บทที่ 1

บทนำ

การศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีจุดตรึง (Fixed Point Theory) เราจะศึกษาการคงอยู่ของจุดในปริภูมิต่าง ๆ ว่า ในปริภูมิใดบ้าง เมื่อเรามีการส่ง (mapping) $f: X \rightarrow X$ ใดบ้างที่มีจุดตรึง ซึ่งตัวอย่างการส่งที่เราจะศึกษาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ คือ การส่งคอนแทรกชัน การส่งคอนแทรกทีฟ และการส่งนอนเอกแพนซีฟ ทั้งแบบวงกว้างและเฉพาะที่

จาก Banach Contraction Principle เราทราบว่า ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ (complete metric space) และ $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกชัน แล้ว f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว และในทำนองเดียวกัน ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ และ $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ แล้ว f จะมี จุดตรึงเพียงจุดเดียว สำหรับในกรณีของการส่งนอนเอกแพนซีฟ เราสรุปไม่ได้ว่า บนปริภูมิอิงระยะทางจะมีจุดตรึงหรือไม่ และ ถ้ามีจุดตรึงเราก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น แต่เรามีทฤษฎีจาก [1] กล่าวคือ ถ้า H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต $X \subseteq H$ โดยที่ X เป็นเซตคอนเวกซ์ที่มีขอบเขตและเป็นเซตปิด และ $f: X \rightarrow X$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟ แล้ว f จะมีจุดตรึง

จาก [2] เราทราบว่า ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบเชื่อมโยงที่กระชับ และ $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ เป็นการส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ (หรือ การส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่) แล้ว จะมีเมตริก D ซึ่งสมมูลกับเมตริก d ที่ทำให้ $f: (X, D) \rightarrow (X, D)$ เป็น การส่งคอนแทรกชัน (หรือ การส่งคอนแทรกทีฟ) และ ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ และ $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ เป็นทั้ง การส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ และ การส่งคอนแทรกทีฟ แล้ว $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ เป็น การส่งคอนแทรกชัน

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ เราจะแสดงว่า ถ้า $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ แล้ว จะมีเมตริก D ที่สมมูลกับเมตริก d ที่ทำให้ $f: (X, D) \rightarrow (X, D)$ เป็น การส่งนอนเอกแพนซีฟ แต่ ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ และ $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ เป็นทั้ง การส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่ และการส่งนอนเอกแพนซีฟ แล้ว จะไม่เป็นการส่งคอนแทรกทีฟ โดยพิจารณาได้จากตัวอย่าง 3.1

จากผลที่ได้จากข้างต้น ทำให้เราได้ว่า ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบเชื่อมโยงที่กระชับ และ $f:(X,d)\longrightarrow(X,d)$ เป็น การส่งคอนแทรกชันเฉพาะที่ (หรือ การส่งคอนแทรกทีฟเฉพาะที่) แล้ว f จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว ส่วนในกรณีของ การส่งนอนเอกแพนซีฟ ถ้า H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $X\subseteq H$ โดยที่ X เป็นเซตคอนเวกซ์ที่มีขอบเขตทุกส่วน (totally bounded) และเป็นเซตปิด ถ้า $f:X\longrightarrow X$ เป็นการส่งนอนเอกแพนซีฟเฉพาะที่ แล้ว f จะมีจุดตรึง