

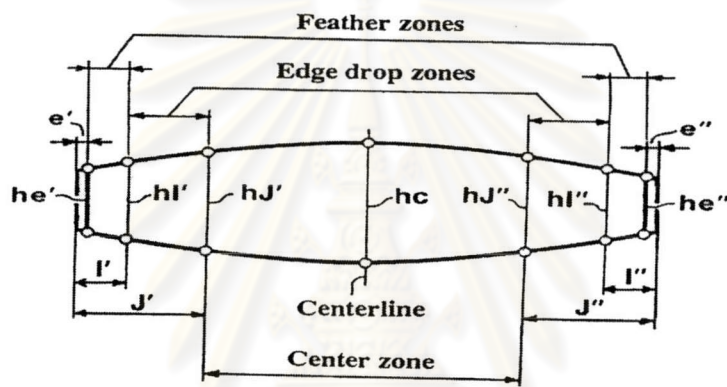
บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แนวคิดและทฤษฎี

นิยามโพรไฟล์ของแผ่นโลหะ

โพรไฟล์ของแผ่นโลหะ (Strip profile) โดยนิยามคือการเปลี่ยนแปลงความหนา (Thickness) ตามแนวความกว้างซึ่งตั้งฉากกับความยาวของแผ่นโลหะ⁴



รูปที่ 2.1 ลักษณะทางเรขาคณิตของแผ่นโลหะที่ผ่านการรีด

โดยปกติแล้วโพรไฟล์ของแผ่นโลหะสามารถอธิบายได้โดยการเปลี่ยนแปลงความหนาตามแนวความกว้างซึ่งตั้งฉากกับความยาว โดยทั่วไปแผ่นโลหะที่ผ่านการรีดจะมีโพรไฟล์ที่ไม่สม่ำเสมอ⁴ จากรูปที่ 2.1 สามารถแบ่งโพรไฟล์ของแผ่นโลหะได้เป็น 3 ส่วนคือ 1. ส่วนกลาง (Center zone) 2. ส่วนที่มีการลดความหนาที่ขอบ (Edge drop zones) และ 3. Feather zones การที่แบ่งโพรไฟล์ของแผ่นโลหะเป็นส่วนทำให้สะดวกที่จะวิเคราะห์ผลของปัจจัยที่มีผลต่อรูปร่างในส่วนต่างๆ เหล่านี้ เพราะว่าโพรไฟล์ของแผ่นโลหะคือความหนาของแผ่นโลหะในแนวที่ตั้งฉากกับความกว้าง ในการเปรียบเทียบหรือพิจารณาโพรไฟล์ของแผ่นโลหะนั้นจะต้องพิจารณาถึงความหนาในแต่ละส่วนของแผ่นโลหะซึ่งสามารถพิจารณาได้ดังนี้

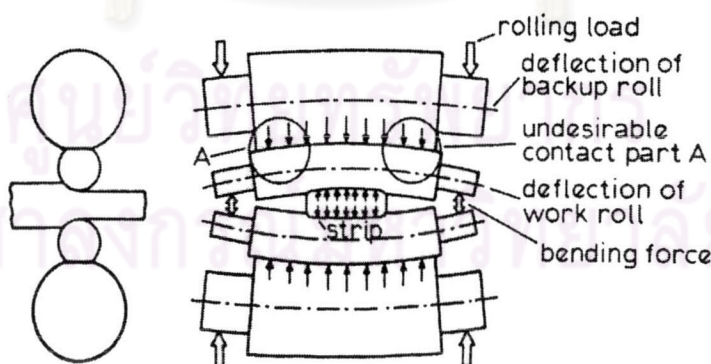
- ความหนาส่วนกลาง (Center gauge, hc) ความหนาส่วนกลางคือความหนาของแผ่นโลหะซึ่งวัดที่จุดกึ่งกลางของแผ่นโลหะ ซึ่งความหนาส่วนกลางนี้เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญตัวหนึ่งที่น่าไปใช้ในการกำหนดลักษณะทางเรขาคณิตที่บอกถึงความเรียบของแผ่นโลหะที่ถูกรีด

- ความหนาบริเวณ Edge drop (Edge drop thickness, hJ) ความหนาบริเวณ edge drop คือความหนาที่ระยะ J ซึ่งวัดถัดจากขอบของแผ่นโลหะเข้ามาในช่วง 50 ถึง 70 มม.. ที่ระยะนี้ความหนาของแผ่นโลหะเริ่มจะลดลงอย่างรวดเร็วจนถึงบริเวณขอบของแผ่นโลหะซึ่งเรียกปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นว่าการเกิด edge drop

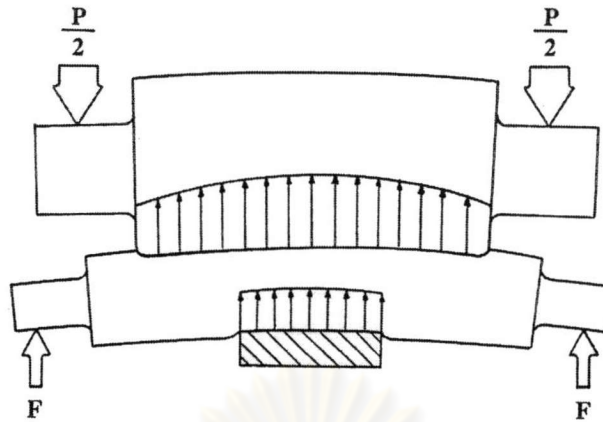
- ความหนาบริเวณ Feather (Feather thickness, hI) ความหนาบริเวณ feather คือความหนาที่ระยะ I ซึ่งวัดถัดจากขอบของแผ่นโลหะเข้ามาในช่วง 9.5 ถึง 25 มม.. ซึ่งระยะนี้คือส่วนของ feather zone โดยที่ในบริเวณของ feather zone นี้ อัตราการลดลงของความหนาโดยปกติแล้วมากกว่าในบริเวณ edge drop zone

- ความหนาที่ขอบ (Edge thickness, he) ความหนาที่ขอบวัดที่ระยะ e ซึ่งถัดจากขอบของแผ่นโลหะเข้ามา 2 ถึง 3 มม..

ในการรีดโลหะแผ่นบางนั้นจะมีการรีดลดขนาดความหนาของชิ้นงานโดยผ่านแท่นรีดเพื่อลดขนาดและมีการควบคุมความหนาเพื่อให้ได้ความหนาตามที่ต้องการ นอกจากความหนาที่ต้องการแล้วสิ่งที่สำคัญที่ต้องคำนึงถึงคือรูปร่างและความเรียบของชิ้นงาน โดยที่รูปร่างของชิ้นงานนั้นเกิดจากการเปลี่ยนแปลงโพรไฟล์ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงโพรไฟล์ของชิ้นงานในแท่นรีดนั้นมีสาเหตุหลักมาจากการเกิดการโก่งตัวของลูกรีด (Axis roll deflection) เมื่อรับแรงในการรีด ดังที่แสดงในรูปที่ 2.2 และการเกิดการยุบตัวของผิวหน้าที่มีการสัมผัสกัน (Surface indentation) ของลูกรีดดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.2 การโก่งตัวของลูกรีด (Axis deflection) เมื่อรับแรงในการรีด



รูปที่ 2.3 การยุบตัวที่ผิวหน้าที่สัมผัสกัน (Surface Indentation) ระหว่างชิ้นงานกับ

Work roll และระหว่าง Backup roll กับ Work roll

โดยที่ในกระบวนการรีดนั้นความหนาของโลหะแผ่นบางนั้นจะถูกรีดลดขนาดลงอย่างต่อเนื่องในชุดแท่นรีด ในการรีดโพรไฟล์ของแผ่นโลหะจะมีความหนาในบริเวณส่วนกลางมากกว่าบริเวณขอบ เนื่องจากการโก่งตัวของลูกรีดและเกิดการยุบตัวที่ผิวหน้าของลูกรีด ซึ่งการที่แผ่นโลหะที่ถูกรีดมีความหนาที่บริเวณส่วนกลางมากกว่าบริเวณขอบทำให้เกิดความแตกต่างความหนาของตรงกลางและขอบหรือเรียกว่า คราวน์ของแผ่นโลหะ (Strip crown) จากรูปที่ 2.1 สามารถที่คำนวณหาคราวน์ที่จุดกลาง (Center crown) ได้ โดยปกติแล้วกำหนดโดยใช้ความแตกต่างระหว่างความหนาตรงกลาง (h_c) กับความหนาบริเวณส่วน Feather (h_l) หรือบริเวณ Edge drop ซึ่งสามารถคำนวณได้โดย

$$ch_l = h_c - h_l \quad (1)$$

โดยที่ h_c = ความหนาที่จุดกลาง (มม.)

h_l = ความหนาบริเวณ feather (มม.)

และสามารถที่กำหนดความสัมพันธ์ของคราวน์กับความหนาที่จุดกลางชิ้นงาน ในรูปของอัตราส่วนคราวน์ (Crown ratio) ดังนี้

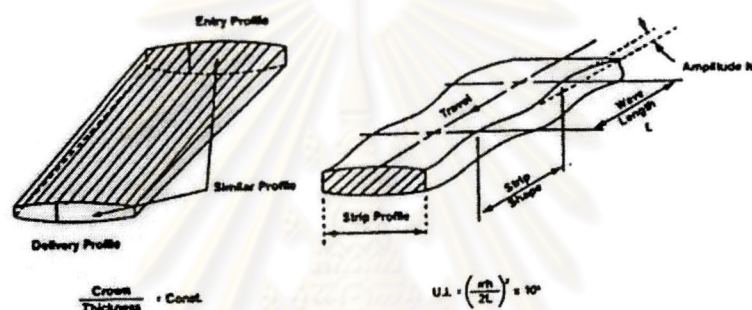
$$crl = \frac{ch_l}{h_c} \times 100\% \quad (2)$$

โดยที่ ch_l = คราวน์ตรงจุดกลาง (มม.)

h_c = ความหนาที่จุดกลาง (มม.)

ความสัมพันธ์ระหว่างโพไฟล์และรูปร่างของแผ่นโลหะ

ในกระบวนการรีดโลหะแผ่นบาง รูปร่างของแผ่นโลหะ (Strip shape) จะไม่ถูกรบกวน ถ้าสามารถที่จะรักษาโพไฟล์ของแผ่นโลหะทางด้านขาเข้าและทางด้านขาออกให้ได้คงเดิม นั่นคือ อัตราส่วนของความหนาขาเข้าและความหนาขาออกมีค่าเหมือนกันตามแนวความกว้าง ซึ่งวิธีในการพิจารณาว่าโพไฟล์ของแผ่นโลหะมีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่มีการเปลี่ยนแปลง โดยการพิจารณาความหนาของแผ่นโลหะที่ส่วนกลางและที่ขอบ ซึ่งโพไฟล์ของแผ่นโลหะที่ผ่านการรีดจะมีโพไฟล์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตรงเท่าที่อัตราส่วนของคราวน์ (Strip crown ratio) ของโลหะแผ่นบางที่ผ่านการรีดมีค่าคงที่⁵



รูปที่ 2.4 การนิยามรูปร่างของแผ่นโลหะ (Definition of strip shape)

เนื่องจากการยากที่จะควบคุมโพไฟล์ของแผ่นโลหะให้มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงตลอดในการรีด ดังนั้นในการรีดแผ่นโลหะจึงเกิดปัญหาในเรื่องรูปร่าง วิธีที่นิยมใช้ในการวัดรูปร่างของแผ่นโลหะแสดงในรูปที่ 2.4 ซึ่งวัดขนาดความเรียบของแผ่นโลหะโดยใช้ค่า I-Unit (UI)⁶ ซึ่งการพิจารณาหาค่า I-Unit ได้จากการที่แผ่นโลหะเกิดการยืดตัวไปตามแนวที่ถูกรีดได้ไม่เท่ากันเนื่องจากแผ่นโลหะมีความหนาที่ไม่เท่ากัน ซึ่งการยืดตัวออกตามแนวความยาวมีความสัมพันธ์โดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงคราวน์ของแผ่นโลหะในขั้นตอนการรีดเพื่อลดขนาด ซึ่งสามารถแสดงได้โดยสมการ

$$\delta = \frac{c_1}{h_1} - \frac{c_2}{h_2} \quad (3)$$

โดยที่

δ = การเปลี่ยนแปลงคราวน์ของแผ่นโลหะในหนึ่งหน่วย

c_1, c_2 = คราวน์ของแผ่นโลหะขาเข้าและขาออกตามลำดับ (มม.)

h_1, h_2 = ความหนาขาเข้าและความหนาขาออกของแผ่นโลหะตามลำดับ (มม.)

โดยที่สามารถที่จะเขียนอยู่ในรูปของพารามิเตอร์ที่ใช้บอกความเรียบของแผ่นโลหะหรือค่า I-Unit (I) ซึ่งสามารถแสดงอยู่ในรูป

$$I = \left[\frac{c_1}{h_1} - \frac{c_2}{h_2} \right] \cdot 10^5 \quad (4)$$

การที่โพรไฟล์ของแผ่นโลหะมีความหนาไม่เท่ากันทำให้เกิดการยืดตัวในแนวยาวได้ไม่เท่ากัน เป็นสาเหตุให้เกิดการเป็นคลื่นที่ขอบ(Wavy edge) เกิดการโค้งงอบริเวณแนวกลางแผ่น(Center buckle) หรืออาจเกิดร่วมกันทั้งสองแบบ⁵ มีความพยายามในการติดตั้งอุปกรณ์ต่างๆ เช่น การตัดที่ Work roll การตัดที่ Intermediate roll และการเลื่อน Intermediate roll ในการควบคุมโพรไฟล์ของชิ้นงานที่ถูกรีด เพื่อที่จะแก้ปัญหาในเรื่องของคราบน้ำมันและรูปร่างของชิ้นงาน ดังนั้นถ้าเราสามารถสร้างแบบจำลองที่สามารถทำนายโพรไฟล์ของชิ้นงานได้อย่างแม่นยำ จะทำให้เราสามารถที่จะทำการปรับพารามิเตอร์ในการรีดได้อย่างเหมาะสม และแก้ไขปัญหารูปร่างได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว ในเวลาที่ผ่านมาได้มีผู้เสนอ ทฤษฎี และแบบจำลองในการหาโพรไฟล์และรูปร่างของแผ่นโลหะซึ่งจะได้กล่าวถึงโดยสังเขปคือ

M.D.Stone⁷ เป็นผู้เสนอและทำการคำนวณหาโพรไฟล์ของโลหะรีดแผ่นบางโดยคำนวณจากการโก่งตัวของ work roll และอธิบายถึงผลของการที่มีการตัดที่ work roll

Shohet and Townsend⁸ เป็นผู้เสนอแบบจำลองโดยใช้การแบ่งเป็นช่วงย่อยบนลูกรีดในการหาการโก่งตัวบนลูกรีดและใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาโพรไฟล์ของแผ่นโลหะ

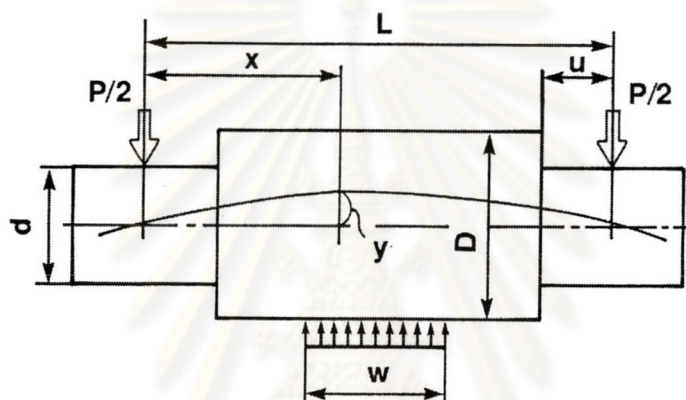
Fumio Fujita เป็นผู้สร้างแบบจำลองการหาโพรไฟล์และรูปร่างของโลหะแผ่นบางที่ถูกรีดในแท่นรีดแบบ 4 ลูกรีด โดยหาโพรไฟล์ของชิ้นงานด้วยการหาการเปลี่ยนแปลงความหนาของชิ้นงานที่มีความสอดคล้องกับการแปรรูปแบบคืนรูป(elastic deformation) ของลูกรีด และการแปรรูปแบบไม่คืนรูป(plastic deformation) ของชิ้นงาน ประกอบกับใช้ทฤษฎีในการรีดสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าความหนาของชิ้นงาน

2.1 แบบจำลองการเกิดการแปรรูปของลูกรีด (Roll Deformation Model)

ตามที่ได้กล่าวและแสดงไว้ในรูปที่ 2.2 และรูปที่ 2.3 การเกิดการเปลี่ยนแปลงโพรไฟล์ของแผ่นโลหะเกิดจากการแปรรูปของลูกรีด ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ

1. การเกิดการโก่งตัวของลูกรีด (Roll deflection)
2. การเกิดการยุบตัวของผิวหน้าที่มีการสัมผัสกัน (Surface indentation)

2.1.1 การวิเคราะห์การเกิดการโก่งตัวของลูกรีด (Roll deflection analysis)



รูปที่ 2.5 การโก่งตัวของลูกรีด (Roll deflection, Y) เมื่อรับแรงในการรีด

จากรูปที่ 2.5 เมื่อพิจารณาลูกรีดเป็นระบบคานอย่างง่าย ใช้การวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีของคาน (Beam theory)⁹ จะสามารถหาความสัมพันธ์ของการโก่งตัวของลูกรีด (Y) อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = M \quad (5)$$

โดยที่

- Y = ระยะการโก่งตัวของลูกรีด (มม.)
 E = ค่า Young's modulus ของลูกรีด (กก./มม.²)
 M = ค่าโมเมนต์ดัด
 I = ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของลูกรีด

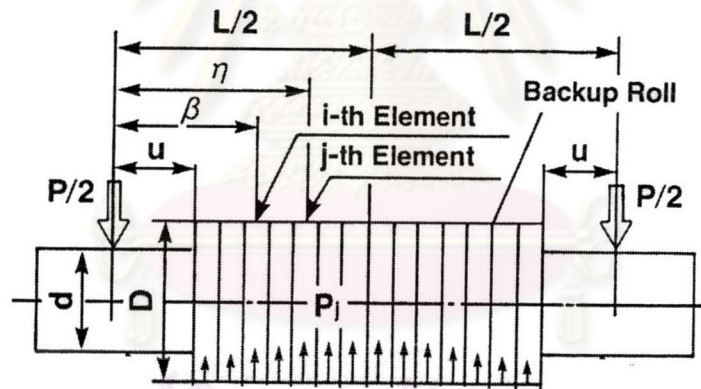
โดยวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์¹⁰ จะสามารถที่จะหาค่าระยะการโก่งตัวของลูกรีด (Y) ได้ คำตอบของสมการอยู่ในรูป

$$Y = C(i,j) \cdot P \cdot X \tag{6}$$

และจากรูปที่ 2.6 เมื่อใช้วิธีการคำนวณโดยการแบ่งช่วงย่อย (ΔX) ซึ่งแบ่งเป็น m ช่วงบนลูกรีด สามารถที่จะพิจารณาการเกิดการโก่งตัว (Y) ได้จากผลรวมที่เกิดในช่วงย่อยได้ดังนี้

$$Y(i) = \sum_{j=1}^m C(i,j) \cdot P_j \cdot \Delta X_j \tag{7}$$

- โดยที่
- P_j = แรงต่อหน่วยความกว้างที่ตำแหน่ง j
 - $C(i,j)$ = influence coefficient ของลูกรีด
 - ΔX_j = ความกว้างของช่วงย่อยที่ตำแหน่ง j
 - m = จำนวนของช่องที่แบ่งบนลูกรีด



รูปที่ 2.6 แบบจำลองการพิจารณาแบ่งช่วงย่อยบนลูกรีด (Slit beam model)¹¹

2.1.1.1 การคำนวณหา influence coefficient ของลูกรีดที่เกิดการโก่งตัว (Calculation of influence coefficients)

พิจารณาจากรูปที่ 2.6 และสมการที่ (7) สามารถที่จะคำนวณหาค่า influence coefficient ($C(i,j)$) หรือ $CA(i,j)$ สำหรับการเกิดการโก่งตัวของลูกรีด ได้โดยสมการ

สำหรับช่วงที่ $j \geq i$

$$CA_{(i,j)} = \frac{32}{3\pi E} \left[(1 + \nu^2) \left[\frac{u}{d^2} + \frac{\beta - u}{D^2} \right] + \frac{2u^3}{d^4} + \frac{1}{D^4} (3\eta\beta L - 2u^3 - 3\beta\eta^2 - \beta^3) \right] \quad (8)$$

สำหรับช่วงที่ $j < i$

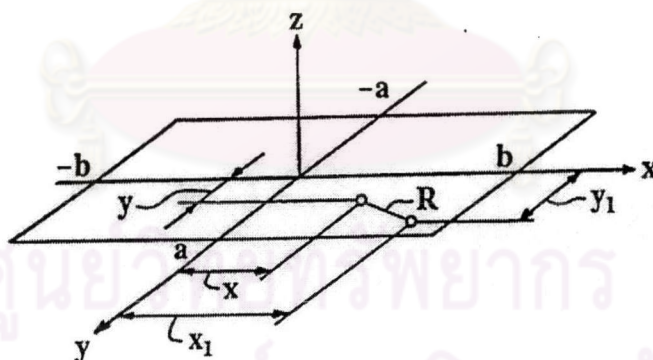
$$CA_{(i,j)} = \frac{32}{3\pi E} \left[(1 + \nu^2) \left[\frac{u}{d^2} + \frac{\eta - u}{D^2} \right] + \frac{2u^3}{d^4} + \frac{1}{D^4} (3\eta\beta L - 2u^3 - 3\eta\beta^2 - \eta^3) \right] \quad (9)$$

โดยที่

ν = อัตราส่วนของปัวซอง (Poisson's ratio)

2.1.2 การพิจารณาการเกิดการยุบตัวที่ผิวหน้าที่มีการสัมผัสกัน (Surface indentation)

สามารถพิจารณาถึงการเกิดการยุบตัวที่ผิวหน้าที่มีการสัมผัสกันหรือมีการเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า roll flattening ระหว่างลูกรีดกับแผ่นโลหะหรือระหว่างลูกรีดกับลูกรีด โดยอาศัยแบบจำลองซึ่งพัฒนาโดย Spooner and Bryant¹²



รูปที่ 2.7 Band of pressure on semi-infinite body. Adopted from Spooner and Bryant

จากรูปที่ 2.7 สามารถคำนวณหา influence coefficient ที่เกิดจากรoll flattening ($CS_{(i,j)}$) ได้โดยสมการ

$$CS(i,j) = \frac{P(1-\nu)}{2\pi G} \left\{ 2a \cdot \ln \frac{(x+b) + \sqrt{(x+b)^2 + a^2}}{(x-b) + \sqrt{(x-b)^2 + a^2}} \right. \\ \left. + (x+b) \cdot \ln \frac{\sqrt{(x+b)^2 + a^2} + a}{\sqrt{(x+b)^2 + a^2} - a} \right. \\ \left. - (x-b) \cdot \ln \frac{\sqrt{(x-b)^2 + a^2} + a}{\sqrt{(x-b)^2 + a^2} - a} \right\} \quad (10)$$

โดยที่

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{modulus of transverse elasticity (กก./มม.}^2 \text{)} \quad (11)$$

และเมื่อพิจารณาที่การเกิด roll flattening ระหว่างลูกรีดกับลูกรีด จากการศึกษาโดย Foppl¹³ ในรูปที่ 2.8 สามารถหาความสัมพันธ์ของการเกิด roll flattening ได้ตามสมการ

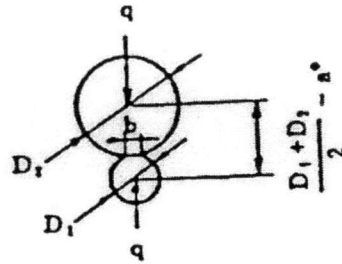
$$c = \frac{8}{\pi} \left(\frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} - \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2} \right) \quad (12)$$

$$b = \sqrt{\frac{c q \frac{D_1 \cdot D_2}{D_1 + D_2}}{D_1 + D_2}} \quad (13)$$

$$a^* = \frac{c}{8} \cdot q \cdot \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{2D_1}{b} + \frac{2D_2}{b} \right) \quad (14)$$

โดยที่

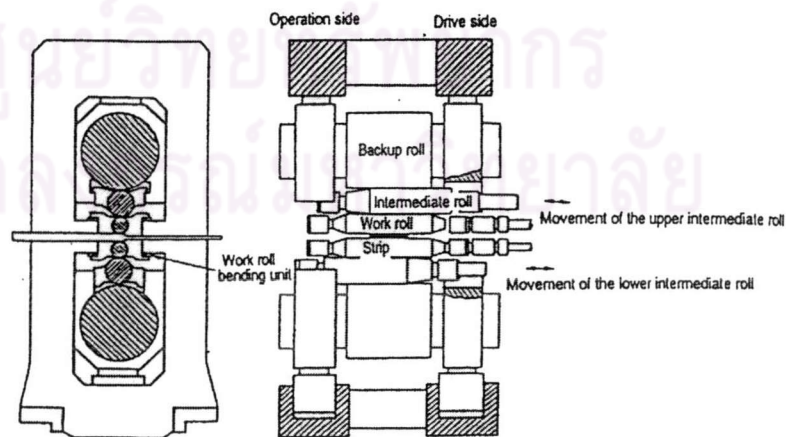
- b = ความกว้างบริเวณที่สัมผัส (contact width) (มม.)
- D_1, D_2 = เส้นผ่าศูนย์กลางของลูกรีด (roll diameter) (มม.)
- q = แรงต่อหนึ่งหน่วยความกว้าง (ตัน./มม.²)



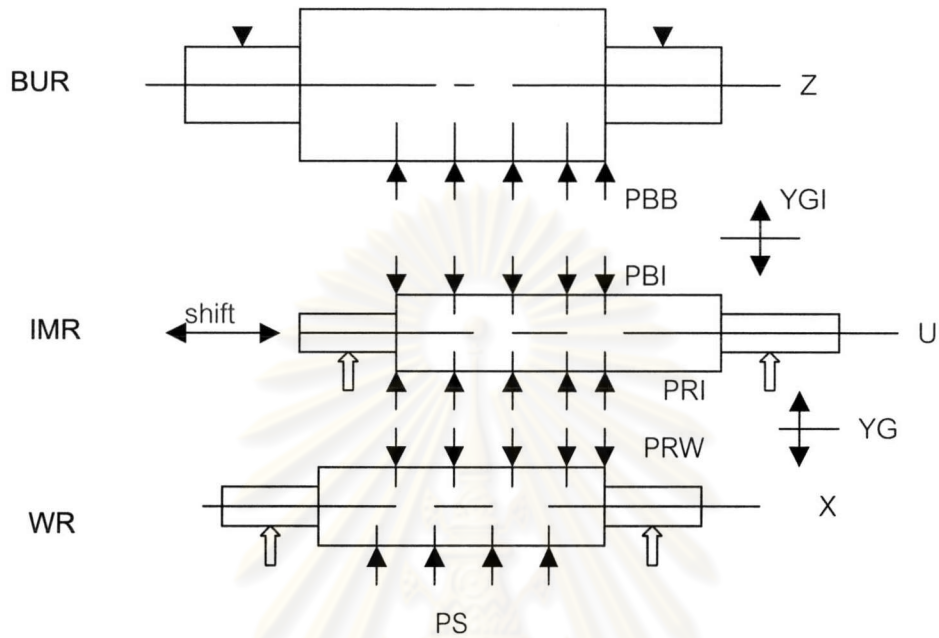
รูปที่ 2.8 การเกิด roll flattening ของลูกรีด

2.2 การแปรรูปของลูกรีด (Roll Deformation model) ในแท่นรีดแบบ 6 ลูกรีด

การวิเคราะห์การเกิดการแปรรูปของลูกรีดมีจุดประสงค์เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์กันในชุดลูกรีด นำไปสู่การสร้างสมการหลักโดยมีพารามิเตอร์ต่างๆที่เกี่ยวข้องเช่นขนาดมิติต่างๆของลูกรีด แรงต่างที่เกิดขึ้น แรงที่กระทำกับลูกรีด และสามารถสร้างสมการความสัมพันธ์ของความสอดคล้องกัน หรือความสอดคล้องในส่วนที่มีการสัมผัสกันของลูกรีด ซึ่งในสมการเหล่านั้นจะมีทั้งตั้งแปรต่างๆที่ทราบค่าและหาค่าได้เช่น Influence coefficient ของลูกรีด และตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเช่นแรงที่กระทำระหว่างลูกรีด แรงระหว่างลูกรีดกับแผ่นโลหะ โดยที่สามารถหาค่าตัวแปรเหล่านั้นได้โดยใช้เมตริกซ์ช่วยแก้สมการหาค่าตัวแปร จากที่ได้กล่าวไว้ในตอนต้นแล้วว่าในการวิเคราะห์เพื่อหาโพไฟล์ของแผ่นโลหะสามารถวิเคราะห์ได้จากความสัมพันธ์ของการแปรรูปของลูกรีด (Axis roll deflection)และการยุบตัวของผิวหน้าที่มีการสัมผัสกัน (Surface indentation) ซึ่งในการคำนวณเพื่อหาการแปรรูปของชุดลูกรีดในแท่นรีดสามารถวิเคราะห์โดยใช้วิธีแบ่งช่วงย่อยบนลูกรีด (slit beam model) แล้วนำระบบสมการมาสร้างเมตริกซ์และหาคำตอบโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข



รูปที่ 2.9 ชุดแท่นรีดแบบ 6 ลูกรีด



รูปที่ 2.10 แผนภาพอิทธิพลของชุดลูกกรีด

พิจารณาที่ Backup roll

1. การเกิดการโก่งตัวในแนวแกนของ Backup roll (Axis deflection of backup roll)

$$YAB(i) = \sum_{j=1}^{nz} CAB(i, j) \cdot DZ(j) \cdot PBB(j) \quad (15)$$

2. การเกิดการยุบตัวที่ผิวหน้าของ Backup roll (Surface indentation of backup roll)

$$YSB(i) = \sum_{j=1}^{nz} CSB(i, j) \cdot PBB(j) \quad (16)$$

3. สมการรวมของการโก่งตัวของ Backup roll (Total deflection of backup roll)

$$YABB(i) = \sum_{j=1}^{nz} [CAB(i, j) \cdot DZ(j) + CSB(i, j)] \cdot PBB(j) \quad (17)$$

พิจารณาที่ Intermediate roll

4. การเกิดการโก่งตัวในแนวแกนของ Intermediate roll (Axis deflection of intermediate roll)

$$YAI(i) = - \sum_{j=1}^{nub} CAIBB(i, j) \cdot DUB(j) \cdot PBI(j) + \sum_{j=1}^{nuw} CAIBW(i, j) \cdot DUW(j) \cdot PRI(j) \quad (18)$$

5. การเกิดการยุบตัวที่ผิวหน้าด้านบนของ Intermediate roll (Upper surface indentation of intermediate roll)

$$YSI(i) = - \sum_{j=1}^{nub} CSIB(i, j) \cdot PBI(j) \quad (19)$$

6. สมการรวมการเกิดการโก่งตัวของ Intermediate roll เมื่อคิดที่ผิวบน (Total upper deflection of intermediate roll)

$$YAIB(i) = - \sum_{j=1}^{nub} [CAIBB(i, j) \cdot DUB(j) + CSIB(i, j)] \cdot PBI(j) + \sum_{j=1}^{nuw} CAIBW(i, j) \cdot DUW(j) \cdot PRI(j) + \sum_{i=1}^{nub} YGI(i) \quad (20)$$

7. การเกิดการโก่งตัวในแนวแกนของ Intermediate roll (Axis deflection of intermediate roll)

$$YAIU(i) = - \sum_{j=1}^{nub} (CAIWB(i, j) \cdot DUB(j) \cdot PBI(j) + \sum_{j=1}^{nuw} CAIWW(i, j) \cdot DUW(j) \cdot PRI(j)) \quad (21)$$

8. การเกิดการยุบตัวที่ผิวหน้าด้านล่างของ Intermediate roll (Under surface indentation of intermediate roll)

$$YSIS(i) = \sum_{j=1}^{nuw} CSIW(i, j) \cdot PRI(j) \quad (22)$$

9. สมการรวมการเกิดการโก่งตัวของ Intermediate roll เมื่อคิดที่ผิวล่าง (Total under deflection of intermediate roll)

$$\begin{aligned}
 YAIW(j) = & - \sum_{j=1}^{nub} CAIWB(i, j) \cdot DUB(i, j) \cdot PBI(j) \\
 & + \sum_{j=1}^{nuw} [CAIWW(i, j) \cdot DUW(j) + CSIW(i, j)] \cdot PRI(j) + \sum_{i=1}^{nuw} YG(i)
 \end{aligned} \quad (23)$$

พิจารณาที่ Work roll

10. การเกิดการโก่งตัวในแนวแกนของ Work roll (Axis deflection of work roll)

$$YAWR(i) = - \sum_{j=1}^{nxxi} CAWII(i, j) \cdot DXXI(i, j) \cdot PRW(j) + \sum_{j=1}^m CAWIS(i, j) \cdot DX(j) \cdot PS(j) \quad (24)$$

11. การเกิดการยุบตัวที่ผิวน้ำด้านบนของ Work roll (Upper surface indentation of work roll)

$$YSWS(i) = - \sum_{j=1}^{nxxi} CSWI(i, j) \cdot PRW(j) \quad (25)$$

12. สมการรวมการเกิดการโก่งตัวของ Work roll เมื่อคิดที่ผิวนบน (Total upper deflection of work roll)

$$\begin{aligned}
 YAWI(i) = & - \sum_{j=1}^{nxxi} [CAWII(i, j) \cdot DXXI(j) + CSWI(i, j)] \cdot PRW(j) \\
 & + \sum_{j=1}^m CAWIS(i, j) \cdot DX(j) \cdot PS(j) + \sum_{j=1}^{nxxi} YG(i)
 \end{aligned} \quad (26)$$

13. การเกิดการโก่งตัวในแนวแกนของ Work roll (Axis deflection of work roll)

$$YAWRR(l) = - \sum_{j=1}^{nxxi} CAWSS(i, j) \cdot DXXI(j) \cdot PRW(j) + \sum_{j=1}^m CAWSS(i, j) \cdot DX(j) \cdot PS(j) \quad (27)$$

14. การเกิดการยุบตัวที่ผิวหน้าด้านล่างของ Work roll (Under surface indentation of work roll)

$$YSWSR(i) = \sum_{j=1}^m CSWS(i, j) .PS(j) \quad (28)$$

15. สมการรวมการเกิดการโก่งตัวของ Work roll เมื่อคิดที่ผิวล่าง (Total under deflection of work roll)

$$YAWS(i) = - \sum_{j=1}^{n_{xxi}} CAWSI(i, j) .DXXI(j) .PRW(j) + \sum_{j=1}^m [CAWSS(i, j) .DX(j) + CSWS(i, j)] .PS(j) + \sum_{i=1}^m YG(i) \quad (29)$$

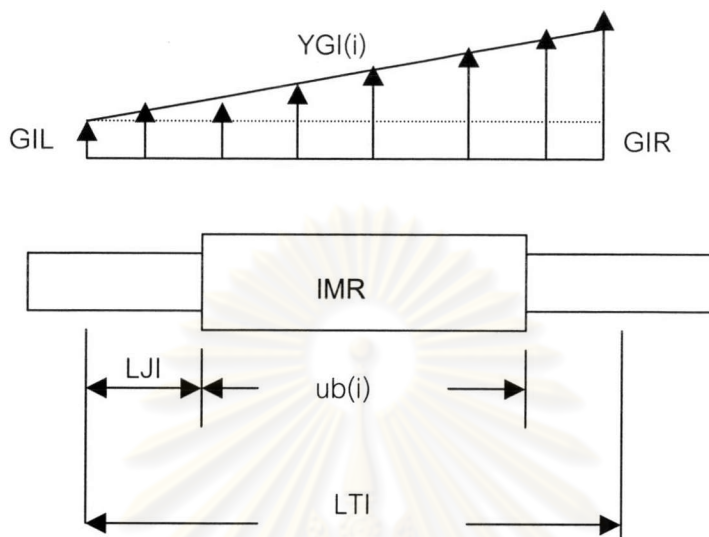
16. สามารถพิจารณาสมการของความหนา (Thickness) ได้จาก

$$h(i) = \sum_{i=j_s}^{j_e} [YAWS(i) + YAWS(m + 1 - i)] \quad (30)$$

2.3 สมการความสอดคล้องระหว่างลูกรีด (Compatibility equations between Rolls)

สมการความสอดคล้อง (Compatibility equation) เป็นการแสดงถึงความสอดคล้องกัน ในบริเวณที่เกิดการสัมผัสกันของลูกรีดกับลูกรีดหรือระหว่างลูกรีดกับแผ่นโลหะ โดยคิดว่าการเกิดการแปรรูปที่ผิวหน้าที่มีการสัมผัสกันนั้นเป็นไปในรูปแบบที่สอดคล้องกัน ซึ่งคิดรวมถึงผลของระยะห่างเมื่อมีการขยับตัวในแนวตั้งของ intermediate roll (YGI(i)) และ work roll (YG(i)) โดยในการรีด คิดว่าที่ intermediate roll และที่ work roll นั้นอาจมีการเคลื่อนที่ขยับขึ้นหรือลงในแนวตั้งได้ซึ่งระยะการขยับของทั้งสองด้านนั้นเป็นอิสระแก่กัน สามารถหาความสัมพันธ์ของการเกิดระยะห่างเมื่อพิจารณาที่ intermediate roll จากรูปที่ 2.11 ให้ระยะขยับตัวทางด้านซ้ายของลูกรีดคือ GIL(มม.) และระยะขยับตัวทางด้านขวาของลูกรีดคือ GIR (มม.) โดยที่ระยะขยับตัวของ intermediate roll (YGI(i)) จะอยู่ในรูปฟังก์ชันของ GIL และ GIR ซึ่งสามารถหาความสัมพันธ์

ได้โดยใช้ตรีโกณมิติ ในรูปที่ 2.11 เมื่อแบ่งช่วงย่อยบน intermediate roll ด้านที่สัมผัสกับ backup roll เป็น $ub(i)$ เขียนความสัมพันธ์ของด้านโดยใช้สามเหลี่ยมคล้ายจะได้



รูปที่ 2.11 การขยับตัวในแนวตั้งของ Intermediate roll

$$\frac{[YGI(i) - GIL]}{[ub(i) + LJI]} = \frac{[GIR - GIL]}{LTI}$$

$$YGI(i) = \frac{GIR(ub(i) + LJI)}{LTI} - \frac{GIL(ub(i) + LJI)}{LTI} + GIL$$

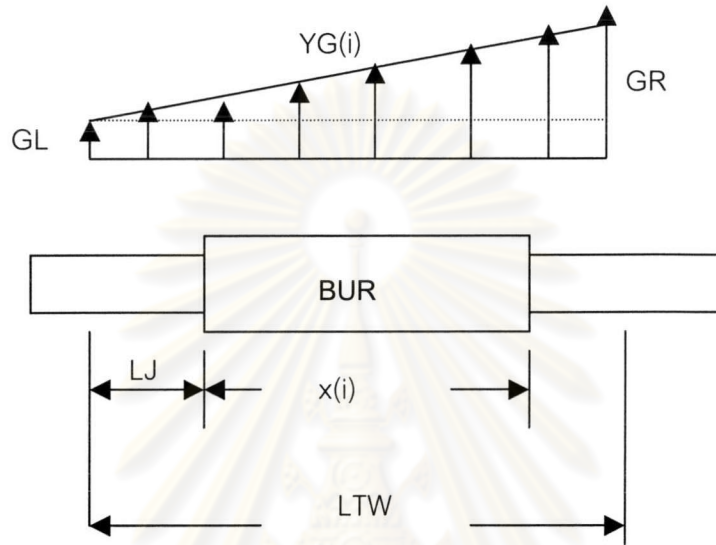
$$YGI(i) = GIL * (1 - (ub(i) + LJI) / LTI) + GIR * ((ub(i) + LJI) / LTI) \quad (31)$$

และเมื่อพิจารณาที่ work roll เพื่อหาสมการของการขยับตัวในแนวตั้ง ($YG(i)$) ในรูปที่ 2.12 โดยใช้ทฤษฎีตรีโกณมิติเช่นเดียวกัน เมื่อแบ่งช่วงย่อยบน work roll ด้านที่สัมผัสกับแผ่นโลหะเป็น $x(i)$ และเขียนความสัมพันธ์ของด้านโดยใช้สามเหลี่ยมคล้ายจากรูปที่ 2.12 เมื่อ GL (มม.) เป็นระยะขยับตัวทางด้านซ้ายของลูกรีด และ GR (มม.) เป็นระยะขยับตัวทางด้านขวาของลูกรีดสามารถเขียนสมการของการขยับตัว $YG(i)$ ในรูปฟังก์ชันของ GL และ GR ได้ดังนี้

$$\frac{[YG(i) - GL]}{[x(i) + LJ]} = \frac{[GR - GL]}{LTI}$$

$$YG(i) = \frac{GR(x(i) + LJ)}{LTW} - \frac{GL(x(i) + LJ)}{LTW} + GL$$

$$YG(i) = GL * (1 - (x(i) + LJ) / LTW) + GR * ((x(i) + LJ) / LTW) \quad (32)$$



รูปที่ 2.12 การขยับตัวในแนวตั้งของ Work roll

2.3.1. สมการความสอดคล้องในบริเวณที่สัมผัสระหว่าง Backup roll และ Intermediate roll (Compatibility for contact of backup roll and intermediate roll)

เมื่อพิจารณาจากสมการรวมการเกิดการโก่งตัวของ backup roll และ สมการรวมการเกิดการโก่งตัวที่ผิวด้านบนของ intermediate roll จากสมการที่ (17) และสมการที่(20)จะได้

$$YABB(i) = YAIB(i)$$

หรือสามารถเขียนได้ในรูป

$$\sum_{j=1}^{nz} [CAB(i, j).DZ(j) + CSB(i, j)] .PBB(j) - \sum_{j=1}^{nub} [CAIBB(i, j).DUB(j) + CSIB(i, j)] .PBI(j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{nuw} [CAIBW(i, j).DUW(j)] .PRI(j) + \sum_{i=1}^{nub} YGI(i) = 0 \quad (33)$$

2.3.2 สมการความสอดคล้องในบริเวณที่สัมผัสระหว่าง Intermediate roll และ work roll (Compatibility for contact of intermediate roll and work roll)

พิจารณาจากสมการรวมการเกิดการโก่งตัวที่ผิวด้านล่างของ intermediate roll และสมการรวมการโก่งตัวที่ผิวด้านบนของของwok roll จากสมการที่(23) และสมการที่(26)

$$YAIW(i) = YAWI(i)$$

หรือสามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{nub} [CAIWB(i, j).DUB(j)] .PBI(j) + \sum_{j=1}^{nuw} [CAIWW(i, j).DUW(j) + CSIW(i, j)] .PRI(j) \\ & - \sum_{j=1}^{nxxi} [CAWII(i, j).DXXI(j) + CSWI(i, j)] .PRW(j) + \sum_{j=1}^m [CAWIS(i, j).DX(j)] .PS(j) \\ & + \sum_{i=1}^{nuw} YGI(i) + \sum_{i=1}^{nxxi} YG(i) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

2.3.3 สมการความสัมพันธ์ของแรงรีดและความหนา (Roll force and thickness relationship)

สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงรีด(PS)และความหนา(h)สามารถแสดงได้โดย

$$PS(j) = PS_0 + \frac{\partial P}{\partial h} .\Delta h(j) \quad (35)$$

โดยที่

$$\Delta h(j) = h(j) - \bar{h} \quad (36)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{swd} \sum_{j=j_s}^{j_e} h(j).DX(j) \quad (37)$$

และ

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{\partial P}{\partial \tau} . \frac{\partial \tau}{\partial h} \quad (38)$$

โดยที่

$$\tau = \text{แรงดึง (tension) (กก./มม.}^2 \text{)}$$

สามารถหาค่า PS_0 ได้จากทฤษฎีการรีด (Rolling theory) โดยใช้สมการของ Hill¹⁴ เป็นสมการที่นิยมใช้ในการคำนวณหาค่าแรงรีด เนื่องจากเป็นสมการที่สำเร็จรูปและสะดวกเมื่อนำมาเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยมีสมการดังนี้

$$P = k \cdot Q_p \cdot L_d \cdot w \cdot \eta \quad (39)$$

โดยที่

$$\eta = 1 - \frac{\left\{ \frac{\phi_n}{\phi_b} \tau_f + \left[1 - \frac{\phi_n}{\phi_b} \right] \frac{\tau_b}{(1-r)} \right\}}{k} \quad (40)$$

$$Q_p = 1.08 + 1.79r \frac{\mu}{\phi_b} \sqrt{r} - 1.02r \quad (41)$$

$$r = \frac{\Delta h}{H_{in}} \quad (42)$$

k = deformation resistance

w = material width (มม.)

L_d = contact length (มม.)

τ_f = front tension (กก./มม.²)

τ_b = back tension (กก./มม.²)

ค่าของ Neutral angle (ϕ_n) สามารถหาได้จากมาการของ Bland and Ford's Equation¹⁵ ดังนี้

$$\phi_n = \tan \left[\frac{H_n}{2 \sqrt{\frac{R'}{h_{out}}}} \right] \frac{1}{\sqrt{\frac{R'}{h_{out}}}} \quad (43)$$

$$H_n = \frac{H}{2} - \frac{1}{2\mu} \ln \left[\frac{H_{in} \left(1 - \frac{\tau_f}{k_f} \right)}{h_{out} \left(1 - \frac{\tau_b}{k_b} \right)} \right] \quad (44)$$

k_f = deformation resistance ที่ทางออกจากแท่นรีด

k_b = deformation resistance ที่ทางเข้าแท่นรีด

โดยที่ค่า H หาได้จากสมการดังนี้

$$H = 2 \sqrt{\frac{R'}{h_{out}}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{R'}{h_{out}}} \phi_B \right) \quad (45)$$

$$\phi_B = \cos^{-1} \left(1 - \frac{\Delta h}{2R} \right) \quad (46)$$

โดยที่

R = รัศมีของลูกรีด (มม.)

R' = รัศมีใหม่ของลูกรีดซึ่งเกิดจาก roll flattening (มม.)

จากสมการข้างต้นสามารถคำนวณหาแรงรีด PS_0 ได้ และเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของแรงรีดกับตัวแปรอื่นๆได้ในรูปของฟังก์ชัน

$$P = P(H, h, \tau_b, \tau_f, k, \mu) \quad (47)$$

และสามารถหาค่า $\frac{\partial P}{\partial h}$ ในสมการที่ (35) ได้จากความสัมพันธ์ $\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial h}$

โดยที่ $\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\Delta P}{\Delta \tau}$ (48)

$$\frac{\Delta P}{\Delta \tau} = \frac{PS_0 - P[H_i, \bar{h}, (\bar{\tau}_b + \Delta \tau), (\bar{\tau}_f + \Delta \tau), k, \mu]}{\Delta \tau} \quad (49)$$

และพิจารณา $\frac{\partial \tau}{\partial h} = \frac{\Delta \tau}{\Delta h}$ (50)

โดยที่ในการหาค่าของแรงดึงกับความหนาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น($\Delta\tau$)และความเครียดตามยาว($\Delta\varepsilon_L$)ของแผ่นโลหะนั้นคือ

$$\Delta\tau_i = -(E \cdot \Delta\varepsilon_{L,i}) \quad (51)$$

และ $\varepsilon_{L,i} = -(\bar{\varepsilon}_h + \alpha\Delta\varepsilon_{h,i}) \quad (52)$

โดยที่

$$E = \text{Young's modulus ของแผ่นโลหะ (กก./มม.}^2 \text{)}$$

$$\varepsilon_h = \text{ความเครียดตามขวางของแผ่นโลหะ}$$

$$\alpha = \text{สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนรูปของแผ่นโลหะ}$$

เมื่อแผ่นโลหะที่อยู่ภายใต้แรงดึง แผ่นโลหะจะยืดออกทำให้เกิดความเครียดตามยาว ($\varepsilon_{L,i}$) และในขณะเดียวกันความหนาก็จะลดลงด้วย ความเครียดที่เกิดขึ้นในแนวตามขวางมีค่าเท่ากับ ความเครียดในแนวยาว แต่จะมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน นั่นคือ

$$\bar{\varepsilon}_L = -\bar{\varepsilon}_h \quad (53)$$

แทนค่าลงในสมการ (52) จะได้

$$\Delta\varepsilon_{L,i} = (\varepsilon_{L,i} - \bar{\varepsilon}_L) = -(\alpha \cdot \Delta\varepsilon_{h,i}) \quad (54)$$

แทนค่าสมการที่ (54) ลงในสมการที่ (51) ได้

$$\Delta\tau_i = -(E \cdot \Delta\varepsilon_{L,i}) = E \cdot \alpha \cdot \Delta\varepsilon_{h,i} \quad (55)$$

โดยที่

$$\Delta\varepsilon_{h,i} = \varepsilon_{h,i} - \bar{\varepsilon}_h \quad (56)$$

$$= -\frac{H_i - h_i}{H_i} + \frac{\bar{H} - \bar{h}}{\bar{H}}$$

$$= \frac{h_i}{H_i} - \frac{\bar{h}}{\bar{H}}$$

$$\Delta\tau_i = E.\alpha \cdot \left(\frac{h_i}{H_i} - \frac{\bar{h}}{\bar{H}} \right) \quad (57)$$

และจากสมการที่(57) ทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{\partial\tau}{\partial h} = \frac{\Delta\tau}{\Delta h} = \frac{E.\alpha}{H_i} \quad (58)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} PS(j) &= PS_0 + \frac{\partial P}{\partial h} \cdot \Delta h_j \\ &= PS_0 + \frac{\partial P \cdot \partial\tau}{\partial\tau \cdot \partial h} \cdot \Delta h_j \\ PS(j) &= PS_0 + \frac{\partial P}{\partial\tau} \cdot \frac{E.\alpha}{H_i} \cdot \Delta h_j \end{aligned} \quad (59)$$

2.4 สมการสมดุลสถิตของลูกรีด (Static equilibrium of rolls)

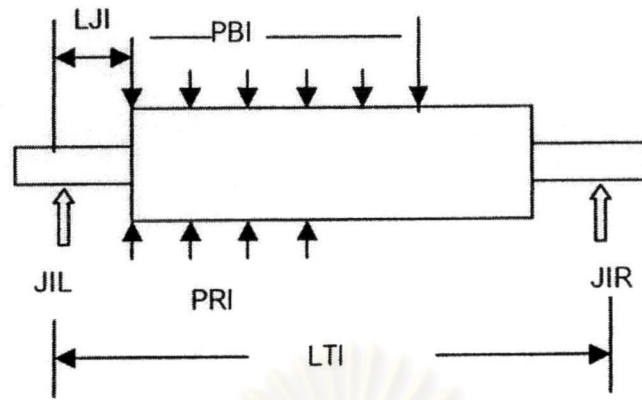
ในการพิจารณาในเรื่องแรงที่กระทำต่อลูกรีดนั้นจะพิจารณาที่ intermediate roll และ work roll โดยคิดว่า backup roll นั้นตรึงอยู่กับที่โดยไม่มีการขยับหรือมีการเคลื่อนที่ ซึ่งในการพิจารณาสมดุลสถิตของลูกรีดนั้นจะคำนวณทั้งสมดุลของแรงและสมดุลของโมเมนต์

2.4.1 สมดุลสถิตของ intermediate roll

เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.13 สามารถสร้างสมการสมดุลของแรงและสมดุลของโมเมนต์ได้โดย

2.4.1.1 สมการสมดุลของแรงที่ intermediate roll

$$-\sum_{j=1}^{nub} PBI(j) \cdot DUB(j) + \sum_{j=1}^{nuw} PRI(j) \cdot DUW(j) = -(JIL+JIR) \quad (60)$$



รูปที่ 2.13 แรงที่กระทำบน Intermediate roll

2.4.1.2 สมการสมดุลของโมเมนต์ (Moment balance)

$$-\sum_{j=1}^{nub} DUB(j) \cdot (ub(j) + LJI) \cdot PBI(j) + \sum_{j=1}^{nuw} DUW(j) \cdot (uw(j) + LJI) \cdot PRI(j) = -(JIR \cdot LTI) \quad (61)$$

2.4.2 สมดุลสถิตของ work roll

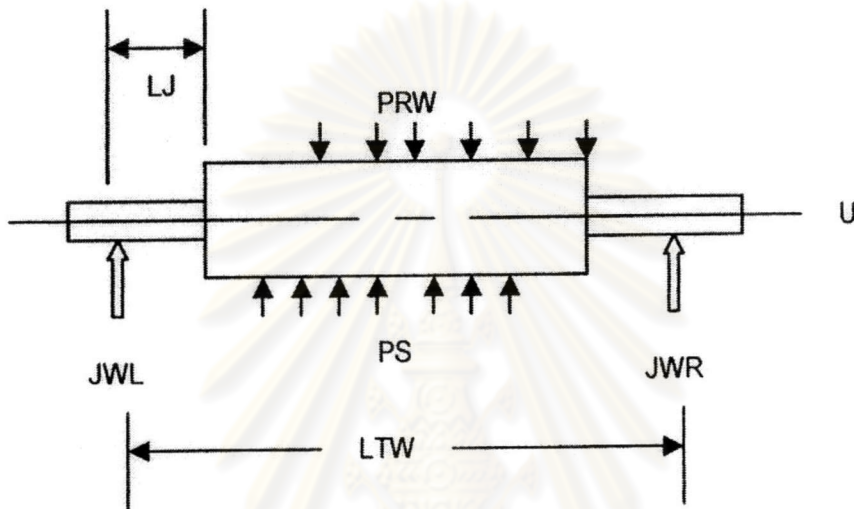
2.4.2.1 สมการสมดุลของแรง (force balance)

เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.14 สามารถสร้างสมการสมดุลของแรงและสมดุลของโมเมนต์ได้โดย

$$-\sum_{j=1}^{nxxi} DXXI(j) \cdot PRW(j) + \sum_{j=1}^m DX(j) \cdot PS(j) = -(JWL + JWR) \quad (62)$$

2.4.2.2 สมการสมดุลของโมเมนต์ (moment balance)

$$-\sum_{j=1}^{n_{xi}} D_{XXI}(j) \cdot (x_{xi}(j) + LJ) \cdot PRW(j) + \sum_{j=1}^m DX(j) \cdot (x(j) + LJ) \cdot PS(j) = -(JWR \cdot LTW) \quad (63)$$



รูปที่ 2.14 แรงที่กระทำบน Work roll

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย