บทที่ 4

ทฤษฎีการแปลงเวฟเล็ต

สัญญาณหรือฟังก์ชันใดๆ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้น(Linear Combination) ของฟังก์ชันมูลฐาน (Basis Function) ต่างๆ ซึ่งทำให้สามารถทำการวิเคราะห์หรือแก้ปัญหาได้อย่างสะดวก ตัวอย่างเช่น การใช้ฟังก์ชันซายน์และโคซายน์ (Sine-Cosine Function) เป็นฟังก์ชันมูลฐานในการวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier Analysis) เป็นต้น การวิเคราะห์เวฟเล็ต (Wavelet Analysis) ก็เป็นการแสดงฟังก์ชันใดๆให้อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันมูลฐานเช่นเดียวกัน แต่ด้วยลักษณะพิเศษของฟังก์ชันมูลฐานเวฟเล็ต (Wavelet Basis Function) ซึ่งมีลักษณะของการออสซิเลท (Oscillation) ตามแกนแนวนอนและแอมปลิจูด (Amplitude) ที่ลดลงสู่ศูนย์ทั้งทางด้านบวกและลบอย่างรวดเร็ว[10] (ต่างกับฟังก์ชันซายน์และโคซายน์ซึ่งแผ่ตามแกนแนวนอนไปสู่อนันต์) ด้วยคุณสมบัติดังกล่าว เวฟเล็ตจึงเหมาะที่จะใช้ในการวิเคาะห์สัญญาณที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงตามเวลา (Non-Stationary) ลักษณะของความไม่ต่อเนื่อง (Discontinuity) และลักษณะของปลายแหลมคม (Sharp Spike) ได้เป็นอย่างดี[10],[11]เนื่องจากในโดเมนของเวฟเล็ต (Wavelet Domain)จะประกอบไปด้วยสัมประสิทธิ์การกระจาย(Expansion Coefficients) หรือตัวคูณของฟังก์ชันมูลฐานเวฟเล็ตที่มีขนาดเล็กและลู่เข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว ซึ่งในโดเมนของฟูเรียร์ (Fourier Domain) ของฟังก์ชันดังกล่าวจะต้องประกอบด้วยสัมประสิทธิ์การกระจาย หรือตัวคูณของฟังก์ชันซายน์และโคซายน์เป็นจำนวนมากมายถึงอนันต์ การแปลงเวฟเล็ต (Wavelet Transform) จึงเป็นการแปลงที่มีประสิทธิภาพสูง (เมื่อใช้กับสัญญาณที่มีลักษณะของ Non-Stationary ลักษณะของความไม่ต่อเนื่อง และลักษณะของปลายแหลม) และประโยชน์ที่สำคัญอีกประการหนึ่งของการแปลงเวฟเล็ตคือ คุณสมบัติความเป็น Localization (ต่างจากการแปลงฟูเรียร์ซึ่งเป็นคุณสมบัติ Globalization) กล่าวคือ ความเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในโดเมนของเวฟเล็ตจะมีผลกับทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในโดเมนเดิม (The Original Domain) เป็นช่วง(Interval)เท่านั้น ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากการวิเคราะห์แบบมัลติเรโซลูชัน (Multiresolution Analysis : MRA)[10] ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป

4.1 ทฤษฎีการแปลงของสัญญาณ

ในปริภูมิ $L^2(R)$ ของContinuous-Time Energy Function การส่ง (Mapping) สัญญาณ $f(t)$ จากโดเมนเดิมไปสู่โดเมนใหม่ (Transform Domain) นิยามด้วยผลคูณสเกล่าร์ (Scalar Product) ในสมการที่ (4.1)

$$\langle f(t) \,|\, \sigma(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma^*(t)dt, \quad f(t) \in L_2(R) \tag{4.1}$$

ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชันมูลฐาน $\sigma(t)=e^{j\omega t}$ หมายถึงการแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transform : FT) นั่นเอง ซึ่งนิยามโดยสมการที่ (4.2) นั้นคือสัญญาณ $f(t)$ ถูกแปลงจากโดเมนของเวลา (Time Domain)ไปสู่โดเมนของความถี่ (Frequency Domain) ซึ่งในโดเมนของฟูเรียร์จะขึ้นกับพารามิเตอร์ของความถี่ (ω) เท่านั้น ไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ของเวลา (t) อีกต่อไป ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งใดๆในโดเมนของฟูเรียนร์จะมีผลตลอกช่วงในโดเมนของเวลาลักษณะนี้เป็นคุณสมบัติแบบ Globalization ซึ่งสามารถแก้ไขโดยใช้การแปลงฟูเรียร์แบบแบ่งช่วงเวลา (Short Time Fourier Transform : STFT) นิยามโดยสมการที่ (4.3) โดยกำหนดให้ $\sigma(t)=w(t-\tau)\cdot e^{j\omega t}$ เมื่อ $w(t)$ คือวินโดว์ฟังก์ชัน (Window Function) และ τ เป็นพารามิเตอร์ที่ใช้บอกตำแหน่งของวินโดว์บนแกนเวลา การแปลงฟูเรียร์แบบแบ่งช่วงเวลาเป็นการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $f(t)$ เฉพาะส่วนที่วินโดว์ฟังก์ชัน $w(t-\tau)$ ครอบไว้ ลักษณะและความกว้างของวินโดว์ฟังก์ชัน $w(t)$ จะเป็นตัวกำหนดความละเอียดในการวิเคราะห์สัญญาณ วิธีนี้ทำให้การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในโดเมนของฟูเรียร์ ที่ตำแหน่ง τ ใดๆมีผลกับในโดเมนของเวลาเฉพาะส่วนที่วินโดว์ครอบไว้เท่านั้น

$$FT_{f(t)}(\omega)=\langle f(t) \,|\, e^{j\omega t} \rangle \tag{4.2}$$

$$STFT_{f(t)}(\tau,\omega)=\langle f(t) \,|\, w(t-\tau)\cdot e^{j\omega t} \rangle \tag{4.3}$$

สำหรับการแปลงเวฟเล็ต (Wavelet Transform : WT) นิยามด้วยสมการที่(3.4) พารามิเตอร์ a และ b ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่กำเนิดฟังก์ชันมูลฐานขึ้นใหม่โดยการสเกล (Scaling) และการเลื่อน (Translation) ไปตามแกนเวลาของฟังก์ชันมูลฐานต้นแบบ Mother Wavelet Function $\psi(t)$ พารามิเตอร์ a เปรียบเสมือนเป็นตัวกำหนดระดับความถี่ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณ $f(t)$ ซึ่งเป็นการยืดหรือหดฟังก์ชันพื้นฐานต้นแบบตามแกนเวลา โดยที่ลักษณะของฟังก์ชันหรือรูปร่างของสัญญาณยังคงเดิม และพารามิเตอร์ b เป็นตัวกำหนดตำแหน่งบนแกนเวลาของฟังก์ชันมูลฐานเวฟเล็ตที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณ $f(t)$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการแปลงเวฟเล็ตเป็นการแปลงไปสู่โดเมนของเวลาและความถี่ (Time-Frequency Domain) นั้นคือการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในโดเมนของเวฟเล็ตที่สเกล a ใดๆสามารถที่จะบอกช่วงตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงในโดเมนของเวลาได้ ซึ่งเป็นลักษณะของ Localization นั้นเอง

$$WT_{f(t)}(a,b)=\left\langle f(t) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\rangle \tag{4.4}$$

4.2 การวิเคราะห์แบบมัลติเรโซลูชัน

ทฤษฎีการเวฟเล็ตมีแนวความคิดมาจากทฤษฎีการวิเคราะห์แบบมัลติเรโวลูชัน (Multiresolution Analysis : MRA) ซึ่งสามารถใช้ทฤษฎีของพีชคณิตเชิงเส้น(Linear Algebra)อธิบายได้เป็นอย่างดี กล่าวคือในปริภูมิของสัญญาณ $L^2(R)$ จะปรากฏในปริภูมิย่อย (Subspaces) ของสัญญาณซ้อนทับกันอย่างต่อเนื่องไปดังสมการ

$$V_{-\infty} \subset \ldots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{\infty} = L^2(R) \tag{4.5}$$

ซึ่ง $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ อยู่กันอย่างหนาแน่น(Dense)ในปริภูมิ $L^2(R)$ โดยที่ $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ (เมื่อ $\bigcup$ และ $\bigcap$ หมายถึงการยูเนี่ยนและการอินเตอร์เซคชั่นตามลำดับ) แต่ละปริภูมิย่อย V_j จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันมูลฐาน (Basis Function) ในลักษณะที่ทำให้จำนวนฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อย V_j มากขึ้นเป็นสองเท่า(Two Scale Property) เมื่อ j มีค่าเพิ่มมากขึ้นหนึ่งหรือ

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}, \quad j \in Z \tag{4.6}$$

เมื่อ Z คือเซ็ตของจำนวนเต็มถ้ากำหนดให้ปริภูมิย่อยอ้างอิง V_0 ปรากฏฟังก์ชันมูลฐานต้นแบบ $\varphi(t)$ (เรียกว่า Scaling Function) กล่าวคือ

$$V_0 = span_k\{\varphi(t-k)\}, \quad k \in Z \tag{4.7}$$

จากสมการที่(3.6)สามารถกำหนดฟังก์ชันมูลฐานสำหรับปริภูมิย่อย V_j ใดๆได้โดยสมการ

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \cdot \varphi(2^j t - k), \quad j,k \in Z \tag{4.8}$$

โดยพจน์ $2^{j/2}$ มีเพื่อกำหนดให้ค่าพลังงานของฟังก์ชันมูลฐานทุกๆฟังก์ชันในทุกๆปริภูมิย่อย V_j มีค่าเท่ากับหนึ่งเสมอ หรือเป็นการนอร์มัลไลซ์ (Normalized) โดยกำหนดให้ $\|\varphi_{j,k}(t)\| = 1$ เสมอ ฟังก์ชันมูลฐานที่เกิดขึ้นในปริภูมิย่อย V_j ใดๆจะมีคุณสมบัติออโธนอร์มัล (Orthonormal Property) กล่าวคือ

$$V_j = span_k\{\varphi_{j,k}(t)\}, \quad j,k \in Z \tag{4.9}$$

โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อย V_j ใดๆแสดงโดย

$$\langle \varphi_{j,k}(t) \mid \varphi_{j,n}(t) \rangle = \delta_{k,n}, \qquad k,n \in Z \tag{4.10}$$

เมื่อ δ_{xy} คือ Kronecker-Delta นิยามโดย

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \tag{4.11}$$

ถ้าสมมุติให้ $f(t) \in V_j$ แล้ว สามารถแสดงฟังก์ชัน $f(t)$ ด้วยอนุกรมของ Scaling Function ได้คือ

$$f(t) = \sum_n C_j(n) \cdot \varphi_{j,n}(t), \qquad j,n \in Z \tag{4.12}$$

เมื่อ $C_j(n)$ คือ Coarse Expansion Coefficients จากสมการที่ (4.10) และ (4.12) สามารถหาค่าของ $C_j(n)$ ได้จาก

$$C_j(n) = \left\langle f(t) \mid \varphi_{j,n}(t) \right\rangle, \qquad j,n \in Z \tag{4.13}$$

ดังนั้นเมื่อ $\varphi(t) \in V_0$ และ $V_0 \subset V_1$ นั้นคือสามารถแสดง Scaling Function $\varphi(t)$ ในรูปของการรวมเชิงเส้นของ $\sqrt{2}\varphi(2t-n) \in V_1$ ได้คือ

$$\varphi(t) = \sum_n h(n) \cdot \sqrt{2}\varphi(2t-n), \qquad n \in Z, \quad h(n) \in l^2(Z) \tag{4.14}$$

เมื่อ $l^2(Z)$ คือปริภูมิของ Discrete-Time Energy Function ด้วยคุณสมบัติออโธนอร์มัลในสมการที่ (4.10) ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ $h(n)$ ในสมการที่ (4.14) สามารถหาได้จากสมการ

$$h(n) = \left\langle \varphi(t) \mid \sqrt{2}\varphi(2t-n) \right\rangle, \quad n \in Z \tag{4.15}$$

เนื่องจาก $V_j \subset V_{j+1}$ ดังนั้นจะปรากฏปริภูมิย่อย W_j ที่เป็นออโธนอร์มัลคอมพลิเมนต์ (Orthonormal Complement) ในปริภูมิย่อย V_{j+1} กล่าวคือ $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ เช่นเดียวกับปริภูมิย่อย V_j ฟังก์ชันมูลฐานสำหรับปริภูมิย่อย W_j ใดๆสามารถแสดงด้วยฟังก์ชันมูลฐานต้นแบบ $\psi(t)$ (เรียกว่า Wavelet Function) ของปริภูมิอ้างอิง W_0 โดย

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \cdot \psi(2^j t - k), \qquad j,k \in Z \tag{4.16}$$

ฟังก์ชันมูลฐานที่เกิดขึ้นในปริภูมิย่อย W_j ใดๆจะมีคุณสมบัติออโธนอร์มัล กล่าวคือ

$$W_j = span_k\left\{\psi_{j,k}(t)\right\}, \qquad j,k \in Z \tag{4.17}$$

โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อย W_j ใดๆแสดงโดย

$$\left\langle \psi_{j,k}(t) \,|\, \psi_{m,n}(t) \right\rangle = \delta_{j,m}\delta_{k,n}, \quad j,k,m,n \in Z \tag{4.18}$$

เนื่องจากปริภูมิ V_j และ W_j มีคุณสมบัติเป็นออโธนอร์มัลคอมพลีเมนต์ซึ่งกันและกัน ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อย V_j และ W_j ใดๆคือ

$$\left\langle \varphi_{j,k}(t) \,|\, \psi_{m,n}(t) \right\rangle = 0, \quad j,k,m,n \in Z \tag{4.19}$$

เช่นเดียวกับ Scaling Function ถ้าสมมุติให้ $f(t) \in W_j$ แล้ว สามารถแสดงฟังก์ชัน $f(t)$ ด้วยอนุกรมของ Wavelet Function ได้คือ

$$f(t) = \sum_n d_j(n) \cdot \psi_{j,n}(t), \qquad j,n \in Z \tag{4.20}$$

เมื่อ $d_j(n)$ คือ Detail Expansion Coefficients จากสมการที่ (4.10) และ(4.20) ทำให้สามารถหาค่าของ $d_j(n)$ ได้จาก

$$d_j(n) = \left\langle f(t) \,|\, \psi_{j,n}(t) \right\rangle, \qquad j,n \in Z \tag{4.21}$$

เนื่องจาก $W_0 \subset V_1$ นั้นคือสามารถแสดง Wavelet Function $\psi(t)$ ในรูปของการรวมเชิงเส้นของ $\sqrt{2}\varphi(2t-n) \in V_1$ ได้คือ

$$\psi(t) = \sum_n g(n) \cdot \sqrt{2}\varphi(2t-n), \quad n \in Z, \quad g(n) \in l^2(z) \tag{4.22}$$

ด้วยคุณสมบัติของออโธนอร์มัลในสมการที่(4.10)ดังนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ $g(n)$ ในสมการที่(4.22) สามารถหาได้จากสมการ

$$g(n) = \left\langle \psi(t) \,|\, \sqrt{2}\varphi(2t-n) \right\rangle, \quad n \in Z \tag{4.23}$$

4.3 อนุกรมเวฟเล็ต

ถ้าพิจารณาให้ $f(t) \in L^2(R)$ และกำหนดให้ปริภูมิ $L^2(R)$ ถูกแยก (Decompose) ออกเป็นปริภูมิย่อยถึงระดับ j แสดงโดยสมการ

$$L^2(R) = V_j \oplus W_j \oplus W_{j+1} \oplus \ldots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \ldots,\ j \in Z \tag{4.24}$$

นั้นคือสัญญาณ $f(t)$ จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันมูลฐานของแต่ละปริภูมิย่อย ซึ่งสามารถแสดงด้วยสมการอนุกรมเวฟเล็ต (Wavelet Series Expansion) ได้คือ

$$f(t) = \sum_n c_j(n) \cdot \phi_{j,n}(n) + \sum_{m=j}^{\infty} \sum_n d_m(n) \cdot \psi_{m,n}(t) \tag{4.25}$$

เช่นเดียวกับสมการที่(4.13) และ (4.21) Coarse และ Detail Expansion Coefficients สามารถหาได้จาก

$$c_j(n) = \langle f(t) | \varphi_{j,n}(t) \rangle, \qquad j,n \in Z \tag{4.26}$$

$$d_j(n) = \langle f(t) | \psi_{j,n}(t) \rangle, \qquad j,n \in Z \tag{4.27}$$

4.4 การวิเคราะห์สัญญาณเชิงเวลาเต็มหน่วยด้วยทฤษฎีเวฟเล็ต

ในการคำนวณทางปฏิบัติ สัญญาณจะถูกโปรเจกชัน(Projection)ลงบนปริภูมิย่อยที่มีจำนวนจำกัด ซึ่งสามารถแสดงได้ในสมการ

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset V_{j+2} \subset \ldots \subset V_{J-2} \subset V_{J-1} \subset V_J \in L^2(R), \quad j,J \in Z \tag{3.28}$$

เมื่อพิจารณาให้ปริภูมิย่อย V_j ใดๆมีจำนวนฟังก์ชันมูลฐาน 2^j ฟังก์ชัน ถ้าพิจารณาให้ $f(t) \in V_j$ และกำหนดให้ปริภูมิ V_j ถูกแยกออกเป็นปริภูมิย่อยถึงระดับ j แสดงโดยสมการ

$$V_J = V_j \oplus W_j \oplus W_{j+1} \oplus \ldots \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2} \oplus W_{J-1}, \quad j < J,\ \ j,J \in Z \tag{4.29}$$

นั่นคือสัญญาณ $f(t)$ จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันมูลฐานของแต่ละประภูมิย่อย ซึ่งสามารถแสดงสมการอนุกรมเวฟเล็ตได้ใหม่คือ

$$f(t) = \sum_{n=0}^{2^j-1} c_j(n)\varphi_{j,n}(t) + \sum_{k=0}^{2^j-1} c_j(k)\varphi_{j,k}(t) + \sum_{m=j}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} d_m(k) \cdot \psi_{m,n}(t) \tag{4.30}$$

การนำทฤษฎีเวฟเล็ตมาใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณเชิงเวลาเต็มหน่วยสามารถทำได้โดยการกำหนดให้ Coarse Expansion Coefficients $c_j(n)$ เป็นสัญญาณเชิงเวลาเต็มหน่วยที่ต้องการวิเคราะห์หรือประมวลผล ถ้ากำหนดให้ $x(n)$ เป็นสัญญาณเชิงเวลาเต็มหน่วยที่ได้จากการดิจิไตซ์ (Digitized) สัญญาณเชิงเวลาต่อเนื่อง (Continuos-Time Signal) $x(t)$ การวิเคราะห์สัญญาณเชิงเต็มหน่วย $x(n)$ ด้วยทฤษฎีของเวฟเล็ตสามารถทำได้โดยการกำหนด

$$c_j(n)=x(n), \qquad n=0,1,2,\ldots,2^J-1 \tag{4.31}$$

นั้นคือการวิเคราะห์สัญญาณเชิงเวลาเต็มหน่วยด้วยทฤษฎีเวฟเล็ตเป็นการคำนวณค่าของกลุ่มข้อมูลย่อย $d_{J-1}(n), d_{J-2}(n), \ldots d_j(n)$ และ $c_j(n)$ จากกลุ่มข้อมูล $c_j(n)$ เพื่อใช้เป็นข้อมูลเพื่อการประมวลผลในกระบวนการอื่นๆต่อไปนั่นเอง ซึ่งเรียกวิธีการคำนวณนี้ว่าการแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย (Discrete Wavelet Transform : DWT)

4.5 การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย

พิจารณาสัญญาณ $f(t)\in V_{j+1}$ ที่สามารถแสดงด้วยอนุกรมของ Scaling Function ในปริภูมิย่อย V_{j+1} ได้คือ

$$f(t)=\sum_n c_{j+1}(n)\varphi_{j+1,n}(t)\in V_{j+1}, \qquad j,n\in Z \tag{4.32}$$

จาก $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$ ดังนั้นสัญญาณ $f(t)\in V_{j+1}$ สามารถแสดงด้วยอนุกรมของ Scaling และ Wavelet Function ในปริภูมิย่อย V_j และ W_j ได้โดยสมการ

$$f(t)=\sum_k c_j(k)\varphi_{j,k}(t)+\sum_k d_j(k)\cdot\psi_{j,k}(t), \qquad j,k\in Z \tag{4.33}$$

พิจารณา Scaling Function จากสมการที่ (4.8) แบะ (4.14) สามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}(t) &= 2^{j/2}\varphi(2^j t-k)\\ &= 2^{j/2}\sum_v h(v)\cdot\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t-2h-v), \quad j,k,v\in Z\end{aligned} \tag{4.34}$$

แทนค่า $2k+v$ ด้วย n จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}(t) &= \sum_n h(n-2k)\cdot 2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}t-n) \\ &= \sum_n h(n-2k)\cdot \varphi_{j+1,n}(t)\end{aligned} \tag{4.35}$$

เช่นเดียวกันสำหรับ Wavelet Function

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_n g(n-2k)\cdot \varphi_{j+1,n}(t) \tag{4.36}$$

จากสมการที่ (4.13) แบะ (4.35) สามารถคำนวณ Coarse Expansion Coefficients ได้โดยสมการ

$$\begin{aligned}c_j(k) &= \langle f(t) \,|\, \varphi_{j,k}(t)\rangle \\ &= \sum_n h(n-2k)\cdot\langle f(t)\,|\,\varphi_{j+1,n}(t)\rangle \\ &= \sum_n h(n-2k)\cdot c_{j+1}(n)\end{aligned} \tag{4.37}$$

เช่นเดียวกันสำหรับ Detail Expansion Coefficients

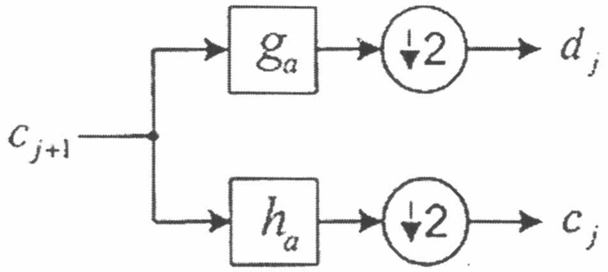
$$d_j(k) = \sum_n g(n-2k)\cdot c_{j+1}(n) \tag{4.38}$$

จากสมการที่ (4.37) และ (4.38) สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของคอนโวลูชัน (Convolution) ผลตอบสนองอิมพัลส์ได้เป็น

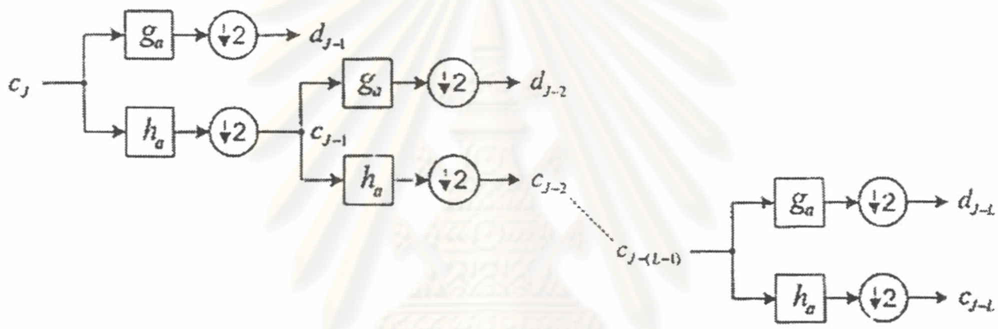
$$c_j(k) = h_a(n) * c_{j+1}(n)|_{n=2k} \tag{4.39}$$

$$d_j(k) = g_a(n) * c_{j+1}(n)|_{n=2k} \tag{4.40}$$

โดยผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_a(n)$ และ $g_a(n)$ คือตัวกรองวิเคราะห์ (Analysis Filter) สมการที่ (4.39) และ (4.40) สามารถแสดงด้วย Two-Channel Analysis Filter Bank ในรูปที่ 4.1 และการแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย L ระดับในรูปของ Octave Band Analysis Filter Bank แสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.1 Two-Channel Analysis Filter Bank ที่ใช้ในการคำนวณ $c_j(n)$ และ $d_j(n)$ จาก $c_{j+1}(n)$



รูปที่ 4.2 การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย L ระดับในรูปของ Octave Band Analysis Filter Bank

4.6 การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย

กลุ่มข้อมูลย่อยซึ่งประกอบด้วย $d_{J-1}(n), d_{J-2}(n), ...d_{J-L}(n)$ และ $c_{J-L}(n)$ ที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วยของสัญญาณ สามารถที่จะสร้างกลับคืนได้อย่างสมบูรณ์ (Perfect Reconstruction : PR) โดยการแปลงกลับเวฟเล็ตเต็มหน่วย (Inverse Discrete Wavelet Transform : IDWT) จาก $V_1 = V_0 \oplus W_0$

สามารถแสดงได้ว่า

$$\sqrt{2}\varphi(2t) = \sum_v h_s(v) \cdot \varphi(t-v) + \sum_v g_s(v) \cdot \psi(t-v), \quad v \in Z \qquad (4.41)$$

เมื่อผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_s(n)$ และ $g_s(n)$ ก็คือ ตัวกรองสังเคราะห์ (Synthesis Filter) จากสมการที่ (4.8) และ (4.41) สามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi_{j+1,n}(t) &= 2^{(j+1)/2}\cdot\varphi(2^{j+1}t-n)\\ &= \sum_v h_s(v)\cdot 2^{j/2}\varphi(2^j t-n/2-v)+\sum_v g_s(v)\cdot 2^{j/2}\psi(2^j t-n/2-v)\end{aligned} \tag{4.42}$$

แทนผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_s(v)$ และ $g_s(v)$ ด้วย $h_s(-2v)$ แล $g_s(-2v)$ ตามลำดับและแทนค่า $n+2v$ ด้วย $2k$ จะได้

$$\begin{aligned}\varphi_{j+1,n}(t) &= \sum_k h_s(n-2k)\cdot 2^{j/2}\varphi(2^j t-k)+\sum_v g_s(n-2k)\cdot 2^{j/2}\psi(2^j t-k)\\ &= \sum_k h_s(n-2k)\cdot\varphi_{j,k}(t)+\sum_v g_s(n-2k)\cdot\psi_{j,k}(t)\end{aligned} \tag{4.43}$$

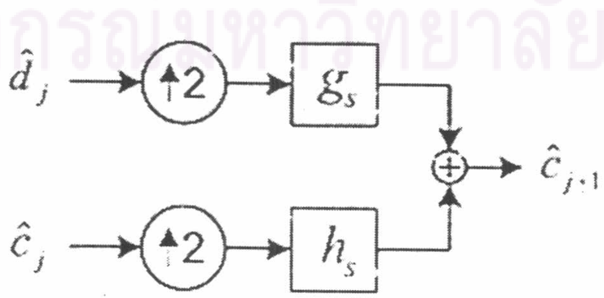
จากสมการที่ (4.13) และ (4.43) สามารถแสดงการคำนวณค่า $c_{j+1}(n)$ จาก $c_j(n)$ และ $d_j(n)$ ได้จากสมการ

$$\begin{aligned}c_{j+1}(n) &= \left\langle f(t)\,|\,\varphi_{j+1,n}(t)\right\rangle\\ &= \sum_k h_s(n-2k)\cdot\left\langle f(t)\,|\,\varphi_{j,n}(t)\right\rangle+\sum_k g_s(n-2k)\cdot\left\langle f(t)\,|\,\psi_{j,k}(t)\right\rangle\end{aligned} \tag{4.44}$$

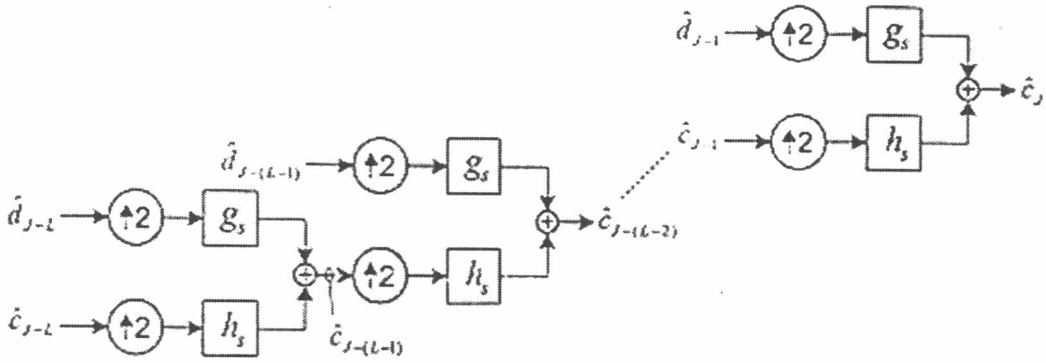
ถ้าพิจารณาให้ $\hat{d}_j(n)$ และ $\hat{c}_j(n)$ เป็นข้อมูลของ $c_j(n)$ และ $d_j(n)$ ที่ผ่านการประมวลผลใน Transform Domain สมการที่ (4.44) สามารถแสดงใหม่ได้เป็น

$$\hat{c}_{j+1}(n) = \sum_k h_s(n-2k)\cdot\hat{c}_j(k)+\sum_k g_s(n-2k)\cdot\hat{d}_j(k) \tag{4.45}$$

ซึ่งสามารถแสดงด้วยTwo-Channel Synthesis Filter Bankในรูปที่ 3.3 และการแปลงกลับเวฟเล็ตเต็มหน่วย L ระดับในรูปของ Octave Band Synthesis Filter Bank ได้ในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.3 Two-Channel Synthesis Filter Bank ที่ใช้ในการคำนวณ $\hat{c}_{j+1}(n)$ และ $\hat{c}_j(n)$ จาก $\hat{d}_j(n)$



รูปที่ 4.4 การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย L ระดับในรูปของ Octave Band Synthesis Filter Bank

4.7 ตระกูลของออโธนอร์มัลเวฟเล็ต

ตระกูลของออโธนอร์มัลเวฟเล็ต(Orthonormal Wavelet) ที่สำคัญได้แก่ Daubechies, Symmlet และ Coiflet เป็นต้น แต่ละตระกูลจะมีฟังก์ชันมูลฐาน (Scaling และ Wavelet Basis Function) ที่มีรูปร่างลักษณะแตกต่างกันไป เช่น ตระกูลของ Daubechies จะมีฟังก์ชันมูลฐานในลักษณะของ Asymetric ตระกูลของ Symmlet จะมีฟังก์ชันมูลฐานในลักษณะของ Least Asymmetric และตระกูลของ Coiflet จะมีฟังก์ชันมูลฐานในลักษณะของ Nearly Symmetric เป็นต้น นอกจากนี้แต่ละตระกูลยังสามารถแบ่งได้ตามความราบเรียบ(Smooth)ของฟังก์ชันมูลฐานซึ่งกำหนดโดยค่าของ Number of Vanishing Moments (NVM) ท้ายชื่อตระกูล(Daubechies 4,6,8,…,20 , Symmlet 4,5,6,…,10 แบะ Coiflet 1,2,…,5) ลักษณะของฟังก์ชันมูลฐานที่เลือกใช้งานจะมีความราบเรียบมากขึ้นเมื่อค่าNVM มากขึ้น ตัวอย่างฟังก์ชันมูลฐานของออโธนอร์มัลเวฟเล็ต ทั้ง Scaling Basis Function (เรียกอีกอย่างว่า Father Wavelet Basis Function) และ Wavelet Basis Function (เรียกอีกอย่างว่า Mother Wavelet Basis Function)

ในการเลือกชนิดของเวฟเล็ตสามารถทำได้โดยการกำหนดค่าผลตอบสนองอิมพัลส์(Impulse Response) $h_s(n)$ ที่จะนำไปใช้กับสมการที่ (4.45) สำหรับผลตอบสนองอิมพัลส์ $g_s(n)$, $h_a(n)$ และ $g_a(n)$ จากสมการที่ (4.45) สมการที่ (4.39) และสมการที่ (4.40) สามารถหาได้จากสมการที่ (4.46) ถึงสมการที่ (4.48)

$$g_s(n) = (-1)h_s(1-n), \quad n \in Z \tag{4.46}$$

$$h_a(n) = h_s(-n), \quad n \in Z \tag{4.47}$$

$$g_a(n) = g_s(-n), \quad n \in Z \tag{4.48}$$

ผลตอบสนองอิมพัลส์ทั้งหมดสอดคล้องกับคุณสมบัติของออโธนอร์มัลเวฟเล็ต ซึ่งแสดงโดยสมการ

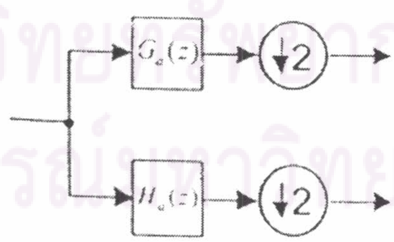
ที่ (4.49) และ (4.50)

$$\langle h_s(n-2k) \mid h_s(n-2l) \rangle = \langle g_s(n-2k) \mid g_s(n-2l) \rangle = \delta_{kl}\,, \qquad k,l,n \in Z \tag{4.49}$$

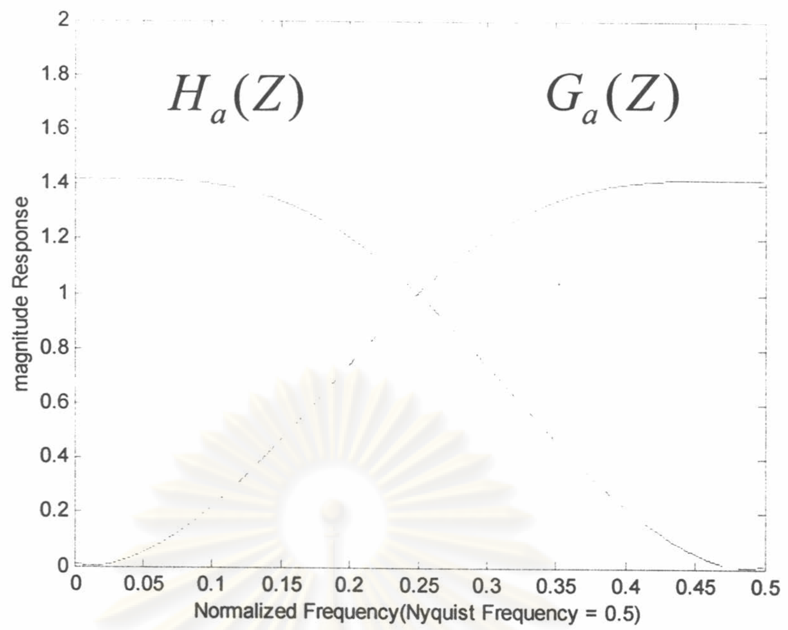
$$\langle h_s(n-2k) \mid g_s(n-2l) \rangle = \langle h_a(n-2k) \mid g_a(n-2l) \rangle = 0\,, \qquad k,l,n \in Z \tag{4.50}$$

4.8 ผลตอบสนองเมื่อความถี่ของ Octave Band Wavelet Filter Bank

การนำทฤษฎีเวฟเล็ตมาใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณเต็มหน่วยก็คือ การพิจารณาให้สัญญาณเต็มหน่วยที่ต้องการวิเคราะห์นั้นคือกลุ่มสัมประสิทธิ์ Scaling Function ที่ระดับความความละเอียดใดๆ แล้วทำการแยกกลุ่มสัมประสิทธิ์นั้นๆออกเป็นกลุ่มสัมประสิทธิ์ของ Wavelet Function ที่ระดับความละเอียดต่างๆ และกลุ่มสัมประสิทธิ์ของ Scaling Function ที่มีความละเอียดน้อยลง ขบวนการดังกล่าวสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของตัวกรองเชิงเลข (Digital Filter) แบบ Octave Band Analysis Filter Bank ในรูปที่ 4.2 เมื่อผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_a(n)$ และ $g_a(n)$ แสดงในรูปของ Z-Transform ได้ด้วย $H_a(Z)$ และ $G_a(Z)$ ตามลำดับ จากรูปที่ 3.5 แสดงตัวอย่างของ Two-Channel Analysis Filter Bank ของตัวกรองแบบ Daubechies-4 เมื่อวิเคราะห์ผลตอบสนองความถี่ $H_a(Z)$ จะมีลักษณะเป็นตัวกรองผ่านความถี่ต่ำ (Low pass Filter) และ $G_a(Z)$ จะมีลักษณะเป็นตัวกรองผ่านความถี่สูง (High Pass Filter) โดยตัวกรองทั้งสองจะมีจุดตัดความถี่ (Cut-Off Frequency) ที่ตำแหน่งเดียวกันคือ 0.25 (เมื่อ Nyquist Frequency คือ 0.5) สำหรับผลตอบสนองอินพัลส์ของออโธนอร์มัลเวฟเล็ตชนิดอื่นๆก็จะมีลักษณะคล้ายคลึงกัน จะต่างกันเพียงความกว้างช่วง Transition Band ซึ่งจะขึ้นอยู่กับอันดับหรือจำนวนTap Delay ของตัวกรอง FIR ตัวกรองที่มีอันดับหรือจำนวน Tap Delay สูงกว่าจะมีช่วง Transition Band ที่แคบกว่าหรือให้ลักษณะการกรองความถี่ที่คมกว่า



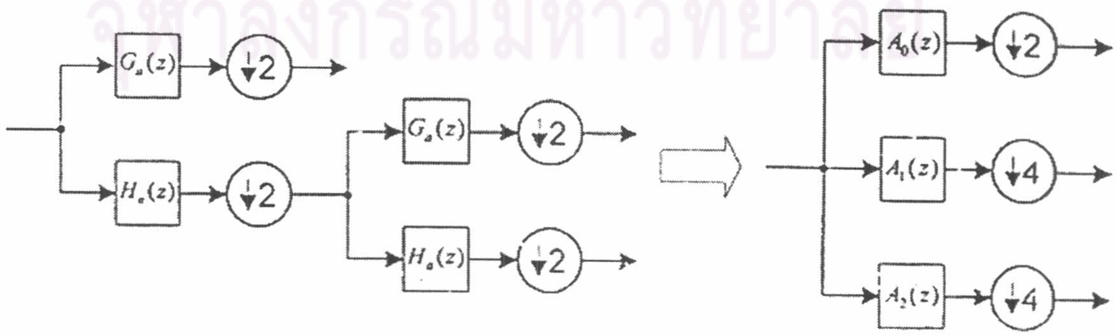
รูปที่ 4.5 รูปแบบสมมูลของ Octave Band Analysis Filter Bank 1 ระดับ



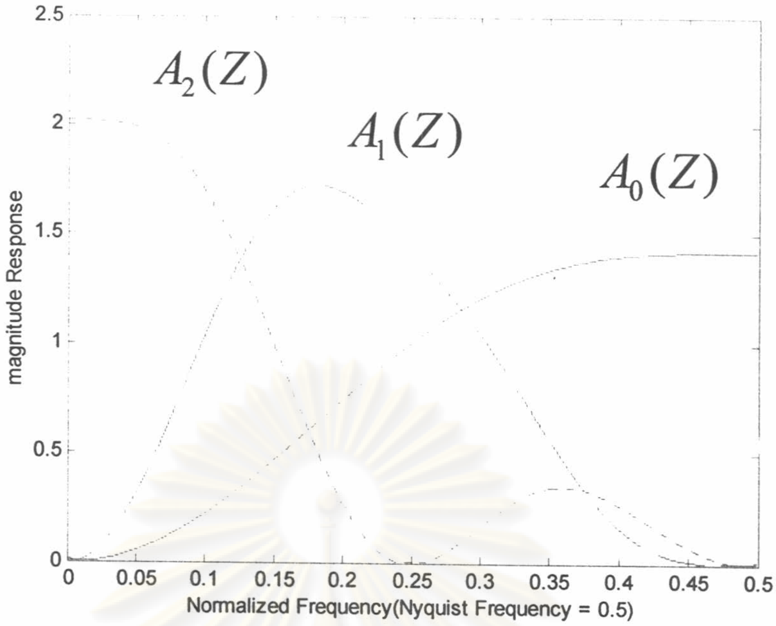
รูปที่ 4.6 ผลตอบสนองความถี่ของตัวกรองที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_a(n)$ และ $g_a(n)$แบบ Daubechies-4

เมื่อพิจารณารูปแบบสมมูลย์ของ Octave Band Analysis Bank 2 ระดับในรูปที่ 4.6 ซึ่งมีผลตอบสนองอิมพัลส์ใหม่ในสมการที่ (4.51) จากผลตอบสนองความถี่ในรูปที่ 3.10 จะเห็นว่า Octave Band Analysis Bank 2 ระดับเป็นการแบ่งครึ่งช่วงความถี่ 0.-0.25 จากระดับที่แล้วออกเป็น 2 ช่วง คือ 0-0.125 และ 0.125-0.25 เมื่อรวมกับความถี่ช่วงเดิม 0.25-0.5 จึงมีทั้งหมด 3 ช่วงความถี่

$$\begin{aligned} A_0(Z) &= G_a(Z) \\ A_1(Z) &= H_a(Z)G_a(Z^2) \\ A_2(Z) &= H_a(Z)H_a(Z^2) \end{aligned} \tag{4.51}$$



รูปที่ 4.7 รูปแบบสมมูลย์ของ Octave Band Analysis Filter Bank 2 ระดับ

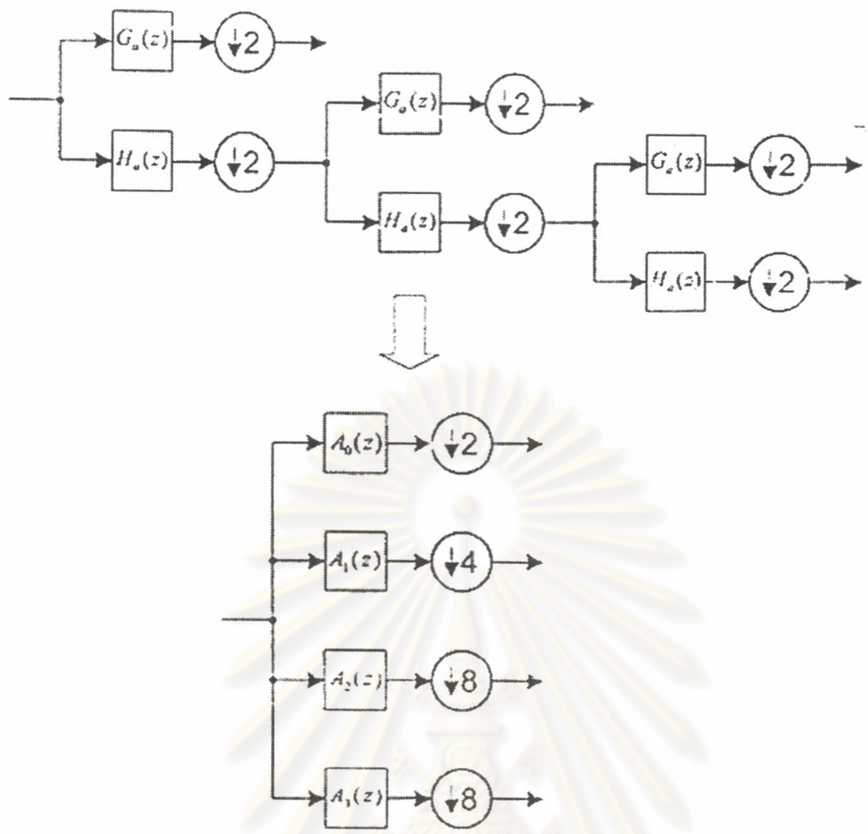


รูปที่ 4.8 ผลตอบสนองความถี่ของ Octave Band Analysis Filter Bank 2 โดยใช้ตัวกรองแบบ Daubechies-4

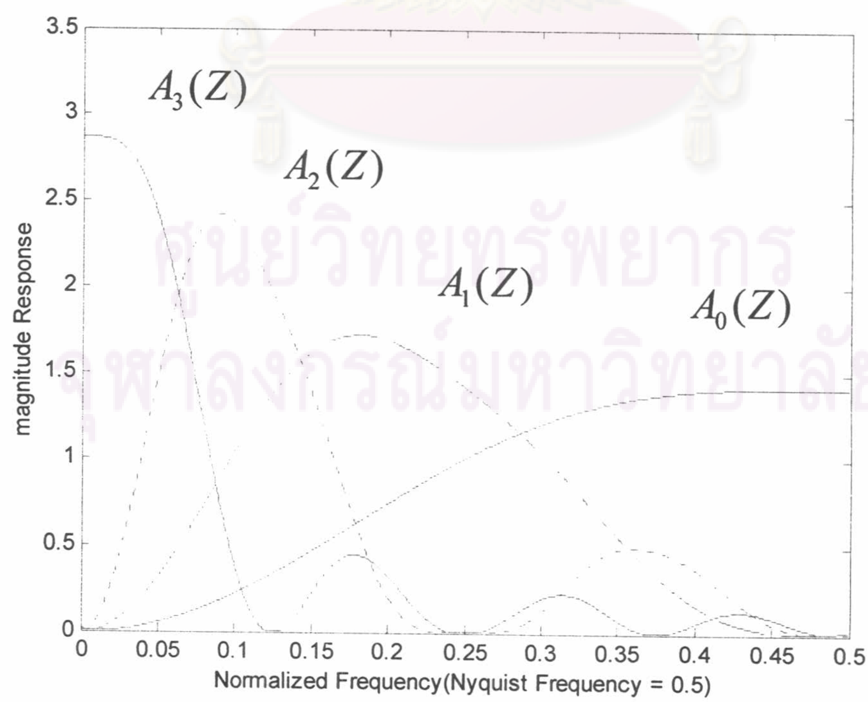
เช่นเดียวกัน รูปแบบสมมูลย์ของ Octave Band Analysis Filter Bank 3 ระดับ แสดงในรูปที่ 3.9 ซึ่งมีผลตอบสนองอิมพัลส์ใหม่ในสมการที่ (4.52)จากผลตอบสนองความถี่ในรูปที่ 4.12 จะเห็นว่า Octave Band Analysis Filter Bank 3 ระดับ เป็นการแบ่งครึ่งช่วงความถี่ 0-0.125 จากระดับที่แล้วออกเป็น 2 ช่วงคือ 0-0.0625 และ 0.0625-0.125 เมื่อรวมกับช่วงความถี่เดิมคือ 0.125-0.25 และ 0.25-0.5 จึงมีทั้งหมด 4 ช่วงความถี่ สำหรับระดับต่อๆไปก็มีลักษณะเช่นเดียวกันจะเห็นว่าการแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วยเป็นการแยกข้อมูลหรือสัญญาณที่ต้องวิเคราะห์ออกเป็นหลายๆช่วงความถี่เพื่อทำการประมวลผลกลุ่มข้อมูลที่สัมพันธ์กับช่วงความถี่นั้นๆอย่างอิสระนั่นเอง

$$\begin{aligned} A_0(Z) &= G_a(Z) \\ A_1(Z) &= H_a(Z)G_a(Z^2) \\ A_2(Z) &= H_a(Z)H_a(Z^2)G_a(Z^4) \\ A_3(Z) &= H_a(Z)H_a(Z^2)H_a(Z^4) \end{aligned} \tag{4.52}$$

ตัวอย่างการหาผลตอบสนองความถี่ของ Octave Band Analysis Filter Bank สามารถแสดงด้วยการโปรแกรมในภาคผนวก



รูปที่ 4.9 รูปแบบสมมูลย์ของ Octave Band Analysis Filter Bank 3 ระดับ



รูปที่ 4.10 ผลตอบสนองความถี่ของ Octave Band Analysis Filter Bank 3 ระดับ โดยใช้ตัวกรองแบบ Daubechies-4