บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

สำหรับในบทนี้ เราจะรวบรวมบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆที่จำเป็นต้องใช้ในบทต่อไป

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่ว่าง และ $d: X \times X \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว เราเรียก d ว่าเป็นเมตริก (metric) บน X ถ้า d มีสมบัติสำหรับทุก $x, y, z \in X$ ดังต่อไปนี้

(1) $d(x, y) \geq 0$

(2) $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม)

และเราเรียก X พร้อมกับเมตริก d ว่า ปริภูมิอิงระยะทาง (metric space) แลจะเขียนแทนด้วย (X, d) หรือบางทีเขียนย่อๆด้วย X

ตัวอย่าง 2.2

1. ให้ X เป็นเซตของจำนวนจริง และ $d(x, y) = |x - y|$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เราจะเรียก d ว่า เมตริกปกติบนจำนวนจริง
2. ให้ X เป็นเซตที่ไม่ว่าง และสำหรับ $x, y \in X$ เรากำหนดให้
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$
   เราจะเรียก d ว่า เมตริกภินทนะ (discrete metric)
   และเรียก (X, d) ว่า ปริภูมิอิงระยะทางภินทนะ (discrete metric space)
3. ให้ $X = [0, 1]$ กำหนด $d: X \times X \to \mathbb{R}$ โดย
$$d(x, y) = \min \{\frac{1}{2}, |x - y|\} \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$
   เราจะได้ว่า d เป็นเมตริกสำหรับ X

บทนิยาม 2.3 ให้ $a \in X$ และ $r > 0$ เรานิยามบอลเปิด (open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ a และรัศมี r โดย

$$B_d(a;r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$$

และเขียนแทนด้วย $B_d(a; r)$

บทนิยาม 2.4 ให้ $G \subseteq X$ เราเรียก G ว่า เซตเปิด (open set) ถ้าสำหรับทุก $x \in G$ จะมี $r > 0$ ซึ่ง $B_d(x; r) \subseteq G$

บทนิยาม 2.5 ให้ $F \subseteq X$ เราเรียก F ว่า เซตปิด (closed set) ถ้า $X - F$ เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.6 ให้ $x \in X$ และ $V \subseteq X$ โดยที่ V เป็นเซตเปิด เราเรียก V ว่าเป็นย่านจุดของ x (neighborhood of x) ถ้า $x \in V$

บทนิยาม 2.7 ให้ $A \subseteq X$ เราให้นิยามส่วนปิดคลุมของ A (closure of A) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $Cl(A)$ คือ เซตปิดที่เล็กที่สุดบน X ที่บรรจุ A

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ $A \subseteq X$ เราจะได้ว่า A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $A = Cl(A)$

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ $A \subseteq X$ และ $x \in X$ ดังนั้น $x \in Cl(A)$ ก็ต่อเมื่อ $V \cap X \neq \varnothing$ สำหรับทุก V ที่เป็นย่านจุดของ x

บทนิยาม 2.10 กำหนดให้ (X, d) และ (Y,D) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง $a \in X$ และ $f: (X, d) \rightarrow (Y,D)$ เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องที่ a ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in X$ ซึ่ง $d(x, a) < \delta$ จะได้ว่า $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

เราจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องบน X ถ้า f ต่อเนื่องสำหรับทุกๆ จุดบน X

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง และ f, f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า สมานสัณฐาน (homeomorphism)

บทนิยาม 2.11 ปริภูมิทอพอโลยีประกอบด้วยเซต X ที่ไม่ว่าง และ $\tau_X \subseteq P(X)$ ที่มีสมบัติดังนี้

(1) $\varnothing \in \tau_X$

(2) $X \in \tau_X$

(3) $A \cap B \in \tau_X$ สำหรับทุกสมาชิก $A, B \in \tau_X$

(4) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \tau_X$ เมื่อ $U_\alpha \in \tau_X$ ทุก $\alpha \in \Lambda$

เราเรียก τ_X ว่า ทอพอโลยีบน X และเรียกสมาชิกของ τ_X ว่าเซตเปิด

บทนิยาม 2.12 ให้ X เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และ $B \subseteq P(X)$ เรากล่าวว่า B เป็นฐานสำหรับทอพอโลยีบน X (basis for topology on X) ถ้า B มีสมบัติดังต่อไปนี้

(1) สำหรับแต่ละ $x \in X$ จะมี $B_x \in B$ ซึ่ง $x \in B_x$

(2) สำหรับแต่ละ $x \in X$ และ $B_1, B_2 \in B$ ถ้า $x \in B_1 \cap B_2$
แล้ว จะมี $B_3 \in B$ ซึ่ง $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

บทนิยาม 2.13 ให้ B เป็นฐานสำหรับทอพอโลยีบน X เราให้นิยาม ทอพอโลยีที่ก่อกำเนิดโดย B (topology generated by B) โดย

$$< B >= \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \ \exists B_x \in B(x \in B_x \subseteq U\}$$

บทนิยาม 2.14 ให้ d เป็นเมตริกสำหรับ X เราให้นิยาม เมตริกเชิงทอพอโลยีที่เกิดจาก d (metric topology induced by d) เขียนแทนด้วย τ_d คือ ทอพอโลยีบน X ที่ก่อกำเนิดโดยเซตของบอลเปิดทั้งหมด

บทนิยาม 2.15 เรากล่าวว่าเมตริก d สมมูลเชิงทอพอโลยี (topologically equivalent) กับ เมตริก D บน X ถ้า $\tau_d = \tau_D$

ทฤษฎีบท 2.16 เมตริก d สมมูลเชิงทอพอโลยีกับเมตริก D บน X ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ และ $x \in X$ มี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $B_d(x\,;\delta_1) \subseteq B_D(x\,;\varepsilon)$ และ $B_D(x;\delta_2) \subseteq B_d(x;\varepsilon)$

ตัวอย่าง 2.17 ให้ $X = [0, 1]$ และ สำหรับทุก $x, y \in X$ เราให้เมตริก $d(x, y) = |x-y|$ และ $D(x, y) = \min\{\frac{1}{2}, |x-y|\}$ เราจะได้ว่า เมตริก d สมมูลเชิงทอพอโลยีกับเมตริก D

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ และ $x \in X$

เลือก $\delta_1 = \min\{\frac{1}{2}, \varepsilon\}$

ให้ $y \in B_d(x\,;\delta_1)$ ดังนั้น $|x - y| < \frac{1}{2} \leq \varepsilon$

นั่นคือ $y \in B_D(x\,;\varepsilon)$

ในลำดับต่อไป เลือก $\delta_2 = \varepsilon$

ให้ $y \in B_D(x\,;\delta_2)$ ดังนั้น $|x - y| < \varepsilon$

นั่นคือ $y \in B_d(x\,;\varepsilon)$

โดยทฤษฎีบท 2.16 เราจะได้ว่า เมตริก d สมมูลเชิงทอพอโลยีกับเมตริก D $\square$

บทนิยาม 2.18 เราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิเชื่อมโยง (connected metric space) ถ้ามีเพียง $\varnothing$ และ X เท่านั้นที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดบน X

บทนิยาม 2.19 ให้ $A \subseteq X$ และ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ เป็นวงศ์ดรรชนีของเซตย่อยของ X เราเรียก $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ว่าเป็น เซตปก (covering set) ของ A ถ้า $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$

สำหรับเซตดรรชนี Λ เป็นเซตจำกัด เราจะเรียก $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ว่า เซตปกจำกัดของ A (finite covering set of A)

ถ้า $A = X$ จะได้ว่า $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ เป็นเซตปกของ X เมื่อ $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$

ถ้า $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ โดยที่ $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_0} F_\alpha$ เราจะเรียก $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda_0}$ ว่าเป็น เซตปกย่อย (subcovering set) ของ X

ถ้า F_α เป็นเซตเปิด สำหรับทุก $\alpha \in \Lambda$ เราเรียก $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ว่าเป็น เซตปกเปิด (open covering set) ของ A

บทนิยาม 2.20 กำหนดให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี $x, y \in X$ เราจะเรียกวงศ์จำกัดของเซตย่อย $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ว่า ลูกโซ่เชิงเดียว (simple-chain) จาก x ไป y ถ้า x เป็นสมาชิกของ A_1 เท่านั้น และ y เป็นสมาชิกของ A_n เท่านั้น และ $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $|i - j| \leq 1$ สำหรับทุก $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

ทฤษฎีบท 2.21 ถ้า X เป็นปริภูมิเชื่อมโยงและ $x, y \in X$ และ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ เซตปกเปิดของ X แล้ว จะมีลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นเซตย่อยของ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ จาก x ไป y

พิสูจน์ ให้ $a \in X$ และ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ เป็นเซตปกเปิดของ X

ให้ $S = \{\, x \in X \mid$ มีลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นเซตย่อยของ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ จาก a ไป $x \}$

เนื่องจาก $a \in S$ เราจะได้ว่า $S \neq \varnothing$

ในอันดับแรก เราจะแสดงว่าเซต S นั้นเป็นเซตเปิด

ให้ $x \in S$

ดังนั้น จะมีลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นสมาชิกของ$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ จาก a ไป x เขียนแทนด้วย $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$

ให้ $y \in U_n$ เราจะพิจารณา 2 กรณีดังต่อไปนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $y \in U_n - U_{n-1}$

เราจะได้ว่า $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ เป็นลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นวงศ์จำกัดย่อยของ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ จาก a ไป y นั่นคือ $y \in S$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $y \in U_n \cap U_{n-1}$

เราจะได้ว่า $\{U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}\}$เป็นลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นวงศ์จำกัดย่อยของ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ จาก a ไป y นั่นคือ $y \in S$

เพราะฉะนั้น $x \in U_n \subseteq S$ นั่นคือเราได้ว่า เซต S เป็นเซตเปิด

ในอันดับต่อไป เราจะแสดงว่าเซต S นั้นเป็นเซตปิด

ให้ $x \in Cl(S)$ เนื่องจากมี $\alpha\in\Lambda$ ซึ่ง $x \in U_\alpha$ ดังนั้น $S \cap U_\alpha \neq \varnothing$

ถ้า $x \in S \cap U_\alpha$ เราจะได้ว่า $x \in S$

สมมติว่า $x \notin S \cap U_\alpha$ ให้ $y \in S \cap U_\alpha$

เพราะฉะนั้น จะมีลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นวงศ์จำกัดย่อยของ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ จาก a ไป y ซึ่งเราจะเขียนแทนด้วย $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$

ดังนั้นเราจะเลือกลูกโซ่เชิงเดียวจาก a ไป x คือ $\{U_1, U_2, \ldots, U_m, U_\alpha\}$ โดยการที่เราสมมติว่า $U_k \cap U_\alpha \neq \varnothing$ สำหรับบาง $k = 1, 2, .., m$ ต่อไปเราเลือกค่า k ที่น้อยที่สุดที่ $U_k \cap U_\alpha \neq \varnothing$ สมมติให้เป็น U_j เพราะฉะนั้น $\{U_1, U_2, \ldots, U_j, U_\alpha\}$ เป็นลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นวงศ์จำกัดย่อยของ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ จาก a ไป x นั่นคือ $x \in S$

นั่นคือ เราได้ว่า เซต S เป็นเซตปิด

เนื่องจากว่า X เป็นเซตเชื่อมโยงและ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด เราจะได้ว่า $S = X$ □

<u>ทฤษฎีบท 2.22</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางเชื่อมโยง และ $\varepsilon > 0$ สำหรับทุก $p, q \in X$ จะมีเซตจำกัดของจุดที่อยู่ใน X เขียนแทนด้วย $\{x_0 = p, x_1, \ldots, x_n = q\}$ ซึ่ง $d(x_i, x_{i+1}) \le \varepsilon$ สำหรับทุก $i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ และเราจะเรียกเซต $\{x_0 = p, x_1, \ldots, x_n = q\}$ ว่า ε- ลูกโซ่ของจุด (ε-chain of points) จาก p ไป q

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\varepsilon > 0$ และ $x \in X$ เราจะได้ว่า $\left\{V_x = B_d(x; \frac{\varepsilon}{2})\right\}_{x \in X}$ เป็นเซตปกเปิดของ X

ให้ $p, q \in X$

โดยทฤษฎีบท 2.21 เราจะได้ว่า จะมี ลูกโซ่อย่างง่ายที่เป็นเซตย่อยของ $\{V_x\}_{x \in X}$ จาก p ไป q โดยไม่เสียนัยทั่วไปเขียนแทนด้วย $V_1, V_2, \ldots, V_n$

เนื่องจาก $V_i \cap V_{i+1} \neq \varnothing$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

ให้ $x_i \in V_i \cap V_{i+1} \neq \varnothing$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

เราจะเห็นว่า $d(x_i, x_{i+1}) \le \varepsilon$ สำหรับทุก $i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

นั่นคือ จะมีเซตจำกัดของจุดที่อยู่ใน X เขียนแทนด้วย $\{x_0 = p, x_1, \ldots, x_n = q\}$ ซึ่ง $d(x_i, x_{i+1}) \le \varepsilon$ สำหรับทุก $i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ □

<u>บทนิยาม 2.23</u> ให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ $A \subseteq X$ เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตกระชับ (compact set) ถ้าทุกเซตปกเปิด $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ของ A จะมีเซตปกเปิดย่อยจำกัด

<u>บทนิยาม 2.24</u> ให้ A เป็นเซตย่อยของปริภูมิอิงระยะทาง X เรานิยามเส้นผ่านกลาง (diameter) ของ A เขียนแทนด้วย $diam(A)$ โดย ถ้า A เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set)

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

และ ถ้า A ไม่มีขอบเขต (unbounded) แล้ว $diam(A) = +\infty$

<u>ทฤษฎีบท 2.25</u> (Lebesgue Number Lemma)

กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ และ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ เป็นเซตปกเปิดของ X แล้ว จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก $A \subseteq X$ โดยที่ $diam(A) < \delta$ จะมี $\alpha \in \Lambda$ ซึ่ง $A \subseteq U_\alpha$

<u>บทนิยาม 2.26</u> ให้ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งคอนแทรกชัน (contraction mapping) ถ้ามี $M \in [0, 1)$ ที่ทำให้

$$d(f(x), f(y)) \le M\, d(x, y)$$

สำหรับทุกสมาชิก $x, y \in X$

บทนิยาม 2.27 ให้ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ (local contraction mapping) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก $x \in X$ จะมีย่านจุด U_x ของ x และ $M_x \in [0, 1)$ ที่ทำให้

$$d(f(y), f(z)) \leq M_x d(y, z)$$

สำหรับทุกสมาชิก $y, z \in U_x$

บทนิยาม 2.28 ให้ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ (contractive mapping) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ จะได้

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

บทนิยาม 2.29 ให้ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ (locally contractive mapping) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก $x \in X$ จะมีย่านจุด U_x ของ x ที่ทำให้สำหรับทุกสมาชิก $y, z \in U_x$ โดยที่ $y \neq z$ จะได้ว่า

$$d(f(y), f(z)) < d(y, z)$$

บทนิยาม 2.30 ให้ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ (nonexpansive mapping) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก $x, y \in X$ จะได้ว่า

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

บทนิยาม 2.31 ให้ $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ (locally nonexpansive mapping) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก $x \in X$ จะมีย่านจุด U_x ของ x ที่ทำให้

$$d(f(y), f(z)) \leq d(y, z)$$

สำหรับทุกสมาชิก $y, z \in U_x$

ข้อสังเกต 2.32

1. ถ้า f เป็นการส่งคอนแทรกชันแล้ว f จะเป็นการส่งคอนแทรกทีฟ และ ถ้า f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟแล้ว f จะเป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ
2. ถ้า f เป็นการส่งคอนแทรกชัน (การส่งคอนแทรกทีฟ หรือ การส่งนอนเอกแพนซีฟ) แล้ว f จะเป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ (การส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ หรือ การส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่)

ทฤษฎีบท 2.33 ถ้า $f\colon (X,d) \to (X,d)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟแล้ว f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.34 ถ้า (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ และ $f\colon (X,d) \to (X,d)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.35 ให้ (x_n) เป็นลำดับ (sequence) ของจุดใน X แล้วเราจะกล่าวว่า (x_n) ลู่เข้าสู่ $x \in X$ เขียนแทนด้วย $(x_n) \to x$ ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $d(x_n, x) < \varepsilon$ สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก $n > N$

เราจะกล่าวว่า (x_n) เป็นลำดับโคชี (Cauchy sequence) ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก $m, n > N$

ทฤษฎีบท 2.36 ให้ (X,d) และ (Y,D) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง โดยที่ X เป็นปริภูมิกระชับ และ $f\colon (X,d) \to (Y,D)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว f เป็นสมานสัณฐาน

ทฤษฎีบท 2.37 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean Value Theorem)
ให้ $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า f หาอนุพันธ์ได้บน (a,b) จะได้ว่ามี $c \in (a,b)$ ซึ่ง

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

ตัวอย่าง 2.38 ให้ $X = [0, 1]$ และ d เป็นเมตริกปกติบน X ให้ $f\colon (X,d) \to (X,d)$ นิยามโดย $f(x) = \sin x$ เราจะได้ว่า f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ แต่ f ไม่เป็นการส่งคอนแทรกชัน

พิสูจน์ ประการแรกเราจะแสดงว่า f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x > y$

เนื่องจากว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยเราจะได้ว่า จะมี $z \in (y, x)$ ซึ่ง $f(x) - f(y) = f'(z)\,(x-y)$

นั่นคือ เราจะได้ว่าจะมี $z \in (y, x)$ ที่ $\sin x - \sin y = \cos z\,(x-y)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(\sin x, \sin y) \\ &= |\sin x - \sin y| \\ &= |\cos z\,(x-y)| \\ &= |\cos z|\,|(x-y)| \end{aligned}$$

$< \ |x-y| \quad$ (เนื่องจาก $z \neq 0$ จึงทำให้ $\cos z < 1$)

$= \ d(x, y)$

เพราะฉะนั้น f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

ต่อไปเราจะแสดงว่า f ไม่เป็นการส่งคอนแทรกชัน

สมมติว่า f เป็นการส่งคอนแทรกชัน

นั่นคือ จะมี $M \in [0, 1)$ ที่ทำให้

$$d(f(x),f(y)) \ \leq \ M\,\mathrm{d}(x, y) \quad \text{สำหรับทุก } x,\ y \ \in \ X$$

เพราะฉะนั้น $d(f(x),f(0)) \ \leq \ M\,\mathrm{d}(x, 0)$ สำหรับทุก $\mathrm{x} \in \mathrm{X} - \{0\}$

นั่นคือ $\quad d(\sin x,\ 0) \ \leq \ M\,d(x, 0)$

$$|\sin x| \ \leq \ M\,|x|$$

$$\frac{\sin\ x}{x} \ \leq \ M \qquad \text{(เนื่องจาก } x \text{ และ } \sin x \text{ มากกว่า } 0\text{)}$$

เราจะได้ว่า

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin\ x}{x} \ \leq \ \lim_{y \to 0} M$$

$$1 \ \leq \ M$$

จึงเกิดข้อขัดแย้งที่ว่า $M \in [0, 1)$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นการส่งคอนแทรกชัน □

จากตัวอย่าง 2.38 เรามีตัวอย่างว่ามีฟังก์ชัน $f: (X, d) \to (X, d)$ ที่เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ แต่ f ไม่เป็นการส่งคอนแทรกชัน ส่วนฟังก์ชันที่เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ แต่ไม่เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ ก็คือฟังก์ชันเอกลักษณ์บนปริภูมิอิงระยะทางปกติของจำนวนจริง

ในทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทจาก [2] ได้กล่าวไว้ดังต่อไปนี้

__ทฤษฎีบท 2.39__ ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ ถ้า $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นทั้งการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ และ การส่งคอนแทรกทีฟ แล้ว $f: (X, d) \to (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกชัน

__พิสูจน์__ สมมติว่า $f: (X, d) \to (X, d)$ ไม่เป็นการส่งคอนแทรกชัน ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะมี $x_n\,,\ y_n \in X$ ซึ่ง

$$d(f(x_n), f(y_n)) \ > \ (1-\frac{1}{n})d(x_n,\ y_n) \qquad (*)$$

เราจะเห็นได้ว่า $x_n \neq y_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > 1$

เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับ เราขอสมมติโดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า $(x_n)\to a$ และ $(y_n)\to b$ (เราอาจใช้ลำดับย่อยของ (x_n) แทน (x_n) และ (y_n) แทน (y_n) ถ้าจำเป็น)

ในขั้นตอนต่อไปเราจะพิจารณา 2 กรณีซึ่งนำไปสู่ข้อขัดแย้งดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $a \neq b$

จาก (*) ใช้ความต่อเนื่องของเมตริกและฟังก์ชัน f เราจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}[d(f(x_n), f(y_n))] \geq \lim_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{n})d(x_n, y_n)]$$

$$d(f(\lim_{n\to\infty} x_n), f(\lim_{n\to\infty} y_n)) \geq (1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)$$

$$d(f(a), f(b)) \geq d(a, b)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับการที่ f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

กรณีที่ 2 $a = b$

เนื่องจากว่า f เป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ ดังนั้น จะมีย่านจุด U ของ a และ $M \in [0, 1)$ ที่ทำให้

$$d(f(x), f(y)) \leq M\, d(x, y)$$

สำหรับทุกสมาชิก $x, y \in U$

และเนื่องจาก $(x_n)\to a$, $(y_n)\to b$ จะได้ว่า เมื่อ n มากเพียงพอแล้ว โดยนิยามการลู่เข้าของลำดับ เรามี U_{i} ซึ่ง x_n , $y_n \in U_{\text{i}}$ เพราะฉะนั้น

$$(1-\frac{1}{n})\, d(x_n, y_n) < d(f(x_n), f(y_n)) \leq M\, d(x_n, y_n)$$

เนื่องจาก $x_n \neq y_n$ ทำให้ได้ว่า $M > 1-\frac{1}{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > 1$

เราจะได้ว่า

$$M = \lim_{n\to\infty} M \geq \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1$$

นั่นคือ $M \geq 1$ ซึ่งขัดแย้งเพราะว่า $M \in [0, 1)$

จากการพิจารณาทั้งสองกรณี ทำให้เราได้ว่า f เป็น contraction mapping □

<u>ทฤษฎีบท 2.40</u> ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบเชื่อมโยงที่กระชับและ $f:(X, d)\to (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ แล้ว จะมีเมตริก D ที่สมมูลกับเมตริก d ที่ทำให้ $f: (X, D) \to (X, D)$ เป็นการส่งคอนแทรกชัน

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก f เป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $x \in X$ จะมีย่านจุด U_x ของ x และ $M_x \in [0, 1)$ ที่ทำให้

$$d(f(y), f(z)) \leq M_x\, d(y, z)$$

สำหรับทุกสมาชิก $y, z \in U_x$

เราจะเห็นได้ว่า $\{U_x\}_{x\in X}$ เป็นเซตปกเปิดของ X และ เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับ เราจะได้ว่า X จะมีเซตปกเปิดย่อยจำกัด เขียนแทนด้วย $X = \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}$

ให้ $M = \max\{M_{x_j} \mid j = 1,2,\ldots, m\}$

ดังนั้น โดย Lebesgue Number Lemma จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับทุกเซต $A \subseteq X$ ที่มีเส้นผ่านกลางน้อยกว่า δ แล้ว $A \subseteq U_{x_j}$ สำหรับบาง $j = 1, 2,\ldots, m$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $x, y \in X$ และ $d(x, y) < \delta$ แล้ว $d(f(x), f(y)) \leq M\, d(x, y)$

ในขั้นตอนต่อไป ให้ $x \in V_x = B_d(x; \frac{\delta}{2}) \subseteq X$

เราจะเห็นได้ว่า $\{V_x\}_{x\in X}$ เป็นเซตปกเปิดของ X และ เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับ จะมีเซตปกเปิดย่อยจำกัด เราเขียนแทนด้วย $\{ V_i \mid i = 1,2,\ldots, n\}$

ให้ $x, y \in X$

โดยทฤษฎีบท 2.21 จะมีลูกโซ่เชิงเดียวที่เป็นเซตย่อยของ $\{ V_i \mid i = 1,2,\ldots, n\}$ จาก x ไป y โดยไม่เสียนัยทั่วไปเราเขียนแทนด้วย $V_1, V_2,\ldots, V_j$ โดยที่ $1 \leq j \leq n$

ให้ $a_i \in V_i \cap V_{i+1}$ สำหรับทุก $i = 1, 2,\ldots, j\text{-}1$ จะได้ว่า

$$d(x, y) \leq d(x, a_1) + d(a_1, a_2) + \ldots + d(a_{j-1}, y) \leq j\delta \leq n\delta$$

นั่นคือ เราได้ว่า $d(x, y) \leq n\delta$

นอกจากนี้เรายังได้ว่า

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &\leq d(f(x), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + \ldots + d(f(a_{j-1}), f(y)) \\ &\leq M\, d(x, a_1) + M\, d(a_1, a_2) + \ldots + M\, d(a_{j-1}, y) \\ &\leq M[d(x, a_1) + d(a_1, a_2) + \ldots + d(a_{j-1}, y)] \\ &\leq M n\delta \end{aligned}$$

และสำหรับ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $d(f^k(x), f^k(y)) \leq M^k n\delta$

ดังนั้น $d(f^{k+1}(x), f^{k+1}(y)) \leq M\, d(f^k(x), f^k(y)) \leq M^{k+1} n\delta$

นั่นคือ เราจะได้ว่า $d(f^k(x), f^k(y)) \leq M^k n\delta$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ เรานิยามเมตริก D สำหรับ X ดังนี้

$$D(x, y) = d(x, y) + d(f(x), f(y)) + d(f^2(x), f^2(y)) + d(f^3(x), f^3(y)) + \ldots$$

ประการแรกเราจะแสดงว่าการนิยามเมตริก D เป็นไปอย่างแจ่มชัด นั่นคือ $D(x, y)$ หาค่าได้ เราจะพิจารณาค่าต่อไปนี้

$$\begin{aligned} D(x, y) &= d(x, y) + d(f(x), f(y)) + d(f^2(x), f^2(y)) + d(f^3(x), f^3(y)) + \ldots \\ &\leq n\delta + Mn\delta + M^2 n\delta + M^3 n\delta + \ldots \\ &\leq n\delta(1 + M + M^2 + M^3 + \ldots) \\ &\leq \frac{n\delta}{1-M} \end{aligned}$$

นั่นคือ การนิยามเมตริก D เป็นไปอย่างแจ่มชัด

ประการที่ 2 เราจะแสดงว่า D นั้นเป็นเมตริกสำหรับ X

เนื่องจากว่า d เป็นเมตริก ดังนั้นสำหรับแต่ละ $x, y \in X$ เราได้ว่า $D(x, y) \geq 0$ และ

ถ้า $x = y$ แล้ว $D(x, y) = 0$ ในทางกลับกัน ถ้า $D(x, y) = 0$ แล้ว

$$0 = D(x, y) \geq d(x, y) \geq 0$$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$ แต่ d เป็นเมตริก เพราะฉะนั้น $x = y$

สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} D(x, y) &= d(x, y) + d(f(x), f(y)) + d(f^2(x), f^2(y)) + d(f^3(x), f^3(y)) + \ldots \\ &= d(y, x) + d(f(y), f(x)) + d(f^2(y), f^2(x)) + d(f^3(y), f^3(x)) + \ldots \\ &= D(y, x) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $D(x, y) = D(y, x)$

เราจะแสดงว่าอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมเป็นจริง ให้ $x, y, z \in X$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} D(x, z) &= d(x, z) + d(f(x), f(z)) + d(f^2(x), f^2(z)) + d(f^3(x), f^3(z)) + \ldots \\ &\leq [d(x, y) + d(f(x), f(y)) + d(f^2(x), f^2(y)) + d(f^3(x), f^3(y)) + \ldots] \\ &\quad + [d(y, z) + d(f(y), f(z)) + d(f^2(y), f^2(z)) + d(f^3(y), f^3(z)) + \ldots] \\ &\leq D(x, y) + D(y, z) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น D เป็นเมตริกสำหรับ X

ต่อไปเราจะแสดงว่า เมตริก d สมมูลกับเมตริก D

เนื่องจาก (X, d) และ (X, D) เป็นปริภูมิอิงระยะทางโดยที่ X เป็นปริภูมิกระชับ เพียงพอที่เราจะแสดงว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ $i : (X, d) \rightarrow (X, D)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta' = \min \{ \delta, \varepsilon(1-M) \}$

ดังนั้น ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $d(x, y) < \delta' \leq \delta$ เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
D(x, y) &= d(x, y) + d(f(x), f(y)) + d(f^2(x), f^2(y)) + d(f^3(x), f^3(y)) + \ldots \\
&\leq d(x, y) + M\, d(x, y) + M^2\, d(x, y) + M^3\, d(x, y) + \ldots \\
&= (1 + M + M^2 + M^3 + \ldots)\, d(x, y) \\
&= \frac{d(x, y)}{1 - M} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

นั่นคือ เมตริก d สมมูลกับเมตริก D

ในขั้นตอนต่อไป เราจะแสดงว่า $f: (X, D) \to (X, D)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

ให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
D(x, y) &= d(x, y) + d(f(x), f(y)) + d(f^2(x), f^2(y)) + d(f^3(x), f^3(y)) + \ldots \\
&= d(x, y) + D(f(x), f(y)) \\
&> D(f(x), f(y))
\end{aligned}
$$

นั่นคือ f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

ประการสุดท้าย เราจะแสดงว่า $f : (X, D) \to (X, D)$ ยังคงเป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ โดยที่ยังใช้ค่า δ และ M ค่าเดิม

ให้ $x \in X$ ดังนั้น $x \in V_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ $y, z \in V_i$

ดังนั้น $d(y, z) < \delta$ เราจะได้ว่า $d(f(y), f(z)) \leq M\, d(y, z)$

เพราะฉะนั้น
$$
\begin{aligned}
D(f(y), f(z)) &= d(f(y), f(z)) + d(f^2(y), f^2(z)) + d(f^3(y), f^3(z)) + \ldots \\
&\leq \mathrm{M}\, d(y, z) + M\, d(f(y), f(z)) + M\, d(f^2(y), f^2(z)) \\
&= M\, [d(y, z) + d(f(y), f(z)) + d(f^2(y), f^2(z))\,] \\
&= M\, D(y, z)
\end{aligned}
$$

นั่นคือ f เป็น การส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ โดยที่ยังใช้ค่า δ และ M ค่าเดิม

จากทฤษฎีบท 2.39 เราจะได้ว่า f เป็นการส่งคอนแทรกชัน □

ทฤษฎีบท 2.41 ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางเชื่อมโยงที่กระชับและ $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ เป็น การส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่แล้ว จะมีเมตริก D ที่สมมูลกับเมตริก d ซึ่ง $f : (X, D) \longrightarrow (X, D)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

พิสูจน์ เนื่องจาก $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ เป็นส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ ดังนั้น สำหรับแต่ละ $x \in X$ จะมีย่านจุด U_x ของ x ที่ทำให้สำหรับทุกสมาชิก $y, z \in U_x$ ซึ่ง $y \neq z$ จะได้ว่า

$$d(f(y), f(z)) < d(y, z)$$

เราจะเห็นว่า $\{U_x\}_{x \in X}$ เป็นเซตปกเปิดสำหรับ X

โดย Lebesgue number lemma จะได้ว่าจะมี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $d(x, y) < \delta$ แล้ว $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$

สำหรับ $p, q \in X$ เรานิยาม

$$D(p,q) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = p, a_1, \ldots, a_n = q \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } p \text{ ไป } q\right\}$$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้เซตที่เรานิยามนั้น ไม่ใช่เซตว่าง และ สำหรับ $p, q \in X$, $d(p, q) \geq 0$ นั่นคือ 0 เป็นขอบเขตล่างตัวหนึ่งของเซตที่เรานิยาม ดังนั้นเราจะได้ว่าการนิยามเมตริก D เป็นไปอย่างแจ่มชัด

ประการแรกเราจะแสดงว่า D เป็นเมตริกสำหรับ X ให้ $x, y, z \in X$ เราเห็นได้ชัดว่า $D(x, y) \geq 0$ และ $D(x, y) = D(y, x)$

ถ้า $x = y$ แล้ว $D(x, y) = d(y, x) = 0$ และ

ถ้า $D(x, y) = 0$ เราให้ $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ เป็น $\frac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก $x_0 = x$ ไป $x_n = y$ แล้ว

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$$

ดังนั้น $d(x, y)$ เป็นขอบล่างตัวหนึ่งของเซต

$$\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y\right\}$$

นั่นคือ $0 \leq d(x, y) \leq D(x, y) = 0$ เพราะฉะนั้น $x = y$

เราจะแสดงว่าอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมเป็นจริง ให้ $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ และ $y_0 = y, y_1, \ldots, y_m = z$ เป็น $\frac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก $x_0 = x$ ไป $x_n = y$ และ $y_0 = y$ ไป $y_m = z$ ตามลำดับ

$$D(x, z) \leq d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) + d(y_0, y_1) + \ldots + \mathrm{d}(y_{m-1}, y_m)$$

$$D(x, z) - (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)) \leq d(y_0, y_1) + \ldots + \mathrm{d}(y_{m-1}, y_m)$$

ดังนั้น $D(x, z) - (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n))$ เป็นขอบล่างตัวหนึ่งของเซต

$$\left\{ \sum_{i=0}^{m-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = y, a_1, \ldots, a_m = z \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } y \text{ ไป } z \right\}$$

เพราะฉะนั้น $D(x, z) - (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)) \leq D(y, z)$

ดังนั้น $D(x, z) - D(y, z) \leq (d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n))$

ในทำนองเดียวกัน $D(x, z) - D(y, z)$ เป็นขอบล่างตัวหนึ่งของเซต

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y \right\}$$

เพราะฉะนั้น $D(x, z) - D(y, z) \leq D(x, y)$

นั่นคือ $D(x, z) \leq D(x, y) + D(y, z)$

ประการต่อไปเราจะแสดงว่าเมตริก D สมมูลกับเมตริก d เนื่องจาก (X, d) และ (X, D) เป็นปริภูมิอิงระยะทางโดยที่ (X, d) เป็นปริภูมิกระชับ เพียงพอที่เราจะแสดงว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ $i : (X, d) \rightarrow (X, D)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta' = \min\{\frac{\delta}{2}, \varepsilon\}$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $d(x, y) < \delta' \leq \frac{\delta}{2}$

เราจะได้ว่า $D(x, y) = d(x, y) < \delta' \leq \varepsilon$

นั่นคือเมตริก D สมมูลกับเมตริก d

ประการสุดท้ายเราจะแสดงว่า $f: (X, D) \longrightarrow (X, D)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ

ให้ $x, y \in X$ จะมี $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ เป็น $\frac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก $x_0 = x$ ไป $x_n = y$

เนื่องจาก $f: (X, d) \longrightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ ดังนั้น

$$d(f(x_i), f(x_{i+1})) < d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\delta}{2}$$

สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

ดังนั้น $f(x_0) = f(x), f(x_1), \ldots, f(x_n) = f(y)$ เป็น $\frac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก $f(x_0) = f(x)$ ไป $f(x_n) = f(y)$

ดังนั้น $$\sum_{i=0}^{n-1} d(f(x_i), f(x_{i+1})) < \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$$

เราจะได้ว่า

$$\inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y \right\}$$

$$\leq \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y \right\}$$

$$= D(x,y)$$

แต่เนื่องจาก

$$\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก x ไป } y \right\}$$

$$\subseteq \left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid f(a_0) = f(x), a_1, \ldots, f(a_n) = f(y) \right.$$

$$\left. \text{เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } f(x) \text{ ไป } f(y) \right\}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก x ไป } y \right\}$$

$$\geq \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(a_i), f(a_{i+1})) \mid f(a_0) = f(x), a_1, \ldots, f(a_n) = f(y) \right.$$

$$\left. \text{เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } f(x) \text{ ไป } f(y) \right\}$$

$$= D(f(x), f(y))$$

เพราะฉะนั้น

$$D(f(x), f(y)) \leq D(x, y)$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $D(f(x), f(y)) < D(x, y)$

ข้อสังเกต

เราเห็นว่า $\left\{B_d(x; \frac{\delta}{4})\right\}_{x \in X}$ เป็นเซตปกเปิดของ X และเนื่องจาก X เป็นปริภูมิที่กระชับ เราจะได้ว่า $\left\{B_d(x_i; \frac{\delta}{4})\right\}_{i=1}^{N}$ เป็นเซตปกเปิดย่อยจำกัดของ X

ให้ $x, y \in X$

ดังนั้น จะมี $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ เป็น $\frac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก $x_0 = x$ ไป $x_n = y$

ในการพิจารณาค่าขอบเขตล่างมากที่สุด ถ้ามี 3 จุดใดๆ อยู่ในบอลเปิดเดียวกัน เพียงพอที่เราจะเลือกเพียงแค่สองจุดเท่านั้น ดังนั้น เราสามารถเขียน $\dfrac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก x ไป y ให้เป็น $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_n = y$ ทำได้โดย ถ้า $n < N$ เราก็เลือก x_n ซ้ำหลายๆครั้งจนมีจำนวนจุดเท่ากับ $N+1$ จุด ดังนั้น

$$D(x,y) = \inf\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} d(a_i, a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y \text{ เป็น } \frac{\delta}{2}\text{- ลูกโซ่ของจุดจาก } x \text{ ไป } y \right\}$$

ดังนั้นสำหรับ $x, y \in X$ ให้ $A = \{x\} \times X \times X \times \ldots \times X \times \{y\}$ (มี X ทั้งหมด $N-1$)

เราจะได้ว่า A เป็นเซตกระชับ

ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$f(x, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, y) = d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{N-1}, y)$

เราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

พิจารณาเซต

$$S = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N) \mid d(a_i, a_{i+1}) \le \frac{\delta}{2}, i = 0, 1, \ldots, N-1, a_0 = x, a_N = y\}$$

เราจะเห็นได้ว่า $S \subseteq A$

จะแสดงว่า S เป็นเซตกระชับ เพียงพอที่เราจะแสดงว่า S เป็นเซตปิด

ให้ $(x, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, y) \in Cl_A(S)$

ดังนั้นจะมีลำดับใน S ที่ลู่เข้าสู่ $(x, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, y)$ สมมติให้เป็น $(x, a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{N-1,n}, y)$

สำหรับ $i = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$ เราพิจารณา

$$\begin{aligned} d(b_i, b_{i+1}) &= d(\lim_{n\to\infty} a_{i,n}, \lim_{n\to\infty} a_{i+1,n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(a_{i,n}, a_{i+1,n}) \\ &\le \lim_{n\to\infty} \frac{\delta}{2} \\ &= \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $(x, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, y) \in S$

นั่นคือ S เป็นเซตกระชับ

เราจะได้ว่า $f_{|S}$ มีค่าน้อยสุดใน S สมมติเป็น

$f(x, c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}, y) = d(x, c_1) + d(c_1, c_2) + \ldots + d(c_{N-1}, y)$

นั่นคือ

$$d(x,\ c_1)+d(c_1,\ c_2)+\ldots+d(c_{N\text{-}1},\ y)$$

$= \ \inf\left\{\sum_{i=0}^{N-1} d(a_i,a_{i+1}) \mid a_0 = x, a_1,\ldots,a_n = y\right.$ เป็น $\dfrac{\delta}{2}$- ลูกโซ่ของจุดจาก x ไป y $\left.\right\}$

$= \ D(x\ ,y)$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} D(f(x), f(y)) &\le d(f(x), f(c_1)) + d(f(c_1), f(c_2)) + \ldots + d(f(c_{N\text{-}1}), f(y)) \\ &< d(x,\ c_1) + d(c_1, c_2) + \ldots + d(c_{N\text{-}1},\ y) \\ &= D(x,\ y) \end{aligned}$$

นั่นคือ f เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ $\square$