บทที่ 3

กรรมวิธีที่นำเสนอ

การประยุกต์ใช้ เงื่อนไขบังคับของการทำอนุพันธ์แบบไม่ขึ้นกับค่าเฟส เข้ากับอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งลำคลื่นนั้น มีวัตถุประสงค์เพื่อต้องการประนีประนอมปัญหา 2 อย่างเข้าด้วยกันคือ ปัญหาของผลกระทบจากค่าความผิดพลาดทางเฟสต่อสมรรถนะการตีความของอัลกอริทึมมิวสิก และปัญหาความซับซ้อนของอัลกอริทึมที่นำเสนอจาก[7] โดยเรานำเอาจุดเด่นของเทคนิคการแบ่งคลื่น และจุดเด่นจากเทคนิคการแก้ปัญหาการรบกวนทางเฟสด้วยเงื่อนไขบังคับของการทำอนุพันธ์แบบไม่ขึ้นกับค่าเฟสมาประยุกต์ใช้ร่วมกัน การนำเสนอในบทนี้จะประกอบด้วย 3 หัวข้อดังนี้คือ

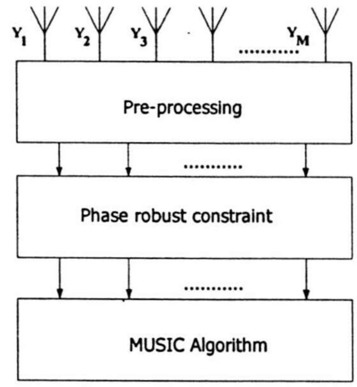
-การประยุกต์ใช้เงื่อนไขบังคับของการทำอนุพันธ์แบบไม่ขึ้นกับค่าเฟสเข้ากับอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งลำคลื่นเพื่อแก้ปัญหาการรบกวนทางเฟสแบบสุ่ม

-การวัดค่าความผิดพลาดเฉลี่ยกำลังสองของมุมที่ประมาณได้จากอัลกอริทึม

-การเปรียบเทียบความซับซ้อนในการคำนวณ (Computational Complexity) ของอัลกอริทึม

3.1 การประยุกต์ใช้เงื่อนไขบังคับของการทำอนุพันธ์แบบไม่ขึ้นกับค่าเฟสเข้ากับกับอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งลำคลื่นเพื่อแก้ปัญหาการรบกวนทางเฟสแบบสุ่ม

แนวคิดของการประยุกต์ดังกล่าวจะเริ่มจากการพิจารณาลักษณะโครงสร้างของการเชื่อมต่อระบบดังจะพิจารณาคร่าว ๆ ได้จาก รูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงโครงสร้างของอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นที่มีความทนทาน ต่อค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่ม

ในที่นี้เราจะพิจารณาจากรูปที่ 3.1 เพื่อใช้หาเงื่อนไขบังคับที่เหมาะสมดังกล่าว หากอาศัยสมการที่ (2.32) จะได้ว่า เอาท์พุทของภาคการประมวลผลล่วงหน้า ในกรณีที่เกิดค่าความผิดพลาดทางเฟสขึ้นที่สายอากาศ คือ

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}}(\phi) = \mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi)$$

และเมื่อเข้าสู่ภาคการทำงานของเงื่อนไขบังคับทางเฟสจะได้ว่า

$$\mathbf{Y}'(\phi) = \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_B(\phi) = \mathbf{W}^H \left(\mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right) \tag{3.1}$$

อาศัยสมการที่ (2.32) ร่วมในการพิจารณาจะได้ว่ากำลังที่ได้จากสายอากาศในกรณีนี้คือ

$$\mathrm{P}_B(\phi) = \mathbf{Y}'(\phi)\mathbf{Y}'^H(\phi) = \mathbf{W}^{\mathrm{H}} \tilde{\mathbf{a}}_{\mathrm{B}}(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{H}}(\phi)\mathbf{W} \tag{3.2}$$

ใช้เหตุผลและกระบวนการวิเคราะห์เดียวกันกับ สมการที่ (2.55) – (2.56) เพื่อหาเงื่อนไขบังคับทางเฟสสำหรับกรณีนี้ซึ่งจะได้ว่า

เงื่อนไขบังคับทางขนาด (Gain constraint)

$$\mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{a}}_B(\phi) = \mathbf{W}^H \mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{a}}(\phi) = \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon \to 0 \tag{3.3}$$

และ
$$\frac{\partial\left(P_B(\phi)\right)}{\partial(\gamma_m)} = 0 \tag{3.4}$$

โดยที่ผลการทำอนุพันธ์ย่อยของสมการที่ (3.4) เมื่อ $\mathbf{B}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของ γ จะได้เป็น

$$\frac{\partial\left(P_B(\phi)\right)}{\partial(\gamma_m)} = \mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_m}(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_B^H(\phi)\mathbf{W} + \mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_B(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_m}^H(\phi)\mathbf{W} \tag{3.5}$$

เมื่อ
$$\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_m}(\phi) = \frac{\partial\left(\tilde{\mathbf{a}}_B(\phi)\right)}{\partial(\gamma_m)} = \frac{\partial\left(\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right)}{\partial(\gamma_m)} = \mathrm{j}\,\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}_m(\phi) = \mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_m}(\phi) \tag{3.6}$$

แทนค่าสมการที่ (3.6) ลงในสมการที่ (3.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_m}(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_B^H(\phi)\mathbf{W} + \mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_B(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_m}^H(\phi)\mathbf{W} &= 2\Re\left\{\mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_m}(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_B^H(\phi)\mathbf{W}\right\} \\
&= 2\Re\left\{\mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_m}(\phi)\varepsilon\right\} \\
\frac{\partial(P_B(\phi))}{\partial(\gamma_m)} &= \Re\left\{\mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}\gamma_m}(\phi)\right\} = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น เงื่อนไขบังคับที่เหมาะสมเพื่อทำให้อัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นมีความทนทานต่อค่าความผิดพลาดทางเฟสแบบสุ่มเมื่อรวมทุกต้นของสายอากาศ คือ

$$\Re\left\{\mathbf{W}^H\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma}(\phi)\right\} = \sum_{k=1}^{Nb}\left(w_{r,k}\tilde{a}_{B\gamma,k}(\phi) + w_{i,k}\tilde{a}_{B\gamma,k}(\phi)\right) = 0 \tag{3.7}$$

อาศัยรูปแบบเดียวกันกับกระบวนการแปลงสมการที่ (2.60)-(2.63) จะได้ว่า

$$\mathbf{W}_R^T\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi) = 0 \tag{3.8}$$

โดยที่

$$\mathbf{W}_R = \begin{bmatrix}\Re\{\mathbf{W}\} \\ \mathrm{Im}\{\mathbf{W}\}\end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi) = \begin{bmatrix} diag\left(\Re\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma}(\phi) \right\} \right) \\ \cdots \\ diag\left(\mathrm{I}m\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma}(\phi) \right\} \right) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi) &= \mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma}(\phi) \\ &= \left(\mathbf{B}_r^T - j\mathbf{B}_i^T \right) \left(\tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_r}(\phi) + j\tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_i}(\phi) \right) \\ &= \left(\mathbf{B}_r^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_r}(\phi) + \mathbf{B}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_i}(\phi) \right) + \mathrm{j} \left(\mathbf{B}_r^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_i}(\phi) - \mathbf{B}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_r}(\phi) \right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

ดังนั้น

$$\Re\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi) \right\} = \mathbf{B}_r^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_r}(\phi) + \mathbf{B}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_i}(\phi) \tag{3.12}$$

$$\mathrm{I}m\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi) \right\} = \mathbf{B}_r^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_i}(\phi) - \mathbf{B}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma_r}(\phi) \tag{3.13}$$

สำหรับผลเฉลย $\mathbf{W}_R$ ในที่นี้จะอาศัยรูปแบบของเทคนิคปริภูมิย่อยคงทนบริบูรณ์ เช่นเดียวกับสมการที่ (2.65) จะได้ว่า

$$\mathbf{W}_R(\phi) = \mathbf{U}_{BnR}(\phi) = \text{Null space}\left(\left[\mathbf{U}_{BsR} \quad \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi) \right] \right) \tag{3.14}$$

เมื่อ

$\mathbf{U}_{\mathrm{BsR}}$ คือเวกเตอร์เจาะจงที่มีค่ามากที่สุด $2D$ หลัก (desired signal subspace) ซึ่งหาได้จากเมตริก $\mathbf{R}'_{YYR}$

$\mathbf{R}'_{YYR}$ คือเมตริกซ์อัตสหสัมพันธ์ตามสมการที่(2.37)ในรูปแบบของสมการที่ (2.68)

ดังนั้นสมการของ $P_{MUSIC}(\phi)$ ในกรณีนี้คือ

$$P_{MUSIC}(\phi) = \frac{1}{\left\| \mathbf{U}_{BnR}^T(\phi) \tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) \right\|_F^2} \tag{3.15}$$

โดยที่ $$\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r & -\mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_r(\phi) \\ \tilde{\mathbf{a}}_i(\phi) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

3.2 การวัดค่าความผิดพลาดเฉลี่ยกำลังสองของมุมที่ประมาณได้จากอัลกอริทึม

หลักการเชิงกายภาพ ในการวัดค่าความผิดพลาดเฉลี่ยกำลังสองของมุมที่ประมาณได้ (Mean Square Error Of Estimated Angle: *MSE*) ในที่นี้จะใช้การป้อนสัญญาณอ้างอิงที่ทราบค่ามุม 1 เส้นทางสัญญาณ (path) แล้วให้อัลกอริทึมทำการประมาณค่ามุม ซึ่งผลต่างเฉลี่ยกำลังสองระหว่างค่ามุมที่ประมาณได้จากอัลกอริทึม กับค่ามุมของสัญญาณอ้างอิงที่แท้จริง ก็คือค่าความผิดพลาดเฉลี่ยกำลังสองของมุมที่ประมาณได้นั่นเอง เพื่อความสะดวกในการอ้างถึงครั้งต่อไปเราจะเรียกค่าเฉลี่ยผิดพลาดดังกล่าวว่า *MSE*

กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับการคำนวณค่า *MSE* ในที่นี้ จะอาศัยหลักการประมาณของอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง (First-Order Taylor Series Expansion) ที่ได้จากการกระจายของสมการสเปกตรัมแบบนัลล์ รอบจุด $\phi = \hat{\phi}$ กล่าวคือ

ถ้า

ϕ คือมุมที่สัญญาณตกกระทบ

$\hat{\phi}$ คือมุมที่อัลกอริทึมประมาณได้

และเมื่อ $\hat{\phi} = \min_{\phi}\{g(\phi)\}$ แล้ว เราสามารถกระจาย $g(\phi)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $\phi = \hat{\phi}$ จะได้ว่า

$$g\left(\hat{\phi}\right) = g(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\phi)}{n!}\left(\hat{\phi} - \phi\right)^n \tag{3.17}$$

เมื่อ

$$g^{(n)}(\phi) = \left.\frac{\partial\left(g\left(\hat{\phi}\right)\right)}{\partial\phi^n}\right|_{\hat{\phi} = \phi} \quad ; n = 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

อาศัยการอ้างอิงจากสมการที่ (2.17) จะได้ว่า เมื่อ $\phi = \hat{\phi}$ แล้ว ค่าของ $g(\phi)$ จะมีค่าน้อยที่สุด อีกทั้งเราก็ทราบด้วยว่า เงื่อนไขที่จำเป็นแต่ไม่ใช่เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการหาค่า ϕ ทำให้ $g(\phi)$ มีค่าน้อยที่สุด (Global Minimum Condition is the Necessary but not Sufficient Condition) คือ

$$\frac{\partial\left(g\left(\hat{\phi}\right)\right)}{\partial\phi} = 0 \tag{3.19}$$

เนื่องจากการหาค่า MSE อาศัยการประมาณจากอนุกรมเทเลอร์ อันดับหนึ่ง ดังนั้นจากสมการที่ (3.17) เราจะมองว่า

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\phi)}{n!}\left(\hat{\phi}-\phi\right)^{n} \cong 0 \quad ; n = 2,3,4,\ldots \tag{3.20}$$

จะได้ว่า

$$g\left(\hat{\phi}\right) = g(\phi) + g^{(1)}(\phi)\left(\hat{\phi}-\phi\right) \tag{3.21}$$

ดังนั้นเมื่อทำ $\frac{\partial\left(g\left(\hat{\phi}\right)\right)}{\partial\phi} = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial\, g\left(\hat{\phi}\right)}{\partial\phi} \cong \frac{\partial\, g(\phi)}{\partial\phi} + \frac{\partial^{2} g(\phi)}{\partial\phi^{2}}\left(\hat{\phi}-\phi\right) = 0 \tag{3.22}$$

จากสมการที่ (3.22) เราจะสามารถหาค่าของ $(\hat{\phi}-\phi)$ ได้จาก

$$\left(\hat{\phi}-\phi\right) \cong -\frac{\left(\dfrac{\partial\, g(\phi)}{\partial\phi}\right)}{\left(\dfrac{\partial^{2} g(\phi)}{\partial\phi^{2}}\right)} = -\frac{g^{(1)}(\phi)}{g^{(2)}(\phi)} \tag{3.23}$$

และ $$MSE = \mathrm{E}\left(\left\|\left(\hat{\phi}-\phi\right)\right\|^{2}\right) \tag{3.24}$$

ลำดับต่อไปจะกล่าวถึง การหาสมการในการประมาณค่า *MSE* ด้วย หลักการประมาณของอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง ของทั้งอัลกอริทึมมิวสิกดั้งเดิม และแบบที่เราปรับปรุง ตามลำดับ

3.2.ก การหาสมการสำหรับประมาณค่า *MSE* ด้วยหลักการประมาณอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง กรณีอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นดั้งเดิม

กำหนดให้ MSE_1 คือค่า *MSE* ในกรณีอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นดั้งเดิม

กระบวนการวิเคราะห์จะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาสมการสเปคตรัมแบบนัลล์ของอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นดั้งเดิมในกรณีที่เกิดความผิดพลาดทางเฟสขึ้นที่ตัวสายอากาศ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
g(\phi) &= \tilde{\mathbf{a}}_B^H(\phi)\mathbf{V_N}\mathbf{V}_N^H\tilde{\mathbf{a}}_B(\phi) \\
&= \left(\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right)^H\left(\mathbf{I}-\mathbf{V}_S\mathbf{V}_S^H\right)\left(\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right) \\
&= \tilde{\mathbf{a}}^H(\phi)\mathbf{B}\left(\mathbf{I}-\mathbf{V}_S\mathbf{V}_S^H\right)\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi) \\
&= \tilde{\mathbf{a}}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)-\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_S\mathbf{V}_S^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)
\end{aligned}$$

เมื่อหา $g^{(1)}(\phi)=\dfrac{\partial\left(g(\phi)\right)}{\partial\phi}$ โดยที่ $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{V}_N$ ไม่เป็นฟังก์ชันของ ϕ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
g^{(1)}(\phi) = {} & \tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)+\tilde{\mathbf{a}}^H(\phi)\mathbf{B}\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi)-\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_S\mathbf{V}_S^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)+ \\
& -\tilde{\mathbf{a}}(\phi)^H\mathbf{B}\mathbf{V}_S\mathbf{V}_S^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

สมการที่ (3.25) สามารถจัดรูปได้เป็น

$$\begin{aligned}
g^{(1)}(\phi) &= \tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\left(\mathbf{I}-\mathbf{V_S}\mathbf{V}_S^H\right)\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)+\tilde{\mathbf{a}}^H(\phi)\mathbf{B}\left(\mathbf{I}-\mathbf{V_S}\mathbf{V}_S^H\right)\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi) \\
&= \tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V_N}\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)+\tilde{\mathbf{a}}^H(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V_N}\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi) \\
&= \tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V_N}\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)+\left(\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V_N}\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right)^H
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการที่ (3.25) สามารถเขียนให้กระชับได้ว่า

$$g^{(1)}(\phi)=2\Re\left\{\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right\} \tag{3.26}$$

ในส่วนของ อนุพันธ์อันดับสอง ก็จะหาได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&g^{(2)}(\phi) \\
&= \frac{\partial\left(g^{(1)}(\phi)\right)}{\partial\phi} \\
&= \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathbf{N}}\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)+\tilde{\mathbf{a}}^H(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathbf{N}}\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi)\right) \\
&= \tilde{\mathbf{a}}^{(2)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)+2\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi)+\tilde{\mathbf{a}}^H(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(2)}(\phi)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

จากหลักการประมาณของอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง เมื่อเราพิจารณาโดยละเอียดพบว่าหลักการดังกล่าวจะพิจารณาเพียงพจน์ของการทำอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเท่านั้น ทั้งนี้เป็นไปตามข้อกำหนดเริ่มต้นที่แสดงไว้ในสมการที่ (3.20) และ (3.21) กล่าวคือ

$$g(\hat{\phi}) = g(\phi)+g^{(1)}(\phi)\left(\hat{\phi}-\phi\right) \qquad \text{และ} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^{(n)}(\phi)}{n!}\left(\hat{\phi}-\phi\right)^n \cong 0 \quad ;n=2,3,4,\ldots$$

จากสมการดังกล่าวสามารถตีความได้ว่า กระบวนการพิจารณาดังกล่าวนี้จะกำหนดให้พจน์ของอันดับจากการทำอนุพันธ์ย่อยที่สูงกว่าอันดับที่หนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ แต่ไม่ได้หมายความว่าพจน์ดังกล่าวไม่เกิดขึ้นจริง หากแต่หมายถึงพจน์ดังกล่าวไม่ถูกนำมาร่วมในการพิจารณาภายใต้ข้อกำหนดนี้ สำหรับในส่วนของสมการที่ (3.22) ซึ่งนำไปสู่สมการที่ (3.23) ส่วนการเกิดขึ้นของ $\frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial\phi^2}$ เป็นผลพวงมาจากการวิเคราะห์เงื่อนไขที่เพียงพอ สำหรับการหาค่า ϕ ที่ทำให้ $g(\phi)$ มีค่าน้อยที่สุดเท่านั้น แต่ไม่ว่าอย่างไรก็ตามผลเฉลยที่ได้มาจำเป็นต้องสอดคล้องกับข้อกำหนดที่ตั้งไว้ในขั้นต้น ดังนั้นสมการสำหรับการประมาณที่อาศัยหลักการนี้ ต้องไม่มีพจน์ของอันดับของการทำอนุพันธ์ที่สูงกว่าอันดับที่หนึ่ง [14] ทำให้ได้ว่า $g^{(2)}(\phi)$ จากสมการที่ (3.27) จึงกลายเป็น

$$g^{(2)}(\phi) = 2\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi) \tag{3.28}$$

ดังนั้นในกรณีของ อัลกอริทึมมิวสิกแบบแบ่งคลื่นดั้งเดิม จะมีสมการสำหรับประมาณค่า *MSE* ดังนี้

$$MSE_1 = E\left(\left\|\,\left(\hat{\phi}-\phi\right)\right\|^2\right) \tag{3.29}$$

เมื่อ $\left(\hat{\phi}-\phi\right)$ ในสมการที่ (3.29)หมายถึง

$$\left(\hat{\phi}-\phi\right) \cong -\frac{\Re\left\{\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right\}}{\tilde{\mathbf{a}}^{(1)H}(\phi)\mathbf{B}\mathbf{V}_N\mathbf{V}_N^H\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}(\phi)} \tag{3.30}$$

และ $\tilde{\mathbf{a}}^{(n)}(\phi) = \dfrac{\partial^n\left(\tilde{\mathbf{a}}(\phi)\right)}{\partial \phi^n} \quad n = 1, 2, \ldots$ (3.31)

3.2.ข การหาสมการสำหรับประมาณค่า MSE ด้วยหลักการประมาณอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง กรณีอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบที่ปรับปรุงด้วยกรรมวิธีที่นำเสนอ

กำหนดให้ MSE_2 คือค่า MSE ในกรณีอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบที่เราเสนอทำการปรับปรุง

การหาสมการสำหรับประมาณค่า MSE ด้วยหลักการประมาณอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่งในกรณีนี้ จะมีกระบวนการที่เหมือนกันกับหัวข้อ 3.2ก ซึ่งแสดงได้โดยสังเขปดังนี้

จากสมการสมการสเปคตรัมแบบนัลล์ของอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบที่เราเสนอทำการปรับปรุง

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \left\| \mathbf{U}_{BnR}^{T}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) \right\|_F^2 \\ &= trace\left(\mathbf{U}_{BnR}^{T}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{T}(\phi)\mathbf{U}_{BnR} \right) \\ &= trace\left(\mathbf{A}_{BR}^{T}(\phi)\mathbf{U}_{BnR}(\phi)\mathbf{U}_{BnR}^{T}(\phi)\mathbf{A}_{BR} \right) \\ &= trace\left(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) \right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

โดยที่

$$\mathbf{P}_N(\phi) = \mathbf{U}_{BnR}(\phi)\mathbf{U}_{BnR}^{T}(\phi) \tag{3.33}$$

ซึ่งนิยามของ $\mathbf{U}_{BnR}(\phi)$ ได้แสดงไว้แล้วในสมการที่ (3.14)

การหา $g^{(1)}(\phi)$ จะทำได้โดย

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\phi) &= \frac{\partial\ g(\phi)}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left(trace\left(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) \right) \right) \\ &= trace\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) \right) \right) \\ &= trace\left(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{T}(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi) \right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

โดยที่ $$\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(n)}(\phi) = \frac{\partial^n\left(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi)\right)}{\partial\phi^n} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_r & -\mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_r\end{bmatrix}^T \frac{\partial^n}{\partial\phi^n}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{a}}_r(\phi) \\ \tilde{\mathbf{a}}_i(\phi)\end{bmatrix} \quad ;n = 1, 2, \ldots \tag{3.35}$$

ในส่วนของ $g^{(2)}(\phi)$ จะหาได้จาก

$$\begin{aligned}
&g^{(2)}(\phi) \\
&= \frac{\partial(g^{(1)}(\phi))}{\partial\phi} \\
&= trace\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi)\right)\right) \\
&= trace\Big(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(2)^T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi) + \\
&\qquad \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(2)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi) + \\
&\qquad \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(2)}(\phi)\Big)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

โดยอาศัยแนวเหตุผลและหลักการเดียวกันกับหัวข้อที่ 3.2.1 จึงต้องทำการละทิ้งพจน์ที่มีการทำอนุพันธ์อันดับสองทิ้งไป จึงทำให้สมการที่ (3.36) เหลือเพียง

$$g^{(2)}(\phi) \cong trace\left(2\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\left(\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi)\right) + 2\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi)\right) \tag{3.37}$$

ดังนั้น ค่าของ $(\hat{\phi}-\phi)$ ในกรณีนี้คือ

$$(\hat{\phi}-\phi) = -\frac{trace\left(\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi)\right)}{trace\left(2\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)^T}(\phi)\left(\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}(\phi) + \mathbf{P}_N(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi)\right) + 2\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^T(\phi)\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)\tilde{\mathbf{A}}_{BR}^{(1)}(\phi)\right)} \tag{3.38}$$

ดังนั้น

$$MSE_2 = E\left(\left\| \left(\hat{\phi}-\phi\right) \right\|^2\right) \tag{3.39}$$

ซึ่ง $\left(\hat{\phi}-\phi\right)$ ในสมการที่ (3.39) คือ $\left(\hat{\phi}-\phi\right)$ ในสมการที่ (3.38)

เมื่อพิจารณากระบวนการสำหรับหา $(\hat{\phi}-\phi)$ ในกรณีนี้ พบว่าตัวแปรที่เราต้องทำการวิเคราะห์เพิ่มเติม คือ $\mathbf{P}_N(\phi)$ และ $\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi)$ โดยการวิเคราะห์ค่าดังกล่าว จะมีรายละเอียดและความซับซ้อน

ทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างมาก เพื่อไม่ให้รบกวนความคล่องตัวในการนำเสนอ การวิเคราะห์ส่วนนี้จึงถูกแยกนำเสนอไว้ในภาคผนวก ข และ ค ตามลำดับ โดยผลลัพธ์จากการวิเคราะห์แสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{P}_N(\phi) = \mathbf{P}_n\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}}(\phi)\mathbf{Z}_2(\phi)\mathbf{P}_n\right) \tag{3.40}$$

$$\mathbf{P}_N^{(1)}(\phi) = -\mathbf{P}_n\mathbf{Z}_2^T(\phi)\mathbf{P}_{\tilde{a}_{B,\gamma,R}}^{(1)}(\phi)\mathbf{Z}_2(\phi)\mathbf{P}_n \tag{3.41}$$

เมื่อ

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{I} - \mathbf{U}_{BsR}\mathbf{U}_{BsR}^T \tag{3.42}$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}}(\phi) = \tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi)\left(\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}^T(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}(\phi)\right)^{-1}\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}^T(\phi) \tag{3.43}$$

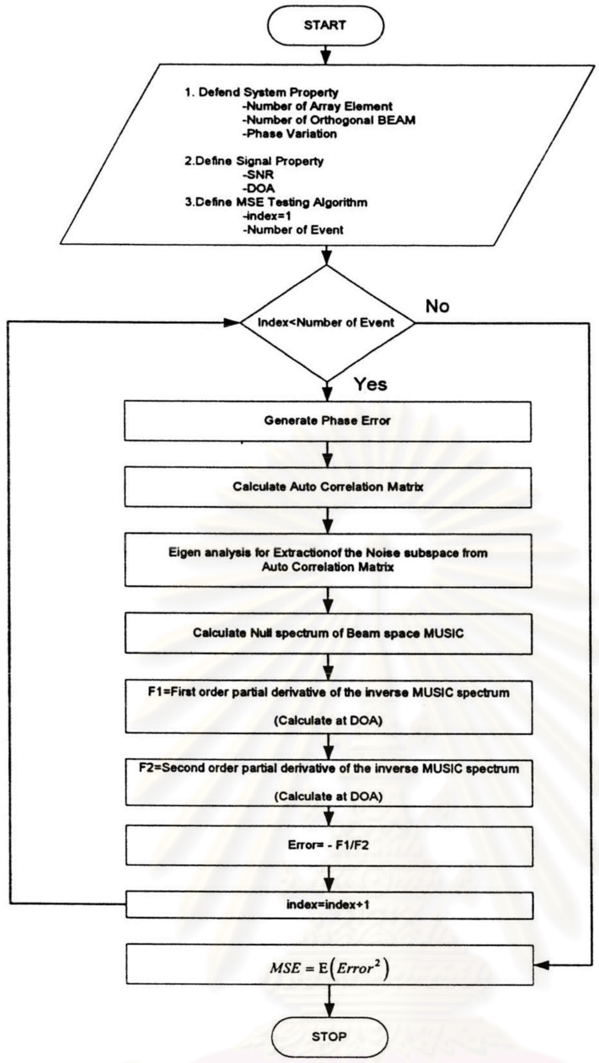
$$\mathbf{Z}_1(\phi) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{U}_{BsR}^T\mathrm{P}_{\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}}(\phi)\mathbf{U}_{BsR}\right)^{-1} \tag{3.44}$$

$$\mathbf{Z}_2(\phi) = \mathbf{I} + \mathbf{U}_{BsR}\mathbf{Z}_1(\phi)\mathbf{U}_{BsR}^T\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{a}}_{B\gamma_R}}(\phi) \tag{3.45}$$

$$\mathbf{J}(\phi) = \left(\mathbf{I} - \mathrm{P}_{\tilde{\mathbf{a}}_{B,\gamma,R}}(\phi)\right)\tilde{\mathbf{a}}_{B,\gamma,R}^{(1)}(\phi)\left(\tilde{\mathbf{a}}_{B,\gamma,R}^T(\phi)\tilde{\mathbf{a}}_{B,\gamma,R}(\phi)\right)^{-1}\tilde{\mathbf{a}}_{B,\gamma,R}^T(\phi) \tag{3.46}$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{a}_{B,\gamma,R}}^{(1)}(\phi) = \mathbf{J}(\phi) + \mathbf{J}^T(\phi) \tag{3.47}$$

กระบวนการวัดค่า *MSE* ด้วยหลักการที่กล่าวมา สามารถสรุปให้อยู่ในรูปแบบของแผนภูมิสายงาน (Flow chart) ได้ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงแผนภูมิสายงานของกระบวนการวัดค่า *MSE*
ด้วยหลักการประมาณของอนุกรมเทเลอร์อันดับหนึ่ง

3.3 การเปรียบเทียบความซับซ้อนในการคำนวณของอัลกอริทึม

สำหรับหลักการเปรียบเทียบความซับซ้อนในการคำนวณของอัลกอริทึมในที่นี้จะอาศัยแนวคิดการเปรียบเทียบแบบ [6] โดยให้ความสำคัญอย่างมากต่อกระบวนการแยกย่อยเมตริกซ์ (Matrix Decomposition) ไม่ว่าจะเป็นกระบวนการแยกย่อยค่าเจาะจง และการแยกย่อยค่าเอกฐาน ทั้งนี้เพราะกระบวนการแยกย่อยดังกล่าวมีค่าความซับซ้อนแปรตามอันดับสาม ซึ่งสูงกว่าเมื่อเทียบกับกระบวนการอื่น ๆ เช่นการคูณหรือบวกเมตริกซ์ ที่มีค่าความซับซ้อนแปรตามไม่เกินอันดับสอง กล่าวได้ว่าค่าความซับซ้อนในการคำนวณของอัลกอริทึมโดยรวมจะขึ้นอยู่กับ

กระบวนการแยกย่อยดังกล่าวเป็นสำคัญ ฉะนั้นเราสามารถพิจารณาการเปรียบเทียบความซับซ้อนของอัลกอริทึมได้โดยง่ายจากการพิจารณาเฉพาะกระบวนการแยกย่อยเมตริกซ์

พิจารณาเมื่อให้ $\mathbf{Z}$ เป็นเมตริซ์ไม่เอกฐาน(Non-Singular Matrix) ขนาด $K \times N$ โดยที่ $K \leq N$

$\mathrm{O}(\ )$ เป็นฟังก์ชันความซับซ้อนในการคำนวณ (Computational Complexity Function)

จะได้ว่า

กรณี $K = N$ (เมตริกซ์จัตุรัส; Square Matrix)

กระบวนการแยกย่อยค่าเจาะจงและการแยกย่อยค่าเอกฐานจะมีค่าความซับซ้อนโดยทั่วไป คือ $\mathrm{O}\left(K^3\right)$[27]

กรณี $K \neq N$

กระบวนการแยกย่อยค่าเอกฐานจะมีค่าความซับซ้อนในการคำนวณโดยทั่วไปคือ $\mathrm{O}\left(KN^2\right)$[26]

จากที่เราทราบว่ากระบวนการในการหาปริภูมิสู่ศูนย์ของ [7] และแบบที่เราเสนอทำการปรับปรุงอาศัยการแบ่งส่วน (Partition) ของ $\mathbf{U}$ ที่ได้จากกระบวนการแยกย่อยค่าเอกฐาน ตามที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.2.2 ทำให้กระบวนการในการหาปริภูมิสู่ศูนย์มีค่าความซับซ้อนในการคำนวณโดยทั่วไปคือ $\mathrm{O}\left(KN^2\right)$

ลำดับต่อไปเราจะได้เสนอการเปรียบเทียบค่าความซับซ้อนในการคำนวณของแต่ละอัลกอริทึม

อัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบดั้งเดิม

ค่าความซับซ้อนในการคำนวณโดยประมาณคือ $\mathrm{O}\left(N_b^3\right)$ แต่ทว่าในกระบวนการคำนวณของอัลกอริทึมนี้คิดบนเซตของจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) ดังนั้นค่าความซับซ้อนในการคำนวณจะเพิ่มขึ้น 4 เท่า เมื่อเทียบกับกระบวนการที่คำนวณบนเซตของจำนวนจริง ดังนั้นค่าความซับซ้อนในการคำนวณโดยประมาณของอัลกอริทึมนี้คือ $4\mathrm{O}\left(N_b^3\right)$

อัลกอริทึมมิวสิกแบบ [7]

สำหรับกระบวนการคำนวณของอัลกอริทึมนี้คิดบนเซตของจำนวนจริง ค่าความซับซ้อนในการคำนวณโดยประมาณ จะเกิดจาก 2 ขั้นตอนหลัก ๆ คือ ขั้นตอนในการหา $\mathbf{U}_{sR}$ และ $\mathbf{U}_{nR}$ โดยที่ ขั้นตอนในการหา $\mathbf{U}_{sR}$ จะมีค่าความซับซ้อนโดยประมาณเป็น $\mathrm{O}\left(M^3\right)$ ส่วนขั้นตอนในการหาขั้นตอนการหา $\mathbf{U}_{nR}$ จะมีค่าความซับซ้อนโดยประมาณเป็น $\mathrm{O}\left(2M\left(2D+2M\right)^2\right)$

อัลกอริทึมมิวสิกแบบที่เราเสนอทำการปรับปรุง

สำหรับกระบวนการคำนวณของอัลกอริทึมนี้คิดบนเซตของจำนวนจริง ค่าความซับซ้อนในการคำนวณโดยประมาณ จะเกิดจาก 2 ขั้นตอนหลัก ๆ เช่นเดียวกับอัลกอริทึมมิวสิกแบบ [7] คือขั้นตอนในการหา $\mathbf{U}_{sR}$ และ $\mathbf{U}_{nR}$ โดยที่ ขั้นตอนในการหา $\mathbf{U}_{sR}$ จะมีค่าความซับซ้อนโดยประมาณเป็น $\mathrm{O}\left(N_b^3\right)$ ส่วนขั้นตอนในการหาขั้นตอนการหา $\mathbf{U}_{nR}$ จะมีค่าความซับซ้อนโดยประมาณเป็น $\mathrm{O}\left(2N_b\left(2D+2N_b\right)^2\right)$

เพื่อการเปรียบเทียบที่ง่ายขึ้น เราจะอาศัยแนวคิดที่ว่า

-ถ้า $\mathrm{O}\left(K^3\right)$ หมายถึงค่าความซับซ้อนในการคำนวณซึ่งแปรผันตามกำลังสามของ K จะหมายถึง ค่าความซับซ้อนในการคำนวณ=$c(K)^3$ เมื่อ c คือค่าคงที่ค่าหนึ่ง

-ค่าความซับซ้อนในการคำนวณทั้งหมดจะได้มาจากการรวมกันของความซับซ้อนในแต่ละกระบวนการ

จะได้ว่า

ค่าความซับซ้อนในการคำนวณอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบดั้งเดิม จะประมาณได้คือ

$$4cN_b^3$$

ค่าความซับซ้อนในการคำนวณอัลกอริทึมมิวสิกแบบ [7] จะประมาณได้คือ

$$cM^3 + c\left(2M\left(2D+2M\right)^2\right)$$

ค่าความซับซ้อนในการคำนวณอัลกอริทึมมิวสิกแบบที่เราปรับปรุง จะประมาณได้คือ

$$cN_b^3 + c\left(2N_b\left(2D+2N_b\right)^2\right)$$

การวิจัยของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เรากำหนดให้ M , Nb และ D คือจำนวนของสายอากาศแถวลำดับ , จำนวนลำคลื่นตั้งฉาก และจำนวนสัญญาณที่ตกกระทบ ตามลำดับ ซึ่ง $M > N_b > D$ ดังนั้นเมื่อเปรียบเทียบค่าความซับซ้อนในการคำนวณ เราสามารถทราบได้ทันทีว่าค่าความซับซ้อนในการคำนวณของแต่ละอัลกอริทึม จะสามารถเรียงตามลำดับจากมากไปหาน้อย ได้เป็น อัลกอริทึมมิวสิกแบบ [7] อัลกอริทึมมิวสิกแบบที่เราเสนอทำการปรับปรุง และอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบดั้งเดิม

ทดลองแทนค่าให้ $M = 20$, $N_b = 10$ และ $D = 2$ เพื่อเป็นตัวอย่างประกอบการเปรียบเทียบจะได้ว่าค่าความซับซ้อนในการคำนวณของแต่ละอัลกอริทึมจะประมาณได้เป็น

c (4,000) สำหรับอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบดั้งเดิม

c (85,440) สำหรับอัลกอริทึมมิวสิกแบบ [7]

c (12,520) สำหรับอัลกอริทึมมิวสิกแบบที่เราเสนอทำการปรับปรุง

โดยที่

-ค่าความซับซ้อนในการคำนวณอัลกอริทึมมิวสิกแบบ [7] เมื่อเทียบกับอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบดั้งเดิม จะเพิ่มขึ้นเป็น (85,440-4,000) / 4,000 ประมาณ 20.36 เท่า

-ค่าความซับซ้อนในการคำนวณอัลกอริทึมมิวสิกที่เราเสนอทำการปรับปรุง เมื่อเทียบกับอัลกอริทึมมิวสิกแบ่งคลื่นแบบดั้งเดิม จะเพิ่มขึ้นเป็น (12,520-4,000) / 4,000 ประมาณ 2.13 เท่า

-ค่าความซับซ้อนในการคำนวณอัลกอริทึมมิวสิกที่เราปรับปรุง เมื่อเทียบกับอัลกอริทึมแบบ [7] จะลดลงเป็น (85,440-12,520) / 85,440 ประมาณ 0.85346 เท่า หรือ ร้อยละ 85.346

จากรายละเอียดการนำเสนอในบทที่ 3 นั้น จะชี้ให้เห็นถึงแนวทางในการแก้ปัญหาทางเฟสแบบสุ่มที่สายอากาศแถวลำดับ ที่อาศัยเงื่อนไขบังคับของการทำอนุพันธ์แบบไม่ขึ้นกับค่าเฟสช่วยในด้านความคงทน และเทคนิคการแบ่งคลื่นช่วยในด้านความซับซ้อนในการคำนวณ โดยที่ผลลัพธ์ที่ได้จากแนวทางการแก้ปัญหาดังกล่าวจะนำเสนอในบทที่ 4 ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป