บทที่ 3

ทฤษฎีพื้นฐาน

บทนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งสามารถอธิบายการเติบโตของพืช ที่เรียกว่าแบบจำลองการเติบโตของพืช (Growth model) ส่วนต่อไปจะกล่าวถึง วิธีการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองการเติบโต โดยการถดถอยแบบไม่เชิงเส้น(Non-Linear Regression) ด้วยวิธีเลเวนเบิร์ก-มาร์คอรดท์ (Levenberg-Marquardt) สำหรับ ส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงการสร้างภาพนามธรรมของพืชโดยใช้ L-System

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเติบโต (Growth Model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้ เป็นแบบจำลองที่มาจากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation) โดยจะกล่าวถึงแบบจำลองการเติบโตแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ซึ่งถูกพัฒนาต่อมาเป็นแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก และแบบจำลองการเติบโตแบบมัลติลอจิสติก ตามลำดับ

แบบจำลองการเติบโตแบบเอกซ์โปเนนเชียล เป็นแบบจำลองแบบง่ายที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในยุคแรก ซึ่งเป็นการเติบโตแบบไม่จำกัดหรือไม่มีขอบเขต ดังแสดงในรูป 3.1 อัตราการเติบโตของจำนวนประชากร $\frac{d\,G(t)}{dt}$ ที่เวลา t เป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากร $G(t)$ เขียนอยู่ในรูปความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{d\,G(t)}{dt} \propto G(t)$$

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเจริญเติบโตแบบเอกซ์โปเนนเชียลเขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

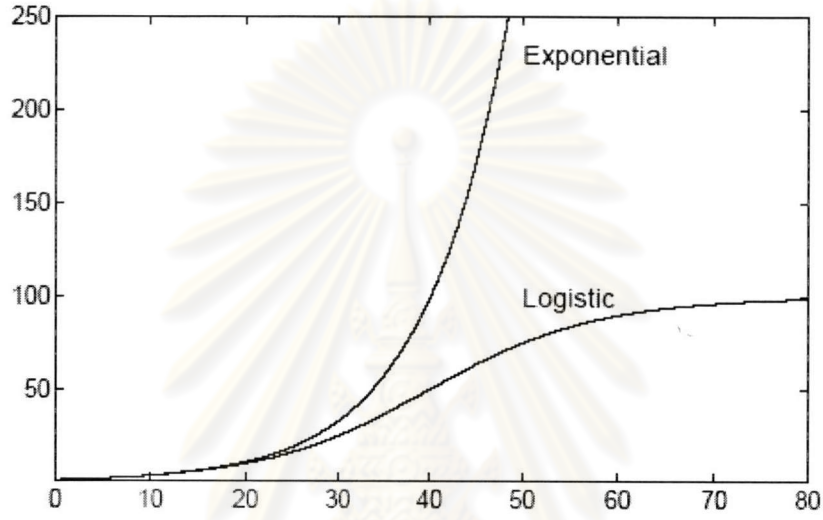
$$\frac{dG(t)}{dt} = \alpha\, G(t) \qquad (3.1)$$

จากสมการ (3.1) แก้สมการแล้วเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันของ $G(t)$ ได้ดังนี้

$$G(t) = \beta e^{\alpha t} \tag{3.2}$$

โดยที่ α คือ อัตราการเติบโตของประชากร

β คือ จำนวนประชากรเริ่มต้น $G(0)$



รูปที่ 3.1 การเติบโตแบบเอกซ์โปเนนเชียลและแบบลอจิสติก

แม้ว่าการเพิ่มขึ้นของประชากรของสิ่งมีชีวิตเป็นแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล แต่การไม่มีขอบเขตการเติบโตหรือค่าจำกัดการเติบโต ทำให้ไม่สามารถใช้กับประชากรของสิ่งมีชีวิตส่วนใหญ่ซึ่งมีขอบเขตการเติบโตได้ ด้วยเหตุนี้จึงต้องทำการปรับปรุงสมการ (3.2) ให้มีขอบเขตการเติบโต ซึ่งเส้นโค้งที่ได้จะมีลักษณะคล้ายตัวเอส (Sigmoidal Shape) ดังแสดงในรูปที่ 3.1 แบบจำลองการเติบโตที่ปรับปรุงจากแบบจำลองการเติบโตแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลเรียกว่า แบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก (Logistic Growth Model) ซึ่งได้มีการเสนอครั้งแรกในปี ค.ศ. 1838 โดยนักชีววิทยาและนักคณิตศาสตร์ชาวเบลเยียมที่ชื่อว่า Pierre-Francois Verhulst ซึ่งแบบจำลองนี้ เป็นที่นิยมมากในบรรดานักวิจัยชีววิทยาเชิงคณิตศาสตร์ [3]

แบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก เริ่มด้วยการเพิ่มเทอม "negative feedback" $\left(1-\frac{G(t)}{K}\right)$ ซึ่งทำให้อัตราการเติบโตของประชากรลดลงเมื่อเข้าใกล้ค่าจำกัดการเติบโต K

$$\frac{d\,G(t)}{dt} = \alpha\, G(t)\left(1-\frac{G(t)}{K}\right) \tag{3.3}$$

สังเกตได้ว่าค่า feedback term $\left(1-\frac{G(t)}{K}\right)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ $G(t)$ น้อยกว่า K มากๆ และเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ $G(t)$ เข้าใกล้ K ดังนั้นอัตราการเติบโตจึงเป็นแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลในช่วงแรกของการเติบโต แต่จะลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์เมื่อจำนวนประชากรเข้าใกล้ค่าจำกัดการเติบโต K จึงส่งผลทำให้เส้นโค้งเป็นรูปตัวเอส

เมื่อนำสมการเชิงอนุพันธ์ (3.3) มาหาผลเฉลยจะได้รูปแบบดังนี้

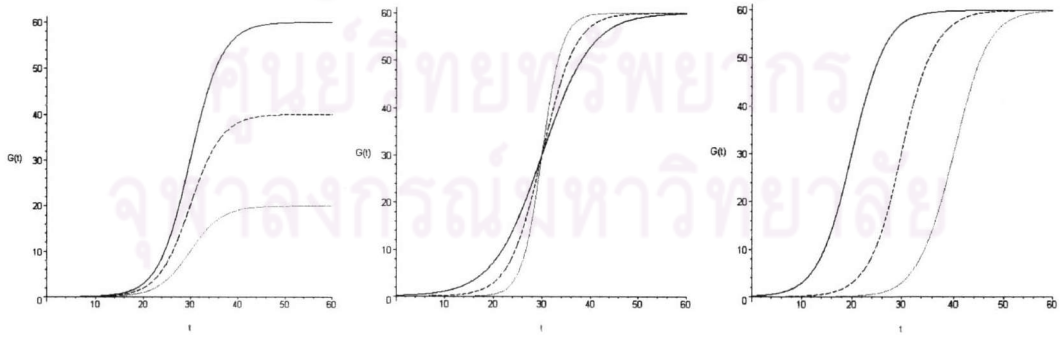
$$G(t) = \frac{K}{1+\exp(-\alpha(t-\beta))} \tag{3.4}$$

โดยที่ G คือ การเติบโต

t คือ เวลา

K, α และ β คือ พารามิเตอร์ของการเติบโต

จากสมการที่ (3.4) นำไปวาดกราฟได้ดังรูปที่ 3.2 โดยมีค่า K,α และ β เป็นตัวกำหนดรูปร่างของเส้นโค้ง

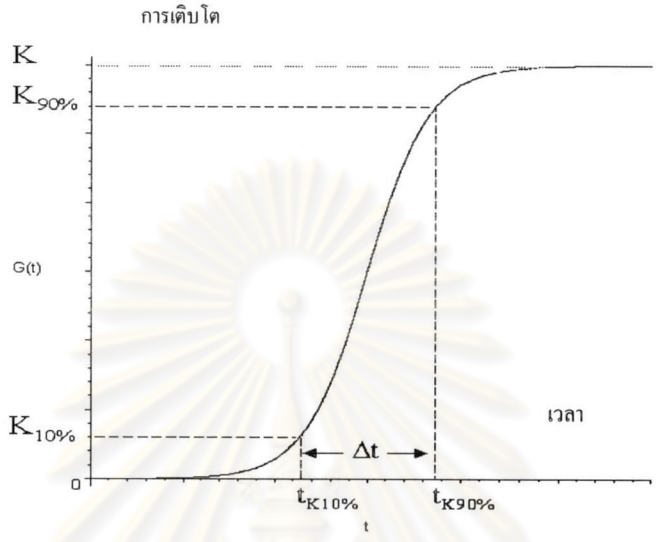


ก. ข. ค.

รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นโค้งกับพารามิเตอร์ K,α และ β โดย (ก) K ต่างกัน (ข) α ต่างกัน และ (ค) β ต่างกัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พารามิเตอร์การเติบโต α จะระบุถึงความกว้างของเส้นโค้ง เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ และง่ายต่อการนำไปใช้เพื่ออธิบายการเติบโตของพืช จึงเปลี่ยนพารามิเตอร์ α ให้อยู่ในรูป Δt ซึ่งหมายถึงช่วงเวลาการเติบโตจาก 10% ถึง 90% ของค่าจำกัดการเติบโต K สามารถแสดงได้ในรูปกราฟต่อไปนี้



รูปที่ 3.3 ช่วงเวลาการเติบโตที่ 10% ถึง 90%

กำหนดให้การเติบโตที่เวลา $t_{K10\%}$ คือ

$$G(t_{K10\%}) = \frac{10}{100}K \tag{3.5}$$

และการเติบโตที่เวลา $t_{K90\%}$ คือ

$$G(t_{K90\%}) = \frac{90}{100}K \tag{3.6}$$

นำ $G(t_{K10\%})$ ในสมการที่ 3.5 แทนลงในสมการที่ 3.4 จะได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{10}{100}K = \frac{K}{1+\exp(-\alpha(t_{K10\%} - \beta))}$$

$$9 = \exp(-\alpha(t_{K10\%} - \beta))$$

$$\ln(9) = -\alpha(t_{K10\%} - \beta) \tag{3.7}$$

และนำ $G(t_{K90\%})$ ในสมการที่ 3.6 แทนลงในสมการที่ 3.4 จะได้

$$\frac{90}{100}K = \frac{K}{1+\exp(-\alpha(t_{K90\%} - \beta))}$$

$$\frac{1}{9} = \exp(-\alpha(t_{K90\%} - \beta))$$

$$-\ln(9) = -\alpha(t_{K90\%} - \beta) \tag{3.8}$$

นำสมการที่ 3.7 ลบสมการที่ 3.8 จะได้

$$\ln(81) = \alpha(t_{K90\%} - t_{K10\%})$$

ให้ระยะเวลาการเติบโตในช่วง 10% ถึง 90% ของการเติบโตเท่ากับ Δt จะได้

$$\ln(81) = \alpha(\Delta t)$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่าง α และ Δt คือ

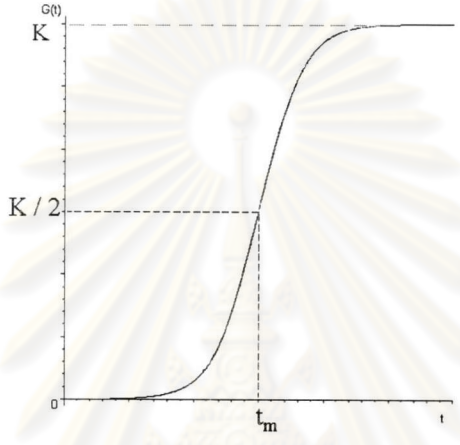
$$\alpha = \frac{\ln 81}{\Delta t} \tag{3.9}$$

นำค่า α จากสมการที่ 3.9 แทนลงในสมการ 3.4 จะได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$G(t) = \frac{K}{1+\exp(-\frac{\ln(81)}{\Delta t}(t-\beta))} \qquad (3.10)$$

พารามิเตอร์ β เป็นตัวกำหนดระยะเวลาการเติบโตที่มีอัตราการเติบโตมากที่สุด ที่ $\frac{1}{2}K$ เราจึงเปลี่ยนพารามิเตอร์ β ให้อยู่ในรูปของ t_m หมายถึงเวลาที่มีอัตราการเติบโตมากที่สุด ซึ่งสามารถแสดงในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 เวลาที่มีอัตราการเติบโตมากที่สุด

กำหนดให้การเติบโตที่เวลา t_m คือ $G(t_m) = \frac{K}{2}$ แทนลงในสมการที่ 3.10 จะได้

$$\frac{K}{2} = \frac{K}{1+\exp(-\frac{\ln(81)}{\Delta t}(t_m-\beta))}$$

$$1 = \exp(-\frac{\ln(81)}{\Delta t}(t_m-\beta))$$

$$0 = -\frac{\ln(81)}{\Delta t}(t_m-\beta)$$

$$0 = t_m - \beta$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

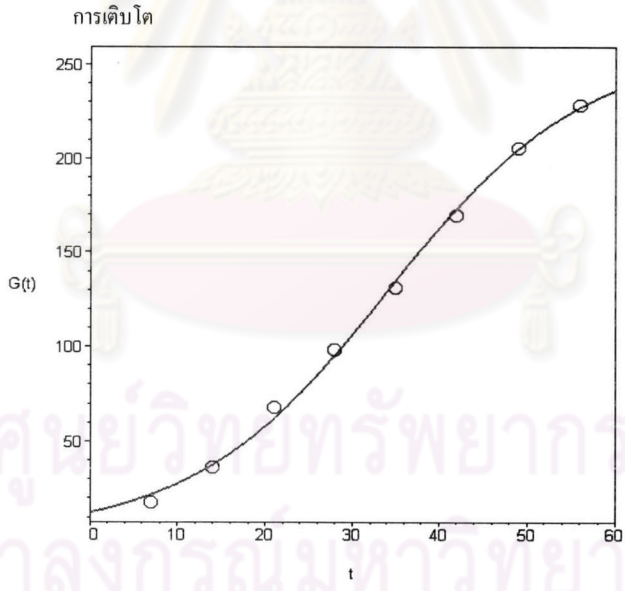
ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่าง β กับ t_m คือ

$$\beta = t_m \tag{3.11}$$

เราจึงได้แบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติกใหม่คือ

$$G(t) = \frac{K}{1 + \exp\left[-\frac{\ln 81}{\Delta t} \cdot (t - t_m)\right]} \tag{3.12}$$

รูปที่ 3.5 แสดงการปรับเส้นโค้ง (Curve Fitting) ข้อมูลการเติบโตของต้นทานตะวันด้วยแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติกที่ได้ข้างต้น ซึ่งจะเห็นว่าการเติบของต้นทานตะวันในช่วงแรกจะเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ จนเข้าสู่ในช่วงออกดอก การเติบโตในช่วงนี้จะเพิ่มขึ้นเร็วมาก จนกระทั่งเข้าสู่ช่วงสุดท้ายของการเติบโต การเติบโตจะค่อยๆลดลงจนเข้าสู่ค่าจำกัดการเติบโต จากรูปจะเห็นได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อใช้แบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติกมีค่าน้อยมาก[4]



รูปที่ 3.5 การฟิทข้อมูลด้วยแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบจำลองการเติบโตแบบมัลติลอจิสติก (Multi-Logistic Growth Model)

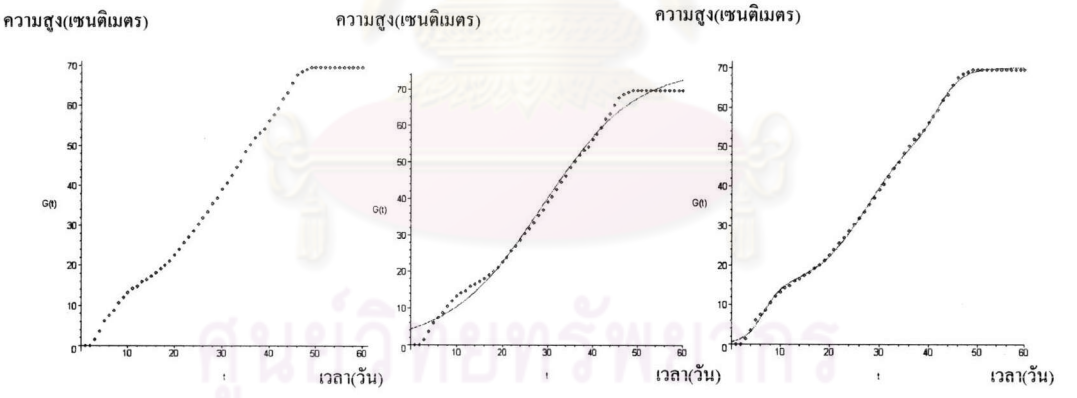
ในธรรมชาติ การเติบโตของพืช ในช่วงเวลาหนึ่งอาจมีกระบวนการเติบโตเกิดขึ้นพร้อมกันมากกว่าหนึ่งกระบวนการ ด้วยเหตุผลนี้เองแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก จึงไม่สามารถนำมาใช้อธิบายกระบวนการเติบโตที่ซับซ้อนได้ดังแสดงในรูปที่ 3.6

แบบจำลองแบบมัลติลอจิสติก เป็นแบบจำลองที่รวมเอาแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติกแบบง่ายมาไว้ด้วยกัน ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$G(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i(t) \qquad (3.13)$$

โดยที่ $G_i(t)$ หมายถึงการเติบโตช่วงที่ i ของการเติบโตทั้งหมด n ช่วง แสดงได้ดังนี้

$$G_i(t) = \frac{K_i}{1 + \exp\left[-\frac{\ln(81)}{\Delta t_i} \cdot (t - t_{mi})\right]} \qquad (3.14)$$



ก. ข. ค.

รูปที่ 3.6 เปรียบเทียบการปรับเส้นโค้งข้อมูล (ก) ด้วยแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก (ข) และแบบจำลองการเติบโตแบบมัลติลอจิสติก(ค)

จากรูปที่ 3.6 เปรียบเทียบการฟิทข้อมูลการเติบโตของถั่วเหลืองพบว่า ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ได้จากแบบจำลองการเติบโตแบบมัลติลอจิสติกมีค่าเท่ากับ 2.76 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ที่ได้จากแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก ซึ่งมีค่าเท่ากับ 10.93 เปอร์เซ็นต์ ดังนั้นจะเห็นว่าแบบจำลองการเติบโตแบบมัลติลอจิสติกเหมาะสมที่จะนำไปใช้อธิบายลักษณะการเติบโตของถั่วเหลืองมากกว่าแบบจำลองการเติบโตแบบลอจิสติก

ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองการเติบโตแบบมัลติลอจิสติก หาได้จากวิธีการถดถอยแบบไม่เชิงเส้นดังที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.2 การวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis)

การวิเคราะห์การถดถอย เป็นเทคนิคการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป บางครั้งความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้นอาจจะอยู่ในรูปแบบง่ายๆ สามารถที่จะหาความสัมพันธ์ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์โดยเพียงแต่อาศัยทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง แต่ส่วนมากแล้วความสัมพันธ์นั้นๆ มักจะอยู่ในลักษณะที่ค่อนข้างยุ่งยากซับซ้อน จึงต้องมีการตั้งสมมติฐานหรือประมาณเอาว่าลักษณะความสัมพันธ์อยู่ในสมการแบบไหน ข้อที่พึงระลึกถึงเสมอเมื่อใช้เทคนิคการวิเคราะห์การถดถอยก็คือ เทคนิคนั้นไม่ใช่เทคนิคที่จะบอกว่าข้อมูลที่เกิดขึ้นนั้นเกิดจากสมการอะไร เพียงแต่บอกว่า ถ้าใช้สมการนั้นๆกับข้อมูลที่เกิดขึ้นแล้วมีความเหมาะสมกันอย่างไร

3.2.1 การวิเคราะห์การถดถอยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Regression Analysis)

การวิเคราะห์ความถดถอยเมื่อความสัมพันธ์ไม่ได้อยู่ในรูปเชิงเส้น มักพบมากในงานด้านวิทยาศาสตร์ ด้านวิศวกรรมศาสตร์ และด้านเกษตรศาสตร์ รวมไปถึงด้านพฤกษศาสตร์

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามที่มีความสัมพันธ์ในรูปแบบไม่เชิงเส้น เขียนอยู่ในรูปแบบสมการถดถอยได้ดังนี้

$$y = y(x;a) \qquad (3.15)$$

โดยที่ y คือ ตัวแปรตามของสมการถดถอย

x คือ ตัวแปรอิสระของสมการถดถอย

a คือ พารามิเตอร์สมการถดถอย

ขั้นตอนการวิเคราะห์การถดถอยไม่เชิงเส้น

ขั้นที่ 1: ตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม y กับตัวแปรอิสระ x โดยการเขียนกราฟแสดงว่าความสัมพันธ์อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้น
ถ้าพบว่าความสัมพันธ์อยู่ในรูปเชิงเส้น ให้ใช้การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้น
ถ้าพบว่าความสัมพันธ์อยู่ในรูปไม่เชิงเส้น ให้ทำต่อขั้นที่ 2

ขั้นที่ 2: ตรวจสอบว่าฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ไม่เชิงเส้น อยู่ในรูปแบบใด

ขั้นที่ 3: หาค่าพารามิเตอร์ของรูปแบบความสัมพันธ์ไม่เชิงเส้นที่คาดไว้จากขั้นที่ 2

3.2.2 การหาค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอย

ในการวิเคราะห์การถดถอย นอกจากจะต้องทราบว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรตามหรือตัวแปรอิสระแล้ว ผู้วิเคราะห์จะต้องกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระให้ถูกต้องเหมาะสมกับความเป็นจริง และเมื่อกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองได้แล้ว ผู้วิเคราะห์จะทำการประมาณค่าคงตัวความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสองนั้น โดยที่เราจะเรียกค่าคงตัวประมาณความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองนี้ว่า สัมประสิทธิ์การถดถอยหรือค่าพารามิเตอร์การถดถอย

สำหรับเทคนิคหรือวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอย ที่นิยมที่สุดคือวิธีกำลังสองน้อยสุด(Least-Square Method) แต่สำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของสมการถดถอยซึ่งอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ต้องใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดไม่เชิงเส้นซึ่งได้พัฒนาออกมาแล้วหลายวิธี สำหรับวิธีการที่จะใช้ในงานวิจัยนี้คือ Levenberg-Marquart method ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ของสมการถดถอยไม่เชิงเส้น ดังจะกล่าวถึงในส่วนต่อไป

3.2.3 วิธีกำลังสองน้อยสุดไม่เชิงเส้น

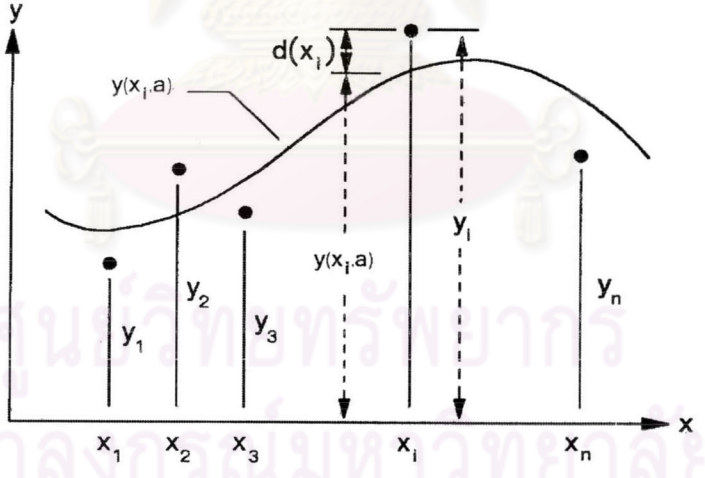
วิธีกำลังสองน้อยสุดเป็นวิธีที่นิยมใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ของสมการถดถอยที่กำหนดให้เหมาะสมกับข้อมูลมากที่สุด โดยพิจารณาจากการหาพารามิเตอร์ที่ทำให้มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุด

สมมติว่าต้องการหาสมการ ที่แทนข้อมูลจำนวน n จุด (x_i, y_i) ; $i=1,2,...n$ โดยมีพารามิเตอร์ที่ต้องการหา m ตัว คือ a_j ; $j=1,2,...,m$ เพื่อที่จะหาสมการการถดถอยที่แทนความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ x กับตัวแปรตาม y จากสมการ(3.15) คือ

$$y(x) = y(x;a)$$

เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ a ในสมการที่ 3.15 แล้วนำสมการที่ได้มาเปรียบเทียบกับข้อมูลที่กำหนดให้ พบว่าเกิดค่าความคลาดเคลื่อน $d(x_i)$ ที่จุด x_i ดังแสดงในรูป 3.7 โดยที่ค่า $d(x_i)$ คือ

$$d(x_i) = y_i - y(x_i;a) \qquad (3.16)$$



รูปที่ 3.7 ค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละจุด (x_i, y_i)

สมการที่หาได้จะก่อให้เกิด ค่าความผิดพลาดกำลังสองที่น้อยที่สุดจากข้อมูลทั้งหมดที่กำหนดให้ ขั้นตอนในการหาสมการการถดถอยไม่เชิงเส้นนี้ เริ่มจากการหาค่าความคลาดเคลื่อน E ที่เกิดจากข้อมูลจำนวน n ข้อมูลในรูปแบบดังนี้

$$E = \sum_{i=1}^{n} [d(x_i)]^2 \tag{3.17}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$E(a) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - y(x_i; a)]^2 \tag{3.18}$$

โดยที่ y_i เป็นตัวแปรตามที่ได้จากข้อมูลตัวที่ i

x_i เป็นตัวแปรอิสระที่ได้จากข้อมูลตัวที่ i

y เป็นตัวแปรตามที่ได้จากสมการถดถอยโดยมีพารามิเตอร์ a

a เป็นพารามิเตอร์การถดถอย

ในการหาค่าพารามิเตอร์ $a_1, a_2, ..., a_m$ รวมทั้งสิ้น m ค่านั้น เราใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดสร้างระบบสมการที่ประกอบด้วย m สมการย่อยคือ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y(x_i; a)\right) \cdot \frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_1} = 0 \\
\frac{\partial E}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y(x_i; a)\right) \cdot \frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_2} = 0 \\
\frac{\partial E}{\partial a_3} &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y(x_i; a)\right) \cdot \frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_3} = 0 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{\partial E}{\partial a_m} &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y(x_i; a)\right) \cdot \frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_m} = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ $a_1, a_2, ..., a_m$ นั้นทำได้หลายวิธีแต่ในงานวิจัยนี้ จะขอกล่าวถึงเฉพาะวิธี Levenberg-Marquardt

3.2.4 Levenberg-Marquardt Method

วิธี Levenberg-Marquardt เป็นวิธีที่เหมาะสมและนิยมใช้สำหรับการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการ มีวิธีการดังต่อไปนี้

กำหนดให้ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนคือ $E(a)$ และเขียนอยู่ในรูปอนุกรมเทร์เลอร์ได้ดังนี้

$$E(a_{n+1}) \approx E(a_n) + \nabla E(a_n)^T \cdot (a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)^T \cdot \nabla^2 E(a_n) \cdot (a_{n+1} - a_n) + ... \tag{3.20}$$

โดยที่ $\nabla E(a_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_{1n}} \\ \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_{2n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_{mn}} \end{bmatrix}$,

$$\nabla^2 E(a_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{1n}\partial a_{1n}} & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{1n}\partial a_{2n}} & \cdots & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{1n}\partial a_{mn}} \\ \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{2n}\partial a_{1n}} & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{2n}\partial a_{2n}} & \cdots & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{2n}\partial a_{mn}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{mn}\partial a_{1n}} & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{mn}\partial a_{2n}} & \cdots & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{mn}\partial a_{mn}} \end{bmatrix}$$

จากอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ 3.20 พิจารณาแค่อนุพันธ์อันดับสองจะได้ว่า

$$E(a_{n+1}) = E(a_n) + \nabla E(a_n)^T \cdot (a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)^T \cdot \nabla^2 E(a_n) \cdot (a_{n+1} - a_n) \tag{3.21}$$

จากสมการที่ 3.21 เขียนให้อยู่ในรูปเกรเดียนต์เวกเตอร์ (Gradient vector) g และเฮสเซียนเมตริกซ์ (Hessian matrix) H ได้ดังนี้

$$E(a_{n+1}) = E(a_n) + g^T \cdot (a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)^T \cdot H \cdot (a_{n+1} - a_n) \tag{3.22}$$

โดยที่ g คือ เวกเตอร์อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ $E(a_n)$

H คือ เมตริกซ์อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ $E(a_n)$

สำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ a ที่ทำให้มีค่าความคลาดเคลื่อน $E(a)$ น้อยที่สุดทำได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบ a_n ได้ดังนี้

$$\frac{\partial E(a_{n+1})}{\partial a_n} = \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_n} + \frac{\partial g^T (a_{n+1} - a_n)}{\partial a_n} + \frac{1}{2}\frac{\partial (a_{n+1} - a_n)^T \cdot H \cdot (a_{n+1} - a_n)}{\partial a_n}$$

$$0 = \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_n} + g^T(-1) + H(a_{n+1} - a_n)(-1)$$

พิจารณาจุดต่ำสุดโดยให้ $\frac{\partial E(a_n)}{\partial a_n} = 0$ จะได้

$$0 = g^T + H(a_{n+1} - a_n)$$

จะได้

$$a_{n+1} = a_n - H^{-1}g \tag{3.23}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิจารณาเทอม $H^{-1}g$ ในสมการที่ 3.23 พบว่าเทอม $H^{-1}g$ คือค่า Step size หรือขนาดที่เปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ a ในแต่ละรอบการทำซ้ำ Levenberg-Marquardt เสนอให้เปลี่ยนเทอม $H^{-1}g$ เป็น $(H+\lambda I)^{-1}g$ เพื่อลดจำนวนรอบการทำซ้ำ คือเมื่อค่า λ มากทำให้ Step size เล็กลงและเมื่อค่า λ น้อย Step size จะมีขนาดใหญ่ ซึ่งส่งผลให้จำนวนรอบในการทำซ้ำลดลง สมการใหม่ที่ได้มีรูปแบบดังนี้

$$a_{n+1} = a_n - (H+\lambda I)^{-1}g \tag{3.24}$$

โดยที่ λ จะเปลี่ยนไปทุกรอบการทำซ้ำขึ้นอยู่กับค่า $E(a)$

ขั้นตอนวิธีการหาค่าพารามิเตอร์โดยวิธี Levenberg-Marquardt

กำหนดฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนกำลังสอง

$$E(a) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y(x_i;a))^2$$

ขั้นที่ 1. กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น a_0

ขั้นที่ 2. คำนวณค่าความคลาดเคลื่อน $E(a)$

ขั้นที่ 3. กำหนด $\lambda = 0.001$

ขั้นที่ 4. คำนวณ a_{n+1} จากสมการ (3.24)

ขั้นที่ 5. ตรวจสอบเงื่อนไข

- ถ้า $E(a_{n+1}) \geq E(a_n)$ แล้วให้ $\lambda = \lambda \cdot 10$ จากนั้นทำขั้นที่ 4
- ถ้า $E(a_{n+1}) < E(a_n)$ แล้วให้ $\lambda = \lambda / 10$ และ $a_{n+1} = a_n$ จากนั้นทำ ขั้นที่ 4
- ถ้าค่า $E(a_n) \leq 0.001$ ให้จบการทำงาน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่าง 3.1

กำหนดข้อมูลดังนี้

X	1	2	3	4	5	6	7	...	21	22	23	...	58	59	60
Y	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	...	0.75	1.15	1.76	...	40.00	40.00	40.00

กำหนดรูปแบบสมการที่ต้องการหาค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$y(x) = \frac{a_1}{1 + \exp\left[-\frac{\ln(81)}{a_2} \cdot (x - a_3)\right]}$$

เมื่อใช้ Levenberg-Marquardt method แล้วได้ค่าพารามิเตอร์ดังนี้

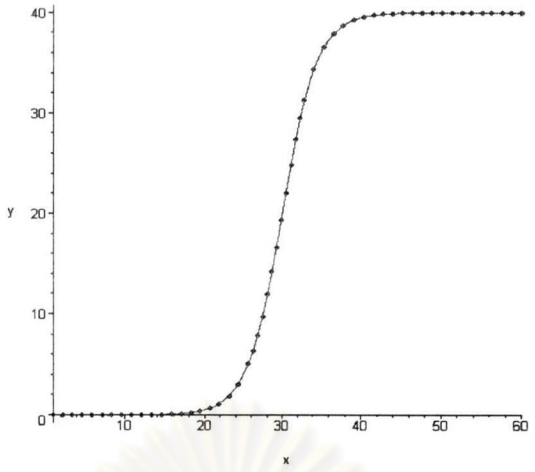
$$a_1 = 40.000 \text{ , } a_2 = 9.995 \text{ , } a_3 = 29.999$$

นำค่าพารามิเตอร์ที่หาได้มาแทนในสมการที่กำหนด จะได้

$$y(x) = \frac{40.000}{1 + \exp\left[-\frac{\ln(81)}{9.995} \cdot (x - 29.999)\right]}$$

เมื่อนำมาวาดกราฟเทียบกับข้อมูลที่กำหนดมา พบว่ามีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 0.14 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งมีค่าน้อยมาก แสดงได้ดังรูปที่ 3.8

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.8 กราฟที่ได้จากสมการถดถอยเทียบกับข้อมูลจากตัวอย่าง 3.1

3.3 ระบบลินเดนเมเยอร์ (Lindenmayer System)

ในส่วนนี้จะกล่าวถึง ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่นิยมนำไปใช้ในการสร้างภาพนามธรรมของพืชซึ่งถูกเสนอโดยนักชีววิทยาที่ชื่อว่า Aridtis Lindenmayer ในปี ค.ศ. 1968

L-System หรือ Lindenmayer System ประกอบด้วย 2 ส่วนหลักคือ สายอักขระเริ่มต้นที่เรียกว่า Axiom และกฎการเปลี่ยนอักขระที่เรียกว่ากฎการผลิต (Production Rule) หรือ กฎการทำซ้ำ (Rewriting Rule) โดยผ่านการเขียนซ้ำ (Rewriting system) แต่ L-System เป็นเพียงการสร้างสายอักขระเท่านั้น การสร้างรูปทรงเรขาคณิตจึงต้องอาศัยหลักการเปลี่ยนสายอักขระเป็นรูปทรงเรขาคณิตที่เรียกว่า การตีความแบบเต่า (Turtle Interpretation) มาใช้ในการตีความสายอักขระที่ได้จาก L-System เพื่อที่จะสร้างภาพกราฟิกของพืช

3.3.1 ระบบการเขียนซ้ำ (Rewriting System)

แนวคิดหลักของ L-System คือระบบการเขียนซ้ำแบบขนาน (Parallel Rewriting) โดยการแทนอักขระเริ่มต้นด้วยกฎการเปลี่ยน ซึ่งกฎการเปลี่ยนในที่นี้เราเรียกว่ากฎการผลิต หรือ กฎการทำซ้ำ โดยผ่านการเขียนซ้ำ (Rewriting system) กล่าวคือในการเขียนซ้ำแต่ละรอบจะทำการเปลี่ยนสายอักขระตามกฎการเขียนซ้ำดังแสดงในตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3.2 สายอักขระเริ่มต้น : A

กฎการทำซ้ำ 1 : A → AB

กฎการทำซ้ำ 2 : B → A

การทำซ้ำครั้งที่ 0 : A

การทำซ้ำครั้งที่ 1 : AB

การทำซ้ำครั้งที่ 2 : ABA

การทำซ้ำครั้งที่ 3 : ABAAB

การทำซ้ำครั้งที่ 4 : ABAABABA

การทำซ้ำครั้งที่ 5 : ABAABABAABAAB

ในขั้นตอนการทำซ้ำแต่ละรอบ ทำการเปลี่ยนสายอักขระตัวก่อนหน้าตามกฎการทำซ้ำโดยอักขระแต่ละตัวจะเปลี่ยนตามกฎพร้อมกันหรือที่เรียกว่าการเปลี่ยนแบบขนาน เช่น ในการทำซ้ำครั้งที่ 2 ตัวอักขระก่อนหน้าคือ AB จากนั้นเปลี่ยน A → AB ตามกฎการทำซ้ำที่ 1 และเปลี่ยน B → A ตามกฎการทำซ้ำที่ 2 ทำเช่นนี้ไปตามจำนวนการทำซ้ำที่กำหนด จากตัวอย่างที่ 3.2 เมื่อผ่านการทำซ้ำไป 5 ครั้งแล้ว จะได้สายอักขระสุดท้ายคือ ABAABABAABAAB

3.3.2 การตีความสายอักขระแบบเต่า (Turtle Interpretation of String)

ในการสร้างภาพกราฟิกของพืช โดยการแทนสัญลักษณ์หรืออักขระแต่ละตัวที่ได้จากการทำซ้ำในระบบแอล จำเป็นต้องอาศัยหลักการที่เรียกว่า การตีความสายอักขระแบบเต่า ตัวอักขระหรือสัญลักษณ์แต่ละตัวแทนด้วย ตำแหน่งและทิศทางการเดินของเต่า เช่น เดินหน้าถอยหลัง เลี้ยวซ้าย และเลี้ยวขวาเป็นต้น ดังแสดงในตารางที่ 3.1

สัญลักษณ์	ความหมาย
F	การเดินไปข้างหน้าหนึ่งหน่วยและวาดเส้นตรง
f	การเดินไปข้างหน้าหนึ่งหน่วยโดยไม่วาดเส้นตรง
+	การเคลื่อนที่ไปทางทวนเข็มนาฬิกาหรือเลี้ยวซ้าย
-	การเคลื่อนที่ไปทางตามเข็มนาฬิกาหรือเลี้ยวขวา

ตาราง 3.1 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการตีความแบบเต่าแบบง่าย

สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับการตีความดังตารางที่ 3.1 เป็นสัญลักษณ์พื้นฐานที่นำไปใช้ ในการสร้างภาพกราฟิกทั่วไป แต่ในทางปฏิบัติไม่จำเป็นต้องแทนความหมายด้วยสัญลักษณ์เหล่านี้เสมอไป ทั้งนี้เพื่อความเหมาะสมของงานแต่ละงาน การตีความสายอักขระด้วยการตีความแบบเต่าแสดงดังตัวอย่างที่ 3.3

ตัวอย่าง 3.3

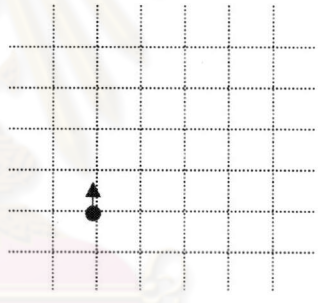
สายอักขระ FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF

สัญลักษณ์ที่ใช้

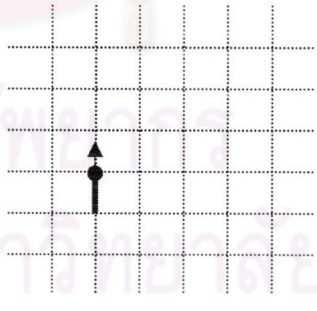
F	การเดินไปข้างหน้าและวาดเส้นตรงยาว 1 หน่วย
+	การเลี้ยวซ้าย 90 องศา
-	การเลี้ยวขวา 90 องศา

นำสายอักขระมาตีความโดยเรียงตามลำดับได้ดังนี้

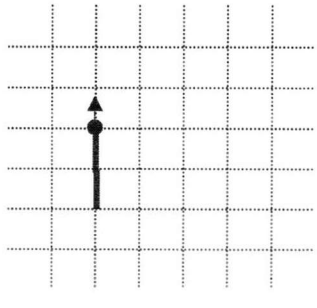
1. FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF



2. FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF

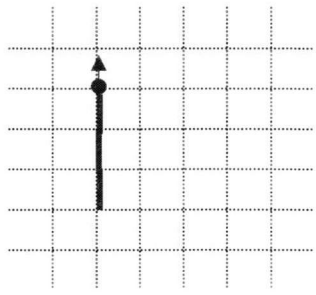


3. FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF

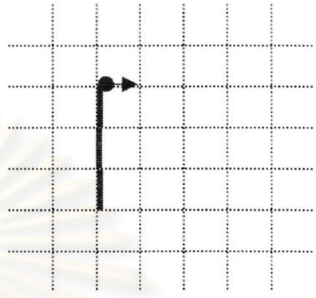


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

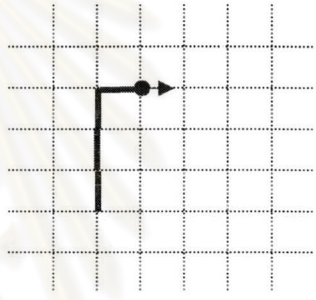
4. FF**F**-FF-F-F+F+FF-F-FFF



5. FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF

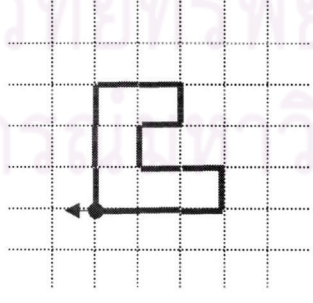


6. FFF-**F**F-F-F+F+FF-F-FFF



หลังจากตีความสายอักขระครบทุกตัวแล้วจะได้ดังรูป 3.9

จากตัวอย่างที่ 3.3 การตีความสายอักขระที่ได้จากระบบแอลด้วยวิธีการตีความแบบเต่า เริ่มด้วยการกำหนดทิศทางและตำแหน่งของเต่า จากนั้นวาดเส้นตรงและเปลี่ยนทิศทางการเดินของเต่าตามสัญลักษณ์ที่กำหนดไว้ ทำเช่นนี้จนจบสายอักขระ แสดงได้ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 การตีความสายอักขระด้วย Turtle Interpretation

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.3.3 ประเภทของระบบแอล (Types of L-System)

ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1968 L-System เป็นที่รู้จักกันมากขึ้นก็เริ่มมีงานวิจัยต่างๆที่เกี่ยวข้องกับ L-System ออกมาเป็นระยะๆ ดังนั้นจึงพอสรุปออกเป็นประเภทต่างๆได้ดังนี้

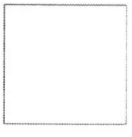
Deterministic Context-Free L-System เป็นแบบพื้นฐานที่สุดของ L-System คือในขั้นตอนการเขียนซ้ำ ทำการเปลี่ยนสายอักขระตามกฎการเปลี่ยนได้ทันที โดยไม่คำนึงถึงตัวอักขระข้างเคียง ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

predecessor --> successor

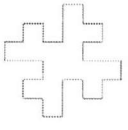
ตัวอย่าง 3.4

สายอักขระเริ่มต้น : F-F-F-F

กฎการเปลี่ยน : F--> F-F+F+FF-F-F+F



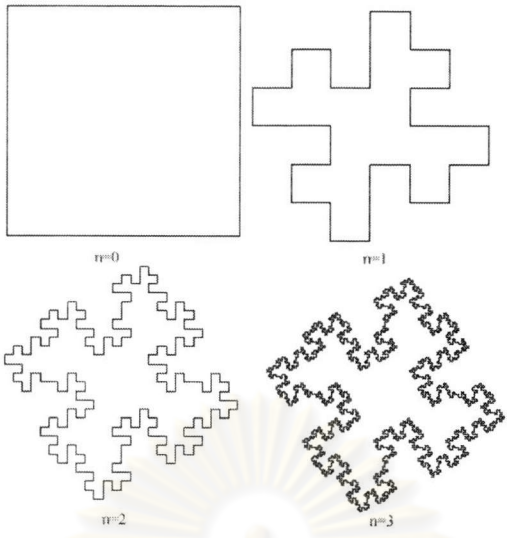
การทำซ้ำครั้งที่ 0 : F-F-F-F



การทำซ้ำครั้งที่ 1 : F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F-
F-F+F+FF-F-F+F-F-F+F+FF-F-F+F

จากตัวอย่างที่ 3.4 เป็นตัวอย่าง Deterministic Context-Free L-System โดยเปลี่ยนสายอักขระเริ่มต้น F-F-F-F ตามกฎการทำซ้ำ ซึ่งในที่นี้มีเพียงกฎเดียวและผ่านขั้นตอนการตีความเพื่อนำไปสร้างภาพกราฟิก แสดงดังรูปที่ 3.10 เป็นภาพกราฟิกที่ได้จากการทำซ้ำครั้งที่ 0 , 1 , 2 และ 3 ตามลำดับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.10 ภาพกราฟิกที่ได้จาก Deterministic Context-Free L-System

Bracketed L-System เป็น L-System ที่พัฒนามาจาก Deterministic Context-Free L-System สำหรับการสร้างภาพกราฟิกของพืชที่มีความซับซ้อน เช่น พืชที่การแตกแขนงเป็นกิ่งก้าน เป็นต้น โดยเพิ่มสัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับกำหนดจุดเริ่มและจุดจบของกิ่งก้าน สัญลักษณ์ที่เพิ่มเข้าไป คือ

[แทน การจำตำแหน่งและทิศทางของเต่า

] แทน การนำตำแหน่งและทิศทางของเต่าออกมา

กล่าวคือการนำหลักการ Pop-Push Stack เข้ามาใช้ในขั้นตอนตีความอักขระ " [" หมายถึงให้จำตำแหน่งและทิศทางของเต่าไว้ ส่วน "] " หมายถึงให้นำตำแหน่งและทิศทางของเต่าออกมาใช้ L-System ประเภทนี้จะเหมาะกับการนำไปใช้สร้างพืชที่มีกิ่งก้านสาขา ดังแสดงในตัวอย่าง 3.5 และรูปที่ 3.11 โดย Bracketed L-System มีรูปแบบดังนี้

predecessor → successor([,])

ตัวอย่าง 3.5 กำหนดให้

สายอักขระแอล (L-String) : F F [+ F - F] F [- F [- F] F] F + F – F

กำหนดมุม : 45 องศา

F F [+ F - F] F [- F [- F] F] F + F – F

F F **[+ F - F]** F [- F [- F] F] F + F – F

F F [+ F - F] **F** [- F [- F] F] F + F – F

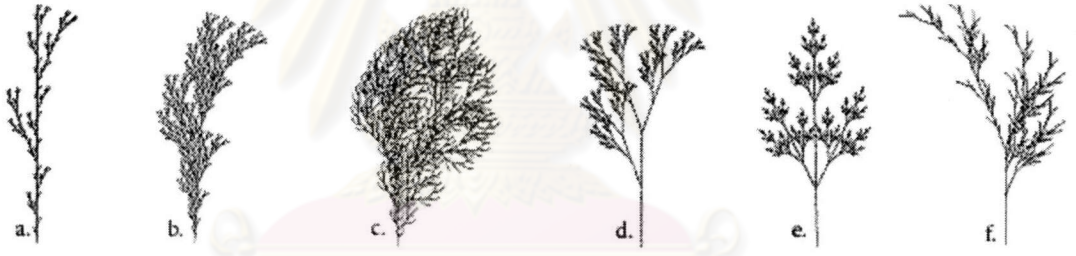
F F [+ F - F] F **[- F [- F] F]** F + F – F

F F [+ F - F] F [- F [- F] F] **F + F – F**

จากตัวอย่างที่ 3.5 แสดงการใช้ Bracketed L-System มาสร้างภาพกราฟิกของพืช ซึ่งสามารถสร้างพืชที่มีกิ่งและก้านได้ เมื่อกำหนดสายอักขระเริ่มต้นและกฎการเปลี่ยนที่แตกต่างกัน ดังตารางที่ 3.2 สามารถสร้างภาพกราฟิกของพืชที่แตกต่างกันดังแสดงในรูป 3.11

รูป	จำนวนรอบ	มุม	สายอักขระเริ่มต้น	กฎการทำซ้ำ
a	5	25.7	F	F--> F[+F]F[-F]+F
b	5	20	F	F--> F[+F]F[-F][F]
c	4	22.5	F	F--> FF-[-F+F+F]+[+F-F-F]
d	7	20	X	X--> F[+X]F[-X]+X F--> FF
e	7	25.7	X	X--> F[+X][-X]FX F--> FF
f	5	22.5	X	X--> F-[[X]+X]+F[+FX]-X F--> FF

ตาราง 3.2 สายอักขระเริ่มต้นและกฎการทำซ้ำแบบ Bracketed L-System ที่แตกต่างกัน



รูป 3.11 ภาพกราฟิกของพืชที่ได้จาก Bracketed L-System

Stochastic L-System พัฒนาจาก Deterministic Context-Free L-System ที่กล่าวมาข้างต้น เมื่อกำหนดจำนวนการทำซ้ำที่เท่ากัน เมื่อนำมาสร้างภาพกราฟิกของพืช จะได้พืชที่มีลักษณะเหมือนกันทุกครั้ง แต่ในความเป็นจริงพืชชนิดเดียวกัน สายพันธุ์เดียวกันก็ไม่ได้เหมือนกันทุกประการ ดังนั้นการนำหลักการความน่าจะเป็นเข้ามากำหนดในการเลือกกฎการเปลี่ยน จะสามารถสร้างภาพกราฟิกของพืชได้หลากหลาย เหมือนในธรรมชาติ Stochastic L-System มีรูปแบบดังนี้

predecessor → successor : probability of selection

ตัวอย่าง 3.6

สายอักขระเริ่มต้น	:	F	
กฎการเปลี่ยน 1	:	F [+F]F[-F]F	: 0.33
กฎการเปลี่ยน 2	:	F[+F]F	: 0.33
กฎการเปลี่ยน 3	:	F [-F]	: 0.34

ในขั้นตอนการทำซ้ำแต่ละรอบ มีการสุ่มความน่าจะเป็นที่อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 เพื่อใช้ในการพิจารณาเลือกกฎการเปลี่ยน ซึ่งในตัวอย่างที่ 3.6 กฎการเปลี่ยน 1 มีความน่าจะเป็นอยู่ในช่วง 0.00 – 0.33 กฎการเปลี่ยน 2 มีความน่าจะเป็นอยู่ในช่วง 0.34 – 0.66 และเมื่อความน่าจะเป็นอยู่ในช่วง 0.67 – 1.00 จึงเลือกกฎการเปลี่ยน 3 ด้วยเหตุนี้ทำให้การทำซ้ำในแต่ละรอบ สร้างสายอักขระได้แตกต่างกัน และส่งผลให้สร้างภาพกราฟิกได้แตกต่างกันด้วย แสดงดังรูปที่ 3.12

รูปที่ 3.12 ภาพกราฟิกที่มีความหลากหลายของพืช โดยใช้ Stochastic L-System

Context-Sensitive L-System สำหรับ Deterministic Context-Free L-System ที่กล่าวมาก่อนหน้านี้ ในขั้นตอนการเปลี่ยนสายอักขระตามกฎการเปลี่ยนของ L-System สามารถเปลี่ยนอักขระตามกฎได้ทันทีโดยไม่ต้องพิจารณาตัวอักขระข้างเคียง แต่สำหรับ Context-Sensitive L-System ต้องพิจารณาตัวอักขระข้างเคียงก่อนว่าเป็นไปตามกฎการเปลี่ยนก่อน ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

left context < predecessor > right context → successor

ตัวอย่าง 3.7

a. สายอักขระเริ่มต้น : F1F1F1

กฎการเปลี่ยน

0 < 0 > 0	→	0
0 < 0 > 1	→	1[+F1F1]
0 < 1 > 0	→	1
0 < 1 > 1	→	1
1 < 0 > 0	→	0
1 < 0 > 1	→	1F1
1 < 1 > 0	→	0
1 < 1 > 1	→	0
* < + > *	→	-
* < - > *	→	+

b. สายอักขระเริ่มต้น : F0F0F1

กฎการเปลี่ยน

0 < 0 > 0	→	1
0 < 0 > 1	→	1[-F1F1]
0 < 1 > 0	→	1
0 < 1 > 1	→	1
1 < 0 > 0	→	0
1 < 0 > 1	→	1F1
1 < 1 > 0	→	1
1 < 1 > 1	→	0
* < + > *	→	-
* < - > *	→	+

c. สายอักขระเริ่มต้น : F0F1F1

กฎการเปลี่ยน

0 < 0 > 0	→	0
0 < 0 > 1	→	1
0 < 1 > 0	→	0
0 < 1 > 1	→	1[+F1F1]
1 < 0 > 0	→	0
1 < 0 > 1	→	1F1
1 < 1 > 0	→	0
1 < 1 > 1	→	0
* < + > *	→	+
* < - > *	→	-

d. สายอักขระเริ่มต้น : F1F0F1

กฎการเปลี่ยน

0 < 0 > 0	→	1
0 < 0 > 1	→	0
0 < 1 > 0	→	0
0 < 1 > 1	→	1F1
1 < 0 > 0	→	1
1 < 0 > 1	→	1[+F1F1]
1 < 1 > 0	→	1
1 < 1 > 1	→	0
* < + > *	→	-
* < - > *	→	+

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การเปลี่ยนสายอักขระในแต่ละครั้งต้องดูตัวข้างเคียงทั้งทางซ้ายและขวา ยกตัวอย่างเช่น 0 < 0 > 1 → 1[+F1F1] 0 จะเปลี่ยนเป็น 1[+F1F1] ได้ก็ต่อเมื่อมี 0 อยู่ทางซ้ายและ 1 อยู่ทางขวา ซึ่งจากตัวอย่าง 3.7 สามารถสร้างภาพกราฟิกได้ดังรูป 3.13 a. ส่วนรูปอื่นๆได้จากสายอักขระเริ่มต้นและกฎการเปลี่ยนที่แตกต่างกันดังนี้

รูปที่ 3.13 ภาพกราฟิกของพืชที่ได้จาก Context-sensitive L-System

Parametric L-System เป็นการนำฟังก์ชันมาใช้แทนตัวอักขระ ซึ่งสามารถกำหนดขนาดของลำต้น กิ่ง ก้านได้ด้วยฟังก์ชัน จึงเหมาะสำหรับการนำไปจำลองพืชที่การเติบโตขึ้นอยู่กับปัจจัยจากสิ่งแวดล้อม เช่น ขนาดของลำต้นของพืชที่ปลูกในสภาวะที่เหมาะสมมีขนาดใหญ่กว่าพืชที่ปลูกในสภาวะไม่เหมาะสม ซึ่งต้องอาศัยฟังก์ชันเข้ามาควบคุมขนาด Parametric L-System มีรูปแบบดังนี้

predecessor: condition → successor

ตัวอย่าง 3.8

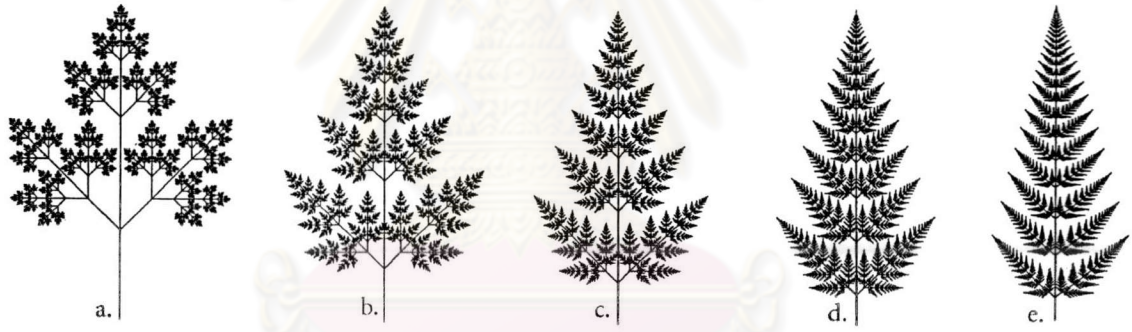
กำหนด D = 1
กำหนด R = 1.5
สายอักขระเริ่มต้น: A(0)
กฎการเปลี่ยน 1 : A(d) : d > 0 → A(d-1)
กฎการเปลี่ยน 2 : A(d) : d = 0 → F(1)[+A(D)][-A(D)]F(1)A(0)
กฎการเปลี่ยน 3 : F(a) : d > 0 → F(a*R)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังตาราง 3.3 เมื่อผ่านขั้นตอนการทำซ้ำแล้ว จะแสดงได้ดังรูป 3.14 ซึ่งจะเห็นว่าสามารถสร้างภาพกราฟิกใบของพืชได้ เมื่อกำหนดค่าคงที่ที่แตกต่างกันดังรูป

รูป	D	R	จำนวนรอบ
a	0	2.00	10
b	1	1.50	16
c	2	1.36	21
d	4	1.23	30
e	7	1.17	45

ตาราง 3.3 ค่าพารามิเตอร์ต่างๆของตัวอย่าง 3.8



รูปที่ 3.14 ภาพกราฟิกใบของพืชที่ได้จาก Parametric L-System

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย