
C
DO 400 I=1,6
TERM1 = 0.
TERM2 = 0.
TERM3 = 0.
TERM4 = 0.
DO 410 J=1,6
TERM1 = TERM1 + ABGXTG(I,J)*UELE(J)
TERM2 = TERM2 + ABGYTG(I,J)*VELE(J)
TERM3 = TERM3 + TXX(I,J)*TELE(J)
TERM4 = TERM4 + TYY(I,J)*TELE(J)
410 CONTINUE
FT(I) = TERM1 + TERM2 + TERM3 + TERM4
400 CONTINUE
C
DO 450 I=1,3
TERM1 = 0.
TERM2 = 0.
DO 460 J=1,6
TERM1 = TERM1 + HX(I,J)*UELE(J)
TERM2 = TERM2 + HY(I,J)*VELE(J)
460 CONTINUE
FI(I) = TERM1 + TERM2
450 CONTINUE
C
C      THUS THE RESIDUAL VECTOR ON RHS OF ELEMENT EQS. IS:
C
DO 420 I=1,6
RELE(I ,IE) = -FX(I)
RELE(I+6 ,IE) = -FY(I)
RELE(I+12,IE) = -FT(I)
420 CONTINUE
DO 430 I=1,3
RELE(I+18,IE) = -FI(I)
430 CONTINUE
C
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR ELEMENT MATRICES:
C
CALL APPLYBC(MXPOIV, MXELE, AKELE, RELE, INTMAT,
*          IBCU, IBCV, IBCT, IBCP, IE)
C
500 CONTINUE

```

```

C      RETURN
C      END
C-----
C      SUBROUTINE FORCE( B, COORD, INTOUT, PRES, MXPOIV,
*          MXNEQ, MXFREE, DEN )
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C      DIMENSION B(MXNEQ), PRES(MXPOIV)
C      DIMENSION COORD(MXPOIV, 2), INTOUT(MXFREE, 4)
C
C      DO 10 I=1,MXFREE
C
C      FIND BOUNDARY LOCAL COORDINATES:
C
C      JJ = INTOUT(I, 2)
C      KK = INTOUT(I, 3)
C      LL = INTOUT(I, 4)
C      X1 = COORD(JJ, 1)
C      X2 = COORD(LL, 1)
C      Y1 = COORD(JJ, 2)
C      Y2 = COORD(LL, 2)
C
C      CALCULATE LENGTH OF BOUNDARY:
C
C      DX = X2 - X1
C      DY = Y2 - Y1
C      DL = SQRT(DX*DX + DY*DY)
C
C      CALCULATE FORCE COMPONENTS:
C
C      IF ((DX.LT.0.).AND.(DY.GE.0.)) THEN
C      RX1 = -PRES(JJ)*DY/6.
C      RX2 = -PRES(LL)*DY/6.
C      RY1 = -PRES(JJ)*DX/6.
C      RY2 = -PRES(LL)*DX/6.
C      ELSE
C      IF ((DX.LT.0.).AND.(DY.LT.0.)) THEN
C      RX1 = PRES(JJ)*DY/6.
C      RX2 = PRES(LL)*DY/6.
C      RY1 = -PRES(JJ)*DX/6.
C      RY2 = -PRES(LL)*DX/6.
C      ELSE
C      IF ((DX.GE.0.).AND.(DY.LT.0.)) THEN
C      RX1 = PRES(JJ)*DY/6.
C      RX2 = PRES(LL)*DY/6.
C      RY1 = PRES(JJ)*DX/6.

```



```

      RY2 = PRES(LL)*DX/6.
    ELSE
      IF ((DX.GE.0.).AND.(DY.GE.0.)) THEN
        RX1 = -PRES(JJ)*DY/6.
        RX2 = -PRES(LL)*DY/6.
        RY1 = PRES(JJ)*DX/6.
        RY2 = PRES(LL)*DX/6.
      ENDIF
    ENDIF
  ENDIF
ENDIF
C
C ASSEMBLING FORCE COMPONENTS INTO SYSTEM LOAD VECTOR:
C
B(JJ) = B(JJ) + RX1/DEN
B(KK) = B(KK) + 2.*RX1/DEN
B(KK) = B(KK) + 2.*RX2/DEN
B(LL) = B(LL) + RX2/DEN
B(MXPOIV+JJ) = B(MXPOIV+JJ) + RY1/DEN
B(MXPOIV+KK) = B(MXPOIV+KK) + 2.*RY1/DEN
B(MXPOIV+KK) = B(MXPOIV+KK) + 2.*RY2/DEN
B(MXPOIV+LL) = B(MXPOIV+LL) + RY2/DEN
C
10 CONTINUE
C
RETURN
END
C
-----
C
SUBROUTINE HEATFLUX( B, COORD, INTFLUX, FLUX, MXPOIV, MXNEQ,
* MXFLUX, DEN, CV )
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
DIMENSION B(MXNEQ), FLUX(MXPOIV)
DIMENSION COORD(MXPOIV, 2), INTFLUX(MXFLUX, 4)
C
DO 10 I=1, MXFLUX
C
C FIND BOUNDARY LOCAL COORDINATES:
C
JJ = INTFLUX(I, 2)
KK = INTFLUX(I, 3)
LL = INTFLUX(I, 4)
X1 = COORD(JJ, 1)
X2 = COORD(LL, 1)
Y1 = COORD(JJ, 2)
Y2 = COORD(LL, 2)
C

```

```

C CALCULATE LENGTH OF BOUNDARY:
C
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
DL = SQRT(DX*DX + DY*DY)
C
C CALCULATE HEAT FLUX THAT FLOW INTO DOMAIN:
C
Q1 = (FLUX(JJ)*DL/6.)/(DEN*CV)
Q2 = (FLUX(LL)*DL/6.)/(DEN*CV)
C
C ASSEMBLING HEAT FLUX INTO SYSTEM LOAD VECTOR:
C
B(2*MXPOIV+JJ) = B(2*MXPOIV+JJ) + Q1
B(2*MXPOIV+KK) = B(2*MXPOIV+KK) + 2.*Q1
B(2*MXPOIV+KK) = B(2*MXPOIV+KK) + 2.*Q2
B(2*MXPOIV+LL) = B(2*MXPOIV+LL) + Q2
C
10 CONTINUE
C
RETURN
END

```

ภาคผนวก ข

รายละเอียดไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์  
การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (HIFLOW)

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





```

DO 35 I=1,NPOIN
UNKNP(I,J) = UNKNP(I,1)*UNKNP(I,J)
35 CONTINUE
C
C COMPUTE ELEMENT QUANTITIES:
C
C13 = 1./3.
DO 40 IE=1,NELEM
NCOUNT = 4
FACTOR = 0.25
IL = INTMA(IE,4)
IF(IL.EQ.0) NCOUNT = 3
IF(IL.EQ.0) FACTOR = C13
DO 40 IA=1,NAMAT
UNKNO(IE,IA) = 0.
DO 40 IN=1,NCOUNT
IP = INTMA(IE,IN)
UNKNO(IE,IA) = UNKNO(IE,IA) + FACTOR*UNKNP(IP,IA)
40 CONTINUE
C
C READ NODAL BOUNDARY CONDITIONS:
C
C BSIDO(NBOUN,1) -- 1ST NODE ON THE SIDE
C BSIDO(NBOUN,2) -- 2ND NODE ON THE SIDE
C BSIDO(NBOUN,3) -- ELEMENT NO. OF THAT SIDE
C BSIDO(NBOUN,4) -- B.C. OF THAT SIDE
C
C READ(5,1) TEXT
C DO 50 IB=1,NBOUN
C READ(5,*) (BSIDO(IB,J), J=1,4)
50 CONTINUE
C
C WRITE(6,54)
54 FORMAT(1X,'READING INPUT DATA COMPLETED')
C
C COMPUTE TOTAL NUMBER OF SIDES:
C
NSIDE = (3*(NTRI + 2*NQUAD) + NBOUN)/2 - NQUAD
C
C IDENTIFY THE SIDE: DETERMINE ARRAYS ISIDE(NSIDE,4)
C AND JESID(NELEM,4)
C
C CALL SIDE(NELEM, NPOIN, NSIDE, INTMA, ISIDE, IDUM1, IDUM2,
* IDUM3, NBOUN, NBNOI, BSIDO, JESID )
C
C WRITE(6,55)
55 FORMAT(1X,'SUB. SIDE COMPLETED')
C
C COMPUTE COMPONENTS OF UNIT NORMAL VECTOR TO THE SIDE
C AND THE SIDE LENGTHS:
C
DO 70 IS=1,NSIDE
IPI = ISIDE(IS,1)
IPJ = ISIDE(IS,2)

```

```

DX = COORD(IPJ,1) - COORD(IPI,1)
DY = COORD(IPJ,2) - COORD(IPI,2)
DL = SQRT(DX*DX + DY*DY)
RSIDO(IS,1) = DY/DL
RSIDO(IS,2) = -DX/DL
RSIDO(IS,3) = DL
70 CONTINUE
C
C COMPUTE ELEMENT AREAS AND ALL ELEMENT MATRICES NEEDED
C
C CALL GETMAT( NDIMN, NAMAT, NELEM, NPOIN, INTMA,
* COORD, AMLP, AREA, DNDX, DNDY )
C
C DETERMINE REPRESENTATIVE ELEMENT LENGTHS FOR LOCAL TIME STEP
C COMPUTATION
C
C CALL ELELEN( NDIMN, NNODE, NSIDE, NPOIN, NELEM,
* INTMA, COORD, ISIDE, JESID, SLEN )
C
C WRITE(9,93)
93 FORMAT( 44H HEAT FLUX COMPUTATION USING 2-PT DIFFERENCE, /,
* 8H ELEMENT, 3X, 8HPRESSURE, 3X, 9HHEAT FLUX,
* 7X, 2HXI, 10X, 2HYI, 10X, 2HXJ, 10X, 2HYJ )
C
C PERFORM TIME STEP ITERATIONS:
C
C DO 5000 ITIME=1,NTIME
C
C STORE ELEMENT UNKNOWNNS IN UNKN1(NELEM,NAMAT)
C
C DO 510 IA=1,NAMAT
C DO 510 IE=1,NELEM
UNKN1(IE,IA) = UNKNO(IE,IA)
510 CONTINUE
C
C COMPUTE CURRENT SAFETY FACTOR
C
IDONE = 0
ATIME = FLOAT(ITIME)
DO 515 I=1,NSET
IF((ATIME.LE.ASET(I)).AND.(IDONE.EQ.0)) THEN
IDONE = 1
DIFF = ASET(I) - ASET(I-1)
CSAFE = (ASET(I)-ATIME)*CSET(I-1)/DIFF
+ (ATIME-ASET(I-1))*CSET(I)/DIFF
&
& ENDF
515 CONTINUE
CSAFE = 0.5
C
C COMPUTE NODAL DERIVATIVES OF U, V, T WRT. X & Y
C
520 CONTINUE
IF(IVISC.EQ.1)

```



```

II = BSIDO(IB,1)
JJ = BSIDO(IB,2)
DO 135 IA=2,NAMAT
UNKNP(II,IA) = UNKNP1(II,IA)
UNKNP(JJ,IA) = UNKNP1(JJ,IA)
135 CONTINUE
130 CONTINUE
131 CONTINUE
C
C PRINT OUT SOLUTION:
C
NN1 = 1
NN2 = 2
WRITE(7,1000)
1000 FORMAT(4X, 4HNODE, 9X, 3HRHO, 14X, 1HU, 15X, 1HV, 15X, 1HE)
DO 150 IP=1,NPOIN
WRITE(7,1100) IP, (UNKNP(IP,IA), IA=1,NAMAT)
150 CONTINUE
1100 FORMAT(I8, 4E16.8)
C
C PREPARE DATA FOR PLOTTING BY PROGRAM FEPL0T:
C
WRITE(23,1010)
1010 FORMAT(' NPOIN NELEM NVAR')
WRITE(23,1011) NPOIN, NTRI, NAMAT
1011 FORMAT(3I8)
WRITE(23,1012) MXPOI
1012 FORMAT(' NODAL COORDINATES & SOLUTIONS [' , I5, ' ]')
DO 160 IP=1,NPOIN
WRITE(23,1013) IP, (COORD(IP,J), J=1,2), (UNKNP(IP,IA), IA=1,NAMAT)
160 CONTINUE
1013 FORMAT(I6, 6E13.5)
WRITE(23,1014) NTRI
1014 FORMAT(' ELEMENT NODAL CONNECTIONS [' , I5, ' ]')
DO 170 IE=1,NTRI
WRITE(23,1015) IE, (INTMA(IE,J), J=1,3)
1015 FORMAT(4I8)
170 CONTINUE
C
C COMPUTE CONSISTENT NODAL HEAT FLUXES IF NEEDED:
C
IF(IVISC.EQ.0) GO TO 2000
CALL HTFLX(
* NDIMN, NNODE, NAMAT, NSIDE, NBOUN,
* NBNOR, NPOIN, NTRI, NQUAD, NELEM, INTMA, COORD,
* BSIDO, UNKNP, UNKNP1, GAMMA, CV, PR, AMUF,
* TREFF, S, SIDERX, SIDERY )
2000 CONTINUE
C
STOP
END
SUBROUTINE ADVNCE( NDIMN, NNODE, NAMAT, NSIDE, NBOUN,
* NBNOR, NPOIN, NTRI, NQUAD, NELEM, INTMA, COORD,
* ISIDE, JESID, RSIDO, BSIDO, UNKNO, UNKNI, UNKNP,

```

```

* AREA, AMLP, DNDX, DNDY, SIDERX, SIDERY, RHSO,
* CSAFE, GAMMA, CV, PR, AMUF, TREFF, S,
* IVISC, EPSLAM, DELTE, SLEN, ITIME, NTIME, CSAFV,
* NODEQ, QDOT, IDISS )
C
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C DIMENSION COORD(NPOIN,NDIMN), RHSO(NELEM,NAMAT)
C DIMENSION UNKNO(NELEM,NAMAT), UNKNI(NELEM,NAMAT)
C DIMENSION RSIDO(NSIDE,NBNOR), DELTE(NELEM), AREA(NELEM)
C DIMENSION AMLP(NPOIN), SIDERX(NPOIN,3), SIDERY(NPOIN,3)
C DIMENSION DNDX(NELEM,4), DNDY(NELEM,4), UNKNP(NPOIN,NAMAT)
C DIMENSION SLEN(NSIDE,2)
C DIMENSION RLAM(4), R(4,4), RI(4,4), DU(4)
C DIMENSION DISS(4), FSUM(4), FLUX(4), AVROE(4,4), VELUX(4)
C
C INTEGER INTMA(NELEM,NAMAT), BSIDO(NBOUN,4)
C INTEGER ISIDE(NSIDE,4), JESID(NELEM,4)
C
C GAMI = GAMMA - 1.
C
C INITIALIZE ELEMENT TIME STEPS:
C
DO 20 IE=1,NELEM
DELTE(IE) = 1.E+10
20 CONTINUE
C
C INITIALIZE RHSO VECTOR:
C
DO 30 IA=1,NAMAT
DO 30 IE=1,NELEM
RHSO(IE,IA) = 0.
30 CONTINUE
C
C LOOP OVER THE SIDES:
C
DO 8888 IS=1,NSIDE
C
C IDENTIFY THE LEFT AND RIGHT ELEMENT NUMBERS:
C
IEL = ISIDE(IS,3)
IER = ISIDE(IS,4)
C
C GET COMPONENTS OF NORMAL VECTOR FOR THE SIDE CONSIDERED:
C
RNX = RSIDO(IS,1)
RNY = RSIDO(IS,2)
RLEN = RSIDO(IS,3)
C
C COLLECT THE "LEFT" ELEMENT VALUES:
C
RHOL = UNKNO(IEL,1)
UXL = UNKNO(IEL,2)/RHOL

```

```
VYL = UNKNO( IEL, 3 ) / RHOL
TEL = UNKNO( IEL, 4 ) / RHOL
PRESL = GAM1 * ( UNKNO( IEL, 4 ) - 0.5 * RHOL * ( UXL * UXL + VYL * VYL ) )
IF( IVISC.EQ.1 ) TEMPL = ( TEL - 0.5 * ( UXL * UXL + VYL * VYL ) ) / CV
```

```
"LEFT" NORMAL AND TANGENTIAL VELOCITIES AND TOTAL ENTHALPY:
```

```
UNL = UXL * RNX + VYL * RNY
VTL = -UXL * RNY + VYL * RNX
UL2 = UNL * UNL + VTL * VTL
HL = GAMMA * TEL - 0.5 * GAM1 * UL2
```

```
IS THIS SIDE ON THE ACTUAL FLOW BOUNDARY ?
```

```
IF( IER.GT.0 ) GO TO 100
```

```
APPLY BOUNDARY CONDITIONS:
```

```
IF( IER.EQ.-1 ) GO TO 110
IF( IER.EQ.-2 ) GO TO 120
IF( IER.EQ.-3 ) GO TO 130
IF( IER.EQ.-4 ) GO TO 140
GO TO 100
```

```
SUPERSONIC INFLOW:
```

```
110 CONTINUE
II = ISIDE( IS, 1 )
JJ = ISIDE( IS, 2 )
RHOR = 0.5 * ( UNKNP( II, 1 ) + UNKNP( JJ, 1 ) )
UXR = 0.5 * ( UNKNP( II, 2 ) / UNKNP( II, 1 ) + UNKNP( JJ, 2 ) / UNKNP( JJ, 1 ) )
VYR = 0.5 * ( UNKNP( II, 3 ) / UNKNP( II, 1 ) + UNKNP( JJ, 3 ) / UNKNP( JJ, 1 ) )
TER = 0.5 * ( UNKNP( II, 4 ) / UNKNP( II, 1 ) + UNKNP( JJ, 4 ) / UNKNP( JJ, 1 ) )
PRESR = GAM1 * ( RHOR * TER - 0.5 * RHOR * ( UXR * UXR + VYR * VYR ) )
IF( IVISC.EQ.1 ) TEMPR = ( TER - 0.5 * ( UXR * UXR + VYR * VYR ) ) / CV
GO TO 200
```

```
SUPERSONIC OUTFLOW:
```

```
120 CONTINUE
RHOR = RHOL
UXR = UXL
VYR = VYL
TER = TEL
PRESR = PRESL
IF( IVISC.EQ.1 ) TEMPR = ( TER - 0.5 * ( UXR * UXR + VYR * VYR ) ) / CV
GO TO 200
```

```
INVISCID WALL
```

```
130 CONTINUE
RHOR = RHOL
UXR = -RNX * UNL - RNY * VTL
```

```
VYR = -RNY * UNL + RNX * VTL
PRESR = PRESL
TER = ( PRESR / ( GAM1 * RHOR ) ) + 0.5 * ( UXR * UXR + VYR * VYR )
IF( IVISC.EQ.1 ) TEMPR = ( TER - 0.5 * ( UXR * UXR + VYR * VYR ) ) / CV
GO TO 200
```

```
VISCOUS WALL WITH SPECIFIED TEMPERATURE
```

```
140 CONTINUE
II = ISIDE( IS, 1 )
JJ = ISIDE( IS, 2 )
PRESR = PRESL
UXR = -UXL
VYR = -VYL
TEWALL = 0.5 * ( UNKNP( II, 4 ) / UNKNP( II, 1 ) + UNKNP( JJ, 4 ) / UNKNP( JJ, 1 ) )
TER = TEWALL
IF( TER.LE.0. ) WRITE( 23, 4321 ) IEL
IF( TER.LE.0. ) WRITE( 6, 4321 ) IEL
4321 FORMAT( ' *** WARNING *** COMPUTED WALL TEMP. NEXT TO ELEMENT', I5,
' IS NEGATIVE', /, ' TRY ANOTHER STATEMENT COMMENTED IN CODE' )
RHOR = PRESR / ( GAM1 * ( TER - 0.5 * ( UXR * UXR + VYR * VYR ) ) )
IF( IVISC.EQ.1 ) TEMPR = TER / CV
GO TO 200
```

```
THE RIGHT SIDE IS CONNECTED TO ACTUAL ELEMENT:
```

```
100 CONTINUE
RHOR = UNKNO( IER, 1 )
UXR = UNKNO( IER, 2 ) / RHOR
VYR = UNKNO( IER, 3 ) / RHOR
TER = UNKNO( IER, 4 ) / RHOR
PRESR = GAM1 * ( UNKNO( IER, 4 ) - 0.5 * RHOR * ( UXR * UXR + VYR * VYR ) )
IF( IVISC.EQ.1 ) TEMPR = ( TER - 0.5 * ( UXR * UXR + VYR * VYR ) ) / CV
```

```
200 CONTINUE
```

```
"RIGHT" NORMAL AND TANGENTIAL VELOCITIES AND TOTAL ENTHALPY:
```

```
UNR = UXR * RNX + VYR * RNY
VTR = -UXR * RNY + VYR * RNX
UR2 = UNR * UNR + VTR * VTR
HR = GAMMA * TER - 0.5 * GAM1 * UR2
```

```
ALSO COMPUTE AVERAGE VALUES OF VISCOUS FLUXES IF NEEDED
```

```
IF( IVISC.EQ.0 ) GO TO 230
II = ISIDE( IS, 1 )
JJ = ISIDE( IS, 2 )
DUML = TEMPL / TREFF
AMUL = SQRT( DUML * DUML * DUML )
DUML = ( TREFF * S ) / ( TEMPL * S )
AMUL = AMUL * AMUL * DUML
DUMR = TEMPR / TREFF
```

```

AMUR = SQRT(DUMR*DUMR*DUMR)
DUMR = (TREFF+S)/(TEMPR+S)
AMUR = AMUF*AMUR*DUMR
AMU = 0.5*(AMUL+AMUR)
TK = GAMMA*CV*AMU/PR
UVEL = 0.5*(UXL+UXR)
VVEL = 0.5*(VYL+VYR)
DUDX = 0.5*(SIDERX(II,1) + SIDERX(JJ,1))
DUDY = 0.5*(SIDERY(II,1) + SIDERY(JJ,1))
DVDX = 0.5*(SIDERX(II,2) + SIDERX(JJ,2))
DVDY = 0.5*(SIDERY(II,2) + SIDERY(JJ,2))
DTDX = 0.5*(SIDERX(II,3) + SIDERX(JJ,3))
DTDY = 0.5*(SIDERY(II,3) + SIDERY(JJ,3))
SXX = (2./3.)*AMU*(2.*DUDX - DVDY)
SXY = AMU*( DUDY + DVDX)
SYY = (2./3.)*AMU*(2.*DVDY - DUDX)
QX = -TK*DTDX
QY = -TK*DTDY

VFLUX(1) = 0.
VFLUX(2) = -SXX*RNK - SXY*RNY
VFLUX(3) = -SXY*RNK - SYY*RNY
VFLUX(4) = -(UVEL*SXX + VVEL*SXY - QX)*RNK
        -(UVEL*SXY + VVEL*SYY - QY)*RNY

STORE HEATING RATE AT NODE NODEQ FOR CONVERGENCE CHECK

IF(IER.NE.-4) GO TO 225
IF((II.EQ.NODEQ).OR.(JJ.EQ.NODEQ))
* QDOT = (QX*RNK + QY*RNY)
225 CONTINUE

PRINT OUT WALL HEATING RATE IF NEEDED

IF((ITIME.EQ.NTIME).AND.(IER.EQ.-4)) THEN
QWALL = (QX*RNK + QY*RNY)
WRITE(9,1111) IEL, PRESL, QWALL,
COORD(II,1), COORD(II,2), COORD(JJ,1), COORD(JJ,2)
1111 FORMAT(I8, 6E12.5)
ENDIF

230 CONTINUE

COMPUTE INTERFACE VALUES

BI = SQRT(RHOR/RHOL)
AI = 1./(1.+BI)
UI = (BI*UXR + UXL)*AI
VI = (BI*VYR + VYL)*AI
HI = (BI*HR + HL)*AI
CI2= GAM1*(HI - 0.5*(UI*UI+VI*VI))
IF(CI2.LT.0.) WRITE(6,222) IER, IEL
222 FORMAT(2X, 'NEGATIVE SOUND SPEED BETWEEN ELEMENTS', 2I5)

```

```

CI = SQRT(CI2)
UCAP = UI*RNK + VI*RNY
VCAP = -UI*RNY + VI*RNK
CX = CI*RNK
CY = CI*RNY
ALP = 0.5*(UI*UI + VI*VI)

C
C COMPUTE THE FOUR ABSOLUTE EIGENVALUES:
C
RLAM(1) = ABS(UCAP)
RLAM(2) = ABS(UCAP)
RLAM(3) = ABS(UCAP+CI)
RLAM(4) = ABS(UCAP-CI)

C
C RESET THESE EIGENVALUES SO THAT THE RANGE IS FROM ZERO TO ONE
C
EIGMAX = ABS(UCAP) + CI
DO 245 IR=1,4
RLAM(IR) = RLAM(IR)/EIGMAX
245 CONTINUE

C
C EPSACT = EPSLAM
C
C SET EPSLAM TO BE VERY SMALL FOR ALL QUADS WITH SIDES PARALLEL
C TO THE WALL IF NEEDED
C
IF(IDISS.NE.0) GO TO 444
LLL = INTMA(IEL,4)
IF( LLL.EQ.0) GO TO 444
NNI = INTMA(IEL,1)
NNJ = INTMA(IEL,2)
NNK = INTMA(IEL,3)
NNL = INTMA(IEL,4)
II = ISIDE(IS,1)
JJ = ISIDE(IS,2)
IF((NNI.EQ.II).AND.(NNJ.EQ.JJ)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
IF((NNI.EQ.JJ).AND.(NNJ.EQ.II)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
IF((NNK.EQ.II).AND.(NNL.EQ.JJ)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
IF((NNK.EQ.JJ).AND.(NNL.EQ.II)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
444 CONTINUE

C
C RESET THESE EIGENVALUES IF THEY ARE LESS THAN EPSLAM:
C
DO 250 IR=1,4
IF(RLAM(IR).GE.EPSACT) GO TO 250
RLAM(IR) = 0.5*(RLAM(IR)*RLAM(IR)/EPSACT + EPSACT)
250 CONTINUE

C
C RESET BACK THE CORRECT (DIMENSION) EIGENVALUES
C
DO 247 IR=1,4
RLAM(IR) = RLAM(IR)*EIGMAX
247 CONTINUE

```

```

C
C COMPUTE ELEMENT TIME STEP ASSOCIATED WITH THIS SIDE:
C
REPLEN = SLEN(IS,1) + SLEN(IS,2)
EIGMAX = ABS(UCAP) + CI
AUX = 0.
IF(IVISC.EQ.0) GO TO 255
RHOAVG = 0.5*(RHOL+RHOR)
AUX = CSAFV*2.*AMU/(RHOAVG*PR*EIGMAX*REPLEN)
255 CONTINUE
DTL = CSAFV*(REPLEN/EIGMAX)/(1. + AUX)
DELTE(IEL) = MIN(DELTE(IEL),DTL)
IF(IER.LE.0) GO TO 260
DELTE(IER) = MIN(DELTE(IER),DTL)
260 CONTINUE
C
C COMPUTE [R] MATRIX:
C
R(1,1) = ALP*GAM1 - CI2
R(1,2) = -GAM1*UI
R(1,3) = -GAM1*VI
R(1,4) = GAM1
R(2,1) = -VCAP
R(2,2) = -RNY
R(2,3) = RNX
R(2,4) = 0.
R(3,1) = ALP*GAM1 - UCAP*CI
R(3,2) = CX - GAM1*UI
R(3,3) = CY - GAM1*VI
R(3,4) = GAM1
R(4,1) = ALP*GAM1 + UCAP*CI
R(4,2) = -CX - GAM1*UI
R(4,3) = -CY - GAM1*VI
R(4,4) = GAM1
C
C COMPUTE [R] MATRIX INVERSE:
C
RI(1,1) = -1./CI2
RI(1,2) = 0.
RI(1,3) = 0.5/CI2
RI(1,4) = 0.5/CI2
RI(2,1) = -UI/CI2
RI(2,2) = -RNY
RI(2,3) = (UI+CX)/(2.*CI2)
RI(2,4) = (UI-CX)/(2.*CI2)
RI(3,1) = -VI/CI2
RI(3,2) = RNX
RI(3,3) = (VI+CY)/(2.*CI2)
RI(3,4) = (VI-CY)/(2.*CI2)
RI(4,1) = -ALP/CI2
RI(4,2) = VCAP
RI(4,3) = (ALP+UCAP*CI)/(2.*CI2) + 1./(2.*GAM1)
RI(4,4) = (ALP-UCAP*CI)/(2.*CI2) + 1./(2.*GAM1)

```

```

C
C COMPUTE [AS] = [RI] [EIG] [R] :
C
DO 300 I=1,4
DO 300 J=1,4
R(I,J) = RLAM(I)*R(I,J)
300 CONTINUE
C
DO 310 I=1,4
DO 310 J=1,4
AVROE(I,J) = 0.
DO 310 L=1,4
AVROE(I,J) = AVROE(I,J) + RI(I,L)*R(L,J)
310 CONTINUE
C
C COMPUTE THE DIFFERENCE OF THE CONSERVATION VARIABLES
C BETWEEN THE RIGHT AND THE LEFT ELEMENTS:
C
DU(1) = RHOR - RHOL
DU(2) = RHOR*UXR - RHOL*UXL
DU(3) = RHOR*VYR - RHOL*VYL
DU(4) = RHOR*TER - RHOL*TEL
C
C COMPUTE DISS = [AS] UR-UL :
C
DO 320 I=1,4
DISS(I) = 0.
DO 320 J=1,4
DISS(I) = DISS(I) + AVROE(I,J)*DU(J)
320 CONTINUE
C
C COMPUTE SUM OF THE LEFT AND THE RIGHT FLUXES:
C
FSUM(1) = RHOL*UNL + RHOR*UNR
FSUM(2) = RNX*(PRESL+PRESR)
& + RHOL*UXL*UNL + RHOR*UXR*UNR
FSUM(3) = RNY*(PRESL+PRESR)
& + RHOL*VYL*UNL + RHOR*VYR*UNR
FSUM(4) = (RHOL*TEL + PRESL)*UNL
& + (RHOR*TER + PRESR)*UNR
C
C THE INVISCID FLUX ON RHS OF THE EQ. IS:
C
DO 330 I=1,4
FLUX(I) = 0.5*(FSUM(I) - DISS(I))
330 CONTINUE
C
C ADD VISCOUS FLUX COMPONENTS FOR VISCOUS ANALYSIS
C
IF(IVISC.EQ.0) GO TO 335
DO 333 I=1,4
FLUX(I) = FLUX(I) + VFLUX(I)
333 CONTINUE

```

```

335 CONTINUE
C
C CONTRIBUTION OF THIS FLUX TO THE "LEFT" ELEMENT:
C
DO 340 I=1,4
RHSO(IEL,I) = RHSO(IEL,I) - RLEN*FLUX(I)
340 CONTINUE
C
C CONTRIBUTION OF THIS FLUX TO THE "RIGHT" ELEMENT:
C
IF(IER.LT.0) GO TO 355
DO 350 I=1,4
RHSO(IER,I) = RHSO(IER,I) + RLEN*FLUX(I)
350 CONTINUE
355 CONTINUE
C
C END LOOP OVER ALL THE SIDES
C
8888 CONTINUE
C
C SOLVE FOR NODAL INCREMENT AND UPDATE CONSERVATION VARIABLES:
C
DO 7777 IE=1,NELEM
DO 7777 IA=1,NAMAT
UNKNO(IE,IA) = UNKN1(IE,IA)
& + DELTE(IE)*RHSO(IE,IA)/AREA(IE)
7777 CONTINUE
C
RETURN
END
SUBROUTINE ADVNCI(NDIMN,NNODE,NAMAT,NSIDE,NBOUN,
* NBNOR,NPOIN,NTRI,NQUAD,NELEM,INTMA,COORD,
* ISIDE,JESID,RSIDO,BSIDO,UNKNO,UNKN1,UNKNP,
* AREA,AMLP,DNDX,DNDY,SIDERX,SIDERY,RHSO,
* CSAFE,GAMMA,CV,PR,AMUF,TREFF,S,
* IVISC,EPSLAM,DELTE,SLEN,ITIME,NTIME,CSAFV,
* NODEQ,QDOT,IDISS)
C
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
DIMENSION COORD(NPOIN,NDIMN),RHSO(NELEM,NAMAT)
DIMENSION UNKN0(NELEM,NAMAT),UNKN1(NELEM,NAMAT)
DIMENSION RSIDO(NSIDE,NBNOR),DELTE(NELEM),AREA(NELEM)
DIMENSION AMLP(NPOIN),SIDERX(NPOIN,3),SIDERY(NPOIN,3)
DIMENSION DNDX(NELEM,4),DNDY(NELEM,4),UNKNP(NPOIN,NAMAT)
DIMENSION SLEN(NSIDE,2)
DIMENSION RLAM(4),R(4,4),RI(4,4),DU(4)
DIMENSION DISS(4),FSUM(4),FLUX(4),AVROE(4,4),VFLUX(4)
DIMENSION ALHS(4,4),BLHS(4,4),BRHS(4)
C
INTEGER INTMA(NELEM,NAMAT),BSIDO(NBOUN,4)
INTEGER ISIDE(NSIDE,4),JESID(NELEM,4)

```

```

GAM1 = GAMMA - 1.
C
C INITIALIZE ELEMENT TIME STEPS:
C
DO 20 IE=1,NELEM
DELTE(IE) = 1.E+10
20 CONTINUE
C
C LOOP OVER NUMBER OF ELEMENTS: 1 -> NELEM AND NELEM -> 1
C
ISW = ITIME - (ITIME/2)*2
IF(ISW.EQ.0) GO TO 11
I1 = 1
I2 = NELEM
I3 = 1
GO TO 12
11 CONTINUE
I1 = NELEM
I2 = 1
I3 = -1
12 CONTINUE
C
DO 7777 IE=I1,I2,I3
C
C INITIALIZE RHSO VECTOR:
C
DO 30 IA=1,NAMAT
DO 30 IN=1,NELEM
RHSO(IN,IA) = 0.
30 CONTINUE
C
DO 35 I=1,4
DO 35 J=1,4
ALHS(I,J) = 0.
35 CONTINUE
C
C LOOP OVER ALL SIDES SURROUNDING THIS ELEMENT:
C
NCOUNT = 4
LLL = INTMA(IE,4)
IF(LLL.EQ.0) NCOUNT = 3
C
DO 8888 ISD=1,NCOUNT
INODE = ISD
JNODE = INODE+1
IF(INODE.EQ.NCOUNT) JNODE=1
C
C IDENTIFY THE LEFT AND RIGHT ELEMENT NUMBERS:
C
IS = JESID(IE,INODE)
IEL = ISIDE(IS,3)
IER = ISIDE(IS,4)

```



```

C   GET COMPONENTS OF NORMAL VECTOR FOR THE SIDE CONSIDERED:
C
RNX = RSIDO (IS,1)
RNY = RSIDO (IS,2)
RLEN = RSIDO (IS,3)
II = ISIDE (IS,1)
JJ = ISIDE (IS,2)
SIGN = 1.0
C
C   CHECK THE CURRENT ELEMENT IS 'RIGHT' OR 'LEFT' ELEMENT
C
IF (IEL.EQ.IE) GO TO 40
IESAVE = IEL
IEL = IER
IER = IESAVE
IISAVE = II
II = JJ
JJ = IISAVE
SIGN = -1.0
40 CONTINUE
C
C   COLLECT THE "LEFT" ELEMENT VALUES:
C
RHOL = UNKNO (IEL,1)
UXL = UNKNO (IEL,2)/RHOL
VYL = UNKNO (IEL,3)/RHOL
TEL = UNKNO (IEL,4)/RHOL
PRESL= GAM1*(UNKNO (IEL,4) - 0.5*RHOL*(UXL*UXL+VYL*VYL))
RHOLO = UNKN1 (IEL,1)
UXLO = UNKN1 (IEL,2)/RHOLO
VYLO = UNKN1 (IEL,3)/RHOLO
TELO = UNKN1 (IEL,4)/RHOLO
PRESLO= GAM1*(UNKN1 (IEL,4) - 0.5*RHOLO*(UXLO*UXLO+VYLO*VYLO))
IF (IVISC.EQ.1) TEMPLO = PRESLO/(GAM1*RHOLO*CV)
C
C   "LEFT" NORMAL AND TANGENTIAL VELOCITIES AND TOTAL ENTHALPY:
C
UNL = UXL*RNX + VYL*RNY
VTL = -UXL*RNY + VYL*RNX
UL2 = UNL*UNL + VTL*VTL
HL = GAMMA*TEL - 0.5*GAM1*UL2
UNLO = UXLO*RNX + VYLO*RNY
VTLO = -UXLO*RNY + VYLO*RNX
UL2O = UNLO*UNLO + VTLO*VTLO
C
C   IS THIS SIDE ON THE ACTUAL FLOW BOUNDARY ?
C
IF (IER.GT.0) GO TO 100
C
C   APPLY BOUNDARY CONDITIONS:
C
IF (IER.EQ.-1) GO TO 110
IF (IER.EQ.-2) GO TO 120

```

```

IF (IER.EQ.-3) GO TO 130
IF (IER.EQ.-4) GO TO 140
GO TO 100
C
C   SUPERSONIC INFLOW:
C
110 CONTINUE
RHOR = 0.5*( UNKNP (II,1) + UNKNP (JJ,1))
UXR = 0.5*(UNKNP (II,2)/UNKNP (II,1) + UNKNP (JJ,2)/UNKNP (JJ,1))
VYR = 0.5*(UNKNP (II,3)/UNKNP (II,1) + UNKNP (JJ,3)/UNKNP (JJ,1))
TER = 0.5*(UNKNP (II,4)/UNKNP (II,1) + UNKNP (JJ,4)/UNKNP (JJ,1))
PRESR= GAM1*(RHOR*TER - 0.5*RHOR*(UXR*UXR+VYR*VYR))
RHORO = RHOR
UXRO = UXR
VYRO = VYR
TERO = TER
PRESRO= PRESR
IF (IVISC.EQ.1) TEMPRO = (TERO - 0.5*(UXRO*UXRO+VYRO*VYRO))/CV
GO TO 200
C
C   SUPERSONIC OUTFLOW:
C
120 CONTINUE
RHOR = RHOL
UXR = UXL
VYR = VYL
TER = TEL
PRESR= GAM1*(RHOR*TER - 0.5*RHOR*(UXR*UXR+VYR*VYR))
RHORO = RHOLO
UXRO = UXLO
VYRO = VYLO
TERO = TELO
PRESRO= GAM1*(RHORO*TERO - 0.5*RHOR*(UXRO*UXRO+VYRO*VYRO))
IF (IVISC.EQ.1) TEMPRO = PRESRO/(GAM1*RHOR*CV)
GO TO 200
C
C   INVISCID WALL
C
130 CONTINUE
RHOR = RHOL
UXR = -RNX*UNL - RNY*VTL
VYR = -RNY*UNL + RNX*VTL
PRESR= PRESL
TER = (PRESR/(GAM1*RHOR)) + 0.5*(UXR*UXR+VYR*VYR)
RHORO = RHOLO
UXRO = -RNX*UNLO - RNY*VTLO
VYRO = -RNY*UNLO + RNX*VTLO
PRESRO= PRESLO
TERO = (PRESRO/(GAM1*RHORO)) + 0.5*(UXRO*UXRO+VYRO*VYRO)
IF (IVISC.EQ.1) TEMPRO = PRESRO/(GAM1*RHORO*CV)
GO TO 200
C
C   VISCOUS WALL WITH SPECIFIED TEMPERATURE

```

```

C
140 CONTINUE
PRESR = PRESL
UXR  = -UXL
VYR  = -VYL
TEWALL = 0.5*(UNKNP(II,4)/UNKNP(II,1) + UNKNP(JJ,4)/UNKNP(JJ,1))
TER   = TEWALL
IF(TER.LE.0.) WRITE(23,4321) IEL
IF(TER.LE.0.) WRITE( 6,4321) IEL
4321 FORMAT(' *** WARNING *** COMPUTED WALL TEMP. NEXT TO ELEMENT',I5,
& ' IS NEGATIVE', /, ' TRY ANOTHER STATEMENT COMMENTED IN CODE')
RHOR = PRESR/(GAM1*(TER - 0.5*(UXR*UXR+VYR*VYR)))
PRESRO = PRESLO
UXRO = -UXLO
VYRO = -VYLO
TEWALLO = TEWALL
TERO = TEWALLO
RHORO = PRESRO/(GAM1*(TERO - 0.5*(UXRO*UXRO+VYRO*VYRO)))
TEMPRO = PRESRO/(GAM1*RHORO*CV)
GO TO 200

C
C
C THE RIGHT SIDE IS CONNECTED TO ACTUAL ELEMENT:
C
100 CONTINUE
RHOR = UNKNO(IER,1)
UXR  = UNKNO(IER,2)/RHOR
VYR  = UNKNO(IER,3)/RHOR
TER  = UNKNO(IER,4)/RHOR
PRESR= GAM1*(UNKNO(IER,4) - 0.5*RHOR*(UXR*UXR+VYR*VYR))
RHORO = UNKNO(IER,1)
UXRO = UNKNO(IER,2)/RHORO
VYRO = UNKNO(IER,3)/RHORO
TERO = UNKNO(IER,4)/RHORO
PRESRO= GAM1*(UNKNO(IER,4) - 0.5*RHORO*(UXRO*UXRO+VYRO*VYRO))
IF(IVISC.EQ.1) TEMPRO = PRESRO/(GAM1*RHORO*CV)

C
C
C 200 CONTINUE
C
C "RIGHT" NORMAL AND TANGENTIAL VELOCITIES AND TOTAL ENTHALPY:
C
UNR = UXR*RNX + VYR*RNY
VTR = -UXR*RNY + VYR*RNX
UR2 = UNR*UNR + VTR*VTR
HR  = GAMMA*TER - 0.5*GAM1*UR2

C
C ALSO COMPUTE AVERAGE VALUES OF VISCOUS FLUXES IF NEEDED
C
IF(IVISC.EQ.0) GO TO 230
IF(TEMPLO.LT.0.) WRITE(23,207) IEL, IER
207 FORMAT(2I5, ' LEFT ELEMENT TEMP IS NEGATIVE')
IF(TEMPLO.LT.0.) TEMPRO = 0.
DUML = TEMPLO/TREFF
AMUL = SQRT(DUML*DUML*DUML)

```

```

DUML = (TREFF+S)/(TEMPLO+S)
AMUL = AMUF*AMUL*DUML
IF(TEMPRO.LT.0.) WRITE(23,208) IEL, IER
208 FORMAT(2I5, ' RIGHT ELEMENT TEMP IS NEGATIVE')
IF(TEMPRO.LT.0.) TEMPRO = 0.
DUMR = TEMPRO/TREFF
AMUR = SQRT(DUMR*DUMR*DUMR)
DUMR = (TREFF+S)/(TEMPRO+S)
AMUR = AMUF*AMUR*DUMR
AMU = 0.5*(AMUL+AMUR)
TK = GAMMA*CV*AMU/PR
UVEL = 0.5*(UXLO+UXRO)
VVEL = 0.5*(VYLO+VYRO)
DUDX = 0.5*(SIDERX(II,1) + SIDERX(JJ,1))
DUDY = 0.5*(SIDERY(II,1) + SIDERY(JJ,1))
DVDX = 0.5*(SIDERX(II,2) + SIDERX(JJ,2))
DV DY = 0.5*(SIDERY(II,2) + SIDERY(JJ,2))
DTDX = 0.5*(SIDERX(II,3) + SIDERX(JJ,3))
DTDY = 0.5*(SIDERY(II,3) + SIDERY(JJ,3))
SXX = (2./3.)*AMU*(2.*DUDX - DV DY)
SXY = AMU*( DUDY + DV DX)
SYY = (2./3.)*AMU*(2.*DV DY - DUDX)
QX = -TK*DTDX
QY = -TK*DTDY

C
C
C VFLUX(1) = 0.
C VFLUX(2) = SIGN*(-SXX*RNX - SXY*RNY)
C VFLUX(3) = SIGN*(-SXY*RNX - SYY*RNY)
C VFLUX(4) = SIGN*(-(UVEL*SXX + VVEL*SXY - QX)*RNX
& -(UVEL*SXY + VVEL*SYY - QY)*RNY)
C
C STORE HEATING RATE AT NODE NODEQ FOR CONVERGENCE CHECK
C
IF(IER.NE.-4) GO TO 220
IF((II.EQ.NODEQ).OR.(JJ.EQ.NODEQ))
* QDOT = (QX*RNX + QY*RNY)
220 CONTINUE

C
C PRINT OUT WALL HEATING RATE IF NEEDED
C
IF((ITIME.EQ.NTIME).AND.(IER.EQ.-4)) THEN
QWALL = (QX*RNX + QY*RNY)
WRITE(9,1111) IEL, PRESL, QWALL,
& COORD(II,1), COORD(II,2), COORD(JJ,1), COORD(JJ,2)
1111 FORMAT(I8, 6E12.5)
ENDIF

C
C ALSO COMPUTE QUANTITIES REQUIRED FOR IMPLICIT VISCOUS [B] MATRIX
C
BISTAR = DNDX(IE,INODE)/AMPL(II)
BJSTAR = DNDX(IE,JNODE)/AMPL(JJ)
CISTAR = DNDY(IE,INODE)/AMPL(II)
CJSTAR = DNDY(IE,JNODE)/AMPL(JJ)

```

```

C
BSE = SIGN*0.5*(BISTAR + BJSTAR)
CSE = SIGN*0.5*(CISTAR + CJSTAR)
PHI1 = AMU*RLEN*( 4.*RNX*BSE/3. + RNY*CSE )
PHI2 = AMU*RLEN*(-2.*RNX*CSE/3. + RNY*BSE )
PHI3 = AMU*RLEN*( RNX*CSE - 2.*RNY*BSE/3.)
PHI4 = AMU*RLEN*( RNX*BSE + 4.*RNY*CSE/3.)
PHI5 = UVEL*PHI1 + VVEL*PHI3
PHI6 = UVEL*PHI2 + VVEL*PHI4
PHI7 = AMU*RLEN*GAMMA*CV*(RNX*BSE + RNY*CSE)/PR

C
230 CONTINUE

C
C
C COMPUTE INTERFACE VALUES

IF((RHOR.LE.0.).OR.(RHOL.LE.0.)) WRITE(6,217) IEL, IER
217 FORMAT( ' NEGATIVE DENSITY BETWEEN ELEMENTS', 2I5)
BI = SQRT(RHOR/RHOL)
AI = 1./(1.+BI)
UI = (BI*UXR + UXL)*AI
VI = (BI*VYR + VYL)*AI
HI = (BI*HR + HL)*AI
CI2= GAM1*(HI - 0.5*(UI*UI+VI*VI))
IF(CI2.LT.0.) WRITE(6,222) IEL, IER
222 FORMAT(2X, 'NEGATIVE SOUND SPEED BETWEEN ELEMENTS', 2I5)
IF(CI2.LT.0.) CI2 = 0.
CI = SQRT(CI2)
UCAP = UI*RNX + VI*RNY
VCAP = -UI*RNY + VI*RNX
CX = CI*RNX
CY = CI*RNY
ALP = 0.5*(UI*UI + VI*VI)

C
C
C COMPUTE THE FOUR ABSOLUTE EIGENVALUES:

RLAM(1) = ABS(UCAP)
RLAM(2) = ABS(VCAP)
RLAM(3) = ABS(UCAP+CI)
RLAM(4) = ABS(VCAP-CI)

C
C
C RESET THESE EIGENVALUES SO THAT THE RANGE IS FROM ZERO TO ONE

EIGMAX = ABS(UCAP) + CI
DO 245 IR=1,4
RLAM(IR) = RLAM(IR)/EIGMAX
245 CONTINUE

C
EPSACT = EPSLAM

C
C
C SET EPSLAM TO BE VERY SMALL FOR ALL QUADS WITH SIDES PARALLEL
C TO THE WALL IF NEEDED
C
IF(IDISS.NE.0) GO TO 444

```

```

IF( LLL.EQ.0) GO TO 444
NNI = INTMA(IE,1)
NNJ = INTMA(IE,2)
NNK = INTMA(IE,3)
NNL = INTMA(IE,4)
IF((NNI.EQ.II).AND.(NNJ.EQ.JJ)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
IF((NNI.EQ.JJ).AND.(NNJ.EQ.II)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
IF((NNK.EQ.II).AND.(NNL.EQ.JJ)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
IF((NNK.EQ.JJ).AND.(NNL.EQ.II)) EPSACT = 0.001*EPSLAM
444 CONTINUE

C
C
C RESET THESE EIGENVALUES IF THEY ARE LESS THAN EPSLAM:

DO 250 IR=1,4
IF(RLAM(IR).GE.EPSACT) GO TO 250
RLAM(IR) = 0.5*(RLAM(IR)*RLAM(IR)/EPSACT + EPSACT)
250 CONTINUE

C
C
C RESET BACK THE CORRECT (DIMENSION) EIGENVALUES

DO 247 IR=1,4
RLAM(IR) = RLAM(IR)*EIGMAX
247 CONTINUE

C
C
C COMPUTE ELEMENT TIME STEP ASSOCIATED WITH THIS SIDE:

REPLEN = SLEN(IS,1) + SLEN(IS,2)
EIGMAX = ABS(UCAP) + CI
AUX = 0.
IF(IVISC.EQ.0) GO TO 255
RHOAVG = 0.5*(RHOL+RHOR)
AUX = CSAFV*2.*AMU/(RHOAVG*PR*EIGMAX*REPLEN)
255 CONTINUE
DTL = CSAFE*(REPLEN/EIGMAX)/(1. + AUX)
DELTE(IE) = MIN(DELTE(IE),DTL)

C
C
C COMPUTE [R] MATRIX:

R(1,1) = ALP*GAM1 - CI2
R(1,2) = -GAM1*UI
R(1,3) = -GAM1*VI
R(1,4) = GAM1
R(2,1) = -VCAP
R(2,2) = -RNY
R(2,3) = RNX
R(2,4) = 0.
R(3,1) = ALP*GAM1 - UCAP*CI
R(3,2) = CX - GAM1*UI
R(3,3) = CY - GAM1*VI
R(3,4) = GAM1
R(4,1) = ALP*GAM1 + UCAP*CI
R(4,2) = -CX - GAM1*UI
R(4,3) = -CY - GAM1*VI

```

```

R(4,4) = GAM1
C
C
C COMPUTE [R] MATRIX INVERSE:
RI(1,1) = -1./CI2
RI(1,2) = 0.
RI(1,3) = 0.5/CI2
RI(1,4) = 0.5/CI2
RI(2,1) = -UI/CI2
RI(2,2) = -RNY
RI(2,3) = (UI+CX)/(2.*CI2)
RI(2,4) = (UI-CX)/(2.*CI2)
RI(3,1) = -VI/CI2
RI(3,2) = RNX
RI(3,3) = (VI+CY)/(2.*CI2)
RI(3,4) = (VI-CY)/(2.*CI2)
RI(4,1) = -ALP/CI2
RI(4,2) = VCAP
RI(4,3) = (ALP+UCAP*CI)/(2.*CI2) + 1./(2.*GAM1)
RI(4,4) = (ALP-UCAP*CI)/(2.*CI2) + 1./(2.*GAM1)
C
C
C COMPUTE [AS] = [RI] [EIG] [R] :
DO 300 I=1,4
DO 300 J=1,4
R(I,J) = RLAM(I)*R(I,J)
300 CONTINUE
C
DO 310 I=1,4
DO 310 J=1,4
AVROE(I,J) = 0.
DO 310 L=1,4
AVROE(I,J) = AVROE(I,J) + RI(I,L)*R(L,J)
310 CONTINUE
C
C
C COMPUTE THE DIFFERENCE OF THE CONSERVATION VARIABLES
BETWEEN THE RIGHT AND THE LEFT ELEMENTS:
DU(1) = SIGN*(RHOR - RHOL)
DU(2) = SIGN*(RHOR*UXR - RHOL*UXL)
DU(3) = SIGN*(RHOR*VYR - RHOL*VYL)
DU(4) = SIGN*(RHOR*TER - RHOL*TEL)
C
C
C COMPUTE DISS = [AS] UR-UL :
DO 320 I=1,4
DISS(I) = 0.
DO 320 J=1,4
DISS(I) = DISS(I) + AVROE(I,J)*DU(J)
320 CONTINUE
C
C
C COMPUTE SUM OF THE LEFT AND THE RIGHT FLUXES:

```

```

FSUM(1) = SIGN*(RHOL*UNL + RHOR*UNR)
FSUM(2) = SIGN*(RNX*(PRESL+PRESR)
& + RHOL*UXL*UNL + RHOR*UXR*UNR)
FSUM(3) = SIGN*(RNY*(PRESL+PRESR)
& + RHOL*VYL*UNL + RHOR*VYR*UNR)
& FSUM(4) = SIGN*( (RHOL*TEL + PRESL)*UNL
& + (RHOR*TER + PRESR)*UNR)
C
C
C THE INVISCID FLUX ON RHS OF THE EQ. IS:
C
DO 330 I=1,4
FLUX(I) = 0.5*(FSUM(I) - SIGN*DISS(I))
330 CONTINUE
C
C
C ADD VISCOUS FLUX COMPONENTS FOR VISCOUS ANALYSIS
C
IF(IVISC.EQ.0) GO TO 335
DO 333 I=1,4
FLUX(I) = FLUX(I) + VFLUX(I)
333 CONTINUE
335 CONTINUE
C
C
C CONTRIBUTION OF THIS FLUX TO RHS OF EQS.:
C
DO 340 I=1,4
RHS0(IE,I) = RHS0(IE,I) - RLEN*FLUX(I)
340 CONTINUE
C
C
C CONTRIBUTION TO THE LHS OF EQS.:
C
DO 350 I=1,4
DO 350 J=1,4
ALHS(I,J) = ALHS(I,J) + RLEN*AVROE(I,J)
350 CONTINUE
IF(IVISC.EQ.0) GO TO 359
C
C
C COMPUTE ELEMENT [B] MATRIX ON LHS
C
BLHS(1,1) = 0.
BLHS(1,2) = 0.
BLHS(1,3) = 0.
BLHS(1,4) = 0.
BLHS(2,1) = (PHI1*UXL + PHI2*VYL)/RHOL
BLHS(2,2) = -PHI1/RHOL
BLHS(2,3) = -PHI2/RHOL
BLHS(2,4) = 0.
BLHS(3,1) = (PHI3*UXL + PHI4*VYL)/RHOL
BLHS(3,2) = -PHI3/RHOL
BLHS(3,3) = -PHI4/RHOL
BLHS(3,4) = 0.
BLHS(4,1) = PHI5*UXL/RHOL + PHI6*VYL/RHOL
& - PHI7*(UXL*UXL + VYL*VYL - TEL)/(RHOL*CV)
BLHS(4,2) = -PHI5/RHOL + PHI7*UXL/(RHOL*CV)

```

```

BLHS(4,3) = -PHI6/RHOL + PHI7*VYL/(RHOL*CV)
BLHS(4,4) = -PHI7/(RHOL*CV)
C
DO 355 I=1,4
DO 355 J=1,4
ALHS(I,J) = ALHS(I,J) - 2.*BLHS(I,J)
355 CONTINUE
359 CONTINUE
C
END LOOP OVER ALL ELEMENT SIDES
8888 CONTINUE
C
DO 360 I=1,4
DO 360 J=1,4
ALHS(I,J) = 0.5*DELTE(IE)*ALHS(I,J)/AREA(IE)
360 CONTINUE
C
THE FINAL ELEMENT EQS. ON LHS ARE:
C
DO 370 I=1,NAMAT
ALHS(I,I) = ALHS(I,I) + 1.
370 CONTINUE
C
THE FINAL ELEMENT EQS. ON RHS ARE:
C
DO 380 I=1,NAMAT
BRHS(I) = DELTE(IE)*RHSD(IE,I)/AREA(IE)
380 CONTINUE
C
SOLVE 4*4 SIMULTANEOUS EQS. FOR THIS ELEMENT:
C
SOLUTION OF UNKNOWN ELEMENT INCREMENTS RETURN IN BRHS(I).
C
CALL GSOLVE(ALHS(1,1), ALHS(1,2), ALHS(1,3), ALHS(1,4),
& ALHS(2,1), ALHS(2,2), ALHS(2,3), ALHS(2,4),
& ALHS(3,1), ALHS(3,2), ALHS(3,3), ALHS(3,4),
& ALHS(4,1), ALHS(4,2), ALHS(4,3), ALHS(4,4),
& BRHS(1), BRHS(2), BRHS(3), BRHS(4))
C
UPDATE ELEMENT CONSERVATION VARIABLES:
C
DO 390 IA=1,NAMAT
UNKNO(IE,IA) = UNKN1(IE,IA) + BRHS(IA)
390 CONTINUE
C
END LOOP OVER NUMBER OF ELEMENTS
7777 CONTINUE
C
RETURN
END
SUBROUTINE ELELEN( NDIMN, NNODE, NSIDE, NPOIN, NELEM,

```

```

* INTMA, COORD, ISIDE, JESID, SLEN )
C
DETERMINE REPRESENTATIVE 'ELEMENT LENGTHS' FOR TIME STEP
COMPUTATION. THERE ARE 2 VALUES FOR EACH SIDE, EACH REPRESENTS
THE NORMAL DISTANCE FROM THE ELEMENT CENTROIDS ( 2 ELEMENTS
ON BOTH SIDES) TO THE SIDE CONSIDERED.
C
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
DIMENSION COORD(NPOIN,NDIMN), SLEN(NSIDE,2)
DIMENSION X(4), Y(4)
C
INTEGER INTMA(NELEM,NNODE)
INTEGER ISIDE(NSIDE,4), JESID(NELEM,4)
C
TOL = 1.E-10
C
LOOP OVER NUMBER OF ELEMENTS:
C
DO 1000 IE=1,NELEM
LNODE = INTMA(IE,4)
IF(LNODE.NE.0) GO TO 500
C
TRIANGULAR ELEMENT:
C
XC = 0.0
YC = 0.0
DO 110 IN=1,3
IP = INTMA(IE,IN)
XC = XC + COORD(IP,1)
YC = YC + COORD(IP,2)
110 CONTINUE
XC = XC/3.
YC = YC/3.
DO 200 IN=1,3
IS = JESID(IE,IN)
IL = ISIDE(IS,1)
IR = ISIDE(IS,2)
IF(IL.EQ.INTMA(IE,IN)) THEN
IES=1
ELSE
IES=2
ENDIF
XL = COORD(IL,1)
YL = COORD(IL,2)
XR = COORD(IR,1)
YR = COORD(IR,2)
IF(ABS(YR-YL).LT.TOL) THEN
DIST = ABS(YC-YL)
ELSE
IF(ABS(XR-XL).GT.TOL) THEN
RM = (YR-YL)/(XR-XL)
C = YL - RM*XL

```

```

C      RM1 = -1.0/RM
C      COMPUTE INTERSECTION POINT
C
C      XP = (YC - RM1*XC - C)/(RM - RM1)
C      YP = RM1*(XP - XC) + YC
C      DIST= SQRT((XP-XC)*(XP-XC) + (YP-YC)*(YP-YC))
C      ELSE
C      DIST = ABS(XC-XL)
C      ENDIF
C      ENDIF
C      SLEN(IS,IES) = DIST
C
C      DEAL WITH BOUNDARY ELEMENT LENGTHS
C
C      IEL = ISIDE(IS,3)
C      IER = ISIDE(IS,4)
C      IF(IEL.GT.0) GO TO 120
C      SLEN(IS,1) = SLEN(IS,2)
C      GO TO 130
C 120 IF(IER.GT.0) GO TO 130
C      SLEN(IS,2) = SLEN(IS,1)
C 130 CONTINUE
C
C      WRITE(23,998) IS, IEL, IER, SLEN(IS,1), SLEN(IS,2)
C 998 FORMAT(3I5, 2E15.7)
C 200 CONTINUE
C      GO TO 1000
C
C      QUADRILATERAL ELEMENT:
C
C 500 CONTINUE
C      DO 510 IN=1,4
C      IP = INTMA(IE,IN)
C      X(IN) = COORD(IP,1)
C      Y(IN) = COORD(IP,2)
C 510 CONTINUE
C
C      FIRST TRIANGLE
C
C      X21 = X(3) - X(1)
C      X31 = X(4) - X(1)
C      Y21 = Y(3) - Y(1)
C      Y31 = Y(4) - Y(1)
C      AREA1 = 0.5*(X21*Y31 - X31*Y21)
C      XCG1 = (X(1) + X(3) + X(4))/3.0
C      YCG1 = (Y(1) + Y(3) + Y(4))/3.0
C
C      SECOND TRIANGLE
C
C      X21 = X(2) - X(1)
C      X31 = X(3) - X(1)
C      Y21 = Y(2) - Y(1)

```

```

C      Y31 = Y(3) - Y(1)
C      AREA2 = 0.5*(X21*Y31 - X31*Y21)
C      XCG2 = (X(1) + X(2) + X(3))/3.0
C      YCG2 = (Y(1) + Y(2) + Y(3))/3.0
C
C      COORDINATE OF CENTROID
C
C      AREA = AREA1 + AREA2
C      XC = (AREA1*XCG1 + AREA2*XCG2)/AREA
C      YC = (AREA1*YCG1 + AREA2*YCG2)/AREA
C
C      LOOP OVER ELEMENT SIDES
C
C      DO 600 IN=1,4
C      IS = JESID(IE,IN)
C      IL = ISIDE(IS,1)
C      IR = ISIDE(IS,2)
C      IF(IL.EQ.INTMA(IE,IN)) THEN
C          IES=1
C      ELSE
C          IES=2
C      ENDIF
C      XL = COORD(IL,1)
C      YL = COORD(IL,2)
C      XR = COORD(IR,1)
C      YR = COORD(IR,2)
C      IF(ABS(YR-YL).LT.TOL) THEN
C          DIST = ABS(YC-YL)
C      ELSE
C          IF(ABS(XR-XL).GT.TOL) THEN
C              RM = (YR - YL)/(XR - XL)
C              C = YL - RM*XL
C              RM1 = -1.0/RM
C
C      COMPUTE INTERSECTION POINT
C
C          XP = (YC - RM1*XC - C)/(RM - RM1)
C          YP = RM1*(XP - XC) + YC
C          DIST= SQRT((XP-XC)*(XP-XC) + (YP-YC)*(YP-YC))
C          ELSE
C          DIST = ABS(XC-XL)
C          ENDIF
C      ENDIF
C      SLEN(IS,IES) = DIST
C
C      DEAL WITH BOUNDARY ELEMENT LENGTHS
C
C      IEL = ISIDE(IS,3)
C      IER = ISIDE(IS,4)
C      IF(IEL.GT.0) GO TO 520
C      SLEN(IS,1) = SLEN(IS,2)
C      GO TO 530
C 520 IF(IER.GT.0) GO TO 530

```

```

        SLEN(IS,2) = SLEN(IS,1)
530 CONTINUE
600 CONTINUE
C
1000 CONTINUE
C
    RETURN
    END
    SUBROUTINE GETMAT( NDIMN, NAMAT, NELEM, NPOIN, INTMA,
*   COORD, AMLP, AREA, DNDX, DNDY )
C
C   COMPUTE ALL ELEMENT AREAS AND MATRICES
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C   DIMENSION COORD(NPOIN,NDIMN), AMLP(NPOIN), AREA(NELEM)
C   DIMENSION DNDX(NELEM,4), DNDY(NELEM,4)
C   DIMENSION X(4), Y(4), AML(4)
C
C   INTEGER INTMA(NELEM,NAMAT)
C
C   DO 10 IP=1,NPOIN
C   AML(IP) = 0.
10 CONTINUE
C
C   LOOP OVER ALL ELEMENTS:
C
C   DO 1000 IE=1,NELEM
C   IL = INTMA(IE,4)
C   IF(IL.NE.0) GO TO 500
C
C   TRIANGULAR ELEMENT:
C
C   DO 110 IA=1,3
C   N = INTMA(IE,IA)
C   X(IA) = COORD(N,1)
C   Y(IA) = COORD(N,2)
110 CONTINUE
C
C   B1 = Y(2) - Y(3)
C   B2 = Y(3) - Y(1)
C   B3 = Y(1) - Y(2)
C   C1 = X(3) - X(2)
C   C2 = X(1) - X(3)
C   C3 = X(2) - X(1)
C
C   AREA(IE) = 0.5*(X(1)*B1 + X(2)*B2 + X(3)*B3)
C   AMLT = AREA(IE)/3.
C   DO 120 IA=1,3
C   N = INTMA(IE,IA)
C   AMLP(N) = AMLP(N) + AMLT
120 CONTINUE
C

```

```

        DNDX(IE,1) = 0.5*B1
        DNDX(IE,2) = 0.5*B2
        DNDX(IE,3) = 0.5*B3
        DNDX(IE,4) = 0.
        DNDY(IE,1) = 0.5*C1
        DNDY(IE,2) = 0.5*C2
        DNDY(IE,3) = 0.5*C3
        DNDY(IE,4) = 0.
C
    GO TO 1000
C
C   QUADRILATERAL ELEMENT:
C
500 CONTINUE
    DO 510 IA=1,4
    N = INTMA(IE,IA)
    X(IA) = COORD(N,1)
    Y(IA) = COORD(N,2)
510 CONTINUE
C
    X21 = X(2) - X(1)
    Y41 = Y(4) - Y(1)
    X41 = X(4) - X(1)
    Y21 = Y(2) - Y(1)
    Y32 = Y(3) - Y(2)
    X32 = X(3) - X(2)
    Y43 = Y(4) - Y(3)
    X43 = X(4) - X(3)
C
    V1 = 0.25*(X21*Y41 - X41*Y21)
    V2 = 0.25*(X21*Y32 - X32*Y21)
    V3 = 0.25*(X32*Y43 - X43*Y32)
    V4 = 0.25*(X41*Y43 - X43*Y41)
C
    AREA(IE) = V1 + V2 + V3 + V4
C
    AML(1) = (2.*V4+V3+2.*V2+4.*V1)/9.
    AML(2) = (V4+2.*V3+4.*V2+2.*V1)/9.
    AML(3) = (2.*V4+4.*V3+2.*V2+V1)/9.
    AML(4) = (4.*V4+2.*V3+V2+2.*V1)/9.
C
    DO 520 IA=1,4
    N = INTMA(IE,IA)
    AMLP(N) = AMLP(N) + AML(IA)
520 CONTINUE
C
C   COMPUTE INTEGRAL OVER AREA OF DNDX & DNDY:
C
    DNDX(IE,1) = -0.5*(Y(4)-Y(2))
    DNDX(IE,2) = 0.5*(Y(3)-Y(1))
    DNDX(IE,3) = -DNDX(IE,1)
    DNDX(IE,4) = -DNDX(IE,2)
    DNDY(IE,1) = 0.5*(X(4)-X(2))

```

```

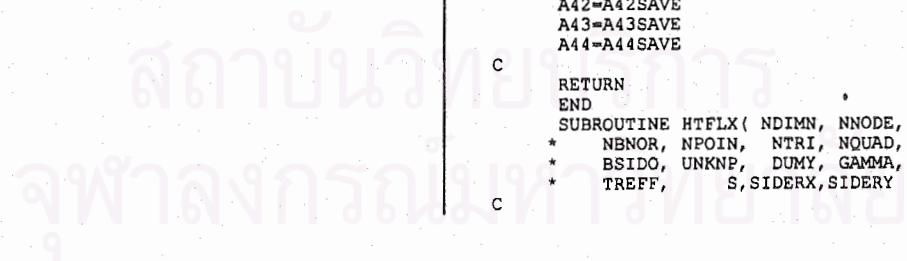
DNDY (IE, 2) = -0.5*(X(3)-X(1))
DNDY (IE, 3) = -DNDY (IE, 1)
DNDY (IE, 4) = -DNDY (IE, 2)
C
1000 CONTINUE
C
RETURN
END
SUBROUTINE GSOLVE (A11,A12,A13,A14,A21,A22,A23,A24,
*                A31,A32,A33,A34,A41,A42,A43,A44,
*                B1 ,B2 ,B3 ,B4 )
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
A11SAVE=A11
A12SAVE=A12
A13SAVE=A13
A14SAVE=A14
A21SAVE=A21
A22SAVE=A22
A23SAVE=A23
A24SAVE=A24
A31SAVE=A31
A32SAVE=A32
A33SAVE=A33
A34SAVE=A34
A41SAVE=A41
A42SAVE=A42
A43SAVE=A43
A44SAVE=A44
C
C=A11
A12=A12/C
A13=A13/C
A14=A14/C
B1=B1/C
C
C=A21
A22=A22-C*A12
A23=A23-C*A13
A24=A24-C*A14
B2=B2-C*B1
C=A31
A32=A32-C*A12
A33=A33-C*A13
A34=A34-C*A14
B3=B3-C*B1
C=A41
A42=A42-C*A12
A43=A43-C*A13
A44=A44-C*A14
B4=B4-C*B1
C

```

```

C=A22
A23=A23/C
A24=A24/C
B2=B2/C
C
C=A32
A33=A33-C*A23
A34=A34-C*A24
B3=B3-C*B2
C=A42
A43=A43-C*A23
A44=A44-C*A24
B4=B4-C*B2
C
C=A33
A34=A34/C
B3=B3/C
C
C=A43
A44=A44-C*A34
B4=B4-C*B3
B4=B4/A44
C
APPLY BACK SUBSTITUTION PROCESS
C
B3=B3-A34*B4
B2=B2-A23*B3-A24*B4
B1=B1-A12*B2-A13*B3-A14*B4
C
A11=A11SAVE
A12=A12SAVE
A13=A13SAVE
A14=A14SAVE
A21=A21SAVE
A22=A22SAVE
A23=A23SAVE
A24=A24SAVE
A31=A31SAVE
A32=A32SAVE
A33=A33SAVE
A34=A34SAVE
A41=A41SAVE
A42=A42SAVE
A43=A43SAVE
A44=A44SAVE
C
RETURN
END
SUBROUTINE HTFLX (NDIMN, NNODE, NAMAT, NSIDE, NBOUN,
* NBNOR, NPOIN, NTRI, NQUAD, NELEM, INTMA, COORD,
* BSIDO, UNKNP, DUMY, GAMMA, CV, PR, AMUF,
* TREFF, S, SIDERX, SIDERY )
C

```





C COMPUTE AERODYNAMIC HEATING USING CONSISTENT FORMULATION

C IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

C  
C DIMENSION COORD(NPOIN,NDIMN)  
C DIMENSION UNKNP(NPOIN,NAMAT), DUMY(NPOIN,4)  
C DIMENSION SIDERX(NPOIN,3), SIDERY(NPOIN,3)  
C DIMENSION DXMAT(4,4), DYMAT(4,4), QX(4), QY(4), TK(4)  
C DIMENSION X(4), Y(4), T(4), DOWN(4), DTDX(4), DTDY(4)  
C DIMENSION U(4), V(4), DUDX(4), DUDY(4), DVDX(4), DVDY(4)  
C DIMENSION SX(4), SY(4), SXY(4), AMU(4), EF(4), FF(4)

C INTEGER INTMA(NELEM,NAMAT), BSIDO(NBOUN,4)

C DO 5 I=1,4  
C DO 5 J=1,NPOIN  
C DUMY(J,I) = 0.

5 CONTINUE

C LOOP OVER NO. OF BOUNDARY & IDENTIFY SOLID BOUNDARY

C DO 1000 IBOUN=1,NBOUN  
C II = BSIDO(IBOUN,1)  
C JJ = BSIDO(IBOUN,2)  
C IE = BSIDO(IBOUN,3)  
C IBC= BSIDO(IBOUN,4)  
C IF(IBC.NE.4) GO TO 1000

C COMPUTE MATRICES DXMAT AND DYMAT

C DO 10 I=1,4  
C N = INTMA(IE,I)  
C X(I) = COORD(N,1)  
C Y(I) = COORD(N,2)

10 CONTINUE

IF(INTMA(IE,1).NE.II) WRITE(6,1100) IE

IF(INTMA(IE,2).NE.JJ) WRITE(6,1100) IE

1100 FORMAT(36H CONFLICT NODE NUMBERING FOR ELEMENT, I8, /,  
\* 45H ON ELEMENT NODAL CONNECTIVITY AND SOLID B.C. )

C  
C DXMAT(1,1) = -(Y(4)-Y(2))/6.0  
C DXMAT(1,2) = -(Y(4)+Y(3)-2\*Y(2))/12.0  
C DXMAT(1,3) = -(Y(4)-Y(2))/12.0  
C DXMAT(1,4) = -(2\*Y(4)-Y(3)-Y(2))/12.0  
C DXMAT(2,1) = (Y(4)+Y(3)-2\*Y(1))/12.0  
C DXMAT(2,2) = (Y(3)-Y(1))/6.0  
C DXMAT(2,3) = -(Y(4)-2\*Y(3)+Y(1))/12.0  
C DXMAT(2,4) = (Y(3)-Y(1))/12.0  
C DXMAT(3,1) = (Y(4)-Y(2))/12.0  
C DXMAT(3,2) = (Y(4)-2\*Y(2)+Y(1))/12.0  
C DXMAT(3,3) = (Y(4)-Y(2))/6.0  
C DXMAT(3,4) = (2\*Y(4)-Y(2)-Y(1))/12.0  
C DXMAT(4,1) = -(Y(3)+Y(2)-2\*Y(1))/12.0

DXMAT(4,2) = -(Y(3)-Y(1))/12.0  
DXMAT(4,3) = -(2\*Y(3)-Y(2)-Y(1))/12.0  
DXMAT(4,4) = -(Y(3)-Y(1))/6.0

C  
C DYMAT(1,1) = (X(4)-X(2))/6.0  
C DYMAT(1,2) = (X(4)+X(3)-2\*X(2))/12.0  
C DYMAT(1,3) = (X(4)-X(2))/12.0  
C DYMAT(1,4) = (2\*X(4)-X(3)-X(2))/12.0  
C DYMAT(2,1) = -(X(4)+X(3)-2\*X(1))/12.0  
C DYMAT(2,2) = -(X(3)-X(1))/6.0  
C DYMAT(2,3) = (X(4)-2\*X(3)+X(1))/12.0  
C DYMAT(2,4) = -(X(3)-X(1))/12.0  
C DYMAT(3,1) = -(X(4)-X(2))/12.0  
C DYMAT(3,2) = -(X(4)-2\*X(2)+X(1))/12.0  
C DYMAT(3,3) = -(X(4)-X(2))/6.0  
C DYMAT(3,4) = -(2\*X(4)-X(2)-X(1))/12.0  
C DYMAT(4,1) = (X(3)+X(2)-2\*X(1))/12.0  
C DYMAT(4,2) = (X(3)-X(1))/12.0  
C DYMAT(4,3) = (2\*X(3)-X(2)-X(1))/12.0  
C DYMAT(4,4) = (X(3)-X(1))/6.0

C DO 20 I=1,4  
C NN = INTMA(IE,I)  
C U(I) = UNKNP(NN,2)  
C V(I) = UNKNP(NN,3)  
C EK = UNKNP(NN,4)  
C T(I) = (EK - 0.5\*(UK\*UK + VK\*VK))/CV  
C DUM = T(I)/TREF  
C AMM = SQRT(DUM\*DUM\*DUM)  
C DUM = (TREF+S)/(T(I)+S)  
C AMU(I) = AMU\*AMM\*DUM  
C TK(I) = GAMMA\*CV\*AMU(I)/PR

20 CONTINUE

C  
C DOWN(1) = (X(2)-X(1))\*Y(4) + (X(1)-X(4))\*Y(2) + (X(4)-X(2))\*Y(1)  
C DOWN(2) = (X(2)-X(1))\*Y(3) + (X(1)-X(3))\*Y(2) + (X(3)-X(2))\*Y(1)  
C DOWN(3) = (X(3)-X(2))\*Y(4) + (X(2)-X(4))\*Y(3) + (X(4)-X(3))\*Y(2)  
C DOWN(4) = (X(3)-X(1))\*Y(4) + (X(1)-X(4))\*Y(3) + (X(4)-X(3))\*Y(1)

C  
C DUDX(1) = ((U(2)-U(1))\*Y(4) + (U(1)-U(4))\*Y(2)  
& + (U(4)-U(2))\*Y(1)) / DOWN(1)  
C DUDX(2) = ((U(2)-U(1))\*Y(3) + (U(1)-U(3))\*Y(2)  
& + (U(3)-U(2))\*Y(1)) / DOWN(2)  
C DUDX(3) = ((U(3)-U(2))\*Y(4) + (U(2)-U(4))\*Y(3)  
& + (U(4)-U(3))\*Y(2)) / DOWN(3)  
C DUDX(4) = ((U(3)-U(1))\*Y(4) + (U(1)-U(4))\*Y(3)  
& + (U(4)-U(3))\*Y(2)) / DOWN(4)

C  
C DUDY(1) = -((U(2)-U(1))\*X(4) + (U(1)-U(4))\*X(2)  
& + (U(4)-U(2))\*X(1)) / DOWN(1)  
C DUDY(2) = -((U(2)-U(1))\*X(3) + (U(1)-U(3))\*X(2)  
& + (U(3)-U(2))\*X(1)) / DOWN(2)  
C DUDY(3) = -((U(3)-U(2))\*X(4) + (U(2)-U(4))\*X(3)

```

&      + (U(4)-U(3))*X(2) / DOWN(3)
DUDY(4) = -(U(3)-U(1))*X(4) + (U(1)-U(4))*X(3)
&      + (U(4)-U(3))*X(1) / DOWN(4)
C
DVDX(1) = ((V(2)-V(1))*Y(4) + (V(1)-V(4))*Y(2)
&      + (V(4)-V(2))*Y(1)) / DOWN(1)
DVDX(2) = ((V(2)-V(1))*Y(3) + (V(1)-V(3))*Y(2)
&      + (V(3)-V(2))*Y(1)) / DOWN(2)
DVDX(3) = ((V(3)-V(2))*Y(4) + (V(2)-V(4))*Y(3)
&      + (V(4)-V(3))*Y(2)) / DOWN(3)
DVDX(4) = ((V(3)-V(1))*Y(4) + (V(1)-V(4))*Y(3)
&      + (V(4)-V(3))*Y(1)) / DOWN(4)
C
DVDY(1) = -(V(2)-V(1))*X(4) + (V(1)-V(4))*X(2)
&      + (V(4)-V(2))*X(1)) / DOWN(1)
DVDY(2) = -(V(2)-V(1))*X(3) + (V(1)-V(3))*X(2)
&      + (V(3)-V(2))*X(1)) / DOWN(2)
DVDY(3) = -(V(3)-V(2))*X(4) + (V(2)-V(4))*X(3)
&      + (V(4)-V(3))*X(2)) / DOWN(3)
DVDY(4) = -(V(3)-V(1))*X(4) + (V(1)-V(4))*X(3)
&      + (V(4)-V(3))*X(1)) / DOWN(4)
C
DTDX(1) = ((T(2)-T(1))*Y(4) + (T(1)-T(4))*Y(2)
&      + (T(4)-T(2))*Y(1)) / DOWN(1)
DTDX(2) = ((T(2)-T(1))*Y(3) + (T(1)-T(3))*Y(2)
&      + (T(3)-T(2))*Y(1)) / DOWN(2)
DTDX(3) = ((T(3)-T(2))*Y(4) + (T(2)-T(4))*Y(3)
&      + (T(4)-T(3))*Y(2)) / DOWN(3)
DTDX(4) = ((T(3)-T(1))*Y(4) + (T(1)-T(4))*Y(3)
&      + (T(4)-T(3))*Y(1)) / DOWN(4)
C
DTDY(1) = -(T(2)-T(1))*X(4) + (T(1)-T(4))*X(2)
&      + (T(4)-T(2))*X(1)) / DOWN(1)
DTDY(2) = -(T(2)-T(1))*X(3) + (T(1)-T(3))*X(2)
&      + (T(3)-T(2))*X(1)) / DOWN(2)
DTDY(3) = -(T(3)-T(2))*X(4) + (T(2)-T(4))*X(3)
&      + (T(4)-T(3))*X(2)) / DOWN(3)
DTDY(4) = -(T(3)-T(1))*X(4) + (T(1)-T(4))*X(3)
&      + (T(4)-T(3))*X(1)) / DOWN(4)
C
C C COMPUTE RHS VECTOR FROM AVERAGE NODAL QUANTITIES
DO 25 I=1,4
SXX(I) = (2./3.)*AMU(I)*(2.*DUDX(I) - DVDY(I))
SYY(I) = (2./3.)*AMU(I)*(2.*DVDY(I) - DUDX(I))
SXY(I) = AMU(I)*( DUDY(I) + DVDX(I))
25 CONTINUE
C
DO 30 I=1,4
QX(I) = -TK(I)*DTDX(I)
QY(I) = -TK(I)*DTDY(I)
30 CONTINUE
C

```

```

DO 35 I=1,4
EF(I) = U(I)*SXX(I) + V(I)*SXY(I) - QX(I)
FF(I) = U(I)*SXY(I) + V(I)*SYY(I) - QY(I)
35 CONTINUE
C
RI = 0.
RJ = 0.
DO 40 I=1,4
RI = RI - DXMAT(1,I)*EF(I) - DYMAT(1,I)*FF(I)
RJ = RJ - DXMAT(2,I)*EF(I) - DYMAT(2,I)*FF(I)
40 CONTINUE
C
C C OBTAIN SYSTEM RHS VECTOR
DUMY(II,2) = DUMY(II,2) + RI
DUMY(JJ,2) = DUMY(JJ,2) + RJ
C
C C COMPUTE RHS VECTOR DIRECTLY FROM NODAL TEMPERATURE GRADIENTS
WHICH HAVE BEEN COMPUTED INTERNALLY
C
DO 55 I=1,4
N = INTMA(IE,I)
SXX(I) = (2./3.)*AMU(I)*(2.*SIDERX(N,1) - SIDERY(N,2))
SYY(I) = (2./3.)*AMU(I)*(2.*SIDERY(N,2) - SIDERX(N,1))
SXY(I) = AMU(I)*( SIDERY(N,1) + SIDERX(N,2))
55 CONTINUE
C
DO 60 I=1,4
N = INTMA(IE,I)
QX(I) = -TK(I)*SIDERX(N,3)
QY(I) = -TK(I)*SIDERY(N,3)
60 CONTINUE
C
DO 65 I=1,4
EF(I) = U(I)*SXX(I) + V(I)*SXY(I) - QX(I)
FF(I) = U(I)*SXY(I) + V(I)*SYY(I) - QY(I)
65 CONTINUE
C
RI = 0.
RJ = 0.
DO 70 I=1,4
RI = RI - DXMAT(1,I)*EF(I) - DYMAT(1,I)*FF(I)
RJ = RJ - DXMAT(2,I)*EF(I) - DYMAT(2,I)*FF(I)
70 CONTINUE
C
C C OBTAIN ANOTHER SYSTEM RHS VECTOR
DUMY(II,3) = DUMY(II,3) + RI
DUMY(JJ,3) = DUMY(JJ,3) + RJ
C
DX = COORD(II,1) - COORD(JJ,1)
DY = COORD(II,2) - COORD(JJ,2)
XL = SQRT(DX*DX + DY*DY)

```

```

C
C OBTAIN SYSTEM LHS VECTOR
C
DUMY(II,1) = DUMY(II,1) + XL/2.
DUMY(JJ,1) = DUMY(JJ,1) + XL/2.
C
1000 CONTINUE
C
C SOLVE FOR NODAL HEAT FLUXES AND PRINT OUT
C
WRITE(9,1200)
1200 FORMAT(/, 44H NODAL HEAT FLUXES USING CONSISTENT APPROACH, /,
* 44H (BASED ON AVERAGE NODAL QUANTITIES) , /,
* 4X, 4HNODE, 15X, 1HX, 15X, 1HY, 14X, 2HQH )
DO 110 N=1,NPOIN
IF(DUMY(N,1).LE.0.) GO TO 110
QN = DUMY(N,2)/DUMY(N,1)
WRITE(9,1300) N, COORD(N,1), COORD(N,2), QN
1300 FORMAT(I8, 3E16.5)
110 CONTINUE
C
WRITE(9,1400)
1400 FORMAT(/, 44H NODAL HEAT FLUXES USING CONSISTENT APPROACH, /,
* 44H (BASED ON PRE-COMPUTED NODAL DERIVATIVES) , /,
* 4X, 4HNODE, 15X, 1HX, 15X, 1HY, 14X, 2HQH )
DO 120 N=1,NPOIN
IF(DUMY(N,1).LE.0.) GO TO 120
QN = DUMY(N,3)/DUMY(N,1)
WRITE(9,1300) N, COORD(N,1), COORD(N,2), QN
120 CONTINUE
C
RETURN
END
SUBROUTINE NDER( NDIMN, NNODE, NAMAT, NBOUN, NPOIN,
* NTRI, NQUAD, NELEM, INTMA, COORD, UNKNO, BSIDO,
* GAMMA, CV, UNKNP, AREA, DNDX, DNDY, AMLP,
* SIDERX, SIDERY )
C
C COMPUTE NODAL DERIVATIVES OF U, V, T WRT X & Y
C
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
DIMENSION COORD(NPOIN,NDIMN), UNKNO(NELEM,NAMAT)
DIMENSION AREA(NELEM), DNDX(NELEM,4), DNDY(NELEM,4)
DIMENSION AMLP(NPOIN), SIDERX(NPOIN,3), SIDERY(NPOIN,3)
DIMENSION UNKNP(NPOIN,NAMAT), VAR(3)
C
INTEGER INTMA(NELEM,NAMAT), BSIDO(NBOUN,4)
C
C ZERO OUT THESE NODAL DERIVATIVES
C
DO 10 IV=1,3
DO 10 IP=1,NPOIN

```

```

SIDERX(IP,IV) = 0.
SIDERY(IP,IV) = 0.
10 CONTINUE
C
C COMPUTE INTEGRAL OVER AREA TERMS
C
C LOOP OVER NUMBER OF ELEMENTS
C
DO 100 IE=1,NELEM
VAR(1) = UNKNO(IE,2)/UNKNO(IE,1)
VAR(2) = UNKNO(IE,3)/UNKNO(IE,1)
VEL2 = VAR(1)*VAR(1) + VAR(2)*VAR(2)
TOTALE = UNKNO(IE,4)/UNKNO(IE,1)
VAR(3) = (TOTALE - 0.5*VEL2)/CV
C
DO 110 IN=1,NNODE
IP = INTMA(IE,IN)
IF(IP.EQ.0) GO TO 110
DO 120 IV=1,3
SIDERX(IP,IV) = SIDERX(IP,IV) - VAR(IV)*DNDX(IE,IN)
SIDERY(IP,IV) = SIDERY(IP,IV) - VAR(IV)*DNDY(IE,IN)
120 CONTINUE
110 CONTINUE
100 CONTINUE
C
C COMPUTE INTEGRAL OVER BOUNDARY TERMS
C
DO 200 IS=1,NBOUN
II = BSIDO(IS,1)
JJ = BSIDO(IS,2)
IE = BSIDO(IS,3)
IB = BSIDO(IS,4)
DX = COORD(JJ,1) - COORD(II,1)
DY = COORD(JJ,2) - COORD(II,2)
DL = SQRT(DX*DX + DY*DY)
RNX= DY/DL
RNY=-DX/DL
C
C THE QUANTITIES U, V, T IN THIS BOUNDARY INTEGRAL DEPEND ON
C THE TYPES OF BOUNDARY
C
IF(IB.EQ.1) GO TO 210
IF(IB.EQ.2) GO TO 220
IF(IB.EQ.3) GO TO 230
IF(IB.EQ.4) GO TO 240
C
C SUPERSONIC INFLOW
C
210 CONTINUE
VAR(1) = 0.5*(UNKNP(II,2)/UNKNP(II,1) + UNKNP(JJ,2)/UNKNP(JJ,1))
VAR(2) = 0.5*(UNKNP(II,3)/UNKNP(II,1) + UNKNP(JJ,3)/UNKNP(JJ,1))
VEL2 = VAR(1)*VAR(1) + VAR(2)*VAR(2)
TOTALE = 0.5*(UNKNP(II,4)/UNKNP(II,1) + UNKNP(JJ,4)/UNKNP(JJ,1))

```

```

VAR(3) = (TOTALE - 0.5*VEL2)/CV
GO TO 250
C
C
C SUPersonic OUTFLOW
220 CONTINUE
VAR(1) = UNKNO(IE,2)/UNKNO(IE,1)
VAR(2) = UNKNO(IE,3)/UNKNO(IE,1)
VEL2 = VAR(1)*VAR(1) + VAR(2)*VAR(2)
TOTALE = UNKNO(IE,4)/UNKNO(IE,1)
VAR(3) = (TOTALE - 0.5*VEL2)/CV
GO TO 250
C
C
C INVISCID (INSULATED) OR SYMMETRY BOUNDARY
230 CONTINUE
UXL = UNKNO(IE,2)/UNKNO(IE,1)
VYL = UNKNO(IE,3)/UNKNO(IE,1)
UNL = 0.
VTL = -UXL*RNY + VYL*RNX
VAR(1) = UNL*RNX - VTL*RNY
VAR(2) = UNL*RNY + VTL*RNX
VEL2 = UNL*UNL + VTL*VTL
TOTALE = UNKNO(IE,4)/UNKNO(IE,1)
VAR(3) = (TOTALE - 0.5*VEL2)/CV
GO TO 250
C
C
C VISCOUS WITH SPECIFIED WALL TEMPERATURE
240 CONTINUE
VAR(1) = 0.
VAR(2) = 0.
TOTALE = 0.5*(UNKNP(II,4)/UNKNP(II,1) + UNKNP(JJ,4)/UNKNP(JJ,1))
VAR(3) = TOTALE/CV
C
250 CONTINUE
C
DO 260 IN=1,2
IP = BSIDO(IS,IN)
DO 270 IV=1,3
SIDERX(IP,IV) = SIDERX(IP,IV) + 0.5*RNX*DL*VAR(IV)
SIDERY(IP,IV) = SIDERY(IP,IV) + 0.5*RNY*DL*VAR(IV)
270 CONTINUE
260 CONTINUE
200 CONTINUE
C
C
C DIVIDE THRU BY LUMPED MASS AT NODES
DO 300 IP=1,NPOIN
DO 310 IV=1,3
SIDERX(IP,IV) = SIDERX(IP,IV)/AMLP(IP)
SIDERY(IP,IV) = SIDERY(IP,IV)/AMLP(IP)
310 CONTINUE

```

```

300 CONTINUE
C
RETURN
END
SUBROUTINE SIDE(NELEM,NPOIN,NSIDE,INTMA,ISIDE,LWHER,LHOWM,
* ICONE,NBOUN,NBNOI,BSIDO,JESID)
C
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C DIMENSION INTMA(NELEM,4), ISIDE(NSIDE,4)
C DIMENSION LWHER(NPOIN), LHOWM(NPOIN), ICONE(4*NELEM)
C DIMENSION JESID(NELEM,4)
C
C INTEGER BSIDO(NBOUN,NBNOI)
C
C FILL IN LHOWM : NR. OF ELEMENTS PER NODE
C
DO 1480 IS=1,NSIDE
ISIDE(IS,3)=0
ISIDE(IS,4)=0
1480 CONTINUE
C
DO 1490 IP=1,NPOIN
LHOWM(IP)=0
1490 CONTINUE
C
DO 1500 IE=1,NELEM
IPE=INTMA(IE,4)
IF(IPE.EQ.0) THEN
NCOUNT=3
ELSE
NCOUNT=4
ENDIF
DO 1500 IN=1,NCOUNT
IP=INTMA(IE,IN)
LHOWM(IP)=LHOWM(IP)+1
1500 CONTINUE
C
C FILL IN LWHER : LOCATION OF EACH NODE INSIDE ICONE
C
LWHER(1)=0
DO 1600 IP=2,NPOIN
LWHER(IP)=LWHER(IP-1)+LHOWM(IP-1)
1600 CONTINUE
C
C FILL IN ICONE : ELEMENTS IN EACH NODE
C
DO 1690 IP=1,NPOIN
LHOWM(IP)=0
1690 CONTINUE
DO 1700 IE=1,NELEM
IPE=INTMA(IE,4)
IF(IPE.EQ.0) THEN

```

```

    NCOUNT=3
    ELSE
    NCOUNT=4
ENDIF
DO 1700 IN=1,NCOUNT
IP=INTMA(IE,IN)
LHOWM(IP)-LHOWM(IP)+1
JLOCA=LWHER(IP)+LHOWM(IP)
ICONE(JLOCA)=IE
1700 CONTINUE
C
C LOOP OVER THE NODES
C
C ILOCA=0
C
DO 3000 IP=1,NPOIN
ILOCA=ILOCA
IELE=LHOWM(IP)
IF(IELE.EQ.0) GOTO 3000
C
C IWHER=LWHER(IP)
C
C LOOP OVER ELEMENTS SURROUNDING THE POINT IP
C
C IP1=IP
DO 3090 IEL=1,IELE
IE=ICONE(IWHER+IEL)
IPE=INTMA(IE,4)
IF(IPE.EQ.0) THEN
    NCOUNT=3
    ELSE
    NCOUNT=4
ENDIF
C
C FIND OUT POSITION OF IP IN THE CONNECTIVITY MATRIX
C
DO 3091 IN=1,NCOUNT
IN1=IN
IPT=INTMA(IE,IN)
IF(IPT.EQ.IP) GOTO 3092
3091 CONTINUE
3092 CONTINUE
C
C J=0
DO 3100 JNOD=1,NCOUNT-1,NCOUNT-2
J=J+1
IN2=IN1+JNOD
IF(IN2.GT.NCOUNT) IN2=IN2-NCOUNT
IP2=INTMA(IE,IN2)
IF(IP2.LT.IP1) GOTO 3100
C
C CHECK THE SIDE EITHER NEW OR OLD
C

```

```

IF(ILOCA.EQ.ILOCA1) GOTO 7304
DO 5600 IS=ILOCA1+1,ILOCA
JLOCA=IS
IF(ISIDE(IS,2).EQ.IP2) GOTO 7303
5600 CONTINUE
7304 CONTINUE
C
C NEW SIDE
C
C ILOCA=ILOCA+1
ISIDE(ILOCA,1)=IP1
ISIDE(ILOCA,2)=IP2
ISIDE(ILOCA,2+J)=IE
GOTO 3012
C
C OLD SIDE
C
7303 CONTINUE
ISIDE(JLOCA,2+J)=IE
3012 CONTINUE
C
C 3100 CONTINUE
C
C END LOOP OVER ELEMENTS SURROUNDING POINT IP
C
C 3090 CONTINUE
C
DO 8000 IS=ILOCA1+1,ILOCA
IF(ISIDE(IS,3).NE.0) GOTO 8000
ISIDE(IS,3)=ISIDE(IS,4)
ISIDE(IS,4)=0
ISIDE(IS,1)=ISIDE(IS,2)
ISIDE(IS,2)=IP1
8000 CONTINUE
C
C END LOOP OVER POINTS
C
C 3000 CONTINUE
C
C NOW RESET THE BOUNDARY MARKERS
C
DO 9000 IS=1,NSIDE
IF(ISIDE(IS,4).NE.0)GO TO 9000
IL=ISIDE(IS,1)
IR=ISIDE(IS,2)
IE=ISIDE(IS,3)
DO 9100 IB=1,NBOUN
IBE=BSIDO(IB,3)
IF(IBE.NE.IE)GO TO 9100
ILB=BSIDO(IB,1)
IRB=BSIDO(IB,2)
IF(ILB.NE.IL.OR.IRB.NE.IR)GO TO 9100
ISIDE(IS,4)=-BSIDO(IB,4)

```

```

GO TO 9000
9100 CONTINUE
9000 CONTINUE
C
C FORM THE ELEMENT/SIDES CONNECTIVITY ARRAY
C
DO 9200 IS=1,NSIDE
IEL=ISIDE (IS,3)
IER=ISIDE (IS,4)
INODE=ISIDE (IS,1)
JNODE=ISIDE (IS,2)
IPE=INTMA (IEL,4)
IF (IPE.EQ.0) THEN
NCOUNT=3
ELSE
NCOUNT=4
ENDIF
DO 9300 IN=1,NCOUNT
I1=INTMA (IEL,IN)
IN1=IN+1
IF (IN1.GT.NCOUNT) IN1=1
I2=INTMA (IEL,IN1)
IF (INODE.EQ.I1.AND.JNODE.EQ.I2)
1 JESID (IEL,IN)=IS
9300 CONTINUE
IF (IER.GT.0) THEN
IPE=INTMA (IER,4)
IF (IPE.EQ.0) THEN
NCOUNT=3
ELSE
NCOUNT=4
ENDIF
DO 9310 IN=1,NCOUNT
I1=INTMA (IER,IN)
IN1=IN+1
IF (IN1.GT.NCOUNT) IN1=1
I2=INTMA (IER,IN1)
IF (INODE.EQ.I2.AND.JNODE.EQ.I1)
1 JESID (IER,IN)=IS
9310 CONTINUE
ENDIF
C
9200 CONTINUE
C
RETURN
END

```



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

รายละเอียดไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์  
การถ่ายเทความร้อน (HEAT)

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```

C PROGRAM HEAT
C
C A FINITE ELEMENT THERMAL ANALYSIS PROGRAM.
C DR. PRAMOTE DECHAUMPHAI
C FACULTY OF ENGINEERING
C CHULALONGKORN UNIVERSITY
C
C PARAMETER (MXPOI=4000, MXELE=8000, MXHBW=2000)
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C DIMENSION COORD(MXPOI,2), TEMP(MXPOI), TEXT(20)
C DIMENSION SYSK(MXPOI,MXHBW), SYSQ(MXPOI)
C CHARACTER*20 NAME1, NAME2, NAME3
C
C INTEGER INTMAT(MXELE,3), IBC(MXPOI), LTYPE(MXPOI,3)
C
10 WRITE(6,20)
20 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:')
READ(5, '(A)', ERR=10) NAME1
OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C READ TITLE OF COMPUTATION:
C
C READ(7,*) NLines
C DO 100 ILINE=1,NLines
C READ(7,1) TEXT
1 FORMAT(20A4)
100 CONTINUE
C
C READ INPUT DATA:
C
C READ(7,1) TEXT
C READ(7,*) NPOIN, NELEM
C IF(NPOIN.GT.MXPOI) WRITE(6,110) NPOIN
110 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOI TO ', I5)
C IF(NPOIN.GT.MXPOI) STOP
C IF(NELEM.GT.MXELE) WRITE(6,120) NELEM
120 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO ', I5)
C IF(NELEM.GT.MXELE) STOP
C READ(7,1) TEXT
C READ(7,*) TK, H, Q, QS, TI, THICK
C READ(7,1) TEXT
C DO 130 IP=1,NPOIN
C READ(7,*) I, IBC(I), (COORD(I,K), K=1,2), TEMP(I)
C IF(I.NE.IP) WRITE(6,135) IP
135 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
C IF(I.NE.IP) STOP
130 CONTINUE
C LT1 = 0
C LT2 = 0
C LT3 = 0
C READ(7,1) TEXT
C DO 140 IE=1,NELEM

```

```

READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,3), (LTYPE(I,K), K=1,3)
C IF(I.NE.IE) WRITE(6,150) IE
150 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
C IF(I.NE.IE) STOP
C IF(LTYPE(I,1).EQ.1) LT1 = 1
C IF(LTYPE(I,2).EQ.1) LT2 = 1
C IF(LTYPE(I,3).EQ.1) LT3 = 1
140 CONTINUE
C WRITE(6,160)
160 FORMAT(/, ' THE F.E. MODEL INCLUDES THE FOLLOWING',
* ' HEAT TRANSFER MODE(S):',
* ' /,' -- HEAT CONDUCTION ')
C IF(LT1.EQ.1) WRITE(6,170)
170 FORMAT( ' -- INTERNAL HEAT GENERATION ')
C IF(LT2.EQ.1) WRITE(6,180)
180 FORMAT( ' -- SPECIFIED SURFACE HEATING ')
C IF(LT3.EQ.1) WRITE(6,190)
190 FORMAT( ' -- SURFACE CONVECTION ')
C
C NEQ = NPOIN
C DO 300 I=1,NEQ
C SYSQ(I) = 0.
300 CONTINUE
C
C COMPUTE HALF-BANDWIDTH:
C
C NHBW = 0
C DO 400 IE=1,NELEM
C MIN = 100000
C MAX = 0
C DO 410 IN=1,3
C II = INTMAT(IE,IN)
C IF(II.GT.MAX) MAX = II
C IF(II.LT.MIN) MIN = II
410 CONTINUE
C NDIF = MAX - MIN + 1
C IF(NDIF.GT.NHBW) NHBW = NDIF
400 CONTINUE
C
C IF(NHBW.GT.MXHBW) WRITE(6,420) NHBW
420 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXHBW TO ', I5)
C IF(NHBW.GT.MXHBW) STOP
C
C DO 430 I=1,NEQ
C DO 430 J=1,NHBW
C SYSK(I,J) = 0.
430 CONTINUE
C WRITE(6,435) NPOIN, NELEM
435 FORMAT(/, ' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5,
* ' NODES AND', I5, ' ELEMENTS ***')
C
C ESTABLISH ALL ELEMENT MATRICES ASSOCIATED WITH THE SPECIFIED
C HEAT TRANSFER MODES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM MATRICES IN

```



```

C THE FORM NEEDED FOR MINIMUM MEMORY REQUIREMENT:
C
WRITE(6,440)
440 FORMAT(/, ' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
* ' ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***' )
CALL TRI(NELEM, INTMAT, COORD, TK, H, Q,
* QS, TI, THICK, LTYPE, SYSK, SYSQ,
* MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
WRITE(6,450)
450 FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL',
* ' TEMPERATURES ***' )
CALL APPLYBC(NHBW, NPOIN, IBC, TEMP, SYSK, SYSQ, MXPOI, MXHBW)
C
WRITE(6,460)
460 FORMAT(/, ' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS',
* ' FOR TEMPERATURE SOLUTIONS ***' )
WRITE(6,465) NEQ, NHBW
465 FORMAT(5X, '( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS WITH HALF-BANDWIDTH OF',
* I4, ' )' )
CALL SOLVE(NEQ, NHBW, SYSK, SYSQ, MXPOI, MXHBW)
C
PRINT OUT NODAL TEMPERATURE SOLUTIONS:
C
470 WRITE(6,480)
480 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR TEMPERATURE'
* ' SOLUTIONS:' )
READ(5, '(A)', ERR=470) NAME2
OPEN(UNIT=8, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=470)
WRITE(8,490) NPOIN
490 FORMAT(' NODAL TEMPERATURE SOLUTIONS [', I5, ':',
* '//, 2X, 'NODE', 3X, 'TEMPERATURE', / )
DO 500 IP=1,NPOIN
WRITE(8,510) IP, SYSQ(IP)
510 FORMAT(I6, E14.6)
500 CONTINUE
C
CREATE FILE FOR 2-D CONTOUR PLOTTING PROGRAM:
C
550 WRITE(6,560)
560 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR GRAPHIC DISPLAY:')
READ(5, '(A)', ERR=550) NAME3
OPEN(UNIT=9, FILE=NAME3, STATUS='NEW', ERR=550)
NVAR = 1
600 WRITE(9,610) NPOIN, NELEM, NVAR
610 FORMAT(' NPOIN NELEM NVAR', /, 3I8)
WRITE(9,620) NPOIN
620 FORMAT(' NODAL COORDINATES & SOLUTIONS [', I5, ':')
DO 630 I=1,NPOIN
WRITE(9,640) I, (COORD(I,J), J=1,2), SYSQ(I)
640 FORMAT(I8, 5E12.5)
630 CONTINUE
WRITE(9,650) NELEM

```

```

650 FORMAT(' ELEMENT NODAL CONNECTIONS [', I5, ':')
DO 660 IE=1,NELEM
WRITE(9,670) IE, (INTMAT(IE,J), J=1,3)
670 FORMAT(4I8)
660 CONTINUE
C
STOP
END
C
-----
C
SUBROUTINE APPLYBC( NHBW, NPOIN, IBC, TEMP, SYSK, SYSQ,
* MXPOI, MXHBW )
C
APPLY TEMPERATURE BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODES OF:
C 0 = FREE TO CHANGE (TO BE COMPUTED)
C 1 = FIXED AS SPECIFIED
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION SYSK(MXPOI,MXHBW), SYSQ(MXPOI), TEMP(MXPOI)
C
INTEGER IBC(MXPOI)
C
DO 100 IEQ=1,NPOIN
IF(IBC(IEQ).EQ.0) GO TO 100
C
IF(IEQ.EQ.1) GO TO 300
DO 200 N=1,IEQ-1
IROW = IEQ - N
ICOL = N + 1
IF(ICOL.GT.NHBW) GO TO 300
SYSQ(IROW) = SYSQ(IROW) - SYSK(IROW,ICOL)*TEMP(IEQ)
SYSQ(IROW,ICOL) = 0.
200 CONTINUE
300 CONTINUE
C
DO 400 ICOL=2,NHBW
IL = IEQ + ICOL - 1
IF(IL.GT.NPOIN) GO TO 500
SYSQ(IL) = SYSQ(IL) - SYSK(IEQ,ICOL)*TEMP(IEQ)
SYSQ(IEQ,ICOL) = 0.
400 CONTINUE
500 CONTINUE
C
SYSQ(IEQ) = TEMP(IEQ)
SYSQ(IEQ,1) = 1.
C
100 CONTINUE
C
RETURN
END
C
-----

```

```

C
C SUBROUTINE ASSMBLE( IE, INTMAT, AKE, QE, SYSK, SYSQ,
C * MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
C ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C DIMENSION AKE(3,3), QE(3)
C DIMENSION SYSK(MXPOI,MXHBW), SYSQ(MXPOI)
C
C INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
C NNODE = 3
C NDF = 1
C
C DO 100 NR=1,NNODE
C NODR = INTMAT(IE,NR)
C DO 100 MR=1,NDF
C
C DENOTE: NSR = ROW POSITION IN THE SYSTEM EQS.
C NER = ROW POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
C NSR = (NODR-1)*NDF + MR
C NER = (NR -1)*NDF + MR
C SYSQ(NSR) = SYSQ(NSR) + QE(NER)
C
C DO 200 NC=1,NNODE
C NODC = INTMAT(IE,NC)
C DO 200 MC=1,NDF
C
C DENOTE: NSC = COLUMN POSITION IN THE SYSTEM EQS.
C (AFTER ROTATION - READY FOR BANDED SOLVER)
C NEC = COLUMN POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
C NSC = (NODC-1)*NDF + MC - NSR + 1
C NEC = (NC -1)*NDF + MC
C IF(NSC.GT.0)
C & SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + AKE(NER,NEC)
C 200 CONTINUE
C
C 100 CONTINUE
C
C RETURN
C END
C
C-----
C
C SUBROUTINE SOLVE(NROW, NHBW, GSTIF, XL, MXPOI, MXHBW)
C
C SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS USING GAUSS ELIMINATION
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

```

C DIMENSION GSTIF(MXPOI,MXHBW), XL(MXPOI)
C
C NR=NROW
C NC=NHBW
C
C DIAGONALIZATION THE MATRIX:
C
C DO 10 I=1,NR
C PIVOT1=GSTIF(I,1)
C IF(ABS(PIVOT1).LT.10.E-10) THEN
C WRITE(6,1025) I, PIVOT1
1025 FORMAT(' EQ. NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6,
C * ' ** STOP **', //,
C * ' *** CHECK NODE AND ELEMENT NUMBERING IN F.E. MODEL ***')
C STOP
C ENDIF
C
C XL(I)=XL(I)/PIVOT1
C DO 20 J=1,NC
C 20 GSTIF(I,J)=GSTIF(I,J)/PIVOT1
C MM=0
C DO 30 II=I+1,NR
C MM=MM+1
C IF(MM+1.GT.NC) GOTO 30
C PIVOT2=GSTIF(I,MM+1)*PIVOT1
C XL(II)=XL(II)-XL(I)*PIVOT2
C DO 40 JJ=1,NC
C JJJ=JJ+MM
C IF(JJJ.LE.NC)
C & GSTIF(II,JJ)=GSTIF(II,JJ)-GSTIF(I,JJJ)*PIVOT2
C 40 CONTINUE
C 30 CONTINUE
C 10 CONTINUE
C
C BACK SUBSTITUTION:
C
C DO 70 I=NR-1,1,-1
C II=1
C DO 80 J=I+1,NR
C II=II+1
C IF(II.LE.NHBW) XL(I)=XL(I)-GSTIF(I,II)*XL(J)
C 80 CONTINUE
C 70 CONTINUE
C
C RETURN
C END
C
C-----
C
C SUBROUTINE TRI(NELEM, INTMAT, COORD, TK, H, Q,
C * QS, TI, THICK, LTYPE, SYSK, SYSQ,
C * MXPOI, MXELE, MXHBW )

```

```

C   ESTABLISH ELEMENT MATRICES ACCORDING TO THE SPECIFIED HEAT
C   TRANSFER MODES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQUATIONS
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-2)
C   DIMENSION COORD(MXPOI,2), SYSK(MXPOI,MXHBW), SYSQ(MXPOI)
C   DIMENSION AKC(3,3), AKH(3,3), QQ(3), QSS(3), QH(3)
C   DIMENSION AKE(3,3), QE(3), B(2,3), BT(3,2)
C
C   INTEGER INTMAT(MXELE,3), LTYPE(MXPOI,3)
C
C   LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
C   DO 5000 IE=1,NELEM
C
C   FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
C   II = INTMAT(IE,1)
C   JJ = INTMAT(IE,2)
C   KK = INTMAT(IE,3)
C
C   XG1 = COORD(II,1)
C   XG2 = COORD(JJ,1)
C   XG3 = COORD(KK,1)
C   YG1 = COORD(II,2)
C   YG2 = COORD(JJ,2)
C   YG3 = COORD(KK,2)
C   AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
C   IF (AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
C 5  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
C *         ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
C *         ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
C *         ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
C   IF (AREA.LE.0.) STOP
C
C   B1 = YG2 - YG3
C   B2 = YG3 - YG1
C   B3 = YG1 - YG2
C   C1 = XG3 - XG2
C   C2 = XG1 - XG3
C   C3 = XG2 - XG1
C
C   DO 10 I=1,2
C   DO 10 J=1,3
C   B(I,J) = 0.
C 10 CONTINUE
C
C   B(1,1) = B1
C   B(1,2) = B2
C   B(1,3) = B3
C   B(2,1) = C1
C   B(2,2) = C2
C   B(2,3) = C3

```

```

DO 20 I=1,2
DO 30 J=1,3
B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
BT(J,I) = B(I,J)
30 CONTINUE
20 CONTINUE
C
C   ZERO ALL COEFFICIENTS OF THE FINAL ELEMENT MATRICES:
C
C   DO 50 I=1,3
C   QE(I) = 0.
C   DO 50 J=1,3
C   AKE(I,J) = 0.
C 50 CONTINUE
C
C   ELEMENT CONDUCTION MATRIX:
C
C   DO 100 I=1,3
C   DO 100 J=1,3
C   AKC(I,J) = 0.
C   DO 110 K=1,2
C   AKC(I,J) = AKC(I,J) + BT(I,K)*B(K,J)
C 110 CONTINUE
C   AKC(I,J) = TK*AREA*THICK*AKC(I,J)
C 100 CONTINUE
C   DO 120 I=1,3
C   DO 120 J=1,3
C   AKE(I,J) = AKE(I,J) + AKC(I,J)
C 120 CONTINUE
C
C   ELEMENT CONVECTION MATRICES:
C
C   IF (LTYPE(IE,3).NE.1) GO TO 300
C   FAC = H*AREA/12.
C   DO 230 I=1,3
C   DO 230 J=1,3
C   AKH(I,J) = FAC
C 230 CONTINUE
C   DO 240 I=1,3
C   AKH(I,I) = 2.*FAC
C 240 CONTINUE
C   FAC = H*AREA*TI/3.
C   DO 250 I=1,3
C   QH(I) = FAC
C 250 CONTINUE
C   DO 260 I=1,3
C   QE(I) = QE(I) + QH(I)
C   DO 260 J=1,3
C   AKE(I,J) = AKE(I,J) + AKH(I,J)
C 260 CONTINUE
C 300 CONTINUE
C
C   ELEMENT HEAT LOAD DUE TO INTERNAL HEAT GENERATION:

```

```

C      IF(LTYPE(IE,1).NE.1) GO TO 400
      FAC = Q*AREA*THICK/3.
      DO 310 I=1,3
      QQ(I) = FAC
310    CONTINUE
      DO 320 I=1,3
      QE(I) = QE(I) + QQ(I)
320    CONTINUE
400    CONTINUE

C      ELEMENT HEAT LOAD DUE TO SPECIFIED SURFACE HEATING:
C
C      IF(LTYPE(IE,2).NE.1) GO TO 500
      FAC = QS*AREA/3.
      DO 410 I=1,3
      QSS(I) = FAC
410    CONTINUE
      DO 420 I=1,3
      QE(I) = QE(I) + QSS(I)
420    CONTINUE
500    CONTINUE

C      ASSEMBLE THESE ELEMENT MATRICES TO FORM SYSTEM EQUATIONS:
C
C      CALL ASSMBLE( IE, INTMAT, AKE, QE, SYSK, SYSQ,
*                  MXPOI, MXELE, MXHEW
C
C 5000 CONTINUE
C
      RETURN
      END

```



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ง

รายละเอียดไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์  
การเสีรูปร่างและความเค้น (STRESS)

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```

C PROGRAM STRESS
C
C A FINITE ELEMENT MECHANICAL/THERMAL STRESS ANALYSIS PROGRAM
C DR. PRAMOTE DECHAUMPHAI
C FACULTY OF ENGINEERING
C CHULALONGKORN UNIVERSITY
C
C PARAMETER (MXPOI=5000, MXELE=10000, MXHBW=3000)
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C DIMENSION COORD(MXPOI,2), TEMP(MXPOI), TEXT(20)
C DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
C DIMENSION SXX(MXPOI), SYI(MXPOI), SYJ(MXPOI), ONE(MXPOI)
C CHARACTER*20 NAME1, NAME2, NAME3, NAME4
C
C INTEGER INTMAT(MXELE,3), IBC(MXPOI,2)
C
10 WRITE(6,15)
15 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:')
READ(5, '(A)', ERR=10) NAME1
OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C READ TITLE OF COMPUTATION:
C
READ(7,*) NLines
DO 100 ILine=1,NLines
READ(7,1) TEXT
1 FORMAT(20A4)
100 CONTINUE
C
C READ INPUT DATA:
C
READ(7,1) TEXT
READ(7,*) NPOIN, NELEM, NFORCE
IF(NPOIN.GT.MXPOI) WRITE(6,110) NPOIN
110 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOI TO ', I5)
IF(NPOIN.GT.MXPOI) STOP
IF(NELEM.GT.MXELE) WRITE(6,120) NELEM
120 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO ', I5)
IF(NELEM.GT.MXELE) STOP
READ(7,1) TEXT
READ(7,*) ELAS, PR, ALPHA, TREF, THICK
READ(7,1) TEXT
DO 130 IP=1,NPOIN
READ(7,*) I, (IBC(I,J), J=1,2), (COORD(I,K), K=1,2), TEMP(I)
IF(I.NE.IP) WRITE(6,135) IP
135 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
IF(I.NE.IP) STOP
130 CONTINUE
READ(7,1) TEXT
DO 140 IE=1,NELEM
READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,3)
IF(I.NE.IE) WRITE(6,150) IE

```

```

150 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
IF(I.NE.IE) STOP
140 CONTINUE
C
NDF = 2
NDOF = 6
NEQ = NPOIN*NDF
DO 300 I=1,NEQ
SYSF(I) = 0.
300 CONTINUE
READ(7,1) TEXT
DO 310 II=1,NFORCE
READ(7,*) N, FX, FY
IEQ = (N-1)*NDF
SYSF(IEQ+1) = FX
SYSF(IEQ+2) = FY
310 CONTINUE
C
C COMPUTE HALF-BANDWIDTH:
C
NHBW = 0
DO 400 IE=1,NELEM
MIN = 100000
MAX = 0
DO 410 IN=1,3
II = INTMAT(IE,IN)
IF(II.GT.MAX) MAX = II
IF(II.LT.MIN) MIN = II
410 CONTINUE
NDIF = MAX - MIN + 1
IF(NDIF.GT.NHBW) NHBW = NDIF
400 CONTINUE
C
NHBW = NHBW*NDF
IF(NHBW.GT.MXHBW) WRITE(6,420) NHBW
420 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXHBW TO ', I5)
IF(NHBW.GT.MXHBW) STOP
C
DO 430 I=1,NEQ
DO 430 J=1,NHBW
SYSK(I,J) = 0.
430 CONTINUE
WRITE(6,435) NPOIN, NELEM
435 FORMAT(/, ' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5,
* ' NODES AND', I5, ' ELEMENTS ***')
C
C LOOP OVER ALL ELEMENTS TO COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE
C THEM FOR SYSTEM MATRICES IN THE FORM NEEDED FOR MINIMUM MEMORY
C REQUIREMENT:
C
WRITE(6,440)
440 FORMAT(/, ' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
* ' ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***' )

```

```

CALL CST(NELEM, INTMAT, COORD, ELAS, PR, ALPHA, THICK,
* TREF, TEMP, SYSK, SYSF, MXPOI, MXELE, MXHBW)
C
WRITE(6,450)
450 FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***')
CALL APPLYBC(NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
WRITE(6,460)
460 FORMAT(/, ' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS',
* ' FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS ***' )
WRITE(6,465) NEQ, NHBW
465 FORMAT(5X, '( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS WITH HALF-BANDWIDTH OF',
* I4, ' )')
CALL SOLVE(NEQ, NHBW, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
PRINT OUT NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C
470 WRITE(6,480)
480 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT'
* ' AND STRESS SOLUTIONS:')
READ(5, '(A)', ERR=470) NAME2
OPEN(UNIT=8, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=470)
WRITE(8,490) NPOIN
490 FORMAT(' NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [', I5, ']:',
* '//, 2X, 'NODE', 13X, 'U', 13X, 'V', / )
I1 = 1
DO 500 IP=1,NPOIN
I2 = IP*NDF
WRITE(8,510) IP, (SYSF(I), I=I1,I2)
510 FORMAT(I6, 2E14.6)
I1 = I2 + 1
500 CONTINUE
C
COMPUTE NODAL STRESSES:
C
550 WRITE(6,560)
560 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR GRAPHIC DISPLAY:')
READ(5, '(A)', ERR=550) NAME3
OPEN(UNIT=9, FILE=NAME3, STATUS='NEW', ERR=550)
CALL STRESS(NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, SYSK, ELAS, PR,
* ALPHA, TREF, TEMP, SXX, SY, SYX, ONE,
* MXPOI, MXELE )
C
CREATE FILE FOR 2-D CONTOUR PLOTTING PROGRAM:
C
IDEF = 0
NVAR = 3
IT = 9
600 WRITE(IT,610) NPOIN, NELEM, NVAR
610 FORMAT(' NPOIN NELEM NVAR', /, 3I8)
WRITE(IT,620) NPOIN
620 FORMAT(' NODAL COORDINATES & SOLUTIONS [', I5, ']:')
DO 630 I=1,NPOIN

```

```

WRITE(IT,640) I, (COORD(I,J), J=1,2), SXX(I), SY(I), SYX(I)
640 FORMAT(I8, 5E12.5)
630 CONTINUE
WRITE(IT,650) NELEM
650 FORMAT(' ELEMENT NODAL CONNECTIONS [', I5, ']:')
DO 660 IE=1,NELEM
WRITE(IT,670) IE, (INTMAT(IE,J), J=1,3)
670 FORMAT(4I8)
660 CONTINUE
IF(IDEF.EQ.1) STOP
C
WRITE(6,700)
700 FORMAT(/, ' CREATE A PLOT FILE WITH DEFORMED SHAPE?', /,
* '( 1 = YES, 0 = NO )' )
READ(5,*) IDEF
IF(IDEF.NE.1) STOP
710 WRITE(6,720)
720 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER PLOTTING FILE NAME WITH DEFORMED SHAPE:')
READ(5, '(A)', ERR=710) NAME4
IT = 10
OPEN(UNIT=IT, FILE=NAME4, STATUS='NEW', ERR=710)
DISMAX = 0.
DO 730 IP=1,NPOIN*2
DISP = SYSF(IP)
DISP = ABS(DISP)
IF(DISP.GT.DISMAX) DISMAX = DISP
730 CONTINUE
XMIN = 1.E20
XMAX = -XMIN
YMIN = XMIN
YMAX = -YMIN
DO 740 IP=1,NPOIN
IF(COORD(IP,1).GT.XMAX) XMAX = COORD(IP,1)
IF(COORD(IP,1).LT.XMIN) XMIN = COORD(IP,1)
IF(COORD(IP,2).GT.YMAX) YMAX = COORD(IP,2)
IF(COORD(IP,2).LT.YMIN) YMIN = COORD(IP,2)
740 CONTINUE
XL = XMAX - XMIN
YL = YMAX - YMIN
AL = XL
IF(YL.GT.AL) AL = YL
C
ASSIGN MAXIMUM PLOTTING DEFORMATION 10% OF MAXIMUM SHAPE:
C
FAC = 0.1*AL/DISMAX
DO 750 IP=1,NPOIN
J1 = 2*IP - 1
J2 = J1 + 1
COORD(IP,1) = COORD(IP,1) + FAC*SYSF(J1)
COORD(IP,2) = COORD(IP,2) + FAC*SYSF(J2)
750 CONTINUE
GO TO 600
C

```

```

STOP
END
-----
C
C
C   SUBROUTINE APPLYBC(NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
C   APPLY DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODES OF:
C       0 = FREE TO MOVE
C       1 = FIXED
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
C
C   INTEGER IBC(MXPOI,2)
C
C   NDF = 2
C   DO 100 IN=1,NPOIN
C   DO 200 ID=1,NDF
C   IF(IBC(IN,ID).NE.1) GO TO 200
C
C   IEQ = (IN-1)*NDF + ID
C   SYSF(IEQ) = 0.
C
C   SYSK(IEQ,1) = 1.
C   DO 300 I=2,NHBW
C   SYSK(IEQ,I) = 0.
300 CONTINUE
C
C   IF(IEQ.EQ.1) GO TO 450
C   DO 400 N=1,IEQ-1
C   IROW = IEQ - N
C   ICOL = N + 1
C   IF(ICOL.GT.NHBW) GO TO 450
C   SYSK(IROW,ICOL) = 0.
400 CONTINUE
450 CONTINUE
C
C   200 CONTINUE
C   100 CONTINUE
C
C   RETURN
C   END
-----
C
C
C   SUBROUTINE ASSMBLE( IE, INTMAT, SGBL, FGBL, SYSK, SYSF,
*   MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
C   ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION SGBL(6,6), FGBL(6)

```

```

DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
C
C   INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
C   NNODE = 3
C   NDF = 2
C
C   DO 100 NR=1,NNODE
C   NODR = INTMAT(IE,NR)
C   DO 100 MR=1,NDF
C
C   DENOTE: NSR = ROW POSITION IN THE SYSTEM EQS.
C           NER = ROW POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
C   NSR = (NODR-1)*NDF + MR
C   NER = (NR -1)*NDF + MR
C   SYSF(NSR) = SYSF(NSR) + FGBL(NER)
C
C   DO 200 NC=1,NNODE
C   NODC = INTMAT(IE,NC)
C   DO 200 MC=1,NDF
C
C   DENOTE: NSC = COLUMN POSITION IN THE SYSTEM EQS.
C           (AFTER ROTATION - READY FOR BANDED SOLVER)
C           NEC = COLUMN POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
C   NSC = (NODC-1)*NDF + MC - NSR + 1
C   NEC = (NC -1)*NDF + MC
C   IF(NSC.GT.0)
C   &   SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + SGBL(NER,NEC)
200 CONTINUE
C
C   100 CONTINUE
C
C   RETURN
C   END
-----
C
C
C   SUBROUTINE CST(NELEM, INTMAT, COORD, ELAS, PR, ALPHA, THICK,
*   TREF, TEMP, SYSK, SYSF, MXPOI, MXELE, MXHBW)
C
C   COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQUATIONS
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION COORD(MXPOI,2), TEMP(MXPOI)
C   DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
C   DIMENSION SCST(6,6), FCST(6), C(3,3), B(3,6), BT(6,3)
C   DIMENSION DUMA(3,6), DUMB(3), AL(3)
C
C   INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
C   LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:

```



```

C
C DO 5000 IE=1,NELEM
C
C FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
C II = INTMAT(IE,1)
C JJ = INTMAT(IE,2)
C KK = INTMAT(IE,3)
C
C XG1 = COORD(II,1)
C XG2 = COORD(JJ,1)
C XG3 = COORD(KK,1)
C YG1 = COORD(II,2)
C YG2 = COORD(JJ,2)
C YG3 = COORD(KK,2)
C AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
C IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
C 5 FORMAT(/,' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
C * ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
C * ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
C * ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
C IF(AREA.LE.0.) STOP
C
C B1 = YG2 - YG3
C B2 = YG3 - YG1
C B3 = YG1 - YG2
C C1 = XG3 - XG2
C C2 = XG1 - XG3
C C3 = XG2 - XG1
C
C DO 10 I=1,3
C DO 10 J=1,6
C B(I,J) = 0.
C 10 CONTINUE
C
C B(1,1) = B1
C B(1,3) = B2
C B(1,5) = B3
C B(2,2) = C1
C B(2,4) = C2
C B(2,6) = C3
C B(3,1) = C1
C B(3,2) = B1
C B(3,3) = C2
C B(3,4) = B2
C B(3,5) = C3
C B(3,6) = B3
C
C DO 20 I=1,3
C DO 30 J=1,6
C B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
C BT(J,I) = B(I,J)
C 30 CONTINUE

```

```

20 CONTINUE
C
C ELASTICITY MATRIX:
C
C FAC = ELAS/(1.-PR*PR)
C C(1,1) = FAC
C C(1,2) = FAC*PR
C C(1,3) = 0.
C C(2,1) = C(1,2)
C C(2,2) = C(1,1)
C C(2,3) = 0.
C C(3,1) = 0.
C C(3,2) = 0.
C C(3,3) = FAC*(1.-PR)/2.
C
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX:
C
C DO 100 I=1,3
C DO 100 J=1,6
C DUMA(I,J) = 0.
C DO 200 K=1,3
C DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + C(I,K)*B(K,J)
C 200 CONTINUE
C 100 CONTINUE
C
C DO 300 I=1,6
C DO 300 J=1,6
C SCST(I,J) = 0.
C DO 400 K=1,3
C SCST(I,J) = SCST(I,J) + BT(I,K)*DUMA(K,J)
C 400 CONTINUE
C 300 CONTINUE
C
C DO 500 I=1,6
C DO 500 J=1,6
C SCST(I,J) = SCST(I,J)*THICK*AREA
C 500 CONTINUE
C
C ELEMENT NODAL FORCE DUE TO IN-PLANE THERMAL EXPANSION:
C
C AL(1) = ALPHA
C AL(2) = ALPHA
C AL(3) = 0.
C DO 600 I=1,3
C DUMB(I) = 0.
C DO 700 J=1,3
C DUMB(I) = DUMB(I) + C(I,J)*AL(J)
C 700 CONTINUE
C 600 CONTINUE
C
C DO 800 I=1,6
C FCST(I) = 0.
C DO 900 J=1,3

```

```

FCST(I) = FCST(I) + BT(I,J)*DUMB(J)
900 CONTINUE
800 CONTINUE
C
C AVERAGE ELEMENT TEMPERATURE:
C
TAVG = (TEMP(II) + TEMP(JJ) + TEMP(KK))/3.
C
FAC = (TAVG - TREF)*THICK*AREA
DO 1000 I=1,6
FCST(I) = FCST(I)*FAC
1000 CONTINUE
C
C ASSEMBLE THESE ELEMENT EQUATIONS INTO THE SYSTEM EQUATIONS:
C
CALL ASSMBLE( IE, INTMAT, SCST, FCST, SYSK, SYSF,
*            MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
5000 CONTINUE
C
RETURN
END
C
-----
C
SUBROUTINE SOLVE(NROW, NHBW, GSTIF, XL, MXPOI, MXHBW)
C
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
DIMENSION GSTIF(MXPOI*2,MXHBW), XL(MXPOI*2)
C
NR=NROW
NC=NHBW
C
DIAGONALIZATION THE MATRIX:
C
DO 10 I=1,NR
PIVOT1=GSTIF(I,1)
IF (ABS(PIVOT1).LT.10.E-10) THEN
WRITE(6,1025) I, PIVOT1
1025 FORMAT(' EQ. NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6,
*         ' ** STOP **', //,
*         ' *** CHECK NODE AND ELEMENT NUMBERING IN F.E. MODEL ***')
STOP
ENDIF
C
XL(I)=XL(I)/PIVOT1
DO 20 J=1,NC
20 GSTIF(I,J)=GSTIF(I,J)/PIVOT1
MM=0
DO 30 II=I+1,NR
MM=MM+1
IF(MM+1.GT.NC) GOTO 30

```

```

PIVOT2=GSTIF(I,MM+1)*PIVOT1
XL(II)=XL(II)-XL(I)*PIVOT2
DO 40 JJ=1,NC
JJJ=JJ+MM
IF(JJJ.LE.NC)
& GSTIF(II,JJ)=GSTIF(II,JJ)-GSTIF(I,JJJ)*PIVOT2
40 CONTINUE
30 CONTINUE
10 CONTINUE
C
C BACK SUBSTITUTION:
C
DO 70 I=NR-1,1,-1
II=1
DO 80 J=I+1,NR
II=II+1
IF(II.LE.NHBW) XL(I)=XL(I)-GSTIF(I,II)*XL(J)
80 CONTINUE
70 CONTINUE
C
RETURN
END
C
-----
C
SUBROUTINE STRESS(NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, DISP, ELAS, PR,
*                ALPHA, TREF, TEMP, SXX, SYX, SXY, ONE,
*                MXPOI, MXELE )
C
COMPUTE NODAL STRESS COMPONENTS FOR CST ELEMENTS
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION COORD(MXPOI,2), TEMP(MXPOI)
DIMENSION DISP(MXPOI*2), ONE(MXPOI)
DIMENSION SXX(MXPOI), SYX(MXPOI), SXY(MXPOI)
DIMENSION C(3,3), B(3,6), EPS(3), UG(3), VG(3)
C
INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
DO 10 I=1,NPOIN
SXX(I) = 0.
SYX(I) = 0.
SXY(I) = 0.
ONE(I) = 0.
10 CONTINUE
C
C LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
DO 1000 IE=1,NELEM
C
C FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
II = INTMAT(IE,1)

```

```

JJ = INTMAT(IE,2)
KK = INTMAT(IE,3)

C
XG1 = COORD(II,1)
XG2 = COORD(JJ,1)
XG3 = COORD(KK,1)
YG1 = COORD(II,2)
YG2 = COORD(JJ,2)
YG3 = COORD(KK,2)
AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))

C
B1 = YG2 - YG3
B2 = YG3 - YG1
B3 = YG1 - YG2
C1 = XG3 - XG2
C2 = XG1 - XG3
C3 = XG2 - XG1

C
DO 110 I=1,3
DO 110 J=1,6
B(I,J) = 0.
110 CONTINUE

C
B(1,1) = B1
B(1,3) = B2
B(1,5) = B3
B(2,2) = C1
B(2,4) = C2
B(2,6) = C3
B(3,1) = C1
B(3,2) = B1
B(3,3) = C2
B(3,4) = B2
B(3,5) = C3
B(3,6) = B3

C
DO 120 I=1,3
DO 130 J=1,6
B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
130 CONTINUE
120 CONTINUE

C
ELASTICITY MATRIX:

C
FAC = ELAS/(1.-PR*PR)
C(1,1) = FAC
C(1,2) = FAC*PR
C(1,3) = 0.
C(2,1) = C(1,2)
C(2,2) = C(1,1)
C(2,3) = 0.
C(3,1) = 0.
C(3,2) = 0.

```

```

C(3,3) = FAC*(1.-PR)/2.

C
GATHER ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS:

C
DO 200 J1=1,3
I1 = INTMAT(IE,J1)
IEQ = (I1-1)*2 + 1
UG(J1) = DISP(IEQ )
VG(J1) = DISP(IEQ+1)
200 CONTINUE

C
COMPUTE THE TOTAL STRAINS:

C
DO 220 I=1,3
EPS(I) = 0.
DO 230 J=1,3
J1 = (J-1)*2 + 1
J2 = J1 + 1
EPS(I) = EPS(I) + B(I,J1)*UG(J) + B(I,J2)*VG(J)
230 CONTINUE
220 CONTINUE

C
COMPUTE THERMAL STRAINS USING AVERAGE ELEMENT NODAL TEMPERATURES:

C
TAVG = (TEMP(II) + TEMP(JJ) + TEMP(KK))/3.

C
COMPUTE THE NET STRAINS:

C
EPS(1) = EPS(1) - ALPHA*(TAVG - TREF)
EPS(2) = EPS(2) - ALPHA*(TAVG - TREF)

C
COMPUTE THE ELEMENT STRESSES:

C
SXXE = C(1,1)*EPS(1) + C(1,2)*EPS(2) + C(1,3)*EPS(3)
SYYE = C(2,1)*EPS(1) + C(2,2)*EPS(2) + C(2,3)*EPS(3)
SXYE = C(3,1)*EPS(1) + C(3,2)*EPS(2) + C(3,3)*EPS(3)

C
COMPUTE NODAL STRESSES FROM ELEMENT STRESSES:

C
SXX(II) = SXX(II) + SXXE
SXX(JJ) = SXX(JJ) + SXXE
SXX(KK) = SXX(KK) + SXXE
SYY(II) = SYY(II) + SYYE
SYY(JJ) = SYY(JJ) + SYYE
SYY(KK) = SYY(KK) + SYYE
SXY(II) = SXY(II) + SXYE
SXY(JJ) = SXY(JJ) + SXYE
SXY(KK) = SXY(KK) + SXYE
ONE(II) = ONE(II) + 1.
ONE(JJ) = ONE(JJ) + 1.
ONE(KK) = ONE(KK) + 1.

C
1000 CONTINUE

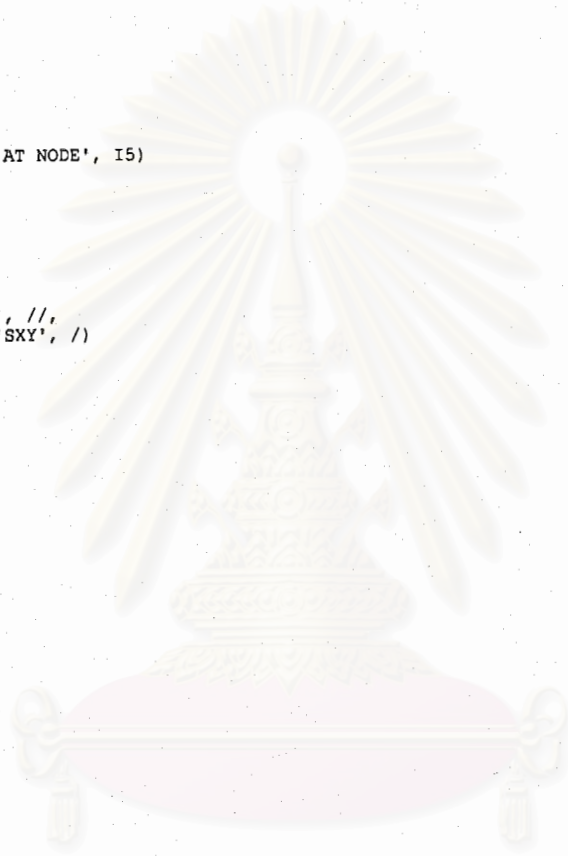
```



```

C
C PRINT OUT THESE NODAL STRESSES:
C
DO 1100 I=1,NPOIN
IF(ONE(I).EQ.0.) WRITE(6,1200) I
1200 FORMAT(' *** WARNING *** NO STRESS CONTRIBUTION AT NODE', I5)
IF(ONE(I).EQ.0.) ONE(I) = 1.
SXX(I) = SXX(I)/ONE(I)
SYY(I) = SYY(I)/ONE(I)
SXY(I) = SXY(I)/ONE(I)
1100 CONTINUE
C
WRITE(8,1300) NPOIN
1300 FORMAT(///, ' NODAL STRESS SOLUTIONS (', I5,'):', //,
* 2X, 'NODE', 11X, 'SXX', 11X, 'SYY', 11X, 'SXY', /)
DO 1400 I=1,NPOIN
WRITE(8,1500) I, SXX(I), SYY(I), SXY(I)
1500 FORMAT(I6, 3E14.6)
1400 CONTINUE
C
RETURN
END

```



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย