บทที่ 3

ผลลัพธ์หลัก

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการทำวิทยานิพนธ์นี้ จากทฤษฎีบท 2.39 ทำให้เราอาจจะคาดว่า ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบเชื่อมโยงที่กระชับ และ $f : (X, d) \to (X, d)$ เป็นทั้ง การส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ และการส่งนอนเอกแพนซีฟ แล้ว $f : (X, d) \to (X, d)$ จะเป็น การส่งคอนแทรกทีฟ แต่จากตัวอย่าง 3.1 ทำให้เราพบว่าสิ่งที่เราคาดไว้นั้นไม่จริง

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> ให้ $X = [0, 1]$ และ d เป็นเมตริกบน X นิยามโดย

$$d(x, y) = \min\{\frac{1}{2}, |x - y|\} \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

และให้ $f : (X, d) \to (X, d)$ นิยามโดย $f(x) = \sin x$

เราจะได้ว่า f เป็นทั้งการส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ และการส่งนอนเอกแพนซีฟ แต่ f ไม่เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

<u>พิสูจน์</u> จากตัวอย่าง 2.17 ทำให้เราได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ

ประการแรกเราจะแสดงว่า f เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ

ให้ $x, y \in X$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(\sin x, \sin y) \\ &= \min\{\frac{1}{2}, |\sin x - \sin y|\} \\ &\leq \min\{\frac{1}{2}, |x - y|\} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

นั่นคือ f เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ

ประการต่อไป เราจะแสดงว่า f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่

ให้ $x \in X$ และให้ $V_x = B_d(x ; \frac{1}{10})$ เป็นย่านจุดของ x

ให้ $y, z \in V_x$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} d(f(y), f(z)) &= d(\sin y, \sin z) \\ &= \min\{\frac{1}{2}, |\sin y - \sin z|\} \end{aligned}$$

$$= \ |\sin y - \sin z|$$
$$< \ |y - z|$$
$$= \ \min\{\frac{1}{2}, |y - z|\}$$
$$= \ d(y, z)$$

นั่นคือ f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่

ประการสุดท้ายเราจะแสดงว่า f ไม่เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

เราเห็นได้ชัดว่า $d(1, 0) = \dfrac{1}{2}$

พิจารณา
$$\begin{aligned} d(f(1), f(0)) &= d(\sin 1, \sin 0) \\ &= \min\{\frac{1}{2}, |\sin 1 - \sin 0|\} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= d(1, 0) \end{aligned}$$

นั่นคือ f ไม่เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ □

<u>ทฤษฎีบท 3.2</u> ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบเชื่อมโยงที่กระชับ และ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ แล้ว จะมีเมตริก D ที่สมมูลกับเมตริก d ทำให้ $f: (X, D) \to (X, D)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ ดังนั้น สำหรับแต่ละ $x \in X$ จะมีย่านจุด U_x ของ x ที่ทำให้

$$d(f(y), f(z)) \leq d(y, z)$$

สำหรับทุกสมาชิก $y, z \in U_x$

เราจะเห็นว่า $\{U_x\}_{x \in X}$ เป็นเซตปกเปิดสำหรับ X

โดย Lebesgue number lemma จะได้ว่าจะมี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $d(x, y) < \delta$ แล้ว $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$

สำหรับ $p, q \in X$ เรานิยาม

$$D(p,q) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = p, a_1, \ldots, a_n = q \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } p \text{ ไป } q\right\}$$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้เซตที่เรานิยามนั้นไม่ใช่เซตว่าง และ สำหรับ $p, q \in X$, $d(p, q) \geq 0$ นั่นคือ 0 เป็นขอบเขตล่างตัวหนึ่งของเซตที่เรานิยาม ดังนั้นเราจะได้ว่าการนิยามเมตริก D เป็นไปอย่างแจ่มชัด

ประการแรกเราจะแสดงว่า D เป็นเมตริกสำหรับ X ให้ $x, y, z \in X$
เราเห็นได้ชัดว่า $D(x, y) \geq 0$ และ $D(x, y) = D(y, x)$
ถ้า $x = y$ แล้ว $D(x, y) = d(y, x) = 0$ และ
ถ้า $D(x, y) = 0$ เราให้ $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ เป็น $\frac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก $x_0 = x$ ไป $x_n = y$ แล้ว

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$$

ดังนั้น $d(x, y)$ เป็นขอบล่างตัวหนึ่งของเซต

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y \right\}$$

นั่นคือ $0 \leq d(x, y) \leq D(x, y) = 0$ เพราะฉะนั้น $x = y$

เราจะแสดงว่าอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมเป็นจริง ให้ $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ และ $y_0 = y, y_1, \ldots, y_m = z$ เป็น $\frac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก $x_0 = x$ ไป $x_n = y$ และ $y_0 = y$ ไป $y_m = z$ ตามลำดับ

$D(x, z) \leq d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) + d(y_0, y_1) + \ldots + \mathrm{d}(y_{m-1}, y_m)$

$D(x, z) - (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)) \leq d(y_0, y_1) + \ldots + \mathrm{d}(y_{m-1}, y_m)$

ดังนั้น $\mathrm{D(x, z)} - (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n))$ เป็นขอบล่างตัวหนึ่งของเซต

$$\left\{ \sum_{i=0}^{m-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = y, a_1, \ldots, a_m = z \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } y \text{ ไป } z \right\}$$

เพราะฉะนั้น $D(x, z) - (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)) \leq D(y, z)$

ดังนั้น $D(x, z) - D(y, z) \leq (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n))$

ในทำนองเดียวกัน $D(x, z) - D(y, z)$ เป็นขอบล่างตัวหนึ่งของเซต

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y \right\}$$

เพราะฉะนั้น $D(x, z) - D(y, z) \leq D(x, y)$

นั่นคือ $D(x, z) \leq D(x, y) + D(y, z)$

ประการต่อไปเราจะแสดงว่าเมตริก D สมมูลกับเมตริก d เนื่องจาก (X, d) และ (X, D) เป็นปริภูมิอิงระยะทางโดยที่ (X, d) เป็นปริภูมิกระชับ เพียงพอที่เราจะแสดงว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ $i : (X, d) \to (X, D)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta' = \min\{\frac{\delta}{2}, \varepsilon\}$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $d(x, y) < \delta' \leq \frac{\delta}{2}$

เราจะได้ว่า $D(x, y) = d(x, y) < \delta' \leq \varepsilon$

นั่นคือเมตริก D สมมูลกับเมตริก d

ประการสุดท้ายเราจะแสดงว่า $f:(X,D)\longrightarrow(X,D)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ

ให้ $x, y \in X$ จะมี $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ เป็น $\frac{\delta}{2}$ - ลูกโซ่ของจุดจาก $x_0 = x$ ไป $x_n = y$

เนื่องจาก $f:(X,d)\longrightarrow(X,d)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ ดังนั้น

$$d(f(x_i), f(x_{i+1})) \le d(x_i, x_{i+1}) \le \frac{\delta}{2}$$

สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

ดังนั้น $f(x_0) = f(x), f(x_1), \ldots, f(x_n) = f(y)$ เป็น $\frac{\delta}{2}$ - ลูกโซ่ของจุดจาก $f(x_0) = f(x)$ ไป $f(x_n) = f(y)$

ดังนั้น $$\sum_{i=0}^{n\text{-}1} d(f(x_i), f(x_{i+1})) < \sum_{i=0}^{n\text{-}1} d(x_i, x_{i+1})$$

เราจะได้ว่า

$$\inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y\right\}$$

$$\le \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ คือ } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y\right\}$$

$$= D(x,y)$$

แต่เนื่องจาก

$$\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก x ไป } y\right\}$$

$$\subseteq \left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid f(a_0) = f(x), a_1, \ldots, f(a_n) = f(y) \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } f(x) \text{ ไป } f(y)\right\}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก x ไป } y\right\}$$

$$\ge \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid f(a_0) = f(x), a_1, \ldots, f(a_n) = f(y) \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } f(x) \text{ ไป } f(y)\right\}$$

$$= D(f(x), f(y))$$

เพราะฉะนั้น $D(f(x), f(y)) \leq D(x, y)$

นั่นคือ f เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ □

บทนิยาม 3.3 เราจะกล่าวว่า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ (complete metric space) ก็ต่อเมื่อ ลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.4 (Banach' s Contraction Principle)

กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ และ $f: (X, d) \longrightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกชัน แล้ว f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางเชื่อมโยงที่กระชับ และ $f: (X, d) \longrightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ แล้ว f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.40 เราจะได้ว่า $f : (X, D) \longrightarrow (X, D)$ เป็นการส่งคอนแทรกชัน และ (X, D) เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบกระชับ

โดย Banach ' s Contraction Principle เราจะได้ว่า f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว □

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ และ $f: (X, d) \longrightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ แล้ว f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

จากทฤษฎีบท 3.6 ถ้าเราสมมติว่า X เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์อย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.7 ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \ln(1+e^{x})$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ เราจะได้ว่า f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ แต่ f ไม่มีจุดตรึง

พิสูจน์ ให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x > y$

เราจะได้ว่า $e^{x} > e^{y}$ ดังนั้น $e^{x} + e^{x+y} > e^{y} + e^{x+y}$

นั่นคือ $e^{x}(1 + e^{y}) > e^{y}(1 + e^{x})$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{e^{x}}{e^{y}} > \dfrac{1+e^{x}}{1+e^{y}}$

พิจารณา $d(f(x), f(y)) = d(\ln(1+e^{X}), \ln(1+e^{y}))$

$= |\ln(1+e^{X}) - \ln(1+e^{y})|$

$$= \left|\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^y}\right)\right|$$

$$< \left|\ln\left(\frac{e^x}{e^y}\right)\right|$$

$$= |x - y|$$

$$= d(x, y)$$

นั่นคือ f เป็น การส่งคอนแทรกทีฟ

ต่อไป สมมติว่ามี $x \in X$ ซึ่ง $f(x) = x$

เราจะได้ว่า $\ln(1+e^X) = x$ นั้นคือ $1+e^X = e^X$

ดังนั้น $1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น f ไม่มีจุดตรึง □

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางเชื่อมโยงที่กระชับ และ $f: (X, d) \longrightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ แล้ว f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.41 เราจะได้ว่า $f : (X, D) \longrightarrow (X, D)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ และ (X, D) เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบกระชับ

โดยทฤษฎีบท 3.6 เราจะได้ว่า f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว □

บทนิยาม 3.9 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บน $\mathbb{F}$ เรานิยามผลคูณภายใน (inner product) บนเซต X คือ ฟังก์ชัน $<\bullet,\bullet>: X \times X \to \mathbb{F}$ ที่มีสมบัติสำหรับทุก $x, y, z \in X$ ดังต่อไปนี้

(1) $\langle x,x\rangle \geq 0$ และ $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(3) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{F}$

(4) $\langle x,z\rangle \leq \langle x,y\rangle + \langle y,z\rangle$

และเราจะเรียก X ที่มีสมบัติดังกล่าวว่า ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space)

บทนิยาม 3.10 เรากล่าวว่า H คือ ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) ถ้า H เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่บริบูรณ์ (complete inner product space) เทียบกับนอร์มที่นิยามโดย $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\forall x \in H$

บทนิยาม 3.11 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บน $\mathbb{R}$ และ $A \subseteq X$ เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตคอนเวกซ์ (convex set) ถ้าสำหรับทุก $x, y \in A$ และ $t \in [0, 1]$ ซึ่ง $(1-t)x + ty \in A$

<u>ข้อสังเกต 3.12</u> ถ้า A เป็นเซตคอนเวกซ์ แล้ว A จะเป็นเซตเชื่อมโยง

<u>ทฤษฎีบท 3.13</u> ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $X \subseteq H$ โดยที่ X เป็นเซตคอนเวกซ์ที่มีขอบเขตและเป็นเซตปิด ถ้า $f : X \longrightarrow X$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ แล้ว f จะมีจุดตรึง

<u>พิสูจน์</u> ดูการพิสูจน์จาก [1] □

จากทฤษฎีบท 3.13 เราจะสังเกตได้ว่า ถ้าเรานิยามเพียงบนปริภูมิอิงระยะทางอาจไม่เพียงพอดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.14</u> ให้ $A = \{z \subseteq \mathbb{C} : |z| = 1\}$ เรานิยาม $f : A \to A$ โดย $f(z) = ze^{i\frac{\pi}{4}}$ เราจะได้ว่า f ไม่มีจุดตรึง

<u>ข้อสังเกต 3.15</u> จากทฤษฎีบท 3.13 จุดตรึงของ f ไม่จำเป็นต้องมีจุดเดียว ตัวอย่างเช่น $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ นิยามโดย $f(x) = x$ สำหรับทุกๆ $x \in [0, 1]$

<u>บทนิยาม 3.16</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง เราเรียก X ว่า มีขอบเขตทุกส่วน (totally bounded) ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\{U_i \subseteq X \mid U_i$ เป็นเซตเปิด และ $diam(U_i) < \varepsilon$, $i = 1,2\ldots,n\}$ ซึ่ง

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.17</u> ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $X \subseteq H$ โดยที่ X เป็นเซตคอนเวกซ์ที่มีขอบเขตทุกส่วน และ เป็นเซตปิด ถ้า $f : X \longrightarrow X$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ แล้ว f จะมีจุดตรึง

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากว่า X เป็นเซตคอนเวกซ์ ดังนั้น X เป็นเซตเชื่อมโยง และจากที่ X เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วนและเป็นเซตปิด เราจะได้ว่า X เป็นเซตกระชับ

จากทฤษฎีบท 3.2 เราสามารถหาเมตริกใหม่ D ที่สมมูลกับเมริกเดิม ทำให้ $f : (X, D) \longrightarrow (X, D)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ
โดย จากทฤษฎีบท 3.13 เราได้ว่า f จะมีจุดตรึง □