บรรณานุกรม

หนังสือ

กมล เอกไทยเจริญ. พีชคณิตนามธรรม. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์กราฟิคอาร์ต, 2523.

ทบวงมหาวิทยาลัย. คณิตศาสตร์ เล่ม 1. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์อักษรเจริญทัศน์, 2524.

ยุพิน พิพิธกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : บริษัทบพิธการพิมพ์, 2524.

ราชบัณฑิตยสถาน. พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : นันทชัยการพิมพ์, 2523.

วัชรี บูรณสิงห์. พฤติกรรมการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2523.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.011 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2524.

______. เอกสารเสริมความรู้สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1. กรุงเทพมหานคร : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2522.

ศุชาติ จันทร์ทิพย์. "ความสัมพันธ์ระหว่างการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนกับในมหาวิทยาลัย." ใน การประชุมวิชาการครั้งที่ 1 เรื่องการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย, หน้า 21. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์, 2524.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. _ตรรกวิทยาเบื้องต้น_. กรุงเทพมหานคร : บริษัทประชาชนการพิมพ์, 2515.

สุเทพ ทองอยู่. _ทฤษฎีเซต_. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524.

<u>บทความ</u>

ศักดา บุญโต. "การพิสูจน์พีชคณิตของเซตโดยใช้ตารางการเป็นสมาชิก." _วารสารคณิตศาสตร์_ 26 (พฤศจิกายน – ธันวาคม 2525) : 8 – 12.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. "เสริมความรู้เกี่ยวกับเซต." _วารสารคณิตศาสตร์_ 24 (พฤษภาคม – มิถุนายน 2522) : 54 – 56.

สุรางค์ โค้วตระกูล. "ทฤษฎีพัฒนาการของเปียร์เจต์." _วารสารครุศาสตร์_ 1 (ธันวาคม 2523) : 8 – 27.

<u>เอกสารอื่น ๆ</u>

นพดล สุธาพาณิชย์. "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแบบยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 5." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524.

พิชากร แปลงประสพโชค. "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น" ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2518.

เสกสรรค์ คำกระบี่. "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์" ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2517.

สุมานะ อาจหาญ. "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3" ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2520.

อำพล ธรรมเจริญ. "การศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น" ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร, 2516.

Books

Anatasi, Anne. Psychological Testing. 2d ed. New York : Macmillan Company, 1961.

Beggs, Donald L. and Lewis, Ernest L. Measurement and Evaluation in School. U.S.A. Houghton Mifflin Company, 1975.

Bruner, Jerome S. The Process of Education. New York : Vintage Book, 1960.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York : McGraw - Hill Book Company, 1966.

Garrett, Henry E. Statistics in Psychology and Education. New York : Longman Green and Company, 1958.

Mehrens, William A. and Lehman, Irvin J. Standardized Test in Education. 2d ed. New York : Holt Rinehart and Winston, 1975.

Piaget, Jean. The Psychology of the Child. New York : Trans by Halen Weaver, Basic Book, 1969.

Pinter, Charles C. Set Theory. Massachusetts : Addison - Wesley Publishing Company, 1971.

Sterling, Theodor D. and Pallack, Seymour V. Introduction to Statistical Data Processing. Engle wood Cliffs, N.J. : Prentice - Hall, 1968.

Yamane, Taro. Statistics : An Introductory Analysis. 2d ed. New York : Harper & Row, 1967.

Zehna, Peter W. and Johnson, Robert L. Elements of Sets Theory. Boston : Allyn and Bacon Inc, 1972.

Articles

Fehr, Howard F. "Reform of Mathematics Education Around the World." The Mathematics Teacher 58(January 1965): 37-44.

Floyd, James Russell. "The Effect of Algebra of Sets Instructions as an Introductory Technique for Basic Concepts Comprehension and Mathematics Attitude of Algbra Students" Dissertation Abstracts International 37(December 1976): 3478-A.

Garabian, Charles. "The Effects of Proof on Achievement and Reasoning Ability of Students in Geometry" Dissertation Abstracts International 42(August 1981): 586-A.

Hanna, Gila. "A Critique of the Role of Rigorous Proof in the Secondary School Mathematics Curriculum," Dissertation Abstracts International 42(April 1982): 4275-A.

Heifrich, Arnost. "Some Contributions to the Psychology of Proof Construction in Higher Mathematics." Dissertation Abstracts International 40(September 1979): 1325-A.

Myers, Robert Harold. The Role of the Axiomatic Method in Secondary School Mathematics." Dissertation Abstracts International 33(August 1972): 665-A.

ภาคผนวก ก.

ตารางข้อมูลและตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูล

ตารางที่ 3 แสดงจำนวนผู้ตอบถูกในกลุ่มสูง (R_U) จำนวนผู้ตอบถูกในกลุ่มต่ำ (R_L) ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบปรนัยเรื่อง "การดำเนินการของเซต" ที่ได้จากการทดลองใช้แบบทดสอบ

ข้อ	R_U	R_L	p	r	ข้อ	R_U	R_L	p	r
1	20	12	.80	.40	16	17	12	.73	.25
2	17	13	.75	.20	17	10	6	.40	.20
3	16	12	.70	.20	18	18	10	.70	.40
4	14	5	.48	.45	19	15	9	.60	.30
5	17	11	.70	.30	20	14	7	.53	.35
6	13	11	.60	.20	21	16	11	.68	.25
7	14	5	.48	.45	22	18	12	.75	.30
8	17	8	.63	.45	23	18	12	.75	.30
9	20	12	.80	.40	24	20	12	.80	.40
10	16	2	.45	.70	25	19	11	.75	.40
11	15	8	.58	.35	26	14	3	.45	.55
12	7	3	.25	.20	27	18	11	.73	.35
13	20	12	.80	.40	28	19	11	.75	.40
14	15	10	.63	.25	29	19	13	.80	.30
15	15	5	.50	.50	30	10	6	.40	.20

ตารางที่ 4 แสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์ความเที่ยงของแบบทดสอบแบบปรนัยที่ได้จากการทดลองใช้แบบทดสอบ

X	fX	fX	fX^2
30	1	30	900
26	4	104	2704
25	6	150	3750
24	1	24	576
23	1	23	529
22	1	22	484
21	2	42	882
20	3	60	1200
19	4	76	1444
18	4	72	1296
17	1	17	289
15	2	30	450
14	1	14	196
13	3	39	507
12	3	26	432
11	3	33	363
	$\sum f = 40$	$\sum fX = 772$	$\sum fx^2 = 16002$

หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต จากสูตร

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{772}{40}$$

$$= 19.30$$

หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบ จากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(40 \times 16002) - (772)^2}{40 \times 39}}$$

$$= \sqrt{\frac{640080 - 595984}{1560}}$$

$$= \sqrt{28.2667}$$

$$= 5.3166$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ความเที่ยงของแบบทดสอบแบบปรนัย จากสูตร

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum pq}{S^2}\right]$$

เมื่อ n **แทน จำนวนข้อสอบ 30 ข้อ**

S^2 **แทนความแปรปรวนของคะแนนจากแบบสอบเท่ากับ 28.267**

$\sum pq$ **แทน ผลรวมของผลคูณสัดส่วนของผู้ตอบถูกกับสัดส่วนของผู้ตอบผิดในแต่ละข้อเท่ากับ** 6.21

$$r_{tt} = \frac{30}{29}\left[1 - \frac{6.21}{28.267}\right]$$

$$= 1.03448 \times 0.7804$$

$$= 0.8072$$

ตารางที่ 5 แสดงคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบแบบอัตนัย โดยการตรวจของผู้ตรวจ 2 คน และคะแนนเฉลี่ยของการตรวจ ในการทดสอบ ในครั้งที่ 2

คะแนนของคนตรวจคนที่ 1	คะแนนของคนตรวจคนที่ 2	คะแนนเฉลี่ย	คะแนนของคนตรวจคนที่ 1	คะแนนของคนตรวจคนที่ 2	คะแนนเฉลี่ย
14	16	15	10	11	11
23	22	23	20	22	21
12	14	13	29	30	30
18	22	20	18	18	18
22	23	22	20	21	21
10	11	10	10	11	11
7	7	7	17	16	17
7	8	8	23	24	24
16	14	15	15	16	15
15	16	16	18	21	20
8	10	9	29	30	30
20	24	22	21	22	22
11	7	9	10	10	10
12	14	13	11	12	12
8	12	10	16	15	16
22	21	22	21	18	20
15	14	15	15	16	16
25	28	27	13	12	13
21	18	20	21	21	21
25	26	26	26	22	24

ตารางที่ 6 แสดงค่าเฉลี่ย $\bar{X}$ และความแปรปรวนเป็นรายข้อของแบบทดสอบแบบอัตนัยที่ทดลองใช้

ข้อ	$\bar{X}$	s_i^2
1	4.975	9.302
2	5.5	8.872
3	7.05	3.536
		$\sum s_i^2 = 21.710$

1.3 หาค่าสัมประสิทธิ์ของความเชื่อถือได้จากการตรวจแบบทดสอบแบบอัตนัยของผู้ตรวจ 2 คน จากสูตร

$$r_{xy} = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[n\sum X^2 - (\sum X)^2][n\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

$$= \frac{(40 \times 131231) - (674 \times 695)}{\sqrt{[(40 \times 12792) - (674)^2]\,[(40 \times 13543) - (695)^2]}}$$

$$= \frac{56490}{\sqrt{58045.911}}$$

$$= 0.97319$$

1.4 หาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบแบบอัตนัย

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_x^2}\right)$$

เมื่อ n แทนจำนวนข้อสอบ 3 ข้อ

s_i^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนจากข้อสอบแต่ละข้อ

s_x^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบอัตนัย

$$\alpha = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{21.710}{36.416}\right)$$

$$= 1.5 \times 0.403833$$

$$= .60575$$

ตารางที่ 7 แสดงคะแนนจากแบบทดสอบปรนัยและแบบทดสอบอัตนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คนที่	นักเรียนชาย คะแนนจากแบบทดสอบปรนัย	นักเรียนชาย คะแนนจากแบบทดสอบอัตนัย	คะแนนรวม	คนที่	นักเรียนหญิง คะแนนจากแบบทดสอบปรนัย	นักเรียนหญิง คะแนนจากแบบทดสอบอัตนัย	คะแนนรวม
1	27	21	48	1	21	19	40
2	17	15	32	2	25	21	46
3	17	24	41	3	25	17	42
4	21	20	41	4	25	24	49
5	12	17	29	5	27	27	54
6	17	9	26	6	27	28	55
7	19	7	26	7	25	24	49
8	12	28	40	8	22	19	41
9	17	18	35	9	19	14	33
10	17	8	25	10	21	22	43
11	23	14	37	11	20	5	25
12	17	16	33	12	18	22	40
13	27	13	40	13	21	22	33
14	20	15	35	14	19	20	39
15	15	15	30	15	8	13	21
16	20	15	36	16	16	19	35
17	23	9	32	17	21	19	40
18	16	9	25	18	25	10	35
19	17	7	24	19	25	13	38
20	12	14	26				
21	11	21	31				

ตารางที่ 8 แสดงคะแนนจากแบบทดสอบปรนัยและแบบทดสอบอัตนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คนที่	นักเรียนชาย			คนที่	นักเรียนหญิง		
	คะแนนจากแบบทดสอบปรนัย	คะแนนจากแบบทดสอบอัตนัย	คะแนนรวม		คะแนนจากแบบทดสอบปรนัย	คะแนนจากแบบทดสอบอัตนัย	คะแนนรวม
1	26	20	46	1	27	24	51
2	20	26	46	2	22	23	45
3	25	22	47	3	15	6	21
4	24	29	53	4	16	17	33
5	24	29	53	5	18	26	44
6	25	20	45	6	21	25	46
7	25	17	42	7	24	27	51
8	25	21	46	8	27	25	52
9	21	21	42	9	13	13	26
10	22	18	40	10	15	16	31
11	20	10	30	11	13	16	29
12	19	9	28	12	17	19	36
13	22	20	42	13	14	11	25
14	24	24	47	14	23	24	47
15	27	18	45	15	16	28	44
16	22	24	46	16	24	18	42
17	23	12	35	17	22	26	48
18	20	25	45	18	17	9	26
19	20	27	47	19	16	13	29
20	28	20	48	20	14	23	37

จากข้อมูลในตาราง หาค่าเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนรวมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ได้ดังนี้

หาค่าเฉลี่ยของคะแนนรวมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{1459}{40}$$

$$= 36.475$$

หาค่าเฉลี่ยของคะแนนรวมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{1636}{40}$$

$$= 40.90$$

หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนรวมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(40 \times 5597) - (1459)^2}{40 \times 39}}$$

$$= \sqrt{70.717}$$

$$= 8.0[illegible]$$

หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนรวมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(40 \times 69900) - (1636)^2}{40 \times 39}}$$

$$= \sqrt{76.6051}$$

$$= 8.752$$

ตารางที่ 9 แสดงค่าเฉลี่ย และความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	$\bar{X}$	S	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	$\bar{X}$	S
นักเรียนหญิง	40.42	8.95	นักเรียนหญิง	38.15	10.01
นักเรียนชาย	32.91	6.58	นักเรียนชาย	43.65	6.42
คะแนนแบบทดสอบปรนัย	19.65	4.78	คะแนนแบบทดสอบปรนัย	20.90	4.26
คะแนนแบบทดสอบอัตนัย	16.80	5.91	คะแนนแบบทดสอบอัตนัย	20	5.98

การทดสอบค่าที (t - test) จากคะแนนรวมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5

สูตร $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{N_1} + \dfrac{S_2^2}{N_2}}}$

$$= \frac{40.90 - 36.475}{\sqrt{\dfrac{76.6051}{40} + \dfrac{70.717}{40}}}$$

$$= \frac{4.42}{\sqrt{1.919}}$$

$$= 2.30$$

ตารางที่ 10 แสดงค่าเฉลี่ย ความเบี่ยงเบนมาตรฐานและค่าที ของนักเรียนหญิงกับนักเรียนชาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เพศ	จำนวน	$\bar{X}$	S	t
หญิง	19	40.4210	8.5914	3.0904*
ชาย	21	32.9047	6.5795	

$p^* < 0.05$

ตารางที่ 11 แสดงค่าเฉลี่ย ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าทีของนักเรียนหญิงกับนักเรียนชายชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เพศ	จำนวน	$\bar{X}$	S	t
หญิง	20	38.15	10.0067	2.06906^{*}
ชาย	20	43.65	6.4176	

$p^{*} < 0.05$

ตารางที่ 12 แสดงค่าเฉลี่ย ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าที ของคะแนนจากแบบทดสอบปรนัยระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กับ 5

ระดับ	จำนวน	$\bar{X}$	S	t
มัธยมศึกษาปีที่ 4	40	19.675	4.8578	1.9512
มัธยมศึกษาปีที่ 5	40	20.90	4.259	

ตารางที่ 13 แสดงค่าเฉลี่ย ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าทีของคะแนนจากแบบทดสอบอัตนัยระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กับ 5

ระดับ	จำนวน	$\bar{X}$	S	t
มัธยมศึกษาปีที่ 4	40	16.90	5.984	2.3756^{*}
มัธยมศึกษาปีที่ 5	40	20	6.060	

$p^{*} < 0.05$

ภาคผนวก ข

บันทึกการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5

เรื่อง

"การดำเนินการของเซต"

คาบที่ 1

<u>จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม</u>

เมื่อนักเรียนเรียนจบคาบแล้วจะสามารถ

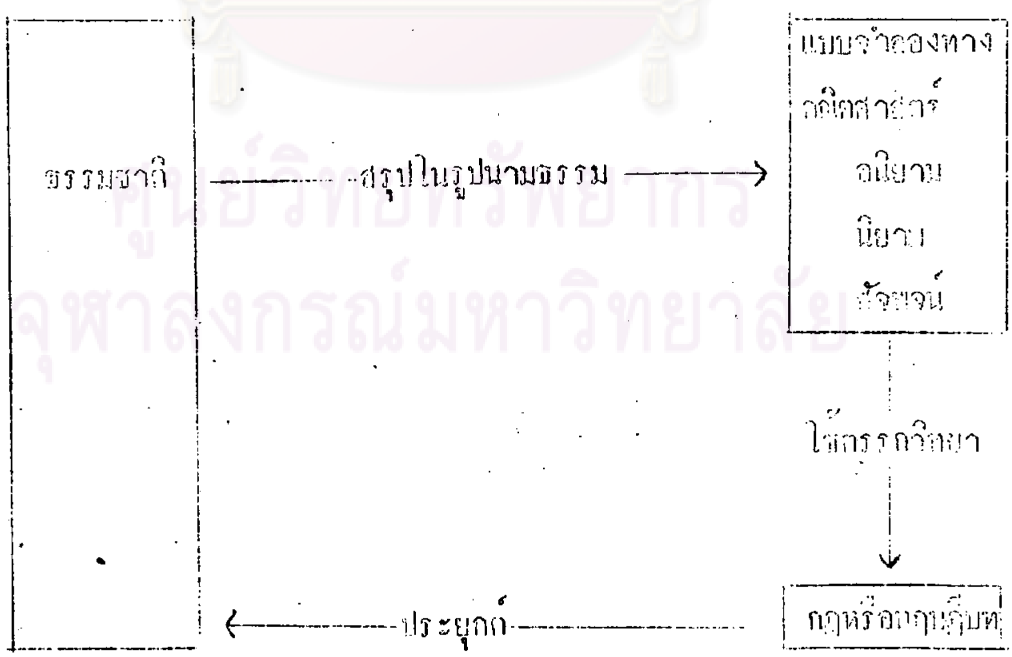
1. บอกความสำคัญของตรรกวิทยาได้
2. เขียนตารางค่าความจริงได้
3. แสดงการวิเคราะห์ค่าความจริงได้ เมื่อกำหนดประพจน์มาให้
4. บอกได้ว่าประพจน์ใดเป็นทอโทโลยีหรือสมมูลกัน
5. ทำโจทย์แบบฝึกหัดได้ถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

<u>1. ตรรกวิทยา</u>

1.1 ตรรกวิทยา

แผนภูมิของโครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์



จากแผนภูมิจะเห็นว่า ตรรกวิทยามีความสำคัญในวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างกฎหรือทฤษฎีบท

1.2 ตารางค่าความจริง

กำหนด p และ q เป็นประพจน์เชิงเดี่ยว T แทน จริง และ F แทน เท็จ นิยามค่าความจริงจะได้ดังตารางค่าความจริงดังนี้

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

1.3 ทอโทโลยี

ทอโทโลยี คือรูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าความจริงของประพจน์ รูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้เป็นทอโทโลยี

1. $p \vee \sim p$
2. $\sim(p \wedge \sim p)$
3. $p \longrightarrow (p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \longrightarrow p$
5. $(p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p)$ กฎการสลับที่
   $(p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee p)$
6. $(p \wedge q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้
   $(p \vee q) \vee r \longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$
7. $p \wedge (q \vee r) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ กฎการแจกแจง
   $p \vee (q \wedge r) \longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. $p \longleftrightarrow p$
9. $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$
10. $[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$ กฎการถ่ายทอด
11. $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longleftrightarrow \sim p)$

12. $\sim(p \vee q) \longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ ⎤ กฎของเดอ มอร์กอง

$\sim(p \wedge r) \longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$ ⎦

13. $\sim(p \rightarrow q) \longleftrightarrow p \wedge \sim q$

14. $\sim\sim p \longleftrightarrow p$

15. $(p \vee p) \longleftrightarrow p$

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูวัดความเข้าใจของนักเรียนเป็นรายบุคคลเกี่ยวกับส่วนประกอบของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทหรือกฎ และให้นักเรียนเปรียบเทียบกับการเล่นเกมกีฬาที่ประกอบด้วยผู้เล่น วิธีเล่น และกติกา

2. ครูอธิบายถึงการศึกษาระบบคณิตศาสตร์มีลักษณะเช่นเดียวกับการเล่นกีฬา ผู้เล่นจะต้องเล่นตามกฎเกณฑ์ที่ตั้งไว้ มิฉะนั้นจะเกิดการขัดแย้งกันเอง

3. ครูแสดงแผนภูมิโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งอธิบายเกี่ยวกับระบบคณิตศาสตร์ว่าการที่จะได้ทฤษฎีบทหรือกฎนั้นต้องอาศัยตรรกวิทยา

ขั้นสอน

1. ครูกำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ เขียน T แทนจริง และ F แทนเท็จ ให้นักเรียนค้นหาว่า ถ้าประพจน์ n ตัว และมีตัวเชื่อม จะมีค่าความจริงได้ 2^n กรณี โดยให้นักเรียนลองหาค่าแต่ละกรณีจนสรุปเองได้

2. ครูให้นักเรียนเขียนค่าความจริงลงในตาราง เช่นค่าความจริงของ $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \longleftrightarrow q$ เป็นต้น

3. ครูยกตัวอย่าง การหาค่าความจริงของ $\sim(p \wedge \sim p)$, $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \longrightarrow (p \rightarrow r)$ และให้นักเรียนสังเกตค่าความจริงจากตารางจะได้ว่า ค่าความจริง เป็นจริงทุกกรณี เรียกว่า ทอโทโลยี

4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นทอโทโลยีที่เหลือจากเนื้อหาทั้งหมด

5. ครูให้นักเรียนหารูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันจากรูปแบบของประพจน์ที่เป็นทอโทโลยี

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปในเรื่อง

ก. ความสำคัญของตรรกวิทยา

ข. การหาค่าความจริงของตัวเชื่อมแต่ละตัวจากตาราง

ค. การหาประพจน์ที่เป็นทอโทโลยีและสมมูลกัน

สื่อการสอน

1. แผนภูมิโครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ ใช้ในขั้นนำข้อ 3
2. ชอล์คสี ใช้เน้นการเขียนตารางค่าความจริง ในขั้นสอน ข้อ 2 และ 3

คาบที่ 2

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. บอกประโยคหรือวลีในคณิตศาสตร์ว่ามีตัวบ่งปริมาณคือ $\forall$ หรือ $\exists$ ได้ถูกต้อง
2. บอกค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณได้ถูก
3. บอกประโยคที่สมมูลกับ $\sim\forall x\ P(x)$ และ $\sim\exists x\ P(x)$ ได้ถูกต้อง
4. ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง 80%

เนื้อหา

1.5 ตัวบ่งปริมาณ

ในวิชาคณิตศาสตร์มักจะพบว่า

$x + x = 2x$ ซึ่งหมายถึง $\forall x\,[x + x = 2x]$

$x + 0 = x$ ซึ่งหมายถึง $\forall x\,[x + 0 = x]$

$x \cdot x = x^2$ ซึ่งหมายถึง $\forall x\,[x \cdot x = x^2]$

$x + x = x^2$ ซึ่งหมายถึง $\exists x\,[x + x = x^2]$

$x^2 = 4$ ซึ่งหมายถึง $\exists x\,[x^2 = 4]$

ตัวบ่งปริมาณที่ปรากฏในข้อความนั้น ในบางครั้งไม่ได้ปรากฏอย่างชัดเจน ตามแบบที่เขียนไว้ แต่ก็สามารถบอกได้ว่า ข้อความดังกล่าว มีตัวบ่งปริมาณแบบใดปรากฏอยู่

ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ จะมีค่าความจริงดังนี้

1. ประพจน์ $\forall xP(x)$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อแทน x ด้วยสมาชิก a ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้ว $P(a)$ เป็นจริง

2. ประพจน์ $\forall xP(x)$ เป็นเท็จก็ต่อเมื่อมี a บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ซึ่ง $P(a)$ เป็นเท็จ

3. ประพจน์ $\exists xP(x)$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อมี a บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ซึ่ง $P(a)$ เป็นจริง

4. ประพจน์ $\exists xP(x)$ เป็นเท็จก็ต่อเมื่อแทน x ด้วยสมาชิก a ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้ว $P(a)$ เป็นเท็จ

1.6 ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมเหตุสมผล (เป็นจริงเสมอ) ที่ควรทราบ

1. $\sim\forall xP(x) \longleftrightarrow \exists x\sim P(x)$

2. $\sim\exists xP(x) \longleftrightarrow \forall x\sim P(x)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

ประโยคต่อไปนี้ ข้อใดเป็นประโยคเปิด, ประพจน์ หรืออื่น ๆ

1. $x + 1 = 5$
2. $k - b = c$
3. ....เป็นนักเรียน
4. $x + y = y + x$
5. $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$
6. ถ้า x เป็นจำนวนจริงแล้ว $x = x + 1$
7. $\exists x[(x^2 + 1 > 1)]$ (จริง)
8. $\forall x\ [x + 0 \neq 0]$ (เท็จ)
9. $x + y = 2$ เป็นสมการเส้นตรง (จริง)
10. กราฟของ $xy = 5$ เป็นกราฟวงกลม (เท็จ)
11. x มีค่าเท่าใด
12. จงแก้สมการ $x + 3 = 7$

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความหมายของประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ โดยการซักถามเป็นรายบุคคล

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายความหมายเปรียบเทียบระหว่าง ประโยคเปิดกับประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณว่า "ประโยคเปิดโดยทั่วไป ไม่เป็นประพจน์แต่ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณเป็นประพจน์

2. ครูเขียนวลีที่มักจะพบในวิชาคณิตศาสตร์ แล้วอภิปรายให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า แต่ละวลีควรใช้ตัวบ่งปริมาณอะไร

3. ครูให้นักเรียนบอกค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

4. ครูอธิบายประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน ที่ควรทราบโดยตัวอย่าง แล้วให้นักเรียนอภิปรายช่วยกันสรุปว่า

1) นิเสธของประโยค "จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคู่" คือ "มีจำนวนเต็มบางตัวเป็นจำนวนคี่" ถ้าจะเขียนในรูปสัญลักษณ์จะได้

$$\sim \forall x P(x) \longleftrightarrow \exists x \sim P(x)$$

2) นิเสธของประโยค "มีจำนวนเต็มบางจำนวนเป็นจำนวนคู่" คือ "จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคี่" เขียนในรูปสัญลักษณ์จะได้

$$\exists x P(x) \longleftrightarrow \forall x \sim P(x)$$

5. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่าง นิเสธประโยค แล้วหาข้อความที่สมมูล พร้อมทั้งเขียนในรูปสัญลักษณ์ อีก 2-3 ตัวอย่าง

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเรื่องที่ได้เรียนในคาบ คือความหมายของประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ บอกนิเสธ $\forall x P(x)$ สมมูลกับ $\sim \exists x\ P(x)$ และ $\sim \exists x P(x)$ สมมูลกับ $\forall x \sim P(x)$

2. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัด

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. บอกขั้นตอนการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งได้ถูกต้อง
2. หาตัวอย่างค้านประโยคที่เป็นเท็จได้
3. นำเหตุผลจากการถ่ายทอดไปใช้อ้างได้

เนื้อหา

1.7 การพิสูจน์บางรูปแบบ

1. การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ในที่นี้จะพิสูจน์ว่าประพจน์ p เป็นจริง ทำได้ดังนี้

1) สมมติให้ $\sim p$

2) จากสมมติฐานและสิ่งที่รู้มาก่อน พยายามสรุป $q \wedge \sim q$

3) สรุปการที่สมมติให้ $\sim p$ ทำให้เกิดการขัดแย้งกัน $q \wedge \sim q$ ดังนั้นจะได้ p

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ x เป็นจำนวนตรรกยะ, y เป็นจำนวนอตรรกยะ จงพิสูจน์ว่า $x + y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์

สมมติให้ $x + y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น $x + y = \frac{a}{b}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ ..(1)

จากโจทย์ x เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้

$x = \frac{c}{d}$ เมื่อ c, d เป็นจำนวนเต็มและ $d \neq 0$ ..(2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{c}{d} + y = \frac{a}{b}$$

$$y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$$

$$y = \frac{ad - bc}{bd}$$

เนื่องจาก $ad - bc$ เป็นจำนวนเต็มและ $bd \neq 0$

และ $y = \frac{ad - bc}{bd}$ ดังนั้น y เป็นจำนวนตรรกยะ

เกิดการขัดแย้งกันกับโจทย์ y เป็นจำนวนอตรรกยะ

นั่นคือ y เป็นจำนวนอตรรกยะ

2. การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน

เป็นการพิสูจน์ว่าประพจน์ $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ โดยการหาสมาชิก a ในเอกภพสัมพัทธ์ เพียงตัวเดียวที่ $P(a)$ เป็นเท็จ

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงพิสูจน์ว่า ข้อความ "สำหรับจำนวนจริง x ทุกจำนวน $x^2 > 0$ เป็นเท็จ

<u>พิสูจน์</u>

เนื่องจาก 0 เป็นจำนวนจริง

และ $0^2 = 0$

แสดงว่า $0^2 \not> 0$

นั่นคือ ข้อความ "สำหรับจำนวนจริง x ทุกจำนวน $x^2 > 0$" เป็นเท็จ

ข้อคิดในการพิสูจน์

ในการแสดงหรือพิสูจน์ เมื่อโจทย์กำหนด p ต้องการสรุป q เมื่อวิเคราะห์ว่า

$p \longrightarrow s_1$

และ $s_1 \longrightarrow q$

จะได้ $p \rightarrow q$ โดยกฎการถ่ายทอด

หรือ $p \longrightarrow s_2$

$s_2 \longrightarrow s_1$

และ $s_1 \longrightarrow q$

จะได้ $p \longrightarrow q$ โดยกฎการถ่ายทอด 2 ครั้ง

ในทำนองเดียวกัน

$p \longrightarrow s_n$

$s_n \longrightarrow s_{n-1}$

$\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots$

$s_3 \longrightarrow s_2$

$s_2 \longrightarrow s_1$

$s_1 \longrightarrow q$

จะได้ $p \longrightarrow q$ โดยกฎการถ่ายทอด n ครั้ง

เพื่อความสะดวกมักจะเขียนดังนี้

$p \longrightarrow s_n$

$\longrightarrow s_{n-1}$

$\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots$

$\longrightarrow s_1$

และ $\longrightarrow q$

จะได้ $p \longrightarrow q$

ขั้นนำ

1. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เคยเรียนมาแล้ว เช่น การพิสูจน์ในวิชาเรขาคณิต

2. ครูทบทวนตัวอย่างในการพิสูจน์หรือแสดงว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนดูการพิสูจน์ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ววิจารณ์และสรุปขั้นตอนได้ 3 ขั้น

2. ครูอธิบายขั้นตอนการพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง พร้อมทั้งยกตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนดูอีกครั้ง โดยการซักถามและการอธิบายประกอบเป็นตอน ๆ

3. ครูอธิบายการพิสูจน์ การยกตัวอย่างค้านประพจน์ที่เป็นเท็จ ตามตัวอย่างที่ 2

4. ครูยกตัวอย่าง 100 = 10 x 10 .....(1)

= 2 x 5 x 2 x 5 .....(2)

ดังนั้น 100 = 2 x 5 x 2 x 5 .....(3)

และ △ = ...(1)

= ....(2)

= ....(3)

ดังนั้น △ = ◇ ∘ ○ ∘ ⬡ .....(4)

ให้นักเรียนหาเหตุผลการสรุปที่ใช้ในการทำโจทย์คณิตศาสตร์ข้างต้นคือการถ่ายทอด

5. ครูอธิบายข้อคิดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กฎการถ่ายทอดที่ใช้บ่อย ๆ

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนสรุปในเรื่องที่ได้เรียนในคาบคือ

ก. ขั้นตอนการพิสูจน์หาข้อขัดแย้ง

ข. การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการหาตัวอย่างค้าน

ค. กฎที่นำมาใช้อ้างในการพิสูจน์ที่ใช้บ่อย ๆ

คาบที่ 4

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. เขียนสัญลักษณ์ของเซตที่เท่ากัน
2. เขียนสัญลักษณ์ของสับเซตได้
3. บอกนิเสธของสับเซตและเขียนสัญลักษณ์ได้
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดได้ถูกต้อง 80%

เนื้อหา

2 เซตและสับเซต

นิยาม 2.1 เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกัน กล่าวคือสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A

เซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $A = \{1,2\}$

และ $B = \{x/x$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ x น้อยกว่าหรือเท่ากับ $2\}$

เขียน B แบบแจกแจงสมาชิกจะได้ $B = \{1,2\}$

ดังนั้น $A = B$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $A = \{5,6,7\}$ และ $B = \{7,5,7,6\}$

ดังนั้น $A = B$

ข้อสังเกต $\{7\} = \{7,7\}$

จากนิยาม 2.1 เขียนในรูปสัญลักษณ์ จะได้ดังนี้

$$A = B \longleftrightarrow \forall x [x \in A \longleftrightarrow x \in B]$$

ข้อตกลง เขียน $x\in A \longleftrightarrow x\in B$ แทน $\forall x[x\in A\longleftrightarrow x\in B]$

ดังนั้น $\boxed{A = B \longleftrightarrow (x\in A\longleftrightarrow x\in B)}$

ถ้าเซต A ไม่เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A\neq B$ หมายความว่า สมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต B

<u>นิยาม 2.2</u> เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

A เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $A\subset B$

จากนิยาม 2.2 เขียนในรูปสัญลักษณ์ จะได้ดังนี้

$$A\subset B\longleftrightarrow \forall x[x\in A\longrightarrow x\in B]$$

ข้อตกลง เขียน $x\in A\longrightarrow x\in B$ แทน $\forall x[x\in A\longrightarrow x\in B]$

ดังนั้น $A\subset B\longleftrightarrow (x\in A\longrightarrow x\in B)$

เซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วย $A\not\subset B$

พิจารณา $A\not\subset B \longleftrightarrow \sim\forall x[x\in A\longrightarrow x\in B]$

$\longleftrightarrow \exists x\sim[x\in A\longrightarrow x\in B]$

$\longleftrightarrow \exists x[x\in A\wedge x\notin B]$

ดังนั้น $A\not\subset B\longleftrightarrow \exists x[x\in A\wedge x\notin B]$

นั่นคือ เซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อมี x บางตัว ซึ่ง $x\in A$ แต่ $x\notin B$

<u>โจทย์แบบฝึกหัด</u>

จาก $A\subset B\longleftrightarrow (x\in A\longrightarrow x\in B)$ ให้ตอบคำถามต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

1. ถ้า $A\subset B$ และ $x\in A$ จะสรุปได้ $x\in B$
2. ถ้า $A\subset B$ และ $x\in B$ จะสรุปได้ $x\in A$
3. ถ้า $x\in A$ แล้ว $x\in B$ จะสรุปได้ $A\in B$

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูทบทวนเรื่องความหมายของเซต วิธีการเขียนแบบแจกแจงและแบบบอกเงื่อนไข โดยการซักถามเป็นรายบุคคล

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างเซตที่เท่ากันให้นักเรียนดูเพื่อพิจารณาความหมายนิยามการเท่ากันของเซต
2. จากความหมายของนิยามการเท่ากันของเซต ครูอธิบายให้นักเรียนเขียนในรูปสัญลักษณ์
3. ครูให้นักเรียนหาความหมายของเซต 2 เซตที่ไม่เท่ากัน
4. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกความหมายของนิยามสับเซต พร้อมทั้งเปลี่ยนในรูปสัญลักษณ์
5. ครูให้นักเรียนพิจารณาการที่เซต A ไม่เป็นสับเซตของ B โดยหาความหมายของนิเสธของประโยคแต่ละขั้นให้เข้าใจก่อนการแสดง

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่องที่เรียนในคาบ คือ
   ก. การเปลี่ยนนิยามการเท่ากันของเซต สับเซต อยู่ในรูปสัญลักษณ์
   ข. ความหมายการไม่เป็นสับเซตของเซต
   ค. อ่านสัญลักษณ์ที่เปลี่ยนทุกสัญลักษณ์อีกครั้ง
2. ทำโจทย์แบบฝึกหัด

คาบที่ 5

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. เขียนแนวการพิสูจน์และการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ได้
2. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ได้อย่างถูกต้อง
3. บอกเหตุผลทางตรรกวิทยามาอ้างในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ได้
4. สรุปเนื้อหาทฤษฎีบทที่ 1 ได้อย่างถูกต้อง
5. ทำโจทย์แบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

$$A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

พิสูจน์แบบที่ 1

แนวในการพิสูจน์ เนื่องจาก $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$

เป็นทอตโทโลยี

ถ้าสามารถแสดงได้

1. $A = B \longrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

และ 2. $A \subset B \wedge B \subset A \longrightarrow A = B$

จะสรุป $A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

พิสูจน์ ตอนที่ 1 จะแสดง $A = B \longrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

$A = B \longrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$, กำหนดให้และนิยาม 2.1

$(x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \longrightarrow x \in A)$, ...

$A \subset B \wedge B \subset A$ นิยามของสับเซต

ดังนั้น $A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ กฎการถ่ายทอด

ตอนที่ 2 จะแสดง $A \subset B \wedge B \subset A \longleftrightarrow A = B$

$A \subset B \wedge B \subset A \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \longrightarrow x \in A)$ กำหนดให้และนิยาม 2.2

$\longrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

$\longrightarrow A = B$ นิยามของการเท่ากัน

ดังนั้น $A \subset B \wedge B \subset A \longrightarrow A = B$ กฎการถ่ายทอด

จาก 1) และ 2) จะได้ $A = B \longrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ และ

$A \subset B \wedge B \subset A \longrightarrow A = B$

นั่นคือ $A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

หรืออาจจะพิสูจน์ แบบที่ 2 ดังนี้

<u>พิสูจน์</u>

$A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$ นิยามของการเท่ากัน

$\longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \longrightarrow x \in A)$,

$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

$\longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ นิยามของสับเซต

ดังนั้น $A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ กฎการถ่ายทอด

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้ $A \subset A$

แนวในการพิสูจน์ จากนิยาม 2.2 $A \subset B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B)$

ดังนั้น $A \subset A \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in A)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \longrightarrow x \in A$

จะสรุป $A \subset A$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $p \longrightarrow p$ เป็นทอโทโลยี

ดังนั้น $x \in A \longrightarrow x \in A$ เป็นจริงเสมอ

นั่นคือ $A \subset A$ นิยามของสับเซต

ผลที่ได้จากทฤษฎีนี้อาจกล่าวว่า "เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง"

โจทย์แบบฝึกหัด

กำหนดให้ A , B และ C เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์

1. $A = A$

2. $A = B \wedge B = C \longrightarrow A = C$

3. $A = B \longrightarrow B = A$

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูทบทวนนิยามการเท่ากันของเซต นิยามสับเซต ตรรกวิทยาเกี่ยวกับทอตโทโลยีที่สมมูลกันและกฎการถ่ายทอด

2. ครูยกตัวอย่าง $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$ ซึ่งเป็นทอตโทโลยี แล้วให้นักเรียนสรุปความหมายของทอตโทโลยีว่า ถ้ามีข้อความทางซ้ายมือจะสรุปทางขวามือได้ และในทำนองเดียวกัน ถ้ามีข้อความทางขวามือ ก็สรุปทางซ้ายมือได้เช่นกัน ทั้งนี้ต้องเน้นความหมาย $(p \leftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$

ขั้นสอน

1. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 1 แล้วให้นักเรียนเทียบความหมายทางตรรกวิทยา ระหว่าง $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

กับ $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$

จะได้ $A = B$ คือ p และ $x \in A$ $x \in B = q$

ดังนั้นในการสรุป $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

จะต้องแสดง $[A = B \longrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)] \wedge [(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B]$

2. ครูแสดงการพิสูจน์ตามแนวการพิสูจน์โดยให้นักเรียนบอกเหตุผลทุกขั้นตอนของการพิสูจน์ทั้ง 2 แบบ

3. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 2 แล้วให้นักเรียนบอกแนวทางที่จะสรุป $A \subset A$ โดยเทียบจากนิยามของสับเซต

ถ้า $A \subset B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B)$

ดังนั้น $A \subset A \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in A)$

4. ครูแสดงการพิสูจน์ตามแนวการพิสูจน์ โดยให้นักเรียนบอกเหตุผลทุกขั้นตอนของการพิสูจน์ด้วย

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ได้เรียนอีกครั้งหนึ่ง
2. ทำโจทย์แบบฝึกหัด

คาบที่ 6

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 ได้อย่างถูกต้อง
2. ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการถ่ายทอดของเซต เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปเนื้อหาของทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 ได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนดให้ A , B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A\subset B\wedge B\subset C\longrightarrow A\subset C$$

แนวในการพิสูจน์ จากนิยาม 2.2 $A\subset C\longleftrightarrow(x\in A\longrightarrow x\in C)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x\in A\longrightarrow x\in C$

จะสรุปได้ $A\subset C$

โจทย์กำหนด $A\subset B\wedge B\subset C$

จะได้ $(x\in A\longrightarrow x\in B)\wedge(x\in B\longrightarrow x\in C)$

พิสูจน์

$A\subset B\wedge B\subset C\longrightarrow(x\in A\longrightarrow x\in B)\wedge(x\in B\longrightarrow x\in C)$, กำหนดให้และนิยาม 2.2

$\longrightarrow(x\in A\longrightarrow x\in C)$, กฎการถ่ายทอด

$\longrightarrow A\subset C$ กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $A\subset B\wedge B\subset C\longrightarrow A\subset C$

นิยาม 2.3 เซตว่างคือ เซตที่ไม่มีสมาชิก

เซตว่างเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ϕ

ดังนั้นสำหรับสมาชิก x ใด ๆ จะได้ $x\notin\phi$

<u>ทฤษฎีบทที่ 4</u> กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$\phi \subset A$$

แนวในการพิสูจน์ จะแสดง $\phi \subset A$

จากนิยาม $A \subset B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B)$

ดังนั้น $\phi \subset A \longleftrightarrow (x \in \phi \longrightarrow x \in A)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in \phi \longrightarrow x \in A$

จะสรุป $\phi \subset A$

<u>พิสูจน์</u> แบบที่ 1 เนื่องจาก $p \longrightarrow q$ เป็นจริง, เมื่อ p เป็นเท็จ

ดังนั้น $x \in \phi \longrightarrow x \in A$ เป็นจริง

$, x \in \phi$ เป็นเท็จ

นั่นคือ $\phi \subset A$ นิยามของสับเซต

หรืออาจจะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

<u>พิสูจน์</u> แบบที่ 2 สมมติให้ $\phi \subset A$

ดังนั้นมีสมาชิก x บางตัวซึ่ง $x \in \phi$ แต่ $x \notin A$

แต่จากนิยาม2.3 $x \notin \phi$ เกิดการขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่

สมมุติให้นั้นเป็นเท็จ

นั่นคือ $\phi \subset A$

ผลที่ได้จากทฤษฎีบทนี้ อาจกล่าวว่า "เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต"

<u>โจทย์แบบฝึกหัด</u>

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \in B \wedge B \in C \longrightarrow A \in C$
2. $A \neq B \wedge B \neq C \longrightarrow A \neq C$
3. ถ้า $A \subset B \wedge B \subset C$ และ $x \in A$ แล้ว $x \in C$
4. $A \subset B \longleftrightarrow B \subset A$
5. $A \subset B \wedge B \not\subset C \longrightarrow A \not\subset C$

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

ครูทบทวนความหมายของสับเซต คุณสมบัติการถ่ายทอด เซตว่าง และคุณสมบัติของเซตว่างโดยการถามตอบ

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 3 แล้วให้นักเรียนบอกแนวทางที่จะสรุป โดยเทียบจากนิยามของสับเซต

ถ้า $A \subset B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B)$

ดังนั้น $A \subset C \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in C)$

2. ครูแสดงการพิสูจน์ตามแนวการพิสูจน์ โดยให้นักเรียนบอกเหตุผลทุกขั้นตอนของการพิสูจน์ด้วย

3. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 4 แล้วให้นักเรียนบอกแนวทางที่จะสรุป $\phi \subset A$ โดยเทียบจากนิยามของสับเซต

ถ้า $A \subset B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B)$

ดังนั้น $\phi \subset A \longleftrightarrow (x \in \phi \longrightarrow x \in A)$

4. ครูแสดงการพิสูจน์ตามแนวการพิสูจน์ โดยซักถามเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทั้ง 2 แบบของการพิสูจน์

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ได้อีกครั้งหนึ่ง
2. ทำโจทย์แบบฝึกหัด

คาบที่ 7

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. เขียนนิยามของยูเนียนและอินเตอร์เซกชันในรูปสัญลักษณ์ได้
2. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5 ได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนแนวการพิสูจน์และการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5 ได้ถูกต้อง
4. สรุปเนื้อหาของทฤษฎีได้อย่างถูกต้อง
5. ทำแบบฝึกหัดทฤษฎีบทที่ 5 ได้ถูกต้อง

เนื้อหา 3. ยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน

นิยาม 3.1 ยูเนียนของเซต A และเซต B คือเซตประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A หรือของเซต B หรือของทั้งสองเซต

ยูเนียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cup B$

ตัวอย่างที่ 1

$A = \{0,1,2,3\}$ และ $B = \{1,3,5,7\}$ จะได้

$A \cup B = \{0,1,2,3,5,7\}$

ตัวอย่างที่ 2

ถ้า $M = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ และ

$N = \{1,2,3,4\}$

จะได้ $M \cup N = N$

ตัวอย่างที่ 3

ถ้า $P = \{a, b, c, d\}$ และ $Q = \{e,f,g\}$

จะได้ $P \cup Q = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

จากนิยาม 3.1 เขียน $A \cup B$ ในรูปสัญลักษณ์หรือรูปเซตแบบเงื่อนไขของสมาชิกได้ดังนี้

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

ดังนั้น $\boxed{x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B}$

<u>นิยาม 3.2</u> อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของทั้งเซต A และเซต B

อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ (อ่านว่า A อินเตอร์เซก B)

<u>ตัวอย่างที่ 4</u>

ถ้า $A = \{0,1,2,3\}$ และ $B = \{0,3,5\}$

จะได้ $A \cap B = \{0,3\}$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u>

ถ้า $A = \{2,3,5,7\}$ และ $B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

จะได้ $A \cap B = A$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u>

ถ้า $A = \{0,1,2,3\}$ และ $B = \{4,5\}$

จะได้ $A \cap B = \phi$

จากนิยาม 3.2 เขียน $A \cap B$ ในรูปสัญลักษณ์หรือรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้ดังนี้

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ดังนั้น $\boxed{x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 5</u> กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cup A = A$$

แนวในการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 1 $A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

ถ้าสามารถแสดงได้ 1. $A \cup A \subset A$

2. $A \subset A \cup A$

จะสรุป $A \cup A = A$

<u>แนวการพิสูจน์</u> ตอนที่ 1 จะแสดง $A \cup A \subset A$

เนื่องจาก $A \cup A \subset A \longleftrightarrow (x \in A \cup A \longrightarrow x \in A)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \cup A \longrightarrow x \in A$

จะสรุป $A \cup A \subset A$

ตอนที่ 2 จะแสดง $A \subset A \cup A$

เนื่องจาก $A \subset A \cup A \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in A \cup A)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \longrightarrow x \in A \cup A$

จะสรุป $A \subset A \cup A$

<u>พิสูจน์</u> ตอนที่ 1 จะแสดงว่า $A \cup A \subset A$

$x \in A \cup A \longrightarrow x \in A \vee x \in A$, กำหนดให้และนิยามของยูเนียน

$\longrightarrow x \in A$, $p \longrightarrow p \vee p$

$x \in A \cup A \longrightarrow x \in A$ กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $A \cup A \subset A$ นิยามของสับเซต

ตอนที่ 2 จะแสดงว่า $A \subset A \cup A$

$x \in A \longrightarrow x \in A \vee x \in A$, $p \longrightarrow p \vee p$

$\longrightarrow x \in A \cup A$ นิยามของยูเนียน

$x \in A \longrightarrow x \in A \cup A$ กฎการถ่ายทอด

$A \subset A \cup A$ นิยามของสับเซต

จาก 1) และ 2) จะได้

$A \cup A \subset A$ และ $A \subset A \cup A$

นั่นคือ $A \cup A = A$

หรืออาจจะพิสูจน์ดังนี้

แนวในการพิสูจน์ จากนิยาม 2.1

$$A \cup A = A \longleftrightarrow (x \in A \cup A \longleftrightarrow x \in A)$$

และ $x \in A \cup A \longleftrightarrow x \in A \vee x \in A$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \cup A \longleftrightarrow x \in A$

จะสรุป $A \cup A = A$

<u>พิสูจน์</u> $x \in A \cup A \longleftrightarrow (x \in A \vee x \in A)$, นิยามของยูเนียน

$\longleftrightarrow x \in A$, $p \vee p \longleftrightarrow p$

$x \in A \cup A \longleftrightarrow x \in A$ กฎการถ่ายทอด

นั่นคือ $A \cup A = A$

<u>แบบฝึกหัดทฤษฎีบทที่ 6</u>

กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A \cap A = A$

(แนวทางการพิสูจน์ใช้ $p \wedge p \longleftrightarrow p$)

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

ครูทบทวนเกี่ยวกับการสร้างเซตขึ้นใหม่ที่เคยเรียนมาแล้ว โดยการซักถามเป็นรายบุคคล

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างเกี่ยวกับการสร้างเซตโดยใช้ยูเนียนและอินเตอร์เซกชัน เพื่อพิจารณาความหมายนิยามของยูเนียน และอินเตอร์เซกชัน

2. จากความหมายของนิยามทั้งสอง ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปในรูปสัญลักษณ์หรือเซตแบบบอกเงื่อนไขให้ได้ พร้อมทั้งหาความหมายที่นำไปใช้เกี่ยวกับนิยามของยูเนียน และอินเตอร์เซกชัน คือ

$$x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

และ $x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

3. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 5 แล้วให้นักเรียนพิจารณาผลสรุปของทฤษฎี มีคุณสมบัติคงตัวหรือเอกลักษณ์ พร้อมทั้งหาแนวในการพิสูจน์ทฤษฎีบท ซึ่งสามารถแสดงได้ 2 วิธี คือ

1) พิสูจน์ตามทฤษฎีบทที่ 1 คือเป็นสับเซตซึ่งกันและกัน

2) พิสูจน์ตามนิยามของการเท่ากันของเซต

4. ครูแสดงการพิสูจน์ทั้ง 2 วิธี ตามแนวการพิสูจน์ โดยนักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่องที่เรียนในคาบคือ

ก. ความหมายนิยามของยูเนียน และอินเตอร์เซกชัน ในรูปสัญลักษณ์

ข. วิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ได้อีกครั้งหนึ่ง

2. ทำโจทย์แบบฝึกหัด (ทฤษฎีบทที่ 6)

คาบที่ ๘

<u>จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม</u>

เมื่อเรียนจบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่จะต้องพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 7 และ 9 ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนแนวทางการพิสูจน์ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 7 และ 9 ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปเนื้อหาของทฤษฎีบทที่ 7 และ 9 ได้อย่างถูกต้อง
4. 4. ทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 8 และ 9 เป็นแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง

<u>เนื้อหา</u> <u>ทฤษฎีบทที่ 7</u> กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \subset A \cup B$$

แนวในการพิสูจน์ $A \subset A \cup B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in A \cup B)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \longrightarrow x \in A \cup B$

จะสรุป $A \subset A \cup B$

<u>พิสูจน์</u> $x \in A \longrightarrow x \in A \vee x \in B$, $p \longrightarrow p \vee q$

$\longrightarrow x \in A \cup B$ นิยามของยูเนียน

กฎการถ่ายทอด

$x \in A \longrightarrow x \in A \cup B$

นั่นคือ $A \subset A \cup B$ นิยามของสับเซต

<u>ทฤษฎีบทที่ 8</u> กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cap B \subset A$$ (ให้เป็นแบบฝึกหัด)

(แนะ $p \wedge p \longrightarrow p$)

<u>ทฤษฎีบทที่ 9</u> กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cup \phi = A$$

แนวในการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 1

$$A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

ถ้าสามารถแสดงได้ 1. $A \cup \phi \subset A$

2. $A \subset A \cup \phi$

จะสรุปได้ $A \cup \phi = A$

แนวการพิสูจน์ ตอน 1 จะแสดง $A \cup \phi \subset A$

จากนิยาม $A \cup \phi \subset A \longleftrightarrow (x \in A \cup \phi \longrightarrow x \in A)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \cup \phi \longrightarrow x \in A$

จะสรุป $\therefore A \cup \phi \subset A$

ตอน 2 จะได้ $A \subset A \cup \phi$ ทฤษฎีบทที่ 7

<u>พิสูจน์</u> ตอน 1 จะแสดง $A \cup \phi \subset A$

$x \in A \cup \phi \longrightarrow (x \in A \vee x \in \phi)$,กำหนดให้และนิยามของยูเนียน

$\longrightarrow x \in A$, $x \in \phi$ เป็นเท็จ

$x \in A \cup \phi \longrightarrow x \in A$ กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $A \cup \phi \subset A$

ตอน 2 จะได้ $A \subset A \cup \phi$ ทฤษฎีบทที่ 7

จาก 1) และ 2) จะได้ $A \cup \phi \subset A$ และ $A \subset A \cup \phi$

นั่นคือ $A \cup \phi = A$

<u>ทฤษฎีบทที่ 10</u> กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้

$A \cap \phi = \phi$ (ให้เป็นแบบฝึกหัด

(แนะ ใช้ทฤษฎีบทที่ 4 และ 8)

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

ครูทบทวนความหมายนิยามของสับเซต การเท่ากันของเซต และนิยามของยูเนียน โดยการซักถามเป็นรายบุคคล

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 7 แล้วให้นักเรียนแยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทก่อน

2. ครูให้นักเรียน พิจารณาผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์พร้อมวิเคราะห์ให้ได้ว่า $A \subset A \cup B \longleftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in A \cup B)$

3. ครูแสดงการพิสูจนทฤษฎี ตามแนวในการพิสูจน์ โดยให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน

4. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 9 แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาแนวทางการพิสูจน์เกี่ยวกับการเท่ากันของเซต ซึ่งจะได้

1) พิสูจน์ตามทฤษฎีบทที่ 1 คือเป็นสับเซตซึ่งกันและกัน

2) พิสูจน์ตามนิยามของการเท่ากันของเซต

5. ครูแสดงการพิสูจน์ทั้ง 2 วิธีตามแนวในการพิสูจน์ โดยให้นักเรียนแยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์จากทฤษฎีได้ก่อน ในขณะที่แสดงการพิสูจน์ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอนด้วย

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีที่ได้อีกครั้ง

2. ให้นักเรียนทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 8 และ 10 เป็นแบบฝึกหัด

คาบที่ 9

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่จะต้องพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 11 และ 13 ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนแนวทางการพิสูจน์และการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 11 และ 13 ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปเนื้อหาของทฤษฎีบทที่ 11 และ 13 ได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดทฤษฎีบทที่ 12 และ 14 ได้อย่างถูกต้อง

เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 11 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cup B = B \cup A$$

แนวในการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 1

$$A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

ถ้าสามารถแสดงได้ 1. $A \cup B \subset B \cup A$

และ 2. $B \cup A \subset A \cup B$

จะสรุปได้ $A \cup B = B \cup A$

แนวการพิสูจน์ ตอน 1 จะแสดง $A \cup B \subset B \cup A$

จากนิยาม $A \cup B \subset B \cup A \longleftrightarrow (x \in A \cup B \longrightarrow x \in B \cup A)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \cup B \longrightarrow x \in B \cup A$

จะสรุป $A \cup B \subset B \cup A$

ตอน 2 จะแสดง $B \cup A \subset A \cup B$

ให้นักเรียนเขียนแนวพิสูจน์และแสดงการพิสูจน์เอง

<u>พิสูจน์</u> ตอนที่ 1 จะแสดง $A \cup B \subset B \cup A$

$x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$, นิยามของยูเนียน

$\longrightarrow x \in B \vee x \in A$, กฎการสลับที่

$\longrightarrow x \in B \cup A$, นิยามของยูเนียน

$x \in A \cup B \longrightarrow x \in B \cup A$, กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $A \cup B \subset B \cup A$

ตอนที่ 2 จะแสดง $B \cup A \subset A \cup B$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

จาก 1) และ 2) จะได้ $A \cup B \subset B \cup A$ และ $B \cup A \subset A \cup B$

นั่นคือ $A \cup B = B \cup A$

หรืออาจจะพิสูจน์ดังนี้

แนวการพิสูจน์ จากนิยามของยูเนียน $x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$

และ $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in B \cup A$

จะสรุป $A \cup B = B \cup A$

<u>พิสูจน์</u> $x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$, , นิยามของยูเนียน

$\longleftrightarrow x \in B \vee x \in A$, กฎการสลับที่

$\longleftrightarrow x \in B \cup A$, นิยามของยูเนียน

$x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in B \cup A$, กฎการถ่ายทอด

นั่นคือ $A \cup B = B \cup A$

<u>ทฤษฎีบทที่ 12</u> กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้

$A \cap B = B \cap A$ (ให้เป็นแบบฝึกหัด)

<u>ทฤษฎีบทที่ 13</u> กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

แนวในการพิสูจน์ $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

$x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$

ถ้าสามารถแสดง $x \in A \cup (B \cup C) \longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

จะสรุป $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

<u>พิสูจน์</u>

$x \in A \cup (B \cup C) \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C$ นิยามของยูเนียน

$\longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ นิยามของยูเนียน

$\longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C)$ กฎการแจกแจง

$\longleftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C$

$\longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

$x \in A \cup (B \cup C) \longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

นั่นคือ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

<u>ทฤษฎีบทที่ 14</u> กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ให้เป็นแบบฝึกหัด

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

ครูทบทวนความหมายนิยามของสับเซต การเท่ากันของเซต ยูเนียน และอินเตอร์เซกชัน กฎการรวมหมู่พวก โดยการซักถามเป็นรายบุคคล

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 11 แล้วให้นักเรียนแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทก่อน

2. ครูให้นักเรียนช่วยพิจารณาแนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีเกี่ยวกับการเท่ากันของเซตซึ่งจะได้

1) พิสูจน์ตามทฤษฎีบทที่ 1 คือ เป็นสับเซตซึ่งกันและกัน

2) พิสูจน์ตามนิยามของการเท่ากันของเซต

3. ครูแสดงการพิสูจน์ทั้ง 2 วิธี ตามแนวในการพิสูจน์ ซึ่งขณะทำการพิสูจน์ก็ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน และให้นักเรียนบอกความหมายของทฤษฎีบทนี้ว่ามีคุณสมบัติการสลับที่ นั่นเอง

4. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 13 แล้วให้นักเรียนแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทก่อน

5. ครูให้นักเรียนช่วยพิจารณาแนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ว่าควรเลือกวิธีการที่คิดว่าสะดวกมากที่สุด ซึ่งจะได้การพิสูจน์ตามนิยามการเท่ากันของเซต

6. ครูแสดงการพิสูจน์ตามแนวการพิสูจน์ ซึ่งขณะทำการพิสูจน์ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน และให้นักเรียนบอกความหมายของทฤษฎีบทนี้ว่ามีคุณสมบัติการรวมหมู่พวก

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีที่ได้อีกครั้ง

2. ให้นักเรียนทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 12 และ 14 เป็นแบบฝึกหัด

คาบที่ 10

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่จะต้องพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 15 และ 17 ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนแนวทางการพิสูจน์ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 15 และ 17 ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปเนื้อหาของทฤษฎีบทได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดได้ถูกต้องอย่างน้อย 80%

เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 15 กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

แนวในการพิสูจน์ จากนิยาม $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

ถ้าสามารถแสดง

$$x \in [A \cup (B \cap C)] \longleftrightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

จะสรุป $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

พิสูจน์

$x \in [A \cup (B \cap C)] \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$ นิยามของยูเนียน

$\longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ นิยามของอินเตอร์เซกชัน

$\longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$,

$\longleftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$

$\longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$x \in [A \cup (B \cap C)] \longleftrightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

นั่นคือ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

<u>ทฤษฎีบทที่ 16</u> กำหนดให้ A,B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

4. คอมพลีเมนต์และผลต่าง

<u>นิยาม 4.1</u> เอกภพสัมพัทธ์คือเซตที่กำหนดขึ้นโดยมีเงื่อนไขว่า เซตทุกเซตที่กล่าวถึงทั้งหมดจะเป็นสับเซตของเซตนี้

เอกภพสัมพัทธ์ เขียนแทนด้วย $\mathcal{U}$

ดังนั้นสำหรับสมาชิก x ใด ๆ จะได้ $x \in \mathcal{U}$ เสมอ

<u>ทฤษฎีบทที่ 17</u> กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

แนวในการพิสูจน์ จากนิยาม $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

ถ้าสามารถแสดง $x \in A \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow x \in A$

จะสรุป $A \cap \mathcal{U} = A$

<u>พิสูจน์</u>

$x \in A \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in \mathcal{U}$, นิยามของอินเตอร์เซกชัน

$\longleftrightarrow x \in A,\ p \wedge q \longleftrightarrow p,$, เมื่อ q เป็นจริง

$x \in A \cap \mathcal{U} \longleftrightarrow x \in A$, กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $A \cap \mathcal{U} = A$

<u>ทฤษฎีบทที่ 18</u> กำหนดให้ A เซตใด ๆ จะได้

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

ให้เป็นแบบฝึกหัด

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนความหมายนิยามของการเท่ากันของเซต ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และกฎการแจกแจงโดยซักถามเป็นรายบุคคล

ขั้นสอน

1. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 15 แล้วให้นักเรียนแยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทก่อน

2. ครูให้นักเรียนช่วยพิจารณาแนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีนี้ว่า ควรเลือกวิธีการที่เห็นว่าสะดวกมากที่สุด ซึ่งจะได้การพิสูจน์ตามนิยามของการเท่ากันของเซต

3. ครูแสดงการพิสูจน์ ตามแนวการพิสูจน์ซึ่งขณะทำการพิสูจน์ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน และให้นักเรียนบอกความหมายของทฤษฎีบทนี้ มีคุณสมบัติการแจกแจง

4. ครูให้นักเรียนช่วยกันหาความหมายของเอกภพสัมพัทธ์และเขียนนิยามของเอกภพสัมพัทธ์

5. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 17 แล้วให้นักเรียนแยกสิ่งที่กำหนด และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จากทฤษฎีบทก่อน

6. ครูซักถามแนวทางในการพิสูจน์เกี่ยวกับการเท่ากันของเซตจะได้

   1) พิสูจน์ตามทฤษฎีบทที่ 1 คือ เป็นสับเซตซึ่งกันและกัน

   2) พิสูจน์ตามนิยามของการเท่ากัน

7. ครูแสดงการพิสูจน์ แบบนิยามของการเท่ากัน ตามแนวการพิสูจน์ ซึ่งขณะทำการพิสูจน์ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน

ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีที่ได้อีกครั้ง

2. ให้นักเรียนทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 16 และ 18 เป็นแบบฝึกหัด

คาบที่ 11

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. เขียนนิยามของคอมพลีเมนต์ในรูปสัญลักษณ์ได้อย่างถูกต้อง
2. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่จะต้องพิสูจน์จากทฤษฎีบทที่ 19, 20 และ 21 ได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนแนวทางการพิสูจน์ และการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง
4. สรุปเนื้อหาของทฤษฎีบทที่ 19, 20 และ 21 ได้อย่างถูกต้อง
5. ทำโจทย์แบบฝึกหัดทฤษฎีบทที่ 22 ได้ถูกต้อง

เนื้อหา **นิยาม 4.2** กำหนด A เป็นสับเซตของ $\mathcal{U}$ คอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ $\mathcal{U}$ แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

คอมพลีเมนต์ของเซต A เขียนแทนด้วย A' (อ่านว่า "เอไพร์ม")

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6\}$ และ $A = \{1,3,5\}$ จะได้ $A' = \{2,4,6\}$

จากนิยาม 4.2 เขียน A' ในรูปสัญลักษณ์หรือเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้ดังนี้

$$A' = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

ดังนั้น $x \in A' \longleftrightarrow x \notin A$

ข้อสังเกต ให้ p แทน $x \in A$

จะได้ $\sim p$ แทน $x \notin A$

ทฤษฎีบทที่ 19 กำหนดให้ A เป็นสับเซตของ $\mathcal{U}$ จะได้

$$(A')' = A$$

แนวในการพิสูจน์ จากนิยาม $(A')' = A \leftrightarrow (x \in (A')' \leftrightarrow x \in A)$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in (A')' \longleftrightarrow x \in A$

จะสรุป $(A')' = A$

พิสูจน์

$x \in (A')' \longleftrightarrow x \notin A'$, นิยามของคอมพลีแมนต์

$\longleftrightarrow \sim(x \in A')$, ความหมายของนิเสธ

$\longleftrightarrow \sim(x \notin A)$, นิยามของคอมพลีเมนต์

$\longleftrightarrow \sim\sim(x \in A)$, ความหมายของนิเสธ

$\longleftrightarrow x \in A, \quad \sim\sim p \longleftrightarrow p$

$x \in (A')' \longleftrightarrow x \in A$, กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $(A')' = A$

ทฤษฎีบทที่ 20 $\phi' \subset \mathcal{U}$

แนวในการพิสูจน์ $\phi' = \mathcal{U} \longleftrightarrow (x \in \phi' \longleftrightarrow x \in \mathcal{U})$

ถ้าสามารถแสดงได้ $x \in \phi' \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}$

จะสรุป $\phi' = \mathcal{U}$

พิสูจน์

$x \in \phi' \longleftrightarrow x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \phi$, นิยามของคอมพลีเมนต์

$\longleftrightarrow x \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \phi$ เป็นจริง

$x \in \phi' \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}$, กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $\phi' = \mathcal{U}$

หรืออาจจะพิสูจน์ดังนี้

พิสูจน์

เนื่องจาก ϕ ไม่มีสมาชิก

ดังนั้นสำหรับ x ทุกตัวใน $\mathcal{U}$ จะได้ว่า $x \notin \phi$

เพราะฉะนั้นสำหรับ x ทุกตัวใน $\mathcal{U}$ จะได้ว่า $x \in \phi'$

ดังนั้น $x \in \phi' \longleftrightarrow x \in \mathcal{U}$

นั่นคือ $\phi' = \mathcal{U}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 21</u> $\mathcal{U}' = \phi$

แนวการพิสูจน์ สมมติ $\mathcal{U}' \neq \phi$ แล้วพยายามหาข้อขัดแย้ง ถ้าสามารถหาข้อขัดแย้งกันได้

แสดงว่า การที่สมมติให้นั้นไม่ถูกต้อง

จึงสรุป $\mathcal{U}' = \phi$

<u>พิสูจน์</u>

สมมติให้ $\mathcal{U}' \neq \phi$

ดังนั้นมี x ซึ่ง $x \in \mathcal{U}'$

จากนิยามจะได้ $x \in \mathcal{U}'$, $x \in \mathcal{U}' \longleftrightarrow x \notin \mathcal{U}$

แต่สำหรับทุกสมาชิก x จะได้ $x \in \mathcal{U}$ เสมอ

ดังนั้นเกิดการขัดแย้งกัน

จะได้ที่สมมตินั้นไม่ถูกต้อง

นั่นคือ $\mathcal{U}' = \phi$

<u>ทฤษฎีบทที่ 22</u> กำหนดให้ $A \subset \mathcal{U}$ จะได้

$A \cap A' = \phi$ ให้เป็นแบบฝึกหัด

(แนะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ซึ่ง $x \in A \wedge x \notin A$ เป็นเท็จเสมอ)

<u>ทฤษฎีบทที่ 23</u> กำหนดให้ $A \subset \mathcal{U}$ จะได้

$A \cup A' = \mathcal{U}$ ให้เป็นแบบฝึกหัด

(แนะพิสูจน์ตามนิยามการเท่ากันและ $x \in A' \longleftrightarrow x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A$

และ $x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A \longrightarrow x \in \mathcal{U}$)

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนความหมายของนิเสธซ้อนนิเสธ การเท่ากันของเซต ยูเนียน และอินเตอร์เซกชัน การพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้งกัน โดยการซักถามเป็นรายบุคคล

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างโจทย์ คอมพลีเมนต์ของเซต เพื่อพิจารณาความหมายของคอมพลีเมนต์

2. จากความหมายของนิยาม ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปในรูปสัญลักษณ์หรือเซตแบบบอกเงื่อนไขให้ได้ พร้อมทั้งหาความหมายที่นำไปใช้เกี่ยวกับนิยามของคอมพลีเมนต์ คือ

$x \in A' \longleftrightarrow x \notin A$ หรือ $x \in A' \longleftrightarrow x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A$

3. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 19 แล้วให้นักเรียนพิจารณาผลสรุป และหาแนวในการพิสูจน์จากนิยามของการเท่ากันจะได้

$$(A')' = A \longleftrightarrow (x \in (A')' \longleftrightarrow x \in A)$$

4. ครูแสดงการพิสูจน์ตามแนวการพิสูจน์ ขณะที่ทำการพิสูจน์ ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน

5. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 20 แล้วให้นักเรียนพิจารณาผลสรุป และหาแนวในการพิสูจน์การเท่ากัน จะได้

   1) พิสูจน์ตามนิยามของการเท่ากันของเซต
   2) พิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

6. ครูแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีทั้ง 2 วิธี ตามแนวการพิสูจน์ โดยนักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน

ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีที่ได้อีกครั้ง
2. ให้นักเรียนทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 21,22 และ 23

คาบที่ 12

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนจะสามารถ

1. แยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่จะต้องพิสูจน์จากทฤษฎีบทที่ 24 และ 26 ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนแนวทางการพิสูจน์และการพิสูจน์ ทฤษฎีบทที่ 24 และ 26 ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปเนื้อหาของทฤษฎีบทที่ 24 และ 26 ได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนนิยามของผลต่างระหว่างเซต 2 เซต ในรูปสัญลักษณ์ได้อย่างถูกต้อง
5. ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง อย่างน้อย 80%

เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 24 กำหนดให้ $A \subset U$ และ $B \subset U$

จะได้ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

แนวในการพิสูจน์ $A = B \longleftrightarrow (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$

ถ้าสามารถแสดง $x \in (A \cup B)' \longleftrightarrow x \in A' \cap B'$

จะสรุปได้ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

พิสูจน์

$x \in (A \cup B)' \longleftrightarrow x \notin A \cup B$	, นิยามของคอมพลีเมนต์
$\longleftrightarrow \sim(x \in A \cup B)$	, ความหมายของนิเสธ
$\longleftrightarrow \sim(x \in A \vee x \in B)$	, นิยามของยูเนียน
$\longleftrightarrow \sim x \in A \wedge \sim x \in B$	, เดอมอร์กอง
$\longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$	, ความหมายของนิเสธ
$\longleftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$	, นิยามของคอมพลีเมนต์
$\longleftrightarrow x \in A' \cap B'$	, นิยามของอินเตอร์เซกชัน
$x \in (A \cup B)' \longleftrightarrow x \in A' \cap B'$	, กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ทฤษฎีบทที่ 25 กำหนดให้ $A \subset \mathcal{U}$ และ $B \subset \mathcal{U}$
จะได้ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ให้เป็นแบบฝึกหัด)

นิยาม 4.3 กำหนดให้ $A \subset \mathcal{U}$ และ $B \subset \mathcal{U}$

ผลต่างระหว่างเซต A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B

ผลต่างระหว่างเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A-B$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้

$$\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$A = \{1,2,4,6,10\}$$
$$B = \{3,5,7,8,9,10\}$$

จะได้ $A - B = \{1,2,4,6\}$

$B - A = \{3,5,7,8,9\}$

จากนิยาม 4.3 เขียน $A - B$ ในรูปสัญลักษณ์หรือเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ดังนั้น $x \in A - B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

ทฤษฎีบทที่ 26 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้
$A - B = A \cap B'$

แนวในการพิสูจน์ถ้าสามารถแสดงได้

$$x \in A - B \longleftrightarrow x \in A \cap B'$$

จะสรุป $A - B = A \cap B'$

พิสูจน์

$x \in A - B$	$\longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$	นิยามของผลต่าง
	$\longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B'$	นิยามของคอมพลีเมนต์
	$\longleftrightarrow x \in A \cap B'$	นิยามของอินเตอร์เซกชัน
$x \in A - B$	$\longleftrightarrow x \in A \cap B'$	กฎการถ่ายทอด

ดังนั้น $A - B = A \cap B'$

แบบฝึกหัด

จงพิสูจน์

$$1.\ A \cup (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$2.\ A \cap (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$$

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนนิยามของการเท่ากัน ยูเนี่ยน อินเตอร์เซคชัน และกฎของเดอมอร์กอง ในตรรกวิทยาโดยการซักถามเป็นรายบุคคล

ขั้นสอน

1. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 24 แล้วให้นักเรียนพิจารณาผลสรุป และหาแนวทางในการพิสูจน์จากนิยามของการเท่ากันของเซต จะได้

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \longleftrightarrow [x \in (A \cup B)' \longleftrightarrow x \in A' \cap B']$$

2. ครูแสดงการพิสูจน์ ตามแนวการพิสูจน์ ขณะที่ทำการพิสูจน์ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน

3. ครูยกตัวอย่างโจทย์หาผลต่างระหว่างเซต 2 เซต เพื่อพิจารณาความหมายของผลต่างระหว่างเซต

4. จากความหมายของนิยาม ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปในรูปสัญลักษณ์หรือเซตแบบบอกเงื่อนไขให้ได้พร้อมทั้งหาความหมายที่นำไปใช้เกี่ยวกับนิยามของผลต่างระหว่างเซต คือ

$$x \in A - B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

5. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 26 แล้วให้นักเรียนพิจารณาผลสรุป และหาแนวในการพิสูจน์จากนิยามการเท่ากันของเซตจะได้

$$A - B = A \cap B' \longleftrightarrow (x \in A - B \longleftrightarrow x \in A \cap B')$$

6. ครูแสดงการพิสูจน์ ตามแนวการพิสูจน์ ขณะที่ทำการพิสูจน์ให้นักเรียนบอกเหตุผลประกอบการพิสูจน์ทุกขั้นตอน

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการพิสูจน์ที่ได้อีกครั้ง
2. ให้นักเรียนทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 25 และทำแบบฝึกหัด 2 ข้อ

ภาคผนวก ค

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง

"การดำเนินการของเซต"

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเขียน ให้ตรงกับข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียวเท่านั้น ลงในกระดาษคำตอบ

1. การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้น มีแนวในการพิสูจน์อย่างไร

ก. เริ่มต้นจากเหตุไปสู่ผลเสมอ

ข. อาจเริ่มด้วยการสมมติเป็นเท็จ แล้วพยายามหาข้อขัดแย้ง มาจากการสมมุตินั้น

ค. อาจเริ่มต้นด้วยการสมมติว่าเป็นเท็จ เพื่อสรุปผลว่าเป็นจริง

ง. อาจพิสูจน์ข้อความที่มีความหมายสมมูลกัน (ทางตรรกวิทยา) แทนได้

จ. ข้อ ข. และข้อ ง.

2. นิยาม $A = B \longleftrightarrow \forall x \; [x \in A \longleftrightarrow x \in B]$

พิจารณา เซต A ไม่เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ

ก. สำหรับสมาชิก x ทุกตัว, $x \notin A$ ก็ต่อเมื่อ $x \notin B$

ข. สำหรับสมาชิก x ทุกตัว, $x \notin A$ ก็ต่อเมื่อ $x \in B$

ค. สำหรับสมาชิก x ทุกตัว, $x \in A$ ก็ต่อเมื่อ $x \in B$

ง. สำหรับสมาชิก x บางตัว, $x \notin A$ และ $x \in B$ หรือสำหรับสมาชิก x บางตัว, $x \in A$ และ $x \notin B$

จ. สำหรับสมาชิก x บางตัว, $x \notin A$ และ $x \in B$ และสำหรับสมาชิก x บางตัว, $x \in A$ และ $x \notin B$

3. นิยามของสับเซต, $A \subset B \longleftrightarrow \forall x \; [x \in A \longrightarrow x \in B]$

พิจารณา $A \not\subset B$

ก. $\forall x \; [x \notin A \longleftrightarrow x \in B]$

ข. $\forall x \; [x \in A \longleftrightarrow x \notin B]$

ค. $\exists x \; [x \in A \wedge x \notin B]$

ง. $\exists x \; [x \notin A \wedge x \in B]$

จ. $\exists x \; [x \notin A \vee x \notin B]$

4. นิยามของสับเซตแท้, A เป็นสับเซตแท้ของ B $\longleftrightarrow \forall x\,[x \in A \longrightarrow x \in B] \wedge$
$\exists x\,[x \in B \wedge x \in A]$

พิจารณาข้อความ A เป็นสับเซตแท้ของ B เป็นจริงหรือเท็จ ดังเหตุผลในข้อใด

ก. เป็นจริง เพราะ $A \subset A \longleftrightarrow \forall x\,[x \in A \longrightarrow x \in A]$ เป็นจริงเสมอ

ข. เป็นเท็จ เพราะ $\forall x\,[x \in A \longrightarrow x \in A]$ เป็นเท็จ

ค. เป็นเท็จ เพราะ $\forall x\,[x \in A \longrightarrow x \in A] \wedge x\,[x \in A \wedge x \notin A]$ เป็นเท็จทั้งคู่

ง. เป็นเท็จ เพราะ $\exists x\,[x \in A \wedge x \notin A]$ เป็นเท็จเสมอ

จ. ไม่มีข้อความใน ก. – ง. ถูก

5. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ
ถ้าแสดงได้ 1. $A = B \longrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
2. $A \subset B \wedge B \subset A \longrightarrow A = B$
จาก 1. และ 2. จะสรุปได้ว่า

ก. $A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

ข. $A \subset B \longleftrightarrow B \subset A$

ค. $A = B \longleftrightarrow A \subset B$

ง. $B \subset A \longleftrightarrow A = B$

จ. ไม่มีคำตอบใน ก. – ง. ถูก

6. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ B = {ก, ข, ค, ง}
เหตุผลในข้อใด สรุปได้ว่า

ก. สมาชิกทุกตัวของเซต A ไม่เป็นสมาชิกของเซต B

ข. มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว ที่เป็นสมาชิกของเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B

ค. มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว ที่เป็นสมาชิกของเซต B แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

ง. มีสมาชิกบางตัวที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A และเซต B

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

7. กำหนด A เป็นเซตใด ๆ พิจารณาการให้เหตุผลจากการพิสูจน์

<u>พิสูจน์</u> $x \in A \longrightarrow x \in A \vee x \in \phi$, $p \longrightarrow p \vee q$ 1

$\longrightarrow x \in \phi$, $p \vee q \longrightarrow q$ 2

$x \in A \longrightarrow x \in \phi$,1 และ 2 กฎการถ่ายทอด....3

ดังนั้น $A \subset \phi$, นิยามของสับเซต

การให้เหตุผลข้างบนนี้ ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จ. 3 และ 4

พิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้แล้วตอบคำถามข้อ 8 – 10

กำหนด A เป็นสับเซตของ ϕ

พิจารณา $A \subset \phi$ 1

$\phi \subset A$ 2

8. เหตุผลที่จะได้ข้อ 1 $A \subset \phi$ คือ

ก. $A = \phi$

ข. $x \in A \longleftrightarrow x \in \phi$

ค. กำหนดให้

ง. A เป็นสับเซตของ ϕ เสมอ

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

9. เหตุผลที่จะได้ ข้อ 2 $\phi \subset A$ คือ

ก. $A = \phi$

ข. $x \in A \longleftrightarrow x \in \phi$

ค. กำหนดให้

ง. จากทฤษฎีบท $\phi \subset A$

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

10. ข้อใดเป็นผลสรุปที่ได้จากข้อ 8 และ 9

ก. $A \subset \phi$

ข. $A = \phi$

ค. $\phi \subset A$

ง. $A \subset \phi \longleftrightarrow \phi \subset A$

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

11. เหตุผลข้อใดที่ทำให้สามารถสรุปได้ว่า $\phi \subset A$ เมื่อ A เป็นเซตใด ๆ

ก. เพราะจำนวนสมาชิกของ ϕ น้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนสมาชิกของ A

ข. เพราะจำนวนสมาชิกของ ϕ น้อยกว่าจำนวนสมาชิกของ A

ค. เพราะข้อความ "สำหรับทุก x, ถ้า $x \in \phi$ แล้ว $x \in A$ เป็นจริง"

ง. เพราะข้อความ "สำหรับทุก x, ถ้า $x \in \phi$ แล้ว $x \in A$ เป็นจริง"

จ. เพราะข้อความ "สำหรับทุก x, ถ้า $x \in \phi$ เป็นเท็จดังนั้น
ข้อความ "สำหรับทุก x, ถ้า $x \in \phi$ แล้ว $x \in A$ เป็นจริง"

12. กำหนด A และ B เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $x \in A \wedge x \in B \longrightarrow x \in A$ เป็นจริง
ถ้าทราบว่า $x \in A$ เป็นจริง แล้วข้อสรุปข้อใดผิด

ก. $x \in A \wedge x \in B$

ข. $x \in A \vee x \in B$

ค. $x \in A$

ง. $x \in \mathcal{U}$

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

พิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถาม ข้อ 13 – 14

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

<u>พิสูจน์</u>

$x \in A$	$\longrightarrow p$	,.....1
	$\longrightarrow q$	,.....2
	$\longrightarrow x \in B$	,.....3
$x \in A$	$\longrightarrow x \in B$	,.....4
ดังนั้น	r	,.....5

13. เหตุผลข้อใดที่ทำให้สรุปได้ $x \in A \longrightarrow x \in B$ (ข้อ 4)

ก. คุณสมบัติของสมาชิก x ใด ๆ

ข. คุณสมบัติของเซต A และ B

ค. กฎการถ่ายทอด

ง. คุณสมบัติของ ถ้า.....แล้ว.....

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

14. ผลสรุป r (ข้อ 5) คือ

ก. $A \subset B$

ข. $B \subset A$

ค. $A = B$

ง. $A \longrightarrow B$

จ. $A \longleftrightarrow B$

15. กำหนด A และ B เป็นเซตใด ๆ

<u>พิสูจน์</u>

$x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B$,นิยามของอินเตอร์เซก 1

$\longleftrightarrow x \in A$ 2

$x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A$ 3

นั่นคือ $A \cap B = A$ 4

การพิสูจน์ข้างบนข้อใดผิด

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จ. 3 และ 4

กำหนด A และ B เป็นเซตใด ๆ พิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามข้อ 16–22

<u>พิสูจน์</u>

ตอน 1 จะแสดง $A \subset B \longrightarrow A \cup B$

	$x \in A \cup B \longrightarrow x \in A \vee x \in B$	,......1
	$\longrightarrow x \in B \vee x \in B$	,......2
	$\longrightarrow x \in B$	$, (p \vee p) \rightarrow p$.....3
จะได้	s	,......4
และ	$B \subset A \cup B$	ทฤษฎีบท 5
ดังนั้น	t	,.....6

ตอน 2 จะแสดง $A \cup B = B \longrightarrow A \subset B$

	$x \in A \longrightarrow x \in A \vee x \in B$	$, p \longrightarrow (p \vee q)$, ...7
	$\longrightarrow x \in A \cup B$	นิยามของยูเนียน 8
	$\longrightarrow x \in B$	,.....9
ดังนั้น	u	10

16. ข้อใดคือเหตุผล $x \in A \cup B \longrightarrow x \in A \vee x \in B$ (ข้อ1)

ก. เป็นทอโทโลยี

ข. เป็นจริงเสมอ

ค. นิยามของยูเนียน

ง. นิยามของอินเตอร์เซก

จ. เหตุผลทางตรรกวิทยา

17. เหตุผลที่ทำให้สรุปได้ $x \in B \vee x \in B$ (ข้อ 2) คือ

ก. $A \cup B = B$

ข. $A \subset B$

ค. $A = B$

ง. $B \subset A$

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

18. ผลสรุปที่ได้ s (ข้อ 4) คือ

ก. $A \subset A \cup B$

ข. $B \subset A \cup B$

ค. $A \cup B \subset A$

ง. $A \cup B \subset B$

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

19. ผลสรุปที่ได้ t (ข้อ 6) คือ

ก. $A = B$

ข. $A = A \cup B$

ค. $B = A \cup B$

ง. $B \subset A \cup B$

จ. $A \subset A \cup B$

20. เหตุผลที่ทำให้สรุปได้ $x \in B$ (ข้อ 9) คือ

ก. นิยามของยูเนียน

ข. $A \cup B \subset B$

ค. $B \subset A \cup B$

ง. $A \subset A \cup B$

จ. $A \cup B = B$

21. ผลสรุปที่ได้ u (ข้อ 10) คือ

ก. $A \subset B$

ข. $A \subset A \cup B$

ค. $B \subset A \cup B$

ง. $A \cup B \subset B$

จ. $A = A \cup B$

22. จากตอน 1 และ 2 จะได้

ก. $A \subset B \longleftrightarrow A \cup B$

ข. $A \subset B \longleftrightarrow A \cup B = B$

ค. $A \subset B \longleftrightarrow A \cup B \subset B$

ง. $A \subset B \longleftrightarrow A \cap B = A$

จ. $A \subset B \longleftrightarrow A \cup B = A$

กำหนด A และ B เป็นเซตใด ๆ พิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้แล้วตอบคำถามในข้อ 23–24

<u>พิสูจน์</u>

สมมติให้ $A \cap (B - A) \neq \phi$ 1

ดังนั้นมี x บางตัวซึ่ง $x \in [A \cap (B - A)]$ 2

จะได้ $x \in A \wedge (x \in B - A)$ 3

จะได้ $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin A)$ 4

แต่ p ทำให้เกิดการขัดแย้ง 5

นั่นคือ q

23. เหตุที่ทำให้เกิดการขัดแย้ง p (ข้อ 5) แทนข้อความในข้อใด

ก. $x \in B$

ข. $x \notin A$

ค. $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin A)$

ง. $x \in A \wedge x \notin A$

จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. – ง. ถูก

24. ผลสรุป q (ข้อ 6) แทนข้อความในข้อใด

ก. $A \cap (B - A) \neq \phi$

ข. $A \cap (B - A)$ เป็นเซ็ตเสมอ

ค. $A \cap (B - A) = A$

ง. $A \cap (B - A) = B'$

จ. $A \cap (B - A) = (A \cap B) - (A \cap A)$

กำหนดให้ A,B และC เป็นเซตใด ๆ พิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถาม ข้อ 25 - 27

<u>พิสูจน์</u>

$$
\begin{aligned}
A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)' &&, A - B = A \cap B' \ldots 1 \\
&= A \cap (B' \cap C') &&, (A \cup B)' = A' \cap B' \ldots 2 \\
&= (A \cap A) \cap (B' \cap C') &&, A \cap A = A \ldots 3 \\
&= A \cap (A \cap B') \cap C' &&, \ldots\ldots\ldots\ldots 4 \\
&= (A \cap B') \cap (A \cap C') &&, \ldots\ldots\ldots\ldots 5 \\
&= p
\end{aligned}
$$

25. เหตุผลข้อใดที่ทำให้สรุป $A \cap (A \cap B') \cap C'$ (ข้อ 4)
    ก. กฎการแจกแจง
    ข. กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้
    ค. กฎการสลับที่
    ง. นิยามของอินเตอร์เซก
    จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. - ง. ถูก

26. เหตุผลข้อใดที่ทำให้สรุป $(A \cap B') \cap (A \cap C')$ (ข้อ 5)
    ก. กฎการแจกแจง
    ข. กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้
    ค. กฎการสลับที่
    ง. นิยามของอินเตอร์เซก
    จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. - ง. ถูก

27. ข้อใดเป็นผลสรุปที่ได้ ซึ่งเป็นข้อความที่ใช้แทน p
    ก. $(A - B)' \cup (A - C')$
    ข. $(A - B)' \cap (A - C)'$
    ค. $(A - B) \cup (A - C)$
    ง. $(A - B) \cap (A - C)$
    จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. - ง. ถูก

กำหนด P และ Q เป็นเซตใด ๆ พิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามข้อ 28 - 30

<u>วิธีทำ</u> $(P \cup Q) \cup (P \cap Q) = [(P \cup Q) \cup P] \cap [(P \cup Q) \cup Q]$ 1

$= [(P \cup Q) \cup P] \cap [P \cup (Q \cup Q)]$ 2

$= [(P \cup Q) \cup P] \cap [(P \cup Q)]$,... $Q \cup Q = Q$ 3

$= [P \cup (P \cup Q)] \cap (P \cup Q)$,...... 4

$= [(P \cup P) \cup Q] \cap (P \cup Q)$

$= (P \cup Q) \cap (P \cup Q)$

$= P \cup Q$

28. เหตุผลที่ทำให้สรุป $[(P \cup Q) \cup P] \cap [(P \cup Q) \cup Q]$ (ข้อ 1) คือ
 ก. กฎการสลับที่
 ข. กฎการแจกแจง
 ค. กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้
 ง. นิยามของยูเนียน
 จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. - ง. ถูก

29. เหตุผลที่ทำให้สรุป $[(P \cup Q) \cup P] \cap [P \cup (Q \cup Q)]$ (ข้อ 2) คือ
 ก. กฎการสลับที่
 ข. กฎการแจกแจง
 ค. กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้
 ง. นิยามของยูเนียน
 จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. - ง. ถูก

30. เหตุผลที่ทำให้สรุป $[P \cup (P \cup Q)] \cap (P \cup Q)$ (ข้อ 4) คือ
 ก. กฎการสลับที่
 ข. กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้
 ค. กฎการแจกแจง
 ง. นิยามของยูเนียน
 จ. ไม่มีคำตอบในข้อ ก. - ง. ถูก

<u>ตอนที่ 2</u> ให้นักเรียนแสดงวิธีพิสูจน์ โดยเขียนแนวในการพิสูจน์ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบทุกขั้นตอน

ข้อสอบมี 3 ข้อ ทำทุกข้อ

กำหนดให้ A , B และ C เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

1. $A \subset B \wedge B \subset C \longrightarrow A \subset C$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ภาคผนวก ง.

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

ผู้ทรงคุณวุฒิที่กรุณาตรวจเนื้อหาบันทึกการสอน และแบบทดสอบคือ

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์พิศากร แปลงประสพโชค
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุเทพ ทองอยู่
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศักดา บุญโต
4. อาจารย์ลนัย ยังคง
5. อาจารย์สำราญ มีแจ้ง

ประวัติผู้เขียน

นายสินชัย จิตรธีระ เกิดวันที่ 5 มกราคม พ.ศ. 2497 ที่จังหวัดสุพรรณบุรี สำเร็จการศึกษาปริญญาการศึกษาบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน เมื่อปีการศึกษา 2519 เข้าศึกษาต่อในสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2524 ปัจจุบันรับราชการในตำแหน่งอาจารย์ 1 โรงเรียน[illegible]วิทยาคม จังหวัดเพชรบูรณ์ สังกัดกรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ