บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานในงานวิจัย

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ บทนิยาม และทฤษฎีบทที่จำเป็นในงานวิจัยนี้

2.1 ระนาบเกิน (Hyperplane)

นิยาม 2.1

ระนาบเกิน (hyperplane) H ในปริภูมิแบบยุคลิด (Euclidean space) มิติ n (หรือ E^n) คือเซตของจุด $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ที่สอดคล้องสมการ

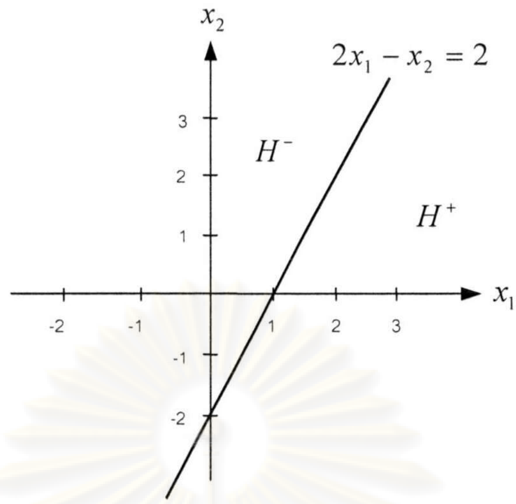
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

เมื่อ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ a_i เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมดไม่ได้ เมื่อ $i = 1, 2, \cdots, n$

จะได้ว่าระนาบเกินใน E^2 (หรือปริภูมิ 2 มิติ) อยู่ในรูปแบบดังนี้ $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงในปริภูมิ 2 มิติ แบ่ง E^2 ออกเป็นสองส่วนคือ $H^- = \{\mathbf{x} \mid a_1x_1 + a_2x_2 \le b\}$ และ $H^+ = \{\mathbf{x} \mid a_1x_1 + a_2x_2 \ge b\}$ โดยเรียก H^+ และ H^- ว่า *กึ่งปริภูมิ* (half space)

ตัวอย่าง 2.1

เส้นตรง $3x_1 + x_2 = 3$ คือระนาบเกินในปริภูมิ 2 มิติ และแบ่งปริภูมิ 2 มิติออกเป็นสองกึ่งปริภูมิ (H^- และ H^+) ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1

□

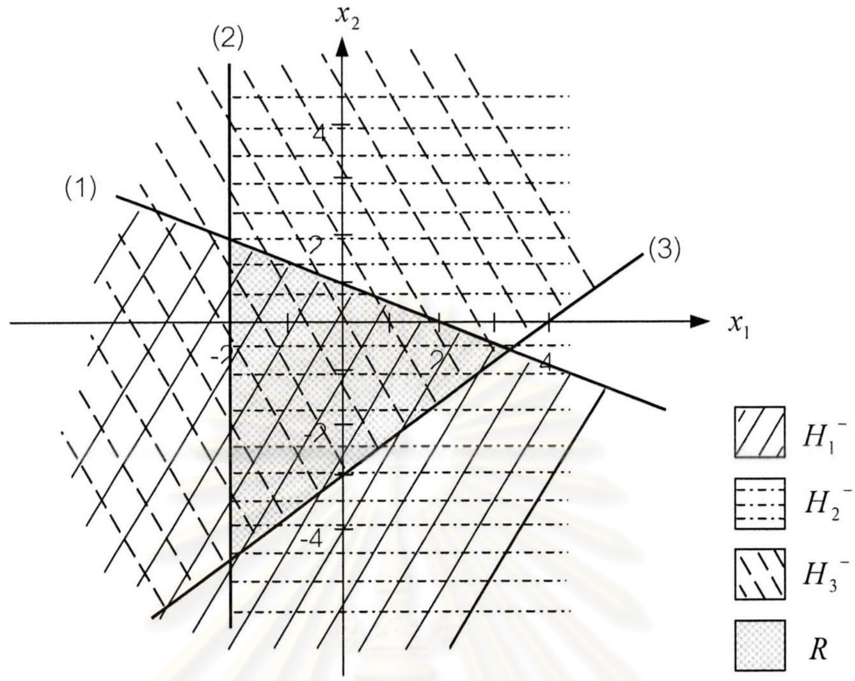
อสมการเชิงเส้นในงานวิจัยนี้ เป็นอสมการเชิงเส้นในสองมิติที่อยู่ในรูปแบบดังนี้ $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ เมื่อ a_1, a_2 และ b เป็นค่าคงที่ใดๆ ถ้า a_1 หรือ a_2 เป็นศูนย์จะต้องเป็นศูนย์ไม่พร้อมกัน แล้วเซตของจุด (x_1, x_2) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการเชิงเส้นดังกล่าวคือกึ่งปริภูมิ (half space) ซึ่งเกิดจากเส้นตรง $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

ตัวอย่าง 2.2

พิจารณากลุ่มของอสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$x_1 + 2x_2 \le 2 \quad \text{.............................} \quad (1)$$
$$-x_1 \le 2 \quad \text{...........................} \quad (2)$$
$$3x_1 - 4x_2 \le 12 \quad \text{...........................} \quad (3)$$

จะได้ว่าบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการที่ (1) คือกึ่งปริภูมิ H_1^- และบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการที่ (2) คือกึ่งปริภูมิ H_2^- และบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการที่ (3) คือกึ่งปริภูมิ H_3^- ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2

จากรูปที่ 2.5 R คือบริเวณที่แรเงา และหมายถึงบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการทั้งสาม โดยเกิดจากส่วนร่วม (intersection) ของ H_1^- H_2^- และ H_3^- □

2.2 ข้อตกลงเกี่ยวกับเมทริกซ์

กำหนดให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ สัญลักษณ์ที่ใช้เขียนระบุหรืออ้างอิงถึงสมาชิกที่อยู่ในแถวเดียวกันของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ $\mathbf{A}_{i*}$ เมื่อ $i = 1,2,\cdots,m$ เช่น $\mathbf{A}_{1*}$ หมายถึงสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่อยู่ในแถวที่ 1 และในทำนองเดียวกันการระบุหรืออ้างอิงถึงสมาชิกในสดมภ์เดียวกันของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ $\mathbf{A}_{*j}$ เมื่อ $j = 1,2,\cdots,n$ เช่น $\mathbf{A}_{*2}$ หมายถึงสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่อยู่ในสดมภ์ที่ 2 ดังนั้นเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ ชุดของสดมภ์ หรือชุดของแถวดังนี้

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{*1} & \mathbf{A}_{*2} & \cdots & \mathbf{A}_{*n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1*} \\ \mathbf{A}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m*} \end{pmatrix} \qquad \text{..................................(2.1)}$$

ตัวอย่าง 2.3

กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{*1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{*2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{1*} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ และ } \mathbf{A}_{4*} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

□

จากปัญหาที่อยู่ในรูปแบบที่ (1.1) เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์และเมทริกซ์ได้ดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ ....(2.2)

เมื่อ $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ คือฟังก์ชันจุดประสงค์

$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์ด้านขวามือ

$\mathbf{A}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวแปรอิสระในเงื่อนไขบังคับซึ่งมีมิติเป็น $m \times 2$ เมื่อ m คือจำนวนเงื่อนไขบังคับทั้งหมด

จากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะสังเกตได้ว่าเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับที่ i ใดๆ คือเวกเตอร์ $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และเราจะเรียก $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับทั้งหมดว่าเป็น*ผลเฉลยที่เป็นไปได้*(feasible solution หรือ feasible point) และเรียกเซตของผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมดว่าเป็น*บริเวณที่เป็นไปได้* (feasible region) และจะเรียก $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ ว่าเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น (2.4) ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{x}^*$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้และมีค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์($z^* = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*$) มากที่สุด

ตัวอย่าง 2.4

พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 2x_1 - 3x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

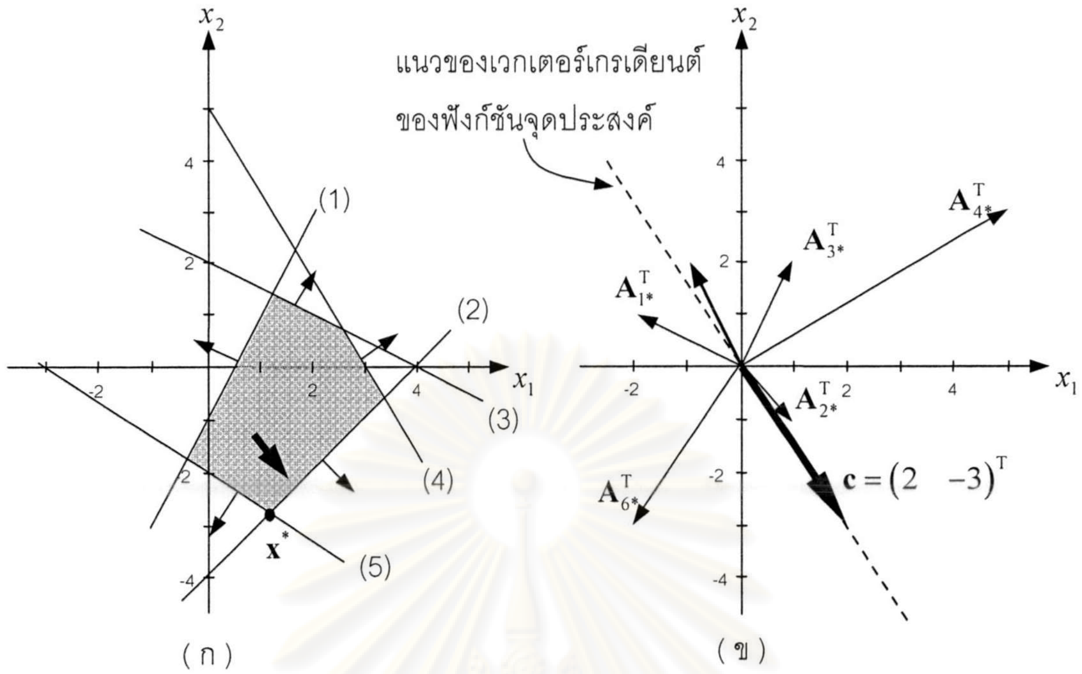
$$\begin{array}{rcrcrl} -2x_1 & + & x_2 & \le & -1 & \text{....................(1)} \\ x_1 & - & x_2 & \le & 4 & \text{....................(2)} \\ x_1 & + & 2x_2 & \le & 4 & \text{....................(3)} \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \le & 15 & \text{....................(4)} \\ -2x_1 & - & 3x_2 & \le & 6 & \text{....................(5)} \end{array}$$

จะได้ว่า

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ และ } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

และเงื่อนไขบังคับ (1) ถึง (5) มีเวกเตอร์เกรเดียนต์คือ $\mathbf{A}_{1*}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{2*}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{3*}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{4*}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ และ $\mathbf{A}_{5*}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ตามลำดับ เมื่อนำเงื่อนไขบังคับไปวาดกราฟของบริเวณที่เป็นไปได้พร้อมด้วยเวกเตอร์แสดงทิศทางของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเวกเตอร์แสดงทิศทางของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับจะได้ดังรูป 2.3 (ก) ในรูปที่ 2.3 (ข) แสดงให้เห็นถึงเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ซึ่งจะทำให้เราพิจารณาเกรเดียนต์ง่ายขึ้น

เรียกจุด $\mathbf{x}$ ใดๆ ที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ว่าเป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ และโดยเทคนิคเชิงกราฟได้ว่า $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ซึ่งให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์เท่ากับ $z^* = \frac{54}{5}$ □



รูปที่ 2.3

2.3 บทนิยาม และทฤษฎีบทที่สำคัญ

นิยาม 2.2: สำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติดังรูปแบบ (1.1)

$$G_{\mathrm{NN}} = \left\{ j \in \mathbb{N} \,\middle|\, 1 \le j \le m \ \text{ and } \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}} \ge 0 \right\}$$

และ $G_{\mathrm{N}} = \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, 1 \le i \le m \ \text{ and } \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} < 0 \right\}$ ....(2.3)

เมื่อ $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับ i และ j ตามลำดับ และ $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -c_2 & c_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

สำหรับแต่ละเงื่อนไขบังคับของปัญหาจะถูกจำแนกว่าอยู่ใน G_{NN} หรือ G_{N} อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นจะได้ว่า $G_{\mathrm{NN}} \cup G_{\mathrm{N}} \ne \varnothing$ ซึ่งแบ่งเป็นสามกรณีคือ

1. $G_{\mathrm{NN}} \ne \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} \ne \varnothing$
2. $G_{\mathrm{NN}} = \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} \ne \varnothing$
3. $G_{\mathrm{NN}} \ne \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} = \varnothing$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5 $G_{\mathrm{NN}} \neq \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} \neq \varnothing$

จากปัญหาในสองมิติที่กำหนดดังตัวอย่าง 1.3 เขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์และเวกเตอร์ดังรูปแบบที่ (2.2) ได้ดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$

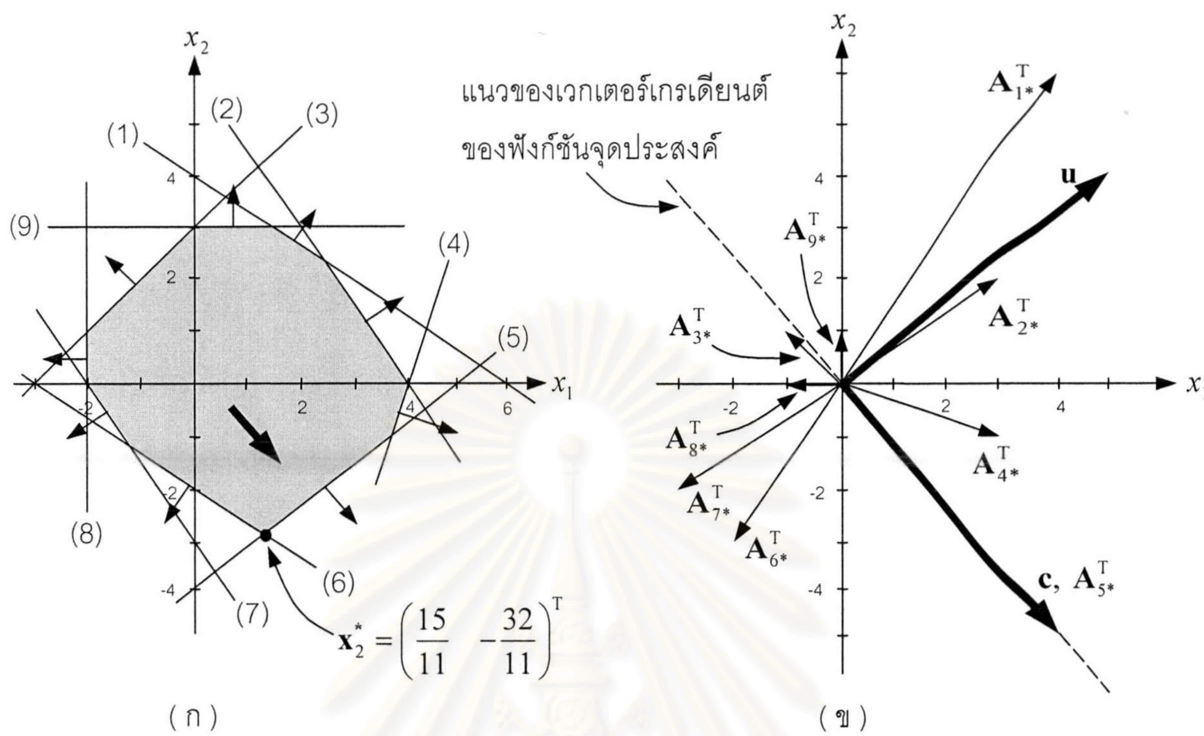
เมื่อ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & -5 \\ -2 & -3 \\ -3 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 3 \\ 12 \\ 20 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ และ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

จากฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ทำให้ได้ว่า $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ และจากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ได้เวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับดังนี้

$\mathbf{A}_{1*}^{\mathrm{T}} = (4 \quad 6)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{2*}^{\mathrm{T}} = (3 \quad 2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{3*}^{\mathrm{T}} = (-1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{4*}^{\mathrm{T}} = (3 \quad -1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{5*}^{\mathrm{T}} = (4 \quad -5)^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{A}_{6*}^{\mathrm{T}} = (-2 \quad -3)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{7*}^{\mathrm{T}} = (-3 \quad -2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{8*}^{\mathrm{T}} = (-1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{9*}^{\mathrm{T}} = (0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$

จากบทนิยามของ G_{NN} และ G_{N} ได้ว่า $G_{\mathrm{NN}} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9\}$ และ $G_{\mathrm{N}} = \{3,\ 6,\ 7,\ 8\}$ ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 $G_{\mathrm{NN}} \neq \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} \neq \varnothing$

ตัวอย่าง 2.6 $G_{\mathrm{NN}} = \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} \neq \varnothing$

พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

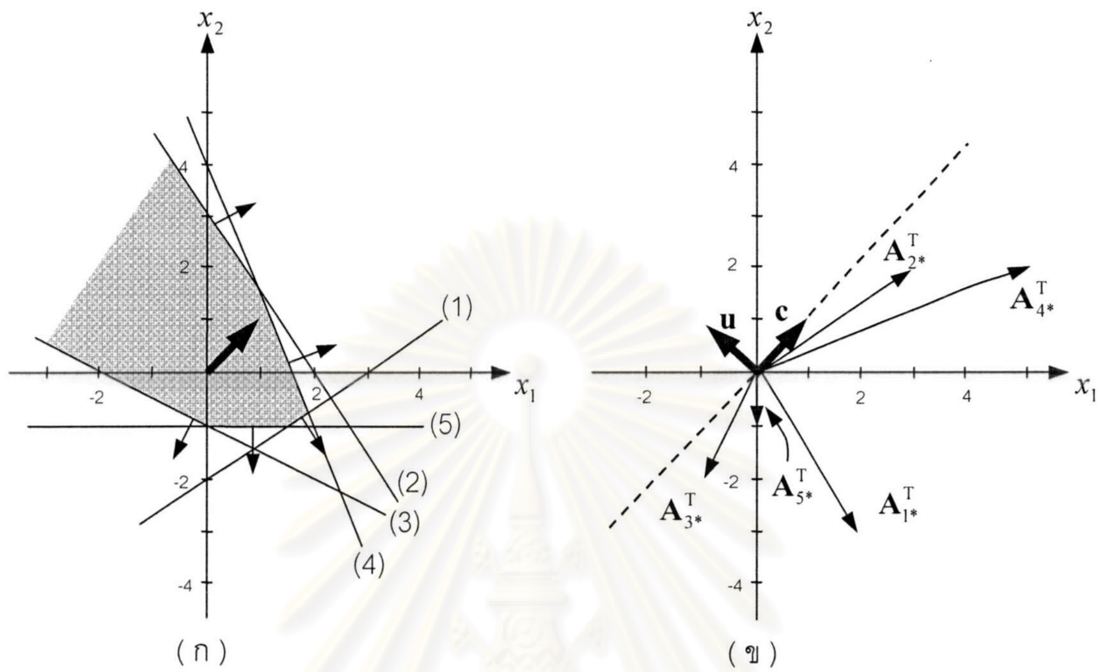
ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$

เมื่อ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ และ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

จากฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ทำให้ได้ว่า $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ และจากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ได้เวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับดังนี้

$\mathbf{A}_{1*}^{\mathrm{T}} = (2 \quad -3)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{2*}^{\mathrm{T}} = (3 \quad 2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{3*}^{\mathrm{T}} = (-1 \quad -2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{4*}^{\mathrm{T}} = (5 \quad 2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{5*}^{\mathrm{T}} = (0 \quad -1)^{\mathrm{T}}$

จากบทนิยามของ G_{NN} และ G_{N} ได้ว่า $G_{\mathrm{NN}} = \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ดังรูปที่ 2.5 โดยเทคนิคเชิงกราฟได้ว่าปัญหานี้เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต □



รูปที่ 2.5 $G_{\mathrm{N}} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ และ $G_{\mathrm{NN}} = \varnothing$

ตัวอย่าง 2.7 $G_{\mathrm{NN}} \neq \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} = \varnothing$

พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

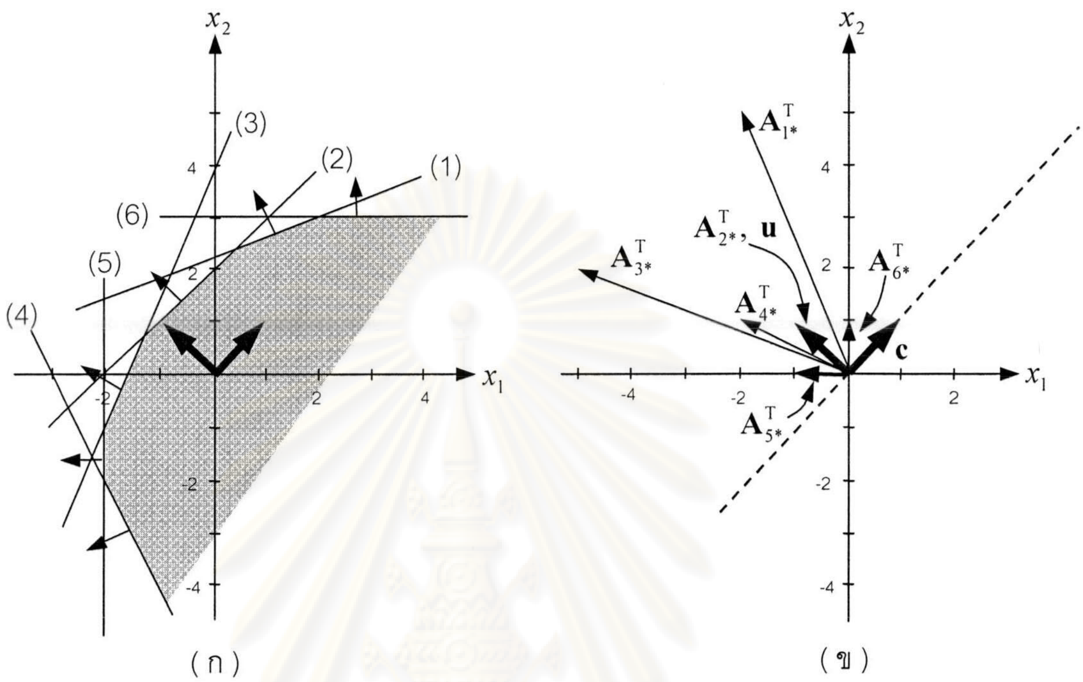
ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$

เมื่อ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \\ -5 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ และ $\mathbf{c} = (1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$

จากฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathbf{c} = (1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ ทำให้ได้ว่า $\mathbf{u} = (-1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ และจากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ได้เวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับดังนี้

$\mathbf{A}_{1*}^{\mathrm{T}} = (-2 \quad 5)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{2*}^{\mathrm{T}} = (-1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{3*}^{\mathrm{T}} = (-5 \quad 2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{4*}^{\mathrm{T}} = (-2 \quad -1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{5*}^{\mathrm{T}} = (-1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_{6*}^{\mathrm{T}} = (0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ □

จากบทนิยามของ G_{NN} และ G_{N} ได้ว่า $G_{\mathrm{NN}} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ และ $G_{\mathrm{N}} = \varnothing$ ดังรูปที่ 2.6 โดยเทคนิคเชิงกราฟได้ว่าปัญหานี้เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต



รูปที่ 2.6 $G_{\mathrm{NN}} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ และ $G_{\mathrm{N}} = \varnothing$

ทฤษฎีบท 2.1

กำหนดให้ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{b}$ คือเวกเตอร์ด้านขวามือ และ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้เสมอดังรูปแบบ (1.1) G_{N} และ G_{NN} คือเซตที่กำหนดในบทนิยาม 2.2

ถ้ามี $k \in G_{\mathrm{N}}$ และ $l \in G_{\mathrm{NN}}$ ที่ $\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}} > 0$ และ $\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}} > 0$ แล้วปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเสมอ

<u>**พิสูจน์**</u>

การพิสูจน์แบ่งเป็นสองกรณีคือกรณีที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้นไม่มี redundant constraint และกรณีที่มี redundant constraint

1. กรณีที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้นไม่มี redundant constraint

เนื่องจากปัญหากำหนดการเชิงเส้นไม่มี redundant constraint ดังนั้นทุกเงื่อนไขบังคับจึงเป็นขอบเขตของบริเวณที่เป็นไปได้

เพื่อความสะดวกในการพิจารณา ให้เวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathbf{c}$ และเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับทุกเวกเตอร์มีขนาดหนึ่งหน่วย

สร้างเซต K และ L ดังนี้

$$K = \left\{ k \in G_{\mathrm{NN}} \,\middle|\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}} > 0 \right\}, \quad L = \left\{ l \in G_{\mathrm{N}} \,\middle|\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}} > 0 \right\} \qquad \text{..............(2.4)}$$

ให้ i และ j คือเงื่อนไขที่ทำให้ θ_i และ θ_j มีสมบัติดังนี้

$$\begin{aligned} \theta_i &= \min_{k \in K} \left\{ arc\cos\left(\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{c}\| \|\mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}}\|} \right) \right\} \\ \theta_j &= \min_{l \in L} \left\{ arc\cos\left(\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{c}\| \|\mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}}\|} \right) \right\} \end{aligned} \qquad \text{............(2.5)}$$

เนื่องจาก $i \in K$ และ $j \in L$ ได้ว่า $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ ตัดกับ $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} = b_j$ เสมอ

ให้ $\mathbf{x}^*$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ กับเส้นตรง $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} = b_j$

จะแสดงว่า $\mathbf{x}^*$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้

สมมุติ $\mathbf{x}^*$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังนั้นมีเงื่อนไข r ที่ทำให้ $\mathbf{A}_{r*}\mathbf{x}^* > b_r$

พิจารณาเวกเตอร์เกรเดียนต์ $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ พบว่าแบ่งได้ 5 กรณีดังนี้

1. $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ ขนานกับ $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และมีทิศทางเดียวกัน แล้วแล้วจะเกิดข้อขัดแย้งขึ้นเนื่องจากว่ามีเงื่อนไขที่เป็น redundant contstraint เกิดขึ้น

2. $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ ขนานกับ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ และมีทิศทางเดียวกัน แล้วแล้วจะเกิดข้อขัดแย้งขึ้นเนื่องจากว่ามีเงื่อนไขที่เป็น redundant contstraint เกิดขึ้น

3. $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ ขนานกับ $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และมีทิศทางตรงกันข้าม แล้วจะเกิดข้อขัดแย้งขึ้นเนื่องจากบริเวณที่เป็นไปได้เป็นเซตว่าง

4. $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ ขนานกับ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ และมีทิศทางตรงกันข้าม แล้วจะเกิดข้อขัดแย้งขึ้นเนื่องจากบริเวณที่เป็นไปได้เป็นเซตว่าง

5. $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ ไม่ขนาน $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$

จะเห็นว่ากรณีที่ 1 ถึง 4 เกิดข้อขัดแย้งขึ้นดังนั้น $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ เป็นได้กรณีเดียวคือไม่ขนาน $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$

ดังนั้นได้ว่ามี $\mathbf{x}^1$ และ $\mathbf{x}^2$ ซึ่ง $\mathbf{x}^1$ เป็นจุดตัดของ $\mathbf{A}_{r*}\mathbf{x} = b_r$ กับ $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ และ $\mathbf{x}^2$ เป็นจุดตัดของ $\mathbf{A}_{r*}\mathbf{x} = b_r$ กับ $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} = b_j$

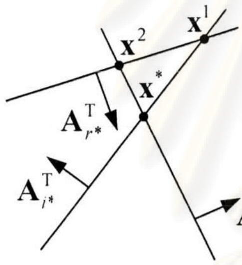
พิจารณา $\mathbf{x}^1$ และ $\mathbf{x}^2$

กรณี $\mathbf{x}^1$ และ $\mathbf{x}^2$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ได้ว่าบริเวณที่เป็นส่วนร่วมของทั้งสามเงื่อนไขบังคับ($\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} \le b_i$, $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} \le b_j$, $\mathbf{A}_{r*}\mathbf{x} \le b_r$) เป็นเซตว่าง ดังนั้นขัดแย้งกับข้อกำหนดของปัญหาที่ต้องมีบริเวณที่เป็นไปได้เสมอ

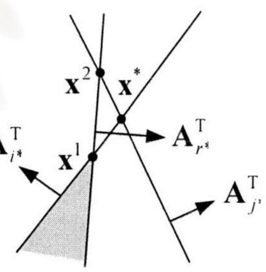
กรณี $\mathbf{x}^1$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ แต่ $\mathbf{x}^2$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ทำให้ได้ว่าเส้นตรง $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ ไม่เป็นขอบเขตของบริเวณที่เป็นไปได้ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่าทุกเงื่อนไขบังคับต้องเป็นขอบเขตของบริเวณที่เป็นไปได้

กรณี $\mathbf{x}^2$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ แต่ $\mathbf{x}^1$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ทำให้ได้ว่าเส้นตรง $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} = b_j$ ไม่เป็นขอบเขตของบริเวณที่เป็นไปได้ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่าทุกเงื่อนไขบังคับต้องเป็นขอบของเขตบริเวณที่เป็นไปได้

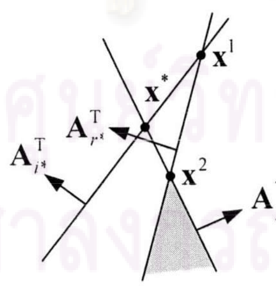
เพราะฉะนั้น $\mathbf{x}^1$ และ $\mathbf{x}^2$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้



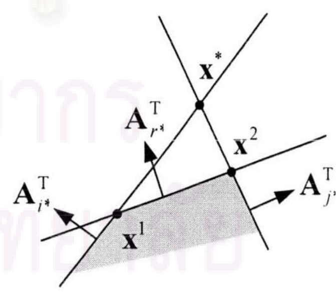
(ก) $\mathbf{x}^1$ และ $\mathbf{x}^2$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้



(ข) $\mathbf{x}^1$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ แต่ $\mathbf{x}^2$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้



(ค) $\mathbf{x}^2$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ แต่ $\mathbf{x}^1$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไป



(ง) $\mathbf{x}^1$ และ $\mathbf{x}^2$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้

ดังนั้นเส้นตรง $\mathbf{A}_{r*}\mathbf{x} = b_r$ ตัดกับ $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ และ $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} = b_j$ โดยที่จุดตัดทั้งสองสอดคล้องกับทั้งสามเงื่อนไขบังคับ($\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} \le b_i$, $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} \le b_j$, $\mathbf{A}_{r*}\mathbf{x} \le b_r$) และทำให้ $\mathbf{x}^*$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้จะเกิดได้กรณีเดียวคือ $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ อยู่ระหว่าง $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$

เนื่องจากว่า $\mathbf{c}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ระหว่าง $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ ดังนั้น ได้ว่า $r \in K \cup L$ และ $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ จะอยู่ในลักษณะอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. $r \in K$ และ $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ ทำมุมกับ $\mathbf{c}$ น้อยกว่า $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ ทำกับ $\mathbf{c}$

หรือ 2. $r \in L$ และ $\mathbf{A}_{r*}^{\mathrm{T}}$ ทำมุมกับ $\mathbf{c}$ น้อยกว่า $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ ทำกับ $\mathbf{c}$

ซึ่งกรณีแรกขัดแย้งกับการที่ $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ ทำมุมน้อยที่สุดกับ $\mathbf{c}$ และกรณีที่สองขัดแย้งกับการที่ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ ทำมุมน้อยที่สุดกับ $\mathbf{c}$

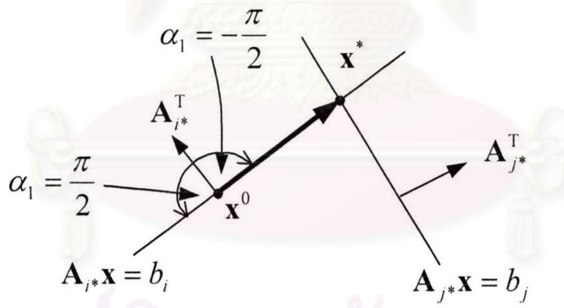
ดังนั้นข้อสมมุติที่ว่า $\mathbf{x}^*$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้จึงเป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $\mathbf{x}^*$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathbf{x}^*$ เป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด กล่าวคือจะแสดงว่า $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^0$ สำหรับ $\mathbf{x}^0$ ที่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ใดๆ

พิจารณา $\dfrac{\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}\right\|}$ โดยกำหนดเป็น $\mathbf{p}$

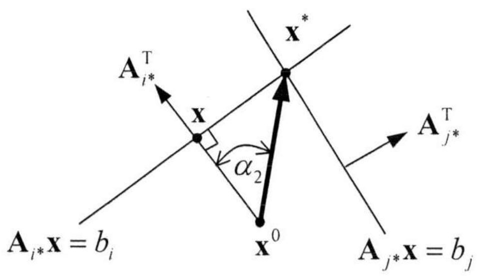
กรณี $\mathbf{x}^0$ อยู่บนเส้นตรง $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$

จะได้ว่า $\dfrac{\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}\right\|} = \mathbf{R}_{\alpha_1}\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ เมื่อ $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$ หรือ $-\dfrac{\pi}{2}$ และ $\mathbf{R}_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$



กรณี $\mathbf{x}^0$ ไม่อยู่บนเส้นตรง $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$

ให้ $\mathbf{x}^1$ อยู่บนเส้นตรง $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ ซึ่งส่วนของเส้นตรง $\overline{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^1}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ ได้ว่าสามเหลี่ยม $\mathbf{x}^0\mathbf{x}^1\mathbf{x}^*$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $\mathbf{x}^0\widehat{\mathbf{x}^1}\mathbf{x}^* = \dfrac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\mathbf{x}^*\widehat{\mathbf{x}^0}\mathbf{x}^1 \leq \dfrac{\pi}{2}$ และได้ว่า $\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*} \geq 0$



เพราะฉะนั้นได้ว่า $\frac{\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}\right\|} = \mathbf{R}_{\alpha_2}\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$ และ $\mathbf{R}_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$

จากทั้งสองกรณีคือกรณีที่ $\mathbf{x}^0$ อยู่และไม่อยู่บนเส้นตรง $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i$ ทำให้เขียนได้ว่า

$$\mathbf{p} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}\right\|} = \mathbf{R}_{\alpha}\mathbf{A}_{i*} \quad \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \text{ และ } \mathbf{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ได้ว่า $\mathbf{R}_{\alpha}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{R}_{-\alpha}\mathbf{p} = \mathbf{R}_{\alpha}^{-1}\mathbf{R}_{\alpha}\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ ....(2.6)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า กรณี $\mathbf{x}^0$ อยู่บนเส้นตรง $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} = b_j$ หรือไม่อยู่บนเส้นตรง $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} = b_j$ ก็จะได้ว่า

$$\mathbf{p} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}\right\|} = \mathbf{R}_{\beta}\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}} \quad \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2} \text{ และ } \mathbf{R}_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

ได้ว่า $\mathbf{R}_{\beta}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{R}_{-\beta}\mathbf{p} = \mathbf{R}_{\beta}^{-1}\mathbf{R}_{\beta}\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ ....(2.7)

จาก $i \in K$ และ $j \in L$ ได้ว่า

$$\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{\phi}\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}} \quad \text{เมื่อ } 0 < \phi < \pi \text{ และ } \mathbf{R}_{\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \text{..........(2.8)}$$

แทน $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{-\alpha}\mathbf{p}$ และ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{-\beta}\mathbf{p}$ จาก (2.6) และ (2.7) ตามลำดับ ลงใน (2.8) ได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{-\alpha}\mathbf{p} &= \mathbf{R}_{\phi}\mathbf{R}_{-\beta}\mathbf{p} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{R}_{\alpha}\mathbf{R}_{\phi}\mathbf{R}_{-\beta}\mathbf{p} \\ &= \mathbf{R}_{\alpha+\phi-\beta}\mathbf{p} \end{aligned}$$

ดังนั้นได้ว่า

$$\begin{aligned} \alpha + \phi - \beta &= 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \phi &= \beta + 2n\pi \end{aligned} \qquad \text{..............................(2.9)}$$

เนื่องจากว่า $0 < \phi < \pi$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

ได้ว่า $-\frac{\pi}{2} < \beta + 2n\pi < \pi + \frac{\pi}{2}$ ....(2.10)

ถ้า $n > 0$ ได้ว่า $\beta + 2n\pi \ge 2n\pi - \frac{\pi}{2} \ge \pi + \frac{\pi}{2}$ ซึ่งขัดแย้งกับอสมการด้านขวามือของ (2.10)

ถ้า $n < 0$ ได้ว่า $\beta + 2n\pi \le -\frac{\pi}{2}$ ซึ่งขัดแย้งกับอสมการด้านซ้ายมือของ (2.10)

ดังนั้น $n = 0$

แทน $n=0$ ในสมการ (2.9) ได้ว่า

$$\alpha+\phi=\beta \qquad \text{.................................(2.11)}$$

จากเวกเตอร์ $\mathbf{c}$ และ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ เขียนได้ว่า

$$\mathbf{c}=\mathbf{R}_{\theta_c}\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}} \quad \text{เมื่อ} \quad 0<\theta_c<\frac{\pi}{2}<\phi=\beta-\alpha \qquad \text{.................................(2.12)}$$

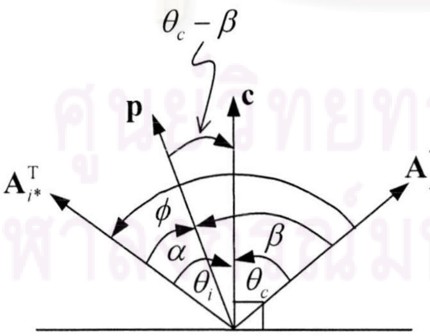
แทน $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}=\mathbf{R}_{-\beta}\mathbf{p}$ จาก (2.7) ในสมการ (2.12) ได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \mathbf{R}_{\theta_c}\mathbf{R}_{-\beta}\mathbf{p}\\ &= \mathbf{R}_{\theta_c-\beta}\mathbf{p}\end{aligned}$$

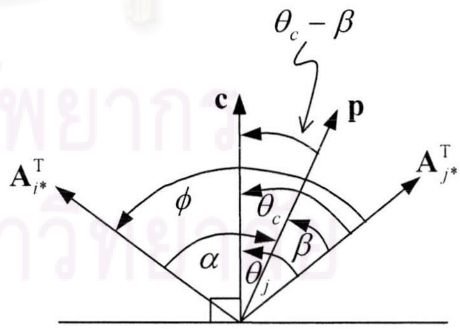
จะได้ว่า $\theta_c-\beta$ คือมุมระหว่าง $\mathbf{c}$ กับ $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2}\le-|\beta|\le\theta_c-\beta=\theta_c-(\phi+\alpha)&\\ &=(\theta_c-\phi)-\alpha\\ &<0-\alpha\\ &<-\alpha\\ &\le|-\alpha|\\ &\le\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่ามุมระหว่าง $\mathbf{c}$ กับ $\mathbf{p}$ เป็นมุมแหลม



(ก) $\theta_c-\beta<\theta_i$ เมื่อ θ_i คือมุมระหว่าง $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ กับ $\mathbf{c}$



(ข) $\theta_c-\beta<\theta_j$ เมื่อ θ_j คือมุมระหว่าง $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ กับ $\mathbf{c}$

ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 &\le \mathbf{c}\cdot\mathbf{p} \\
&\le \mathbf{c}\cdot\left(\frac{\overline{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}}{\left\|\overline{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*}\right\|}\right) \\
&\le \mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{x}^0\mathbf{x}^*} \\
&\le \mathbf{c}\cdot\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^0\right) \\
&\le \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}^*-\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}^0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}^0 \le \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}^*$

จะได้ว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุด $\mathbf{x}^*$ มากกว่าที่จุด $\mathbf{x}^0$ เสมอ สรุปได้ว่า $\mathbf{x}^*$ เป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด

2. กรณีที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้นมี redundant constraint

สร้างเซต $K=\left\{k\in G_{\mathrm{N}}\,\middle|\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}}>0\right.$ และเงื่อนไขบังคับที่ k ไม่ใช่ redundant constraint $\left.\right\}$

และเซต $L=\left\{l\in G_{\mathrm{NN}}\,\middle|\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}}>0\right.$ และเงื่อนไขบังคับที่ l ไม่ใช่ redundant constraint $\left.\right\}$

เนื่องจากข้อกำหนดที่ว่ามี $k\in G_{\mathrm{N}}$ และ $l\in G_{\mathrm{NN}}$ ซึ่ง $\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}}>0$ และ $\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}}>0$ และปัญหากำหนดการเชิงเส้นเป็นปัญหาที่มีบริเวณที่เป็นไปได้เสมอ ทำให้ได้ว่า $K\neq\varnothing$ และ $L\neq\varnothing$ ดังนั้นจะได้ว่ามี i และ j ที่สอดคล้องตามสมการที่ (2.5) เสมอ

กระทำในลักษณะเดียวกันกับกรณีที่มี redundant constraint จะได้ว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุด $\mathbf{x}^*$ มากกว่าที่จุด $\mathbf{x}^0$ เสมอเมื่อ $\mathbf{x}^0$ คือผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\mathbf{x}^*$ เป็นจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด $\square$

บทแทรก 2.1

กำหนดให้ $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times 2}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{b}$ คือเวกเตอร์ด้านขวามือ และ $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้เสมอดังรูปแบบ (1.1) และให้ G_{N} และ G_{NN} คือเซตที่กำหนดในบทนิยาม 2.2

ถ้าไม่มี $k\in G_{\mathrm{N}}$ และ $l\in G_{\mathrm{NN}}$ ซึ่ง $\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}}>0$ และ $\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}}>0$ แล้วปัญหากำหนดการเชิงเส้นเป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขตเสมอ

พิสูจน์

ให้ $\mathbf{x}^0$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ จะแสดงว่าสำหรับทุก $\alpha > 0$ แล้ว $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \alpha\mathbf{c}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้

สมมุติว่า $\mathbf{x}$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังนั้นจะมีบางเงื่อนไข $i \in G_{\mathrm{N}} \cup G_{\mathrm{NN}}$ ที่ทำให้ $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} > b_i$ เมื่อ $\mathbf{A}_{i*} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{pmatrix}$

พิจารณา $(\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_1^0)a_{i1} + (x_2 - x_2^0)a_{i2} \\
&= \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2\right) - \left(a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0\right) \\
&= \mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} - \mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathbf{x}^0$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ดังนั้น $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 \le b_i$ และจากข้อสมมุติว่า $\mathbf{x}$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ดังนั้น $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} > b_i$ เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} - \mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 > 0$

และเนื่องจาก $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \alpha\mathbf{c}$ จะได้ว่า $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = \alpha\mathbf{c}$ หรือ $\overrightarrow{\mathbf{x}^0\mathbf{x}} = \alpha\mathbf{c}$ ทำให้ได้ว่า $\alpha\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} > 0$ หรือ $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} > 0$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับข้อกำหนดที่ว่าไม่มีเงื่อนไขบังคับ $k \in G_{\mathrm{N}}$ และ $l \in G_{\mathrm{NN}}$ ซึ่ง $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}} > 0$ และ $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}} > 0$ สรุปได้ว่าที่สมมุติไว้ว่า $\mathbf{x}$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้นั้นเป็นเท็จ ดังนั้น $\mathbf{x}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้เสมอ

ต่อไปจะแสดงว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุด $\mathbf{x}$ มีค่ามากกว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุด $\mathbf{x}^0$ พิจารณา $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ จะได้ดังนี้ $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^0 + \alpha\mathbf{c}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^0 + \alpha\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^0 + \alpha\|\mathbf{c}\|^2 > \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^0$ ดังนั้นจะได้ว่าทุก $\mathbf{x}$ ที่ $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \alpha\mathbf{c}$ เมื่อ $\alpha > 0$ แล้ว $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^0$ ทำให้ได้ว่าปัญหากำหนดการเชิงเส้นดังกล่าวเป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปที่จะกล่าวถึงเป็นทฤษฎีบทที่ใช้ในการลดจำนวนเงื่อนไขบังคับของปัญหากำหนดการเชิงเส้น โดยใช้หลักการที่ว่าถ้าเงื่อนไขบังคับสองเงื่อนไขมีเวกเตอร์เกรเดียนต์ขนานกันและมีทิศทางเดียวกันแล้วจะกำจัดเงื่อนไขบังคับที่ก่อให้เกิดกึ่งปริภูมิ H^- ที่เป็น superset ของอีกกึ่งปริภูมิหนึ่งที่เกิดจากเงื่อนไขที่เหลือ

ทฤษฎีบท 2.2

กำหนดให้ $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} \le b_i$ และ $\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} \le b_j$ คือเงื่อนไขบังคับที่ i และ j ตามลำดับ ซึ่ง $\frac{\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}}{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|} \cdot \frac{\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}}{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|} = 1$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

1. ถ้า $b_i > 0,\ b_j > 0$ และ $\frac{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|}{b_i} \ge \frac{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{b_j}$ แล้ว $H_i^- \subseteq H_j^-$
2. ถ้า $b_i < 0,\ b_j < 0$ และ $\frac{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|}{|b_i|} \le \frac{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{|b_j|}$ แล้ว $H_i^- \subseteq H_j^-$
3. ถ้า $b_i < 0$ และ $b_j > 0$ แล้ว $H_i^- \subset H_j^-$

เมื่อ $H_i^- = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \right\}$ และ

$H_j^- = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \le b_j \right\}$

<u>**พิสูจน์**</u>

จากข้อกำหนดที่ว่า $\frac{\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}}{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|} \cdot \frac{\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}}{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|} = 1$ จะได้ว่า $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ ขนานกับ $\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ และมีทิศทางเดียวกัน ดังนั้น

จะได้ว่า $\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}} = \alpha \mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ สำหรับบาง $\alpha > 0$

1. ให้ $b_i > 0,\ \ b_j > 0$ และ $\frac{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|}{b_i} \ge \frac{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{b_j}$

$$\frac{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|}{b_i} = \frac{\left\|\alpha \mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{b_i} = \frac{\alpha}{b_i}\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\| \ge \frac{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{b_j}$$

$$\frac{b_i}{\alpha} \le b_j$$

จะแสดงว่า ถ้า $\mathbf{x}^0 \in H_i^-$ แล้ว $\mathbf{x}^0 \in H_j^-$

ให้ $\mathbf{x}^0 \in H_i^-$ ได้ว่า $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 \le b_i$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 &\le b_i \\ \alpha \mathbf{A}_{j*}\mathbf{x}^0 &\le b_i \\ \mathbf{A}_{j*}\mathbf{x}^0 &\le \frac{\mathrm{b_i}}{\alpha} \\ &\le b_j \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathbf{x}^0 \in H_j^-$

และทำให้ได้ว่า $H_i^- \subseteq H_j^-$

2. ให้ $b_i < 0,\ b_j < 0$ และ $\dfrac{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|}{|b_i|} \le \dfrac{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{|b_j|}$

$$\frac{\left\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\right\|}{|b_i|} = \frac{\left\|\alpha\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{|b_i|} = \frac{\alpha}{|b_i|}\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\| \le \frac{\left\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\right\|}{|b_j|}$$

$$|b_j| \le \frac{|b_i|}{\alpha}$$

$$-b_j \le \frac{-b_i}{\alpha}$$

$$-b_j \le \frac{-b_i}{\alpha}$$

$$\frac{b_i}{\alpha} \le b_j$$

จะแสดงว่า ถ้า $\mathbf{x}^0 \in H_i^-$ แล้ว $\mathbf{x}^0 \in H_j^-$

ให้ $\mathbf{x}^0 \in H_i^-$ ได้ว่า $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 \le b_i$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 &\le b_i \\ \alpha\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x}^0 &\le b_i \\ \mathbf{A}_{j*}\mathbf{x}^0 &\le \frac{b_i}{\alpha} \\ &\le b_j \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathbf{x}^0 \in H_j^-$

และทำให้ได้ว่า $H_i^- \subseteq H_j^-$

3. ให้ $b_i < 0$ และ $b_j > 0$

จะแสดงว่า ถ้า $\mathbf{x}^0 \in H_i^-$ แล้ว $\mathbf{x}^0 \in H_j^-$

ให้ $\mathbf{x}^0 \in H_i^-$ ได้ว่า $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 \le b_i$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}^0 &\le b_i \\ \alpha\mathbf{A}_{j*}\mathbf{x}^0 &\le b_i \\ \mathbf{A}_{j*}\mathbf{x}^0 &\le \frac{b_i}{\alpha} < b_j \qquad ; \ \frac{b_i}{\alpha} < 0 < b_j \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\mathbf{x}^0 \in H_j^-$

และทำให้ได้ว่า $H_i^- \subset H_j^-$

$\square$

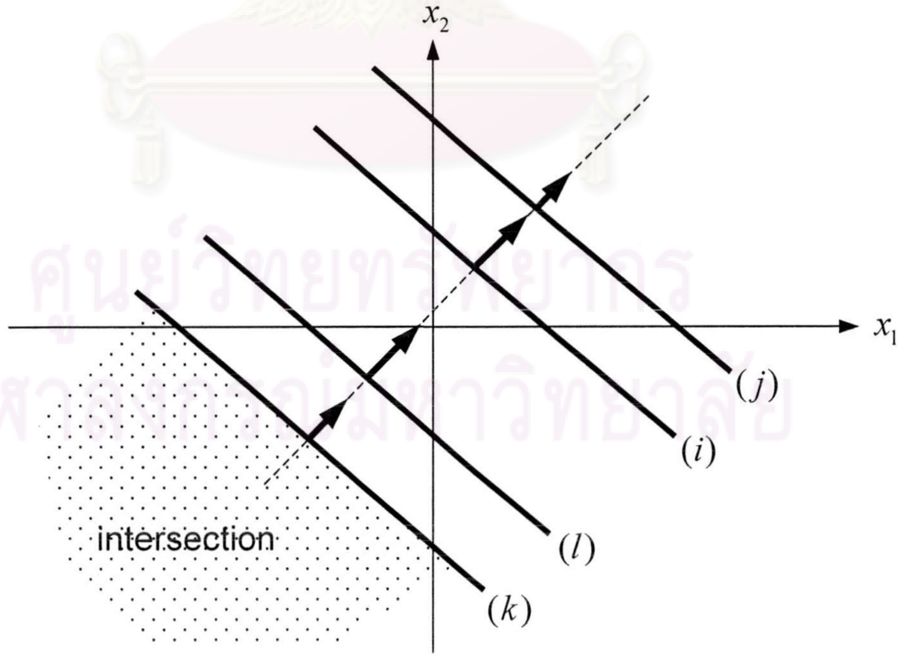
ตัวอย่าง 2.8

พิจารณาเงื่อนไขบังคับดังต่อไปนี้

$$x_1 + x_2 \le 1 \quad \text{......................}(i)$$
$$x_1 + x_2 \le 2 \quad \text{......................}(j)$$
$$x_1 + x_2 \le -2 \quad \text{......................}(k)$$
$$x_1 + x_2 \le -1 \quad \text{......................}(l)$$

จะได้ว่าทุกเงื่อนไขมีเวกเตอร์เกรเดียนต์คือ $(1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ เหมือนกัน

พิจารณาเปรียบเทียบเงื่อนไข (i) และ (j) จะเห็นว่ามี $b_i = 1 > 0$ และ $b_j = 2 > 0$ และ $\dfrac{\|\mathbf{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\|}{b_i} = \sqrt{2} \ge \dfrac{\|\mathbf{A}_{j*}^{\mathrm{T}}\|}{b_j} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 2.2 กรณีที่ 1 ดังนั้นจะได้ว่า $H_i^- \subseteq H_j^-$ และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบเงื่อนไข (k) และ (l) จะเห็นว่ามี $b_k = -2 < 0$ และ $b_l = -1 < 0$ และ $\dfrac{\|\mathbf{A}_{k*}^{\mathrm{T}}\|}{|b_k|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \dfrac{\|\mathbf{A}_{l*}^{\mathrm{T}}\|}{|b_l|} = \sqrt{2}$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 2.2 กรณีที่ 2 ดังนั้นจะได้ว่า $H_k^- \subseteq H_l^-$ สุดท้ายพิจารณาเปรียบเทียบเงื่อนไข (i) และ (k) เนื่องจากว่า $b_i > 0$ แต่ $b_k < 0$ โดยทฤษฎีบท 2.2 กรณีที่ 3 จะได้ว่า $H_k^- \subseteq H_i^-$ และเมื่อพิจารณากราฟของทั้งสี่เงื่อนไขจะได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7

□

การมีผลเฉลยเสมอสำหรับระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร 2 สมการที่ไม่ขนานกัน

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad ....(i)$$
$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j \quad ....(j)$$

ที่ซึ่ง $\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \end{pmatrix} \neq \pm 1$ ดังนั้นจะได้ว่าเส้นตรง (i) และ (j) ไม่ขนานกัน

เมื่อพิจารณาความชันของเส้นตรง (i) และ (j) ซึ่งเท่ากับ $-\dfrac{a_{i1}}{a_{i2}}$ และ $-\dfrac{a_{j1}}{a_{j2}}$ ตามลำดับทำให้ได้ว่า

$$-\frac{a_{i1}}{a_{i2}} \neq -\frac{a_{j1}}{a_{j2}}$$
$$a_{i1}a_{j2} \neq a_{i2}a_{j1}$$
$$a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1} \neq 0 \quad ....(2.13)$$

จาก (2.13) ทำให้สามารถใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ (Cramer's rule) หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวได้โดยที่ผลเฉลยคือ $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ เมื่อ x_1^* และ x_2^* กำหนดดังนี้

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} b_i & a_{i2} \\ b_j & a_{j2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix}} = \frac{(b_i a_{j2} - b_j a_{i2})}{(a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1})} \quad \text{และ} \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{i1} & b_i \\ a_{j1} & b_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix}} = \frac{(b_j a_{i1} - b_i a_{j1})}{(a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1})}$$

ดังนั้นจะได้ว่าระบบสมการเชิงเส้นมีผลเฉลยเสมอ