

บทที่ 3

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)

ในบทที่ 2 เป็นการสร้างสมการการไหลของของไหลซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ส่วนในบทนี้เป็นการนำสมการที่ได้ขึ้นมาแก้ปัญหาพร้อมเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น ที่มีโดเมน (domain) จำกัด โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขขึ้นประกอบอันตะ ซึ่งเป็นการจัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ และใช้วิธีทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel iteration method) หาผลเฉลยที่ต้องการด้วย โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนขึ้น

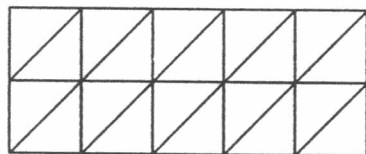
3.1 ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite element method)

ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ คือเทคนิคเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับการประมาณผลเฉลยโดยเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิต ศึกษาได้จากหนังสือระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะของ Reddy [10] งานของ Chandrupatla และ Belegundu [11] และของ Bathe [12] ทำให้สะดวกและง่ายต่อการหาผลเฉลย จึงเป็นการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนให้ดูง่ายขึ้น โดยพิจารณาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มีรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หรืออนุพันธ์ย่อยภายใต้โดเมนจำกัด พร้อมกับเงื่อนไขเริ่มต้นอย่างเหมาะสม

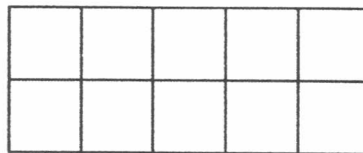
ทำการวิฤตสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปพีชคณิต โดยใช้การดำเนินการเลขคณิต พื้นฐาน ทำให้พหามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าลดลง ตัวแบบวิฤตที่สร้างขึ้นเพื่อกำหนดค่าในฟังก์ชันแบบจุดที่มีขึ้นประกอบ (element) ย่อย ๆ รวมกันเป็นจำนวนจำกัด และโดเมนย่อยเหล่านั้นจะเรียกว่า ขึ้นประกอบอันตะ (finite element)

ขั้นตอนการประมาณผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะสามารถสรุปได้ดังนี้

3.1.1 สร้างโครงข่าย (mesh) จำนวน n จุดในโดเมนที่กำหนดขึ้นตามรูป 3.1 โครงข่ายประกอบไปด้วย ขึ้นประกอบแบบสามเหลี่ยมตามรูป (a) หรือสี่เหลี่ยมตามรูป (b) สำหรับใน 2 มิติ และสำหรับใน 3 มิติ สมาชิกในโครงข่ายเป็นแบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า หรือทรงเหลี่ยมหกหน้า



(a) ชั้นประกอบแบบสามเหลี่ยม



(b) ชั้นประกอบแบบสี่เหลี่ยม

รูป 3.1 โครงข่ายในโดเมน 2 มิติ

3.1.2 แทนค่าผลเฉลยลอง (trial solution) สำหรับตัวแปรเริ่มต้น $\tilde{U}(x)$

3.1.3 ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างที่เรียกว่ากาลเออรคิน เพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่า

3.1.4 หาผลเฉลยจากการประมาณค่าฟังก์ชันเฉพาะที่แต่ละชั้นประกอบ เพื่อใช้ในการแก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นที่เวลาเดียวกัน

การกระจายอนุพันธ์เพื่อประมาณค่าตัวแปรเริ่มต้น พร้อมกับการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันประมาณรูปร่าง (interpolation shape function) หรือเรียกว่าฟังก์ชันประมาณรูปร่างของตัวแปรความเร็วมีนิพจน์ผลเฉลยลองเป็นดังนี้

$$\tilde{U}(x) = \sum_{i=1}^n N_{\phi}^i(x) U^i \quad (3.1)$$

โดยที่

$N_{\phi}^i(x)$ คือ ฟังก์ชันประมาณรูปร่าง

U^i คือ ความเร็วที่แต่ละโนดในชั้นประกอบ

ฟังก์ชันประมาณรูปร่างภายนอกของทุกชั้นประกอบจะหายไป

$$N_{\phi}^i(x) = 0 \quad , \quad x \text{ คือ ค่าภายนอกชั้นประกอบ} \quad (3.2)$$

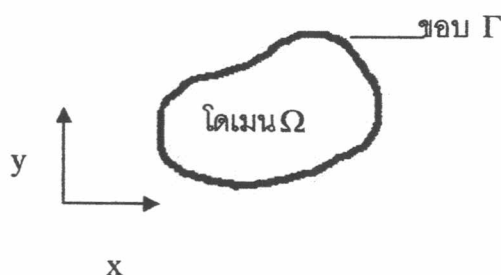
ส่วนภายในชั้นประกอบฟังก์ชันประมาณรูปร่างจะรวมกันเป็นค่าคงตัว

$$\sum N_{\phi}^i(x) = 1 \quad (3.3)$$

พิจารณาวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual) เพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนในการคำนวณสมการเชิงอนุพันธ์ โดยทั่วไปมี 5 วิธีที่ต่างกันอย่างสิ้นเชิงสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือของ Baker [13] และ Burnett [14]

1. ระเบียบวิธีการจัด (collocation method)
2. ระเบียบวิธีแบ่งโดเมนย่อย (sub-domain method)
3. ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด (least-square method)
4. ระเบียบวิธีการจัดกำลังสองน้อยสุด (least-square collocation method)
5. ระเบียบวิธีกาเลอร์กิน (Galerkin method)

ในวิทยานิพนธ์นี้ ใช้ระเบียบวิธีกาเลอร์กินถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual Galerkin method) ดังตัวอย่างของหนังสือ ศ. ดร. ปราโมทย์ [15] ในการพิจารณาปัญหาค่าขอบ 2 มิติ ของสมการปัวส์ซง (the Poisson equation) ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y)



รูป 3.2 โดเมนและขอบใน 2 มิติ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = 0 \quad \text{ภายใต้โดเมน } \Omega \quad (3.4)$$

เมื่อ

$$u = 0 \quad \text{บนขอบ } \Gamma \quad (3.5)$$

โดยที่

- u คือ ความเร็ว
- x, y คือ ระยะตามแกน x และ y ตามลำดับ
- Γ คือ ขอบบนโดเมน
- Ω คือ โดเมนที่กำหนด
- f คือ ฟังก์ชันเศษตกค้าง

ให้สมการเศษตกค้าง $R(u)$ คือ

$$R(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f \quad (3.6)$$

จากสมการ (3.4) ทำให้นิพจน์ทางขวาของสมการ (3.6) เป็นศูนย์ ดังนั้นฟังก์ชันเศษตกค้างจะถูกลดจนเป็นศูนย์ทั้งโดเมน ใช้วิธีการเลอริคินถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างที่แต่ละชั้นประกอบจะได้

$$\sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \phi(x) R(u) d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

โดยที่

- N_c คือ จำนวนชั้นประกอบทั้งหมดในโดเมน
 ϕ คือ ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function)
 Ω_c คือ โดเมนย่อยของแต่ละชั้นประกอบ
 และได้

$$\Omega = \bigcup_{c=1}^{N_c} \Omega_c \quad (3.8)$$

ผลเฉลยที่น่าพอใจขึ้นอยู่กับ 2 เงื่อนไข อย่างแรกสมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีฟังก์ชันเศษตกค้างเกือบเป็นศูนย์ อย่างที่สอง พิจารณาความแตกต่างระหว่างผลเฉลยแม่นยำและผลเฉลยประมาณ เพื่อหาค่าคลาดเคลื่อนผลเฉลยที่คำนวณได้ให้เป็นศูนย์

$$E(x) = U(x) - \tilde{U}(x) \quad (3.9)$$

โดยที่

- $E(x)$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

3.2 ชั้นประกอบอันตะ (Finite element)

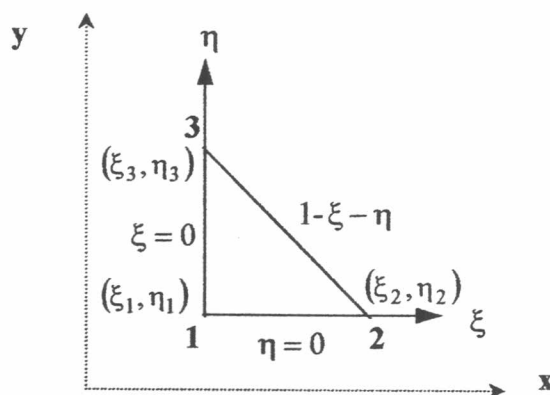
การแบ่งโดเมนเป็นชั้นประกอบจำนวนจำกัดที่ไม่ทับกัน นิยมใช้รูปสามเหลี่ยม (triangle) และรูปสี่เหลี่ยม (quadrilateral) ส่วนใหญ่รูปสามเหลี่ยมจะนำไปใช้ในวงกว้างเนื่องจากบรรจุได้เกือบพอดีในโดเมนที่พิจารณา การแบ่งโดเมนย่อยเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

3.2.1 จำนวนของบริเวณย่อย Ω_i ในโดเมน Ω มีจำนวนจำกัด ($i = 1, 2, 3, \dots, N_c$)

3.2.2 เมื่อพิจารณา 2 บริเวณย่อย Ω_1 และ Ω_2 ทั้งคู่ต้องมีด้านเหมือนกัน หรือจุดต่อเหมือนกัน ($\Omega_1 = \Omega_2$) หรือไม่เหมือนกันเลย ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$)

3.2.3 เมื่อรวมทุกบริเวณย่อยทั้งหมด จะกลายเป็นพื้นที่ทั้งหมดซึ่งมีค่าเท่ากับโดเมนที่จำกัดขอบเขต

3.2.4 การแปลงระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นระบบพิกัดหลัก โดยการส่งรูปสามเหลี่ยมในระบบพิกัด (x,y) เป็นระบบพิกัดตัวกลาง (ξ,η) ดังรูป 3.3



รูป 3.3 ระบบพิกัดตัวกลาง (ξ, η)

ทำการประมาณค่าของสมการเชิงปริพันธ์ตาม Chandrupatla และ Belegundu [11] โดยแปลงเป็นค่าในระบบพิกัดตัวกลาง (ξ, η)

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \quad (3.10)$$

โดยให้

$f(\xi, \eta)$ คือ ฟังก์ชันในระบบพิกัดตัวกลาง

ξ, η คือ แกนในระบบพิกัดตัวกลางตามรูป 3.3

$$(\xi_1, \eta_1) = (0, 0)$$

$$(\xi_2, \eta_2) = (1, 0)$$

$$(\xi_3, \eta_3) = (0, 1)$$

จากกฎลูกโซ่นำมากระจายในความเร็วได้

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

จัดให้อยู่ในรูปแบบการแปลงเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

เมื่อบริการจาคอบี (J) คือ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

และพบว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_2^{(e)} - x_1^{(e)} & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= y_2^{(e)} - y_1^{(e)} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_3^{(e)} - x_1^{(e)} & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= y_3^{(e)} - y_1^{(e)} \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อบริการจาคอบีของการแปลง คือ

$$J = \begin{bmatrix} x_2^{(e)} - x_1^{(e)} & y_2^{(e)} - y_1^{(e)} \\ x_3^{(e)} - x_1^{(e)} & y_3^{(e)} - y_1^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

ที่ $(x_1^{(e)}, y_1^{(e)})$, $(x_2^{(e)}, y_2^{(e)})$ และ $(x_3^{(e)}, y_3^{(e)})$ ของโนด 1,2,3

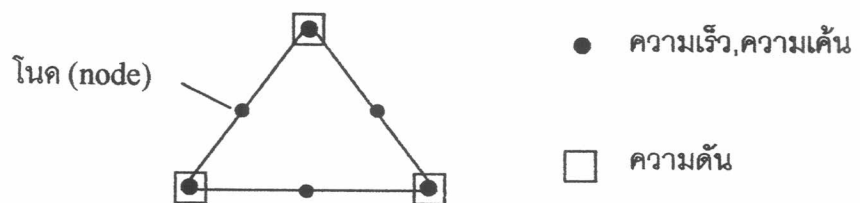
เปลี่ยนพิกัดจาก $d\Omega^{(e)} = dx dy$ เป็น $d\Omega' = d\xi d\eta$

$$d\Omega^{(e)} = \det(J) d\xi d\eta \quad (3.14)$$

จาก (3.13) จะได้

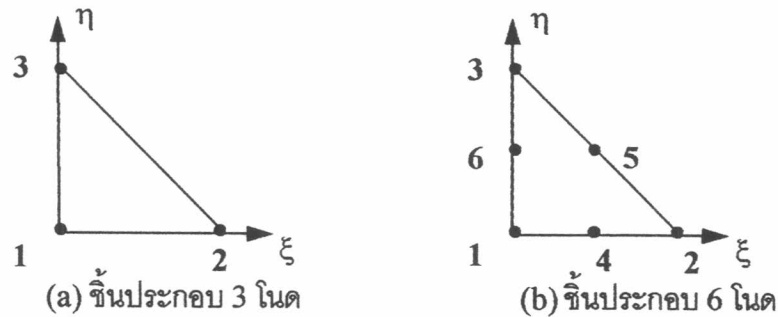
$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \int_{\Omega'} f(\xi, \eta) \det(J) d\Omega' \quad (3.15)$$

3.2.5 การหาฟังก์ชันรูปร่าง (shape function)



รูป 3.4 ชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยม 6 โหนด

ในวิทยานิพนธ์นี้ จะใช้ชั้นประกอบรูปสามเหลี่ยม 6 โหนด ดังรูป 3.4 และฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ของความเร็วและความเค้น คือ (ϕ) ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างพหุนามกำลังสองที่ประมาณจากค่า 6 ค่า ส่วนความดันจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น (ψ) ที่ประมาณจากค่า 3 ค่า



รูป 3.5 ชั้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในพิกัดถ่วงกลาง

สำหรับชั้นประกอบที่มี 3 โหนด ดังรูป 3.5 a ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น คือ

$$N_1^c(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2^c(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_3^c(\xi, \eta) = \eta$$

สำหรับชั้นประกอบที่มี 6 โหนด ดังรูป 3.5 b ฟังก์ชันรูปร่างพหุนามกำลังสอง คือ

$$N_1^c(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$

$$N_2^c(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_3^c(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4^c(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$N_5^c(\xi, \eta) = 4\xi\eta$$

$$N_6^c(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

หลังสร้างโครงข่ายที่เหมาะสม อนุพันธ์เชิงตัวเลขที่สร้างขึ้นในแต่ละบริเวณย่อยในชั้นประกอบอิสระ สามารถใช้วิธีการประมาณค่าโดยใช้สูตรปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre) ใน 2 มิติ

ให้ I คือปริพันธ์สองชั้น (double integration) ของฟังก์ชัน $f(\xi, \eta)$ คือ

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.16)$$

$$I \approx \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n w_j \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta)$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta)$$

พิจารณาจากจุดเกาส์ (Gauss point) และค่าน้ำหนัก (weight) 4 จุด ดังนั้นสูตรปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์คือ

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^4 w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (3.17)$$

ดังตาราง 3.1 ต่อไปนี้

ตาราง 3.1 การประมาณค่าปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์ใน 2 มิติ แบบน้ำหนัก 4 จุด

จุดเกาส์		ค่าน้ำหนัก
ξ_i	η_i	w_i
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{27}{96}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{96}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{96}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{25}{96}$

3.3 การแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น (Solving system of linear equations)

หลังการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์และวิฤตสมการโดยใช้ระเบียบวิธีขั้นประกอบอันตะแล้ว จะทำให้สามารถจัดรูปแบบใหม่ของปัญหาเป็นสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปของ

$$\tilde{A}\bar{x} = \bar{B} \quad (3.18)$$

โดยที่

- \tilde{A} คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์
 \bar{x} คือ เวกเตอร์ผลเฉลยรวมทั้งหมด ณ เวลาหนึ่ง
 \tilde{B} คือ เวกเตอร์ค่าคงที่ด้านขวามือ

จากนั้นหาผลเฉลยของระบบสมการโดยแก้สมการแบบวิธีโดยตรง (direct method) หรือวิธีการทำซ้ำ (iterative method) ขึ้นกับแต่ละปัญหา สำหรับปัญหาที่พิจารณาเป็นปัญหาที่มีการแบ่งโดเมนเป็นชั้นประกอบย่อยจำนวนมาก จึงทำให้การคำนวณในวิธีโดยตรงมีจำนวนมาก และใช้เวลานาน เช่น การกำจัดของเกาส์ (Guass elimination) จึงไม่เป็นที่นิยม ดังนั้นวิธีทำซ้ำจึงถูกนำมาใช้เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณที่สิ้นเปลือง ในวิทยานิพนธ์ใช้วิธีเกาส์-ไซเดล (Guass-Seidel method) ดังรายละเอียดในหนังสือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของ ผศ.ดร. พรชัย [16] และของ Reddy และ Gartling [17]

วิธีเกาส์-ไซเดล

หลักการทำซ้ำนี้นำมาใช้เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการทั้งความเร็ว ความเค้นและ ความดันจากสมการ (3.18) โดยให้

$$\tilde{A} = \tilde{D} - \tilde{L} - \tilde{U} \quad (3.19)$$

ดังนั้น

$$(\tilde{D} - \tilde{L} - \tilde{U})\bar{x} = \tilde{B} \quad (3.20)$$

จากสมการ (3.20) จะได้ว่า

$$(\tilde{D} - \tilde{L})\bar{x}^{(k)} = \tilde{U}\bar{x}^{(k-1)} + \tilde{B} \quad (3.21)$$

$$\bar{x}^{(k)} = (\tilde{D} - \tilde{L})^{-1} \tilde{U}\bar{x}^{(k-1)} + (\tilde{D} - \tilde{L})^{-1}\tilde{B} \quad (3.22)$$

ให้ $\tilde{M} = (\tilde{D} - \tilde{L})^{-1}\tilde{U}$ และ $\tilde{c} = (\tilde{D} - \tilde{L})^{-1}\tilde{B}$

จัดให้อยู่ในรูปแบบวิธีเกาส์-ไซเดลดังนี้

$$\bar{x}^{(k)} = \tilde{M}\bar{x}^{(k-1)} + \tilde{c} \quad (3.23)$$

โดยที่

- \tilde{D} คือ เมทริกซ์ทแยงของ \tilde{A}
 \tilde{L} คือ เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างของ \tilde{A}
 \tilde{U} คือ เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนของ \tilde{A}
 $\bar{x}^{(k)}$ คือ เวกเตอร์ผลเฉลยรวมทั้งหมด ณ ชั้นเวลา k
 $\bar{x}^{(k-1)}$ คือ เวกเตอร์ผลเฉลยรวมทั้งหมด ณ ชั้นเวลา $k-1$

3.4 เกรเดียนต์รีคัฟเวอรี (Gradient recovery)

ในการหาผลเฉลยจะมีค่าแตกต่างกันในแต่ละชั้นประกอบที่มีในคร่อมกัน จึงทำให้ผลเฉลยที่ได้ขาดความต่อเนื่อง ดังนั้นการใช้เทคนิคเกรเดียนต์รีคัฟเวอรี จึงช่วยปรับเรียบค่าผลเฉลยเพื่อความแม่นยำและเร่งเข้าสู่ผลเฉลยที่ถูกต้อง ในวิทยานิพนธ์นี้ จะใช้เทคนิคเกรเดียนต์รีคัฟเวอรีที่เป็นแบบวิธีตรงเฉพาะที่ (local direct method) ช่วยหาค่าผลเฉลยเข้าสู่อย่างราบเรียบ วิธีการนี้มีผู้นำไปใช้ได้ผลเป็นที่ยอมรับแล้ว สามารถอ่านประกอบได้จากของ Matallah และคณะ [18] และของ Levine [19,20]

ส่วนประกอบเกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละสมาชิก ($G_k^e(x, t)$) อยู่ในรูปแบบ

$$G_k^e(x, t) = \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_k} \quad (3.24)$$

โดยที่ $k = 1, 2$

ประมาณค่าเวกเตอร์ความเร็ว $U(x, t)$ ด้วยระเบียบวิธีชั้นประกอบอันตะกาเลอรีคิน จะได้

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) U_j(t) \quad (3.25)$$

โดยที่

N คือ จำนวนชั้นประกอบต่อโนด

จากสมการ (3.24) และ (3.25) สามารถคำนวณเกรเดียนต์ความเร็วได้เป็น

$$G_k^e(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x_k} U_j(t) \quad (3.26)$$

การทำลักษณะนี้เป็นการเฉลี่ยค่าเกรเดียนต์ความเร็วของแต่ละชั้นประกอบที่ใช้ในคร่อมกันให้มีเพียงค่าเดียว

3.5 ค่าอินเวเรียนต์อันดับสองของเทนเซอร์ของอัตราการผลิตรูป (The second invariants of the rate of strain tensor , II)

เป็นค่าบ่งบอกความเค้นเฉือนโดยรวม ถ้าค่าอินเวเรียนต์อันดับสองของเทนเซอร์ของอัตราการผลิตรูปมีค่ามากแสดงว่ามีความเค้นเฉือนสูง ในทางตรงกันข้ามถ้าค่าอินเวเรียนต์อันดับสองของเทนเซอร์ของอัตราการผลิตรูปมีค่าน้อยแสดงว่ามีความเค้นเฉือนต่ำ ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ในการคำนวณค่าความเค้นเฉือนบริเวณผนังตาย เพื่อพิจารณาแรงเฉือนที่เข้ากระทำกับของไหลที่ไหลผ่านตาย ดังสมการ (3.27)

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right\} \quad (3.27)$$

3.6 ตำแหน่งผิวอิสระ (Free surface location)

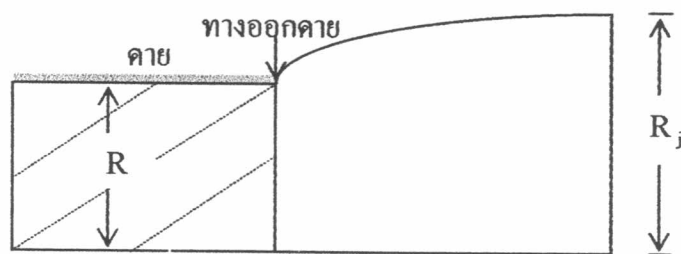
ปรากฏการณ์การรวมตัวที่ปลายตาย สามารถอธิบายได้จากรัศมีที่เพิ่มขึ้นของของไหลขณะที่ออกจากตาย ซึ่งอัตราการผลิตรูป (χ) วัดจาก

$$\chi = \frac{R_j}{R} \quad (3.28)$$

โดยที่

R_j คือ รัศมีพุ่งออก

R คือ รัศมีของตาย



รูป 3.6 ของไหลที่พุ่งออกจากตาย

สำหรับอัตราการผลิตรูปของของไหลที่ออกจากตาย เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอก เป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงความเร็ว ทำให้อัตราการผลิตรูปแตกต่างกัน ดังนั้นการวัดตำแหน่งการรวมตัวให้แม่นยำสำหรับกรณีของพอลิเมอร์หลอมเหลวที่มีความเป็นอีลาสติก จึงมีประโยชน์อย่างมากต่อการควบคุมขนาดและรูปร่างในกระบวนการอัดรีด

3.6.1 วิธีการทำนายสายกระแส

ขนาดการรวมตัวในกระบวนการอัดรีดของการไหลที่ปลายตาย ใช้วิธีผิวอิสระเฉพาะที่ จากการศึกษาของ Crochet และคณะ [21] ผ่านการทำซ้ำ ตามเงื่อนไขขอบ 3 ข้อ ที่ต้องกำหนด บนผิวอิสระ

$$V_r n_r + V_z n_z = 0 \quad (3.29)$$

$$t_r n_r + t_z n_z = s \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (3.30)$$

$$t_r n_z - t_z n_r = 0 \quad (3.31)$$

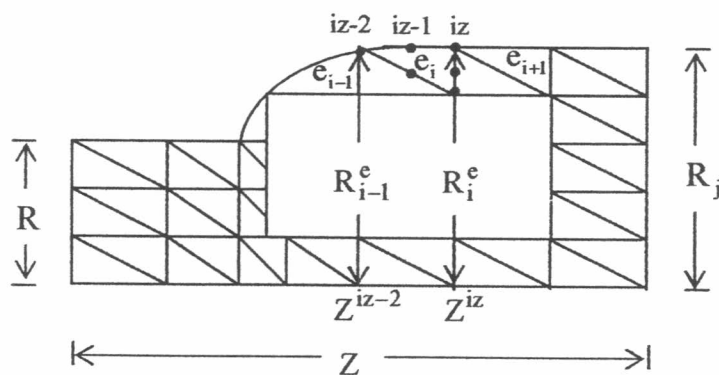
โดยที่

V_r	คือ	ความเร็วรัศมี
V_z	คือ	ความเร็วในแนวแกน z
n_r, n_z	คือ	ส่วนประกอบของแนวฉากกับผิวอิสระ
t_r, t_z	คือ	แรงผิวฉาก
ρ_1, ρ_2	คือ	รัศมีความโค้งในแนวรัศมีและแกน z
s	คือ	สัมประสิทธิ์แรงตึงผิว

เงื่อนไข 3 ข้อนี้ใช้เพื่ออธิบายขอบเขตและรูปร่างการรวมตัวของของไหลที่ปลายตายในกระบวนการอัดรีด

$$R_j = R + \int_{z=0}^{\infty} \frac{V_r(z)}{V_z(z)} dz \quad (3.32)$$

ในวิทยานิพนธ์นี้ ใช้กฎการประมาณพื้นที่ใต้กราฟของซิมป์สัน (Simpsons quadrature rule) เพื่อประมาณค่าปริพันธ์ของสมการ (3.32)



รูป 3.7 การพิจารณาโนดที่ใช้ในการทำนายการรวมตัว

โดยใช้จุด 3 จุด ในแต่ละชั้นประกอบเพื่อประมาณค่าอัตราการรวมตัวจากค่า $z = 0$ ถึง $z = 2$ ตามรูป 3.7 ดังนั้นสมการ (3.32) เขียนได้ดังนี้

$$R^{(e)}(z) = R^{(e_{i-1})} + \int_z \frac{V_r^{e_i}(z)}{V_z^{e_i}(z)} dz \quad (3.33)$$

เมื่อ

$$\int_z \frac{V_r^{e_i}(z)}{V_z^{e_i}(z)} dz = \frac{h}{6} \left[\frac{V_r^{e_i}(iz-2)}{V_z^{e_i}(iz-2)} + 4 \frac{V_r^{e_i}(iz-1)}{V_z^{e_i}(iz-1)} + \frac{V_r^{e_i}(iz)}{V_z^{e_i}(iz)} \right] \quad (3.34)$$

$$h = z^{iz} - z^{iz-2}$$

โดยที่

h คือ ความยาวของชั้นประกอบ

e_i คือ ชั้นประกอบที่ i

3.6.2 วิธีการทำนายของตัวแบบอ็อลดรอยด์บี

ในงานวิจัยของแทนเนอร์ Tanner [22] ได้เสนอวิธีการทำนายผิวอิสระในกระบวนการอัดรีดที่มีการรวมตัวของของไหลอ็อลดรอยด์บี ดังนี้

$$\chi = 0.13 + \left(1 + \frac{1}{2} S_r^2\right)^{\frac{1}{6}} \quad (3.36)$$

เมื่อ

$$S_r = \left(\frac{N_1}{2\tau_{rz}} \right)_w \quad (3.37)$$

สำหรับการไหลเข้ามาแบบพาราโบล่า (Poiseuille flow) และตัวแบบอ็อลดรอยด์บี

$$N_1 = \tau_{zz} - \tau_{rr} = 2\lambda_1 \mu_1 \dot{\gamma}^2 \quad (3.38)$$

$$N_2 = \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} = 0 \quad (3.39)$$

$$\tau_{rz} = (\mu_1 - \mu_2) \dot{\gamma} \quad (3.40)$$

โดยที่

τ_{rz} คือ ความเค้นเฉือนในแนวแกน z บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน r

τ_{rr} คือ ความเค้นเฉือนในแนวแกน r บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน r

τ_{zz} คือ ความเค้นเฉือนในแนวแกน z บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z

$\tau_{\theta\theta}$ คือ ความเค้นเฉือนในแนวแกน θ บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน θ

ดังนั้น

$$S_r = \frac{\lambda_1 \mu_1 \dot{\gamma}_w}{\mu_1 + \mu_2} = \beta We \quad (3.41)$$

เมื่อ

$$\beta = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad (3.42)$$

โดยที่

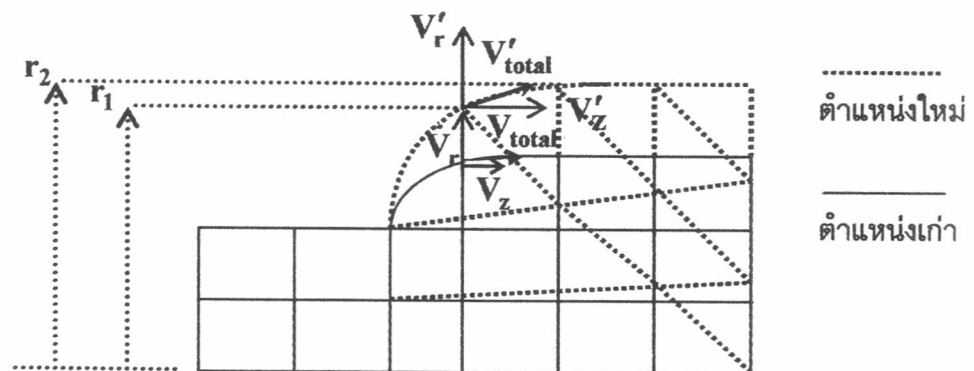
$$We = \lambda_1 \dot{\gamma}_w \quad (3.43)$$

$\dot{\gamma}_w$ คือ อัตราการเฉือนที่ผนังตาย

การประมาณค่าอัตราการรวมตัวของของไหลนิวโตเนียนในพิกัดเชิงระนาบ $\chi = 1.190 + 0.002$
และในพิกัดรูปทรงกระบอก $\chi = 1.127 + 0.003$

3.7 การแสดงเวกเตอร์ภาพฉายของผิวผลเฉลย (Surface solution reprojection)

หลังจากการปรับผิวอิสระเป็นที่เรียบร้อยแล้ว ต้องทำการปรับความเร็วให้สอดคล้องกับตำแหน่งจุดพิกัดใหม่ที่ได้ดังรูป 3.8



รูป 3.8 การปรับผิวอิสระ

จุดตัวอย่าง (r_1, z_1) และ (r_2, z_2) เพื่อปรับตำแหน่งใหม่ ขนาดของความเร็วรวม (V_{total})

$$V_{total} = \sqrt{V_r^2 + V_z^2} \quad (3.44)$$

เพื่อปรับตำแหน่งพื้นผิว สำหรับตำแหน่งผิวอิสระใหม่ มุม α ระหว่างขอบ และแนวนอน z คือ

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1} \right) \quad (3.45)$$

สามารถปรับความเร็วในแนวแกน r และ z ได้ใหม่ ดังนี้

$$V'_r = V_{\text{total}} \sin(\alpha) \quad (3.46)$$

$$V'_z = V_{\text{total}} \cos(\alpha) \quad (3.47)$$

โดยที่

V'_r คือ ความเร็วในแนวแกน r ณ ตำแหน่งใหม่

V'_z คือ ความเร็วในแนวแกน z ณ ตำแหน่งใหม่

3.8 ค่าคลาดเคลื่อน (Error norm)

ในการตรวจสอบค่าประมาณของผลเฉลยที่ยอมรับได้ และเพื่อเป็นการกำหนดการลู่เข้าของผลเฉลย จึงใช้การประมาณค่าผิดพลาดสำหรับผลเฉลยที่เกิดจากการคำนวณคือ

$$\|E(x)\|_{\infty} = \frac{\|\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n\|_{\infty}}{\|\bar{x}^{n+1}\|_{\infty}} \leq \varepsilon \quad (3.48)$$

โดยที่

\bar{x}^n คือ เวกเตอร์ผลเฉลยของขั้นเวลา n

\bar{x}^{n+1} คือ เวกเตอร์ผลเฉลยของขั้นเวลา $n+1$

ε คือ ค่าคงตัวน้อย ๆ ในที่นี้มีค่าเท่ากับ 10^{-5}

$\|E(x)\|_{\infty}$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลย

3.9 ขั้นตอนของเทย์เลอร์-กาลอร์กิน (Taylor-Galerkin algorithm)

สำหรับการไหลของของไหลวิสโคอีลาสติก สมการองค์ประกอบความเค้นของตัวแบบอีลด์รอยด์บีที่อยู่ในระบบไร้หน่วยคือ

$$\text{We}\tilde{T}_t = 2\mu_1\tilde{D} - \tilde{\tau} + \text{We} \left[\tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{U} + (\nabla \tilde{U})^t \cdot \tilde{\tau} - \tilde{U} \cdot \nabla \tilde{\tau} \right] \quad (3.49)$$

เพิ่มสมการความต่อเนื่อง (2.7) และสมการเนเวียร์-สโตกส์ที่ได้จากสมการโมเมนตัม (2.11) และสมการองค์ประกอบตัวแบบอ็อลดรอยด์บี โดยใช้หลักการขึ้นประกอบอันตะเคมีมิติซิทเทย์เลอร์กาเลอรีคินเพรชเซอร์คอร์ดรีชันที่อธิบายใน Matallah [23] พร้อมกับวิธีเวลาครึ่งขั้นเคมีมิติซิท

หลักการเทย์เลอร์กาเลอรีคินอาศัยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) ในเวลา และใช้ระเบียบการเพรชเซอร์คอร์ดรีชันรวมเข้ากัน จากนั้นใช้หลักการขึ้นประกอบอันตะกาเลอรีคิน โดยแบ่งโดเมนการไหลเป็นโครงข่ายรูปสามเหลี่ยม ให้ฟังก์ชันการประมาณค่าเชิงเส้นตรงสำหรับค่าความดัน และฟังก์ชันการประมาณค่าพหุนามกำลังสองสำหรับค่าความเร็วและความเค้น ขั้นตอนเทย์เลอร์กาเลอรีคินแบ่งเป็น 3 ขั้นตอนต่อขั้นเวลาที่อธิบายไว้ในงานวิจัยของ Ngamaramvaranggul และ Webster [24] ดังนี้

ขั้นตอน 1a

$$\frac{2\text{Re}}{\Delta t}(\bar{U}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{U}^n) = [\nabla \cdot (\tilde{\tau} + 2\mu_2 \tilde{D}) - \text{Re} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} - \nabla P]^n + \nabla \cdot \mu_2 (\tilde{D}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{D}^n) \quad (3.50)$$

$$\frac{2\text{We}}{\Delta t}(\tilde{\tau}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\tau}^n) = [2\mu_1 \tilde{D} - \tilde{\tau} + \text{We}(\tilde{\tau} \cdot \nabla \bar{U} + (\nabla \bar{U})^t \cdot \tilde{\tau} - \bar{U} \cdot \nabla \tilde{\tau})]^n \quad (3.51)$$

ขั้นตอน 1b

$$\frac{\text{Re}}{\Delta t}(\bar{U}^* - \bar{U}^n) = [\nabla \cdot (2\mu_2 \tilde{D}) - \nabla P]^n + [\nabla \cdot \tilde{\tau} - \text{Re} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U}]^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \cdot \mu_2 (\tilde{D}^* - \tilde{D}^n) \quad (3.52)$$

$$\frac{\text{We}}{\Delta t}(\tilde{\tau}^{n+1} - \tilde{\tau}^n) = [2\mu_1 \tilde{D} - \tilde{\tau} + \text{We}(\tilde{\tau} \cdot \nabla \bar{U} + (\nabla \bar{U})^t \cdot \tilde{\tau} - \bar{U} \cdot \nabla \tilde{\tau})]^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

ในขั้นตอนที่ 1a ใช้ข้อมูลที่เวลาเริ่มต้น n เพื่อคำนวณค่าความเร็ว ($\bar{U}^{n+\frac{1}{2}}$) และความเค้น ($\tilde{T}^{n+\frac{1}{2}}$) ที่เวลาครึ่งขั้น และในขั้นตอนที่ 1b ใช้ข้อมูลเริ่มต้นที่ได้จากขั้นตอนที่ 1a เพื่อคำนวณค่าความเร็ว (\bar{U}^*) และความเค้น (\tilde{T}^{n+1})

ขั้นตอน 2

$$\nabla^2(P^{n+1} - P^n) = \frac{2\text{Re}}{\Delta t} \nabla \bar{U}^* \quad (3.54)$$

ในขั้นตอนที่ 2 หาค่าความดัน (P^{n+1}) จากข้อมูลเริ่มต้นที่ได้จากขั้นตอนที่ 1b

ขั้นตอน 3

$$\frac{2\text{Re}}{\Delta t} (\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^*) = -(P^{n+1} - P^n) \quad (3.55)$$

จากข้อมูลในขั้นตอนที่ 1b และขั้นตอนที่ 2 นำมาหาค่าความเร็ว (\bar{U}^{n+1}) ที่เวลาเต็มขั้น ในขั้นตอนที่ 3 โดยจะใช้วิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลในการหาผลเฉลยทุกขั้นตอน

การถ่วงน้ำหนักกาเลอริคินจะใช้ทุกระยะในสมการองค์ประกอบโดยการประมาณค่า ความเร็วและความเค้นด้วยฟังก์ชันรูปร่างพหุนามกำลังสอง (ϕ_j) บนสมาชิกสามเหลี่ยม 6 โหนด และฟังก์ชันรูปร่างเส้นตรง (ψ_k) บนสมาชิกสามเหลี่ยม 3 โหนด สำหรับความดัน

$$(T_{rr}, T_{rz}, T_{zz}, T_{\theta\theta})^n = (T_{1j}, T_{2j}, T_{3j}, T_{4j})^n \phi_j \quad (3.56)$$

$$(V_{rj}, V_{zj})^n = (V_{rj}, V_{zj})^n \phi_j \quad (3.57)$$

$$(P_k)^n = (P_k)^n \psi_k \quad (3.58)$$

จาก (3.50) – (3.55) จะได้ว่า

ขั้นตอน 1a

$$\left[\frac{2\text{Re}}{\Delta t} M + \frac{1}{2} \mu_2 S \right] (\bar{U}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{U}^n) = \left\{ -[\mu_2 S + \text{Re} N(\bar{U})] \bar{U} - B\tilde{T} \right\}^n + L^t P^n \quad (3.59)$$

$$\frac{2\text{We}}{\Delta t} M (\tilde{T}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{T}^n) = \left[2\mu_1 M(L + L^t) - \{M + \text{We} N(\bar{U})\} \tilde{T} + \text{We} \{N_1(\tilde{T})L + (N_1(\tilde{T})L)^t\} \right]^n \quad (3.60)$$

ขั้นตอน 1b

$$\left[\frac{\text{Re}}{\Delta t} M + \frac{1}{2} \mu_2 S \right] (\bar{U}^* - \bar{U}^n) = \left\{ -[\mu_2 S + \text{Re} N(\bar{U})] \bar{U} - B\tilde{T} \right\}^{n+\frac{1}{2}} + L^t P^n \quad (3.61)$$

$$\frac{\text{We}}{\Delta t} M(\tilde{T}^{n+1} - \tilde{T}^n) = \left[2\mu_1 M(L + L^t) - \{M + \text{We} N(\bar{U})\} \tilde{T} + \text{We} \{N_1(\tilde{T})L + (N_1(\tilde{T})L)^t\} \right]^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.62)$$

ขั้นตอน 2

$$\frac{\Delta t}{2\text{Re}} K(P^{n+1} - P^n) = -L\bar{U}^* \quad (3.63)$$

ขั้นตอน 3

$$\frac{2\text{Re}}{\Delta t} M(U^{n+1} - U^*) = L^t(P^{n+1} - P^n) \quad (3.64)$$

และให้

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega$$

$$N(\bar{U})_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \bar{U}_1 \nabla \phi_j d\Omega$$

$$N_1(\tilde{T})_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \tilde{T}_1 \phi_j d\Omega$$

$$K_{mn} = \int_{\Omega} \nabla \psi_m \nabla \psi_n d\Omega$$

$$L = (L_1, L_2)$$

$$(L_1)_{in} = \int_{\Omega} \psi_n \frac{\partial \phi_i}{\partial r} d\Omega$$

$$(L_2)_{in} = \int_{\Omega} \psi_n \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^t & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$(S_{11}) = \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + \frac{\phi_i \phi_j}{r^2} \right\} d\Omega$$

$$(S_{12}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$

$$(S_{22}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right\} d\Omega$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 - B_3 & B_2 & 0 & B_3 \\ 0 & B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_1)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial r} d\Omega$$

$$(B_2)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$

$$(B_3)_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\phi_i \phi_j}{r} d\Omega$$

$$d\Omega = r dr dz$$

$$i, j, l = 1, 2, 3$$

$$m, n = 1, 2$$

โดยที่

Δt คือ ความแตกต่างของเวลา

\bar{U}^n คือ เวกเตอร์ความเร็วที่เวลา t^n

$\bar{U}^{n+\frac{1}{2}}$ คือ เวกเตอร์ความเร็วที่เวลา $t^{n+\frac{1}{2}}$

\bar{U}^* คือ เวกเตอร์ความเร็วที่เวลาตรงกลาง

\bar{U}^{n+1} คือ เวกเตอร์ความเร็วที่เวลา t^{n+1}

\tilde{T}^n	คือ	เวกเตอร์ความเค้นที่เวลา t^n
$\tilde{T}^{n+\frac{1}{2}}$	คือ	เวกเตอร์ความเค้นที่เวลา $t^{n+\frac{1}{2}}$
\tilde{T}^{n+1}	คือ	เวกเตอร์ความเค้นที่เวลา t^{n+1}
P^n	คือ	เวกเตอร์ความดันที่เวลา t^n
P^{n+1}	คือ	เวกเตอร์ความดันที่เวลา t^{n+1}
M	คือ	เมทริกซ์มวล (mass matrix)
S	คือ	เมทริกซ์การแพร่โมเมนตัม (momentum diffusive matrix)
K	คือ	เมทริกซ์แข็งแกร่งความดัน (pressure stiffness matrix)
N	คือ	เมทริกซ์การพา
L	คือ	เมทริกซ์เกรเดียนต์ความดัน