

## บทที่ 4

### การไหลแบบผิวอิสระ (Free Surface Flow)

ในบทนี้เป็นการศึกษาการไหลของของไหลในตายและนอกตายที่เป็นปัญหาสติก-สลลิป (stick-slip) และปัญหาการบวมตัวที่ปลายตาย (die-swell) ซึ่งเป็นปัญหาที่ได้ศึกษากันมานาน

ในปี 1970 Richardson [25] ได้ศึกษาปัญหาสติก-สลลิป ในของไหลนิวโตเนียน (Newtonian) ที่มีแรงตึงผิว (surface tension) มาก ภายใต้การไหลแบบช้าๆ (creeping flow) โดยไม่คิดผลกระทบจากแรงโน้มถ่วง (gravitational effect) พบว่าบริเวณระหว่างสติก (stick) และสลลิป (slip) ที่ปลายตาย ได้เกิดจุดเอกฐาน (singular point) เนื่องจากบริเวณรอบๆ จุดนี้มีแรงที่เข้ากระทำสูง และยังมีความเร็วสูงกว่าปกติ ต่อมา Okabe [26] ได้เสนอทฤษฎีสำหรับการหาความเค้นและความเครียดใกล้ๆ บริเวณจุดเอกฐานของ Richardson

หลังจากนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ถูกนำมาใช้ในการหาผลเฉลย และการปรับปรุงความแม่นยำ (accuracy) ในปี 1984 Ingham และ Kelmanson [27] ใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบขอบ (a singular boundary element method, SBEM) เพื่อประมาณค่าผลเฉลยบริเวณที่เกิดจุดเอกฐาน หลังจากนั้นหนึ่งปี Kermode และคณะ [28] ได้คำนวณผลเฉลยที่บริเวณใกล้จุดเอกฐาน แต่เปลี่ยนมาใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันดับ (finite element method, FEM) Cuvelier และคณะ [29] ใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด (least square fitting method) โดยการเก็บ 3 พจน์แรกจากการกระจายอนุกรมรอบจุดเอกฐาน ต่อมาในปี 1991 Georgiou และคณะ [30,31] ได้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขขึ้นเรียกว่า วิธีฟังก์ชันฐานหลักรอบจุดเอกฐานปริพันธ์ (integrated singular basis function method, ISBEM) เพื่อประยุกต์สำหรับการไหลแบบสติก-สลลิป และการบวมตัวที่ปลายตาย งานวิจัยด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เสนอขึ้นนั้นเพื่อเปรียบเทียบผลเฉลยใกล้จุดเอกฐานของ Richardson [25]

กรณีการไหลแบบสติก-สลลิป ที่ตายของกระบวนการอัดรีด มีจุดประสงค์ในการประมาณรูปร่างของผิว (surface) ซึ่งนำไปสู่การประยุกต์เพื่อศึกษาการไหลแบบการบวมตัวที่ปลายตาย ในปี 1970 Tanner [32] เป็นคนแรกที่รวบรวมข้อมูลจากการศึกษาก่อนหน้านี้มาวิเคราะห์เพื่อคำนวณการไหลเมื่อมีการบวมตัวที่ปลายตาย โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทั้งระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันดับ และระเบียบวิธีขึ้นประกอบขอบ (boundary element method, BEM) เพื่อประมาณตำแหน่งของสายกระแสที่ผิวอิสระ (free surface streamline) เขายังได้คิดวิธีการหาผลเฉลยของอัตราส่วนการบวมตัว (swelling ratio) สำหรับของไหลนิวโตเนียนและวิสโคอีลาสติก (viscoelastic

fluid) ซึ่งครอบคลุมโดยลักษณะต่างๆ ทั้งระบบพิกัดทรงกระบอกและพิกัดฉาก ในกระบวนการอัดรีด (extrudate swell) โดยไม่คำนึงถึงแรงตึงผิว

มีนักวิจัยหลายคนได้พัฒนาระเบียบวิธีขึ้นประกอบกันตะเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการไหลแบบซ้ำๆ ที่มีการบวมตัวที่ปลายตาย ในปี 1974 Nickell และคณะ [33] ได้แสดงผลเฉลยของการหาผิวอิสระสำหรับการไหลของของไหลนิวโตเนียน Chang และคณะ [34] ได้ศึกษาการบวมตัวที่ปลายตายในของไหลนิวโตเนียนและวิสโคอีลาสติก ด้วยระเบียบวิธีกาลเลอร์กินและวิธีการจัด (collocation) สืบต่อมา Crochet และ Keuning [8,35,36] ใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบกันตะในการแก้ปัญหาการไหลในของไหลนิวโตเนียนและของไหลแมกซ์เวลล์ (Maxwell fluid) ที่ไหลผ่านตายแบบช่องสี่เหลี่ยม (slit die) ช่องวงกลม (circular die) และช่องวงแหวน (annular die) เพื่อคำนวณหาการไหลแบบการบวมตัวที่ปลายตาย พวกเขาพบว่า การปรับปรุงโครงข่าย (remesh) ให้ละเอียดขึ้นจะสามารถคำนวณหาผลเฉลยที่แม่นยำขึ้นโดยเฉพาะบริเวณจุดเอกฐาน หลังจากนั้น ในปี 1989 Butler และ Bush [37,38,39] นำปัญหาการไหลแบบการบวมตัวที่ปลายตายของพอลิเอธิลีน มาหาผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบกันตะในระบบพิกัดทรงกระบอกและการไหลแบบไอโซเทอร์มัล (isothermal flow) โดยเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Ahmed และคณะ [40] ในปี 1991 Beverly และ Tanner [41] ใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบกันตะในการพิจารณาปัญหาในการอัดรีดของของไหลนิวโตเนียนในระบบพิกัดฉาก และทำการศึกษาในพิกัดทรงกระบอก 3 มิติ โดย Karagiannis และคณะ [42] และของ Baloch และคณะ [43] พบว่ารูปร่างของชิ้นงานในกระบวนการอัดรีดขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ

ปี 2000 Ngamaramvaranggul และ Webster [44] ทำการศึกษาการไหลแบบสถิต-สถิตและการบวมตัวที่ปลายตายในของไหลนิวโตเนียน โดยใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบกันตะเซมิอิมพลิซิทเทอร์ก้าเลอร์กินเพรสเชอร์คอร์เรคชัน (semi-implicit Taylor-Galerkin/pressure-correction finite element method) ในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกระบอก เพื่อหาค่าความเร็ว (velocity) และความดัน (pressure) บริเวณจุดต่อปลายตาย ในปีต่อมา Ngamaramvaranggul และ Webster [24] นำผลที่ได้จากปัญหาสถิต-สถิตและการบวมตัวที่ปลายตายในของไหลนิวโตเนียน มาศึกษาปัญหาการบวมตัวที่ปลายตาย เพื่อทำนายพื้นผิวอิสระในการไหลของของไหลอัลตราลอยด์บี (Oldroyd-B model)

ในวิทยานิพนธ์นี้พิจารณาปัญหาการไหลผิวอิสระ เพื่อทำนายรูปร่างพื้นผิวที่ต้องการโดยกำหนดเงื่อนไขขอบ หาผลเฉลยความเร็ว ความดัน และอินเวเรียนอันดับสองของเทนเซอร์ของอัตราการผลิตรูปที่เกิดขึ้นในกระบวนการอัดรีดเพื่อคำนวณอัตราการบวมตัวที่เกิดขึ้น โดยทำการปรับเปลี่ยนผิวอิสระให้คงตัว จากการพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนที่ยินยอมได้ (tolerance) สำหรับค่าที่เหมาะสมคือ  $10^{-5}$

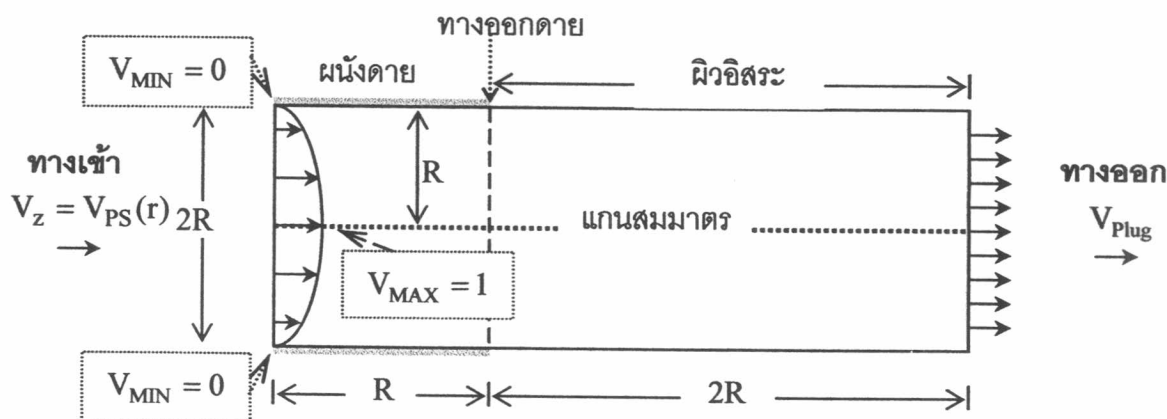
#### 4.1 ของไหลนิวโตเนียน (Newtonian fluid)

ปัญหา 2 ชนิดที่จะศึกษาในบทนี้ คือการไหลแบบสถิต-สถิต และการบวมตัวที่ปลายตาย สำหรับของไหลนิวโตเนียน ด้วยการพิจารณาสมการความต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบไร้หน่วย โดยแบ่งโดเมนออกเป็นชั้นประกอบแบบสามเหลี่ยมที่มี 6 โคน ใช้ระเบียบวิธีชั้นประกอบอันดับสองเชิงปริมาตรเพื่อแก้สมการการเคลื่อนที่ของของไหล และวิธีเกาส์-ไฮเดลในการหาผลเฉลย ในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ ภายใต้ข้อสมมติฐานที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 1 เมื่อการไหลเข้าเป็นแบบพาราโบลา (Poiseuille flow) ในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ  $(r, z)$  ของระบบไร้หน่วย โดยกำหนดค่าความเร็วบริเวณทางเข้าดังสมการ (4.1)

ความเร็วที่มีการไหลแบบพาราโบลา ( $V_{PS}(r)$ ) ดังสมการ (4.1)

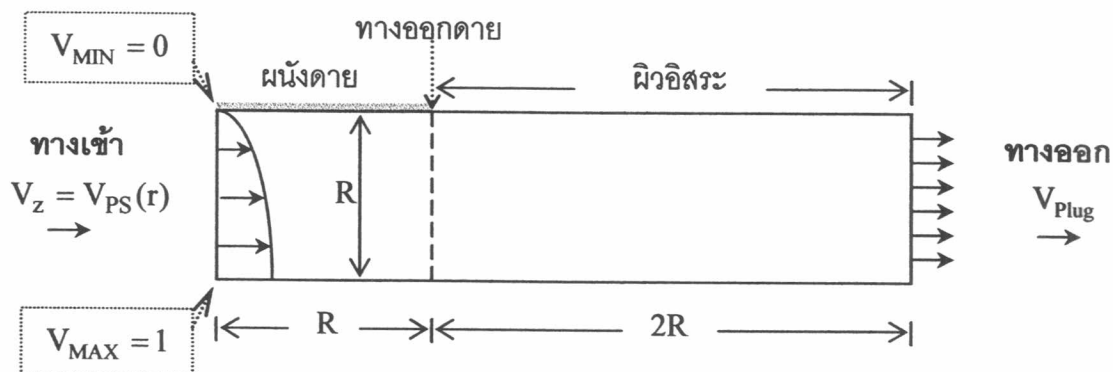
$$V_{PS}(r) = V_{max}(1-r^2) \quad \text{บริเวณทางเข้า} \quad (4.1)$$

ให้ความเร็วบริเวณทางเข้าตายที่มากที่สุด ( $V_{max}$ ) เป็น 1 มีค่าน้อยสุด ( $V_{min}$ ) เป็น 0 ดังรูป 4.1



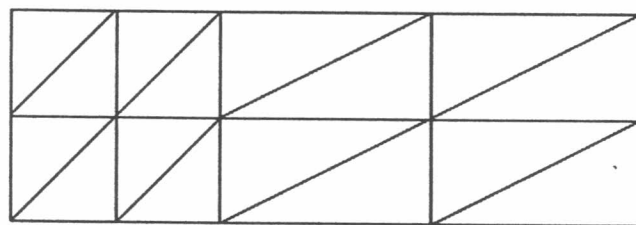
รูป 4.1 การไหลผ่านตาย

จากรูป 4.1 สามารถพิจารณาเพียงระนาบครึ่งบนเนื่องจากด้านระนาบครึ่งบนและระนาบครึ่งล่างนั้นสมมาตรกัน ดังรูป 4.2

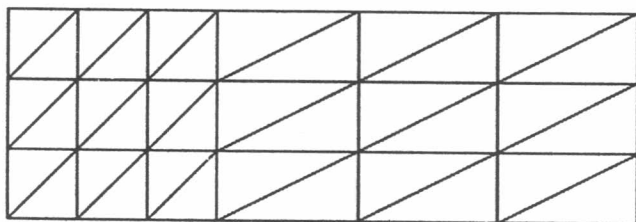


รูป 4.2 การไหลผ่านตายระนาบครึ่งบน

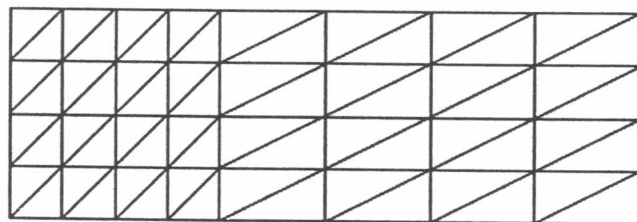
การแบ่งโดเมนออกเป็นโครงข่ายรูปสามเหลี่ยม 6 โหนด โดยแบ่งการคำนวณออกเป็น 3 โครงข่าย คือ แบบละเอียดน้อยที่สุด 16 ชิ้นประกอบ แบบละเอียดพอใช้ 36 ชิ้นประกอบและแบบละเอียดมากที่สุด 64 ชิ้นประกอบ ดังรูป 4.3



(a) 16 ชิ้นประกอบ



(b) 36 ชิ้นประกอบ



(c) 64 ชิ้นประกอบ

รูป 4.3 โครงข่ายรูปสามเหลี่ยม 6 โหนด

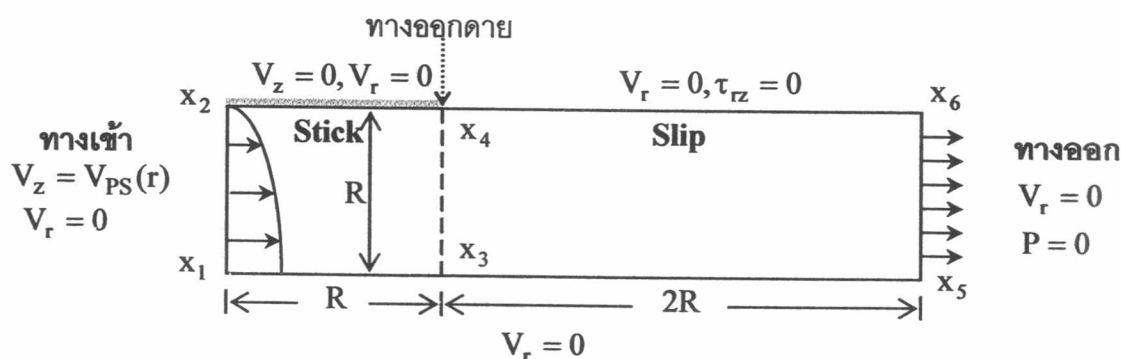
ตาราง 4.1 เปรียบเทียบโครงข่ายรูปสามเหลี่ยม 6 โหนด

โครงข่าย	จำนวนโหนด	ความกว้างที่น้อยที่สุด
16 ชั้นประกอบ	45	0.5
36 ชั้นประกอบ	91	0.333
64 ชั้นประกอบ	153	0.25

พบว่าโครงข่าย 64 ชั้นประกอบให้ค่าละเอียดที่สุด รองมาคือ 36 ชั้นประกอบ และ 16 ชั้นประกอบตามลำดับ

#### 4.1.1 ปัญหาสติก-สลิป (Stick-slip problem)

ปัญหานี้เป็นปัญหาการไหลของของไหลผ่านท่อที่มีคายเป็นผนังแต่ยังไม่มีการรวมตัวเกิดขึ้น ดังรูป 4.4



รูป 4.4 การไหลแบบสติก-สลิประนาบครึ่งบน

จากรูป 4.4 ปัญหาสติก-สลิป ให้  $x_1x_2x_4x_3$  เป็นส่วนที่เรียกว่าคาย และ  $x_3x_4x_6x_5$  เป็นส่วนการไหลแบบอิสระ การกำหนดเงื่อนไขขอบของปัญหานี้ ให้บริเวณส่วนที่เป็นผนังคือ  $x_2x_4$  เรียกว่าสติก (stick) และบริเวณผิวอิสระคือ  $x_4x_6$  เรียกว่าสลิป (slip)

ให้บริเวณทางเข้าของคายเป็น  $x_1x_2$  ความเร็วในแนวแกน  $z$  มีค่าเท่ากับความเร็วแบบพาราโบลาและความเร็วในแนวแกน  $r$  เป็นศูนย์

บริเวณสติก  $x_2x_4$  ความเร็วในแนวแกน  $z$  และแกน  $r$  มีค่าเป็นศูนย์

บริเวณผิวอิสระ  $x_4x_6$  ความเร็วในแนวแกน  $r$  มีค่าเป็นศูนย์ และความเค้นเฉือนในแนวแกน  $z$  บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน  $r$  มีค่าเป็นศูนย์

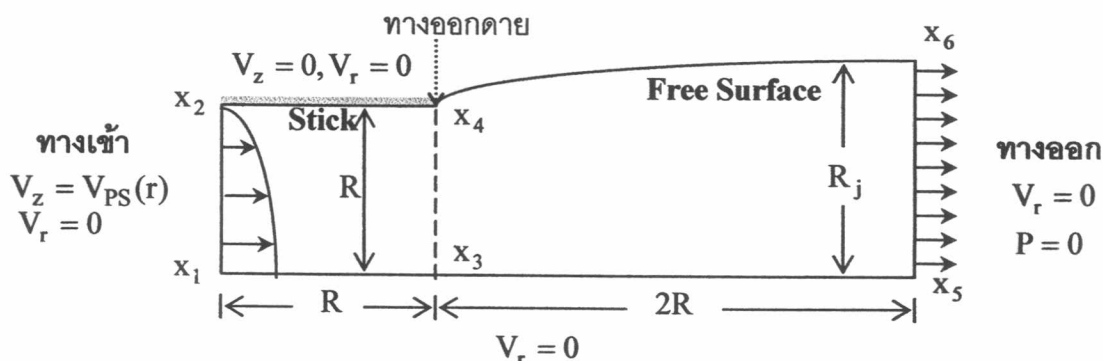
บริเวณทางออกของของไหลคือ  $x_5x_6$  ความเร็วในแนวแกน  $r$  และความดันเป็นศูนย์

บริเวณแกนสมมาตร  $x_1x_5$  ความเร็วในแกน  $r$  มีค่าเป็นศูนย์

โดยพิจารณาการไหลที่มีค่าเรย์โนลด์ที่มีค่าน้อย ( $Re = 10^{-4}$ ) ภายใต้เงื่อนไขการไหลแบบช้าๆ ไม่มีการลื่นไหลที่ผนัง (wall slip) ขณะที่ไหลในตาย อุณหภูมิของระบบคงตัว

#### 4.1.2 ปัญหาการบวมตัวที่ปลายตาย (Die-swell problem)

การบวมตัวของของไหลเกิด ณ บริเวณจุดต่อบริเวณปลายตายและผิวอิสระ เพราะมีแรงที่มีค่าสูงเข้ากระทำที่บริเวณปลายตายทำให้ของไหลพุ่งออกจากตายบริเวณผิวอิสระ ทำให้เกิดการบวมตัวของของไหลขึ้น เนื่องจากปัญหาสติก-สลลิปเป็นปัญหาเริ่มต้นเพื่อนำมาศึกษาในปัญหานี้โดยเปลี่ยนเงื่อนไขขอบของการไหลที่บริเวณผิวอิสระ ดังรูป 4.5



รูป 4.5 การบวมตัวที่ปลายตายระนาบครึ่งบน

จากรูป 4.5 ปัญหาการบวมตัวที่ปลายตาย ให้  $x_1x_2x_4x_3$  เป็นส่วนที่เรียกว่าตาย และ  $x_3x_4x_6x_5$  เป็นส่วนการไหลแบบอิสระ ในการกำหนดเงื่อนไขขอบของปัญหานี้ บริเวณส่วนที่เป็นผนังคือ  $x_2x_4$  เรียกว่าสติก และบริเวณผิวอิสระคือ  $x_4x_6$  ซึ่งเป็นส่วนที่เกิดการบวมตัว (die-swell) มีเงื่อนไขขอบเช่นเดียวกับปัญหาสติก-สลลิป

## 4.2 ผลที่ได้รับ (Result)

### 4.2.1 ผลของสถิต-สลิป

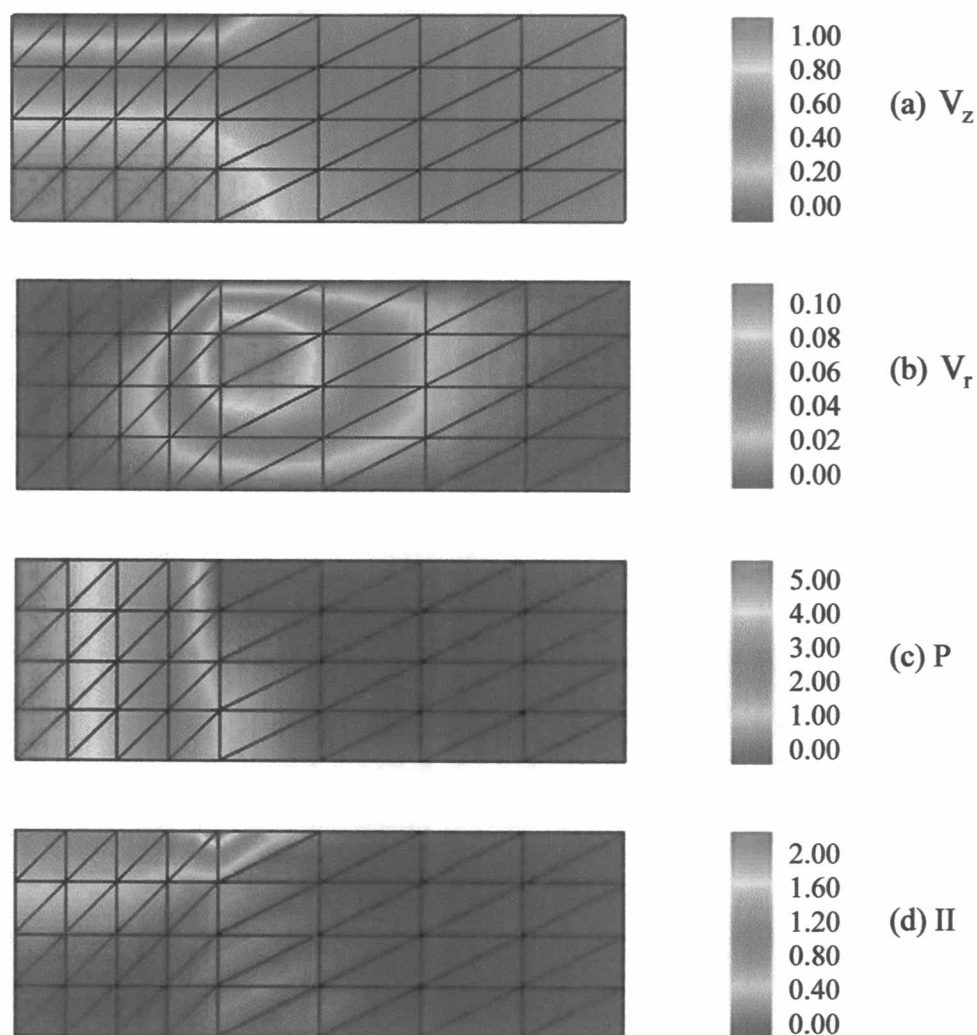
เปรียบเทียบค่าความเร็ว ความดัน และค่าอินเวเรียนอันดับสองของเทนเซอร์ของอัตราการผลิตรูปของโครงข่ายชนิดต่างๆ เทียบกับ Ngamaramvaranggul และ Webster [24] ดังตาราง 4.2

ตาราง 4.2 เปรียบเทียบความเร็วและความดันของปัญหาสถิต-สลิป

โครงข่าย	$V_z \text{ plug}$	$V_r \text{ max}$	$P_{\text{drop}}$	$\Pi_{\text{max}}$
16 ชั้นประกอบ	0.538	0.078	5.179	1.176
36 ชั้นประกอบ	0.526	0.084	5.152	1.614
64 ชั้นประกอบ	0.483	0.091	4.982	2.094
Ngamaramvaranggul และ Webster [24]	0.500	0.100	4.880	7.930

\*\* Ngamaramvaranggul และ Webster ใช้โครงข่าย 1800 ชั้นประกอบ

จากตาราง 4.2 จะพบว่าโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ มีค่าความเร็วและผลแตกต่างความดันระหว่างทางเข้าและทางออกของตาย ( $P_{\text{drop}}$ ) ใกล้เคียงกับ Ngamaramvaranggul และ Webster มีความแตกต่างกันเพียง 3% เนื่องจากโครงข่ายมีความละเอียดมากที่สุด จึงนำผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โครงข่าย 64 ชั้นประกอบ แสดงระดับผลลัพธ์ด้วยสี (colour contours) ดังรูป 4.6



รูป 4.6 การแสดงระดับผลลัพธ์ด้วยสีของปัญหาสติก-สลิปสำหรับโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ

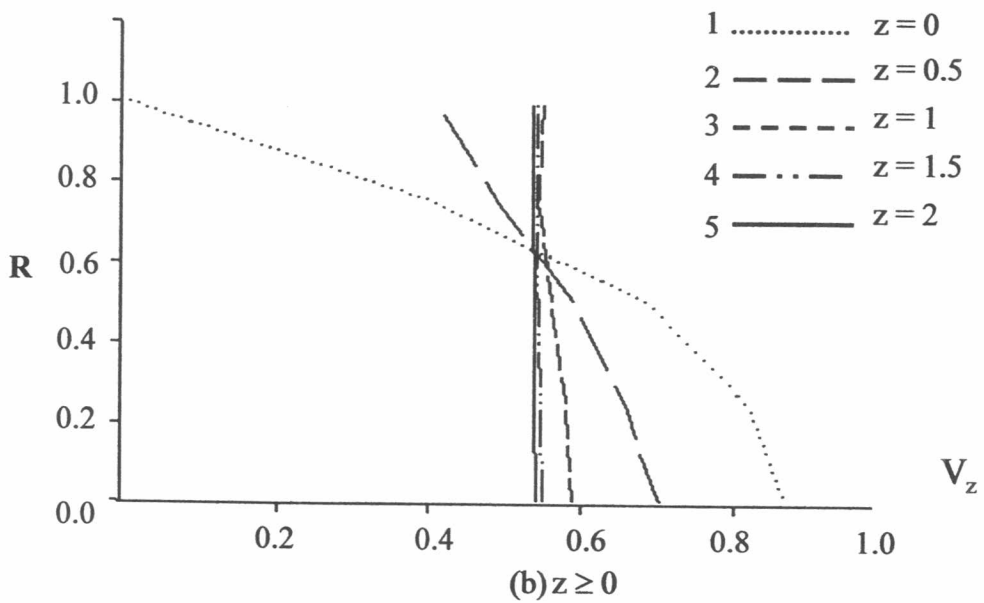
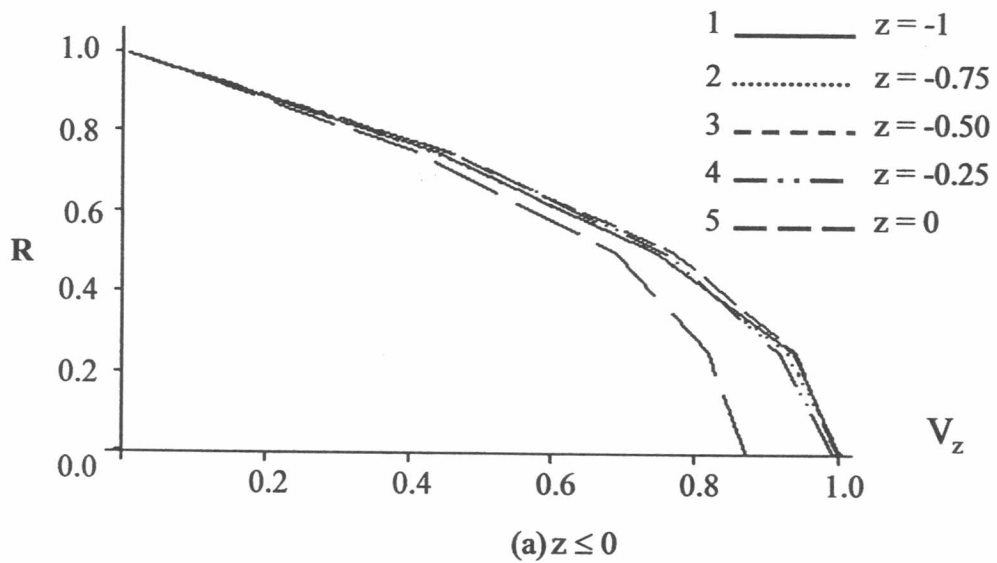
จากรูป 4.6 พบว่าระดับสีของ  $V_z$  ในตาย จะไล่ระดับสีจากต่ำไปสูงเป็นรูปโค้งพาราโบลา เนื่องจากการไหลที่เข้ามาเป็นแบบพาราโบลา เมื่อของไหลนิวโตเนียนไหลออกตายอย่างอิสระ จะพบว่าระดับสีของ  $V_z$  เป็นระดับเดียวกันหมดเรียกว่าการไหลแบบปลั๊ก (plug flow) ซึ่งเป็นความเร็วที่มีค่าเท่ากัน ดังรูป 4.7 จะพบว่าที่บริเวณใกล้ทางเข้า ( $z \leq 0$ ) การไหลที่เข้ามายังคงเป็นรูปพาราโบลาและจะคงการไหลแบบพาราโบลาจนกระทั่ง  $z$  มีค่าเป็นศูนย์ และที่ ( $z \geq 0$ ) พบว่าการไหลจะมีการพัฒนารูปร่างจนกลายเป็นการไหลแบบปลั๊กในที่สุดที่  $z$  เท่ากับ 2

ระดับสีของ  $V_r$  มีค่าต่ำมาก ยกเว้นใกล้ๆ บริเวณปลายตาย จะมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นๆ เล็กน้อย เนื่องจากบริเวณทางออกของตายมีการเปลี่ยนแปลงความดัน

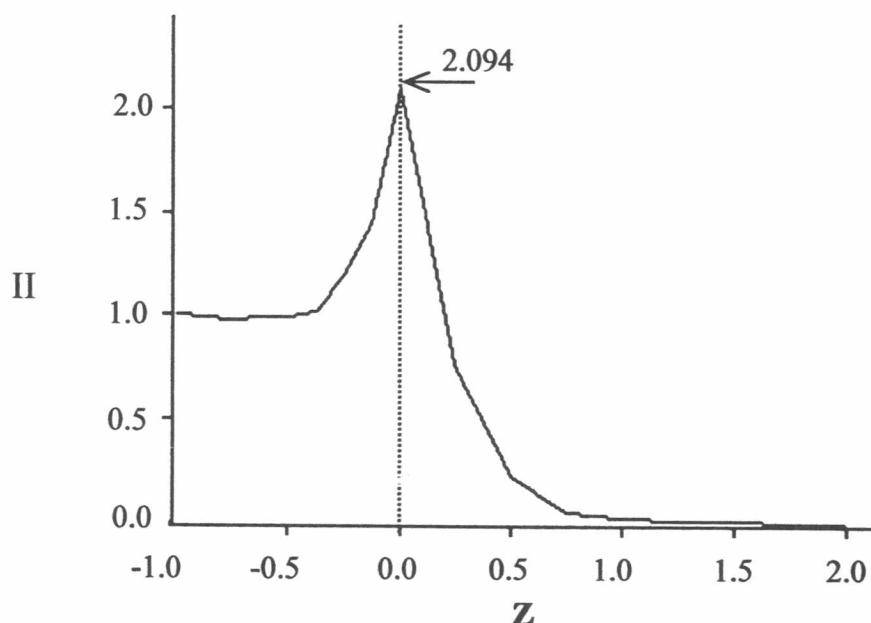


ระดับสีของ P มีค่าสม่ำเสมอในแนวแกน r โดยจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ มีการสูญเสียพลังงานจากแรงเฉือนที่ผนัง ทำให้มีค่าลดลงเรื่อยๆ จนเป็นศูนย์ที่นอกตาย

ระดับสีของ II เป็นค่าบ่งบอกความเค้นเฉือนโดยรวม จะพบว่าที่บริเวณผนังตายมีค่าสูงมาก เนื่องจากบริเวณผนังมีแรงเฉือนซึ่งยึดโมเมนต์ของของไหล และหลังจากไหลผ่านผิวอิสระจะลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ ดังรูป 4.8 ค่า II นี้เป็นค่าที่บอกให้ทราบว่าชั้นงานที่ได้จะมีจุดแตกหักง่ายบริเวณที่มีค่าสูงคือรอยต่อระหว่างตายกับผิวอิสระ



รูป 4.7 กราฟแสดงค่าความเร็วในแนวแกน z กับรัศมีของตาย



รูป 4.8 กราฟแสดงค่า II กับระยะห่างของตายบนผิวอิสระของปัญหาสถิติค-สลิป

#### 4.2.2 ผลของการรวมตัวที่ปลายตาย

นำผลของอัตราการรวมตัวที่ปลายตาย เปรียบเทียบกับงานของผู้อื่นที่ได้ทำการวิจัยไว้แล้วคือ Nickell และคณะ [33] ซึ่งเป็นผลที่ใกล้เคียงกับการทดลอง และของ Tanner [32] ผู้คิดค้นวิธีการหาผลเฉลยของอัตราการรวมตัวด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข รวมทั้งผลที่ได้จาก Ngamaramvaranggul และ Webster [24] ได้หาผลเฉลยของอัตราการรวมตัวด้วยระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะกับโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ ดังตาราง 4.3

ตาราง 4.3 เปรียบเทียบอัตราการรวมตัว

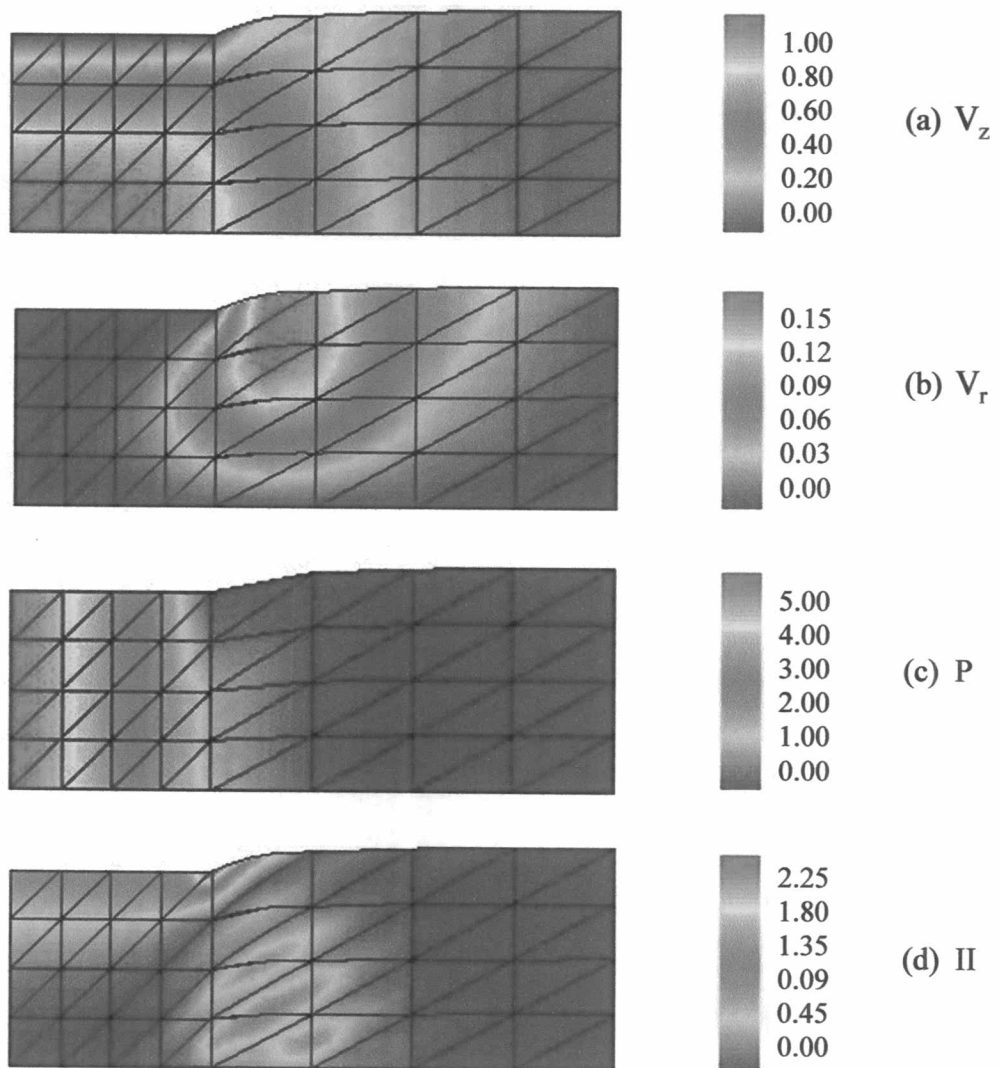
ผู้วิจัย	$\chi$	$\chi\%$
Nickell และคณะ [33] (experiment)	1.128	12.8
Tanner [32] . (analytical approximation)	1.136	13.6
Ngamaramvaranggul และ Webster [24] (simulation)	1.130	13.0
64 ชั้นประกอบ (this work)	1.130	13.0

จากตาราง 4.3 พบว่าอัตราการรวมตัวของโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ มีค่าใกล้เคียงกับอัตราการรวมตัวของ Nickell ซึ่งเป็นผลจากการทดลองจริงและของ Ngamaramvaranggul และ Webster จึงใช้โครงข่าย 64 ชั้นประกอบในการคำนวณหาผลเฉลยในปัญหานี้

ตาราง 4.4 เปรียบเทียบผลลัพธ์ของปัญหาการรวมตัวที่ปลายตาย

โครงข่าย	$V_z \text{ max}$	$V_r \text{ max}$	Pdrop	$\Pi \text{ max}$
64 ชั้นประกอบ	1.002	0.138	5.083	2.184
Ngamaramvaranggul และ Webster [24]	1.000	0.140	4.940	10.75

จากตาราง 4.4 ในโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ พบว่าค่าความเร็วและความดันมีค่าใกล้เคียงกับ Ngamaramvaranggul และ Webster ส่วนค่าความเค้นเฉือนโดยรวมมีค่าแตกต่างกันพอสมควรเนื่องจากโครงข่ายที่ใช้มีความละเอียดไม่เท่ากัน ผลจากโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ มาแสดงระดับผลลัพธ์ด้วยสีดังรูป 4.9



รูป 4.9 การแสดงระดับผลลัพธ์ด้วยสี ของปัญหาการรวมตัวที่ปลายตายสำหรับโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ

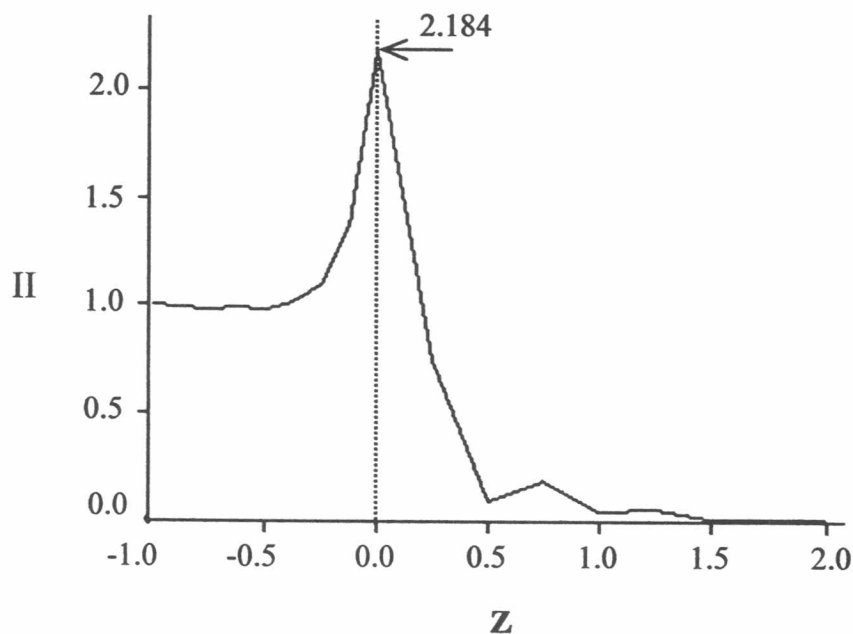
ผลเฉลยที่ได้จากปัญหาการรวมตัวที่ปลายตายให้ค่าใกล้เคียงกันกับปัญหาสติก-สลิป คือ

จากรูปจะพบว่าระดับสีของ  $V_z$  ในตาย จะไล่ระดับสีจากต่ำไปสูงเป็นรูปโค้งพาราโบลา เนื่องจากการไหลที่เข้ามาเป็นแบบพาราโบลา เมื่อของไหลนิวโตเนียนไหลออกตายอย่างอิสระ จะพบว่าระดับสีของ  $V_z$  เป็นระดับเดียวกันหมดเป็นการไหลแบบปลัก ซึ่งเป็นความเร็วที่มีค่าเท่ากัน

ระดับสีของ  $V_r$  มีค่าต่ำมาก ยกเว้นใกล้ๆ บริเวณปลายตาย จะมีค่าสูงที่สุด ณ บริเวณจุดที่มีการรวมตัวออก

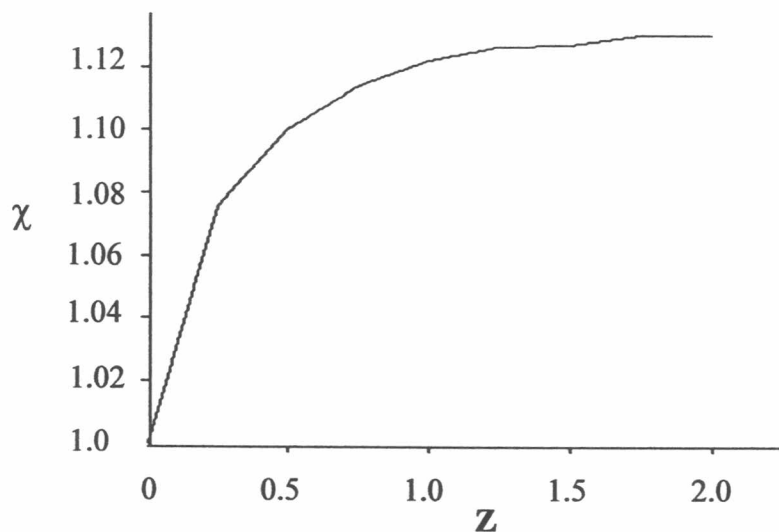
ระดับสีของ  $P$  มีค่าสม่ำเสมอในแนวแกน  $r$  โดยจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ มีการสูญเสียพลังงานจากแรงเฉือนที่ผนัง ทำให้มีค่าลดลงเรื่อยๆ จนเป็นศูนย์

ระดับสีของ  $II$  เป็นค่าบ่งบอกความเค้นเฉือนโดยรวม จะพบว่าที่บริเวณผนังตายมีค่าสูงมาก เนื่องจากบริเวณผนังมีแรงเฉือนซึ่งยึดโมเลกุลของของไหล ดังรูป 4.10 ค่า  $II$  นี้เป็นค่าที่บอกให้ทราบว่าชิ้นงานที่ได้จะมีจุดแตกหักง่ายบริเวณที่มีค่าสูงคือรอยต่อระหว่างตายกับผิวอิสระที่มีการรวมตัว



รูป 4.10 กราฟแสดงค่า  $II$  กับระยะห่างของตายบนผิวอิสระของปัญหาการรวมตัวที่ปลายตาย

จากรูป 4.10 พบว่าค่าความเค้นเฉือนโดยรวมมีค่ามากที่บริเวณทางออกของดาวยซึ่งเมื่อของไหลไหลผ่านผิวอิสระจะปลดปล่อยพลังงานทั้งหมดที่สะสมไว้ ทำให้ของไหลเกิดการบวมตัวออก และมีค่าความเค้นเฉือนลดลงจนเป็นศูนย์จึงทำให้ของไหลมีการบวมตัวคงที่ดังกราฟ รูป 4.11



รูป 4.11 กราฟอัตราการบวมตัวสำหรับโครงข่าย 64 ชั้นประกอบ

ตาราง 4.5 เปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาสถิต-สลิปกับการบวมตัวที่ปลายดาวย

ผลลัพธ์	$V_z \text{ max}$	$V_r \text{ max}$	Pdrop	$\Pi \text{ max}$
ปัญหาสถิต-สลิป	1.003	0.091	4.982	2.094
ปัญหาการบวมตัว	1.002	0.138	5.083	2.184

จากตาราง 4.5 พบว่า  $V_z$  บริเวณการไหลที่ผิวอิสระที่มีการไหลแบบปลึกของปัญหาการบวมตัวที่ปลายดาวยจะมีค่าน้อยกว่าปัญหาสถิต-สลิป เนื่องจากระยะในแนวแกน  $r$  มีค่ามากกว่าปัญหาสถิต-สลิป ทำให้ความเร็วมีค่าลดลงจากกฎการอนุรักษ์อัตราการไหล แต่ความเร็วที่มีค่าสูงสุดมีค่าใกล้เคียงกันที่บริเวณทางเข้าของดาวย

$V_r$  ในปัญหาการบวมตัวที่ปลายดาวยจะมีค่าสูงที่สุด ณ บริเวณจุดที่มีการบวมตัวออกแต่ในปัญหาสถิต-สลิปที่บริเวณผิวอิสระจะมีค่าสูงกว่าเล็กน้อย

$P$  มีค่าใกล้เคียงกันเนื่องจาก  $P$  ขึ้นอยู่กับระยะทางการไหลของของไหล ไม่ขึ้นกับระยะความสูง

$\Pi$  มีค่าใกล้เคียงกันเนื่องจากบริเวณในดาวยความเร็วเป็นศูนย์

### 4.3 สรุปผล (Conclusion)

ในการพิจารณาปัญหาสถิต-สถิตเป็นปัญหาเริ่มต้น พบว่าความเร็วในแนวแกน  $z$  ที่เข้ามาเป็นพาราโบลา และยังคงรูปการไหลเป็นรูปแบบพาราโบลา แต่เมื่อไหลผ่านบริเวณผิวอิสระของไหลจะพัฒนาตัวเองจนกระทั่งความเร็วเป็นการไหลแบบปลັก ส่วนความเร็วในแนวแกน  $r$  นั้นไม่แตกต่างกันนักแต่จะมีค่าสูงเล็กน้อยบริเวณปลายตาย ส่วนความดันนั้นพบว่ามีค่าสม่ำเสมอในแนวแกน  $r$  โดยจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ มีการสูญเสียพลังงานจากแรงเฉือนที่ผนัง ทำให้มีค่าลดลงเรื่อยๆ จนเป็นศูนย์และความเค้นเฉือนโดยรวมจะมีค่าสูงที่บริเวณผนังโดยเฉพาบริเวณทางออกของตายเนื่องจากแรงเฉือนที่ผนังเข้ากระทำเพื่อยึดโมเลกุลของของไหลไม่ให้ไหลโดยง่าย

จากการศึกษาปัญหาการรวมตัวบริเวณปลายตาย ให้ผลเฉลยในทำนองเดียวกันกับปัญหาสถิต-สถิต แต่แตกต่างกันคือเมื่อไหลออกมาบริเวณผิวอิสระเกิดการรวมตัวของของไหลเกิดขึ้น เนื่องจากปลดปล่อยพลังงานที่สะสมไว้มีผลกระทบทำให้ความเร็วในแนวแกน  $z$  มีค่าลดลงเมื่อเทียบกับปัญหาสถิต-สถิต ความเร็วในแนวแกน  $r$  ความดันและความเค้นเฉือนมีค่าใกล้เคียงกัน

ในความเป็นจริงที่บริเวณผนังของตายนั้นมีค่าความเร็วไม่เป็นศูนย์ในบทต่อไปจึงศึกษาปัญหาการรวมตัวที่ปลายตายที่มีการลื่นไหลบริเวณผนังของตายเพื่อศึกษาผลกระทบของการลื่นไหลที่มีต่อการรวมตัว