บทที่ 2

วรรณคดีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยจะนำเสนอดังหัวข้อต่อไปนี้

1. มโนมติ เบื้องต้นเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
   1.1 ทฤษฎีการเรียนรู้
   1.2 โครงสร้างทางคณิตศาสตร์
   1.3 วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
   1.4 ปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวกับการพิสูจน์
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
   2.1 งานวิจัยในประเทศ
   2.2 งานวิจัยต่างประเทศ

1. มโนมติเบื้องต้นเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

1.1 ทฤษฎีการเรียนรู้

มีนักการศึกษาหลายท่านที่ได้ศึกษาการเรียนรู้ของเด็ก เช่น ยีน เปียร์เจต์ (Jean Piaget) ได้ศึกษาพัฒนาการของเด็กและแบ่งเป็นขั้นต่าง ๆ หลายขั้น ซึ่งขั้นหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับวัยรุ่นคือ ขั้นปฏิบัติการนามธรรมได้ (Formal Operational Stage) เริ่มจากอายุ 11 หรือ 12 ปี จนกระทั่งถึงอายุ 14 หรือ 15 ปี ในขั้นนี้พัฒนาการทางสติปัญญาและความคิดของเด็กเป็นขั้นสุดยอด คือเด็กในวัยนี้จะเริ่มคิดแบบผู้ใหญ่ ความคิดแบบเด็กจะสิ้นสุดลง เด็กจะสามารถคิดหาเหตุผลนอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ สามารถที่จะคิดแบบนักวิทยาศาสตร์ สามารถที่จะตั้งสมมติฐานและทฤษฎีและเห็นว่าความจริงที่เห็นด้วยการรับรู้ไม่สำคัญเท่ากับความคิดถึงสิ่งที่อาจจะเป็นไปได้[1]

---

[1]Jean Piaget, The Psychology of the Child, (New York : Trans by Henlen Neaver Basic Book, 1969), p. 149-151.

ในทางคณิตศาสตร์ เปียร์เจต์ได้กล่าวว่าเด็กอายุ 11 ถึง 15 ปี สามารถนำความคิดที่ถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่เป็นรูปธรรม มีการคิดที่เป็นอิสระขึ้น และสามารถคิดสิ่งที่เป็นนามธรรมได้ สามารถสรุปและอนุมานจากสมมติฐานได้[1]

เจอร์โรม เอส. บรูเนอร์ (Jerome S. Bruner) เชื่อว่าการจัดประสบการณ์ให้ดีที่สุดในขณะที่ยังเด็กจะช่วยในการเรียนรู้และคิดค้น การที่รอให้เด็กพร้อมเป็นการเสียเวลา การมีการจัดประสบการณ์ภายใต้การนิเทศให้เด็ก นอกจากนี้ บรูเนอร์ ยังได้แสดงแนวคิดเกี่ยวกับโครงสร้างของเนื้อหาวิชา (Concept of Structure) ว่า "เราสามารถสอนเนื้อหาวิชาใด ๆ ก็ตามได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยวิธีการที่ปรับเหมาะสมแล้วแก่เด็กคนใด เมื่อใดก็ได้"[2]

ดังนั้นสรุปได้ว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีความสามารถในการคิดหาเหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ ปัจจุบันนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีพื้นฐานในวิชาตรรกศาสตร์พอสมควร กล่าวคือสามารถที่จะพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ได้ การเรียนคณิตศาสตร์ไม่ได้มุ่งให้ผู้เรียนจำได้เท่านั้น จุดมุ่งหมายหลักคือให้นักเรียนได้พัฒนากระบวนการคิดทางนามธรรม

1.2 โครงสร้างทางคณิตศาสตร์

ระบบคณิตศาสตร์ทุกระบบมีโครงสร้างที่คล้ายคลึงกันหรือทำนองเดียวกัน แต่รายละเอียดอาจจะแตกต่างกันออกไป โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. อนิยาม (Undefinded Term) เป็นส่วนที่ไม่อธิบายความหมายหรือไม่ให้ความหมายในระบบคณิตศาสตร์ตัวอย่างคำอนิยามได้แก่ เซต, จุด, เส้น เป็นต้น

2. นิยาม (Defined Term) เป็นส่วนที่มีความหมายหรืออธิบายแน่นอนเป็นส่วนใช้แทนส่วนต่าง ๆ ของระบบคณิตศาสตร์ ตัวอย่างคำนิยามได้แก่ ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน สามเหลี่ยม เป็นต้น

3. สัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate) เป็นข้อความที่เราต้องยอมรับว่าเป็นจริงหรือถูกต้อง ซึ่งจะยึดถือเป็นหลักในการพิสูจน์ กฎ หรือ ทฤษฎีบท

---

[1] Jean Piaget, The Psychology of the Child, p. 135-136.

[2] Jerome S. Bruner, The Process of Education (New York : Vintage Books, 1960), p. 33.

4. ทฤษฎีบท (Theorem) เป็นส่วนของระบบคณิตศาสตร์ที่เป็นผลมาจากอนิยาม หรือนิยามและสัจพจน์ โดยใช้ตรรกศาสตร์เป็นเครื่องมือ ตัวอย่างทฤษฎีบทในทฤษฎีเซตได้แก่ เซตว่างเป็นสับเซตของทุก ๆ เซต เป็นต้น

ในการศึกษาระบบคณิตศาสตร์ โดยอาศัยกฎเกณฑ์เบื้องต้น (อนิยาม นิยาม และสัจพจน์) เป็นความรู้พื้นฐานแล้วใช้ตรรกศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ หรืออนุมานความรู้ต่าง ๆ ในระบบ โดยมีสัจพจน์ที่ตั้งไว้เป็นหลักเกณฑ์เท่านั้นเรียกว่า "ระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์" (Axiomatic Method) ซึ่งในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ตลอดจนนักวิจัยนิยมใช้กันมาก ลำดับ**ขั้น** ของระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ เริ่มจากการพิจารณาเนื้อหาวิชา เลือกเนื้อหาส่วนหนึ่งเป็นหลักเกณฑ์เบื้องต้นมาจัดเป็นระบบเรียกว่า "ระบบสัจพจน์" (Axiomatic System)

ระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ (Axiomatic Method) มีลักษณะเด่นคือ

1. ในการพิสูจน์ ไม่ต้องใช้สมมติฐานเริ่มเติมจากสัจพจน์ที่มีอยู่ เพราะมีสัจพจน์เป็นข้อตกลงสำหรับหาความรู้ครบถ้วนแล้ว

2. หาข้อที่ผิดในระบบสัจพจน์ได้ง่าย เพราะถ้ามีทฤษฎีผิดหรือขัดแย้งกัน แสดงว่าผิดที่ระบบสัจพจน์

3. การที่ไม่ได้กำหนดความหมายของอนิยามไว้แต่แรก ทำให้สามารถตีความหมายของอนิยามในรูปต่าง ๆ ได้ ถ้าสิ่งนั้นสอดคล้องกับข้อตกลงที่ตั้งขึ้น และจะทราบสิ่งอื่นเพิ่มเติมในคราวเดียวกันโดยไม่ต้องพิสูจน์ใหม่ เช่น การเขียนกราฟเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในสมการ เป็นวิธีที่เห็นชัดเจนมากในการศึกษาความสัมพันธ์โดยตรง

วิธีการที่ผู้วิจัยจัดเสริมเนื้อหา เพื่อพิสูจน์ประกอบด้วยอนิยาม นิยาม และสัจพจน์เช่นกัน ดังนั้นจึงถือว่าเป็นวิธีการหนึ่งที่เกี่ยวกับสัจพจน์ (Axiomatic Method)

1.3 <u>วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์</u>

การพิสูจน์ประพจน์ในวิชาคณิตศาสตร์มีวิธีการดังนี้

1. การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof) เป็นการพิสูจน์ประพจน์โดยเริ่มจากเหตุหรือสมมติฐานหรือข้อความที่เรายอมรับมาก่อนแล้ว นำมาจัดเรียงลำดับเหตุผล เชื่อมโยงไปสู่ผลสรุป ตามต้องการโดยตรง

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่ใด ๆ แล้ว a + b เป็นจำนวนคู่

ประพจน์นี้อยู่ในรูปประโยคเงื่อนไข $p \rightarrow q$ ซึ่งเป็นจริงในทุกกรณี ยกเว้นกรณีเดียว ที่ p เป็นจริง แต่ q เป็นเท็จ ฉะนั้นการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของประโยคเงื่อนไขนี้ จำต้องพิจารณากรณีที่ p เป็นจริง แล้วพยายามพิสูจน์ให้ได้ว่า q เป็นจริง

<u>พิสูจน์</u>

1. a และ b ต่างก็เป็นจำนวนคู่	1. กำหนดให้
2. $a = 2x$ สำหรับบางค่าของ x ที่เป็นจำนวนเต็ม $b = 2y$ สำหรับบางค่าของ y ที่เป็นจำนวนเต็ม	2. นิยามจำนวนเต็มใด ๆ n เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $n = 2m$ สำหรับบางค่าของ m ที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น
3. $a + b = 2x + 2y$	3. บวก a และ b เข้าด้วยกัน แล้วแทนค่าในผลบวก
4. $2x + 2y = 2(x + y)$	4. กฎสมบัติการแจกแจง
5. $a + b = 2(x + y)$	5. กฎสมบัติการถ่ายทอดสำหรับ และ
6. $x + y$ เป็นจำนวนเต็ม	6. กฎสมบัติปิด
7. $a + b$ เป็นจำนวนคู่	7. ข้อ 5 และนิยามในข้อ 2

□

2. การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof) หรือ (Reductio ad Absurdum) เป็นการพิสูจน์ประพจน์โดยเริ่มจากผลหรือสิ่งที่ต้องการ โดยใช้นิเสธของผลเป็นเหตุชั่วคราว เพื่อนำไปสู่ข้อขัดแย้งบางประการ

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า a + b เป็นจำนวนคี่และ a เป็นจำนวนคู่ แล้ว b เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่างนี้จักแยกเป็นส่วน ๆ ได้ดังนี้

เหตุ 1. a + b เป็นจำนวนคี่

2. a เป็นจำนวนคู่

ผล b เป็นจำนวนคี่

<u>พิสูจน์</u>

1. สมมติให้ b เป็นจำนวนคู่	เหตุชั่วคราว
2. a และ b เป็นจำนวนคู่	ข้อ 1 และเหตุ 2 และนิยามของ "และ"
3. a + b เป็นจำนวนคู่	พิสูจน์มาแล้ว
4. a + b เป็นจำนวนคี่	เหตุ 1
5. การสมมติให้ b เป็นจำนวนคู่ จึงทำให้เกิดการขัดแย้ง	$p \wedge \sim p$
6. b ต้องไม่เป็นจำนวนคู่	เหตุชั่วคราวไม่ถูกต้อง
7. นั่นคือ b เป็นจำนวนคี่	กฎการไม่เป็นกลาง

□

ในการพิสูจน์นั้น มีขั้นตอนดังนี้

1. หานิเสธของ "ผล" แล้วใช้นิเสธนั้นเป็นเหตุชั่วคราว
2. พิสูจน์ว่าเหตุชั่วคราว นำไปสู่ข้อขัดแย้งบางประการ
3. สรุปได้ว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

3. การพิสูจน์โดยใช้กฎของข้อความขัดแย้งสลับที่ของประพจน์ (Proof by Contrapositive) คือการพิสูจน์โดยอาศัย $(p \to q) \longleftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า x^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว x จะต้องเป็นจำนวนคู่ด้วย

<u>พิสูจน์</u>

ข้อความแย้งสลับที่ของประพจน์ดังกล่าว คือ "ถ้า x เป็นจำนวนคี่แล้ว x^2 จะต้องเป็นจำนวนคี่ด้วย"

1. สมมติว่า x เป็นจำนวนคี่
2. $x = 2a + 1$ โดยที่ a เป็นจำนวนเต็ม
3. $x^2 = (2a + 1)^2$

$$= 4a^2 + 4a + 1$$

$$= 2(2a^2 + 2a) + 1$$

4. $2a^2 + 2a$ เป็นจำนวนเต็ม
5. x^2 เป็นจำนวนคี่

□

4. การพิสูจน์ว่ามีจริง (Proof by Existence) เป็นการพิสูจน์ประโยคที่ใช้ตัวบ่งปริมาณของการมีอย่างน้อยหนึ่ง ($\exists x\ P(x)$) ว่าเป็นจริง โดยแสดงว่ามีสมาชิก a อย่างน้อยหนึ่งสมาชิก ในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ $P(a)$ เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเท่ากับ 1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\exists x \in R\ [x^2 = 1]$ เป็นจริง

<u>พิสูจน์</u>

$1 \in R$

$(1)^2 = 1$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเท่ากับ 1

5. การพิสูจน์แบบแจกแจงสมาชิก (Proof by Enumeration) เป็นการพิสูจน์ประโยคที่ใช้ตัวบ่งปริมาณ "ทั้งหมด" ($\forall x P(x)$) ว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่เป็นเซตจำกัด

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $a * b = a + b - ab$ เมื่อ $a, b \in \{0, 1\}$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $a * b = b * a$

<u>พิสูจน์</u>

a	b	a * b	b * a
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

เพราะฉะนั้น $a * b = b * a$

□

6. การพิสูจน์แบบแจงกรณี (Proof by Cases) เป็นการพิสูจน์ว่าประพจน์เป็นจริง โดยแสดงทุกกรณี

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $3a + a^2$ จะต้องเป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม a อาจจะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่

กรณีที่ 1 ถ้า a เป็นจำนวนคู่ $a = 2b$, b เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $3a + a^2 = 3(2b) + (2b)^2 = 2(3b + 2b^2)$

เนื่องจาก b เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $3b + 2b^2$ ต้องเป็นจำนวนเต็มด้วย

$2(3b + 2b^2)$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $3a + a^2$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 ถ้า a เป็นจำนวนคี่ $a = 2c - 1$, c เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $3a + a^2 = 3(2c - 1) + (2c - 1)^2$

$= 6c - 3 + 4c^2 - 4c + 1 = 2(2c^2 + c - 1)$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $3a + a^2$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ เมื่อ a เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ $3a + a^2$ เป็นจำนวนคู่เสมอ □

7. การพิสูจน์แบบตัดกรณี (Proof by Elimination) เป็นการพิสูจน์ว่าประพจน์เป็นจริงโดยจำแนกเป็นกรณี ๆ ที่อยู่ในขอบข่ายของการพิจารณาแล้ว แสดงให้เห็นว่ามีกรณีที่เป็นจริงเพียงกรณีเดียว

การพิสูจน์แบบนี้อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$$(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \wedge (\sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge \ldots \wedge \sim P_{n-1}) \longrightarrow P_n$$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้ามีดวงตราไปรษณียากรชนิดดวงละ 3 บาทและ 4 บาท ต้องการจะส่งจดหมายซึ่งต้องใช้ดวงตราไปรษณียากรราคา 10 บาท จงพิสูจน์ว่าจะต้องใช้ดวงตราไปรษณียากรชนิดดวงละ 3 บาท 2 ดวง และชนิดดวงละ 4 บาท 1 ดวง เท่านั้น

<u>วิธีคิด</u> การใช้ดวงตราไปรษณียากรดวงละ 4 บาท นำมาพิจารณาเพียง 2 ดวง เพราะใช้ดวงละ 4 บาทมากกว่า 2 ดวงแล้ว จำนวนเงินที่ใช้เกิน 10 บาท สำหรับดวงละ 3 บาท ก็พิจารณาเพียง 3 ดวง เพราะถ้าใช้ดวงละ 3 บาทเกิน 3 ดวง จำนวนเงินที่ใช้ก็เกิน 10 บาทเช่นกัน ฉะนั้นในการตัดกรณีอื่น ๆ ออกไปจนเหลือแต่กรณีที่อยู่ในขอบข่ายของการพิจารณาเพียง 12 กรณี ดังตาราง

ดวงละ 3 บาท / ดวงละ 4 บาท	0	1	2	3
0	0	3	6	9
1	4	7	10	13
2	8	11	14	17

จากตารางจะเห็นได้ว่ามีกรณีเดียวเท่านั้นที่เป็นไปได้ คือซื้อดวงตราไปรษณีย์ ดวงละ 4 บาท 1 ดวงและดวงละ 3 บาท 2 ดวง

8. การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างค้าน (Disproof by Counterexample) เป็นการพิสูจน์ว่าประพจน์เป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้านเพียงตัวอย่างเดียว

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $\forall x\, [x+3 = x]$ เป็นเท็จ

พิสูจน์ ถ้า $x = 1$, $1 + 3 = 1$ เป็นเท็จ

ถือว่าการพิสูจน์เพียง 1 บรรทัดนี้สมบูรณ์แล้ว เพราะนิเสธของ $\forall x\, [x+3 = x]$

คือ $\exists x\, [x + 3 = x]$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $\forall x\, [x + 3 = x]$ เป็นเท็จ

ตัวอย่างเพื่อใช้แสดงว่า $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ เรียกว่า "ตัวอย่างค้าน"

1.4 <u>ปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวกับการพิสูจน์</u>

ปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในปัจจุบันประการหนึ่งคือ เรื่องการพิสูจน์ ดังที่ ทักษา บุญโต กล่าวว่า

> ในการศึกษาวิชาเรขาในระดับมัธยมหรือระดับมหาวิทยาลัยปีแรก ๆ นั้น การพิสูจน์แสดงเหตุใดให้เห็นจริงโดยที่การเห็นจริงนั้นเป็นธรรมชาติของเขา เด็กนักเรียนหรือนิสิตนักศึกษาอาจจะพิสูจน์ไม่ได้ ในบางครั้งอาจารย์ผู้สอนบอกแต่ว่าเป็นกฎสมบัติที่นำไปอ้างอิงได้โดยอาจารย์ผู้สอนไม่ได้พิสูจน์ไว้ ทำให้ผู้เรียนบางคนไม่ยอมรับเพราะยังไม่มีการพิสูจน์ เมื่อพยายามพิสูจน์เองก็พิสูจน์ไม่ออกไม่ได้ จึงทำให้ผู้เรียนเข้าใจรับรู้

คุณสมบัติเหล่านั้นเพื่อนำไปอ้างอิงเท่านั้น[1]

นอกจากนี้ สักกา บุญโต ยังได้เสนอวิธีวิเคราะห์การเท่ากันของเซตสองเซต ในรูปตารางการวิเคราะห์ซึ่งมีวิธีการดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า $(A \cap B)' = A' \cup B'$

<u>วิธีทำ</u>

A	B	A'	B'	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

<u>หมายเหตุ</u> สัญลักษณ์ $\in$ หมายความว่า x เป็นสมาชิกของ A

$\notin$ หมายความว่า x ไม่เป็นสมาชิกของ A

จากตารางจะเห็นว่า $x \in (A \cap B)'$ จะได้ $x \in A' \cup B'$

และ $x \notin (A \cap B)'$ จะได้ $x \notin A' \cup B'$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $(A \cap B)' = A' \cup B'$

จากปัญหาการเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ ได้เสนอแนวทางในการแก้ปัญหาในการพิสูจน์เกี่ยวกับเซตว่า

เนื่องจากในหนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้เริ่มต้นเรื่องเซต ดังนั้น นักเรียนจึงไม่มีความรู้พื้นฐานเพียงพอที่จะพิสูจน์ข้อเท็จจริงบางประการเกี่ยวกับเซต เมื่อได้ศึกษาเรื่องอื่น ๆ แล้วจึงสามารถนำความรู้เหล่านั้นมาพิสูจน์ข้อเท็จจริงบางประการเกี่ยวกับเซตได้ การทำเช่นนี้นอกจากเป็นการแสดงให้เห็นถึงประโยชน์ในการศึกษาเรื่องใหม่ ๆ เหล่านั้นแล้ว ยังเป็นการทบทวนเกี่ยวกับเรื่องเซตอีกด้วย ทำให้การศึกษาเป็นแบบบันไดเวียน[2]

---

[1]สักกา บุญโต, "การพิสูจน์ทฤษฎีของเซตโดยใช้ตารางการเป็นสมาชิก," <u>วารสารคณิตศาสตร์</u> 26 (พฤศจิกายน – ธันวาคม 2525) : 8.

[2]สุเทพ จันทร์สมศักดิ์, "เสริมความรู้เกี่ยวกับเซต," <u>วารสารคณิตศาสตร์</u> 24 (พฤษภาคม – มิถุนายน 2522) : 54 – 55.

สุเทพ จันทร์เสมศักดิ์ได้ยกตัวอย่างที่เกี่ยวกับเซตโดยดัดแปลงเนื้อหาให้เหมาะสม เพื่อเพิ่มความสามารถและความสนใจของนักเรียนในการเรียนเรื่องนี้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u>

<u>ทฤษฎีบท</u> เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต

ในเมื่อนักเรียนมีความรู้พื้นฐานเรื่องค่าความจริงของประโยคในรูป $p \rightarrow q$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ถ้า A เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $\phi \subset A$

<u>พิสูจน์</u> $\phi \subset A$ ก็ต่อเมื่อ $x \in \phi \longrightarrow x \in A$

เนื่องจาก ϕ ไม่มีสมาชิก ดังนั้น $x \in \phi$ เป็นเท็จ

พิจารณาข้อความ $p \rightarrow q$ เมื่อ p เป็นเท็จ ไม่ว่า q จะเป็นจริง หรือเท็จก็ตาม จะได้ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง

p	$\rightarrow$	q
F		T
	T	

p	$\rightarrow$	q
F		F
	T	

ดังนั้นข้อความ $x \in \phi \longrightarrow x \in A$ เป็นจริง

นั่นคือ $\phi \subset A$

2. <u>งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</u>

2.1 <u>งานวิจัยในประเทศ</u>

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการพิสูจน์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา ยังไม่ปรากฏว่ามีผู้ใดเคยทำการศึกษามาก่อน เท่าที่ศึกษาพบว่า เป็นแต่เพียงสร้างเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับสูง ให้เหมาะสมกับระดับที่การจะได้เรียนเรื่องนั้น ๆ ซึ่งมักจะตัดเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ออกไป ในการวัดผลสัมฤทธิ์ก็ไม่ได้วัด ด้านการพิสูจน์ ในที่นี้จึงขอเสนองานวิจัยที่ศึกษาผลสัมฤทธิ์เกี่ยวกับการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ระดับสูง มาสอนแทรกในระดับที่ต่ำกว่า ดังนี้

พ.ศ. 2516 อำพล ธรรมเจริญ ได้ศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ข้อมูลที่ใช้ศึกษาเป็นคะแนนจากแบบทดสอบที่

สร้างขึ้นเอง และไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น เป็นนักเรียนชั้น ม.ศ.1 จำนวน 720 คน ชั้น ม.ศ.2 จำนวน 669 คน และชั้น ม.ศ.3 จำนวน 621 คน ปรากฏผลว่า นักเรียนชั้น ม.ศ.2 และ ม.ศ3 มีความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในวิชาคณิตศาสตร์พอที่จะเรียนเรื่องทอปโปโลยี เรขาคณิตการแปลงสภาพ พีชคณิตแนวใหม่ ตรีโกณมิติและกราฟ สถิติและความน่าจะเป็นได้ สำหรับนักเรียนชั้น ม.ศ.1 มีความสามารถพอที่จะเรียนเรื่องสถิติและความน่าจะเป็นได้ ส่วนเรื่องอื่น ๆ ยังสรุปไม่ได้ นอกจากนี้ผลที่ได้จากการศึกษาค้นคว้าปรากฏว่า นักเรียนชายมีความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนหญิง และนักเรียนในกรุงเทพมหานครมีความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนในต่างจังหวัด[1]

พ.ศ. 2517 เสกสรรค์ กำกระบี่ ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์ จำนวน 60 คน ผลปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่มีความสามารถในการเรียนเรื่องลิมิต แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่องลิมิต และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น 95%[2]

พ.ศ. 2518 พิชากร แปลงประสพโชค ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลอง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 90 คน ปรากฏผลว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ไม่สามารถเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ และยังได้เสนอว่า การเรียนสอน

---

[1]อำพล ธรรมเจริญ, "การศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในทางคณิตศาสตร์" (ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, 2516), หน้า 41 – 44.

[2]เสกสรรค์ กำกระบี่, "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญแผนกวิทยาศาสตร์" (ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, 2517), หน้า 21.

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3[1]

พ.ศ. 2521 สุมานะ อาจหาญ ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ทดลองเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ชั้นละ 35 คน รวม 70 คน ปรากฏผลว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถที่จะเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นได้ และผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องนี้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05[2]

พ.ศ. 2524 นพดล สุวาพาณิชย์ ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 ชั้นละ 30 คน รวม 60 คน ปรากฏผลว่านักเรียนทั้งสองระดับสามารถเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนได้ แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5[3]

---

[1]พิชากร แปลงประสพโชค, "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น" (ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2518) หน้า 35.

[2]สุมานะ อาจหาญ, "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3" (ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521), หน้า 21.

[3]นพดล สุวาพาณิชย์, "การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 5" (ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524), หน้า 24.

2.2 <u>งานวิจัยในต่างประเทศ</u>

ค.ศ. 1972 โรเบิร์ต ฮาโรลด์ ไมเออร์ส (Robert Harold Myers) ได้วิเคราะห์บทบาทคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาในเรื่องระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ (Axiomatic Method) มีจุดสนใจในการวิเคราะห์ 2 ประการคือ บทบาทระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ในเรื่องวัตถุประสงค์การสอนและบทบาทของสัจพจน์ (Axiomatic) ในการเลือกเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในการสอน ผลการวิเคราะห์ที่ได้คือ ความสำคัญเกี่ยวกับสัจพจน์มีหลักการเช่นเดียวกับระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ (Scientific Method) ช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจในการเรียนคณิตศาสตร์ แต่ก็ยังหาวิธีการที่เหมาะสมในการสอนระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ (Axiomatic Method) ในวิชาคณิตศาสตร์ไม่ได้ นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงบทบาทเกี่ยวกับสัจพจน์ในการปฏิรูปหลักสูตรในระหว่างระยะเวลาที่ผ่านมาว่าไม่มีอะไรมากมายในเรื่องระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ มีแต่เพียงตัวอย่างปัญหาทั่ว ๆ ไปเกี่ยวกับบทบาทของโครงสร้างทางตรรกวิทยา (Logical Structure) ในระเบียบวิธีการสอน[1]

ค.ศ. 1976 เจมส์ รัสเซลล์ ฟลอยด์ (James Russell Floyd) ได้ศึกษาผลของการสอนพีชคณิตของเซต โดยการแนะนำเทคนิคเพื่อความเข้าใจมโนทัศน์เบื้องต้นและเจตคติในการเรียนพีชคณิตของนักเรียน ในการศึกษามีจุดมุ่งหมายค้นคว้าเกี่ยวกับเจตคติในการเรียนพีชคณิตและการเปลี่ยนอัตมโนทัศน์ (Self - Concept) และเปรียบเทียบความเข้าใจเจตคติกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักศึกษาที่เข้าเรียนวิชาพีชคณิตในปีแรกของระดับอุดมศึกษา ได้แบ่งเป็น 2 กลุ่มคือกลุ่มควบคุมได้รับการสอนเกี่ยวกับสัจพจน์เบื้องต้นก่อนการเรียนเรื่องพีชคณิตของเซต จำนวน 61 คน กลุ่มทดลองได้รับการสอนพีชคณิตของเซตอย่างเดียวจำนวน 58 คน ทั้งสองกลุ่มได้รับการสอนจากคนเดียวกัน หลังจากจบเนื้อหาแล้วทำการทดสอบผลสัมฤทธิ์ เจตคติและอัตมโนทัศน์ ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพีชคณิตทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

---

[1]Robert Harold Myers, "The Role of Axiomatic Method in Secondary School Mathematics," <u>Dissertation Abstracts International</u> 33(August 1972) : 665-A - 666-A.

อัตมโนทัศน์ของทั้งสองกลุ่มไม่คงทน (Permanent) และเจตคติในการเรียนพีชคณิตของทั้งสองกลุ่มสรุปไม่ได้[1]

ค.ศ. 1978 อาร์นอสท์ ไฮดริช (Arnost Heidrich) ได้ศึกษาจิตวิทยาในการช่วยเหลือบางประการที่สร้างการพิสูจน์คณิตศาสตร์ในระดับสูง มีจุดมุ่งหมายที่แสดงวิธีการเข้าถึงการสร้างการพิสูจน์ทั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาจนถึงระดับปริญญาเอก ได้รวบรวมหลักสาระสำคัญของเนื้อหาและรวบจัดเป็นคลีนิกในการศึกษา เครื่องมือในการศึกษาครั้งนี้เป็นแบบสอบถามและการสัมภาษณ์ ข้อมูลที่ได้ส่วนใหญ่มาจากการสัมภาษณ์และสอบถามจากเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ทั้งหมด 15 วิชาด้วยกัน การสัมภาษณ์ถามทั่ว ๆ ไปเกี่ยวกับการสำรวจความต้องการของตัวเองจากวิชาคณิตศาสตร์ ปัญหาของการพิสูจน์ การสำรวจความรู้แบบสหัชญาณ (Intuition) เครื่องหมายและสัญลักษณ์ต่าง ๆ เป็นต้น กำหนดและปัญหาต่าง ๆ ได้จัดให้เหมาะสมในแต่ละกรณีของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้นและด้านความพร้อม ผลจากการสัมภาษณ์และแบบสอบถามได้นำจัดเรียงลำดับความสำคัญจาก 10 ข้อ มีอยู่ 2 ข้อที่กล่าวถึงการพิสูจน์ว่า ถ้ามีการจัดสภาพที่เอื้ออำนวยจะนำไปสู่การพิสูจน์ได้ และอีกอย่างหนึ่งคือ คนส่วนมากมักจะมองข้ามวิธีการที่ยากมีความสำคัญ อันเป็นอุปสรรคในการสร้างการพิสูจน์[2]

ค.ศ. 1981 ชาร์ลส์ การาเบเดียน (Charles Garabedian) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ของการพิสูจน์และความสามารถด้านเหตุผลของนักเรียนที่เรียนวิชาเรขาคณิต ซึ่งมีจุดมุ่งหมายของการศึกษา เพื่อหาผลที่ทำให้การสอนการพิสูจน์และการเขียนการพิสูจน์ได้โดยผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ในวิชาเรขาคณิตและการพัฒนาความสามารถด้านเหตุผลของผู้เรียนกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนเกรด 10 และ 11 ชั้นละ 9 ห้อง รวมทั้งหมด 18 ห้อง

---

[1] James Russell Floyd, "The Effect of Algebra of Set Instruction as an Introductory Technique For Basic Concepts Comprehension and Mathematics Attitude of Algebra Students," Dissertation Abstracts International 37(December 1976) : 3478-A.

[2] Arnost Heidrich, Some Contributions to the Psychology of Proof Construction in Higher Mathematics," Dissertation Abstracts International 42(April 1982) : 586-A.

จำนวนนักเรียนทั้งหมด 369 คน เนื้อหาที่ใช้เรียนเรื่องเส้นขนานในระนาบกับส่วนของรูปหลายเหลี่ยมทั้งสองกลุ่ม กลุ่มทดลองฝึกฝนการเขียนการพิสูจน์ทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดร้อยละ 50 ของเรื่องที่เรียน แต่กลุ่มควบคุมฝึกฝนการเขียนการพิสูจน์ทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดร้อยละ 80 ถึงร้อยละ 90 ของเรื่องที่เรียน ปรากฏผลว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนการพิสูจน์และความสามารถด้านเหตุผลของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05[1]

ค.ศ. 1981 กีลา ฮานนา (Gila Hanna) ได้ศึกษาบทบาทของการพิสูจน์ที่เข้มงวดในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา การศึกษานี้เป็นการค้นหาข้อคัดค้านความเชื่อที่ว่าหลักสูตรคณิตศาสตร์แผนใหม่ที่ปรับปรุงนี้ได้สะท้อนถึงวิชาคณิตศาสตร์เท่ากันกับวิชาวิทยาศาสตร์ที่เน้นความสำคัญของการพิสูจน์ สมมติฐานของการศึกษานี้มีอยู่ 2 ประการ คือ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์แผนใหม่ที่ตั้งขึ้นทั่ว ๆ ไปที่เป็นที่ยอมรับ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นข้อพิจารณาความถูกต้องและการเน้นการพิสูจน์ เป็นสิ่งสำคัญในการเตรียมเครื่องมือปฏิบัติทางคณิตศาสตร์แผนใหม่ การสอนเน้นทางทฤษฎีมากกว่าการเตรียมเครื่องมือปฏิบัติ จุดสนใจในการวิเคราะห์ครั้งนี้จะถือความถูกต้องตามสมมติฐานที่ตั้งไว้มากกว่าขอบความสำคัญตามความเป็นจริงของหลักสูตร ผลสรุปการวิเคราะห์บทบาทของการพิสูจน์ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์และข้อพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ว่า หลักสูตรคณิตศาสตร์นี้ได้ละเลยสิ่งเหล่านี้มากซึ่งจะทำให้ขาดการนำความคิดของนักเรียนไปสู่หลักการของคณิตศาสตร์และลักษณะของคณิตศาสตร์ การสอนเน้นทางทฤษฎีในสายตาของนักคณิตศาสตร์เห็นว่ามีความสำคัญมากในระดับมัธยมศึกษา การสอนการพิสูจน์ที่ยุ่งยากหรือซับซ้อนไม่เป็นผลดีต่อการสร้างความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์และความเข้าใจของการพิสูจน์ นอกจากนี้ยังได้วิจารณ์เกี่ยวกับการสร้างหลักสูตรภายหลังปรับปรุงที่ได้ละเลยในเนื้อหาของความสำคัญการพิสูจน์และระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ทั้งหมด[2]

---

[1]Charles Garabedian, "The Effect of Proof on Achievement and Reasoning Ability of Students in Geometry," Dissertation Abstracts International 42(April 1982) : 586-A.

[2]Gila Hanna, "A Critique of the Role of Rigorous Proof the Secondary School Mathematics Curriculum," Dissertation Abstracts International 42(April 1982) : 4275-A.