บทที่ 2

หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

แรงที่ยานพาหนะกระทำต่อสะพานเป็นข้อมูลที่สำคัญสำหรับการออกแบบสะพาน เพราะจะนำมาใช้ในการพิจารณาหาน้ำหนักจร (live load) ที่ใช้ในมาตรฐานของการออกแบบสะพาน การวัดแรงดังกล่าวโดยตรงด้วยการใช้เครื่องมือที่ติดตั้งไว้กับรถจะเสียค่าใช้จ่ายสูงและมีความเอนเอียง (bias) ในการเก็บข้อมูล ในขณะที่ผลที่ได้จากการคำนวณจากการจำลองรูปแบบสามารถทำได้สะดวก แต่ก็จะมีความผิดพลาดเนื่องจากแบบจำลองที่คลาดเคลื่อน การรวมผลของตัวแปรต่างๆเข้าไปในแบบจำลองจะทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากขึ้น ระบบต่างๆที่ได้พัฒนาขึ้นมาสำหรับ weigh-in-motion นั้นจะวัดเฉพาะน้ำหนักรถทางสถิตเท่านั้น เทคนิคที่ใช้ในการหาน้ำหนักรถจากปฏิกริยาตอบสนองของการสั่นไหวของสะพานนั้นจึงมีความจำเป็น โดยตัวแปรต่างๆของสะพานและของรถจะถูกนำมาคิดรวมด้วยสำหรับปฏิกริยาตอบสนองที่ถูกวัด ซึ่งค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับวิธีนี้จะมีค่าน้อยกว่าการวัดโดยตรง

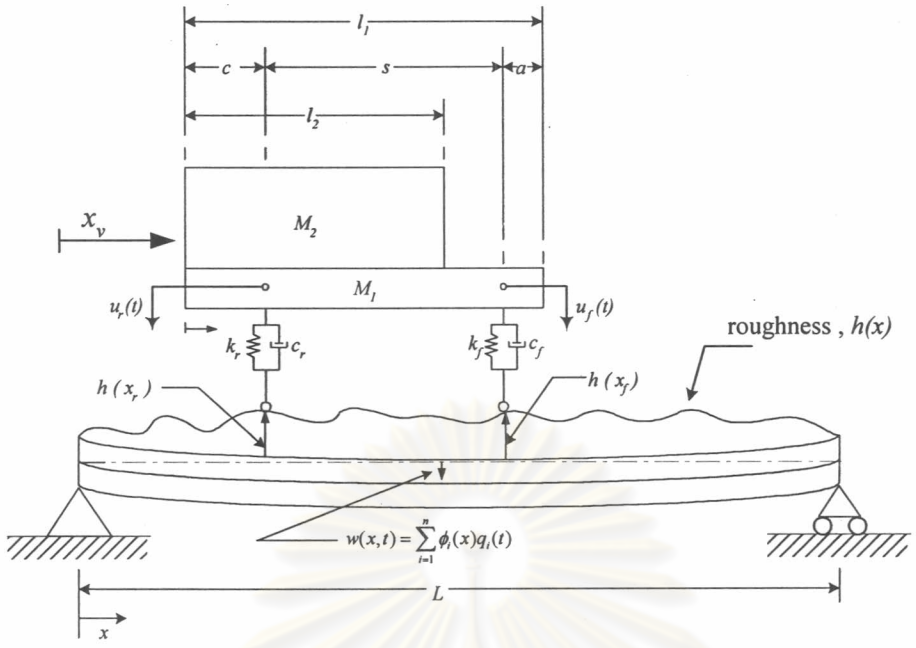
2.1 การสร้างรูปแบบจำลองเพื่อจำลองความเครียด

2.1.1 การจำลองรูปแบบปฏิกริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

โดยเริ่มจากการใช้แบบจำลองของสะพานกับรถบรรทุกซึ่งจะถูกนำมาพิจารณาร่วมกันเพื่อที่จะให้ปฏิกริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุก มีความใกล้เคียงกับความจริงมากขึ้นความขรุขระของผิวถนนบนสะพานจึงถูกนำมาพิจารณาด้วย

ซึ่งแบบจำลองของสะพานกับรถบรรทุกนั้นได้แสดงในรูปที่ 2.1 โดยสะพานจะถูกจำลองรูปแบบเป็น 2 มิติ โดยมีจุดรองรับเป็นแบบธรรมดา และมี n องศาความอิสระ (degree of freedom) คือ โหมดเนื่องจากการดัด (bending mode) จำนวน n โหมด ผลของความหน่วง (damping) จะถูกรวมเข้าไปในการวิเคราะห์ด้วย โดยจะคิดเป็นความหน่วงเชิงเส้นในรูปแบบโหมด (linear modal damping) L คือ ความยาวของสะพาน การสั่นไหวของสะพานสามารถเขียนได้เป็น $w(x,t)$ ซึ่งถูกสมมติให้เป็นผลรวมของโหมดของการสั่นไหว n โหมด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.1 รูปแบบจำลองระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)q_i(t) \qquad i = 1,2,\ldots, n \qquad (2.1)$$

โดยที่

$$\phi_i(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1,2,\ldots, n \qquad (2.2)$$

ส่วนรถบรรทุกจะพิจารณารูปแบบให้อยู่ในระนาบ โดยมี 2 องศาความอิสระ (degree of freedom) ซึ่งลักษณะแบบจำลองของรถบรรทุก สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.1 โดยที่เพลาคู่หลังของรถบรรทุกจะถูกสมมติให้เสมือนเป็นเพลาเดี่ยว ระบบการสั่นไหวของเพลารถสามารถแทนได้ด้วยชุดของความหน่วงและสปริง โดยมีสมมติฐานว่าพฤติกรรมอยู่ในช่วงอิลาสติกเชิงเส้น ดังนั้นค่าสติฟเนสของสปริงจึงสมมติให้เป็นค่าคงที่

การจำลองรูปแบบมวลของรถบรรทุก จะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นมวลของรถและส่วนที่เป็นมวลของการบรรทุกสิ่งของ มวลของรถจะแทนด้วย M_1 และมวลส่วนที่บรรทุกสิ่งของจะแทนด้วย M_2 จากรูปที่ 2.1 จะแสดงระยะต่าง ๆ ของตัวรถ โดยที่ a คือ ระยะทางที่ยื่นออกไปด้านหน้า c คือ ระยะทางที่ยื่นออกไปด้านหลัง s คือ ระยะห่างระหว่างเพลา l_1 คือ ความยาวของตัวรถทั้งหมด l_2 คือ ความยาวของส่วนที่ใช้บรรทุกของ k_f และ k_r คือ สติฟเนสของสปริงที่เพลาหน้าและเพลาหลังตามลำดับ c_f และ c_r คือ ความหน่วงที่เพลาหน้าและเพลาหลังตามลำดับ

จากการจำลองรูปแบบของรถบรรทุกให้มี 2 องศาความอิสระ จะทำให้รถบรรทุกสามารถสั่นไหวได้เฉพาะในแนวดิ่งเท่านั้น โดยที่องศาความอิสระแรกจะอยู่ที่ปลายด้านหน้าของตัวรถและองศาความอิสระที่สองจะอยู่ที่ปลายด้านหลังของตัวรถ

2.1.2 การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถบรรทุก

ทฤษฎีและหลักการในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน ได้อ้างอิงมาจากงานวิจัยของ Polakit Phanapavudhikul, 2003 โดยสมการการเคลื่อนที่ของปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน สามารถหาได้จากสมการของลากรานจ์ (lagrange equation) การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งของสะพานในโหมดของการดัดจำนวน 5 โหมด จะถูกเลือกเป็นพิกัดทั่ว-ไป (generalized coordinates) q_1 q_2 q_3 q_4 และ q_5 ขณะที่ทำการเปลี่ยนตำแหน่งสัมบูรณ์ของรถที่ตำแหน่งด้านหน้าและด้าน-หลัง จะกำหนดให้เป็น u_f และ u_r ตามลำดับ

ซึ่งจากการแก้สมการการเคลื่อนที่ของปฏิกิริยาตอบสนองซึ่งกันและกัน ก็จะสามารถหาการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวดิ่งของสะพานซึ่งเป็นพิกัดทั่วไป ในแต่ละโหมดของการดัดได้ และจะสามารถหาการสั่นไหวของสะพาน ได้จากสมการที่ 2.1

2.2 การหาน้ำหนักรถขณะเคลื่อนที่บนสะพาน

จากหัวข้อที่แล้วจะพบว่าการหาน้ำหนักโดยใช้วิธีเชิงโหมดนั้นไม่เหมาะสมสำหรับนำไปการใช้งานจริงเท่าไรนัก เนื่องจากวิธีเชิงโหมดนี้จะต้องทราบคุณสมบัติต่างๆของรถบรรทุกที่จะหาน้ำหนักเช่น สติฟเนสความหน่วง เป็นต้น ตลอดจนความขรุขระและลักษณะของจุดรองรับของสะพานที่ใช้ในการทดสอบ ดังนั้นจึงได้ทำการศึกษางานวิจัยต่างๆ ในปัจจุบันที่เกี่ยวข้องกับการหาน้ำหนักรถบรรทุกเพื่อหาแนวทางที่จะใช้ในการหาน้ำหนัก โดยงานวิจัยต่างๆ ในปัจจุบันที่เกี่ยวข้องกับการหาน้ำหนักรถที่กำลังเคลื่อนที่ จะมีวิธีการหลักๆที่ใช้กันอยู่ 3 วิธีคือ

1. วิธีโดเมนของเวลา (Time Domain Method) เป็นการจำลองรูปแบบโครงสร้างและแรง ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง โดยที่แรงจะถูกจำลองให้เป็นฟังก์ชันที่เป็นช่วง (step functions) ในช่วงเวลาเล็กๆ สมการการเคลื่อนที่นี้อาจจะแสดงในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมด (modal coordinate) และจะทำการแก้สมการในโดเมนของเวลา ซึ่งแรงจะสามารถหาได้โดยการใช้หลักของซุปเปอร์โพซิชันท์เชิงโหมด (modal superposition principle)

2 วิธีโดเมนของความถี่และเวลา (Frequency and Time Domain Method) จะทำฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม (fourier transforms) ในสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมดเช่นเดียวกัน ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของปฏิกริยาตอบสนองและของแรงจะถูกเชื่อมโยงอยู่ในโดเมนของความถี่ (frequency domain) และแกนพิกัดเวลา (time histories) ของแรงจะสามารถหาได้โดยตรงโดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด (least-squares method)

3. วิธีเชิงโหมด (Modal Approach) เป็นการหาแรงในพิกัดเชิงโหมด การเปลี่ยนตำแหน่งที่วัดได้จะถูกเปลี่ยนเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงโหมด (modal displacement) โดยทำการสมมติฟังก์ชันประมาณ (shape function) ซึ่งความเร็วเชิงโหมด (modal velocities) และความเร่งเชิงโหมด (modal acceleration) สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงโหมด หลังจากนั้นจะหาแรงโดยทำการแก้สมการ (uncoupled equation) ใน พิกัดเชิงโหมด

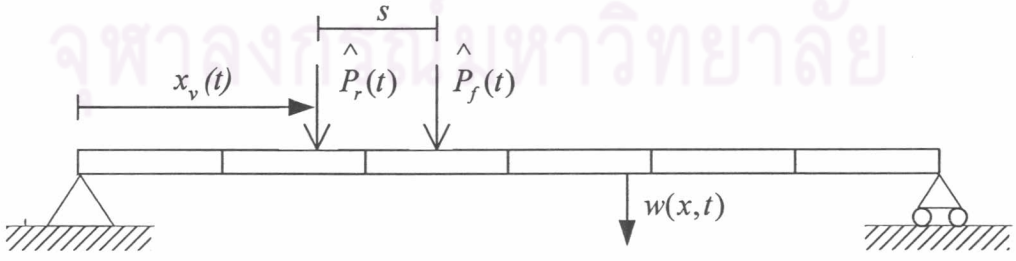
ทั้ง 3 วิธีที่กล่าวถึงนี้ต้องทำการคำนวณเกี่ยวกับอินเวอร์สของเมตริกซ์ ซึ่งจะใช้เวลาในการคำนวณนานและเกิดสภาวะบกพร่อง (ill-conditioned) ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของแกนเวลา

ในงานวิจัยครั้งนี้ได้นำเทคนิคการหาแรงที่กำลังเคลื่อนที่โดยการใช้วิธีการไดนามิคโปรแกรมมิง (dynamic programming) ซึ่งสามารถหาแรงได้ในโดเมนของเวลาจากการใช้รีเคอร์สีฟฟอร์มูลา (recursive formula) โดยมีสมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณดังนี้

1. การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของระบบ เช่น สติฟเนส, ความหน่วง (damping) และมวล ภายใต้แรงภายนอกจะไม่นำมาพิจารณา
2. ความหน่วง (damping) ของโครงสร้างจะถูกนำมาวิเคราะห์ในการคำนวณ
3. โครงสร้างไม่จำเป็นจะต้องอยู่ในสภาวะหยุดนิ่งก่อนที่จะมีแรงภายนอกมากระทำ
4. ไม่จำกัดประเภทของแรงที่จะหา

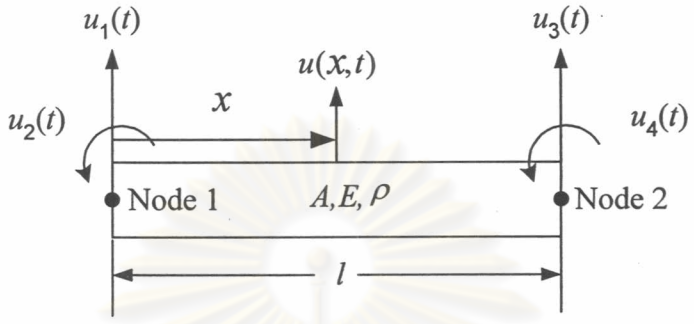
แบบจำลองที่ใช้ในการทายน้ำหนักครั้งนี้ได้ใช้แบบจำลองคานที่มีจุดรองรับแบบธรรมดา โดยจะไม่คิดผลของแรงพลศาสตร์ของรถบรรทุกที่กระทำกับสะพาน นั้นคือลักษณะแบบจำลองของรถบรรทุกจะเป็นแรงที่กระทำเป็นจุดสองแรงกระทำกับสะพานโดยมีระยะห่างของแรงทั้งคู่เท่ากับกับระยะเพลาของรถบรรทุก ซึ่งจะทำการแบ่งเอเลเมนต์ (element) ของสะพานโดยใช้ทฤษฎีไฟไนต์เอเลเมนต์ (finite element)

2.2.1 การจำลองสะพานด้วยชิ้นส่วนคาน



รูปที่ 2.2 ลักษณะระบบของแบบจำลองคานที่ใช้ในการหาน้ำหนัก

เราจะใช้ไฟไนต์เอเลเมนต์ในการจำลองรูปแบบคาน ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.2 โดยที่ A คือ พื้นที่หน้าตัดของคาน E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของคาน ρ คือ มวลต่อหน่วยความยาวของคาน l คือ ความยาวของชิ้นส่วนคาน ซึ่งแต่ละชิ้นส่วนของคานจะประกอบด้วย 2 ขั้ว (node) และแต่ละขั้วของชิ้นส่วนคานจะมี 2 องศาความอิสระคือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง และการเปลี่ยนตำแหน่งในการหมุน



รูปที่ 2.3 แบบจำลองชิ้นส่วนของคาน

การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคานที่ระยะทาง x และเวลา t ใดๆ จะต้องสอดคล้องตามสมการ (2.3)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]=0 \qquad (2.3)$$

สำหรับในกรณี EI มีค่าคงที่ สมการ (2.3) จะกลายเป็น $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=0$ ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้เป็น

$$u(x,t)=c_1(t)x^3+c_2(t)x^2+c_3(t)x+c_4(t) \qquad (2.4)$$

โดยที่ $c_i(t)$ คือ ค่าคงที่ของการอินทิเกรต

สมการ (2.4) สามารถใช้ในการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวดิ่งของชิ้นส่วนคานได้ ซึ่งมีเงื่อนไขที่ขอบ (boundary condition) ดังนี้

$$u(0,t)=u_1(t) \qquad u(l,t)=u_3(t)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=u_2(t) \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=u_4(t) \qquad (2.5)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากความสัมพันธ์ข้างต้น เมื่อแทนลงในสมการ (2.4) จะสามารถหาค่าคงที่ของการอินทิเกรตได้ คือ

$$c_4(t) = u_1(t)$$

$$c_3(t) = u_2(t)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{l^2}\left[3(u_3 - u_1) - l(2u_2 + u_4)\right]$$

$$c_1(t) = \frac{1}{l^3}\left[2(u_1 - u_3) - l(u_2 + u_4)\right] \qquad (2.6)$$

แทนสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.4) และทำการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในเทอมของการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงขั้ว (nodal displacement) จะได้สมการการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนคานที่ระยะ x และเวลา t ใดๆ ดังนี้

$$u(x,t) = \left[1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right]u_1(t) + l\left[\frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right]u_2(t)$$
$$+\left[\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right]u_3(t) + l\left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right]u_4(t) \qquad (2.7)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ที่อยู่ข้างหน้า $u_i(t)$ คือฟังก์ชันประมาณ (shape function) ของการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนคาน

เมตริกซ์มวล (mass matrix) ของชิ้นส่วนคานสามารถคำนวณได้จากการแทนสมการ (2.7) ลงไปในสมการของพลังงานจลน์

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \qquad (2.8)$$

และสมการ (2.8) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้ คือ

$$T(t) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} \qquad (2.9)$$

โดยที่ $\mathbf{M}$ คือ เมตริกซ์มวล (mass matrix) และเวคเตอร์ $\ddot{\mathbf{u}}$ คือ อนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\mathbf{u}(t)$ เทียบกับเวลาซึ่งเวคเตอร์ $\mathbf{u}(t)$ สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

หลังจากทำการอินทิเกรตและจัดรูปแบบเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้ว (nodal displacement) จะได้เมตริกซ์มวลสำหรับชิ้นส่วนคานดังนี้

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาเมตริกซ์สติฟเนส (stiffness matrix) ได้จากการแทนสมการ (2.7) ลงในสมการพลังงานความเครียด (strain energy) ซึ่งกำหนดโดย

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{2.12}$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ

$$V(t) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} \tag{2.13}$$

โดยที่ $\mathbf{u}$ ได้กำหนดไว้ข้างต้น ดังนั้นเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนคาน คือ

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

เมื่อเราได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วนคานแล้ว เราจะรวม (assembly) ชิ้นส่วนคานแต่ละชิ้นส่วนเข้าด้วยกันตามองศาความอิสระที่ตรงกัน ซึ่งจะได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสของระบบ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2.2 การหาเมตริกซ์ความหน่วง (damping matrix) ของระบบ

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่อิสระ

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \tag{2.15}$$

เมื่อเรานำ $\mathbf{M}^{-1}$ คูณตลอดสมการ (2.15) จะได้

$$\ddot{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{u} = 0 \tag{2.16}$$

โดยที่ $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$

$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$

กำหนดให้ $$\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{q} \tag{2.17}$$

โดยที่ $\mathbf{V}$ คือ ไอเกนเวคเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์ $\overline{\mathbf{K}}$

แทนสมการ (2.17) ลงใน (2.16) และคูณตลอดด้วย $\mathbf{V}^{-1}$ จะได้

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{C}}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{K}}\mathbf{V}\mathbf{q} = 0 \tag{2.18}$$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{*}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{*}\mathbf{q} = 0 \tag{2.19}$$

โดยที่ $\mathbf{K}^{*} = \mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{K}}\mathbf{V}$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

ซึ่งหากสมมติให้มีคุณสมบัติ orthogonality เช่นเดียวกับ $\mathbf{K}^{*}$ จะได้

$$\mathbf{C}^{*} = \mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{C}}\mathbf{V}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$= \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

ξ_i คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดที่ i

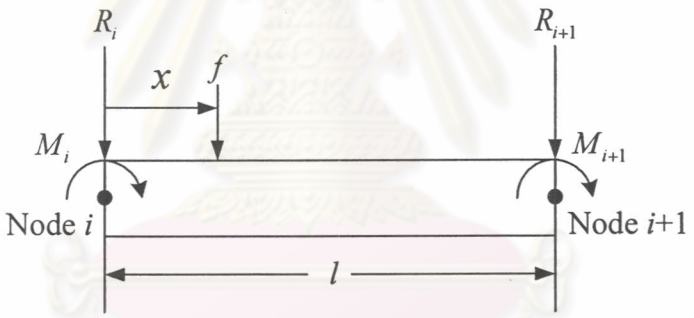
ω_i คือ ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโหมดที่ i

เมื่อเราทราบค่า ξ_i และ ω_i แล้ว ก็จะสามารถหาเมตริกซ์ $\overline{\mathbf{C}}$ และ $\mathbf{C}^*$ ได้ ดังนี้

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{V}\mathbf{C}^*\mathbf{V}^{-1} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{C}} \quad (2.23)$$

2.2.3 การหาแรงที่ขั้วจากแรงภายนอกที่มากระทำ



รูปที่ 2.4 แรงที่ขั้วเนื่องจากแรงภายนอกที่มากระทำ

เมื่อมีแรงภายนอก f มากระทำบนชิ้นส่วนคาน 2 มิติ ที่มีความยาวเท่ากับ l ระหว่างขั้วที่ i กับขั้วที่ $i+1$ ที่ระยะ x จากปลายซ้าย แรงที่ขั้วที่แต่ละปลายของชิ้นส่วนคานสามารถแสดงได้ดังนี้

$$R_i = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) f$$

$$M_i = \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l}\right) f$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$R_{i+1} = \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) f$$

$$M_{i+1} = \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) f \qquad (2.24)$$

โดยที่ R_i, R_{i+1} คือ แรงที่ขั้วในแนวดิ่ง ของขั้วที่ i และ $i+1$ ของโครงสร้างตามลำดับ
M_i, M_{i+1} คือ โมเมนต์ดัด ของขั้วที่ i และ $i+1$ ของโครงสร้างตามลำดับ

แรงที่ขั้วดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปเวคเตอร์ของแรงโกลบอล (global force vector) ได้ คือ

$$\mathbf{P} = \mathbf{Y}(x) \cdot f_1 \qquad (2.25)$$

โดยที่ $\mathbf{P}$ คือ เวคเตอร์ของแรงที่ขั้ว (nodal force vector)
$\mathbf{Y}(x)$ คือ เวคเตอร์ที่แปลงแรงกระทำภายนอกสู่ระบบแรงที่ขั้ว

สำหรับกรณีของแรงภายนอกหลายแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนคานเวคเตอร์ของแรงโกลบอล (global force vector) ที่เกิดขึ้นจากแรงที่ i สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Y}(x_i) \cdot f_i \qquad (2.26)$$

2.2.4 <u>การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของสะพานภายใต้แรงซึ่งเคลื่อนที่บนสะพาน</u>

ซึ่งในกรณีแบบจำลองที่ใช้ในการทดสอบครั้งนี้ ลักษณะแบบจำลองของรถบรรทุกจะเป็นแรงที่กระทำเป็นจุดสองแรงกระทำกับสะพานโดยมีระยะห่างของแรงทั้งคู่เท่ากับกับระยะเพลาของรถบรรทุก ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ดังนั้นไฟไนต์เอเลเมนต์ของระบบพลศาสตร์ที่มี n องศาของความอิสระ จะเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t) \qquad (2.27)$$

โดยที่ $\mathbf{u}(t)$ คือ เวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของแบบจำลอง
$\dot{\mathbf{u}}(t)$ คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\mathbf{u}(t)$ เทียบกับเวลา t
$\mathbf{M}$ คือ เมตริกซ์มวลของระบบ (system mass matrix)
$\mathbf{C}$ คือ เมตริกซ์ความหน่วงของระบบ (system damping matrix)
$\mathbf{K}$ คือ เมตริกซ์สติฟเนสของระบบ (system stiffness matrix)
$\mathbf{P}(t)$ คือ แรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและขนาดของแรงภายนอกที่มากระทำ

เช่นลักษณะของค่าของ $\mathbf{P}(t)$ ที่ใช้ในแบบจำลองดังแสดงในรูปที่ 2.2 จะเป็นแรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและขนาดของแรงภายนอกที่มากระทำดังสมการ (2.26) ซึ่งประกอบเวคเตอร์ที่แปลงแรงกระทำภายนอกสู่ระบบแรงที่ขั้วคูณกับเวคเตอร์ของแรงที่ขั้วซึ่งประกอบด้วยน้ำหนักเพลาหน้าและเพลาหลังดังสมการ (2.28)

$$\mathbf{P}(t)=\left[\mathbf{Y}\left(x_v(t)+s\right)\ \mathbf{Y}\left(x_v(t)\right)\right]\begin{Bmatrix}\hat{P}_{\mathrm{f}}(t)\\ \hat{P}_{\mathrm{r}}(t)\end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

$\mathbf{Y}\left(x_v(t)+s\right)$ คือ เวคเตอร์ที่แปลงน้ำหนักเพลาหน้าสู่ระบบแรงที่ขั้ว

$\mathbf{Y}\left(x_v(t)\right)$ คือ เวคเตอร์ที่แปลงน้ำหนักเพลาหลังสู่ระบบแรงที่ขั้ว

$\hat{P}_{\mathrm{f}}(t)$ คือ น้ำหนักเพลาหน้าที่กระทำกับแบบจำลอง

$\hat{P}_{\mathrm{r}}(t)$ คือ น้ำหนักเพลาหลังที่กระทำกับแบบจำลอง

การใช้สมการเสตทเสปซ (state-space formulation) สมการ (2.27) จะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังแสดง

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{f} \tag{2.29}$$

โดยที่ $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{\mathbf{u}}\end{bmatrix}_{2n\times 1}$ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y}\end{bmatrix}_{2n\times n_f} \tag{2.30}$$

โดยที่ $\mathbf{X}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปร (state variables) ที่มีมิติเท่ากับ 2 n ซึ่งประกอบด้วยการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วและความเร็วที่ขั้ว

n_f คือ จำนวนของแรงภายนอกที่มากระทำ

$\mathbf{f}$ คือ แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่ามีมิติเท่ากับ $n_f \times 1$

สมการอนุพันธ์ข้างต้นสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการไม่ต่อเนื่อง (discrete equation) โดยการใช้ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix) เข้ามาเกี่ยวข้อง จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \bar{\mathbf{G}}_{j+1}\mathbf{B}_j\mathbf{f}_j \tag{2.31}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}h} \tag{2.32}$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \tag{2.33}$$

โดยที่ $\mathbf{F}$ คือ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix)

$\bar{\mathbf{G}}$ คือ เมตริกซ์ที่เชื่อมโยงระหว่างแรงกับระบบ

$j+1$ หมายถึง การคำนวณ ณ ขั้นเวลาที่ $j+1$

h คือ ผลต่างของเวลาในการคำนวณตัวแปร (variable state) ระหว่าง $\mathbf{X}_j$ และ $\mathbf{X}_{j+1}$

จากการแทนสมการ (2.30) และ (2.33) ลงไปในสมการ (2.30) จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \mathbf{G}_{j+1}\mathbf{f}_j \tag{2.34}$$

โดยที่

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_{2n\times 2n}\begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2n\times n_f} \tag{2.35}$$

2.2.5 <u>วิธีการหาทรานซิชั่นเมตริกซ์ ($\mathbf{F}$)</u>

จาก

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}h} = \mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots \tag{2.36}$$

และ

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} \tag{2.37}$$

โดยที่ Λ คือ เมตริกซ์ไอเกนแวลู (eigenvalue) ของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$

$\mathbf{V}$ คือ เมตริกซ์ไอเกนเวคเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$

แทนสมการ (2.37) ลงใน (2.36) จะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\mathbf{A}h} &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} \\
&\quad + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} + \ldots \\
&= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\Lambda^2\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\Lambda^3\mathbf{V}^{-1} + \ldots \\
&= \mathbf{V}\left(\mathbf{I} + h\Lambda + \frac{h^2}{2!}\Lambda^2 + \frac{h^3}{3!}\Lambda^3 + \ldots\right)\mathbf{V}^{-1} \\
&= \mathbf{V}\mathbf{e}^{\Lambda h}\mathbf{V}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2.6 หลักการหาน้ำหนักรถขณะเคลื่อนที่บนสะพาน

จุดประสงค์ของปัญหานี้คือ การหาแรง $\mathbf{f}$ ซึ่งทำให้สมการ (2.34) มีความใกล้เคียงกับข้อมูลที่วัดมาได้มากที่สุด แต่ในทางปฏิบัติเราไม่สามารถที่จะวัดการเปลี่ยนตำแหน่งและความเร็วได้ทั้งหมด ซึ่งจะมีแค่บางตำแหน่งเท่านั้นที่เราสามารถวัดได้ ดังนั้นข้อมูลที่ได้จากการวัดสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \tag{2.39}$$

โดยที่ $\mathbf{d}_j$ คือ เวคเตอร์ของการวัดมีมิติ $m \times 1$

$\mathbf{Q}$ คือ เมตริกซ์ที่ถูกเลือกเพื่อเชื่อมโยงระหว่างการวัดกับตัวแปร (state variables) มีมิติ $m \times 2n$

$\mathbf{X}_j$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปร (state variables) ที่มีมิติเท่ากับ $2n$ ซึ่งประกอบด้วยการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วและความเร็วที่ขั้ว

ข้อมูลจากการวัดจริงจะแทนได้ด้วยเวคเตอร์ $\mathbf{Z}_j$ ซึ่งมีมิติเดียวกับ $\mathbf{d}_j$ โดยทั่วไปจำนวนของข้อมูลที่วัดได้ m จะน้อยกว่าจำนวนของตัวแปร (หรือ n องศาความอิสระของระบบ) มาก แต่จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนของแรงภายนอกที่มากระทำ n_f ในกรณีของ คาน 2 มิติ ที่มีจุดรองรับแบบธรรมดา ซึ่งถูกแบ่งเป็น L อิลิเมนต์จะได้ $n = 2(L+1)-2$ ซึ่งได้รวมการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งและการเปลี่ยนตำแหน่งในการหมุนที่แต่ละขั้วไว้แล้ว

เมื่อแรงที่ไม่ทราบค่า $\mathbf{f}_j$ ได้รวมอยู่ในสมการ (2.34) การที่ข้อมูลจากแบบจำลองจะเหมือนกับข้อมูลจากการวัดจึงเป็นไปไม่ได้ ทั้งนี้เนื่องจากข้อมูลที่ได้จากการวัดจะมีสิ่งรบกวนรวมอยู่ด้วย จึงทำการหาค่าแรงจากวิธีการยกกำลังสองน้อยที่สุด (least square) ที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน E ดังสมการ (2.40) มีค่าน้อยที่สุด

$$E = \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \right), \mathbf{D}\left(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \right) \right) \tag{2.40}$$

แต่เนื่องจากมีสภาพบกพร่อง (ill condition) ของระบบในการหาคำตอบ ณ ตำแหน่งจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของข้อมูล เราสามารถที่จะหลีกเลี่ยงได้โดยการเพิ่มเทอมความราบเรียบ (smoothing term) เข้าไปในสมการ (2.40) ดังแสดง

$$E = \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \right), \mathbf{D}\left(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \right) + \left(\mathbf{f}_j, \mathbf{E}\mathbf{f}_j \right) \right) \tag{2.41}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เทอมที่สองคือ regularization parameter และวิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่า Tikhonov method เมตริกซ์ $\mathbf{D}(m \times m)$ และเมตริกซ์ $\mathbf{E}(n_f \times n_f)$ เป็นเมตริกซ์โพสสิทีฟเดฟฟินิทที่มีความสมมาตร (symmetric positive-definite weighting matrices) ซึ่งให้ความยืดหยุ่นในการถ่วงน้ำหนักของการวัดและการถ่วงน้ำหนักของแรง เมตริกซ์ $\mathbf{D}$ โดยทั่วไปจะเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) และ เมตริกซ์ $\mathbf{E}$ เป็นเมตริกซ์ทแยง (diagonal matrix) โดยเทอมที่สองค่า $\mathbf{E}$ จะมีผลของความราบเรียบของแรงที่หามาได้ โดยถ้า $\mathbf{E}$ มีค่ามาก แรงที่หาได้จะมีความราบเรียบแต่จะไม่ใกล้เคียงกับข้อมูล เมื่อ $\mathbf{E}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ การแก้ปัญหาก็จะกลายเป็นปัญหายกกำลังสองน้อยที่สุด (least square) แบบธรรมดา และเมื่อ $\mathbf{E}$ มีค่าน้อย จะทำให้คำตอบมีความใกล้เคียงกับข้อมูลมากแต่มีความแปรปรวนสูง

2.2.7 <u>การวัดความเครียด</u>

สำหรับไฟไนต์เอเลเมนต์ของคาน 2 มิติ ที่ยาว l โดยมีองศาความอิสระ $(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2)$ ที่ปลายทั้งสองข้าง จะได้ว่าความเครียดที่หน้าตัดใด ๆ ระยะทาง x จากปลายซ้ายของชิ้นส่วนคานสามารถเขียนให้อยู่ในรูปขององศาความอิสระที่ปลายทั้งสองข้างได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \left(\frac{-\delta}{l^3}\right)\left[(12x-6l)u_1 - l(6x-4l)\theta_1 - (12x-6l)u_2 + l(6x-2l)\theta_2\right] \quad (2.42)$$

โดยที่ δ คือ ระยะจากแนวแกนสะเทินของคานถึงขอบของคาน

2.2.8 <u>การหาแรงโดยตรงจากการแก้ระบบสมการ</u>

ปัญหาในการวิเคราะห์ระบบสมการในการหาแรงนั้น จากเดิมที่สามารถนำข้อมูลที่ได้จากการวัด มาแสดงให้อยู่ในรูปของสมการที่ 2.36 สามารถแปลงความเครียดที่ได้จากการวัดจากความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon = \frac{\mathbf{M}\delta}{\mathrm{I}} \quad (2.43)$$

เมื่อ δ คือระยะความลึกของแนวแกนสะเทินของหน้าตัดสะพาน

I คือโมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia) ของหน้าตัดสะพาน

E คืออิลาสติกโมดูลัสของสะพาน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดังนั้นจะสามารถเขียนโมเมนต์ดัดในเทอมของความเครียดได้เป็น

$$\mathbf{M} = \frac{\varepsilon \mathrm{EI}}{\delta} \tag{2.44}$$

เมื่อแทนความเครียดที่ได้จากการวัดจริงด้วยเวคเตอร์ $\mathbf{Z}$ จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z}\left(\frac{\mathrm{EI}}{\delta}\right) \tag{2.45}$$

2.2.9 ไดนามิคโปรแกรมมิง (Dynamic Programming)

เพื่อที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน E ของวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด (least square) มีค่าน้อยที่สุด วิธีการไดนามิคโปรแกรมมิง (dynamic programming) และ Bellman' s Principle of Optimality (Bellman R.,1967)ได้ถูกนำมาใช้หาค่า E ที่น้อยที่สุดที่ขั้นตอน n (E_n) สำหรับค่าเริ่มต้น $\mathbf{X}$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_j} E_n(\mathbf{X}, \mathbf{f}_j) \tag{2.46}$$

จากสมการ (2.42) โดยวิธี Bellman's Principle of Optimality จะสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\mathbf{g}_{n-1}(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_{n-1}}\left((\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{QX}), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{QX}) + (\mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{Ef}_{n-1}) + \mathbf{g}_n\left(\mathbf{FX} + \mathbf{G}_n\mathbf{f}_{n-1}\right)\right) \tag{2.47}$$

$\mathbf{f}_n$ และ $\mathbf{g}_n$ คือ ค่าแรงที่เหมาะสม (optimal forcing term) และค่าต้นทุนที่เหมาะสม (optimal cost term) ตามลำดับ การแก้ปัญหาสามารถทำได้โดยการเริ่มต้นขั้นตอนที่ $n = N$ และทำย้อนกลับไปจนถึง $n = 1$ ที่จุดปลาย ค่าที่น้อยที่สุดสามารถหาได้จาก

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_N}\left[(\mathbf{Z}_N - \mathbf{QX}), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_N - \mathbf{QX}) + (\mathbf{f}_N, \mathbf{Ef}_N)\right] \tag{2.48}$$

เมื่อ $\mathbf{f}_N = 0$ เราจะได้คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดดังสมการ (2.49) โดยการขยายสมการ (2.48)

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{X}) = \mathbf{q}_N + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_N) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_N\mathbf{X}) \tag{2.49}$$

โดยที่

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{Z}_N^T\mathbf{DZ}_N$$

$$\mathbf{S}_N = -2\mathbf{Q}_N^T\mathbf{DZ}_N$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{Q}_N^T \mathbf{D} \mathbf{Q}_N \tag{2.50}$$

สมการ (2.50) คือค่าเริ่มต้นสำหรับการทำงานย้อนกลับที่ n=N โดยการแทนสมการ (2.49) ด้วยขั้นตอนที่ n และ n-1 ลงไปในสมการ (2.52) และขยายเทอมทางด้านขวามือของสมการจะได้

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1}\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_{n-1}} \left[(\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n\mathbf{X} + \mathbf{U}_n), \mathbf{H}_n(\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n\mathbf{X} + \mathbf{U}_n) + \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X}) \right]$$

โดยที่ $\mathbf{H}_n = \mathbf{E} + \mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{G}_n$, $2\mathbf{H}_n\mathbf{V}_n = 2\mathbf{G}_n^T\mathbf{R}_n\mathbf{F}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{H}_n^{-1}\mathbf{G}_n^T\mathbf{R}_n\mathbf{F}$

$$2\mathbf{H}_n\mathbf{U}_n = \mathbf{G}_n^T\mathbf{S}_n, \ \mathbf{U}_n = (\mathbf{H}_n^{-1}\mathbf{G}_n^T\mathbf{S}_n)/2 \tag{2.51}$$

$$\mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{q}_n + \mathbf{Z}_{n-1}^T\mathbf{D}\mathbf{Z}_{n-1}) + \mathbf{X}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Q} + \mathbf{F}^T\mathbf{R}_n\mathbf{F})\mathbf{X} + \mathbf{X}^T(\mathbf{F}^T\mathbf{S}_n - 2\mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Z}_{n-1}) - \mathbf{X}^T\mathbf{V}_n^T\mathbf{H}_n\mathbf{V}_n\mathbf{X} - \mathbf{U}_n^T\mathbf{H}_n\mathbf{U}_n - 2\mathbf{X}^T\mathbf{V}_n^T\mathbf{H}_n\mathbf{U}_n$$

และ $\mathbf{F}$ คือ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix)

การทำให้เทอมทางด้านขวามือของสมการ (2.51) มีค่าน้อยที่สุด จะนำไปสู่ค่าแรงที่เหมาะสม คือ

$$\mathbf{f}_{n-1} = -\mathbf{H}_n^{-1}\mathbf{G}_n^T\left[\mathbf{R}_n\mathbf{F}\mathbf{X}_{n-1} + \frac{\mathbf{S}_n}{2}\right] \tag{2.52}$$

และสมการ (2.51) จะกลายเป็น

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1}\mathbf{X}) = \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X}) \tag{2.53}$$

จากการกระจายเทอมในสมการ (2.53) และทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\mathbf{R}_{n-1} = \mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Q} + \mathbf{F}^T\left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T\mathbf{G}_n\mathbf{H}_n^{-1}\mathbf{G}_n^T\right]\mathbf{R}_n\mathbf{F}$$

$$\mathbf{S}_{n-1} = -2\mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Z}_{n-1} + \mathbf{F}^T\left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T\mathbf{G}_n\mathbf{H}_n^{-1}\mathbf{G}_n^T\right]\mathbf{S}_n \tag{2.54}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความคลาดเคลื่อนของแรงที่หาได้สามารถคำนวณได้ตามสมการ

$$Error = \frac{\left\| \mathbf{f}_{identified} - \mathbf{f}_{true} \right\|}{\left\| \mathbf{f}_{true} \right\|} \times 100\% \qquad (2.55)$$

โดยที่ $\| \bullet \|$ คือ นอร์ม (norm) ของเมตริกซ์

ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นตอนที่1 เมตริกซ์ $\mathbf{Q}$ เมตริกซ์ $\mathbf{Z}$ และความเร็วของแรงสามารถหาได้จากการวัดจากภาคสนาม

ขั้นตอนที่2 เมตริกซ์ $\bar{\mathbf{G}}$ และเมตริกซ์ $\mathbf{G}$ สามารถหาได้จากข้อมูลตำแหน่งของแรงจากสมการ (2.31) และ (2.33)

ขั้นตอนที่3 คำนวณค่าเริ่มต้น $\mathbf{q}_N$, $\mathbf{R}_N$ และ $\mathbf{S}_N$ จากสมการ (2.50) และคำนวณค่า $\mathbf{H}_N$ จากสมการ (2.51)

ขั้นตอนที่4 คำนวณ $\mathbf{S}_{n-1}$ และ $\mathbf{R}_{n-1}$ จากสมการ (2.50) ตั้งแต่ค่า $n = N$ จนถึง $n = 1$

ขั้นตอนที่5 กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{X}$ เท่ากับศูนย์แล้วคำนวณค่าปฏิกริยาตอบสนอง $\mathbf{X}_{j+1}$ จากสมการ (2.32) ตั้งแต่ค่า $j = 0$ จนถึง $j = N$ และหาแรง $\mathbf{f}_{n-1}$ จากสมการ (2.52) ตั้งแต่ค่า $n = 1$ จนถึง $n = N$

ขั้นตอนที่6 ทำขั้นตอนที่ 1-5 ซ้ำจนได้ค่า $Error$ ในสมการที่ (2.55) ที่เหมาะสม

2.2.10 เทคนิคการคำนวณซ้ำ (Iteration Technique)

เนื่องมาจากงานวิจัยในอดีตที่ผ่านมาได้มีการหาน้ำหนักรถขณะเคลื่อนที่ โดยที่วิธีไดนามิคโปรแกรมมิงนั้นยังมีความคลาดเคลื่อนในการคำนวณอยู่ Pattarapong (2004) ได้เสนอเทคนิคการคำนวณซ้ำ (iteration teachnique) มาใช้ในการเพิ่มความถูกต้องแม่นยำในการหาน้ำหนักของวิธีไดนามิคโปรแกรมมิง

เทคนิคการคำนวณซ้ำ คือ การนำเอาผลของการคำนวณที่ได้จากไดนามิคโปรแกรมมิงมาแยกสัญญาณความเครียดเนื่องจากผลทางพลศาสตร์ออกจากสัญญาณความเครียดที่ได้จากการวัด แล้วนำความเครียดทางพลศาสตร์นั้นมาคำนวณในไดนามิคโปรแกรมมิงอีกครั้ง แล้วนำไปบวกกับแรงทางสถิตที่ประมาณได้ เพื่อให้ค่าแรงที่หาได้ลู่เข้าหาค่าแรงที่ถูกต้องมากขึ้นจากการคำนวณครั้งแรกของไดนามิคโปรแกรมมิง ซึ่งมีหลักการดังนี้

ขั้นตอนการคำนวณเทคนิคการคำนวณซ้ำ (iteration technique)

ขั้นตอนที่ 1 จากสัญญาณความเครียดที่ได้จากการวัด $\mathbf{Z}$ มาทำการคำนวณในโปรแกรมการหาน้ำหนักจะได้ค่าแรง จากการคำนวณครั้งแรก $\hat{\mathbf{P}}^i$ และจากแรงที่หาได้ก็นำไปคำนวณย้อนกลับหาความเครียดที่ประมาณได้ $\hat{\mathbf{Z}}^i$ ซึ่งจะเก็บไว้เพื่อนำไปแยกผลทางพลศาสตร์ในขั้นตอนต่อไป

ขั้นตอนที่ 2 เพื่อที่จะทำการแยกผลทางพลศาสตร์ จากแรงที่หาได้จะนำไปทำการเฉลี่ยเพื่อหาค่าแรงทางสถิต $\hat{\mathbf{P}}_s^i$ ซึ่งการเฉลี่ยเพื่อทำการหาแรงทางสถิตนี้จะทำการเฉลี่ยแยกเพลาอิสระต่อกันตามช่วงเวลาที่เพลานั้น ๆ วิ่งอยู่บนช่วงสะพาน และแรงรวมทั้งหมดทางสถิตของรถได้จากการซุปเปอร์โพซิชันของแรงทางสถิตแต่ละเพลาเข้าด้วยกัน

ขั้นตอนที่ 3 จากแรงทางสถิตที่ได้ $\hat{\mathbf{P}}_s^i$ จะนำไปคำนวณหาความเครียดเนื่องจากผลทางสถิต $\hat{\mathbf{Z}}_s^i$ โดยมีขั้นตอนดังนี้

i) ทำการแปลงแรงที่หาได้ให้เป็นแรงที่ขั้วด้วยฟังก์ชันประมาณ (shape function)

$$\mathbf{P}_s^i = \mathbf{Y}\hat{\mathbf{P}}_s^i \tag{2.56}$$

โดยที่ $\mathbf{P}_s^i$ คือ เวคเตอร์ของแรงทางสถิตที่ขั้ว (nodal force vector)

$\mathbf{Y}$ คือ เวคเตอร์ที่แปลงแรงกระทำภายนอกสู่ระบบแรงที่ขั้ว

$\hat{\mathbf{P}}_s^i$ คือ แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่ามีมิติเท่ากับ n_r x 1

ii) จากแรงที่ขั้ว สามารถหาการเปลี่ยนตำแหน่ง $\mathbf{u}_s^i$ ได้โดยนำไปคูณด้วยอินเวอร์สของสติฟเนสเมตริกซ์

$$\mathbf{u}_s^i = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}_s^i \tag{2.57}$$

โดยที่ $\mathbf{u}_s^i$ คือ เวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของแบบจำลองชิ้นส่วนคาน

$\mathbf{K}$ คือ เมตริกซ์สติฟเนสของระบบ (system stiffness matrix)

iii) สามารถหาความเครียดทางสถิต $\hat{\mathbf{Z}}_s^i$ ได้จากความสัมพันธ์ของความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่ง

$$\hat{\mathbf{Z}}_s^i = \mathbf{Q}\mathbf{u}_s^i \tag{2.58}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นตอนที่ 4 เมื่อได้ความเครียดทางสถิตแล้ว จะสามารถหาความเครียดทางพลศาสตร์ $\hat{\mathbf{Z}}_d^i$ ได้จากการนำความเครียดทางสถิตไปลบออกจากความเครียดรวมที่ได้จากการประมาณ $\mathbf{Z}^i$

$$\hat{\mathbf{Z}}_d^i = \mathbf{Z}^i - \hat{\mathbf{Z}}_s^i \tag{2.59}$$

ขั้นตอนที่ 5 จากความเครียดทางพลศาสตร์ที่ได้ $\hat{\mathbf{Z}}_d^i$ จะนำไปหาแรงทางพลศาสตร์ในรอบใหม่ $\hat{\mathbf{P}}_d^i$ ด้วย โปรแกรมการหาน้ำหนักอีกครั้ง

ขั้นตอนที่ 6 จากแรงทางพลศาสตร์ที่ได้ $\hat{\mathbf{P}}_d^{i+1}$ เมื่อนำไปรวมกับแรงทางสถิต $\hat{\mathbf{P}}_s^i$ จะได้เป็นแรงในรอบใหม่จากการคำนวณซ้ำ

$$\hat{\mathbf{P}}^{i+1} = \hat{\mathbf{P}}_s^i + \hat{\mathbf{P}}_d^{i+1} \tag{2.60}$$

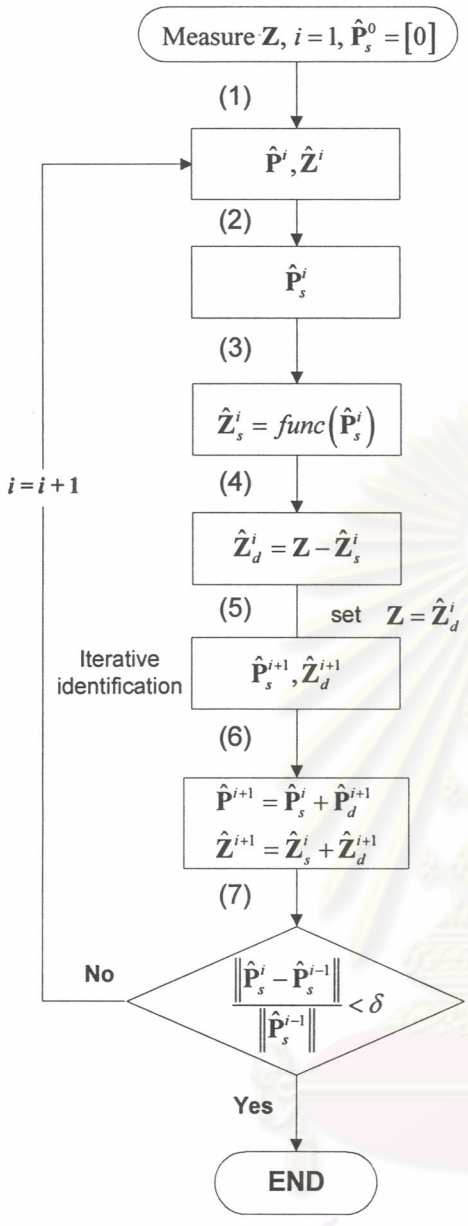
โดยค่าความเครียดทางพลศาสตร์ที่ได้จากสมการ 2.59 เมื่อนำไปรวมกับความเครียดทางสถิตจากสมการ 2.58 ก็จะได้เป็นความเครียดรวมใหม่ เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณซ้ำรอบถัดไป

$$\hat{\mathbf{Z}}^{i+1} = \hat{\mathbf{Z}}_s^i + \hat{\mathbf{Z}}_d^{i+1} \tag{2.61}$$

ขั้นตอนที่ 7 ทำการคำนวณซ้ำจนกระทั่งผลต่างของแรงที่ได้ในรอบล่าสุดกับรอบก่อนหน้า มีความแตกต่างกันน้อยมาก ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ได้กำหนดไว้ โดยงานวิจัยนี้กำหนดไว้ที่ไม่เกิน 1 เปอร์เซ็นต์จึงจะหยุดการคำนวณกล่าวคือ

$$\frac{\left\| \hat{\mathbf{P}}_s^i - \hat{\mathbf{P}}_s^{i-1} \right\|}{\left\| \hat{\mathbf{P}}_s^{i-1} \right\|} \times 100\ \% \ \leq\ 1\% \tag{2.62}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



Steps of computation for USC technique

(1) Load identification using conventional regularization

(2) Load decomposition to obtain the static component (quasi-static) by time-averaging.

(3) Calculate the corresponding static strain components.

(4) Compute the dynamic strain component.

(5) Repeat the load identification using conventional regularization (input only dynamic strain from (4).

(6) Update the identified result from the combination of the previous and the latest identified result.

(7) Determine the rate of convergence of updated results. (In this paper $\delta = 1\%$.)

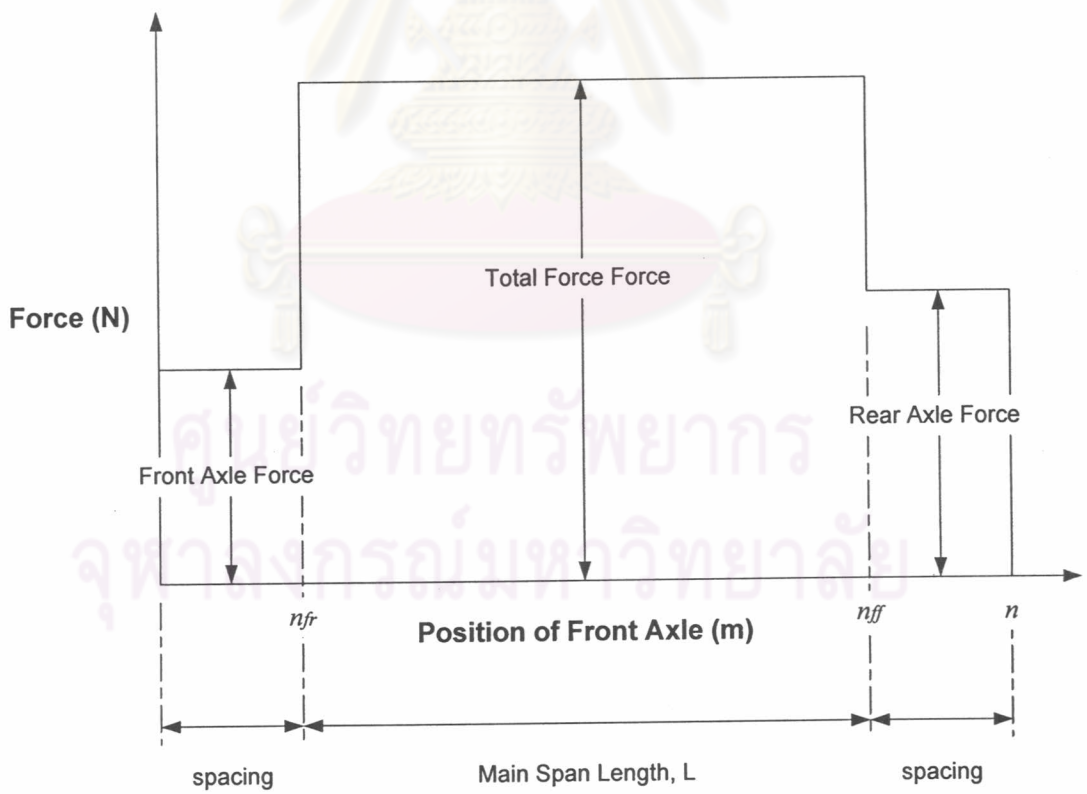
รูปที่ 2.5 รูปแบบขั้นตอนการคำนวณของเทคนิคการคำนวณซ้ำ (Iteration Technique: Updated Static Component)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2.11 การเฉลี่ยหาค่าน้ำหนักรถ

ในการหาน้ำหนักด้วยเทคนิคการคำนวณซ้ำนั้น จะต้องทำการสร้างเส้นอินฟลูเอนซ์ไลน์จากน้ำหนักที่หาได้ และอ้างอิงเป็นค่าโมเมนต์ดัดจากผลของแรงทางสถิตและนำไปหักลบกับโมเมนต์ดัดที่เก็บวัดได้ให้เหลือผลของโมเมนต์ดัดจากแรงทางพลศาสตร์ เพื่อเข้าไปสู่การคำนวณซ้ำต่อไป ซึ่งการสร้างเส้นอินฟลูเอนซ์ไลน์นั้นจะได้จากการเฉลี่ยแรงที่ทายได้ ซึ่งในการเฉลี่ยแรงที่หาได้ในแต่ละรอบนั้น จะต้องอ้างอิงกับระบบการเคลื่อนที่ของรถให้มีช่วงเวลา ตำแหน่งและจำนวนข้อมูลที่สอดคล้องกัน การหาน้ำหนักรถจึงจะได้ความถูกต้องแม่นยำสูงสุด

ระบบการเคลื่อนที่ของรถในกรณีนี้ แบ่งออกได้เป็น 3 ช่วงด้วยกันดังรูปที่ 2.6 โดยช่วงแรกจะเป็นช่วงที่เพลาหน้าของรถบรรทุกเคลื่อนที่เข้าสู่สะพาน ซึ่งค่าความเครียดและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในช่วงเวลานี้จะเกิดจากผลของเพลาหน้าของรถบรรทุกกระทำต่อสะพานเท่านั้น ช่วงที่สองจะเป็นช่วงที่เพลาหลังของรถเคลื่อนที่เข้าสู่สะพาน เป็นช่วงที่ทั้งเพลาหน้าและเพลาหลังอยู่บนสะพานทั้ง 2 เพลา ซึ่งค่าความเครียดและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในช่วงนี้จะเป็นผลของน้ำหนักรวมของรถบรรทุก และช่วงสุดท้ายจะเป็นช่วงที่เพลาหน้าของรถบรรทุกได้เคลื่อนที่ออกจากสะพานช่วงหลักไปแล้ว คงเหลือเพียงแค่น้ำหนักกระทำจากเพลาหลังเท่านั้น



รูปที่ 2.6 ระบบการเคลื่อนที่ของรถบรรทุก 2 เพลาบนสะพานช่วงเดียวที่มีจุดรองรับแบบข้อหมุนธรรมดา

ดังนั้นจากแรงที่หาได้ จะสามารถแยกและนำมาเฉลี่ยเป็นแรงหรือน้ำหนักทางสถิตในเพลาหน้า เพลาหลัง และน้ำหนักรวมของรถได้ดังนี้

น้ำหนักทางสถิตของเพลาหน้า :

$$\mathbf{f}_{front} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{ff}} \left(\mathbf{f}_{front}^{iden} \right)}{n_{ff}} \qquad (2.63)$$

น้ำหนักทางสถิตของเพลาหลัง :

$$\mathbf{f}_{rear} = \frac{\sum_{i=n_{fr}}^{n} \left(\mathbf{f}_{rear}^{iden} \right)}{\left(n - n_{fr} \right)} \qquad (2.64)$$

น้ำหนักทางสถิตของน้ำหนักรวม :

$$\mathbf{f}_{total} = \frac{\sum_{i=n_{fr}}^{n_{ff}} \left(\mathbf{f}_{front}^{iden} \right) + \sum_{i=n_{fr}}^{n_{ff}} \left(\mathbf{f}_{rear}^{iden} \right)}{\left(n_{ff} - n_{fr} \right)} \qquad (2.65)$$

โดยที่ n_{fr} คือตำแหน่งของข้อมูลที่เก็บวัด เมื่อเพลาหน้าของรถบรรทุกเคลื่อนที่ออกจากสะพาน

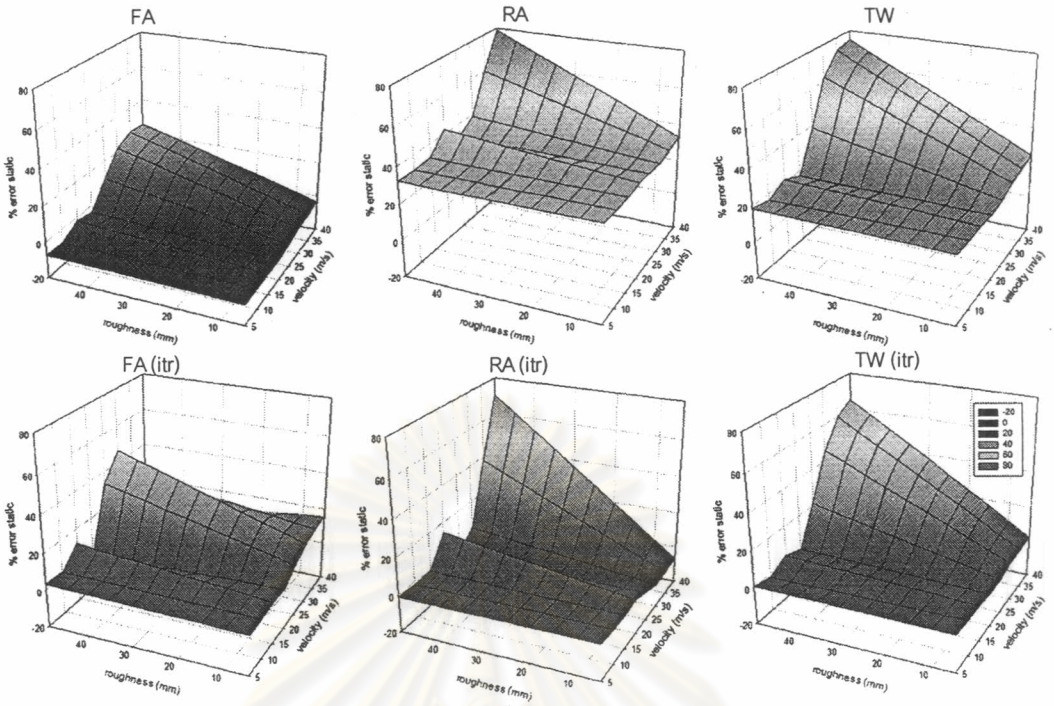
n_{fr} คือตำแหน่งของข้อมูลที่เก็บวัด เมื่อเพลาหลังของรถบรรทุกเคลื่อนที่เข้าสู่สะพาน

n คือตำแหน่งของข้อมูลที่เก็บวัด เมื่อเพลาหลังของรถบรรทุกเคลื่อนที่ออกจากสะพาน

2.3 <u>ความถูกต้องของการหาน้ำหนักรถจากการจำลองบนคอมพิวเตอร์</u>

สะพานที่ใช้ในการศึกษาการหาน้ำหนักรถบรรทุกโดยการจำลองบนคอมพิวเตอร์นั้น Tawat (2003) จะพิจารณาสะพานคอนกรีตเสริมเหล็ก แบบคานช่วงเดี่ยว ซึ่งมีความยาวของสะพาน 14 เมตร สำหรับการจราจร 1 ช่องทาง ซึ่งมีความกว้าง 3 เมตร ความหนา 50 เซนติเมตร ส่วนรถบรรทุกนั้นจะทำการพิจารณาเพลาคู่หลังรวมกันเป็นเพลาเดี่ยว โดยมี ระยะห่างระหว่างเพลา 4.65 เมตร โดยพิจารณาตัวแปรหลักที่มีผลต่อการทายน้ำหนักรถบรรทุกนั้น คือ ความเร็วของรถบรรทุกและความขรุขระของผิวทาง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



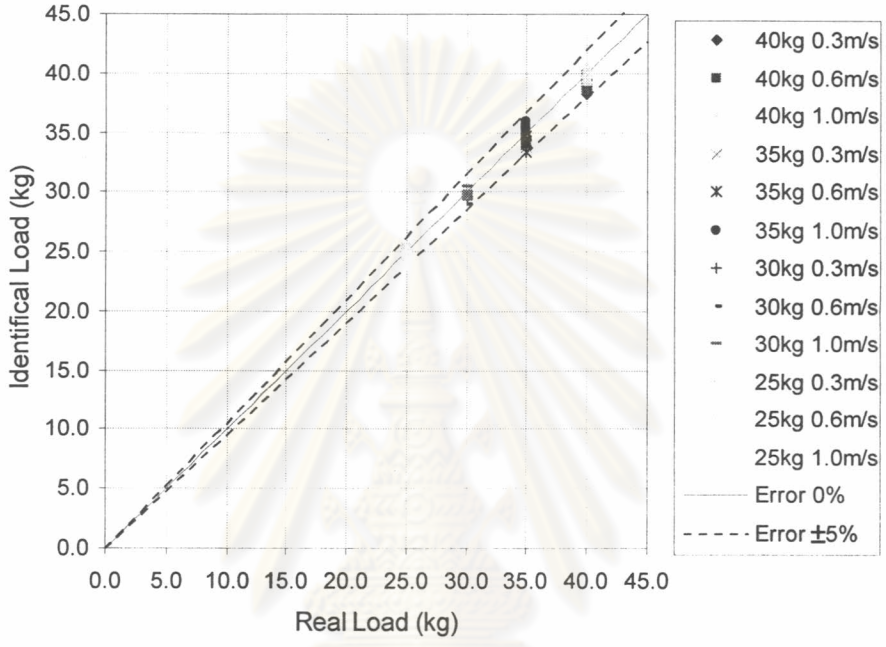
รูปที่ 2.7 ค่าความคลาดเคลื่อนของน้ำหนักทางสถิตทั้งก่อนและหลังจากผ่านการคำนวณซ้ำ

จากรูปที่ 2.7 จะเห็นได้ว่าเมื่อความเร็วของรถบรรทุกและระดับของความขรุขระของผิวทางมีค่าสูงพร้อมกันจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการทายน้ำหนักสูงมาก ซึ่งหากนำเทคนิคการคำนวณซ้ำเข้ามาช่วยในการทายน้ำหนักก็จะทำให้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนั้นน้อยลง โดยค่าความคลาดเคลื่อนทางสถิตหลังจากผ่านการคำนวณซ้ำแล้วจะมีค่าลดลงจากค่าความคลาดเคลื่อนทางสถิตก่อนการคำนวณซ้ำอยู่ในช่วง 20-30% โดยจะมีค่าความคลาดเคลื่อนหลังจากผ่านการคำนวณซ้ำเหลือเพียงแต่ที่ความเร็วของรถบรรทุกและความสูงของความขรุขระของผิวทางมีค่าสูงพร้อมกันนั้น การลดลงของค่าความคลาดเคลื่อนทางสถิตจะเหลือเพียง 5-10% อย่างไรก็ดีค่าความคลาดเคลื่อนทางสถิตของน้ำหนักเพลาหน้านั้น พบว่าหลังจากผ่านการคำนวณซ้ำแล้วบางกรณีจะมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น เทคนิคการคำนวณซ้ำนั้นช่วยทายน้ำหนักให้ค่าที่ถูกต้องได้เป็นอย่างดี แต่ที่ความเร็วสูงมากๆคือ 30-40 m/s (108-144 km/hr)และความขรุขระของผิวทางสูงๆคือ 3-5 cm นั้นยังไม่สามารถลดค่าความคลาดเคลื่อนลงมาได้

ส่วนผลกระทบของอัตราส่วนของน้ำหนักเพลาหน้าต่อเพลาหลังและค่าสติฟเนสของสปริงที่เพลาของรถบรรทุกนั้นจากผลการศึกษาของ Tawat (2003) ก็สามารถสรุปได้ว่าไม่ส่งผลกระทบต่อการทายน้ำหนัก

2.4 ความถูกต้องของการหาน้ำหนักรถจากการทดสอบด้วยแบบจำลองย่อส่วน

Tawat (2003) ทำการทายน้ำหนักรถบรรทุกจากแบบจำลองย่อส่วน โดยที่น้ำหนักรวมของรถบรรทุกอยู่ในช่วงระหว่าง 25.00-40.00 kg ซึ่งแบ่งเป็นอัตราส่วนน้ำหนักเพลาหน้าต่อเพลาหลัง 4 อัตราส่วน โดยในแต่ละอัตราส่วนดังกล่าวได้ทำการทดสอบที่ระดับความเร็วต่างกัน 3 ระดับ ได้แก่ 0.3 0.6และ 1.0 m/s



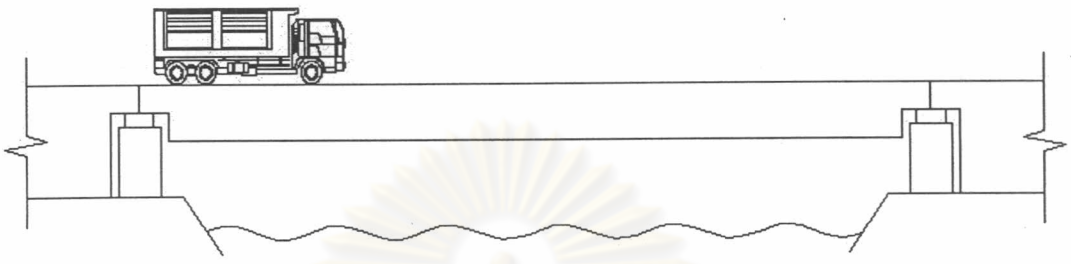
รูปที่ 2.8 ค่าน้ำหนักรวมของรถบรรทุกหาได้เทียบกับน้ำหนักรวมของรถบรรทุกจริง

จากค่าความคลาดเคลื่อนของน้ำหนักเพลาหน้า, เพลาหลัง และน้ำหนักรวมรถบรรทุก นำมาหาค่าเฉลี่ย และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation :SD) จะได้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนของน้ำหนักรวมรถบรรทุก, เพลาหลัง และเพลาหน้าสูงสุดเท่ากับ -1.45%, -5.06% และ6.19% ส่วนค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนของน้ำหนักรวมรถบรรทุก, เพลาหลัง และเพลาหน้าสูงสุดเท่ากับ 1.48%, 3.51% และ 11.31% ตามลำดับ

ในหลักการของสถิติศาสตร์ ถ้าสมมุติให้ข้อมูลมีการกระจายตัวของข้อมูลเป็นแบบการกระจายตัวแบบปกติ (normal distribution) ก็จะสามารถหาความน่าจะเป็นของค่าความคลาดเคลื่อนของน้ำหนักได้ ซึ่งจะมีโอกาสถึง 90% ที่จะหาน้ำหนักรวมรถบรรทุก, น้ำหนักเพลาหลัง และน้ำหนักเพลาหน้าได้คลาดเคลื่อนไม่เกิน ±3.35, ±9.95 และ ±21.12 และมีโอกาสถึง 99% ที่จะหาน้ำหนักรวมรถบรรทุก, น้ำหนักเพลาหลัง และน้ำหนักเพลาหน้าได้คลาดเคลื่อนไม่เกิน ±4.9, ±13.24 และ ±32.6 และจากมาตรฐานของ ASTM E1318-94 โดยจะใช้แยกประเภทของระบบ weight in motion (WIM) ซึ่งจากการทดสอบเมื่อพิจารณาที่ความน่าจะเป็น 95% ก็จะได้

เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของน้ำหนักรวมรถบรรทุก, น้ำหนักเพลาหลัง และน้ำหนักเพลาหน้าไม่เกิน ±3.89%, ±10.85% และ ±25.08% ซึ่งใกล้เคียงกับประเภทที่ 3 ของ ASTM

2.5 การน้ำหนักรถขณะเคลื่อนที่บนสะพานแบบต่อเนื่อง



รูปที่ 2.9 ลักษณะสะพานแบบช่วงเดียว

ลักษณะเงื่อนไขบริเวณจุดรองรับของสะพานแบบช่วงเดียวนั้น สติฟเนสของจุดรองรับจะมีค่าระหว่างสติฟเนสของจุดรองรับแบบข้อหมุน (hinge support) กับสติฟเนสของจุดรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) และค่าสติฟเนสที่ปลายสะพานทั้งสองข้างอาจมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นเราจะจำลองสะพานด้วยแบบจำลองของคานที่มีจุดรองรับแบบข้อหมุนสปริง (rotational spring) ซึ่งมีค่าสติฟเนสของการหมุน (rotational stiffness) ที่ปลายด้านซ้ายและขวาเท่ากับ k_1 และ k_2 ตามลำดับ ซึ่งแทนที่ค่าสติฟเนสที่ปลายของสะพาน ดังรูปที่ 2.10

รูปที่ 2.10 แบบจำลองคานสำหรับสะพานช่วงเดียว

จากแบบจำลองคานในรูปที่ 2.10 เมื่อทำการปรับเทียบ (calibrate) เพื่อหาค่า k_1 และ k_2 ได้แล้ว ก็จะสามารถวิเคราะห์ชิ้นส่วนคานตามทฤษฎีไฟไนต์เอลิเมนต์และนำไปใช้หาน้ำหนักรถได้ตามปกติ โดยหลักการในการปรับเทียบจะได้อธิบายในบทที่ 5

2.5.1 สติฟเนสเมตริกซ์ของแบบจำลองสะพานที่ทำการปรับแก้สภาพจุดรองรับ

จากการสร้างแบบจำลองสะพานด้วยชิ้นส่วนคานที่มีจุดรองรับแบบข้อหมุนสปริง ซึ่งมีค่าสติฟเนสที่ปลายทั้งสองข้าง การวิเคราะห์ชิ้นส่วนคานนี้จะทำการปรับแก้สติฟเนสเมตริกซ์ $[\mathbf{K}]$ ของโครงสร้างที่จะนำไปแทนค่าในสมการการเคลื่อนที่

จากสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลี ดังสมการที่ 2.14

$$\mathbf{K^e} = \frac{E_e I_e}{l_e^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \qquad (2.66)$$

ในการคิดผลของจุดรองรับแบบข้อหมุนสปริง เราจะให้ชิ้นส่วนสปริงเป็นเอลิเมนต์ที่รับแรงกระทำที่ขั้วด้วยแรงกระทำแบบโมเมนต์ดัดเท่านั้น ซึ่งจะมีค่าสติฟเนสที่ปลายเท่ากับ k_1 หรือ k_2 ดังนั้นหากชิ้นส่วนคานที่มีจุดรองรับข้างหนึ่งเป็นข้อหมุนสปริงดังรูปที่ 2.11 จะได้สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานชิ้นนี้ดังนี้

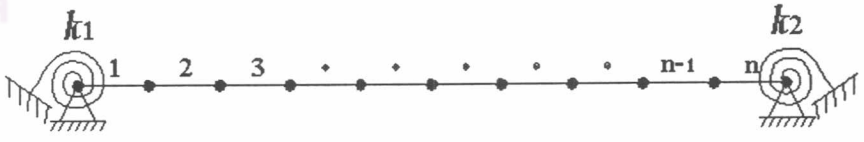
รูปที่ 2.11 ชิ้นส่วนคานที่มีจุดรองรับข้างหนึ่งเป็นข้อหมุนสปริง

ชิ้นส่วนคานด้านซ้าย

$$\mathbf{K^1} = \frac{\mathrm{E_1 I_1}}{l_1^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & \left(4l_1^2+\frac{k_1 l_1^3}{\mathrm{E_1 I_1}}\right) & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix} \qquad (2.67)$$

ชิ้นส่วนคานด้านขวา

$$\mathbf{K^2} = \frac{\mathrm{E_2 I_2}}{l_2^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & \left(4l_2^2+\frac{k_2 l_2^3}{\mathrm{E_2 I_2}}\right) \end{bmatrix} \qquad (2.68)$$



รูปที่ 2.12 รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองสะพาน

จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หากเราจำลองสะพานด้วยการแบ่งชิ้นส่วนคานออกเป็นจำนวน n เอลิเมนต์ดังรูปที่ 2.12 มีคุณสมบัติของหน้าตัดและวัสดุ คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (E) และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของ

สะพาน (I)เช่นเดียวกัน และแบ่งความยาวช่วงแต่ละเอลิเมนต์เท่า ๆ กัน (l) โดยให้ชิ้นส่วนปลายด้านซ้ายสุดและขวาสุดเป็นชิ้นส่วนที่ 1 และชิ้นส่วนที่ n ตามลำดับ จะได้สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนแรกและชิ้นส่วนสุดท้ายดังนี้

เอลิเมนต์แรก

$$\mathbf{K}^{1}=\frac{\mathrm{EI}}{l^{3}}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & \left(4l^{2}+\frac{k_1 l^{3}}{\mathrm{EI}}\right) & -6l & 2l^{2} \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^{2} & -6l & 4l^{2} \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad (2.69)$$

เอลิเมนต์สุดท้าย

$$\mathbf{K}^{n}=\frac{\mathrm{EI}}{l^{3}}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^{2} & -6l & 2l^{2} \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^{2} & -6l & \left(4l^{2}+\frac{k_2 l^{3}}{\mathrm{EI}}\right) \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad (2.70)$$

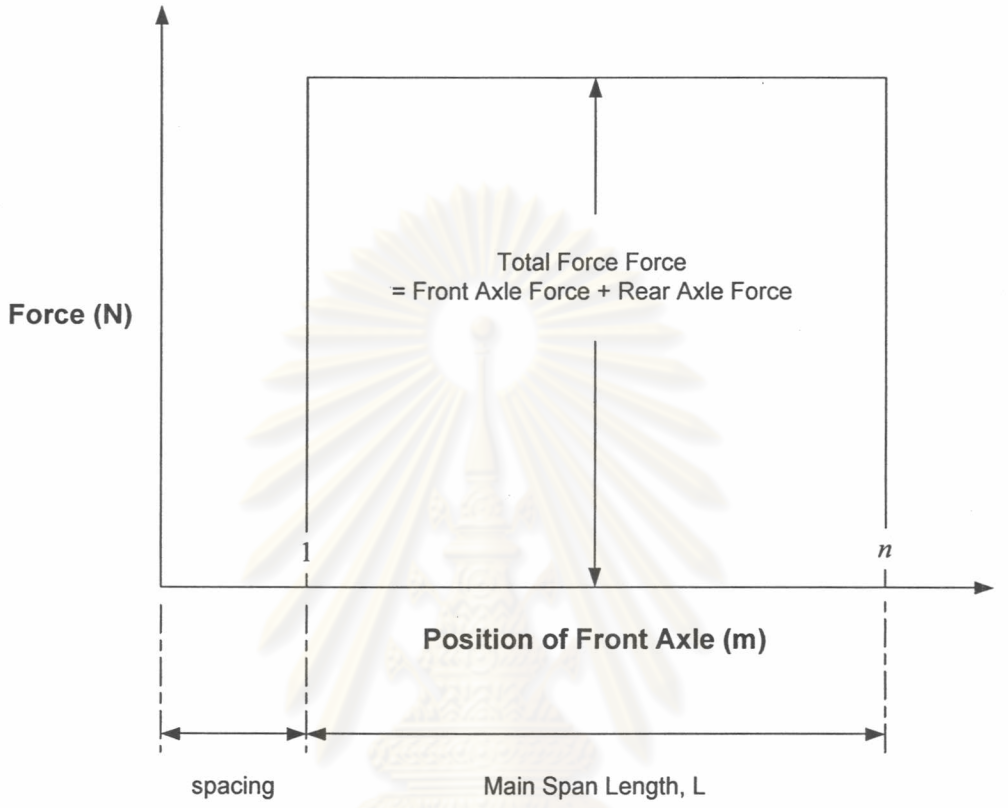
ดังนั้นเราจะสามารถสร้างสติฟเนสเมตริกซ์รวมของโครงสร้างสะพานได้จากการรวม (assembly) สติฟเนสเมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์เข้าด้วยกัน โดยที่เอลิเมนต์แรกจะมีสติฟเนสเมตริกซ์ดังสมการที่ 2.69 เอลิเมนต์สุดท้ายดังสมการที่ 2.70 และเอลิเมนต์ที่เหลือในช่วงกลางก็ใช้สติฟเนสเมตริกซ์ของออยเลอร์-เบอร์นูลลีตามปกติ และนำสติฟเนสเมตริกซ์ทุก ๆ เอลิเมนต์มารวมกันตามหลักสติฟเนสโดยตรง (direct stiffness) ก็จะได้สติฟเนส เมตริกซ์รวม โดยที่สติฟเนสเมตริกซ์รวมของทุก ๆ n เอลิเมนต์ที่ได้ จะเป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $(2n+2)\times(2n+2)$ ดังนี้

$$[\mathbf{K}]=\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{1} & & & \\ & \mathbf{K}^{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}^{n} \end{bmatrix}_{(2n+2)\times(2n+2)} \qquad (2.71)$$

โดยที่สติฟเนสเมตริกซ์รวมที่ได้ ก็จะนำไปแทนค่าในสมการการเคลื่อนที่ในสมการที่ 2.15 และนำไปสู่ขั้นตอนการหาน้ำหนักตามปกติ

สำหรับระบบการเคลื่อนที่ในกรณีนี้ จะแตกต่างกับในกรณีที่เคลื่อนที่บนสะพานช่วงเดียวแบบธรรมดา เนื่องจากในการจำลองคานต่อเนื่อง ด้วยการใช้คานช่วงเดียวที่มีจุดรองรับแบบข้อหมุนสปริงในการวิเคราะห์นั้นจะใช้ได้ในกรณีที่แรงกระทำบนชิ้นส่วนคานกระทำอยู่ในช่วงคานหลักเท่านั้น ดังนั้นในการหาน้ำหนักสำหรับกรณีนี้จะวิเคราะห์ระบบการเคลื่อนที่ของรถเมื่อเพลารถทุกเพลาเคลื่อนที่อยู่บนช่วงสะพานหลักเท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 2.13 ซึ่งการวิเคราะห์ระบบการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้นั้นจะต้องทำการพิจารณาผลของค่าเริ่มต้นของผลตอบสนองของสะพาน (เวคเตอร์ $\mathbf{X}$) ที่แตกต่างกับกรณีรถเคลื่อนที่บนสะพานช่วงเดียวแบบธรรมดา เพราะ

ของผลตอบสนองของสะพานที่จะนำไปใช้ในขั้นตอนการหาน้ำหนักนั้น ไม่ได้เริ่มต้นด้วยจากสภาพหยุดนิ่ง เนื่องจากสะพานจะเริ่มมีการสั่นไหวตั้งแต่ที่รถได้เคลื่อนที่เข้าสู่สะพานช่วงนอกก่อนแล้ว ทำให้ต้องทำการพิจารณาผลของค่าเริ่มต้นของผลตอบสนองของสะพาน (เวคเตอร์ $\mathbf{X}$) ก่อนที่จะนำไปเข้าสู่ขั้นตอนการหาน้ำหนัก



รูปที่ 2.13 ระบบการเคลื่อนที่ของรถบรรทุก 2 เพลาบนสะพานต่อเนื่อง

ดังนั้นจากแรงที่หาได้ จะสามารถแยกและนำมาเฉลี่ยเป็นแรงทางสถิตในเพลาหน้า เพลาหลัง และแรงจากน้ำหนักรวมของรถได้ดังนี้

แรงทางสถิตของเพลาหน้า : $$\mathbf{f}_{front} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{f}_{front}^{iden}\right)}{n} \quad (2.72)$$

แรงทางสถิตของเพลาหลัง : $$\mathbf{f}_{rear} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{f}_{rear}^{iden}\right)}{n} \quad (2.73)$$

แรงทางสถิตของน้ำหนักรวม : $$\mathbf{f}_{total} = \frac{\sum_{i=n_{fr}}^{n_{ff}}\left(\mathbf{f}_{front}^{iden}\right)+\sum_{i=n_{fr}}^{n_{ff}}\left(\mathbf{f}_{rear}^{iden}\right)}{\left(n_{ff}-n_{fr}\right)} \quad (2.74)$$

โดยที่ n คือตำแหน่งของข้อมูลที่เก็บวัด เมื่อเพลาหน้าของรถบรรทุกเคลื่อนที่ออกจากสะพาน