บทที่ 6

เทคนิคปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ [17] เป็นแทคนิคในการปรับปรุงความแม่นยำของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อีกทั้งยังช่วยให้ประหยัดหน่วยความจำและเวลาในการคำนวณด้วย เนื่องจากในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพียงอย่างเดียวในการวิเคราะห์ปัญหานั้น ถ้าต้องการความแม่นยำของคำตอบเชิงตัวเลขสูง ๆ จะต้องแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็ก ๆ จำนวนมากตลอดทั้งปัญหา ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำเป็นจำนวนมาก และอาจทำให้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจำที่จำกัดนั้นไม่สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ ดังนั้นปัญหาดังกล่าวสามารถแก้ได้โดยการนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์มาช่วยร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ [18] คือ จะปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบ (solution gradient) สูง เพื่อให้ได้ความแม่นยำของคำตอบสูง และจะปรับเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น เพื่อประหยัดหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้ โดยไม่ทำให้ความแม่นยำของคำตอบลดลงไปมากนัก โดยการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมจะอาศัยจากคำตอบครั้งก่อนหน้า

ในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ จะนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบศักย์ใน 2 มิติ และการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ โดยในครั้งนี้จะใช้ค่าของความเร็วที่คำนวณได้จากการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาเป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสม มีรายละเอียดต่าง ๆ ดังนี้

6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนำคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ดังที่ได้กล่าวไปแล้ว คือ การปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบสูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ดังกล่าว จะใช้หลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) คือ ต้องหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบที่จะใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสม ดังนั้นจะต้องหา

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

โดย ϕ คือ คำตอบของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์, i คือ จุดต่อที่ i

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นจะใช้คำตอบที่อยู่บนจุดต่อหลัก (main node) มาใช้เป็นตัวคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยในการทำวิทยานิพนธ์นี้ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อสำหรับการไหลแบบศักย์ใน 2 มิติ และสามเหลี่ยมหกจุดต่อสำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ ดังนั้นในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้จะต้องใช้คำตอบที่จุดต่อหลักทั้งสามจุดมาใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 \tag{6.2}$$

โดย N_i , i = 1, 2, 3 คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ โดยมีค่า ϕ_i , i = 1, 2, 3 คือ ค่าตัวคำตอบที่จุดต่อหลักของเอลิเมนต์ ที่ใช้เป็นตัวหาค่าอนุพันธ์ของเอลิเมนต์

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.3}$$

ส่วนค่า a_i, b_i, c_i เมื่อ i = 1, 2, 3 มีค่าดังนี้

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \qquad b_1 = y_2 - y_3 \qquad c_1 = x_3 - x_2$$
$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad c_2 = x_1 - x_3$$
$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2 \qquad c_3 = x_2 - x_1$$

ซึ่ง A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณา

$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) \right] \tag{6.4}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\phi_3 \qquad (6.5ก)$$

จะได้

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = b_1 \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = b_2 \qquad \frac{\partial N_3}{\partial x} = b_3$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3)\phi_1 + (y_3 - y_1)\phi_2 + (y_1 - y_2)\phi_3\right] \qquad (6.5ข)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial y} = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2)\phi_1 + (x_1 - x_3)\phi_2 + (x_2 - x_1)\phi_3\right] \qquad (6.5ค)$$

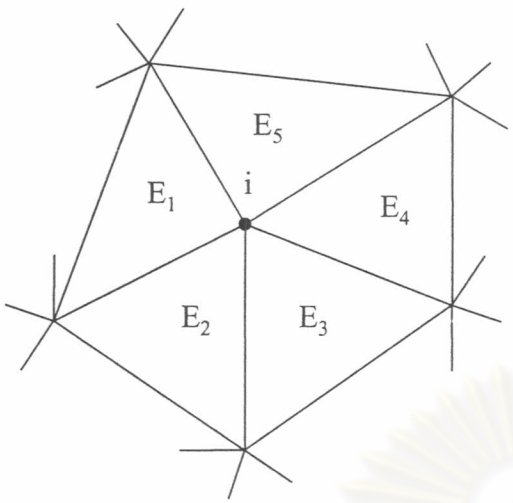
แต่สิ่งที่เราต้องการทราบคือ ค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องนำค่าของอนุพันธ์ของเอลิเมนต์ที่หาได้นี้กระจายไปสู่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ ซึ่งทำได้โดย

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial x}}{n} \qquad (6.6ก)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial y}}{n} \qquad (6.6ข)$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น จุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 5 เอลิเมนต์ ค่า $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$ จะเป็นการนำเอาค่าอนุพันธ์ของทั้ง 5 เอลิเมนต์ที่ล้อมรอบอยู่มาทำการเฉลี่ยกันดังแสดงในรูปที่ 6.1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e5}}{\partial x}}{5}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e5}}{\partial y}}{5}$$

รูปที่ 6.1 ค่าอนุพันธ์ของจุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 5 เอลิเมนต์

สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับสอง หาได้โดย

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(b_1 \phi_1 + b_2 \phi_2 + b_3 \phi_3)$$

$$= b_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + b_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (6.7\text{ก})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3)$$

$$= c_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (6.7\text{ข})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3)$$

$$= c_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + c_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (6.7\text{ค})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(b_1 \phi_1 + b_2 \phi_2 + b_3 \phi_3)$$

$$= b_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (6.7\text{ง})$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดย $\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x}$

หลังจากนั้นกระจายค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ไปสู่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (6.8ก)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (6.8ข)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x \partial y} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x \partial y}}{n} \qquad (6.8ค)$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของ ϕ_i ทั้งหมดแล้ว จึงนำค่าต่าง ๆ ดังกล่าวไปหาค่าในแกนหลัก (principal values)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \qquad (6.9)$$

โดยใช้สูตร

$$\text{Principal values} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}}{2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}} \qquad (6.10)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ซึ่งทำให้ได้ค่าในแกนหลัก $\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}$ ออกมา ค่าที่มากที่สุดของทั้งสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมาโดย

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}\right| \right) \tag{6.11}$$

ค่าที่ถูกเลือก (λ) จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ต่อไป [18] โดย

$$h^2\lambda = \text{ค่าคงที่} = h^2_{min}\lambda_{max} \tag{6.12}$$

ค่า h_{min} คือ ค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่ยอมให้ได้ และค่า λ_{max} คือ ค่าในแกนหลักที่มีค่ามากที่สุดของทั้งปัญหา

6.2 การนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหล

ในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ได้นำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหลแบบศักย์ใน 2 มิติและการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ โดยจะใช้ค่าของความเร็วที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหา เนื่องจากค่าของการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (velocity gradient) มีการเปลี่ยนแปลงที่ค่อนข้างสูงในบริเวณที่มีลักษณะการไหลที่สลับซับซ้อน เพื่อให้ได้คำตอบในบริเวณดังกล่าวได้อย่างถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นจะต้องใช้เอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวที่ค่อนข้างเล็ก แต่ในบริเวณอื่น ๆ สามารถที่จะใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้เพื่อเป็นการประหยัดหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้ จากที่กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 6.1 ที่ว่าหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นใช้หลักการเดียวกับหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง กล่าวคือ เมื่อนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหล จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \qquad (6.13)$$

โดยสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ ในสมการ (6.5-6.8) จะกลายมาเป็น

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} V_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} V_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} V_3$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3) V_1 + (y_3 - y_1) V_2 + (y_1 - y_2) V_3 \right] \qquad (6.14ก)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial y} = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2) V_1 + (x_1 - x_3) V_2 + (x_2 - x_1) V_3 \right] \qquad (6.14ข)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V_{en}}{\partial x}}{n} \qquad (6.15ก)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial V_{en}}{\partial y}}{n} \qquad (6.15ข)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3)$$

$$= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \qquad (6.16ก)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3)$$

$$= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \qquad (6.16ข)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3)$$
$$= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \qquad (6.16\text{ค})$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3)$$
$$= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \qquad (6.16\text{ง})$$

โดย $\frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (6.17\text{ก})$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (6.17\text{ข})$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y \partial x} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x \partial y} + \ldots + \frac{\partial^2 V_{en}}{\partial x \partial y}}{n} \qquad (6.17\text{ค})$$

และสมการ (6.12) จะกลายมาเป็น

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2}\right|\right) \qquad (6.18)$$

ค่า λ ที่ได้ในสมการ (6.18) นำไปสู่การหาค่าขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ต่อไป โดยใช้สมการ (6.13) คือ

$$h^2\lambda = \text{ค่าคงที่} = h_{min}^2 \lambda_{max} \qquad (6.19)$$

ขั้นตอนในทางปฏิบัติในการนำเอาเทคนิคในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นมีดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ โดยใช้โปรแกรม BUILT

ขั้นที่ 2 นำปัญหาดังกล่าวไปวิเคราะห์หาค่าที่ต้องการทราบ ค่าพื้นฐานที่ต้องการทราบ คือ ส่วนประกอบความเร็ว (u, v) และความดัน (p) โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นที่ 3 นำผลของความเร็วที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2 ไปใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ โดยใช้เทคนิคการปรับเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ในขั้นตอนนี้จะใช้โปรแกรม SPACE

ขั้นที่ 4 นำค่าขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 3 ไปใช้แบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ใหม่ในขั้นตอนที่ 1 เสร็จแล้วไปทำขั้นตอนที่ 2 เมื่อทำขั้นตอนที่ 2 เสร็จแล้ว นำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้ในครั้งก่อนหน้าว่าค่าของคำตอบต่าง ๆ ที่ได้มีความแตกต่างหรือมีการเปลี่ยนแปลงไปมากน้อยเท่าไร ถ้ามีความแตกต่างกันค่อนข้างมากแสดงว่าขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้นี้ยังมีขนาดที่ยังไม่เหมาะสมที่สุด จะต้องนำค่าคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในครั้งหลังนี้ไปใช้หาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมใหม่ต่อไปในขั้นตอนที่ 3 ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนการเปลี่ยนแปลงของคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เปลี่ยนแปลงน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกันระหว่างครั้งก่อนหน้าหนึ่งครั้ง

6.3 โปรแกรมสำหรับแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

ขั้นแรกสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลของของไหลในสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะต้องทำการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ สำหรับการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ในกระบวนการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ นั้นจะใช้โปรแกรม BUILT เพื่อใช้ในขั้นตอนดังกล่าว ซึ่งโปรแกรม BUILT จะประกอบด้วยโปรแกรมหลักและโปรแกรมย่อย 38 โปรแกรม ซึ่งสามารถแบ่งการทำงานของโปรแกรมออกเป็นส่วนใหญ่ ๆ ได้ 4 ส่วน ดังนี้

1. โปรแกรมหลัก (MAIN PROGRAM)

   เป็นส่วนหลักของโปรแกรม ทำหน้าที่เรียกใช้โปรแกรมย่อยต่าง ๆ ให้ทำงานตามลำดับ คือ อ่านข้อมูลจากแฟ้มข้อมูล สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์และเอลิเมนต์ พร้อมทั้งแสดงผลลัพธ์ลงในแฟ้มต่าง ๆ ด้วย

2. ส่วน INPUT DATA

   เป็นส่วนที่ทำหน้าที่อ่านข้อมูลจากแฟ้มข้อมูล ประกอบไปด้วย โปรแกรมย่อย INPUT สำหรับการทำงานในช่วงที่ยังไม่ได้นำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้หรือในช่วงที่เรียกว่าการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น (initial mesh) และเพิ่มเติมด้วยโปรแกรมย่อย INPUTBG INPUTSG INPUTSF และ INPSP สำหรับการทำงานในช่วงนี้จะเป็นการใช้เทคนิคการปรับนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติหรือมีการปรับขนาดเอลิเมนต์ (remeshing)

3. ส่วนการสร้างจุดต่อของเอลิเมนต์และเอลิเมนต์

   เป็นส่วนที่ทำหน้าที่สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์และเอลิเมนต์บนรูปร่างของปัญหา ประกอบด้วยโปรแกรมย่อยที่เกี่ยวข้องกับการทำงานในส่วนนี้เป็นจำนวนมาก โดยสามารถลำดับการทำงานได้ดังนี้

   3.1 โปรแกรมย่อย GENIS

   เป็นส่วนที่ทำหน้าที่สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์ลงขอบต่าง ๆ ทุกขอบของปัญหา

   3.2 โปรแกรมย่อย GENSF

   เป็นส่วนที่ทำหน้าที่สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์และเอลิเมนต์บนทุกพื้นผิวของรูปร่างของปัญหา โดยสร้างต่อจากจุดต่อของเอลิเมนต์ที่มีอยู่บนขอบของปัญหา

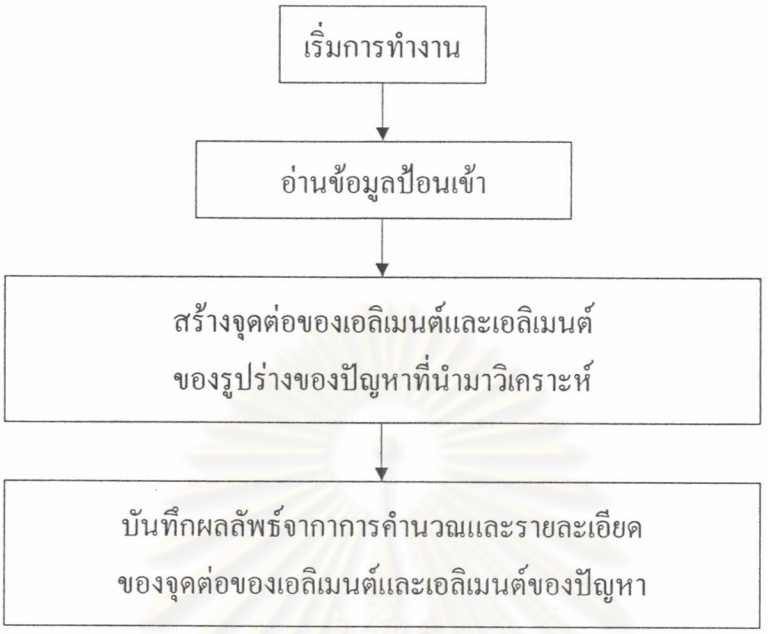
   3.3 โปรแกรมย่อย GLNUM

   เป็นส่วนที่ทำหน้าที่รวมข้อมูลของจุดต่อของเอลิเมนต์ของปัญหา ก่อนที่จะนำไปแสดงผลลัพธ์

4. ส่วนแสดงผลลัพธ์

   เป็นส่วนที่ทำหน้าที่แสดงผลลัพธ์จากการคำนวณลงในแฟ้มต่าง ๆ เพื่อนำไปใช้แสดงผลบนโปรแกรมกราฟฟิกทั่วไป ประกอบด้วยโปรแกรมย่อย SIZE, CONDITION OUTBG, OUTSG, OUTSF และ DATAGRAPHIC

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 6.2 ลำดับการทำงานของโปรแกรม BUILT.FOR

6.4 โปรแกรมสำหรับคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์

โปรแกรมสำหรับคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ คือ โปรแกรม SPACE ประกอบด้วยโปรแกรมหลักและโปรแกรมย่อยอีก 1 โปรแกรม ซึ่งมีขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมดังนี้

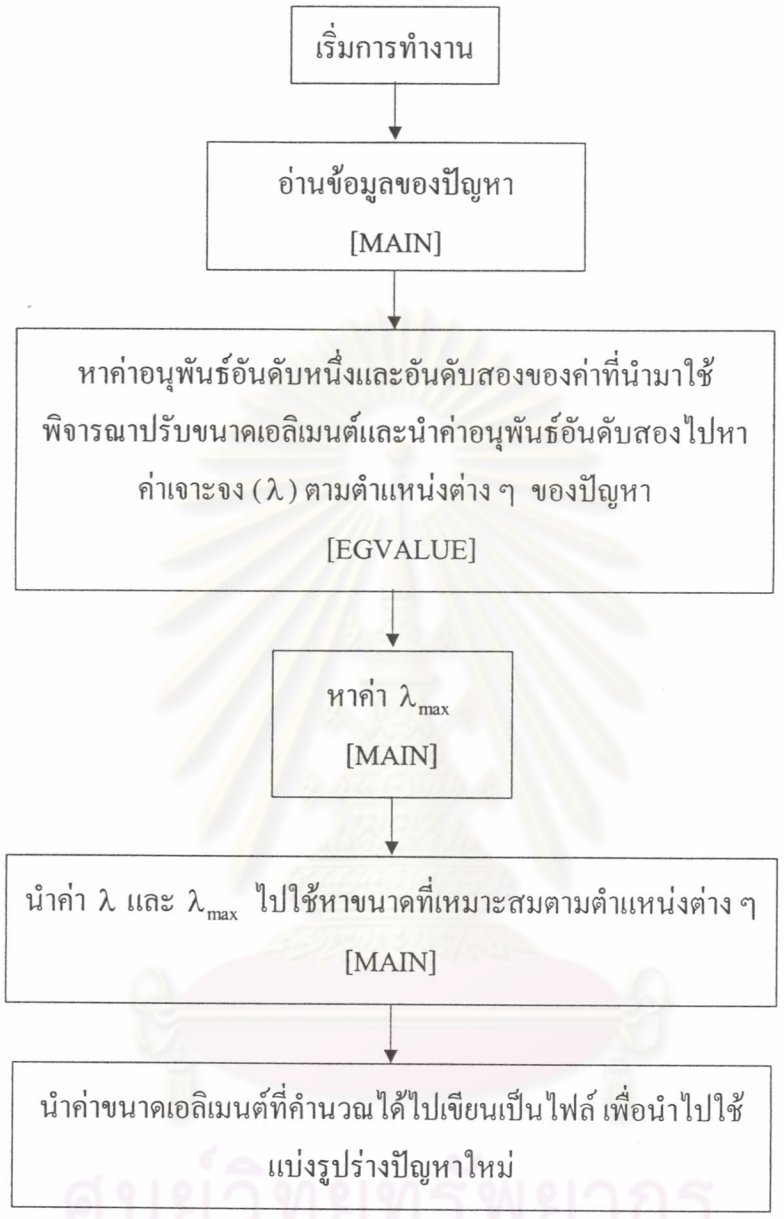
1. อ่านค่าข้อมูลป้อนเข้า ซึ่งประกอบด้วย ชื่อปัญหา (problem name) ตัวเลขกำกับชุดปัญหา (version number) ข้อมูลรายละเอียดของรูปร่างปัญหาที่จะนำมาทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ใหม่ เช่น จำนวนจุดต่อหลัก (main node) จำนวนเอลิเมนต์ ค่าความเร็วที่จุดต่อหลัก ขนาดของโมเดลในแกน x และ y ตำแหน่งของจุดต่อและลำดับการต่อของจุดต่อเพื่อให้เกิดเป็นเอลิเมนต์ ค่าขนาดเอลิเมนต์ใหญ่ที่สุดที่ยอมให้ได้
2. หาค่าเจาะจง (eigen value : λ) ของแต่ละจุดต่อ โดยการเรียกโปรแกรมย่อย EGVALUE ซึ่งจะทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของค่าที่นำมาใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการพิจารณาปรับขนาดเอลิเมนต์ ในที่นี้คือการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของความเร็วที่จุดต่อต่าง ๆ ดังกล่าวมาหาค่าในแกนหลัก (principal values) ซึ่งที่แต่ละจุดต่อจะมีค่าในแกนหลักเกิดขึ้น

สองค่า ค่าที่มากที่สุดระหว่างสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมา ค่าที่ถูกเลือกออกมานี้จะถูกเรียกว่าเป็นค่าเจาะจงของแต่ละจุดต่อหลัก

3. นำค่าเจาะจงของทุกจุดหลักมาทำการเลือกค่าที่มากที่สุด ค่าดังกล่าวจะกำหนดให้เป็นค่า λ_{max} ของปัญหา
4. นำค่า λ และ λ_{max} ที่ได้ไปใช้หาค่าขนาดเอลิเมนต์ตามตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหา โดยถ้าค่าขนาดเอลิเมนต์ (h) ตำแหน่งใดที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าขนาดเอลิเมนต์ที่ใหญ่ที่สุดที่กำหนดไว้ โปรแกรมจะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ตำแหน่งดังกล่าวให้เท่ากับค่าขนาดเอลิเมนต์ใหญ่ที่สุดที่กำหนดไว้
5. นำค่าขนาดเอลิเมนต์ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ที่คำนวณได้ ไปเขียนเป็นไฟล์เพื่อนำไปใช้แบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ใหม่ต่อไปในโปรแกรม BUILT

รายละเอียดของโปรแกรม BUILT และ SPACE ที่อยู่ในรูปแบบของภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) สามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิง [19]

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

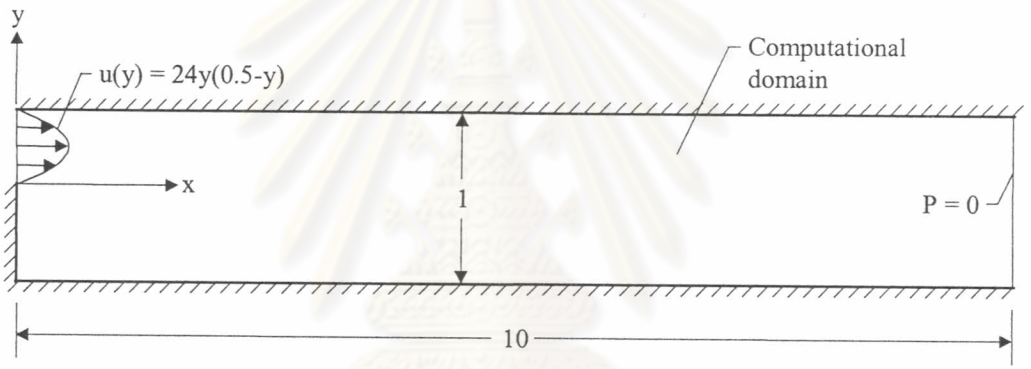


รูปที่ 6.3 ลำดับการทำงานของโปรแกรม SPACE.FOR

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6.5 ตัวอย่างการใช้โปรแกรมสำหรับสร้างและหาขนาดของเอลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะเป็นการยกตัวอย่างการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (backward facing step) โดยลักษณะของปัญหาได้แสดงในรูปที่ 6.4 รูปแบบของปัญหาในช่องคู่ขนานความกว้าง 1 หน่วยและยาว 10 หน่วย การไหลเกิดขึ้นผ่านครึ่งขอบซ้ายบนของภาพด้วยลักษณะการกระจายความเร็ว u ดังกำหนดให้ในภาพ โดยตลอดขอบด้านขวาของภาพนั้นกำหนดให้ความดันมีค่าเป็นศูนย์ การวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวจะใช้โปรแกรม NAVIER2D ร่วมกับโปรแกรม BUILT และโปรแกรม SPACE ซึ่งสามารถแสดงขั้นตอนในการวิเคราะห์เป็นลำดับได้ดังนี้



รูปที่ 6.4 ปัญหาการไหลผ่านช่องคู่ขนานที่มีพื้นที่หน้าตัดเพิ่มขึ้นโดยทันที
(ภาพแสดงสเกลที่ต่างกันแนวแกน x และ y)

สำหรับลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ป้อนเข้าของโปรแกรม BUILT มีรายละเอียดดังนี้

```
nis      nsf
  5        1
edge definition
  1        2
 0.      0.5       0.
 0.       0.       0.
  2        2
 0.       0.       0.
 0.     -0.5       0.
  3        2
 0.     -0.5       0.
10.     -0.5       0.
  4        2
10.     -0.5       0.
10.      0.5       0.
  5        2
10.      0.5       0.
 0.      0.5       0.
surface  support  point
```

```
  1        2        2
 0.     -0.5       0.
10.     -0.5       0.
 0.      0.5       0.
10.      0.5       0.
free  boundary
  1        5
  1    2    3    4    5
```

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT จะเป็นข้อมูลที่ใช้สร้างขอบเขตของปัญหาเพื่อที่จะให้โปรแกรมทำการแบ่งเอลิเมนต์ภายในขอบเขตนั้น ๆ โดยส่วนประกอบของข้อมูลนำเข้าสามารถจำแนกออกเป็น 4 ส่วนย่อย ได้ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ข้อมูลแสดงจำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

nis nsf

5 1

บรรทัดแรก คำอธิบายจำนวนขอบและพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 จำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

ส่วนที่ 2 ข้อมูลองค์ประกอบของเส้นขอบ

edge definition

1 2

0. 0.5 0.

0. 0. 0.

บรรทัดแรก คำอธิบายคำจำกัดความของขอบปัญหา

บรรทัดที่ 2 ประกอบไปด้วยตัวเลขสองตัว ตัวแรกคือหมายเลขประจำขอบ ส่วนตัวเลขที่สองคือจำนวนจุดที่ใช้ในการสร้างขอบนั้น ๆ

บรรทัดต่อ ๆ ไป ตำแหน่งพิกัดของจุดที่ใช้สร้างขอบนั้น ๆ ซึ่งจะมีจำนวนเท่ากับเลขตัวที่สองในบรรทัดที่ 2

ส่วนที่ 3 ข้อมูลจุดพิกัดที่มุมของบริเวณที่สามารถล้อมรอบพื้นผิวทั้งหมดของปัญหาได้

surface support point

1 2 2

0. -0.5 0.

10. -0.5 0.

0. 0.5 0.

10. 0.5 0.

บรรทัดแรก คำอธิบายจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดที่ 2 เลขประจำพื้นผิวของปัญหาและจำนวนจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดต่อ ๆ ไป เป็นตำแหน่งจุดพิกัดที่มุมของพื้นที่ ๆ ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

ส่วนที่ 4 ข้อมูลการเรียงลำดับของขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวของปัญหา

free boundary

1 5

1 2 3 4 5

บรรทัดแรก คำอธิบายลำดับของขอบที่ประกอบเป็นพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 เลขตัวแรกระบุหมายเลขประจำพื้นผิว เลขตัวหลังจะระบุจำนวนขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวของปัญหา

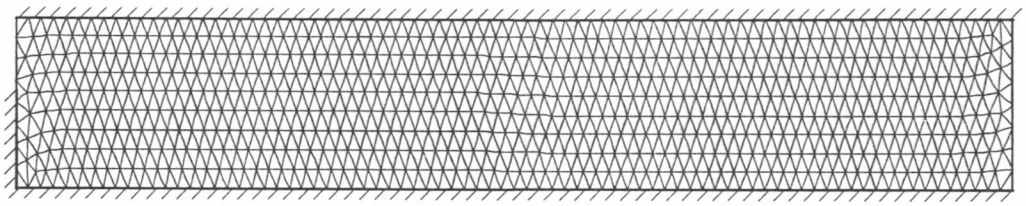
บรรทัดที่ 3 ลำดับหมายเลขประจำขอบที่เรียงกันแล้วก่อให้เกิดพื้นผิวของปัญหา

การแสดงหน้าจอในการใช้โปรแกรม BUILT สำหรับการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น มีดังนี้

```
************************************
***        B  U  I  L  T           ***
***     surface triangulator       ***
***   for built-up structures      ***
************************************

 *** mesh generation ***
     0.- initial mesh
     1.- remeshing

        Option ?: 0

Enter problem name: MODEL
Enter current version number: 0

 *** initial mesh ***
     element size ?: 0.125

 facet > reading surface definition data

 *** generating edge no:   1
```

```
    generated points:        5

 *** generating edge no:    2

    generated points:        5

 *** generating edge no:    3

    generated points:       81

 *** generating edge no:    4

    generated points:        9

 *** generating edge no:    5

    generated points:       81

 *** generating face no:        1
 nelem =     20 npoin =    192 nsfr =    187
 nelem =     40 npoin =    212 nsfr =    207
 nelem =     60 npoin =    232 nsfr =    227
                   .
                   .
                   .
 nelem =   1380 npoin =    802 nsfr =     87
 nelem =   1400 npoin =    802 nsfr =     49
 nelem =   1420 npoin =    802 nsfr =     15
 *** nr. of 3"s removed =             0
    0 sides have been swapped
    0 sides have been swapped
    0 sides have been swapped
  the checking has been succesful !!!!
total number of generated points :  802
total number of generated elements : 1426

 facet > writing surface triangulation

 facet > writing edge information

 facet > writing face information
```

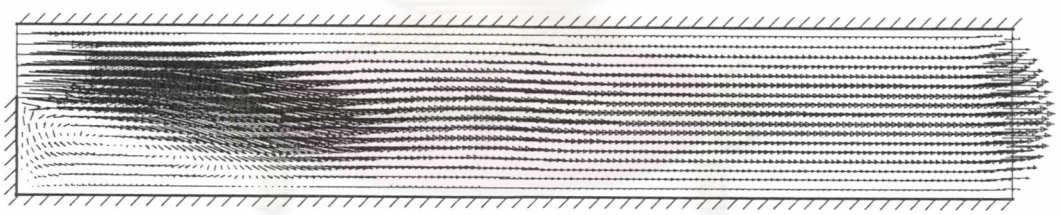
หลังจากการใช้โปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่มีค่าขนาดสม่ำเสมอ จะได้รูปร่างของปัญหาออกมาดังรูปที่ 6.5 ซึ่งประกอบด้วย 3,029 จุดต่อ 1,426 เอลิเมนต์



รูปที่ 6.5 ลักษณะการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาการไหล (ภาพแสดงสเกลที่ต่างกันแนวแกน x และ y)

เมื่อได้แบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แล้ว นำปัญหาดังกล่าวไปสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรมเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

หลังจากที่ได้ทำการวิเคราะห์หาคำตอบด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เรียบร้อยแล้ว นำผลของคำตอบที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ใหม่ ในที่นี้คือ ค่าของความเร็ว (V) มาใช้หาขนาดเอลิเมนต์ใหม่โดยใช้โปรแกรม SPACE โดยการกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาดังกล่าว เมื่อใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น มีลักษณะดังรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6 การกระจายตัวของความเร็ว เมื่อใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (ภาพแสดงสเกลที่ต่างกันแนวแกน x และ y)

ตัวอย่างไฟล์ข้อมูลคำตอบที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ใหม่ ซึ่งใช้เป็นไฟล์ข้อมูลป้อนเข้าของโปรแกรม SPACE สำหรับตัวอย่างนี้มีดังนี้

```
802
  1           0.
  2           0.
  3           0.
  4           0.
  5           0.
  .            .
  .            .
  .            .
798        0.5309
799       0.51149
800       0.49584
801       0.48854
802       0.66351
```

สามารถจำแนกออกเป็น 2 ส่วนย่อย ได้ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ข้อมูลจำนวนจุดต่อ

802

บรรทัดแรก จำนวนจุดต่อ

ส่วนที่ 2 ข้อมูลความเร็วที่จุดต่อต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

1 0.

บรรทัดแรก เลขจุดต่อและค่าความเร็วที่จุดต่อนั้น

การแสดงหน้าจอในการใช้โปรแกรม SPACE สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ มีดังนี้

```
Enter problem name: MODEL
Enter current version number: 0
PLEASE INPUT THE MINIMUM & MAXIMUM SPACINGS
0.0625, 0.25

    802
      1      0.88552938E-01
      2      0.82997616E-01
      3      0.25000000E+00
      4      0.25000000E+00
      5      0.25000000E+00
      .            .
      .            .
      .            .
    798      0.17495230E+00
    799      0.17474511E+00
    800      0.20795409E+00
    801      0.21319008E+00
    802      0.18030622E+00
```

ค่าขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้นี้จะนำไปเป็นข้อมูลป้อนเข้าของโปรแกรม BUILT สำหรับการสร้างเอลิเมนต์ใหม่

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ไฟล์ข้อมูลที่ได้จากการใช้โปรแกรม SPACE สามารถจำแนกออกเป็น 2 ส่วนย่อย ได้ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ข้อมูลจำนวนจุดต่อ

802

บรรทัดแรก จำนวนจุดต่อ

ส่วนที่ 2 ข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์โดยเฉลี่ยตามตำแหน่งต่าง ๆ ของจุดต่อ

1 0.88552938E-01

บรรทัดแรก เลขจุดต่อและค่าขนาดเอลิเมนต์ที่จุดต่อต่าง ๆ

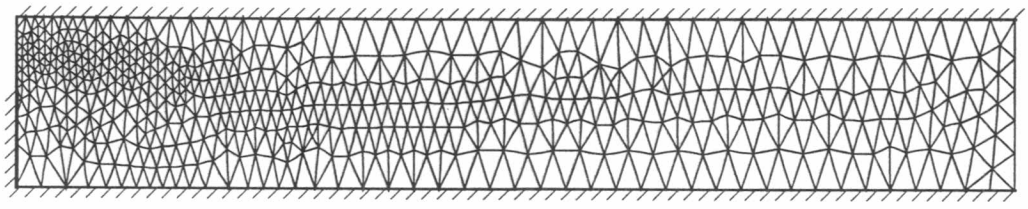
ค่าขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้จะนำไปเป็นข้อมูลป้อนเข้าของโปรแกรม BUILT สำหรับสร้างเอลิเมนต์ใหม่

การแสดงหน้าจอในการใช้โปรแกรม BUILT สำหรับการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้ปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว

```
************************************
***        B  U  I  L  T         ***
***     surface triangulator     ***
***   for built-up structures    ***
************************************


*** mesh generation ***
    0.- initial mesh
    1.- remeshing

       Option ?: 1

Enter problem name: MODEL
Enter current version number: 1
Enter previous version number: 0

 facet > reading surface definition data

 facet > reading previous triangulation

 facet > reading previous edge data

 facet > reading previous face data

 facet > reading new spacings data

 *** generating edge no:   1

     generated points:       8

 *** generating edge no:   2
```

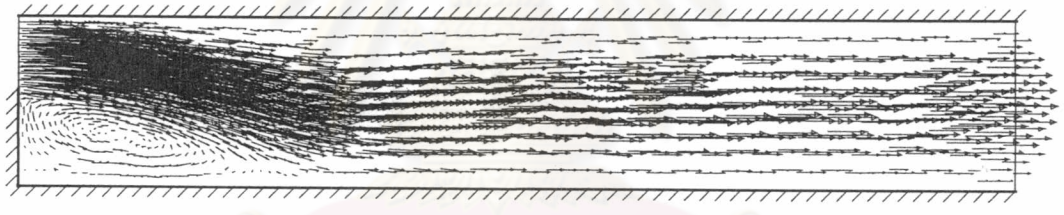
```
    generated points:        4

 *** generating edge no:    3

    generated points:       46

 *** generating edge no:    4

    generated points:        6

 *** generating edge no:    5

    generated points:       49

 *** generating face no:         1
 facet-war > distance =   0.00000 for point      1
 facet-war > distance =   0.00001 for point      2
 facet-war > distance =   0.00001 for point      3
                   .
                   .
                   .
 nelem =    900 npoin =    524 nsfr =     79
 nelem =    920 npoin =    525 nsfr =     43
 nelem =    940 npoin =    526 nsfr =      7
 *** nr. of 3"s removed =             4
   32 sides have been swapped
    2 sides have been swapped
    0 sides have been swapped
    5 sides have been swapped
    1 sides have been swapped
    0 sides have been swapped
    1 sides have been swapped
    0 sides have been swapped
  the checking has been succesful !!!!
total number of generated points :  522
total number of generated elements :  934

 facet > writing surface triangulation

 facet > writing edge information

 facet > writing face information
```

หลังจากการใช้โปรแกรม BUILT เพื่อแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ในขั้นตอนการปรับขนาดเอลิเมนต์ใหม่ จะทำให้ได้รูปปัญหาออกมาดังรูปที่ 6.7 ซึ่งประกอบด้วย 934 เอลิเมนต์ 1,977 จุดต่อ



รูปที่ 6.7 ลักษณะการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว สำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (ภาพแสดงสเกลที่ต่างกันแนวแกน x และ y)

นำแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว มาทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม NAVIER2D โดยรูปที่ 6.8 ได้แสดงผลการกระจายตัวของความเร็ว เมื่อใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์



รูปที่ 6.8 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว เมื่อใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (ภาพแสดงสเกลที่ต่างกันแนวแกน x และ y)

จากตัวอย่างที่ได้นำเสนอข้างต้นนี้จะเห็นได้ว่าการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์กับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เป็นผลทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังช่วยประหยัดหน่วยความจำและเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณอีกด้วย