



การพัฒนา โมเดลทางคณิตศาสตร์

2.1 พื้นฐานทางกลศาสตร์

2.1.1 ลំการพื้นฐาน

ก่อนที่จะศึกษา และทบทวนผลการ วิจัยที่ เกี่ยวข้อง กับการลำ เสียง วัลดูโดยอาศัยระนาบ ที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของ การสั่นสะ เทือนขึ้น แรกนี้จะทบทวนกลศาสตร์พื้นฐานที่ใช้ในการศึกษาและตรวจ ล้อบพฤติ กรรมของ อนุภาคเดี่ยวบนระนาบซึ่ง เอียงทำมุม α กับระนาบระดับขณะ เคลื่อนตัวแบบไขว่- วยอดวิธิตรงทำมุม β กับระนาบเอียง ดังรูปที่ 2.1 การสั่นสะ เทือนในแนวนอนและตั้งฉาก กับระนาบลำ เสียงลำสามารถอธิบายได้ดังลំการ

$$x_t = a \cos \beta \sin \omega t \quad 2.1$$

$$y_t = a \sin \beta \sin \omega t \quad 2.2$$

ความเร็วและความเร่งของราง ทั้งล่องทิศทางการลำสามารถหาได้ จากการอนุพันธ์ลំการทั้งล่อง เทียบ เวลา แรงที่กระทำต่ออนุภาคในลำภาวะลំดุลย์ทางพลศาสตร์แสดงไว้ ดังรูปที่ 2.2 โดยการ รวมแรงประ กอบที่กระทำต่ออนุภาคในลำภาวะลំดุลย์จะได้ลំการของการ เคลื่อนที่ของอนุภาค คือ

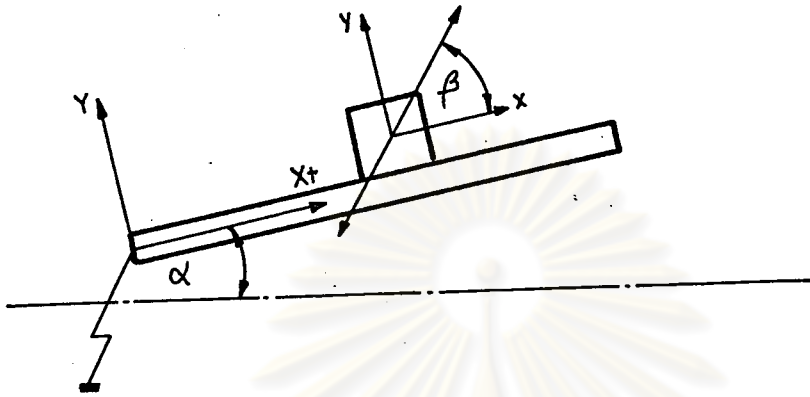
$$m\ddot{x} = F - mg \sin \alpha \quad 2.3$$

$$m\ddot{y} = N - mg \cos \alpha \quad 2.4$$

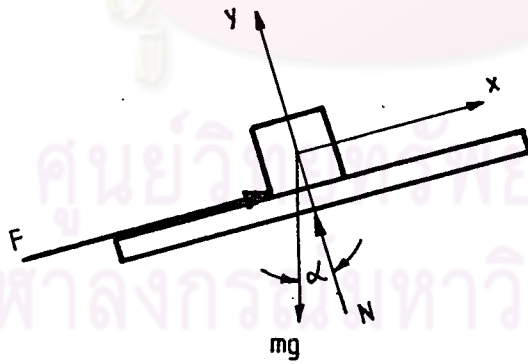
ในระหว่างที่มี การลำ เสียง เกิดขึ้นอนุภาคจะอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรง เชื้อบ เนื่องจากการสั่นสะ เทือน ดังรูปที่ 2.3 ก่อนที่จะเกิดการลอยตัวนั้นอนุภาคจะ เกาะตัวอยู่บนระนาบมีการ เคลื่อนตัว ความเร็ว และความเร่งในแนวแกน y ค่าเดียวกับกับระนาบ เมื่อแทนค่าความเร่งนี้ลงในลំการที่ 2.4 ก็จะได้แรงปฏิกิริยาตั้ง ฉากที่กระทำต่ออนุภาคในช่วงนี้ดังลំการ

$$N = m(g \cos \alpha - a \omega^2 \sin \beta \sin \omega t) \quad 2.5$$

เมื่อแทน N . จากลំการที่ 2.5 ลงในลំการที่ 2.3 จะได้ลំการของการ เคลื่อนที่ของ อนุภาค คือ



รูปที่ 2.1 ระบบพิกัดและมุมอ้างอิง



รูปที่ 2.2 ผังวัตถุอิสระของอนุภาค

$$\ddot{x} = -\mu d(g\cos\alpha - a_n\omega^2 \sin\omega t) - g\sin\alpha \quad 2.6$$

$$\ddot{x} = \mu d(g\cos\alpha - a_n\omega^2 \sin\omega t) - g\sin\alpha \quad 2.7$$

จากสองสมการนี้จะสามารถหาความเร็วและระยะทางในการไถลตัวไปข้างหน้า และถอยหลังที่เป็นฟังก์ชันของเวลาได้

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m บนระนาบที่เคลื่อนตัวแบบไขว้ขอยด์ ซึ่งแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่ค่อย ๆ เพิ่มขึ้นทีละน้อย โดยไม่คำนึงถึงผลของรูปร่างและแรงต้านทางอากาศและสมมุติว่าอนุภาคเคลื่อนไปโดยไม่ก้ำกึ่งบนระนาบ ในขณะที่ระนาบเคลื่อนตัวด้วยความเร่งน้อย ๆ อนุภาคจะยังคงเกาะอยู่บนผิวของระนาบ เนื่องจากแรงเสียดทานของอนุภาคในแนวยาวนานกับระนาบมีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานระหว่างอนุภาคกับผิวของระนาบและหลังจากนั้นถ้าความเร่งเพิ่มขึ้นถึงค่าจำกัดแล้ว การเคลื่อนตัวของอนุภาคก็จะเกิดขึ้น โดยการไถลตัวไปข้างหน้าจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$ma\omega^2 \cos\beta \geq mg\sin\alpha + F \quad 2.8$$

$$\text{โดยที่} \quad F = \mu_s (mg\cos\alpha - ma\omega^2 \sin\beta) \quad 2.9$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่อนุภาคไถลตัวไปข้างหน้าสัมผัสกับผิวของระนาบ สามารถกำหนดได้โดยใช้สมการที่ 2.8 และ 2.9

$$\frac{a\omega^2}{g} (\cos\beta + \mu_s \sin\beta) > \mu_s \cos\alpha + \sin\alpha$$

$$\frac{a\omega^2}{g} > \frac{\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha}{\mu_s \sin\beta + \cos\beta} \quad 2.10$$

และในทำนองเดียวกันการไถลตัวถอยหลังของอนุภาคในวิถีกริดใด ๆ จะเกิดขึ้นเมื่อ

$$mg\sin\alpha \geq ma\omega^2 \cos\beta + F$$

และเงื่อนไขในการไถลตัวถอยหลังสามารถกำหนดได้จาก

$$\frac{a\omega^2}{g} > \frac{\mu_s \cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\beta - \mu_s \sin\beta} \quad 2.11$$

จากสมการที่ 2.5 แรงปฏิกิริยาตั้งฉากที่กระทำต่ออนุภาคจะมีค่า เป็นบวก และจะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ จนมีค่าเป็นศูนย์ก็จะเป็นเวลาที่อนุภาคเริ่มต้นลอยตัว เมื่อเทียบให้ สมการที่ 2.5 เทียบกับศูนย์เราจะได้จุดเริ่มต้นของการลอยตัว ดังนี้

$$a\omega^2 \sin\beta \sin\omega t = g\cos\alpha$$

$$\sin\omega t = \frac{g\cos\alpha}{a\omega^2 \sin\beta} \quad 2.12$$

ในระหว่างการลอยตัวอย่าง อิสระ การเคลื่อนตัวของ อนุภาค จะ เป็นไปตามสมการ

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha \quad 2.13$$

$$\ddot{y} = -g\cos\alpha \quad 2.14$$

จากสมการที่ 2.14 สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูป

$$g\cos\alpha - a\omega^2 \sin\omega t = 0$$

เราจะเห็นว่า อนุภาคจะลอยตัวออกจากผิวของระนาบเมื่อความเร่งสูงสุดในแนวตั้งฉากกับระนาบมีค่ามากกว่า ความเร่ง เนื่องจากความโน้มถ่วงในแนวเดียวกัน หรือ

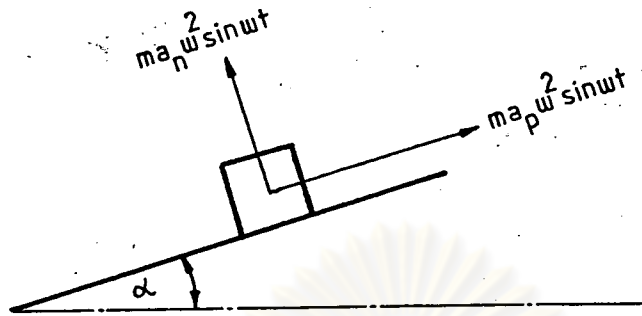
$$\frac{a\omega^2}{g} > \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \quad 2.15$$

เมื่อเรากำหนดให้

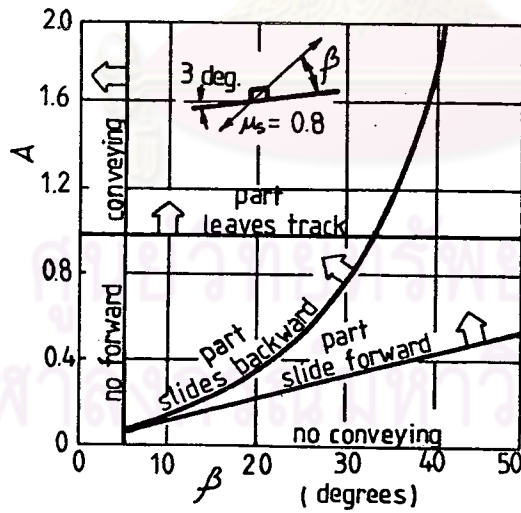
$$A = \frac{A_n}{g_n} = \frac{a\omega^2 \sin\beta}{g\cos\alpha}$$

ค่าของ A นี้เป็นอัตราส่วนระหว่าง ความเร่งสูงสุดของระนาบกับความเร่ง เนื่องจากความโน้มถ่วงในแนวแกน y เราจะเรียกค่า A นี้ว่า "พารามิเตอร์ความเร่ง" จากสมการที่ 2.12 แสดงว่าค่า A นี้จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ และจากสมการที่ 2.15 แสดงว่า A จะต้องมีความมากกว่า 1 ในกรณีที่เรากำลังศึกษาพฤติกรรมของอนุภาคที่มีการลอยตัว

ดังนั้นเงื่อนไขในการเคลื่อนตัวของอนุภาคเหล่านี้สามารถแสดงในเทอมของพารามิเตอร์ของความเร่ง โดยอนุภาคจะมีการลอยตัวเมื่อ



รูปที่ 2.3 แรงเฉื่อยจากกัจรสั่นสะเทือนของรางที่กระทำต่ออนุภาค



รูปที่ 2.4 เงื่อนไขจำกัดการเคลื่อนที่รูปแบบต่างๆ (เรตฟอร์ดและคณะ¹²⁾)

$$A > 1 \quad 2.16$$

เมื่อแทนสมการที่ 2.15 ลงในสมการที่ 2.10 และ 2.11 จะได้เงื่อนไขการไหลตัวของอนุภาค ดังนี้

อนุภาคจะไหลตัวไปข้างหน้าเมื่อ

$$A > \frac{\mu_s + \tan\alpha}{\mu_s + \cot\beta} \quad 2.17$$

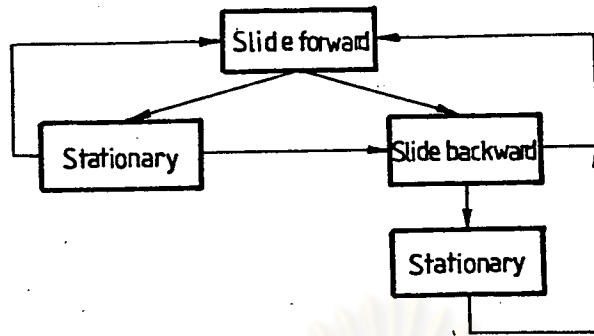
อนุภาคจะไหลตัวถอยหลังเมื่อ

$$A > \frac{\mu_s - \tan\alpha}{\cot\beta - \mu_s} \quad 2.18$$

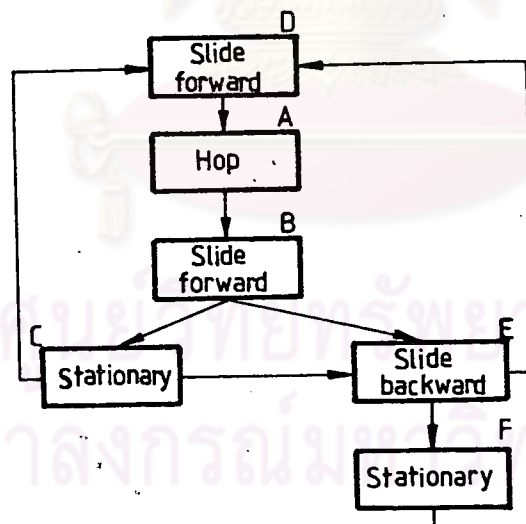
เรตฟอร์ด และคณะ (12) ได้เสนอเงื่อนไขในการจำกัดขอบเขตลักษณะการเคลื่อนที่ในรูปของกราฟระหว่างมุมในการลื่นล้ะเทือน β และพารามิเตอร์ความเร่ง A สำหรับระบบรางลำเลียงแบบเขี่ยที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน $= 0.8$ และมีมุมเอียงของราง $= 3$ องศา ดังรูปที่ 2.4 โดยทั่วไปแล้วในหนึ่งวัฏจักรของการลื่นล้ะเทือนเราพบว่าอนุภาคจะมีการเคลื่อนที่ 4 ลักษณะด้วยกันคือ เกาะอยู่บนราง (Stationary) ไหลไปข้างหน้า (Slide Forward) ไหลถอยหลัง (Slide Backward) และลอยตัวออกจากผิวของราง (Hop) อันดับของการเคลื่อนที่และการประสานการเคลื่อนที่ซึ่งอาจเกิดขึ้นได้นั้นแสดงไว้ในรูปที่ 2.5 และ 2.6 ลักษณะความเป็นไปของการเคลื่อนที่เหล่านี้จะขึ้นอยู่กับ ความถี่และแอมพลิจูดของการลื่นล้ะเทือน โดยที่การเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่จากลักษณะหนึ่งไปสู่อีกลักษณะหนึ่งนั้นจะถูกควบคุมด้วยความเร่งของอนุภาคและตัวแปรที่มีผลต่อสมรรถนะของการลำเลียง ซึ่งสามารถอธิบายได้ในเทอมของความถี่ในการลื่นล้ะเทือน ω แอมพลิจูดในการลื่นล้ะเทือน a มุมลื่นล้ะเทือน β รันาหรือมุมเอียงของราง α และสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัสดุกับผิวของราง μ

2.1.2 การเปลี่ยนรูปแบบของการเคลื่อนที่ในแนวแกน y

ต่อไปนี้จะได้กล่าวถึง เงื่อนไขที่จะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปแบบของการเคลื่อนที่ในระหว่างการเคลื่อนที่ทั้ง 4 แบบ เนื่องจากการลอยตัวมีศักยภาพเหนือกว่าการเคลื่อนที่ทุกแบบใน



รูปที่ 2.5 แสดงถึงการเคลื่อนที่รูปแบบต่างๆ ในกรณีที่อนุภาคไม่ลื่นตัว
(เรตฟอร์ตกับบูธรรอยต์⁵)



รูปที่ 2.6 แสดงถึงการเคลื่อนที่รูปแบบต่างๆ ในกรณีที่อนุภาคลื่นตัว
(เรตฟอร์ตกับบูธรรอยต์⁵)

อันดับแรกนี้จะขอกล่าวถึง การลอยตัวเสียก่อน จากสมการที่ 2.12 การลอยตัวจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\sin \tau_1 = 1/A \quad 2.12$$

จะสังเกตเห็นว่าสมการที่ 2.12 จะให้ค่า τ_1 สองค่าต่อวัฏจักรคือค่าหนึ่งจะอยู่ใน Quadrant ที่ 1 และอีกค่าหนึ่งจะอยู่ใน Quadrant ที่ 2 ถ้าจะทำให้อนุภาคยังคงเกาะอยู่กับระนาบในช่วงนี้ได้มันค่าแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก N จะต้องมีค่าเป็นลบ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ดังนั้นในช่วงเวลานี้จึงเรียกว่า "Definite Fly Zone" คือช่วงเวลาที่อนุภาคไม่สามารถเกาะอยู่กับระนาบได้ ถ้าการตกกระทบเกิดขึ้นในช่วงเวลานี้อนุภาคก็จะลอยตัวขึ้นอีกทันที ค่าความเร่งในแนวแกน y ขณะที่ลอยตัวจากสมการที่ 2.14 เมื่อทำการอินทิเกรตสองครั้งก็จะได้การเคลื่อนตัวในระหว่างการลอยตัว ที่จุดเริ่มต้นของการลอยตัวอนุภาคและระนาบจะมีตำแหน่งในแนวแกน y ค่าเดียวกัน และจะสิ้นสุดการลอยตัวเมื่อตำแหน่งในแนวแกน y เท่ากันอีกครั้งหนึ่ง ดังนั้นเวลาที่เกิดการตกกระทบจะหาได้โดยการเทียบเท่าสมการของการเคลื่อนตัวเหล่านี้หลังจากจัดสมการแล้วจะได้

$$\sin \tau_2 = \frac{2}{B\tau_2^2 + C\tau_2 + D} \quad 2.19$$

โดยที่

$$B = -\sin(\tau_1)/2$$

$$C = \tau_1 \sin \tau_1 + \cos \tau_1$$

$$D = -\tau_1^2 \sin(\tau_1)/2 - \tau_1 \cos \tau_1 + \sin \tau_1$$

จากสมการที่ 2.19 ทำให้เห็นว่าทั้ง τ_1 และ τ_2 จะเป็นฟังก์ชันของ A เท่านั้น เกเบอส์ (6) ได้พล็อตค่าเหล่านี้ขึ้นแล้วแสดงไว้ดังรูปที่ 2.7 และได้ยืนยันว่า τ_2 จะอยู่นอกอาณาเขตของ Definite Fly Zone และสำหรับอนุภาคที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของการกระทบเป็นคู่จะมีพฤติกรรมลอยตัวหนึ่ง ครั้งต่อวัฏจักร จะลอยตัวที่ τ_1 ซึ่งหาได้จากสมการที่ 2.12 และจะคงลอยอยู่จนกระทั่งถึง τ_2 ซึ่งหาค่าได้จากสมการที่ 2.19 ส่วนเวลาที่เหลือในวัฏจักรนั้นอนุภาคจะอยู่บนระนาบ ถ้าพิจารณาอนุภาคที่มีพฤติกรรมลอยตัวหนึ่ง ครั้งต่อวัฏจักรในสภาวะอยู่ตัวแล้วจะทำให้เกิดค่าจำกัดสูงสุดของพารามิเตอร์ความเร่ง A ขึ้นเนื่องจากในพฤติกรรมแบบนี้จุดสิ้นสุดการลอยตัวจะต้องมาถึง ก่อนที่จะมีการลอยตัวครั้งถัดไปหรืออย่างน้อยที่สุดเวลาที่เกิดการตกกระทบจะต้องเป็นเวลาเดียวกันกับเวลาที่เกิดการลอยตัวครั้งต่อไป ดังนั้น

เมื่อกำหนดให้

$$\tau_2 = \tau_1 + 2l$$

แทนลงในสมการที่ 2.19 ก็จะได้ค่าจำกัดสูงสุดของ A เป็น

$$A_{\text{lim}} = \sqrt{l^2 + 1} = 3.297 \quad 2.20$$

ในรูปที่ 2.7 แสดงค่าจำกัดนี้ (A_{lim}) เป็นเส้นประในแนวนอน ดังนั้นในกรณีที่เรากำลังพิจารณาอนุภาคที่มีพฤติกรรมกรรลอยตัวแบบหนึ่งครั้งต่อวัฏจักรแล้วหมายความว่า เราจะมีขอบเขตของการวิเคราะห์อยู่ในช่วง

$$1.0 \leq A \leq \sqrt{l^2 + 1} \quad 2.21$$

2.1.3 ผลลัพธ์จากการตกกระทบ

เวลาที่ใช้ในการกระทบถือว่าเป็นศูนย์ ดังนั้นอนุภาคจะไม่มีการเคลื่อนตัวในช่วงนี้ แต่จะมีการเปลี่ยนทิศทางของความเร็วในทันที ซึ่งรวมถึงการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน x ด้วย โดยปกติแล้วก่อนที่จะเกิดการกระทบความเร็วของอนุภาคจะแตกต่างจากความเร็วของระนาบ และสำหรับระนาบที่มีความเสียดทานแล้วการกระทบจะทำให้เกิดอิมพัลส์ เนื่องจากความเสียดทาน ซึ่งจะมีผลทำให้ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคกับระนาบมีค่าลดลง เกเบอส์สัน (6) ได้กำหนดไว้ว่า การเปลี่ยนแปลงความเร็วสูงสุดในแนวแกน x ในระหว่างการกระทบจะมีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานกับการเปลี่ยนแปลงความเร็วในแนวแกน y ในระหว่างที่เกิดการกระทบ โดยที่การเปลี่ยนแปลงความเร็วในแนวแกน y นี้ก็คือ ผลต่างระหว่างความเร็วของระนาบกับความเร็วของอนุภาค ณ เวลาที่เกิดการกระทบ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงความเร็วสูงสุดนี้แสดงไว้ด้วยสมการ

$$\frac{\Delta \dot{x}}{\psi} = \xi (\tau_2 - \tau_1)/A + \cos \tau_2 - \cos \tau_1 \quad 2.22$$

โดยที่ $\Delta \dot{x}$ เป็นการเปลี่ยนแปลงความเร็วตามแกน x แบบไร้มิติ

$$\Delta \dot{x} = \Delta \dot{x}/aw$$



$$\psi = (\mu + \tan\alpha) \sin\beta$$

$$\xi = \mu / (\mu + \tan\alpha)$$

เนื่องจากกฎเกณฑ์ของความเสียดทานและสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานที่เป็นจริงในระหว่างการกระทบอาจจะซับซ้อนกว่ากฎเกณฑ์ที่ใช้ในสภาวะปกติ เกเบอส์ (6) จึงได้ช้กน้าเอาตัวคูณความเสียดทานระหว่างการกระทบ (Impact Friction Multiplier) ϵ มาชดเชยความซับซ้อนเหล่านี้ และได้ล้มมติต่อไปอีกว่าการเปลี่ยนแปลงความเร็วอันเนื่องมาจากความเสียดทานที่เกิดขึ้นจริง ๆ ระหว่างการกระทบนั้นหาได้จากผลคูณระหว่างการเปลี่ยนแปลงความเร็วที่หาได้จากสมการที่ 2.22 กับค่า ϵ ซึ่งต่อไปจะเรียกว่า "สัมประสิทธิ์ของการกระทบ"

กล่าวโดยสรุป การเปลี่ยนแปลงความเร็วในระหว่างการกระทบ $\epsilon\Delta X$ จะเป็นความเร็วสูงสุดเท่าที่จะมีได้และจะเป็นไปได้ตราบเท่าที่ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคและระนาบมีอยู่จริงขณะกระทบเท่านั้น ถ้าความเร็วทั้งสองเกิดเท่ากันขึ้นระหว่างการกระทบค่าการเปลี่ยนแปลงความเร็วนี้ก็จะเป็ค่าใดค่าหนึ่งซึ่งน้อยกว่า $\epsilon\Delta X$ และผลลัพธ์ที่ได้ก็คือจะเกิดช่วงเวลาที่ต้องตัดสินใจ "Decision Time" ขึ้นคือถ้าก่อนที่จะเกิดการกระทบอนุภาคมีความเร็วในแนวแกน x มากกว่าความเร็วของระนาบในแนวเดียวกันเกินค่า $\epsilon\Delta X$ แล้วความเร็วในแนวแกน x ของอนุภาคจะถูกลดลงไปเป็นจำนวนเท่ากับ $\epsilon\Delta X$ จากนั้นการไหลตัวไปข้างหน้าของอนุภาคจะเกิดขึ้น และในทำนองเดียวกันถ้าก่อนการกระทบอนุภาคมีความเร็วในแนวแกน x น้อยกว่าความเร็วของระนาบในแนวเดียวกันเกินค่า $\epsilon\Delta X$ แล้วความเร็วในแนวแกน x ของอนุภาคจะถูกเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนเท่ากับ $\epsilon\Delta X$ จากนั้นการไหลตัวถอยหลังของอนุภาคจะเกิดขึ้น

2.1.4 การเปลี่ยนรูปแบบของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x

การเปลี่ยนแปลงไปมาระหว่างการเกาะติดกับการไหลตัวจะต้องอาศัยการพิจารณาที่สกลงไปอีก กล่าวคือ การไหลตัวแบบใดก็ตามจะเริ่มต้นและสิ้นสุดในขณะที่ความเร็วของอนุภาคมีค่าเท่ากับความเร็วของระนาบ หมายความว่า การเคลื่อนที่เหล่านี้จะสิ้นสุดลงทันทีที่ความเร็วของอนุภาคและระนาบมีค่าเท่ากัน เพื่อความสะดวกเราจะถือว่าเวลาที่อนุภาคเกาะอยู่บนระนาบด้วยความเร็วของระนาบนั้นเป็น "เวลาของการตัดสินใจ" (Decision Time) ดังนั้นจะกล่าวได้ว่าการเกาะติดจะเกิดขึ้นระหว่างเวลาของการตัดสินใจกับจุดเริ่มต้นหรือสิ้นสุดการไหลตัว

2.1.4.1 แรงเท่าที่ได้กับแรงที่ต้องการ

ในระหว่างการเกาะติดอนุภาคจะมีความเร็วเท่ากับความเร็วของระนาบดังนั้นแรงเสียดทานที่กระทำต่ออนุภาคในช่วงนี้จะต้องเท่ากับผลคูณระหว่างมวลของอนุภาคกับความเร่งของระนาบซึ่งแรงนี้จะเรียกว่า "แรงที่ต้องการให้เกาะติด" และใช้สัญลักษณ์แทนว่า F_r เมื่อแทนค่าความเร่งของระนาบจากสมการที่ 2.1 ลงในสมการที่ 2.3 ซึ่งเป็นสมการสัมมูลย์ทางพลศาสตร์ในแนวแกน x แล้วจะได้แรงที่ต้องการให้เกิดการเกาะติดแบบไร้มิติคือ

$$\frac{\bar{F}_r}{\psi} = \frac{(1 - \xi)}{A} - (\phi - \xi) \sin \omega t \quad 2.23$$

$$\text{โดยที่ } \bar{F}_r = F / m a \omega^2$$

$$\phi = (\mu + \cot \beta) / (\mu + \tan \alpha)$$

$$\text{และ } (\phi - \xi) = \cot \beta / (\mu + \tan \alpha)$$

สมการที่ 2.23 นี้แสดงให้เห็นว่าแรงที่ต้องการมีการเปลี่ยนแปลงแบบไซน์ซอไซด์ และในการที่กำหนดให้ β ไม่เป็นมุมบ้านนั้นจะทำให้แน่ใจได้ว่าค่าแอมพลิจูดของไซน์ซอไซด์นี้จะมีค่าเป็นบวก และดังนั้น F_r จะเป็นลบมากที่สุด ใน Quadrant ที่ 1 และ 2 และจะเป็นบวกมากที่สุด ใน Quadrant ที่ 3 และ 4 เราสามารถที่จะพิสูจน์ได้ว่า F_r จะเป็นลบอย่างแน่นอนใน Quadrant ที่ 1 และ 2 และจะเป็นบวกอย่างแน่นอนใน Quadrant ที่ 3 และ 4 ได้โดยการตรวจสอบค่าแอมพลิจูดของไซน์ซอไซด์ และพจน์ของค่าคงที่ในสมการที่ 2.23 เนื่องจากเราทราบมาแล้วว่า $(\phi - \xi)$ เป็นบวกและเมื่อเราพิจารณาอนุภาคที่สัมผัสการลื่นไถลครั้งแรกต่อวัตถุจักรทั้ง ϕ และ A มีค่ามากกว่า 1 ดังนั้น

$$(\phi - \xi) > \frac{\phi - \xi}{A} > \frac{1 - \xi}{A} \quad 2.24$$

ซึ่งจะทำให้เห็นว่าข้อพิสูจน์นั้นเป็นจริง

เมื่อได้กล่าวถึงแรงที่ต้องการให้อนุภาคเกาะติดกับระนาบแล้วต่อไปนี้จะได้พิจารณาถึง "แรงเสียดทานที่เกิดได้" เมื่อแรงที่ต้องการมีค่ามากกว่าแรงเสียดทานที่เกิดได้แล้วอนุภาคก็จะไม่สามารถเกาะอยู่บนระนาบได้อีกต่อไป แรงเสียดทานที่เกิดได้นี้ก็คือ ผลคูณ

ระหว่างแรงปฏิกิริยาตั้งฉากกับสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานนั่นเอง ซึ่งแรงนี้อาจจะมีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้ขึ้นอยู่กับรูปแบบของการเคลื่อนที่ และเราจะใช้สัญลักษณ์แยกกันระหว่างค่าบวกกับค่าลบ คือ

F_{a_F} เป็นแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นได้ในขณะที่อนุภาคเกิดการไถลตัวไปข้างหน้า

F_{a_B} เป็นแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นได้ในขณะที่อนุภาคเกิดการไถลตัวถอยหลัง

ค่าของแรงทั้งสองนี้ จะเท่ากันแต่ต่างกันในทิศทางเท่านั้น จากสมการที่ 2.6 และ 2.7 ซึ่งเป็นสมการของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x เมื่อคูณด้วยมวลของอนุภาคแล้วจัดสมการจะได้สมการของแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นแบบไร้มิติ คือ

$$\frac{\bar{F}_{a_F}}{\psi} = + \frac{\xi}{A} + \xi \sin \omega t \quad 2.25 (a)$$

และ

$$\frac{\bar{F}_{a_B}}{\psi} = \frac{\xi}{A} - \xi \sin \omega t \quad 2.25 (b)$$

โดยที่

$$\bar{F}_{a_F} = \frac{F_{a_F}}{m a \omega} \quad \text{และ} \quad \bar{F}_{a_B} = \frac{F_{a_B}}{m a \omega} \quad 2.25 (c)$$

2.1.4.2 อาณาเขตที่ไถลตัวไปข้างหน้า (F-Definite Zone)

ในขั้นนี้ จะเห็นแล้วว่า ในส่วนหนึ่งของวัฏจักรเมื่อค่า F_r มีค่าเป็นลบมากกว่า F_{a_F} แล้วการเกาะติดไม่สามารถคงอยู่ได้ ถ้ามีสาเหตุใดก็ตามที่ทำให้อนุภาคมีความเร็วเท่ากับความเร็วของระนาบในอาณาเขตนี้แล้วก็จะเกิดเวลาที่ตึงตืดสนใจขึ้น จากนั้นการไถลตัวไปข้างหน้าของอนุภาคจะเกิดขึ้นทันที อาณาเขตนี้เราเรียกว่า F-Definite Zone ขนาดของอาณาเขตนี้จะหาได้จากการลบค่า F_r ในสมการที่ (2.25 (a)) ออกจากค่า F_{a_F} ในสมการที่ 2.23 แล้วกำหนดให้ค่าที่ได้เป็นลบแล้วจะได้

$$\sin t \geq 1/A\phi \quad 2.26 (a)$$

เนื่องจากผลคูณของ $A\phi$ มีค่าเป็นบวกและมากกว่า 1 อย่างแน่นอนจึงเห็นได้ว่าอาณาเขตที่มีจุดกึ่งกลางอยู่ที่ $\pi/2$ ซึ่งเป็นจุดที่ล้มการให้ค่าสูงที่สุดโดยอาศัยหลักการพิจารณาค่าไม่เกิน 2π ขอบเขตของ F-Definite Zone อาจจะสามารถแสดงได้ด้วยนิพจน์

$$\tau_{Fb} = \sin^{-1}(1/A\phi) \quad 2.26(b)$$

$$\tau_{Fe} = \pi - \sin^{-1}(1/A\phi) \quad 2.26(c)$$

จากล้มการข้างบนนี้เข้าไปสู่จุดสำคัญอีกจุดหนึ่งจากเงื่อนไขที่ว่า $\phi > 1$ (ยกเว้นเมื่อ $\alpha + \beta = \pi/2$ ซึ่งค่า $\sin\tau_{Fb}$ จะเท่ากับ $\sin\tau_1$) $\sin\tau_{Fb}$ จะน้อยกว่า $\sin\tau_1$ เสมอ และเนื่องจากมุมทั้งสองจะต้องอยู่ใน Quadrant ที่ 1 จึงสรุปได้ว่า

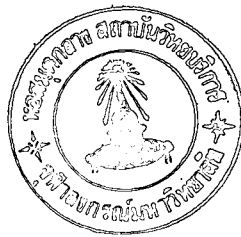
$$\tau_{Fb} \leq \tau_1 \quad 2.27$$

ดังนั้นถ้าการเกาะติดเกิดขึ้นใน Quadrant ที่ 1 รูปแบบการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนแปลงไปสู่การไหลตัวไปข้างหน้าก่อนการลอยตัวเสมอ ยกเว้นกรณีพิเศษเมื่อ $(\alpha + \beta) = \pi/2$ เท่านั้นที่การเกาะติดจะยืดเวลาไปจนถึงเวลาของการลอยตัว

เนื่องจากทั้ง "F-Definite Zone" และ "Definite Fly Zone" ต่างก็อยู่ใน Quadrant ที่ 1 และ 2 เราจึงจำเป็นต้องพิจารณาผลที่เกิดจากการคาบเกี่ยวของเวลานี้ให้ชัดเจน Definite Fly Zone จะมีคีย์เหนือกว่า เพราะการที่จะเกิดการไหลตัวได้นั้น อนุภาคจะต้องเกาะอยู่บนระนาบ และจะมีส่วนหนึ่งของ F-Definite Zone เกิดขึ้นก่อน Definite Fly Zone เสมอ อย่างไรก็ตามในกรณีที่พารามิเตอร์ความเร่ง A มีค่าต่ำมาก ๆ τ_2 หรือเวลาของการกระทบจะสามารถเกิดขึ้นก่อน τ_{Fe} และส่วนที่เหลือของ F-Definite Zone ซึ่งจะทำให้เกิดการไหลตัวไปข้างหน้าตามหลังเวลาของการกระทบนี้จะเป็นปัจจัยที่ทำให้เกิดการความซับซ้อนขึ้นในการวิเคราะห์ และนำไปสู่ผลลัพธ์ที่แตกต่างกันมากมาย ดังนั้นจึงควรพิจารณาความเป็นไปอย่างรอบคอบสำหรับการศึกษาในกรณีนี้

2.1.4.3 อาณาเขตที่ไหลตัวถอยหลัง (B-Definite Zone)

จากนี้จะได้พิจารณาถึงความเป็นจริงของอาณาเขตที่อนุภาคไหลตัวถอยหลัง "B-Definite Zone" ซึ่งเป็นส่วนของวัฏจักรที่แรงที่ต้องการให้เกาะติดค่าบวก Fr มี



ค่ามากกว่าแรงเสียดทานที่เกิดได้ F_{a_B} เมื่อเราพิจารณาเปรียบเทียบระหว่างนิพจน์ F_r ในสมการที่ 2.23 กับนิพจน์ F_{a_B} ในสมการที่ 2.25(b) เนื่องจาก $\xi > 1/2$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของ F_{a_B} จะมากกว่าค่าเฉลี่ยของ F_r เสมอ นอกจากนี้แอมพลิจูดของเทอมไซน์ซายด์ในแต่ละนิพจน์จะต้องเป็นลบ ($\xi > 1/2, (\phi - \xi) > 0$) ดังนั้นกราฟของสมการทั้งคู่จึงมีจุดสูงสุดที่ $3\pi/2$ ดังรูปที่ 2.8 ประกอบกับเงื่อนไขล่องช้อยข้างต้นจะเห็นว่า F_r จะมีค่ามากกว่า F_{a_B} ได้เฉพาะใน Quadrant ที่ 3 และ 4 เท่านั้น และค่าสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ $3\pi/2$ ดังนั้นจุดที่กราฟทั้งสองมีค่าเท่ากันก็คือขอบเขตของ B-Definite Zone ซึ่งมี τ_{Bb} เป็นจุดเริ่มต้น และ τ_{Be} เป็นจุดสิ้นสุด จากนั้นเราลองพิจารณาความแตกต่างระหว่าง F_r และ F_{a_B} โดยนำสมการที่ 2.25(b) ลบออกจากสมการที่ 2.23 แล้วพิจารณาเฉพาะค่าความแตกต่างที่เป็นบวก ซึ่งจำเป็นต่อการเกิด B-Definite Zone

$$\frac{\bar{F}_r}{\psi} - \frac{\bar{F}_{a_B}}{\psi} = \frac{1 - 2\xi}{A} - (\phi - 2\xi) \sin\omega t \geq 0 \quad 2.27(a)$$

นิพจน์นี้เป็นฟังก์ชันของไซน์ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นลบ เนื่องจาก $\xi > 1/2$ ในกรณีที่ให้เกิด B-Definite Zone ได้นั้นนิพจน์นี้จะต้องมีค่าเป็นบวกที่ $3\pi/2$ หรืออาจจะเขียนได้ว่า

$$\frac{1 - 2\xi}{A} - (2\xi - \phi) > 0 \quad 2.27(b)$$

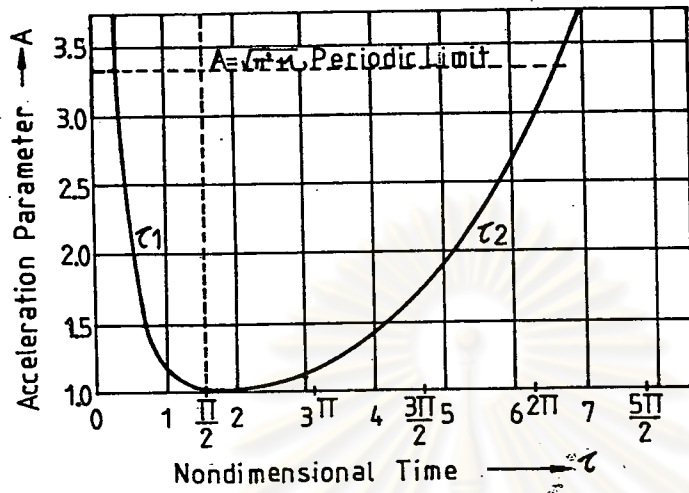
สมการที่ 2.27(b) นี้จะเป็นเงื่อนไขจำเป็นและพอเพียงสำหรับการเกิด B-Definite Zone ขอบเขตของอาณาเขตนี้จะกำหนดได้เมื่อจัดให้สมการที่ 2.27(b) นี้มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะได้อผลลัพธ์เป็นล่องค่า ดังสมการ

$$\sin\omega t = \frac{2\xi - 1}{2\xi - \phi} \cdot \frac{1}{A} \quad 2.28(a)$$

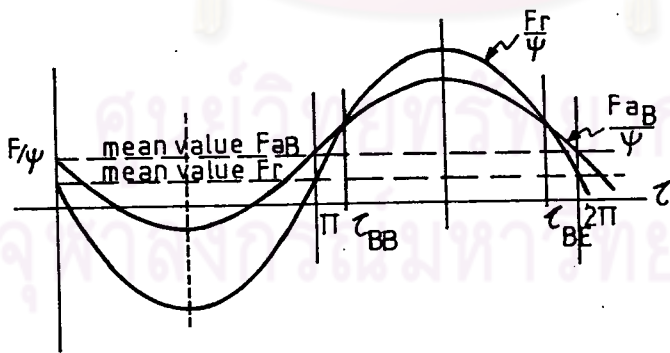
โดยที่ τ_{Bb} จะต้องอยู่ใน Quadrant ที่ 3 และ τ_{Be} จะต้องอยู่ใน Quadrant ที่ 4 ดังนั้นขอบเขตของอาณาเขตนี้สามารถกำหนดได้ ดังสมการ

$$\tau_{Bb} = \pi - \sin^{-1} \left[\left\{ (2\xi - 1)/(2\xi - \phi) \right\} (1/A) \right] \quad 2.28(b)$$

$$\tau_{Be} = 2\pi + \sin^{-1} \left[\left\{ (2\xi - 1)/(2\xi - \phi) \right\} (1/A) \right] \quad 2.28(c)$$



รูปที่ 2.7 จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดการลอยตัวซึ่งเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ ความเร่ง (เกเบอส์สัน⁶)



รูปที่ 2.8 การเปรียบเทียบระหว่างแรงที่ต้องการและแรงที่มีขณะไหลตัวถอยหลัง ซึ่งแสดงให้เห็นว่าอาณาเขตในการไหลตัวถอยหลังมีจริง (เกเบอส์สัน⁶)

2.1.4.4 การยุติการสิ้นโถล (Slide Termination)

การโถลตัวใด ๆ จะสิ้นสุดลงโดยเงื่อนไขหนึ่งในสองเงื่อนไขที่เห็นได้ชัดก็คือ การโถลตัวใดที่เกิดขึ้นในช่วงก่อนที่จะถึงเวลาของการลอยตัวก็จะสิ้นสุดลงที่เวลาของการลอยตัว ส่วนการโถลตัวชนิดอื่น ๆ จะยุติลงเมื่อความเร็วของอนุภาคมีค่าเท่ากับความเร็วของระนาบคือที่ Decision Time และข้อเท็จจริงที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการทำนายถึงลักษณะของคำตอบก็คือ เงื่อนไขที่ว่าไม่มีการโถลตัวใด ๆ จะสามารถยุติลงที่ Definite Zone ของตัวมันเอง ยกเว้นกรณีที่มีการโถลตัวไปข้างหน้าซึ่งยุติที่เวลาของการลอยตัว สมพันธ์ภาพที่ใช้ในการหาเวลาที่จุดยุติการโถลตัวได้มาจากการเทียบเท่ากันระหว่างความเร็วของอนุภาคขณะโถลตัวกับความเร็วของระนาบโดยเวลาของการยุติการโถลตัวไปข้างหน้า τ_{Ft} หาได้จากการเทียบเท่าความเร็วที่หาได้จากสมการที่ 2.6 กับความเร็วที่หาได้จากสมการที่ 2.1 ซึ่งจะได้

$$\cos \tau_{Ft} + 1/(A\phi)\tau_{Ft} - 1/\phi \left[\tau_{i}/A + \xi \cos \tau_{i} + \dot{X}(\tau_{i})/\psi \right] = 0 \quad 2.29$$

และเวลาของการยุติการโถลตัวถอยหลัง τ_{Bt} จะหาได้จากการเทียบเท่าความเร็วที่หาได้จากสมการที่ 2.7 กับความเร็วที่หาได้จากสมการที่ 2.1 ซึ่งจะได้

$$\cos \tau_{Bt} + 1/A \left[(2\xi - 1)/(2\xi - \phi) \right] \tau_{Bt} + 1/(2\xi - \phi) \left[-(2\xi - 1)\tau_{i}/A - \xi \cos \tau_{i} + \dot{X}(\tau_{i})/\psi \right] = 0 \quad 2.30$$

2.1.5 สรุปทฤษฎี

ก่อนที่จะจบหัวข้อนี้ เห็นเป็นการสมควรที่จะทบทวนจุดสำคัญของทฤษฎีการเคลื่อนตัวของอนุภาคใน 2 มิติ ซึ่งมีสาระพอสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. ระนาบที่ใช้จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า α จะต้องน้อยกว่ามุมของความเสียดทาน และ β จะต้องไม่เป็นมุมป้าน
2. อนุภาคจะมีพฤติกรรมการลอยตัวหนึ่งครั้งต่อวัฏจักรเมื่อพารามิเตอร์ความเร่ง A สอดคล้องกับสมการที่ 2.21
3. การเคลื่อนที่ในแนวแกน x จะเป็นไปได้ 4 แบบ คือ โถลตัวไปข้างหน้า โถลตัวถอยหลัง เกาะติดกับระนาบและลอยตัว สมการของการเคลื่อนที่ดังกล่าวคือ 2.6 2.7

2.1 และ 2.12

4. ขอบเขตของ "F-Definite Zone" คือ τ_{Fb} และ τ_{Fe} ซึ่งหาได้จากสมการที่ 2.26
5. "B-Definite Zone" จะเกิดขึ้นได้นั้นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ 2.27
6. ถ้าเกิด "B-Definite Zone" ขึ้น ขอบเขตของอาณาเขตนี้คือ τ_{Bb} และ τ_{Be} ซึ่งหาได้จากสมการที่ 2.28
7. การเกาะติดจะเกิดขึ้นในระหว่างอาณาเขตของการไหลตัวเท่านั้นและจะต้องยุติเมื่อเริ่มต้นอาณาเขตของการไหลตัวถัดไป
8. เมื่อพารามิเตอร์ความเร่งมีค่าต่ำมาก ๆ เป็นไปได้ที่ τ_{Fe} จะมีค่าเกิน τ_2 ออกไป ซึ่งจะทำให้ค่าตอบซับซ้อนขึ้น
9. การไหลตัวจะต้องยุติที่เวลาของการลอยตัวหรือที่ Decision Time ซึ่งหาได้จากสมการที่ 2.29 และ 2.30
10. การไหลตัวไม่สามารถยุติได้ในอาณาเขตของตัวเอง
11. การตกกระทบก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความเร็วและผลลัพธ์จะทำให้เกิดการไหลตัว หรือไม่ก็เกิด Decision Time
12. ถ้า Decision Time เกิดขึ้นในอาณาเขตของการไหลตัวการไหลตัวนี้จะต้องเกิดขึ้นถ้าไม่เกิดการเกาะติด

2.2 การทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 การเคลื่อนตัวของอนุภาคเดี่ยว

เจ. ซี. ริชาร์ด (1) ได้รายงานผลการวิจัยเกี่ยวกับการส่าเสียง วัสดุโดยอาศัยการสั่นสะเทือนของนักวิจัยในยุคแรก ๆ ไว้ว่า ถูกแมนได้ศึกษาและวิเคราะห์การส่าเสียงของอนุภาคบนรางส่าเสียงแบบเขย่า 2 แบบ คือ แบบแรกให้การสั่นสะเทือนกระทำในแนวเดียวกับระนาบและกำหนดให้สัมพันธ์กับความเสียดทานและน้ำหนักของวัสดุมีค่าคงที่ แล้วหาอัตรา การเคลื่อนตัวของ

วัดด้วยกราฟ โดยพิจารณาเฉพาะช่วงความเร่งที่จำกัดให้วัตถุไถลตัวอยู่บนราง และสังเกตว่า วัตถุเคลื่อนตัวอยู่บนรางด้วยอัตราหนึ่งคงที่ μg จนถึงสภาวะที่ความเร่งของวัตถุมีค่าเท่ากับรางลื่นเสีย เมื่อหาระยะทางในการเคลื่อนตัวครบวัฏจักรได้แล้วจึงหาความเร็วเฉลี่ยในการเคลื่อนที่ของ วัตถุจากพื้นที่ของกราฟระหว่างความเร็วกับเวลา ในแบบที่ล่องหนมันไถ่น้ำการเคลื่อนที่ในแนวตั้งมาพิจารณา รวมกับการเคลื่อนที่ในแนวระดับ ซึ่งในกรณีนี้แรงปฏิกิริยาตั้งฉากจะมีค่าลดลงในสภาวะถอยกลับของราง โดยการวิเคราะห์ด้วยกราฟเช่นเดียวกับวิธีแรก ระยะทางของการเคลื่อนที่ของ วัตถุจะหาได้จาก การแยกอินทิเกรตแต่ละช่วงจนครบวัฏจักรแล้วนำไปใช้ในการคำนวณหาความเร็วเฉลี่ยของ วัตถุ

เบอร์ (1) ได้ศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาค บนรางลื่นในแนวระดับ ซึ่งเคลื่อนตัวแบบไขว่ขอยต์ทำมุม β กับแนวระดับ ในขั้นแรกเบอร์ชี้ให้เห็นถึงลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคบนราง 4 แบบ ซึ่งขึ้นอยู่กับความถี่ของการเคลื่อนที่คือ

1. อนุภาคจะเกาะติดกับราง (Stationary)

$$0 < \omega^2 < g\mu_s / (a_p - a_n\mu_s) \quad 2.31$$

2. อนุภาคจะเกิดการไถลตัวช่วงหนึ่งแล้วหยุดนิ่ง (Stick Slide) ถ้า

$$\frac{g\mu_s}{a_p + a_n\mu_s} < \omega^2 < \frac{g\mu_s}{a_p - a_n\mu_s} \quad 2.32$$

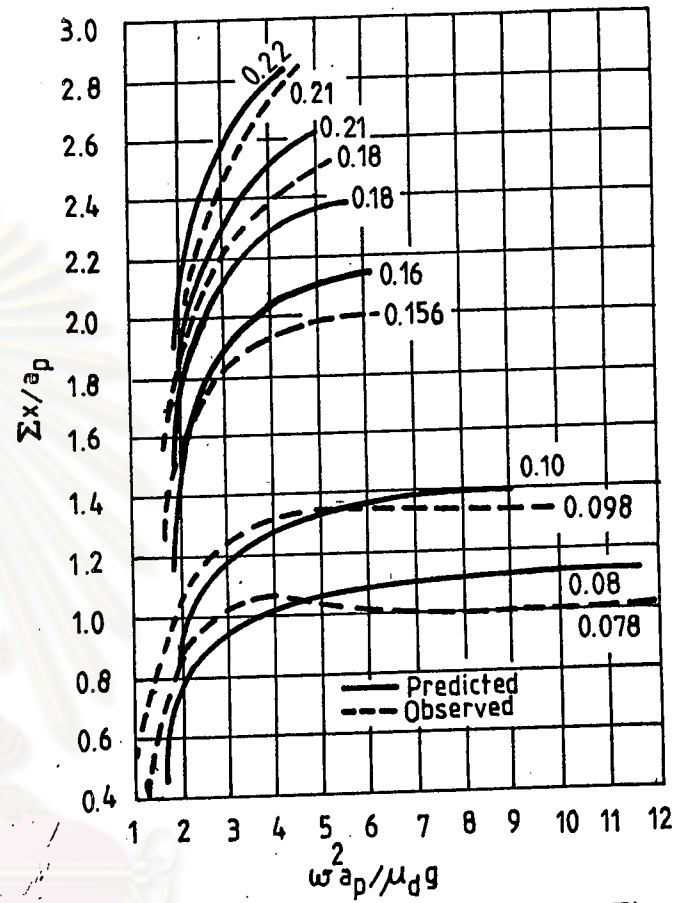
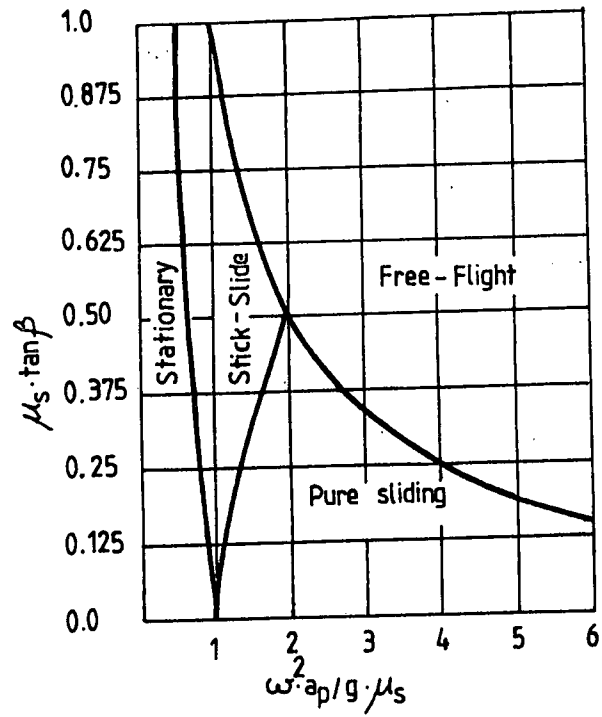
3. อนุภาคจะไถลตัวตลอดเวลา (Pure Slide) ถ้า

$$\frac{g\mu_s}{a_p - a_n\mu_s} < \omega^2 < \frac{g}{a_n} \quad 2.33$$

4. อนุภาคจะไถลตัวช่วงหนึ่งแล้วจะลอยตัว (Free Flight) ในส่วนของวัฏจักรที่เหลือ ถ้า

$$\frac{g}{a_n} < \omega^2 \quad 2.34$$

ผลของการอนุพันธ์เงื่อนไขที่ใช้กำหนดการเคลื่อนที่ในสภาวะต่าง ๆ ได้แสดงไว้ในรูปของกราฟ ดังรูปที่ 2.9 ซึ่งชี้ให้เห็นว่า เมื่อเพิ่มความเร่งในแนวขนานกับรางแล้ว แนวโน้มการเคลื่อนที่ของ



รูปที่ 2.9 ขอบเขตแสดงให้เห็นว่าอนุภาคมีการเคลื่อนที่รูปแบบต่างๆ (เบอร์ 1)

รูปที่ 2.10 การเปรียบเทียบระหว่างผลทางทฤษฎีและผลการทดลองของเบอร์ 1

อนุภาคจะอยู่ในสภาวะของการไหลตัวตลอดเวลา และถ้าความเร่งถูกเพิ่มขึ้นจนถึงค่าจำกัดที่แน่นอนค่าหนึ่งแล้วอนุภาคจะไหลตัวช่วงหนึ่งแล้วจะลอยตัวหนึ่งครั้งในแต่ละวัฏจักรของการสั่นสะเทือน

แต่เบอร์ได้ทำการวิเคราะห์ครอบคลุมถึงเฉพาะการเคลื่อนที่แบบที่ 3 เท่านั้น

โดยกำหนดสมการของการเคลื่อนที่ของอนุภาคไว้ด้วยนิพจน์

$$\ddot{x} = \pm \mu d g (1 - a_{\eta}^2 \sin^2 \omega t / g) \quad 2.35$$

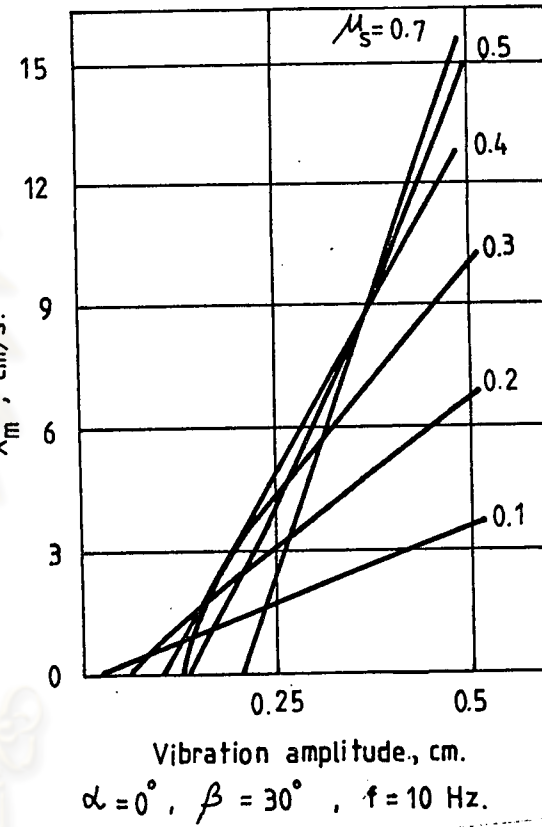
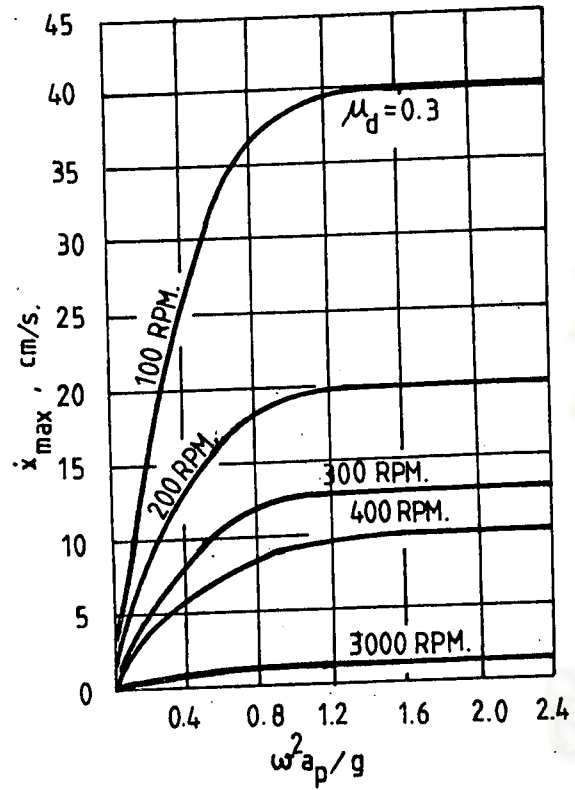
โดยที่เครื่องหมายลบจะถูกนำมาใช้เมื่อความเร่งของอนุภาคมีค่ามากกว่าความเร่งของราง . แล้วหาคำตอบของสมการอนุพันธ์แบบไรเชิงเส้นในสภาวะอยู่ตัว ซึ่งอยู่ในรูปของสมการแบบทรานซีเดนทัล โดยใช้วิธีการฟลักซ์มาแสดงผลที่ได้มา แสดงให้เห็นถึงสัมพันธ์ภาพระหว่างอัตราส่วนของความเร่งเคลื่อนตัวกับอัตราส่วนของความเร่ง ดังรูปที่ 2.10

เพื่อที่จะตรวจสอบพื้นฐานทางทฤษฎีของเขาเบอร์ได้ทำการทดลองกับขั้ววัลดูและวัลดูมวลขึ้นบาง ๆ ผลที่ได้แสดงไว้ดังรูปที่ 2.10 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องเป็นอย่างดีระหว่างการทำนายทางทฤษฎีและการทดลอง จากนั้นเขาจึงให้ข้อสรุปไว้ว่า "ความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงวัลดูจะขึ้นอยู่กับความเร่งของราง" และได้แสดงผลทางทฤษฎีไว้ดังรูปที่ 2.11 ซึ่งชี้ให้เห็นผลของความถี่ในการสั่นสะเทือนที่ทำให้ความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงเพิ่มขึ้นเมื่อลดความถี่ลง

บอร์ กับ แมคคัลเลียน (3) ได้เล่นอผลการศึกษาในลักษณะที่คล้ายคลึงกับ เบอร์ พอสรุปได้ว่า วัลดูบนราง เขย่าอาจจะถูกลำเลียงได้ โดยทำให้เคลื่อนที่แบบไหลตัวหรือประสานกันระหว่างการไหลตัวกับการลอยตัวอย่างอิสระ แต่ได้จำกัดขอบเขตของการวิเคราะห์ไว้เฉพาะการลำเลียงวัลดูที่เกิดขึ้น เนื่องจากการไหลตัวเท่านั้น โดยมีแนวความคิดว่าการลำเลียงในแบบที่มีการลอยตัวด้วยนั้นอาจจะทำให้วัลดูเกิดการชำรุดเสียหายและเกิดเสียงดังได้ในระหว่างการลำเลียง เนื่องจากการกระทบกระแทกกับผิวของรางหลังจากสิ้นสุดการลอยตัว โดยสัมมุติให้ความเสียดทานที่เกิดขึ้นมีค่า เท่า กับความเสียดทานสถิตยและคงที่แล้วกำหนดให้สมการของการเคลื่อนที่ของอนุภาค คือ

$$\ddot{x} = \pm \mu s (g \cos \alpha - a \omega^2 \sin \beta \sin \omega t) - g \sin \alpha \quad 2.36$$

โดยมีเงื่อนไขในการไหลตัวไปข้างหน้าเมื่อ



รูปที่ 2.11 สัมพันธภาพระหว่างความเร็วเฉลี่ยในการล่าเสียงสูงสุดของอนุภาค กับความเร่งในแนวนอนกับราบ (เบอร์¹)

รูปที่ 2.12 ผลการทำนายของบูร์ กับ แมคคัลเลน³

$$\sin\omega t_{Fb} \geq g/aw^2 \left[(\sin\alpha + \cos\alpha)/(\cos\beta + \mu_s \sin\beta) \right] \quad 2.37$$

และไกลตัวถอยหลัง เมื่อ

$$\sin\omega t_{Bb} \geq g/aw^2 \left[(\sin\alpha - \cos\alpha)/(\cos\beta - \mu_s \sin\beta) \right] \quad 2.38$$

และในที่สุดได้เส้นอผลการคำนวณทางทฤษฎีสำหรับมุมเอียงของระนาบ 0° , 4° , 18° , และ -4° 18° ไว้ดังรูปที่ 2.12 2.13 และ 2.14 ตามลำดับ สัมพันธ์ภาพระหว่างความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงกับแอมพลิจูดของการสั่นสะเทือน สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิตยต่าง ๆ กันแสดงให้เห็นถึงแนวโน้มที่ความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงจะเพิ่มขึ้นเมื่อสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานมีค่าสูงขึ้น และนอกจากนี้ผลของการคำนวณยังชี้ให้เห็นว่า สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานค่าใด ๆ แล้วความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงจะลดลงเมื่อมุมเอียงของรางมีค่ามากขึ้นเพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการวิเคราะห์ทางทฤษฎี บุร กับ แมคคินสัน ได้ทำการทดลองกับวัสดุต่าง ๆ เช่น แท่งเหล็ก ท่อ เหล็กรูปทรงกระบอก และก้อนกรวด ผลที่ได้สำหรับเหล็กที่เคลื่อนตัวบนรางเหล็ก ดังรูปที่ 2.15 แสดงความสอดคล้องที่สมเหตุสมผลกับการทำนายทางทฤษฎีและนำไปสู่ข้อสรุปว่า "เมื่อมุมเอียงของระนาบมากขึ้นความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงจะมีค่าลดลง"

เพื่อจุดประสงค์ในทางปฏิบัติ เขาทั้งสองได้พัฒนาสูตรสำเร็จเพื่อประมาณความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงขึ้นโดยอาศัยผลการคำนวณที่ได้จากรูป 2.12 2.13 และ 2.14 ดังสมการ

$$\bar{x}_m = Kf(a - a_0) \quad 2.39$$

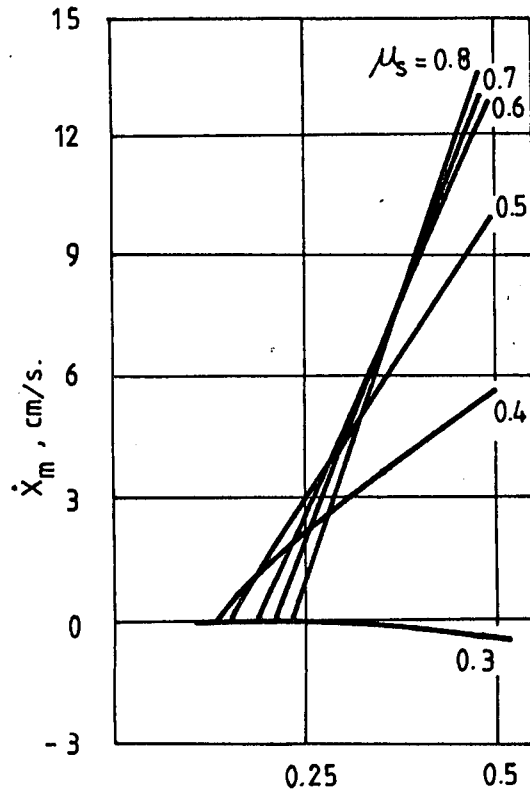
โดยที่ K คือค่าคงที่ของสัดส่วนซึ่งกำหนดไว้ในตารางที่ 2.1

f คือความถี่ในการสั่นสะเทือน

a คือแอมพลิจูดของการสั่นสะเทือน cm.

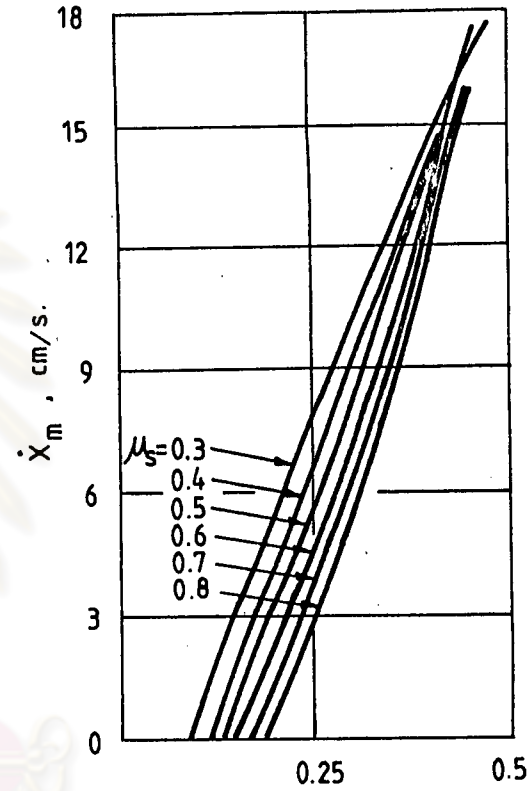
a_0 เป็นค่าที่หาได้จากนิพจน์

$$a_0 = 1.28g/\omega^2 \left[(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha)/(\cos\beta + \mu_s \sin\beta) \right] \quad \text{cm}$$



Vibration amplitude, cm.
 $\alpha = 4^\circ 18'$, $\beta = 30^\circ$, $f = 10$ Hz.

รูปที่ 2.13 ผลการทำนายของบูธ กับ แมคคัลเลน³



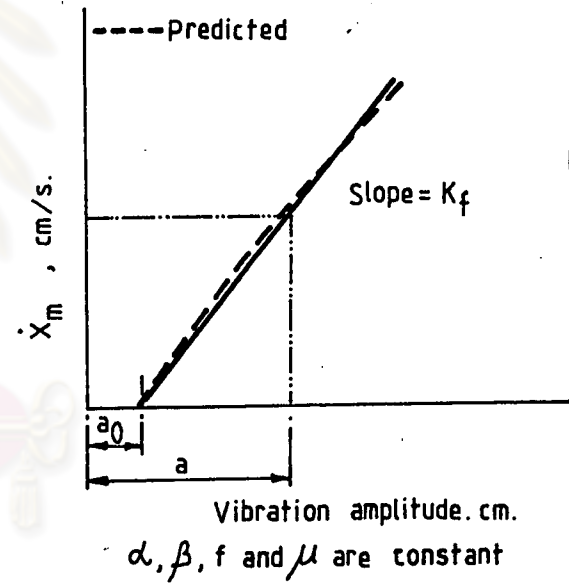
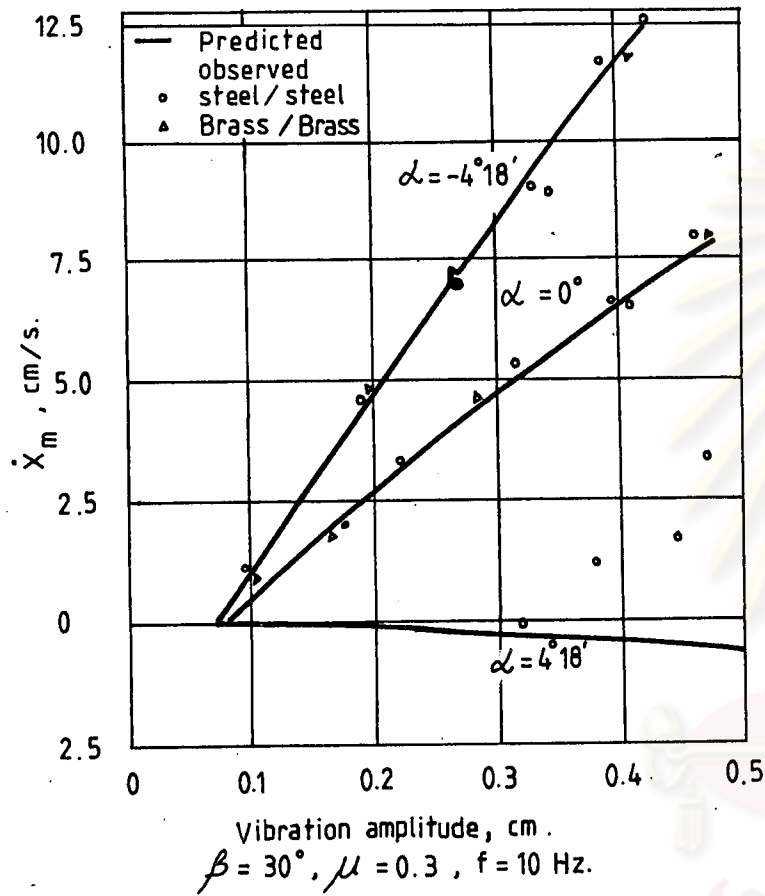
Vibration amplitude, cm.
 $\alpha = -4^\circ 18'$, $\beta = 30^\circ$, $f = 10$ Hz.

รูปที่ 2.14 ผลการทำนายของบูธ กับ แมคคัลเลน³

โดยที่ a_0 นี้ก็คือจุดตัดของกราฟกับแกนในแนวระดับดังรูปที่ 2.16 ซึ่งได้อนุพันธ์มาจากกราฟในรูปที่ 2.12 2.13 และ 2.14 ซึ่งมีลักษณะเกือบจะเป็นเส้นตรงซึ่งมีความลาดชัน Kf . ดังปรากฏในสมการที่ 2.39 แสดงให้เห็นว่าการสั่นของอนุภาคจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อแอมพลิจูดในการสั่นสะเทือนของรางจะต้องมีค่ามากกว่า a_0 และยังคงแสดงเป็นหลักฐานให้เห็นว่าสำหรับแอมพลิจูดในการสั่นสะเทือนใด ๆ แล้วถ้าให้ตัวแปรอื่น ๆ เช่น α β และ μR คงที่แล้ว ความถี่ในการสั่นสะเทือนจะมีผลโดยตรงต่อความเร็วของการสั่นสะเทือน ซึ่งจะเพิ่มขึ้นเมื่อความถี่ในการสั่นสะเทือนมีค่าสูงขึ้น

ตารางที่ 2.1 ค่าคงที่ K ของ (บูธ กับ แมคคัตสัน³)

มุมเอียง ของราง	มุมสั่น สะเทือน	สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน						
		0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
4.3	10	-	-	-	-	0.270	0.810	1.260
	20	-	-	0.180	1.260	2.250	3.100	3.915
	30	-	-	1.645	2.982	3.857	4.382	4.855
0	10	0.504	0.778	1.051	1.368	1.692	2.030	2.376
	20	1.088	1.696	2.240	2.856	3.392	3.936	4.480
	30	1.718	2.613	2.456	4.114	4.577	4.886	4.886
	40	2.220	3.204	3.840	4.365	4.320	4.368	4.320
-4.3	10	-	3.692	3.538	3.425	3.373	3.445	3.723
	20	-	3.798	3.996	4.203	4.410	4.599	4.797
	30	-	4.278	4.512	4.703	4.896	5.091	5.143



รูปที่ 2.15 การเปรียบเทียบระหว่างผลทางทฤษฎีและผลการทดลองของคู่กับแมคคัลเส้น³

รูปที่ 2.16 ผลทางทฤษฎีที่ได้ถูกปรับให้เป็นกราฟเส้นตรง (จุดกับแมคคัลเส้น³)

คริชาติ ชานาญสิต (4) ได้เล่นนทฤษฎีการลำเสียงในแนวทางเดียวกับ เบอร์
 ดังรูปที่ 2.17 โดยกำหนดสมการในการเคลื่อนตัวของรางไว้ด้วยนิพจน์

$$x_t = a(1 - \cos \omega t) \quad 2.40$$

โดยสมมติให้การเคลื่อนตัวของวัสดุเป็นไปอย่างช้า แล้วกำหนดเงื่อนไขควบคุมการเคลื่อนตัวของ
 วัสดุไว้ดังนี้

วัสดุจะไหลตัวไปข้างหน้า เมื่อ

$$\cos \theta_1 = - \frac{g\mu/a\omega^2}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \quad 2.41$$

และจะหยุดเคลื่อนที่เมื่อความเร่งของรางกับวัสดุมีค่าเท่ากันที่ θ_2 แล้วได้กำหนดสมการที่ใช้
 หาระยะทางที่วัสดุเคลื่อนไปได้ในช่วงนี้ คือ

$$x = - \frac{g\mu}{2\omega^2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + a(\cos \beta + \mu \sin \beta) (\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_1$$

วัสดุจะเริ่มไหลตัวถอยหลังเมื่อ

$$\cos 3 = \frac{g\mu/a\omega^2}{\cos \beta - \mu \sin \beta} \quad 2.42$$

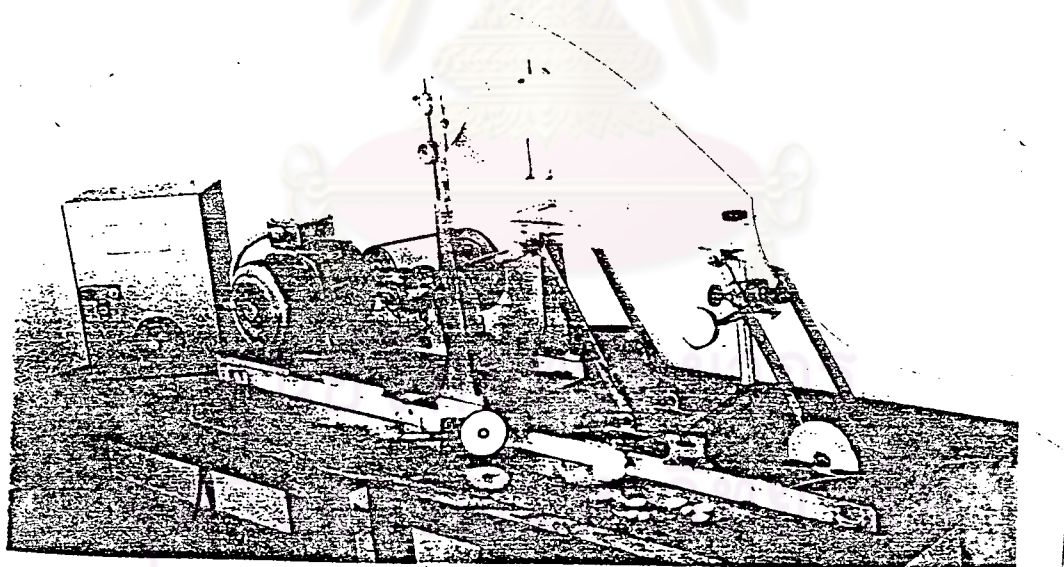
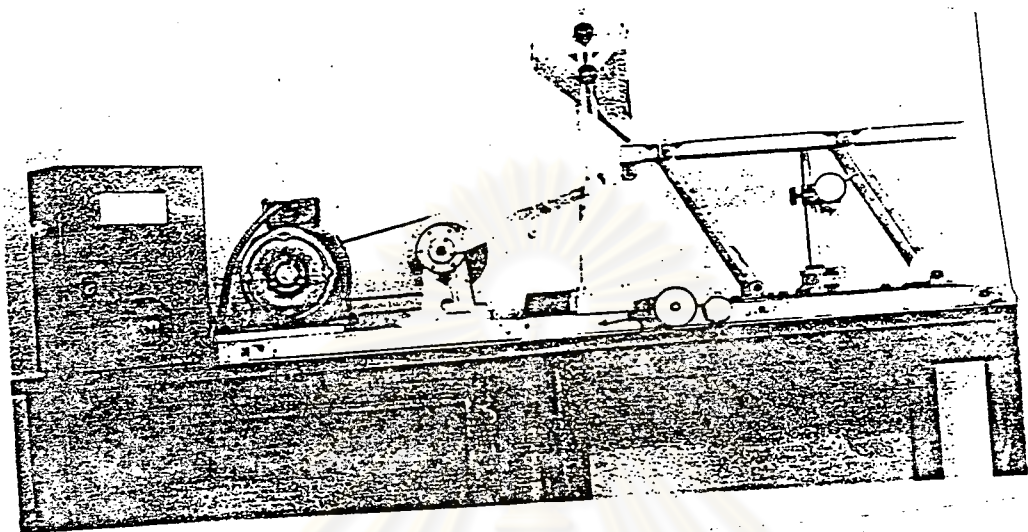
และจะหยุดเคลื่อนที่เมื่อความเร่งของรางกับวัสดุมีค่าเท่ากันอีกครั้งหนึ่งที่ θ_4 ซึ่งจะได้สมการที่ใช้หา
 ระยะทางในการเคลื่อนที่ถอยหลัง คือ

$$x = \frac{g\mu}{2\omega^2} (\theta_4 - \theta_3)^2 + a(\cos \beta - \mu \sin \beta) (\theta_4 - \theta_3) \sin \theta_3$$

ดังนั้นระยะทางในการเคลื่อนที่สุทธิของวัสดุ จะได้จากผลรวมทางพีชคณิตระหว่างการเคลื่อนตัว
 ทั้งสองแบบ

$$\Sigma x = \frac{g\mu}{2\omega^2} [(\theta_4 - \theta_3)^2 - (\theta_2 - \theta_1)^2] + a(\cos \beta + \sin \beta) (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\sin \theta_1 + a(\cos \beta - \mu \sin \beta) (\theta_4 - \theta_3) \sin \theta_3 \quad 2.43$$



รูปที่ 2.17 รูปร่างทั่วไปของอุปกรณ์ของ ศิริชาติ ชำนาญจิต⁴

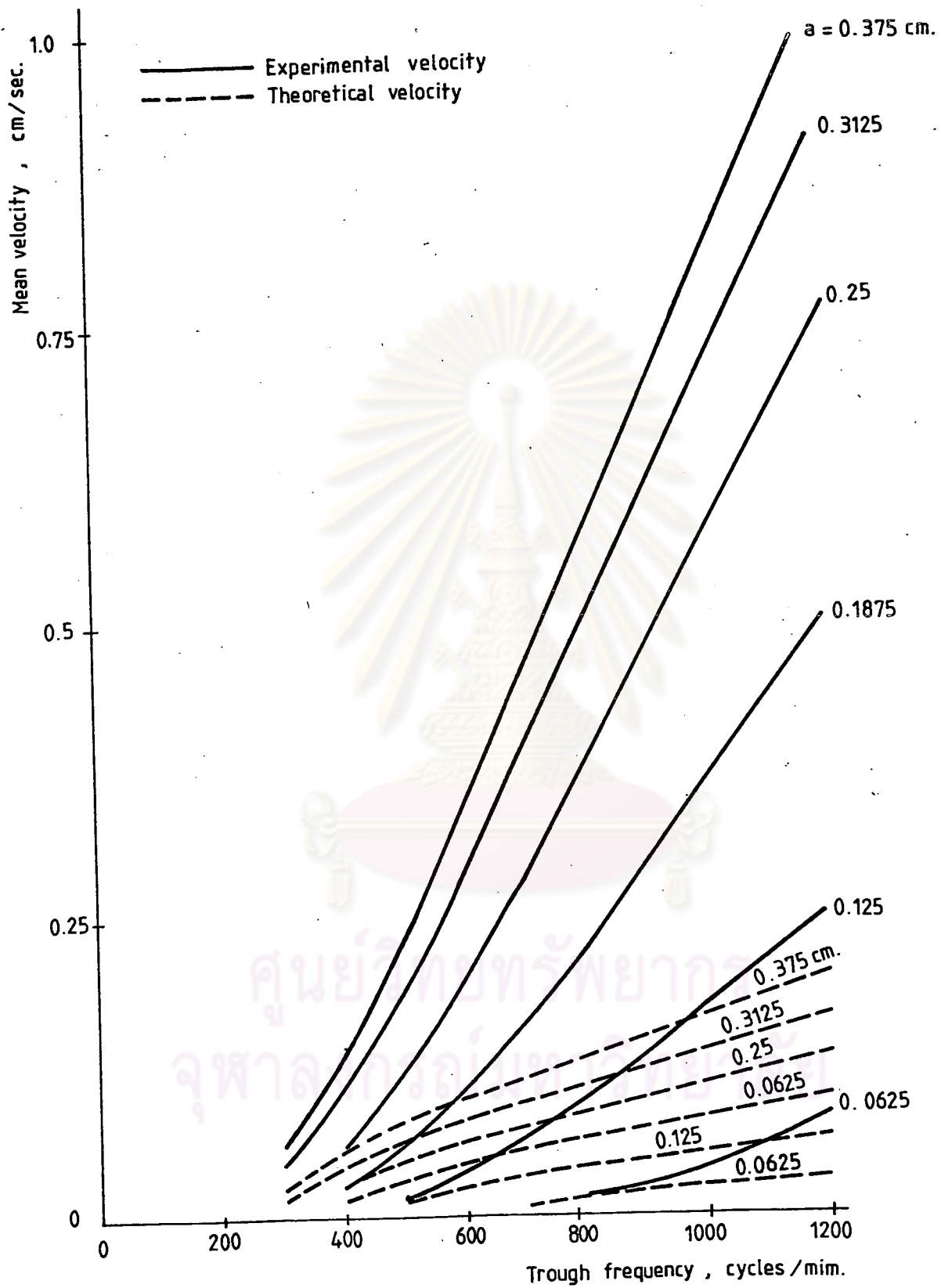
และในที่สุดความเร็วเฉลี่ยในการเคลื่อนตัวของวัสดุจะหาได้จาก

$$\bar{x}_m = \Sigma x \cdot n / 60 \quad 2.44$$

โดยที่ n คือความเร็วรอบของข้อเหวี่ยง

หลังจากที่ได้ทำการตรวจสอบกับซันซีเมนต์ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 นิ้ว แล้วนำผลการทดลองมาเปรียบเทียบกับกราฟวิเคราะห์ทางทฤษฎีในรูปกราฟที่แสดงถึงสัมพันธภาพระหว่างความเร็วในการลำเลียงกับความถี่ แอมพลิจูด และมุมในการสั่นสะเทือนต่าง ๆ กันแล้วได้สรุปผลการศึกษาว่าที่ความถี่ต่ำ ๆ ผลการทดลองสอดคล้องกับทางทฤษฎีพอใช้ แต่เมื่อความถี่สูงขึ้นความเร็วในการลำเลียงที่คำนวณได้ทางทฤษฎีให้ค่าต่ำกว่าผลการทดลอง หลังจากที่ได้ทำการสืบสวนแล้วพบว่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานไม่มีผลต่อค่าตอบที่ได้มากนัก จึงได้ตั้งข้อสังเกตว่าสาเหตุของความคลาดเคลื่อน ที่เกิดขึ้นมีต้นเหตุมาจากการร่อนและการยืดหยุ่นของ โครงสร้าง ซึ่งมีผลทำให้แอมพลิจูดที่เกิดขึ้นจริงแตกต่างจากค่าที่วัดทางสถิติ จากนั้นได้ทำการทดลองลำเลียงวัสดุมวลโดยใช้ทรายละเอียดที่แห้งและสะอาดพบว่าความเร็วในการลำเลียงคงที่ไม่ขึ้นอยู่กับอัตราการป้อนวัสดุ และได้เสนอแนะว่ากฎเกณฑ์ของ Hydrodynamics น่าจะนำมาประยุกต์ใช้ในการพัฒนาทฤษฎีเพื่อวิเคราะห์การลำเลียงวัสดุมวลได้ แต่ก็ไม่ได้ทำการอภิปรายถึงผลของตัวแปรต่าง ๆ ที่สัมพันธ์ประสิทธิภาพของการลำเลียงหรือเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น ๆ จากการสังเกตผลการทดลองที่ได้เสนอมไว้ในรูปของกราฟ ดังรูปที่ 2.18 พบว่ามีความสอดคล้องกับข้อสรุปของ เบอร์รี่ และ บูร์ กับ แมคคัลเลียนเป็นอย่างดี

รูปเฉลอ (10) ได้ชี้ให้เห็นถึงข้อจำกัดในการกำหนดประสิทธิภาพการเคลื่อนตัวของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของการสั่นสะเทือนแบบไขว้ขอยต์ในเชิงวิเคราะห์ เพื่อที่จะทำให้การศึกษาในเชิงวิเคราะห์เป็นไปได้อย่างสิ้นเชิงการเคลื่อนตัวแบบไขว้ขอยต์ด้วยพาราโบลาที่มีแอมพลิจูดเท่ากันแล้วแทนความเร็วด้วยรูปสามเหลี่ยมและให้ความเร่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมตลอดครั้งวัฏจักร จากนั้นได้ทำการวิเคราะห์ประสิทธิภาพรวมในการเคลื่อนตัวของอนุภาคแบบที่ไม่มีการลอยตัวบนระนาบลำเลียงในแนวระดับ 4 ชนิด โดยอาศัยที่ขั้วคณิตของกราฟที่สัมพันธ์กันได้ผลลัพธ์สรุปไว้ดังตารางที่ 2.2



รูปที่ 2.18 ตัวอย่างผลการศึกษาของ คิริชาติ ชำนาญจิต⁴

ตารางที่ 2.2 ประสิทธิภาพของอุปกรณ์ลำเลียงแบบสั่นสะเทือนทั่วไป
(วิงคเลอ 10)

ชนิดของอุปกรณ์ลำเลียง	ประสิทธิภาพ \dot{x}	ผลคูณ $\dot{x}m \cdot f$
"Sealskin"	$\frac{f_r - 1}{f_r + 1} = 50 \% \text{ for } f_r = 3$	$\frac{1f_r - 1}{4f_r + 1} \mu_b g$
"jerk"	$\frac{t_r - 1}{2t_r} = 30 \% \text{ for } t_r = 3$	$\frac{1t_r - 1}{4t_r + 1} \mu g$
Inclined motion	$\frac{3}{4} = 75 \%$	$\frac{3}{8} \mu g$
Out-of-phase	$< \frac{3}{4} 25 \% \text{ at } \phi = 45^\circ$	$< \frac{3}{8} \mu g$

จากตารางที่ 2.2 แสดงให้เห็นว่ารางลำเลียงชนิดที่การสั่นสะเทือนกระทำในทิศทางซึ่งทำมุมกับระนาบเป็นแบบที่ให้ประสิทธิภาพพร้อมสูงที่สุด เพื่อที่จะศึกษาการเคลื่อนตัวของอนุภาคบนรางลำเลียงชนิดนี้โดยละเอียดตลอดทั้งวัฏจักรได้โดยไม่ต้องยุ่งยากนัก เขาจึงแทนตัวแปรของระบบด้วยพารามิเตอร์ไร้มิติ 3 ตัว ซึ่งเรียกว่า "พารามิเตอร์ความเร่ง" A "พารามิเตอร์ความเสียดทาน" P3 และ "พารามิเตอร์การเคลื่อนตัว" X ซึ่งมีค่าดังนี้

$$A = aw^2 \sin\beta/g$$

$$P3 = gu/aw^2 \cos\beta = u \tan\beta/A$$

$$X = \dot{x}m/aw \cos\beta$$

และกำหนดให้สมการของการเคลื่อนที่ของอนุภาคอยู่ในรูป

$$m\ddot{x} + \mu u (g + \dot{y}t) \text{sign}(x - xt) = 0$$

2.45

ซึ่งเขียนได้ในเทอมของพารามิเตอร์ไร้มิติ

$$\ddot{x}/g + (1 + \dot{y}t/g) \operatorname{sign} \dot{x}t (\dot{x}/\dot{x}t - 1) = 0$$

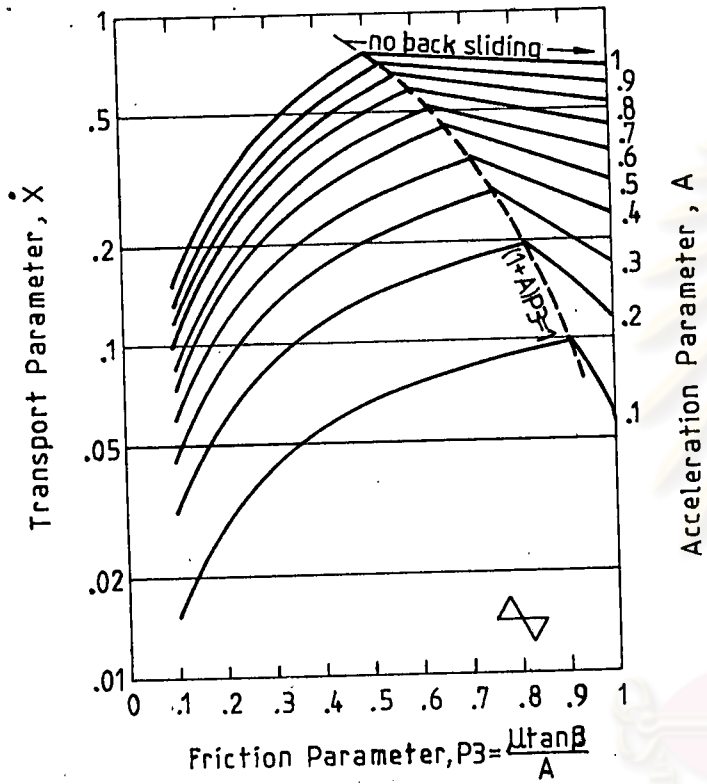
$$\ddot{x}/g + (1 + A) \operatorname{sign} \dot{x}t (\dot{X} - 1) = 0 \quad 2.46$$

เพื่อที่จะทำให้คำตอบที่ได้อยู่ในเทอมของพารามิเตอร์การเคลื่อนตัว ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ P_3 และ A เขาจึงแบ่งพิสัยของคำตอบออกเป็นสองส่วน โดยส่วนแรกถือว่าอนุภาคมีการเคลื่อนตัวตลอดเวลา (Pure Slide) และส่วนที่สองถือว่าอนุภาคจะเกิดการเคลื่อนตัวช่วงหนึ่งแล้วหยุดนิ่ง (Stick Slide) โดยมีเส้นขอบเขตระหว่างการเคลื่อนที่ทั้งสองแบบอยู่ที่เส้น $(1 + A) P_3 = 1$ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ทางพีชคณิตโดยอาศัยกราฟแสดงไว้ดังรูปที่ 2.19 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าในแต่ละค่าของพารามิเตอร์ความเร็ว ประสิทธิภาพของการลำเลียงสูงสุดจะอยู่ที่เส้นขอบเขตซึ่งเป็นจุดเปลี่ยนรูปแบบการเคลื่อนที่ ทำให้กราฟของพารามิเตอร์การเคลื่อนตัวมีลักษณะเป็นเส้น และสำหรับบางค่าเสียงชนิดที่การสั่นสะเทือนกระทำในทิศทางซึ่งทำมุมกับระนาบจะให้ประสิทธิภาพสูงสุดที่ $\dot{X} = 0.75$ เมื่อ $A = 1$ และ $P_3 = 0.5$ ต่อจากนั้นจึงทดลองได้ทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยอาศัยพีชคณิตของวิศวกรที่ล้มมุติขึ้นกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ โดยอาศัยการจำลองวิศวกรแบบไขว้ขอยดัดด้วยอนุภาคคอมพิวเตอร์ ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 2.20

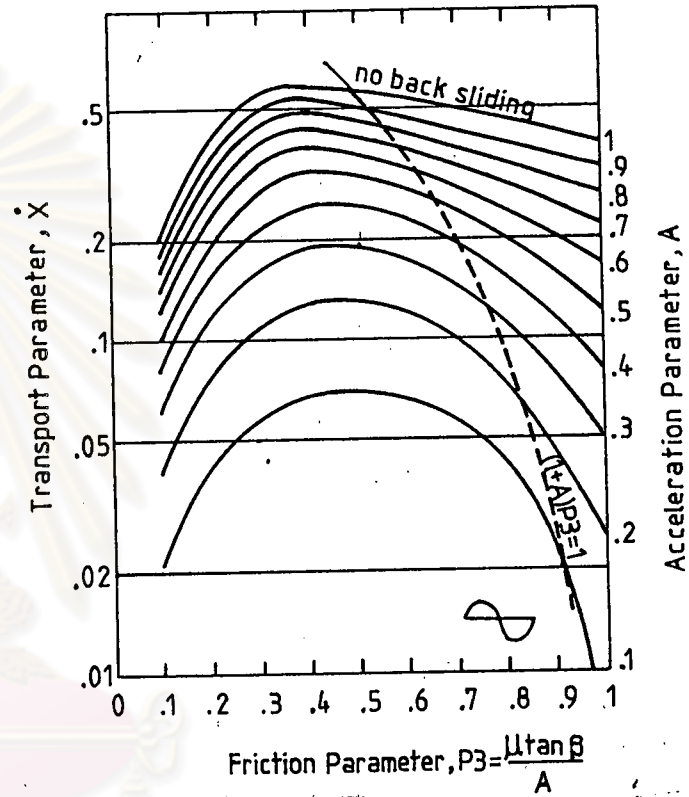
จากรูปแสดงให้เห็นว่า ผลการวิเคราะห์ทั้งสองวิธีสอดคล้องกัน โดยประสิทธิภาพของการลำเลียงจะสูงขึ้นเมื่อ A สูงขึ้น และสำหรับค่าพารามิเตอร์ A ใด ๆ ประสิทธิภาพของการลำเลียงจะเป็นฟังก์ชันของ P_3 ซึ่งจะให้ประสิทธิภาพสูงสุดที่ค่าหนึ่งของ P_3 แต่ผลลัพธ์ที่ได้จากอนุภาคคอมพิวเตอร์นั้นจุดที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดไม่ได้อยู่ที่เส้นแบ่งขอบเขต $(1 + A) P_3 = 1$ แต่จะอยู่ที่ค่า P_3 ที่ต่ำลงมาโดยมีค่าประมาณ 0.5 ที่ A ต่ำ ๆ และจะมีค่าประมาณ 0.35 เมื่อ $A = 1$ ให้ประสิทธิภาพสูงสุดประมาณ 0.57 ซึ่งต่ำกว่าประสิทธิภาพที่ได้จากวิศวกรที่ล้มมุติขึ้น และในที่สุดเพื่อจุดประสงค์ในทางปฏิบัติเขาได้ให้สมการที่ใช้กำหนดประสิทธิภาพของรางลำเลียงที่เคลื่อนตัวแบบไขว้ขอยดัดชนิดอนุภาคไม่เกิดการลอยตัว $A < 1$ ไว้ด้วยสมการ

$$\dot{X} = 2.5 A P_3 (1 - P_3) \quad \text{สำหรับ} \quad 0.2 < P_3 < 0.8 \quad 2.47$$

และ $\dot{X} = 2 A P_3 \quad \text{สำหรับ} \quad P_3 < 0.1 \quad 2.48$



รูปที่ 2.19 แผนภูมิประสิทธิภาพของอุปกรณ์ลำเลียงแบบสั่นสะเทือนซึ่งมีความเร็วในการเคลื่อนตัวรูปสามเหลี่ยม (ริงคเลอ¹⁰)



รูปที่ 2.20 แผนภูมิประสิทธิภาพของอุปกรณ์ลำเลียงแบบสั่นสะเทือนซึ่งเคลื่อนตัวแบบไซนูซอยด์ (ริงคเลอ¹⁰)

เรตฟอร์ต กับบูรณรอยด (5) ได้ศึกษาทางทฤษฎีครอบคลุมถึงการลอยตัวของอนุภาค โดยอาศัยคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณแล้วได้ทำการทดลองเพื่อตรวจสอบทฤษฎี ซึ่งได้ผลของการศึกษาพอสรุปได้ดังต่อไปนี้

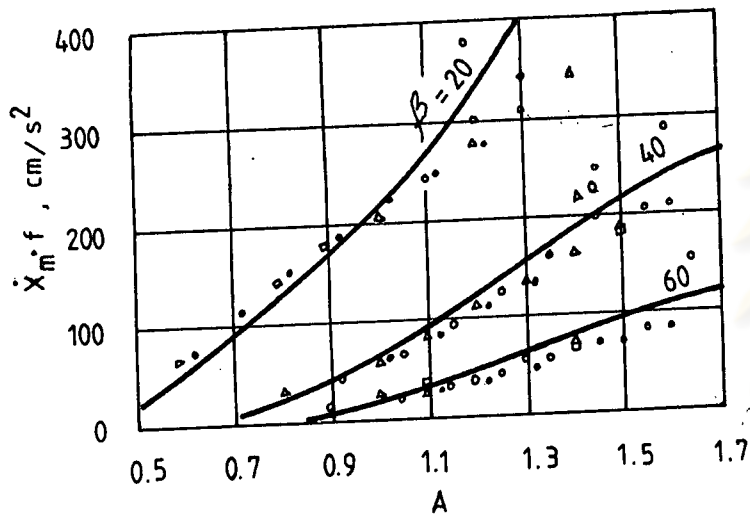
เมื่อแอมพลิจูดในการสั่นสะเทือนคงที่ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาค \dot{x}_m จะเป็นปฏิภาคผกผันกับความถี่ f ซึ่งแสดงได้ด้วยนิพจน์

$$\dot{x}_m = (g \cos \alpha / 4 \pi^2 \sin \tau l) (\Sigma x / a_n) \quad 2.49$$

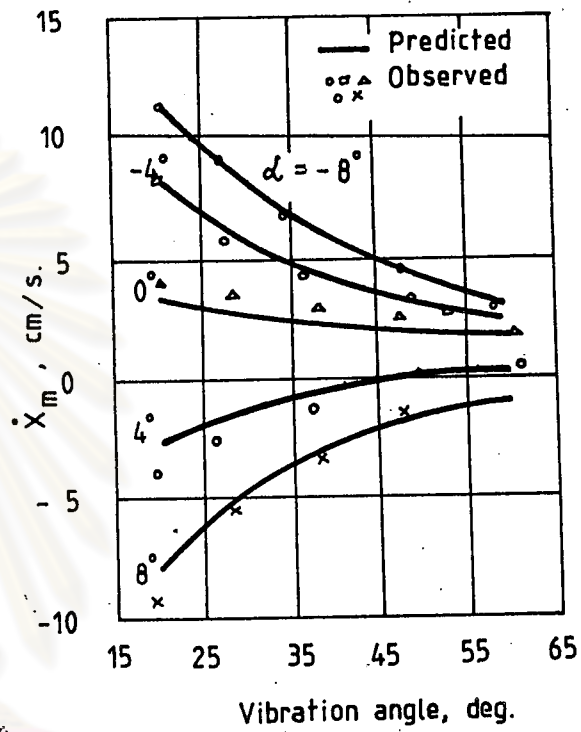
โดยที่ τl เป็นตำแหน่งเชิงมุมของรางลำเสียงที่อนุภาคเริ่มต้นลอยตัว และ Σx เป็นระยะทางรวมที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปในหนึ่งวัฏจักร และ a_n เป็นแอมพลิจูดของการสั่นสะเทือนในแนวตั้งฉากกับราง ผลจากการคำนวณทางทฤษฎีและการทดลองแสดงไว้ดังรูปที่ 2.21 ซึ่งเป็นภาพที่ทำให้สัมพันธ์ภาพระหว่าง $\dot{x}_m \cdot f$ กับพารามิเตอร์ความเร่ง A ที่มุมในการสั่นต่าง ๆ กันจุดต่าง ๆ บนเส้นกราฟที่ความถี่แตกต่างกันพิสูจน์ให้เห็นว่า $\dot{x}_m \cdot f$ มีค่าคงที่

หลังจากนั้นก็ทำการตรวจสอบถึงผลของอัตราเร่งในแนวตั้งฉากกับรางที่ต่อเสถียรภาพ และความเร็วเฉลี่ยในการลำเสียงดังรูปที่ 2.21 แสดงให้เห็นว่าการเพิ่มขึ้นของความเร่ง A_n จะทำให้ $\dot{x}_m \cdot f$ มีค่าสูงขึ้น เนื่องจากการกระโดดและการกระแทกระหว่างอนุภาคกับราง เมื่อพารามิเตอร์ความเร่ง A เพิ่มขึ้นมากกว่า 1.2 เป็นเหตุให้ผลที่เกิดขึ้นจริงต่ำกว่าผลทางทฤษฎี ดังนั้นเพื่อบรรลุถึงความสอดคล้อง เขาทั้งสองจึงได้จำกัดขอบเขตในการศึกษาที่พารามิเตอร์ความเร่งสูงสุดเท่ากับ 1.2 ผลของการศึกษาซึ่งสอดคล้องเป็นอย่างดีระหว่างทฤษฎี และการทดลองกับขึ้นหลักบนรางเหล็กและรางที่ปูด้วยยาง แสดงไว้ดังรูปที่ 2.22 และ 2.23

รูปที่ 2.22 ชี้ให้เห็นว่าเมื่อมุมเอียงของรางมากขึ้นจะเป็นเหตุให้ความเร็วเฉลี่ยในการลำเสียงลดลง และสำหรับวัสดุที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานน้อย ๆ การลำเสียงวัสดุในทิศทางบวก (ไปข้างหน้า) จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมุมเอียงของราง α มีค่าน้อย ๆ และมุมสั่นสะเทือน β มีค่าสูง ๆ และจากรูปที่ 2.23 แสดงให้เห็นว่าการลำเสียงในทางบวกนี้สามารถทำให้เกิดขึ้นได้ในค่าต่าง ๆ ของมุมในการสั่นสะเทือนที่กว้างกว่า และ $\dot{x}_m \cdot f$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุมในการสั่นสะเทือนลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับระหว่างรูปที่ 2.22 และ 2.23 จะแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่มีต่อประสิทธิภาพการเคลื่อนตัว



$\alpha = 0^\circ$, $\mu_e = 1.5$
 — Predicted, Observed
 • $f = 15$ Hz., ◻ $f = 20$ Hz.
 ▲ $f = 30$ Hz., ◉ $f = 40$ Hz.

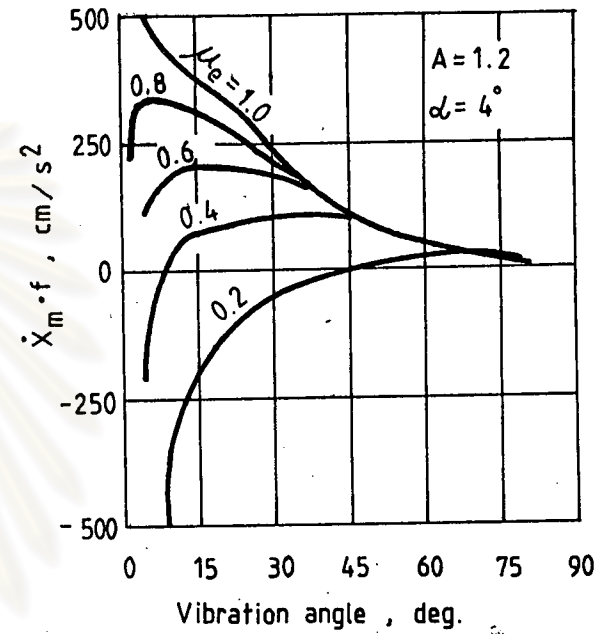
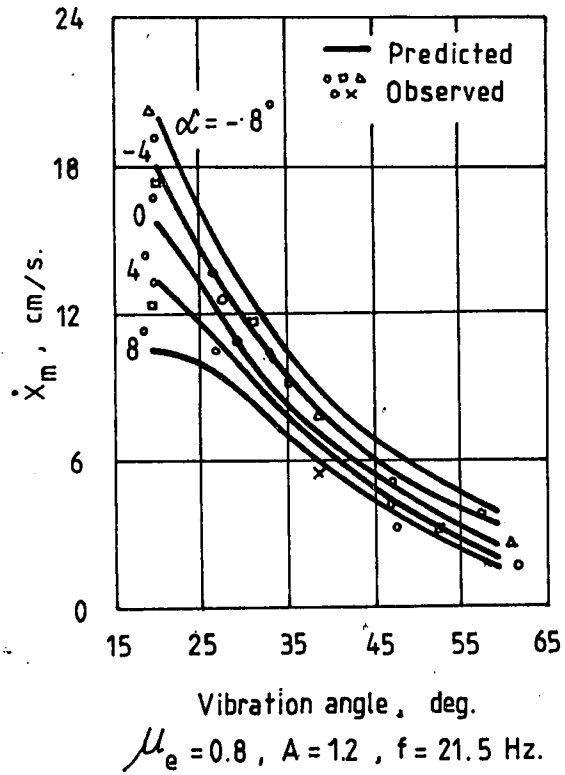


$\mu_e = 0.2$, $A = 1.2$, $f = 21.5$ Hz.

รูปที่ 2.21 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงความเร็วในการลำเลียงเนื่องจากผลของความเร่งในแนวตั้งฉากและมุมในการสั่นสะเทือน (เรตฟอร์ดกับบูรธรอยด์)

รูปที่ 2.22 การเปรียบเทียบผลการทำนายกับผลการทดลองของเรตฟอร์ดกับบูรธรอยด์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.23 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงความเร็วในการลำเสียงเนื่องจากผลของความลาดชัน (เรตฟอร์ตกับบูรธรอยต์)⁵ รูปที่ 2.24 ผลทางทฤษฎีซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วในการลำเสียงเนื่องจากผลของความเสียดทานและมุมในการสั่นสะเทือน (เรตฟอร์ตกับบูรธรอยต์)⁵

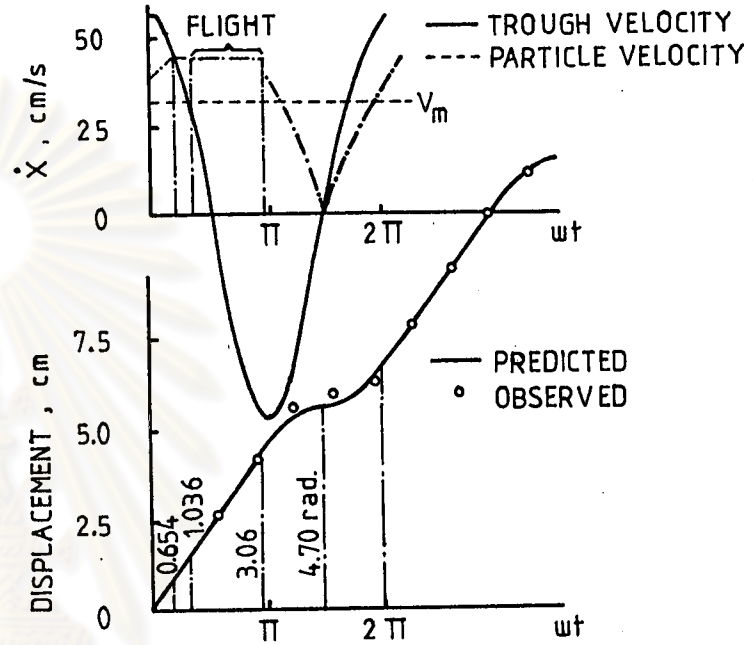
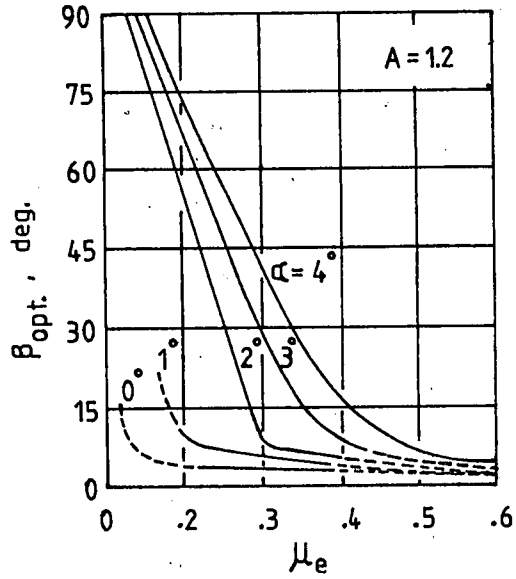
ศูนย์วิทยทรัพยากร
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความล่อคล่องระหว่างทฤษฎีและผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า เมื่อเรารู้ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานแล้ว ทฤษฎีนี้สามารถนำมาใช้ในการทำนายค่าความเร็วเฉลี่ยของวัสดุเฉพาะกรณีที่กำหนดความเร็วของรางไว้เพื่อให้การเคลื่อนตัวของวัสดุเป็นไปอย่างมีเสถียรภาพ

รูปที่ 2.24 และ 2.25 เป็นผลของการคำนวณทางทฤษฎี ซึ่งแสดงให้เห็นถึงข้อจำกัดพื้นฐานที่จะเพิ่มสมรรถนะของอุปกรณ์ลำเลียงที่เคลื่อนตัวแบบเรคทิลลิเนียร์ และจากผลลัพธ์ที่หาไว้ดังรูปที่ 2.24 แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจะมีอิทธิพลต่อความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงเป็นอย่างมาก สำหรับวัสดุที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานน้อย ๆ และรางลำเลียงเคลื่อนตัวด้วยมุมสั้นละเอียดยิ่ง ๆ แล้วจะได้ความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงที่ต่ำมาก และสำหรับวัสดุที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานใด ๆ แล้วความเร็วในการลำเลียงสูงสุดจะเกิดขึ้นที่มุมสั้นละเอียดยิ่งที่พอเหมาะมุมหนึ่ง จากรูปที่ 2.25 แสดงให้เห็นว่ามุมสั้นละเอียดยิ่งที่พอเหมาะ β_{opt} จะเปลี่ยนแปลงตามสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสำหรับมุมเอียงของราง α ค่าต่าง ๆ กันซึ่งจะเห็นได้ชัดว่าเมื่อมุมเอียงของรางมีค่าสูงขึ้นมุมสั้นละเอียดยิ่งที่พอเหมาะก็จะสูงขึ้นตาม และจะมีผลให้ความเร็วเฉลี่ยสูงสุดมีค่าลดลง และสำหรับทุกค่าของมุมเอียงของรางมุมสั้นละเอียดยิ่งที่พอเหมาะจะลดลงเมื่อสัมประสิทธิ์ความเสียดทานมีค่าสูงขึ้น

นอกจากผลการศึกษาของ เบอร์รี่ (1) บูธ กับ แมคคัลเลี่ยน (3) และ เรดฟอร์ด กับ บูธ รอยด (5) แล้ว เกเบอส์ (6) ได้ดำเนินการวิจัยอย่างกว้างขวางเพื่อศึกษาถึงการประสานกันของรูปแบบต่าง ๆ ในการเคลื่อนตัวของอนุภาค เขาพบว่าทุกรูปแบบที่เป็นไปได้ถึง 21 รูปแบบ แต่เขาก็ได้เลือกคำตอบไว้เพียง 9 คำตอบคือ 6 คำตอบเป็นแบบที่มีช่วงเวลาที่อนุภาคเกาะติดอยู่บนระนาบและ 3 คำตอบเป็นกรณีที่วัสดุไม่มีการเกาะติด สำหรับคำตอบที่เกิดขึ้นบ่อย ๆ ในทางปฏิบัติแสดงไว้ดังรูปที่ 2.26 ถึง 2.29 ผลของการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของการกระทบ e ที่มีต่อการเคลื่อนตัวของอนุภาคแสดงไว้ดังรูปที่ 2.30 เมื่อสัมประสิทธิ์ของการกระทบมีค่าสูงขึ้น จะทำให้ประสิทธิภาพการเคลื่อนตัวของอนุภาคมีแนวโน้มที่จะลดลงในช่วงที่ตำแหน่งเชิงมุมของรางอยู่ระหว่าง τ_2 และ 2π

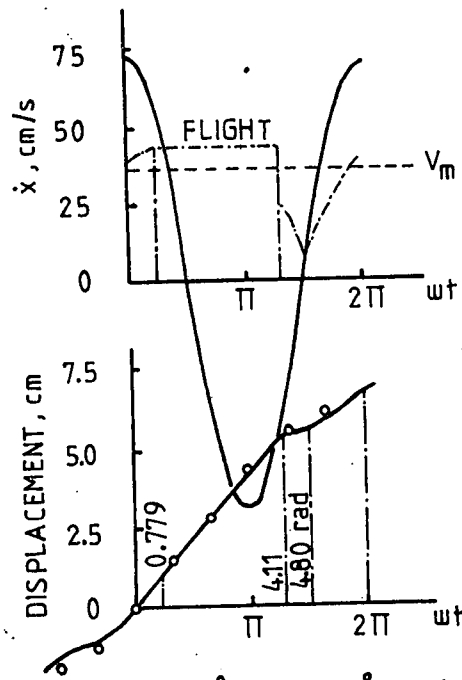
รูปที่ 2.31 และ 2.32 แสดงให้เห็นถึงการประสานกันของรูปแบบการเคลื่อนที่ต่าง ๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นได้สำหรับชุดตัวแปรและสัมประสิทธิ์ของการกระทบที่กำหนดให้ ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าคำตอบชนิดที่มีการเกาะติดมักจะเกิดขึ้นเมื่อ ϕ มีค่าลดลงหรือมีความหมายเดียวกับกับเมื่อสัมประสิทธิ์ความเสียดทานมีค่าสูงขึ้น



$\alpha = 0^\circ, \beta = 30^\circ, f = 4.6 \text{ Hz}, A = 1.13$
 $\mu_s = 0.5, \epsilon = 1.0, a = 26 \text{ cm.}$

รูปที่ 2.25 ผลทางทฤษฎีซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงมุมสั้นละเทือนที่พอเหมาะ
 เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ความเสียดทานและมุมลาดชัน
 (เรตฟอร์ตกับบรูรรอยต์⁵)

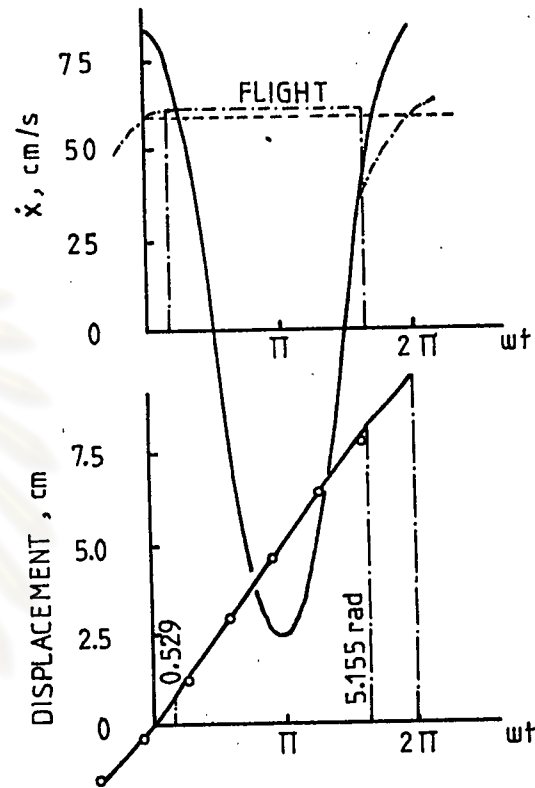
รูปที่ 2.26 ผังความเร็วและการเคลื่อนตัวซึ่งแสดงถึงคำตอบแบบ "FHFB"
 (เกเบอส์⁶)



$\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $f = 5.2 \text{ Hz.}$, $A = 1.42$,
 $\mu_s = 0.4$, $\epsilon = 1.0$, $a = 2.6 \text{ cm}$

— TROUGH VELOCITY
 - - - PARTICLE VELOCITY

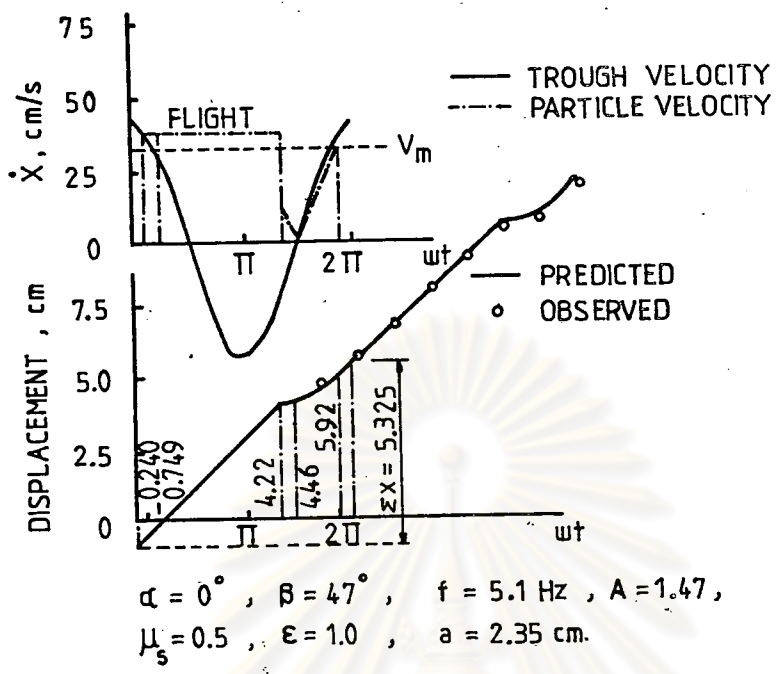
— PREDICTED
 ○ OBSERVED



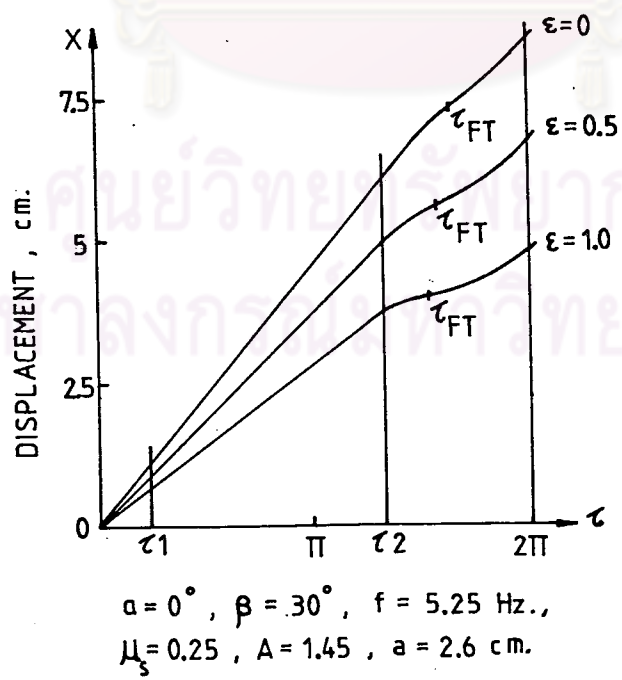
$\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $f = 6.1 \text{ Hz.}$, $A = 1.98$,
 $\mu_s = 0.4$, $\epsilon = 1.0$, $a = 2.6 \text{ cm}$

รูปที่ 2.27 ผังความเร็วและการเคลื่อนตัวซึ่งแสดงถึงคำตอบแบบ "HFB"
 (เกเบอสัน⁶)

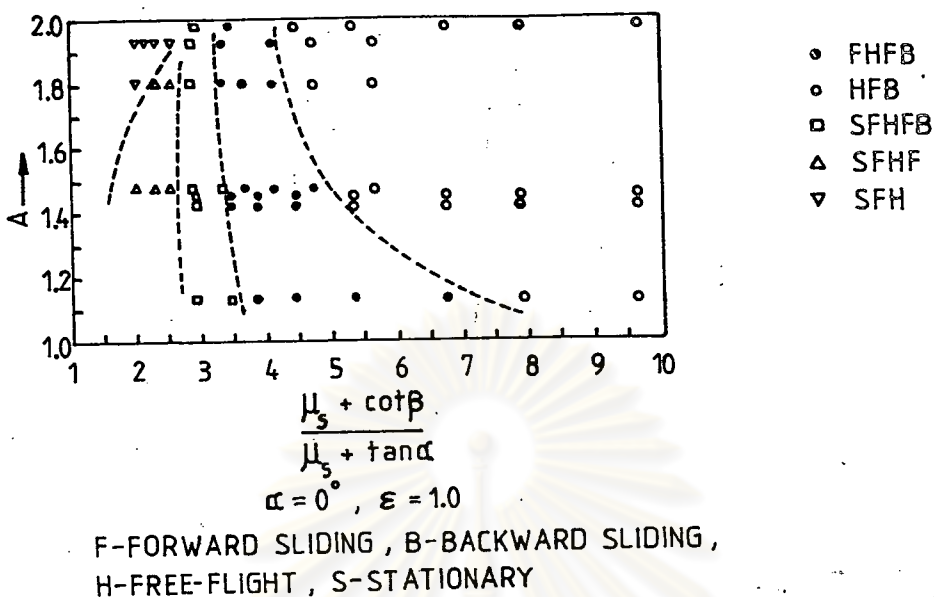
รูปที่ 2.28 ผังความเร็วและการเคลื่อนตัวซึ่งแสดงถึงคำตอบแบบ "HB"
 (เกเบอสัน⁶)



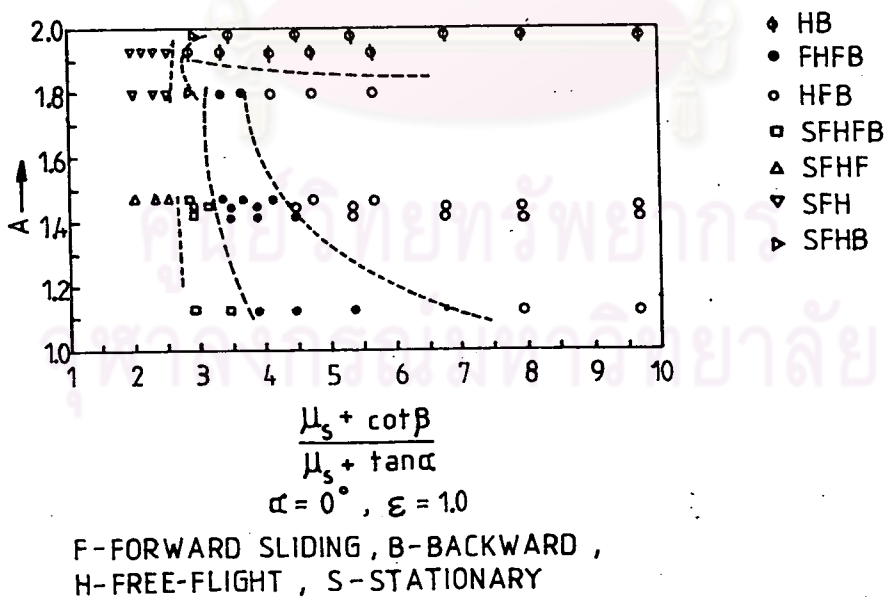
รูปที่ 2.29 ผังความเร็วและการเคลื่อนตัวของซึ่งแสดงถึงคำตอบแบบ "SFHFB" (เกเบอสัน⁶)



รูปที่ 2.30 การเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนตัวของอนุภาคเนื่องจากผลของการกระทบ (เกเบอสัน⁶)



รูปที่ 2.31 การกระจายของรูปแบบการเคลื่อนที่เนื่องจากผลของพารามิเตอร์
ความเร็ว (เกเบอลัน⁶)



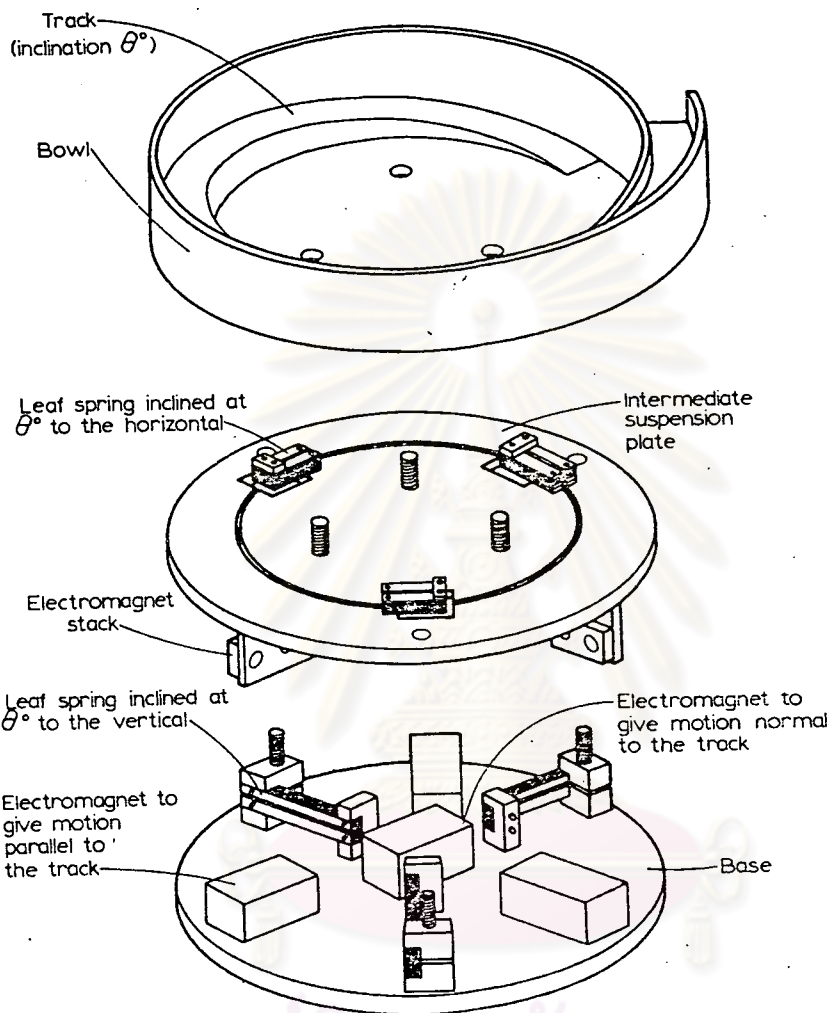
รูปที่ 2.32 ขอบเขตของกลุ่มการเคลื่อนที่รูปแบบต่างๆ (เกเบอลัน⁶)

สัมประสิทธิ์ของการกระทบนี้เป็นตัวแปรที่มีความสำคัญตัวหนึ่ง ซึ่งจะมีผลในช่วงหนึ่งของวัฏจักรคือ ตัวแปรนี้จะเป็นตัวควบคุมความเร็วในแกน x เมื่ออนุภาคกระทบกับราง แต่เมื่อใดที่ความเสียดทานมีค่าน้อย (ϕ มีค่ามาก) คำตอบแบบไม่มีการเกาะติดก็จะ เป็นไปไม่ได้ และทั้งนี้เนื่องจากอิทธิพลส่วนใหญ่มาจากค่า ϵ นั้นเอง ยกเว้นในกรณีของคำตอบแบบ HB เมื่อได้ศึกษาถึงผลของการกระทบแล้ว เกเบอส์สันได้ทำการทดลองเพื่อตรวจสอบการเคลื่อนที่ของอนุภาคผลที่ได้จากการทดลองได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.26 ถึง 2.29 ซึ่งชี้ให้เห็นความคล่องคล่องเป็นอย่างมากกับผลที่ได้จากการทำนายทางทฤษฎี

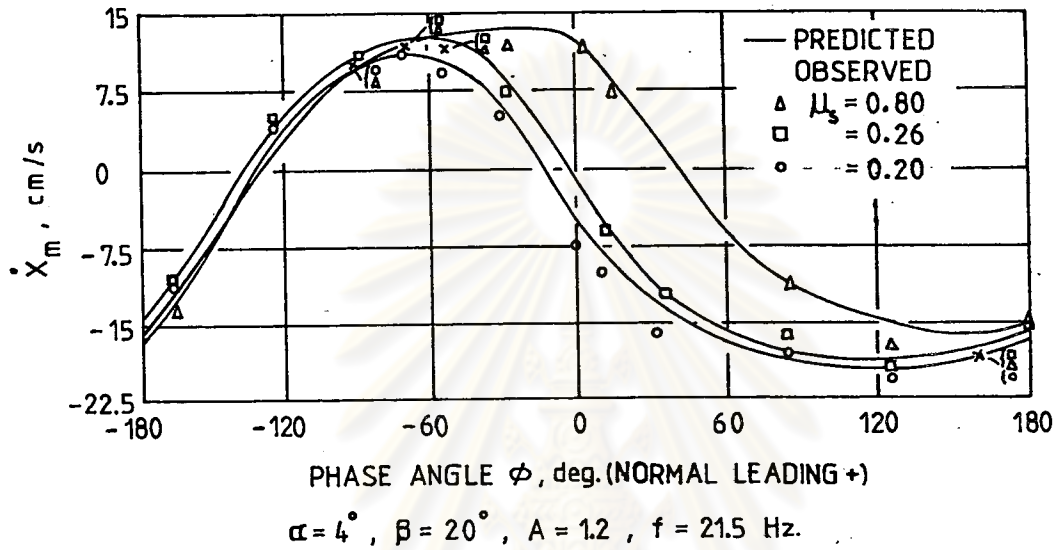
จากการทบทวนการศึกษาที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าการล่าเสียงโดยอาศัยการสั่นสะเทือนแบบ เรคทิลลิเนียร์มีข้อจำกัดหลายอย่างต่อการใช้เครื่องมืออย่างมีประสิทธิภาพ เช่น

1. ความเร็วในการล่าเสียงที่จะเพิ่มขึ้นจะเป็นผลที่ได้จากการเพิ่มแอมพลิจูดในแนวตั้งจากเพิ่มขึ้นโดยอัตโนมัติ ซึ่งถ้าค่านี้เพิ่มขึ้นถึงขีดจำกัดค่าหนึ่งก็จะทำให้อนุภาคเกิดการกระดอน และมีการเคลื่อนตัวแบบไร้เสถียรภาพเป็นเหตุให้ความเร็วในการล่าเสียงลดลงเป็นอย่างมาก
2. การกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานอย่างละเอียดถูกต้อง เพื่อใช้ทำนายความเร็วในการล่าเสียงให้ถูกต้องนั้นทำได้ยาก

เหตุในข้อแรกนั้นได้รับความสนใจจากนักวิชาการหลายท่าน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เรตฟอร์ด กับ บุรธรอยด (5) ซึ่งเป็นผู้ริเริ่มในการนำเอาระบบการล่าเสียงแบบต่างเฟส (Out of Phase) โดยอาศัยอุปกรณ์แม่เหล็กไฟฟ้าเป็นแหล่งกำเนิดการสั่นสะเทือน ดังรูปที่ 2.33 จากหลักการที่ใช้ทำให้เขาสามารถควบคุมแอมพลิจูดของการสั่นสะเทือนทั้งในแนวขนานและตั้งฉากได้โดยอิสระและจากผลของการตรวจสอบพฤติกรรมของอนุภาคเดี่ยวที่ถูกล่าเสียงโดยอุปกรณ์นั้นทำให้เพิ่มกำลังใจเป็นอย่างมากจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี โดยอาศัยสมมุติฐานเดียวกันกับที่ใช้ในการล่าเสียงแบบ เรคทิลลิเนียร์ และพิจารณาผลการประสานและเชื่อมโยงกันของรูปแบบการลอยตัวและการไถลตัวของอนุภาค ได้แสดงให้เห็นว่าในแทบทุกเงื่อนไขของการใช้งาน เมื่อส่วนของการสั่นสะเทือนในแนวขนานนำส่วนในแนวตั้งฉากเป็น $0^\circ - 80^\circ$ แล้วจะทำให้ความเร็วในการล่าเสียงเพิ่มขึ้นอย่างมากที่เดียวดังรูปที่ 2.34 และยังแสดงให้เห็นถึงค่าที่สังเกตได้จากการทดลอง ซึ่งพบว่าใกล้เคียงมากกับค่าที่ทฤษฎีทำนายไว้ และเท่ากับเป็นข้อพิสูจน์ความถูกต้องของทฤษฎีนี้ด้วย และ



รูปที่ 2.33 อุปกรณ์ล้อรถไฟระบบต่างเฟส (เรดฟอร์ดและคณะ 12)



รูปที่ 2.34 ผลการทำนายและผลการทดลองซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเฉลี่ยในการลำเสียงเนื่องจากมุมเฟส (เรตฟอร์ตกับบอร์รอยด์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



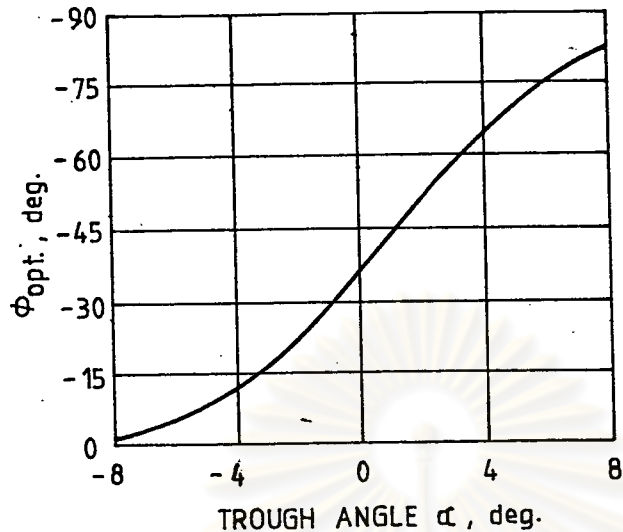
นอกจากนี้ จะเห็นได้ว่าที่ค่ามุมเฟสที่เหมาะสม ϕ_{opt} ซึ่งให้ความเร็วในการลำเลียงสูงที่สุดนั้น การเปลี่ยนแปลงของความเสียดทานจะมีผลต่อความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงน้อยมาก รูปที่ 2.35 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมเฟสที่เหมาะสมกับความลาดเอียงของภาตลำเลียงซึ่งมุมเฟสที่เหมาะสมมีแนวโน้มที่จะเพิ่มขึ้นเมื่อลาดลำเลียงมีความลาดเอียงมากขึ้น และจะมีค่าสูงชัน 90° เมื่อความลาดเอียงของลาดลำเลียงเป็น 8°

เพื่อเป็นการล้าธิตให้เห็นถึงอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงมุมในการลำเลียง เขาทั้งสองได้เสนอผลการทำนายไว้ดังรูปที่ 2.36 ซึ่งชี้ให้เห็นว่าเราสามารถเพิ่มความเร็วในการลำเลียงได้โดยการลดมุมในการลำเลียง โดยอ้างถึงตารางที่ 2.3 ซึ่งแสดงการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างระบบลำเลียงแบบเรคทิลินีเยร์กับระบบต่างเฟส ซึ่งจะสังเกตเห็นว่า ผลของการเปลี่ยนแปลงมุมเอียงของระนาบลำเลียงที่มีต่อความเร็วในการลำเลียงนั้นจะเป็นไปในลักษณะเดียวกันทั้งสองแบบคือ เมื่อมุมเอียงเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงลง

ข้อได้เปรียบที่สำคัญของระบบลำเลียงแบบต่างเฟสก็คือ ความเร็วในการลำเลียงสามารถเพิ่มให้สูงขึ้นได้ โดยไม่ขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานและปราศจากการเคลื่อนที่แบบไม่แน่นอน และไร้เสถียรภาพเนื่องจากการเพิ่มแอมพลิจูดของการลำเลียงตั้งเข้ในแบบร่วมเฟส

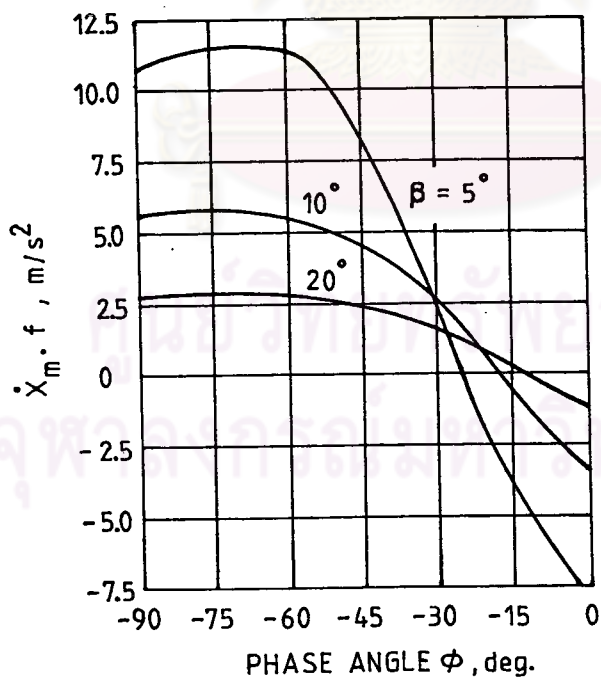
เมื่อได้พิจารณาถึงข้อนี้แล้ว ลู่ฟฟิลด์ กับ ยูซุฟ (8) จึงได้พัฒนาระบบลำเลียงเชิงเส้นแบบต่างเฟส ซึ่งขับเคลื่อนด้วยระบบไฮดรอลิค ซึ่งติดตั้งรางไว้บนฐานยางรูปตัวยู และสามารถควบคุมการเคลื่อนที่ทั้งสองแนวได้โดยอิสระ จากผลการทดสอบ เขาทั้งสองพบว่าสามารถสร้างเงื่อนไขแบบต่างเฟสได้ใกล้เคียงกับทฤษฎีมาก ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองกับรางลำเลียงในแนวระดับได้แสดงไว้ดังรูปที่ 2.37 ถึง 2.39 นั้นทำให้เรามั่นใจในผลลัพธ์ของเรตฟอร์ดกับบูรธรอยดยิ่งขึ้น นอกจากนี้แล้ว ลู่ฟฟิลด์ กับ ยูซุฟ ยังได้ขยายการทดลองออกไปเพื่อศึกษาถึงการทำงานของรางลำเลียงเมื่อเพิ่มค่าพารามิเตอร์ความเร่งขึ้นจนสูงกว่า 1.2 ซึ่งเป็นค่าที่เรตฟอร์ดกับบูรธรอยดได้จำกัดไว้

รูปที่ 2.39 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเฉลี่ยของการลำเลียง x_{m} ที่ได้จากการทดลองกับพารามิเตอร์ความเร่ง A สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่ต่างกันสามค่า เราจะสังเกตเห็นได้ว่าความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงนั้นสามารถทำให้เพิ่มขึ้นได้จำนวนหนึ่ง



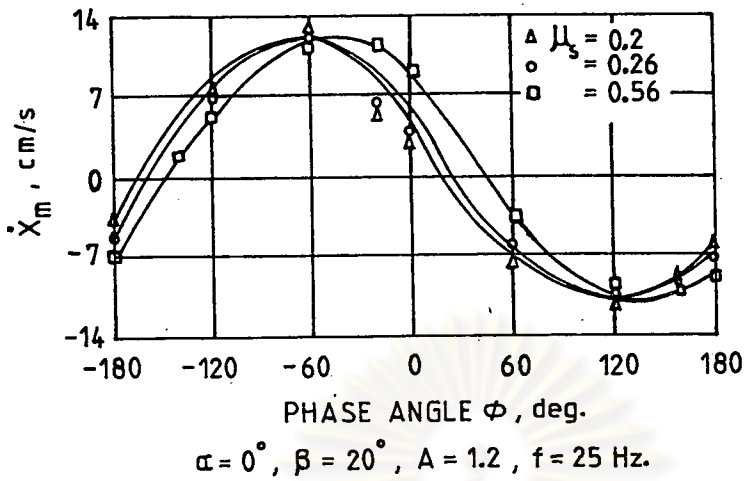
$\beta = 20^\circ, A = 1.2$

รูปที่ 2.35 ผลการทำนายแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงมุมเฟสที่เหมาะสม เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงมุมลาดชัน (เรดพอร์ดกับบูธรอยด์⁵)

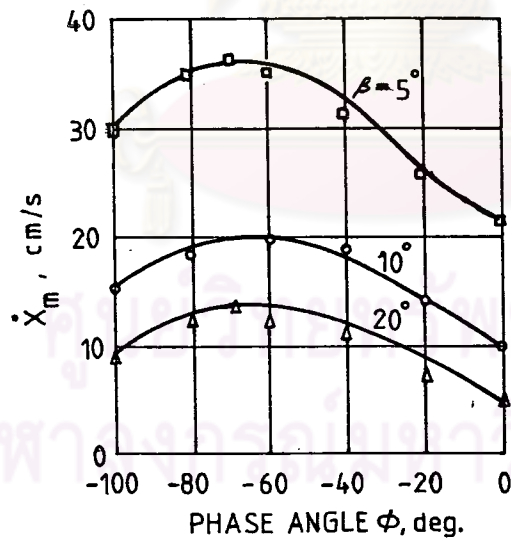


$\alpha = 4^\circ, \mu_s = 0.2, A = 1.2$

รูปที่ 2.36 ผลการทำนายแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเฉลี่ยในการสั่นเนื่องจากมุมเฟสและมุมลาดชัน (เรดพอร์ดกับบูธรอยด์⁵)

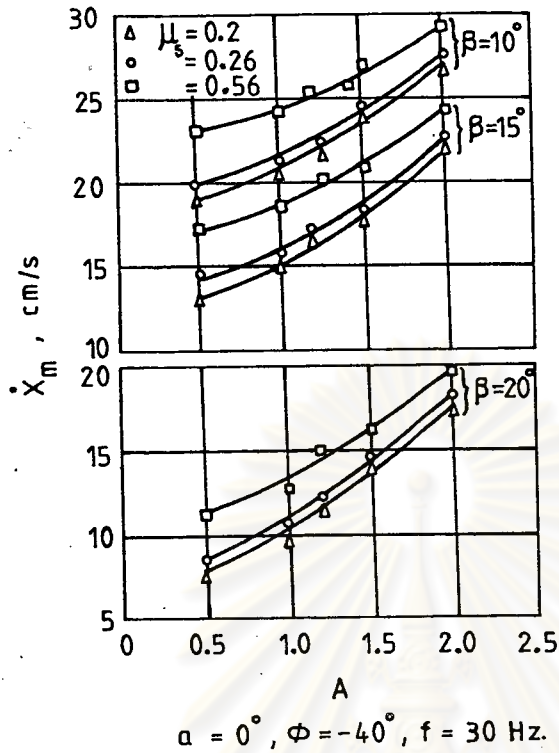


รูปที่ 2.37 ผลการทดลองแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงเนื่องจากมุมเฟส (ใส่ข้อมูลกับยูทูป⁸)

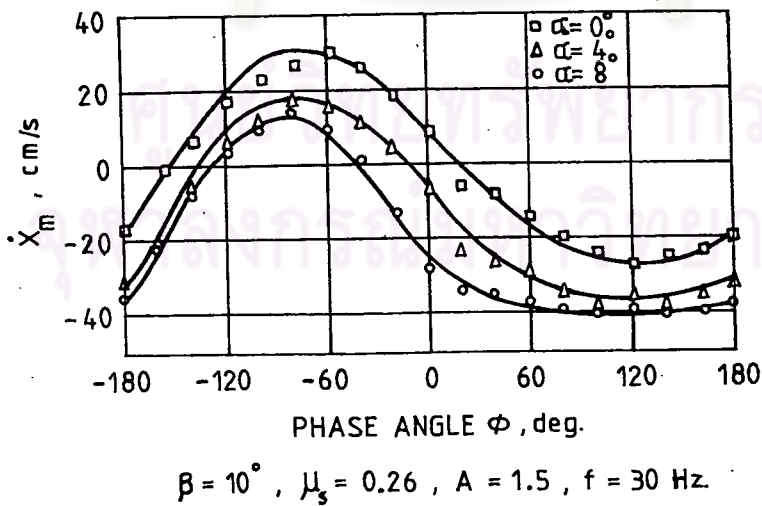


$\alpha = 0^\circ$, $\mu_s = 0.2$, $A = 1.2$, $f = 35$ Hz.

รูปที่ 2.38 สัมพันธภาพระหว่างความเร็วเฉลี่ยในการลำเลียงกับมุมเฟสที่ได้จากการทดลอง (ใส่ข้อมูลกับยูทูป⁸)



รูปที่ 2.39 ผลการทดลองซึ่งแสดงให้เห็นว่าความเร็วเฉลี่ยในการส่งเสียงจะเพิ่มขึ้นตามพารามิเตอร์ความเร่ง (ลู่ฟฟิลต์กับยูซู่⁸)



รูปที่ 2.40 ผลการทดลองแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเฉลี่ยในการส่งเสียงเนื่องจากมุมเฟสและมุมลาดชัน (ลู่ฟฟิลต์กับยูซู่⁸)

ตารางที่ 2.3 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างอุปกรณ์ลำเลียงแบบร่วมเฟลล์กับระบบต่าง
เฟลล์

(เรตฟอร์ดกับบูธรอยต์⁵)

มุมเอียง ของราง	มุมเฟลล์ที่ พอเหมาะ	μ_e	ประสิทธิภาพการลำเลียง		การปรับปรุง ประสิทธิภาพ %
			แบบร่วมเฟลล์	แบบต่างเฟลล์ที่ ϕ_{opt}	
0	-34.0	0.2	28.8	66.3	37.5
		0.4	40.8	71.1	30.3
		0.6	52.8	72.8	20.0
		0.8	64.0	68.5	4.5
		1.0	69.2	66.3	-2.9
4	-65.5	0.2	-22.8	52.7	75.5
		0.4	18.0	65.1	47.1
		0.6	39.0	63.0	23.0
		0.8	54.8	58.0	3.2
		1.0	64.5	52.7	-11.8
8	-83.0	0.2	-67.1	15.1	82.2
		0.4	- 8.9	50.0	58.9
		0.6	22.9	50.0	27.1
		0.8	41.6	43.9	2.3
		1.0	56.3	36.4	-19.9

โดยการให้ความเร่งในแนวตั้งฉากกับรางลำแสงมีค่าสูงชันประกอบกับให้มุมของการสั่นสะเทือนมีค่าต่ำจากการสังเกต เขาทั้งสองพบว่าในกรณีเช่นนี้ไม่ได้ก่อให้เกิดการเคลื่อนที่แบบโรลเล็ติรภาพแต่อย่างใด

ความสัมพันธ์ระหว่าง x_{m} กับมุมเพลล์สำหรับ $A = 1.5$ และ $\beta = 10^\circ$ ดังรูปที่ 2.40 นั้นไม่เพียงแต่แสดงให้เห็นว่าความเร็วของการลำแสงที่ได้มีค่าสูงกว่าที่เกิดขึ้นเมื่อ $A = 1.2$ เท่านั้น แต่ยังนำไปสู่การล้นล้นในสิ่งที่เรตฟอร์ดกับบรูสเตอร์ได้ค้นพบด้วย ซึ่งก็คือ การเพิ่มมุมเอียงของลาดลำแสงจะทำให้มุมเพลล์ที่พอเหมาะมีค่าสูงขึ้น

2.2.2 การเคลื่อนตัวของวัสดุที่เป็นกลุ่มก้อน

จากที่ผ่านมาเราได้ทำการทบทวนถึงการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับพฤติกรรมของอนุภาคเดี่ยวบนรางที่สั่นสะเทือน ซึ่งได้ผลการทำนายที่ค่อนข้างละเอียดแม่นยำ ในหลายปีที่ผ่านมา การลำแสงวัสดุที่เป็นกลุ่มก้อนได้มีบทบาทสูงขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งในอุตสาหกรรมที่เกี่ยวข้องกับผลผลิตทางการเกษตร อุตสาหกรรมการผลิตอาหาร และกระบวนการผลิตที่เกี่ยวข้องกับวัสดุผสม เมล็ด เจ.ซี ริชาร์ด (1) ได้รายงานที่ สัมฤทธิ์ในการลำแสงนั้นไม่ได้ขึ้นอยู่กับตัวแปรของระบบลำแสงเท่านั้น แต่ยังขึ้นเป็นอย่างมากต่อสภาวะการแจกแจงของขนาด และรูปร่างของอนุภาคปริมาณความชื้น ความลึกของชั้นวัสดุที่ลำแสงตลอดจนอุณหภูมิของวัสดุที่ผลกระทบต่อสัมประสิทธิ์ความเสียดทานอีกด้วย

บอทเชอร์ กับ เวมเมอร์ (14) ได้ทำการวิเคราะห์ทางทฤษฎีโดยใช้สมมติฐานว่าขณะมวลสัมผัสกับรางเขย่าจะเป็นการกระทบแบบไม่มีการยืดหยุ่น (inelastic impact) และถือว่ามวลไม่มีการสั่นโกลสัมผัสกับผิวของรางโดยพิจารณาเฉพาะการลอยตัวของมวล จากรากฐานอันนี้ เขาทั้งสองได้กำหนดสมการสำหรับหาค่าความเร็วเฉลี่ยในการลำแสงซึ่งใช้ได้เฉพาะกรณีที่พารามิเตอร์ความเร่ง A มีค่ามากกว่า 1 เท่านั้น ดังสมการ

$$x_{\text{m}} = gr^2 \cot \beta / 2f \quad 2.50$$

เมื่อ g คือความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วง f เป็นความถี่ของการสั่นสะเทือน β เป็นมุมของการสั่นสะเทือน และ r เป็นฟังก์ชันของ A ซึ่งหาได้จากสมการ

$$A = \left[(\cos(2fr) + 2f^2 r^2 - 1) / (2fr - \sin(2fr)) \right]^{1/2} + 1$$

เกเบอส์ (6) ได้รายงานว่าในการลำเสียงวัสดุที่เป็นกลุ่มก้อน ซึ่งมีสัมประ-
 สัมสิทธิ์ความเสียดทานภายในระหว่าง วัสดุกับ วัสดุมากกว่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานภายนอก
 ระหว่าง วัสดุกับผิวของรางแล้ว วัสดุนั้นจะมีพฤติกรรมคล้ายคลึงกับวัสดุที่เป็นของแข็งทั้งก้อน
 (solid mass) มาก ดังนั้นเขาจึง เสนอแนะว่าทฤษฎีของอนุภาคเดี่ยวสามารถนำมาใช้ในการ
 ทำนายการเคลื่อนที่ของ วัสดุแบบกลุ่มก้อนที่มีคุณสมบัติดังกล่าว ได้เป็นอย่างดี โดยเพียงแต่เปลี่ยน
 ค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานไปเป็นสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานที่มีผล (effective
 coefficient of friction) ดังสมการ

$$\mu_e = \mu_s(1 + Kh/w) \quad 2.51$$

เมื่อ K เป็นอัตราส่วนระหว่างความต้านทานข้างกับความตันในแนวตั้ง ซึ่งมีค่า
 ต่ำกว่า 1 และขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุ h เป็นความลึกของวัสดุที่ลำเสียง และ w เป็นความ
 กว้างของรางลำเสียง สมการที่ 2.51 นี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานของแนวความคิดที่ว่าแรงเสียดทานของ
 วัสดุที่เป็นกลุ่มก้อนจะเพิ่มขึ้นตามความลึกของ วัสดุ ส่วนในเรื่องของแรงเสียดทานระหว่าง วัสดุกับ
 ผนังด้านข้าง เกเบอส์ (6) ได้เสนอความเห็นว่ายขึ้นอยู่กับความตันภายใน วัสดุ และในระหว่าง
 การลอยตัวนั้น วัสดุจะเคลื่อนตัวไปในอากาศโดยไม่มี ความตันภายใน ดังนั้นแรงต้านต่อการเคลื่อน
 ที่เนื่องจากผนังด้านข้างจึงไม่เกิดขึ้น อย่างไรก็ตามในกรณีที่ไม่ใช่ข้อมูลทีละเอียดเพียงพอก็จำเป็น
 ที่จะต้องทำการศึกษาอย่าง ระมัดระวัง ใน เรื่องของพฤติกรรมของ วัสดุแบบเป็นกลุ่มก้อนนี้ โดยจะ
 ต้องทำการตรวจสอบผลของขนาดของอนุภาค รูปร่าง ปริมาณความชื้นที่มีต่ออัตราส่วนระหว่าง
 ความตัน และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่มีผล ตลอดจนความต้านทานต่อการเคลื่อนที่ในอากาศ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย