บทที่ 2

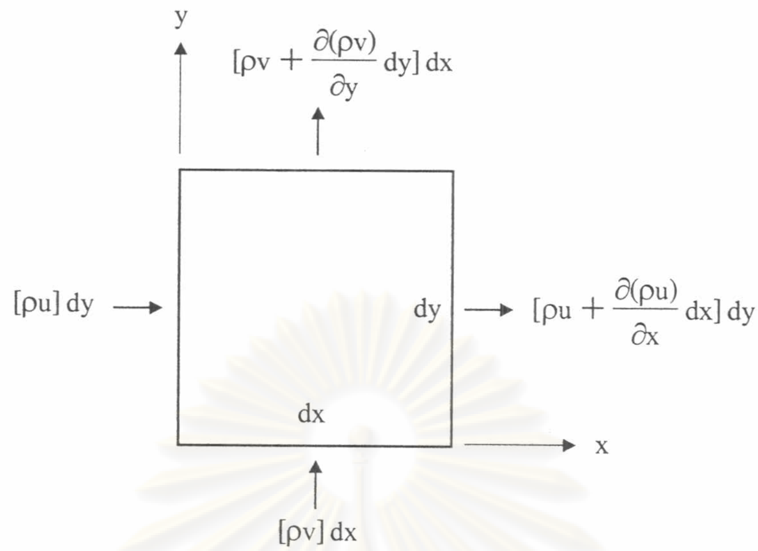
สมการพื้นฐานของการไหล

บทนี้เป็นการแสดงถึงขั้นตอนของการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์การไหลแบบศักย์ในสองและสามมิติ ซึ่งเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว ไม่มีความเสียดทาน และเป็นการไหลไร้การหมุน สำหรับการไหลแบบศักย์นั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) โดยอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น (linear partial differential equation) ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า (unknown) คือ ฟังก์ชันการไหล (stream function) หรือฟังก์ชันศักย์ (potential function)

แต่สำหรับการอธิบายการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อย นอกจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลแล้ว จะต้องพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) เพิ่มเติม สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีความสัมพันธ์กันแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equation) ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าต่าง ๆ สำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยที่ไม่สามารถอัดตัวได้ในสองมิติ คือ ความเร็วในแนวแกน x ความเร็วในแนวแกน y อุณหภูมิ และความดัน การศึกษาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นการศึกษาการไหลของของไหลที่มีอุณหภูมิที่สม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนของการไหล (flow domain) ดังนั้นสำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยที่ไม่มีผลของอุณหภูมิมาเกี่ยวข้องจึงต้องแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลและการอนุรักษ์โมเมนตัมเท่านั้น

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล

เป็นสมการที่บ่งบอกว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหาย ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวลเริ่มจากพิจารณาการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ ขนาดกว้าง dx และ dy ซึ่งมีความลึกหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูปที่ 2.1 ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่ตรึงอยู่ใน โดเมนของการไหล



รูปที่ 2.1 รูปแบบแสดงฟลักซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็กที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล เพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุรักษ์มวล

ตลอดขอบซ้าย dy ของกรอบเล็ก ๆ นี้มีปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลเข้าเท่ากับ $[\rho u]\, dy$ เนื่องจากทั้งความหนาแน่น ρ และความเร็ว u นั้นเปลี่ยนแปลงไปตลอด ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลออกทางด้านขวาของกรอบคือ $[\rho u + (\partial(\rho u)/\partial x) dx]\, dy$ นั่นคือ ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในทิศแกน x ผ่านขอบ dy ของการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ นี้คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dy \;-\; [\rho u]\, dy \;=\; \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\, dy \qquad (2.1)$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในการไหลผ่านของ dx ล่างไปยังขอบบนคือ

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\right] dx \;-\; [\rho v]\, dx \;=\; \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx\, dy \qquad (2.2)$$

และเนื่องจากปริมาณมวลในกรอบเล็ก ๆ นี้คือ $\rho\, dx\, dy$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลหรือปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลงไปคือ

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy \tag{2.3}$$

แต่เนื่องจากมวลในกรอบเล็ก ๆ นี้ต้องไม่เกิดการสูญหาย ดังนั้นจึงหมายความว่าปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ dx และ dy จำเป็นต้องเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลในกรอบเล็ก ๆ ที่ลดลงในนั้น นั่นคือ

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\,dx\,dy = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy \tag{2.4}$$

หารสมการนี้ตลอดด้วย dx dy แล้วย้ายข้างจะได้

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.5}$$

หรือ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0 \tag{2.6}$$

สมการ (2.6) นี้คือสมการเชิงอนุรักษ์มวล ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของความเป็นจริงในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล โดยบ่งบอกว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหายไป สมการดังกล่าวนี้อยู่ในรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในกรณีที่เราศึกษาอยู่นี้เป็นการไหลของของไหลที่ไม่มีการอัดตัว (incompressible flow) ซึ่งค่าความหนาแน่นของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่าง ๆ ที่เคลื่อนที่ไป และเวลา [3] ดังนั้น

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) = 0 \tag{2.7}$$

ดังนั้นสำหรับการวิเคราะห์การไหลใน 2 มิติจะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2.8)$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ (tensor notation) ได้ดังนี้

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \qquad (2.9)$$

และสำหรับการวิเคราะห์การไหลใน 3 มิติจะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.10)$$

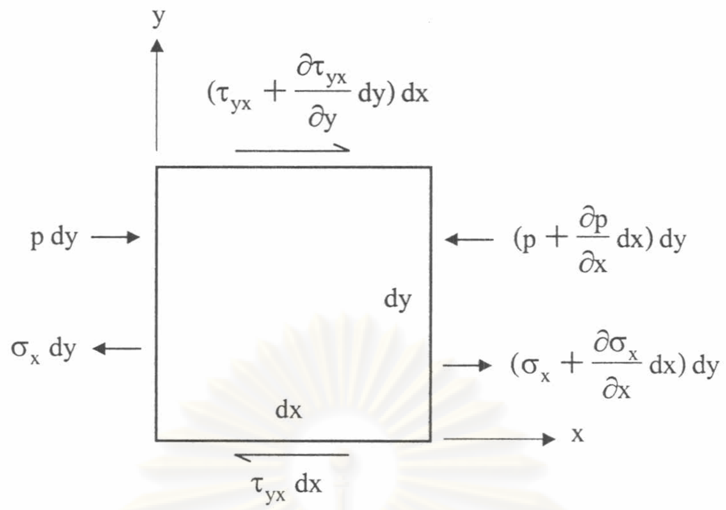
เช่นกันสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$u_{,x} + v_{,y} + w_{,z} = 0 \qquad (2.11)$$

โดยเครื่องหมายจุลภาค (comma) แทนความหมายของค่าอนุพันธ์ (derivative)

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์โมเมนตัม

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้มาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ที่กล่าวว่า แรงเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร่ง ดังนั้นในการใช้กฎข้อที่สองของนิวตันที่ต้องมีความสัมพันธ์กับการเร่ง เราจะพิจารณามวลซึ่งมีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูปที่ 2.2 รูปแบบแสดงแรงต่าง ๆ ในทิศแกน x ที่กระทำบนก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล เพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม

เพื่อให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการต่อไป รูปที่ 2.2 แสดงแรงต่าง ๆ ที่กระทำในทิศแกน x เท่านั้น กฎข้อที่สองของนิวตันเมื่อพิจารณาในทิศแกน x คือ

$$F_x = ma_x \tag{2.12}$$

โดย F_x คือแรงรวมในทิศแกน x, m คือมวลของก้อนของไหลนี้ และ a_x คือความเร่งของมวลในทิศแกน x

แรงรวมในทิศแกน x ประกอบด้วยแรงที่กระทำที่ผิวต่างๆ (surface forces) และแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง (body force) [4] สำหรับแรงที่กระทำที่ผิวนั้นยังประกอบด้วยแรงอันเนื่องมาจากความดัน p, ความเค้นตั้งฉาก (normal stress) σ_x, และความเค้นเฉือน (shear stress) τ_{yx} ดังนั้น แรงรวมที่กระทำที่ผิวต่างๆในทิศแกน x ของก้อนมวลนี้คือ

$$\left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dy+\left[\left(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)-\sigma_x\right]dy$$

$$+\left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)-\tau_{yx}\right]dx \qquad (2.13)$$

ส่วนแรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวเองในทิศแกน x คือ

$$\rho\ f_x\ (dx\ dy) \qquad (2.14)$$

ดังนั้น แรงรวมทั้งหมดในทิศแกน x ที่เกิดจากพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2.13) และ (2.14) คือ

$$F_x \quad = \quad \left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right]dx\ dy + \rho f_x\ dx\ dy \qquad (2.15)$$

ส่วนมวลของก้อนของไหลนี้คือ

$$m \quad = \quad \rho\ (dx\ dy) \qquad (2.16)$$

ค่าความเร่ง a_x ของมวลในสมการ (2.12) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต่อเวลา ดังนั้นความเร่ง a_x นี้คือ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของ u กล่าวคือ

$$a_x \quad = \quad \frac{Du}{Dt} \qquad (2.17)$$

แทนสมการ (2.15) - (2.17) ลงในกฎข้อที่สองของนิวตันสมการ (2.12) แล้วหารตลอดด้วย dx dy จะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \qquad (2.18ก)$$

ในทำนองเดียวกัน กฎข้อที่สองของนิวตันในทิศแกน y ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกัน ดังนี้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \qquad (2.18ข)$$

สมการ (2.18ก-ข) นั้น เรียกว่าสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) [4]

สมการนาเวียร์-สโตกส์ (2.18ก-ข) ต่างอยู่ในแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์อันเนื่องมาจากการประดิษฐ์สมการ โดยการจับตามองก้อนมวลของไหลที่เคลื่อนตัวไป ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์นี้สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาซึ่งเปรียบเสมือนผู้สังเกตจับตานิ่งอยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วเฝ้ามองการเปลี่ยนแปลงของของไหลที่เคลื่อนที่ผ่านไป โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์กับค่าอนุพันธ์ธรรมดาประยุกต์เข้ากับความเร็ว u ดังนี้

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u \qquad (2.19)$$

ดังนั้น
$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u \qquad (2.20)$$

นั่นคือ พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถแทนด้วยพจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ (2.20) นี้ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดา และสามารถนำไปใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุรักษ์มวล (2.6) เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ เพราะทุกพจน์ในสมการต่าง ๆ เหล่านี้ล้วนอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาแล้ว อย่างไรก็ตามพจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ (2.20) นี้ยังสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายและสะดวกมากขึ้นอีกโดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการดังต่อไปนี้

เนื่องจาก
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ดังนั้น
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.21}$$

และเนื่องจาก

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) = u\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) + (\rho\vec{V})\cdot\vec{\nabla}u$$

ดังนั้น
$$\rho\vec{V}\cdot\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) - u\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) \tag{2.22}$$

แทนสมการ (2.21) และ (2.22) ลงในสมการ (2.20) จะได้

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) - u\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})\right] + \vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) \tag{2.23}$$

แต่เนื่องจากผลรวมของ 2 พจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมการเชิงอนุรักษ์มวล (2.6) ดังนั้น สมการ (2.23) จึงกลายมาเป็น

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) \tag{2.24}$$

แทนสมการ (2.24) นี้ลงในสมการ (2.18ก) จะได้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{2.25ก}$$

ในทำนองเดียวกัน สมการ (2.18ข) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \qquad (2.25ข)$$

สมการ (2.25ก-ข) นี้เรียกว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form)

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเร็ว ดังนี้ [5]

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2.26ก)$$

$$\sigma_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.26ข)$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \qquad (2.26ค)$$

โดย μ แทนค่าความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity) ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนรูปของของไหล เมื่อแทนค่าความเค้นต่าง ๆ ที่อยู่ในรูปของความเร็วจากสมการ (2.26 ก-ค) ลงในสมการ (2.25 ก-ข) จะก่อให้เกิดสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์

ในการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยนั้น จะพิจารณาเป็นการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สถานะอยู่ตัว รวมทั้งละทิ้งพจน์เนื่องจากน้ำหนักตัวเอง (body force) ในทางแกน x และเนื่องจากค่าความดัน p จัดเป็นความเค้นตั้งฉากชนิดหนึ่งเช่นกัน ดังนั้น หากกำหนดให้ค่าความเค้นตั้งฉากรวมในทิศแกน x และ y คือ

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x - p = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \qquad (2.27ก)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y - p = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \qquad (2.27ข)$$

เป็นผลให้สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (2.25ก-ข) ลดรูปไปได้อีกเป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \overline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.28ก)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma}_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.28ข)$$

สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (2.28) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\rho(u\, u_{,x} + v\, u_{,y}) - (\overline{\sigma}_{x,x} + \tau_{yx,y}) = 0 \quad (2.29ก)$$

$$\rho(u\, v_{,x} + v\, v_{,y}) - (\tau_{xy,x} + \overline{\sigma}_{y,y}) + \rho g_y = 0 \quad (2.29ข)$$

ซึ่งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนสามารถเขียนในรูปแบบของเทนเซอร์เช่นกัน คือ

$$\overline{\sigma}_x = 2\mu\, u_{,x} - p \quad (2.30ก)$$

$$\overline{\sigma}_y = 2\mu\, v_{,y} - p \quad (2.30ข)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(u_{,y} + v_{,x}) \quad (2.30ค)$$

2.3 สมการครอบคลุมสำหรับการวิเคราะห์การไหลของของไหล

ในการการวิเคราะห์การไหลของของไหลในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะพิจารณาเป็นการไหลแบบศักย์ และการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อย ซึ่งจะมีสมการครอบคลุม (governing equation) ปัญหาที่แตกต่างกันดังนี้

2.3.1 การไหลแบบศักย์ สำหรับรูปแบบฟังก์ชันการไหลใน 2 มิติ

การไหลแบบศักย์เป็นการไหลแบบไม่อัดตัว ไม่มีความเสียดทาน และเป็นการไหลไร้การหมุน จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad = \quad 0 \tag{2.31}$$

เมื่อกำหนดให้ $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ และ $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ เนื่องจากการไหลดังกล่าวเป็นการไหลไร้การหมุน [6, 7] ดังนั้น

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} \quad = \quad 0 \tag{2.32}$$

ซึ่งก็คือ

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} \quad = \quad 0$$

หรือ

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad = \quad 0 \tag{2.33}$$

จากนั้นแทนค่า u และ v ที่กำหนดให้ลงในสมการข้างต้นจะก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของลาปลาซ โดยตัวไม่รู้ค่าคือฟังก์ชันของการไหล

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad = \quad 0 \tag{2.34}$$

2.3.2 การไหลแบบศักย์ สำหรับรูปแบบฟังก์ชันศักย์ใน 2 มิติ

เมื่อกำหนดให้ $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ และ $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของลาปลาซเช่นกัน ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad = \quad 0 \tag{2.35}$$

2.3.3 การไหลแบบศักย์ สำหรับรูปแบบฟังก์ชันศักย์ใน 3 มิติ

ใน 2 มิติ สามารถใช้ฟังก์ชันการไหลและฟังก์ชันศักย์ในการหาค่าความเร็วและความดันได้ ภายในขอบเขตของการไหล แต่สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัว และไม่มีความเสียดทานไร้การหมุนใน 3 มิตินั้นจะไม่สามารถใช้ฟังก์ชันการไหลได้ ดังนั้น

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (2.31) จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.36}$$

เมื่อกำหนดให้ $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$ และ $w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$ เมื่อ ϕ คือ ฟังก์ชันศักย์ (potential function) ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.37}$$

2.3.4 การไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์สำหรับปัญหาการไหลแบบสองมิติภายใต้สถานะอยู่ตัว ประกอบด้วยสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการเชิงอนุรักษ์มวล ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\rho(u\,u_{,x} + v\,u_{,y}) - (\overline{\sigma}_{x,x} + \tau_{yx,y}) = 0 \tag{2.38ก}$$

$$\rho(u\,v_{,x} + v\,v_{,y}) - (\tau_{xy,x} + \overline{\sigma}_{y,y}) - \rho g_y = 0 \tag{2.38ข}$$

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \tag{2.38ค}$$

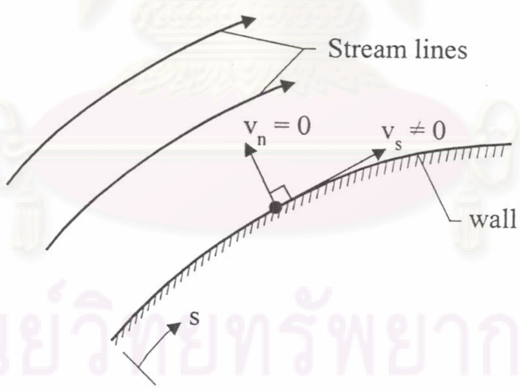
2.4 เงื่อนไขขอบเขตของการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์การไหลแบบศักย์หรือการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยนั้น คำตอบที่ได้จากการระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนั้นให้ผลที่แตกต่างกันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตตลอดขอบของโดเมนของการไหล

ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบศักย์นั้นจะแตกต่างจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อย รายละเอียดทั่วไปของเงื่อนไขขอบเขตของโดเมนของการไหลมีดังนี้

2.4.1 สำหรับการไหลแบบศักย์

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ผนัง เนื่องจากการไหลเป็นการไหลแบบไม่หนืดดังนั้นจึงไหลแบบลื่น (slip) ขนานไปตามผิวขอบผนังดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 เงื่อนไขขอบเขตของการไหลที่ติดกับผนัง

นั่นคือความเร็ว v_s ในทิศทางแนว s จะไม่เท่ากับศูนย์ ในขณะที่ความเร็ว v_n ในทิศทางตั้งฉากกับผนังนั้นจำเป็นต้องเท่ากับศูนย์

$$v_n \Big|_{wall} = 0 \qquad (2.39ก)$$

นั้นคือ ในรูปแบบของฟังก์ชันการไหลจะได้ว่า

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial s}\right|_{wall} = 0 \tag{2.39ข}$$

โดยสรุป การแก้ปัญหาการไหลแบบศักย์จึงประกอบด้วยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบของลาปลาซ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.39ก}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่ผนัง

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial s}\right|_{wall} = 0 \tag{2.39ข}$$

ซึ่งหลังจากคำนวณค่าฟังก์ชันการไหล $\psi = \psi(x, y)$ ได้แล้ว จึงสามารถคำนวณความเร็วในแกน x และ y ได้จาก

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{และ} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.39ค}$$

และจากนั้นจึงคำนวณหาค่าความดัน (pressure) p ตามตำแหน่งต่าง ๆ ได้โดยใช้สมการของเบอร์นูลี (Bernoulli's equation) [6] ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ได้หากเป็นการไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัวภายใต้สถานะอยู่ตัวดังเช่นในกรณีนี้ สมการของเบอร์นูลีคือ

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{constant} \tag{2.40}$$

สำหรับ 2 มิติ

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{2.41ก}$$

สำหรับ 3 มิติ

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \tag{2.41ข}$$

g แทนค่าความเร่งจากแรงโน้มถ่วง (gravitational acceleration) และ z แทนความสูงจากระดับอ้างอิง ดังนั้นเมื่อทราบค่าความดันที่ตำแหน่งอ้างอิงตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง ก็สามารถคำนวณค่าความดันที่ตำแหน่งอื่น ๆ ได้ตลอดทั่วทั้งโดเมนของการไหล

2.4.2 สำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์ (2.38ก-ค) ที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสามสมการนี้จะทำการแก้เพื่อหาผลลัพธ์ของลักษณะการกระจายสำหรับตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว คือ ค่าของความเร็ว u, v และค่าของความดัน p ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตดังเช่นแสดงในรูป 2.4 ประกอบด้วย

การกำหนดค่าของความเร็วตลอดขอบ S_1

$$u = u_1(x, y) \qquad (2.42ก)$$

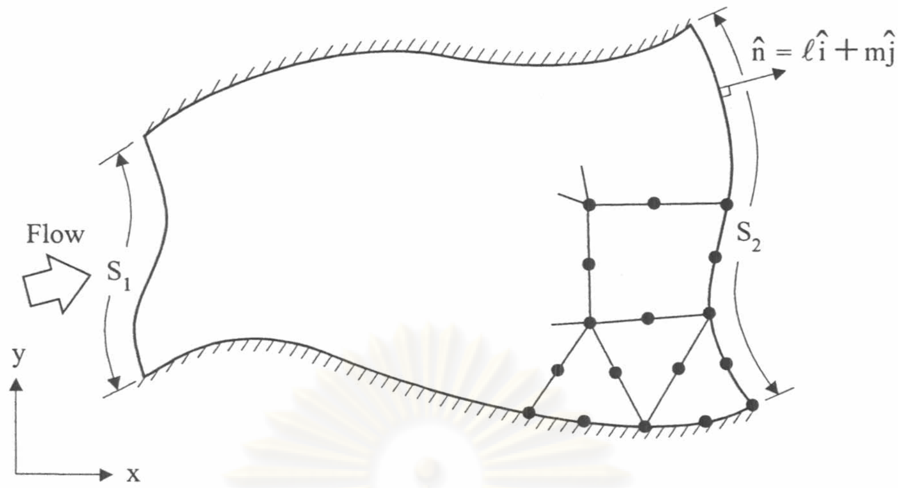
$$v = v_1(x, y) \qquad (2.42ข)$$

การกำหนดแรงรวมที่ผิว (surface traction) ตลอดขอบ S_2

$$T_x = \bar{\sigma}_x \ell + \tau_{yx} m \qquad (2.43ก)$$

$$T_y = \tau_{xy} \ell + \bar{\sigma}_y m \qquad (2.43ข)$$

โดย ℓ และ m แทนทิศทางโคซายน์ (direction cosines) ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น ส่วน T_x และ T_y เป็นแรงรวมที่ผิวในทิศแกน x และ y ตามลำดับ



รูปที่ 2.4 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อย