รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กฤษณะ โสขุมา. 2543. **กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแบบรูปและการให้เหตุผลสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3**. วิทยานิพนธ์ ปริญญามหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

กิดานันท์ มลิทอง. 2540. **เทคโนโลยีการศึกษาและนวัตกรรม**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, สำนักงาน. 2545. **การปฏิรูปวิทยาศาสตร์ศึกษา: กรณีศึกษาเวียดนาม**. กรุงเทพมหานคร: พริกหวานกราฟฟิค.

คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, สำนักงาน. 2542. **พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542**. กรุงเทพมหานคร: พริกหวานกราฟฟิค.

จงกล ทำสวน. 2547. แนวทางการจัดการเรียนการสอน เรื่อง กราฟเบื้องต้น. ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน และอัมพร ม้าคนอง (บรรณาธิการ), **ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**, หน้า 82-93. กรุงเทพมหานคร: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

จินตนา ใบกาซูยี.(ม.ป.ป.). **การเขียนสื่อการเรียนการสอน**. กรุงเทพมหานคร: สุวีริยาสาส์น.

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. 2542. การสอนคณิตศาสตร์. ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

ชนาธิป พรกุล. 2545. **แคทส์ รูปแบบการจัดการสอนที่ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ชะเอม สายทอง. 2544. **ทฤษฎีกราฟ**. กรุงเทพมหานคร: โอ.เอส.พริ้นติ้งเฮ้าส์.

โซเบล, แม็กซ์ เอ. 2544. **ศิลปะการสอนคณิตศาสตร์**. แปลโดย ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. กรุงเทพมหานคร: สุวีริยาสาส์น.

ถวัลย์ มาศจรัส. 2545. **ปทานุกรม หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (ฉบับสมบูรณ์ ฉบับแรกของประเทศไทย)**. กรุงเทพมหานคร: ธารอักษร.

ทิศนา แขมมณี. 2545. **รูปแบบการเรียนการสอน: ทางเลือกที่หลากหลาย**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ประทีป แสงเปี่ยมสุข. 2543. **การสอนกระบวนการคิดโดยใช้ทักษะกระบวนการ**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์.

ปานทอง กุลนาถศิริ. 2543. "ความเคลื่อนไหว...เกี่ยวกับ NCTM: Principle and Standards for School Mathematics ในปี ค.ศ. 2000". **สสวท** 28 (มกราคม – มีนาคม). 15.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. 2547. การประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยทางเลือกใหม่. ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน และอัมพร ม้าคนอง (บรรณาธิการ), **ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**, หน้า 154-175. กรุงเทพมหานคร: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ยุพิน พิพิธกุล. 2524. **การเรียนการสอนคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

ยุพิน พิพิธกุล. 2546. **การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา**. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. 2546. **การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3-4 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน**. กรุงเทพมหานคร.

สมควร ปานโม. 2545. **การสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหากับวิชาชีพ เรื่อง "เซต" ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงปีที่ 1 (ปวส.) ประเภทวิชาเกษตรกรรม**. สารนิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต สาขาการมัธยมศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. 2546. **ภินทนคณิตศาสตร์**. ปทุมธานี: สวทช.

สมพงษ์ ฉุยสุริฉาย. 2548. วาดรูปอย่างไรโดยไม่ต้องยกปากกา. **นิตยสารคณิตศาสตร์ MY MATH** 9 (ตุลาคม): 49-51.

สมพงษ์ ฉุยสุริฉาย. 2548. ลำดับระดับขั้น. **นิตยสารคณิตศาสตร์** MY MATH 10 (พฤศจิกายน). 18-20.

สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ. 2541. **การเรียนการสอนคณิตศาสตร์**. ภาควิชามัธยมศึกษา. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

โสภณ บำรุงสงฆ์ และ สมหวัง ไตรต้นวงศ์. 2520. **เทคนิคและวิธีการสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่**. กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กองวิจัยทางการศึกษา. 2546. **การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กองวิจัยทางการศึกษา. 2545. **รายงานผลการดำเนินงาน 2 ปี กับการปฏิรูปการเรียนรู้ของกระทรวงศึกษาธิการ**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กองวิจัยทางการศึกษา. 2546. **สภาพการใช้สื่อการเรียนรู้ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานของโรงเรียนนำร่องและโรงเรียนเครือข่าย**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์การศาสนา.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กองวิจัยทางการศึกษา. 2545. **เอกสารประกอบหลักสูตรขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือพัฒนาสื่อการเรียนรู้**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมวิชาการ. 2546. **การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมวิชาการ. 2545. **เอกสารประกอบหลักสูตรขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 แนวทางการวัดและประเมินผลการเรียน ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. สำนักนิเทศและพัฒนามาตรฐานการศึกษา. 2545. **แนวทางการวัดและประเมินผลในชั้นเรียน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

อลงกรณ์ แซ่ตั้ง. 2548. ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นและสมสัณฐาน. **นิตยสารคณิตศาสตร์ MY MATH** 8 (กันยายน): 23-25.

อัมพร ม้าคนอง. 2546. **คณิตศาสตร์: การสอนและการเรียนรู้**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. 2547. **เอกสารคำสอน รายวิชา 2704686 ทฤษฎีและการประยุกต์ทางการศึกษาคณิตศาตร์**. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาษาอังกฤษ

Baldwin, J and Williams, H. 1988. **Active Learning : A Trainer's Guide**. New York: Houghton Mifflin.

Bonwell, C.C. 1995. **Active Learning: Creating Excitement in the Classroom**. Center of Teacher and Learning, St Loius College of Pharmacy.

Gross, J. L. and Yellen, J. (edited). 2004. **Handbook of graph theory**. Boca Raton: CRC Press.

Johnsonbaugh, R. 1984. **Discrete Mathematics**. New York: Macmillan.

McHugh, J.A. 1990. **Algorithmic Graph Theory**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Norman, L.B., Lloyd, E.K. and Wilson, J.R., 1977. **Graph Theory 1736-1936**. Great Britain: J.W. Arrowsmith Ltd., Bristol.

Sprinthall, R.C. 2003. **Basic Statistic Analysis**. Boston: Allyn and Bacon.

Wilson, R. J. 1996. **Introduction to graph theory**. Harlow, Essex: Longman.

ภาคผนวก

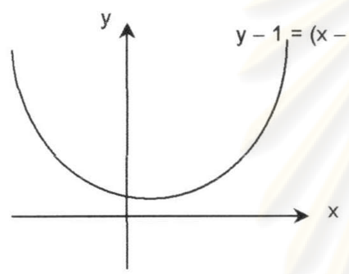
ภาคผนวก ก

สาระการเรียนรู้ ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

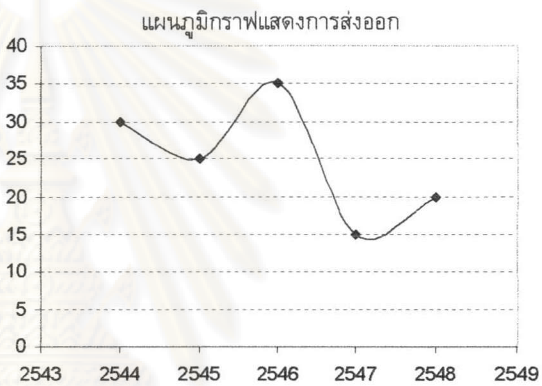
1

กราฟ

คำว่า "กราฟ" ในคณิตศาสตร์มีความหมายหลายหลากและแตกต่างกันในแต่ละบริบท ซึ่งนักเรียนนั้นเคยเรียนเกี่ยวกับกราฟในวิชาคณิตศาสตร์มาแล้วในเรื่องต่าง ๆ เช่น กราฟของความสัมพันธ์ (ดังรูป 1-1) หรือกราฟในเรื่องสถิติ (ดังรูป 1-2) เป็นต้น

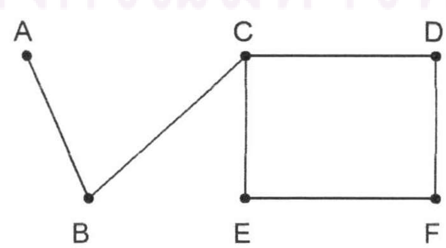


รูป 1-1



รูป 1-2

สำหรับ "กราฟ" ในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นนั้นก็จะแตกต่างกับกราฟในเรื่องอื่น ๆ กราฟในเรื่องนี้จะมีลักษณะเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ชนิดหนึ่งที่ใช้สำหรับจำลองสิ่งของ แบบ สถานการณ์ หรือปัญหาบางอย่าง ด้วยแผนภาพที่ประกอบไปด้วยจุดยอด (vertex) และเส้นเชื่อม (edge) ดังรูป 1-3

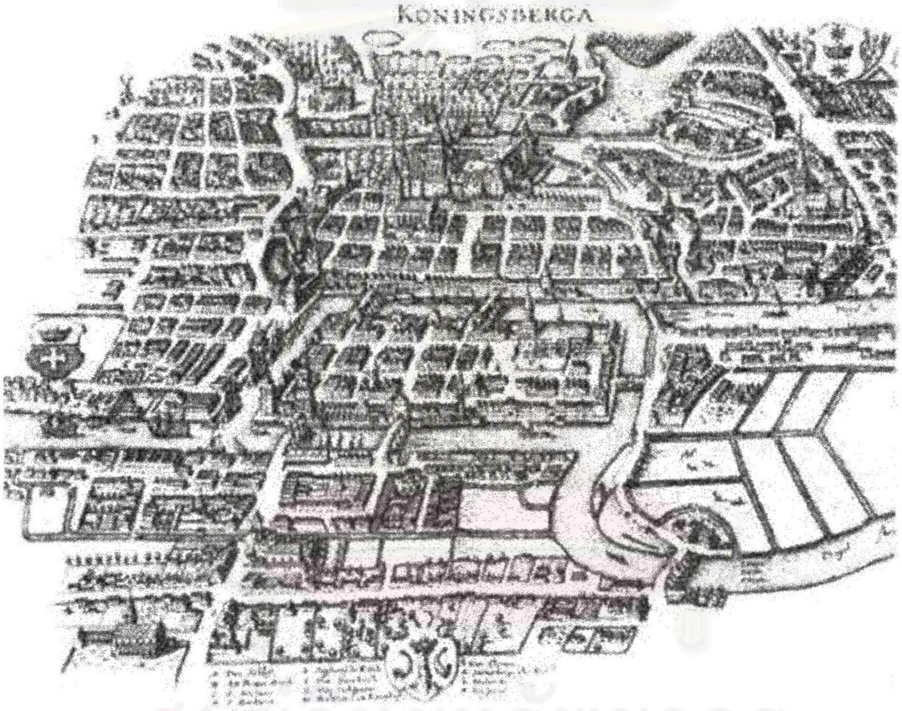


รูป 1-3

ความเป็นมาของกราฟ

ทฤษฎีกราฟ มีจุดเริ่มต้นมาจากการพยายามในการตอบปัญหาปริศนา (puzzle) ต่าง ๆ ซึ่งปัญหาหนึ่งที่เป็นที่รู้จักกันดีในเรื่องทฤษฎีกราฟคือ ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก (The Seven of Königberg)

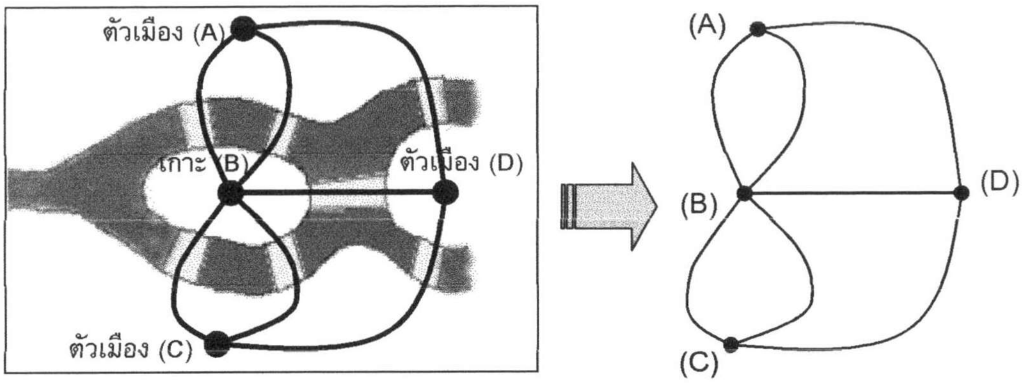
ในศตวรรษที่ 18 เมืองเคอนิกส์เบิร์ก ปัจจุบันคือเมืองคาลินิงการ์ด (Kaliningrad) ซึ่งตั้งอยู่ทางตะวันออกของปรัสเซีย (Prussia) ที่เมืองแห่งนี้มีเกาะกลางแม่น้ำชื่อว่า เกาะเนพอฟ (Kneiphof) โดยมีแม่น้ำปรีเกล (The River Pregel) ไหลผ่าน ชาวเมืองเคอนิกส์เบิร์กได้สร้างสะพานเชื่อมเกาะและตัวเมืองทั้งสิ้น 7 สะพาน (ดังรูป 1-4)



รูป 1-4

ต่อมามีคนตั้งคำถามเกี่ยวกับการเดินทางข้ามสะพาน ซึ่งเป็นที่มาของปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์กว่า “เป็นไปได้หรือไม่ที่เราจะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่ง โดยข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียงครั้งเดียวเท่านั้น แล้วกลับมายืนที่จุดเดิม”

ในปี พ.ศ.2279 (ค.ศ.1736) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสชื่อว่า เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ได้ศึกษาและพิสูจน์ได้ว่าปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์กนั้น “เป็นไปไม่ได้” โดยออยเลอร์ได้แปลงภาพเมืองเคอนิกส์เบิร์กเป็นกราฟ โดยแทนเกาะทั้งสองและตัวเมืองด้วยจุดยอด (vertex) และแทนสะพานด้วยเส้นเชื่อม (edge) ดังรูป 1-5



รูป 1-5

จากผลงานของออยเลอร์ นับได้ว่าเป็นจุดเริ่มต้นของคณิตศาสตร์สาขาใหม่ที่เรียกว่า “ทฤษฎีกราฟ” (Graph Theory) เป็นต้นมา

ความหมายของกราฟ

จากประวัติความเป็นมาของกราฟ จะได้ว่า “กราฟ” ในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น มีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

กราฟ G ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด (vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์ V(G) หรือ V

2. เซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์ E(G) หรือ E

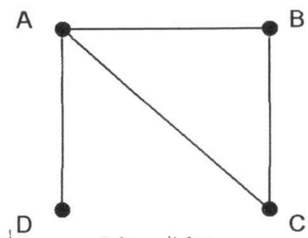
เขียนแทนกราฟ G ด้วยสัญลักษณ์ G=(V,E)

จากบทนิยาม จะได้ว่า โครงสร้างของกราฟมีส่วนประกอบ 2 ส่วนคือ

1. จุดยอด ซึ่งเซตของจุดยอดจะไม่เป็นเซตว่าง $V(G) \neq \varnothing$ นั่นคือ กราฟจะต้องมีจุดยอดอย่างน้อย 1 จุด (เพราะถ้าไม่มีจุดยอดก็จะไม่มีเส้นเชื่อมทำให้กราฟไม่มีรูปอะไรเลย)

2. เส้นเชื่อม ซึ่งเส้นเชื่อมจะต้องเชื่อมจุดยอด 2 จุดใด เช่น เส้นเชื่อม e เชื่อมจุดยอด a และจุดยอด b เขียนแทนด้วย e = {a,b} หรือ e = ab โดยที่เซตของเส้นเชื่อมอาจจะเป็นเซตว่างหรือไม่ก็ได้

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้กราฟ G_1 ดังรูป

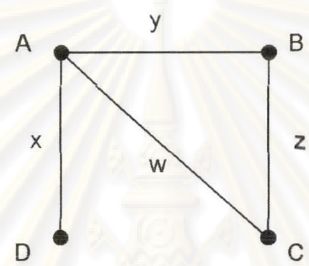


จากกราฟ $G_1=(V,E)$ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$V(G_1) = \{A, B, C, D\}$

$E(G_1) = \{ \{A,B\} , \{A,C\} , \{A,D\} , \{B,C\} \}$ หรือ $E(G_1) = \{AB, AC, AD, BC\}$

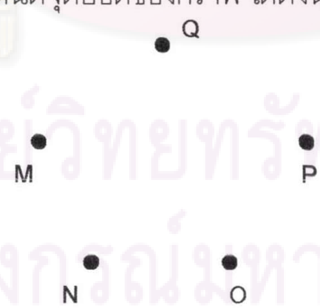
จากตัวอย่างที่ 1.1 เราสามารถกำหนดชื่อของเส้นเชื่อมได้



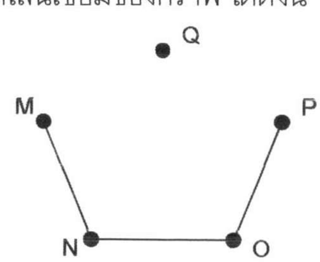
ดังนั้น จะได้ว่า $E(G_1) = \{ w, x, y, z \}$

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $V(G_2) = \{ M, N, O, P, Q \}$ และ $E(G_2) = \{ MN, NO, OP \}$ จงวาดกราฟ G_2

<u>วิธีทำ</u> ขั้นที่ 1 กำหนดจุดยอดของกราฟ ได้ดังนี้

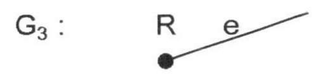


ขั้นที่ 2 วาดเส้นเชื่อมของกราฟ ได้ดังนี้



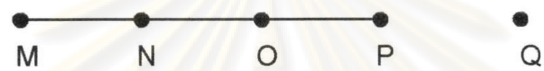
ข้อสังเกต 1) จุดยอดของกราฟสามารถอยู่จุดเดียวได้โดยไม่มีเส้นเชื่อมก็ได้ เช่น จาก ตัวอย่างที่ 1.2 จะได้ว่า ไม่มีเส้นเชื่อมใดเชื่อมกับจุดยอด Q

2) เส้นเชื่อมจะต้องเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุดเสมอ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 จะได้ว่า เส้นเชื่อม MN เชื่อมจุดยอด M และจุดยอด N

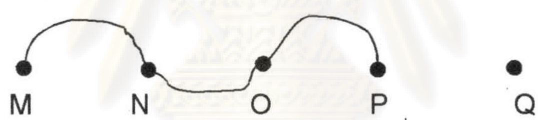


จากรูปจะเห็นว่า G_3 มีเส้นเชื่อม e ที่มีปลายด้านหนึ่งเชื่อมจุดยอด R แต่ปลายอีกด้านไม่มีจุดยอด ดังนั้น G_3 ไม่เป็นกราฟ

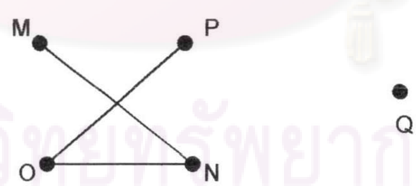
3) ในการวาดกราฟนั้น สามารถจะกำหนดตำแหน่งของจุดยอดของกราฟ ณ ตำแหน่งใดก็ได้ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 สามารถเขียนกราฟ G_2 ลักษณะอื่นได้ดังนี้



4) ในการวาดกราฟนั้น สามารถวาดเส้นเชื่อมของกราฟเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้งก็ได้ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 สามารถเขียนกราฟ G_2 ลักษณะอื่นได้ดังนี้



5) เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟอาจตัดกันได้ โดยที่จุดตัดของเส้นเชื่อมทั้งสองไม่ถือว่าเป็นจุดยอดของกราฟ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 สามารถเขียนกราฟ G_2 ลักษณะอื่นได้

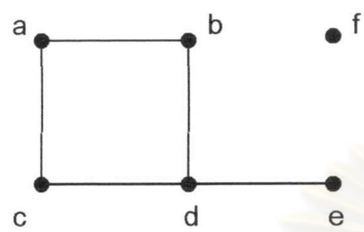


จะเห็นว่าเส้นเชื่อม MN ตัดกับเส้นเชื่อม OP แต่จุดตัดของเส้นเชื่อมทั้งสองไม่นับเป็นจุดยอดของกราฟ

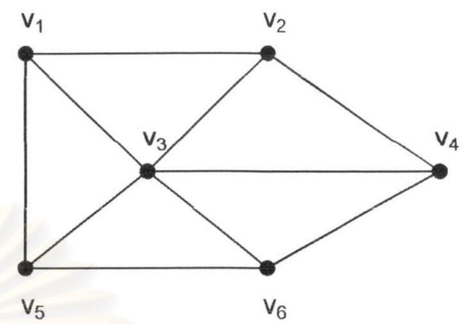
แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหา V(G) และ E(G) ของกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

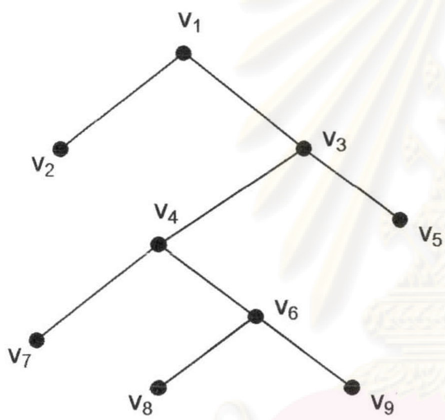
1.1



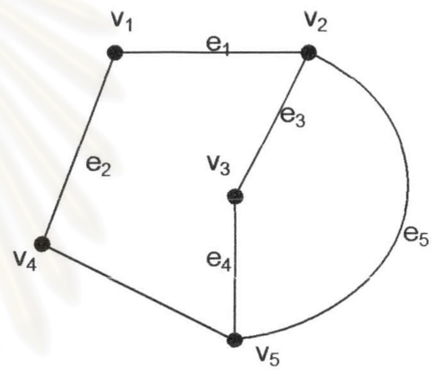
1.2



1.3



1.4



2. จงเขียนรูปภาพของกราฟ G เมื่อกำหนดให้

2.1 $V(G) = \{ a, b, c, d \}$

$E(G) = \{ ab, bc, bd, cd \}$

2.2 $V(G) = \{ k, m, n, p, q \}$

$E(G) = \{ km, mp, kp, qr \}$

2.3 $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E(G) = \{ v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4 \}$

2.4 $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$

$E(G) = \{ v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_5v_6 \}$

บทนิยาม

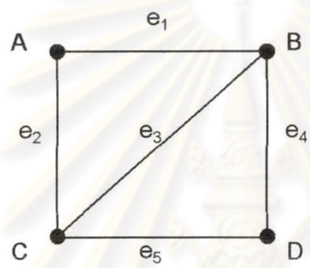
กำหนดให้ G เป็นกราฟ และ u, v เป็นจุดยอดที่ต่างกันของ G

จุดยอด u **ประชิด (adjacent)** กับจุดยอด v ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง

จุดยอด u และจุดยอด v ของกราฟเป็น **จุดยอดประชิด (adjacent vertices)** ก็ต่อเมื่อจุดยอด u ประชิดกับจุดยอด v

เส้นเชื่อม e ของกราฟ **เกิดกับ (incident)** จุดยอด v ก็ต่อเมื่อ จุดยอด v เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม e

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้กราฟ G_4 ดังรูป



จะได้ว่า $G_4 = (V,E)$ โดยที่ $V(G_4) = \{ A, B, C, D \}$ และ $E(G_4) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \}$

จากตัวอย่างที่ 1.3 เราจะได้ว่า (ตัวอย่างการใช้คำศัพท์)

จุดยอด A **ประชิดกับ** จุดยอด B (หรือจุดยอด C)

แต่จุดยอด A **ไม่ประชิดกับ** จุดยอด D

จุดยอด A และจุดยอด B เป็น**จุดยอดประชิด**

แต่จุดยอด A และจุดยอด D **ไม่เป็นจุดยอดประชิด**

เส้นเชื่อม e_1 **เกิดกับ**จุดยอด A (หรือจุดยอด B)

เส้นเชื่อม e_5 **ไม่เกิดกับ**จุดยอด A (หรือจุดยอด B)

อันดับและขนาดของกราฟ (ความรู้เพิ่มเติม)**

จากบทนิยามของกราฟ จะได้ว่ากราฟ G ประกอบด้วย เซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อม ซึ่งเราจะเรียกจำนวนสมาชิกของเซตจุดยอดของกราฟ G ว่า “**อันดับ**” และเรียกจำนวนสมาชิกของเซตเส้นเชื่อมของกราฟ G ว่า “**ขนาด**”

บทนิยาม

กำหนดให้ G เป็นกราฟ จะได้ว่า

จำนวนสมาชิกของเซตจุดยอดของกราฟ G เรียกว่า **อันดับ (order)** ของ G แทนด้วยสัญลักษณ์ **n(G)** หรือ **n**

จำนวนสมาชิกของเซตเส้นเชื่อมของกราฟ G เรียกว่า **ขนาด (size)** ของ G แทนด้วยสัญลักษณ์ **m(G)** หรือ **m**

จากตัวอย่างที่ 1.2 จะได้ว่า

กราฟ G_2 มีจำนวนสมาชิกของเซตจุดยอดเท่ากับ 5 (หรือมีจุดยอดเท่ากับ 5 จุด) ดังนั้น อันดับของ G_2 เท่ากับ 5 หรือเขียนแทนด้วย $n(G_2) = 5$

กราฟ G มีจำนวนสมาชิกของเซตเส้นเชื่อมเท่ากับ 3 (หรือมีเส้นเชื่อมเท่ากับ 3 เส้น) ดังนั้น ขนาดของ G_2 เท่ากับ 3 หรือเขียนแทนด้วย $m(G_2) = 3$

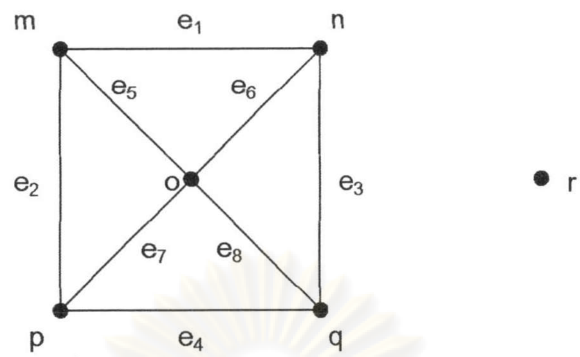
แบบฝึกหัดเสริม 1.1

1. จากแบบฝึกหัดที่ 1.1 ข้อที่ 1 และ 2 จงหา อันดับและขนาดของกราฟ G

** **ความรู้เพิ่มเติม เป็นสาระการเรียนรู้ที่เพิ่มเติมขึ้นมา เมื่อเปรียบเทียบจากสาระการเรียนรู้ที่ สสวท. กำหนด จึงไม่เน้นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในส่วนนี้ ซึ่งครูผู้สอนอาจจะนำไปสอนหรือไม่ก็ได้**

แบบฝึกหัด 1.2

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ ถูกหรือผิด

3.1 จุดยอด m ประชิดกับจุดยอด p

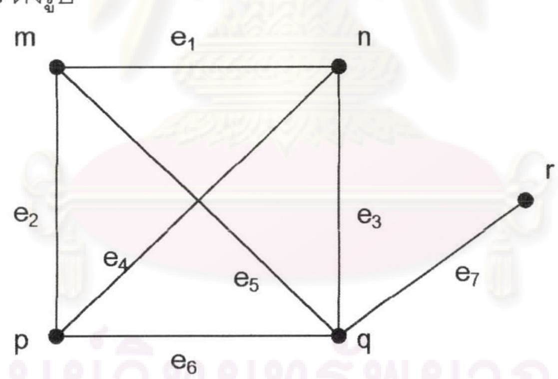
3.2 จุดยอด n และจุดยอด p เป็นจุดยอดประชิด

3.3 จุดยอด r ไม่เป็นจุดยอดประชิดกับจุดยอดใดเลย

3.4 เส้นเชื่อม e_8 เกิดกับจุดยอด o และจุดยอด q

3.5 เส้นเชื่อม e_2 ไม่เกิดกับจุดยอด n และจุดยอด q

2. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

4.1 จุดยอด m __________ จุดยอด q

4.2 จุดยอด p __________ จุดยอด r

4.3 จุดยอด q ประชิดกับจุดยอด __________________________

4.4 จุดยอด n และจุดยอด q เป็น ____________

4.5 จุดยอด m ไม่ประชิดกับจุดยอด ___________

4.6 เส้นเชื่อม e_4 เกิดกับจุดยอด _________ และจุดยอด _________

4.7 เส้นเชื่อม e_5 เกิดกับจุดยอด _________ และจุดยอด _________

4.8 เส้นเชื่อม e_6 ไม่เกิดกับจุดยอด _________________________

เส้นเชื่อมขนานและวงวน

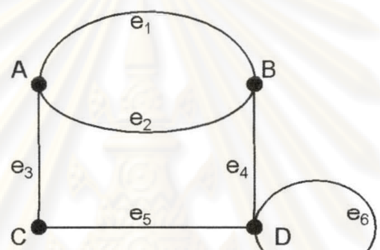
นอกจากเส้นเชื่อมลักษณะทั่ว ๆ ไปที่พบในกราฟแล้ว ยังมีเส้นเชื่อมที่มีลักษณะเฉพาะที่นักเรียนควรรู้จัก ได้แก่ วงวน (loop) และ เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม

เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกัน เรียกว่า **เส้นเชื่อมขนาน** (parallel edges)

เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียว เรียกว่า **วงวน** (loop)

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จะได้ว่า G=(V,E) โดยที่ V(G) = { A, B, C, D }

E(G) = { e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 }

จากกราฟ จะเห็นว่า เส้นเชื่อม e_1 เชื่อมจุดยอด A และจุดยอด B
และ เส้นเชื่อม e_2 เชื่อมจุดยอด A และจุดยอด B
จะได้ว่า เส้นเชื่อม e_1 และเส้นเชื่อม e_2 เชื่อมจุดยอดคู่เดียวกัน
ดังนั้น เส้นเชื่อม e_1 และเส้นเชื่อม e_2 เป็นเส้นเชื่อมขนาน

จากกราฟ จะเห็นว่า เส้นเชื่อม e_6 เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวคือ จุดยอด D
ดังนั้น เส้นเชื่อม e_6 เป็นวงวน

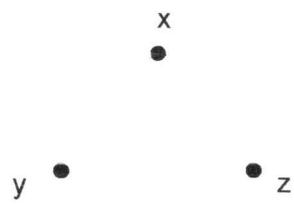
ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.4 ถ้าเขียน E(G) = { AB, AB, AC, BD, CD, DD } จะได้ว่า

1. เซตของเส้นเชื่อมจะมีสมาชิก AB สองตัวซึ่งหมายถึงเส้นเชื่อมขนาน นั่นหมายความว่า {AB, AB, AC, BD, CD, DD} $\neq$ {AB, AC, BD, CD ,DD} เพราะ {AB, AC, BD, CD, DD} เป็นเซตของเส้นเชื่อมที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน ดังนั้นในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เซตของเส้นเชื่อมมีคุณสมบัติบางประการไม่เหมือนกับเรื่องของเซต (Sets) ที่เคยเรียนมาแล้ว

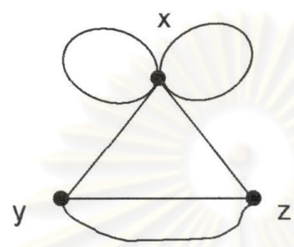
2. จากตัวอย่างที่ 1.4 เราสามารถเขียนเส้นเชื่อมที่เป็นวงวนได้ดังนี้ e_6 = DD ซึ่งหมายความว่าเส้นเชื่อม e_6 เป็นวงวนที่จุดยอด D

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ V(G)={x, y, z} และ E(G)={xx, xx, xy, xz, yz, yz} จงวาดกราฟ G

<u>วิธีทำ</u> ขั้นที่ 1 กำหนดจุดยอดของกราฟ ดังนี้



ขั้นที่ 2 วาดเส้นเชื่อมของกราฟ ดังนี้

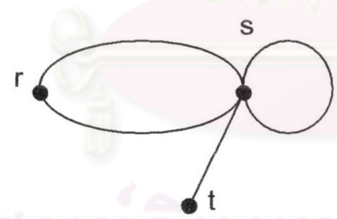


จะเห็นว่า เส้นเชื่อมที่เป็นวงวนที่จุดยอด x คือ xx จำนวน 2 เส้น และมีเส้นเชื่อมขนานคือ yz จำนวน 2 เส้น

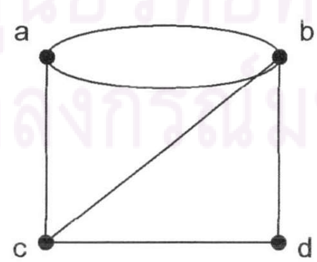
แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหา V(G) และ E(G) ของกราฟ G ที่กำหนดให้

1.1



1.2



2. กำหนดให้ V(G) = {v_1, v_2, v_3, v_4} และ E(G) = {v_1v_1, v_1v_2, v_1v_2, v_2v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4}

2.1 จงวาดกราฟ G

2.2 กราฟ G มีเส้นเชื่อมขนานหรือไม่ ถ้ามีแล้วเส้นเชื่อมขนานคือเส้นเชื่อมใด

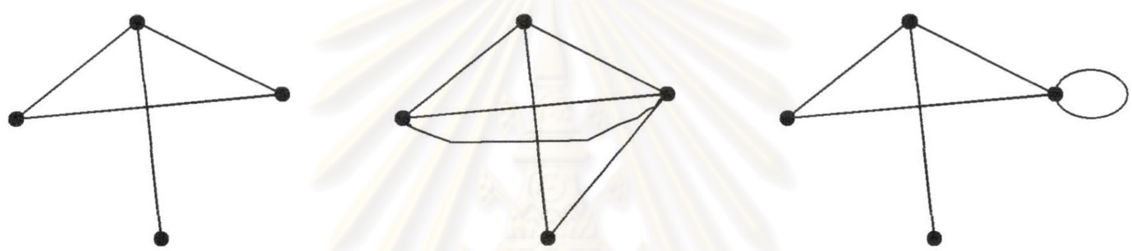
2.3 กราฟ G มีวงวนหรือไม่ ถ้ามีแล้ววงวนอยู่ที่จุดยอดจุดใดบ้าง

กราฟเชิงเดียวและกราฟหลายเชิง (ความรู้เพิ่มเติม)**

จากความรู้เรื่องวงวน (loop) และเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) เราสามารถนิยามชนิดของกราฟ โดยใช้วงวนและเส้นเชื่อมขนาน ดังนี้

บทนิยาม
กราฟเชิงเดียว (simple graph) คือกราฟที่ไม่มีวงวน และไม่มีเส้นเชื่อมขนาน
กราฟหลายเชิง (multigraph) คือกราฟที่มีวงวน หรือมีเส้นเชื่อมขนาน

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้กราฟ G_1, G_2 และ G_3 ดังนี้



G_1 G_2 G_3

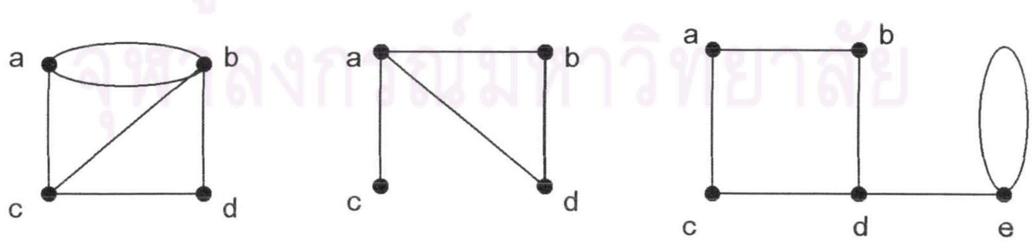
จะได้ว่า G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว (simple graph) เพราะไม่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

G_2 เป็นกราฟหลายเชิง (multigraph) เพราะมีเส้นเชื่อมขนาน

G_3 เป็นกราฟหลายเชิง (multigraph) เพราะมีวงวน

แบบฝึกหัดเสริม 1.2

1. จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟเชิงเดียวหรือกราฟหลายเชิง เพราะเหตุใด

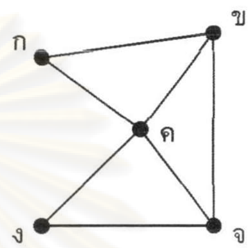


** **ความรู้เพิ่มเติม เป็นสาระการเรียนรู้ที่เพิ่มเติมขึ้นมา เมื่อเปรียบเทียบจากสาระการเรียนรู้ที่ สสวท. กำหนด จึงไม่เน้นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในส่วนนี้ ซึ่งครูผู้สอนอาจจะนำไปสอนหรือไม่ก็ได้**

ประโยชน์ของกราฟ

ในปัจจุบันมีผู้สนใจในเรื่องทฤษฎีกราฟเป็นจำนวนมาก เนื่องจากทฤษฎีกราฟมีประโยชน์และถูกนำไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาอื่น ๆ มากมาย เช่น วิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สังคมศาสตร์ เป็นต้น

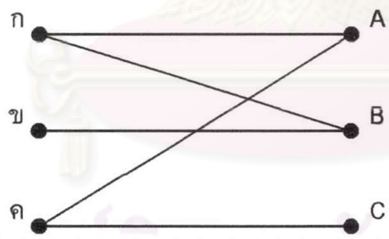
ตัวอย่างที่ 1.7 การใช้กราฟแทนเส้นทางการติดต่อ/สื่อสารระหว่างหน่วยงานต่าง ๆ



จุดยอดแทนหมู่บ้าน และ เส้นเชื่อมแทนเส้นทางติดต่อของหมู่บ้าน

ตัวอย่างที่ 1.8 การใช้กราฟแทนสถานการณ์ต่าง ๆ เช่น การแบ่งงานให้คนงาน

การแบ่งงาน 3 อย่าง คือ A, B และ C ให้คน 3 คน คือ ก, ข และ ค โดยที่ ก เหมาะสมกับงาน A และ B, ส่วน ข เหมาะสมกับงาน B และ ค เหมาะสมกับงาน A และ C



จุดยอดแทนคนกับงาน และเส้นเชื่อมแทนความเหมาะสม

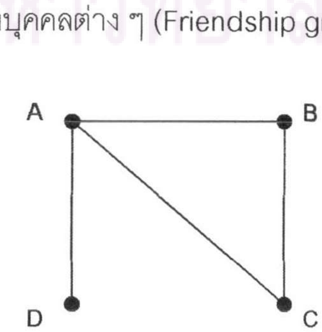
ตัวอย่างที่ 1.9 การใช้กราฟแทนความสัมพันธ์ของบุคคลต่าง ๆ (Friendship graph) เช่น กราฟแสดงความเป็นเพื่อน

A เป็นเพื่อนกับ B, C และ D

B เป็นเพื่อนกับ A และ C

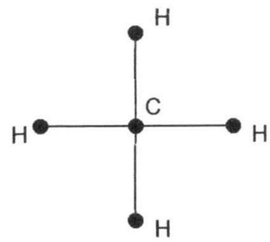
C เป็นเพื่อนกับ A และ B

D เป็นเพื่อนกับ A



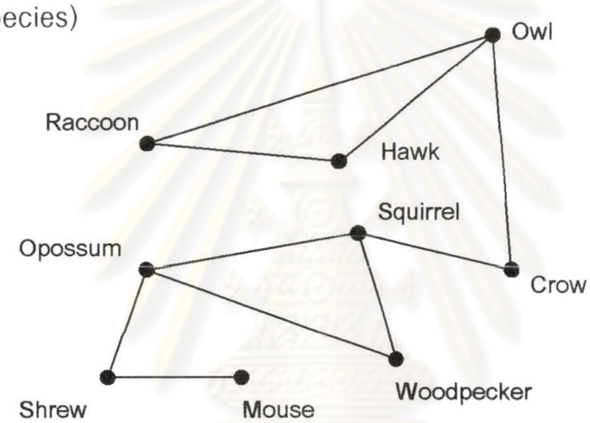
จุดยอดแทนคน และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ความเป็นเพื่อน

ตัวอย่างที่ 1.10 การใช้กราฟในวิทยาศาสตร์กายภาพ เช่น การอธิบายส่วนประกอบของโมเลกุล



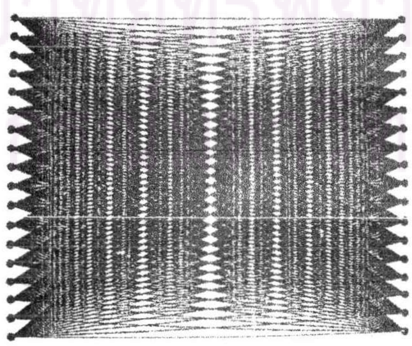
กราฟแสดงส่วนประกอบของโมเลกุลของ CH_4 โดยที่ จุดยอดแทนอะตอม และเส้นเชื่อมแทนพันธะระหว่างอะตอม

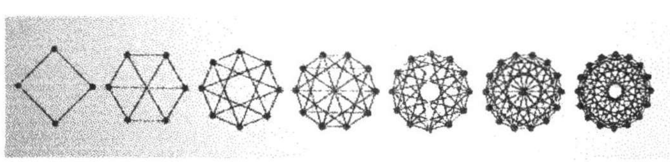
ตัวอย่างที่ 1.11 การใช้กราฟในนิเวศวิทยา (Ecology) เช่น โมเดล (models) การแข่งขันของสัตว์ในแต่ละสปีชีส์ (Species)



กราฟแสดงการแข่งขันระหว่างสัตว์แต่ละสปีชีส์ โดยที่ จุดยอดแทนสัตว์ และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์แบบแข่งขัน

ตัวอย่างที่ 1.12 การใช้กราฟในงานศิลปะ





การแปลงปัญหาเป็นกราฟ

เราทราบถึงประโยชน์ต่าง ๆ ของกราฟในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมาบ้างแล้ว ดังนั้นเราสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตประจำวันได้ ซึ่งกราฟนั้นจะช่วยทำให้เรามองเห็นภาพหรือปัญหาได้ชัดเจนมากขึ้น และสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.13 ปัญหาเกี่ยวกับการแบ่งงาน มีอยู่ว่า

สมมติว่ามีตำแหน่งงานอยู่ 4 ตำแหน่ง คือ A, B, C และ D และมีพนักงานที่มีความชำนาญในงานดังนี้

ก มีความชำนาญในงาน A

ข มีความชำนาญในงาน A, B และ C

ค มีความชำนาญในงาน C และ D

ง มีความชำนาญในงาน A และ B

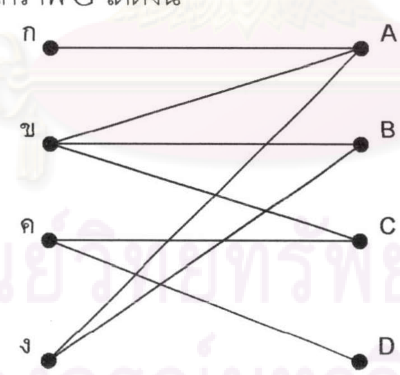
ต้องการมอบหมายงานให้พนักงานได้ทำงานที่ตนเองชำนาญ จะสามารถเลือกพนักงานอย่างไร

<u>วิธีทำ</u> จำลองปัญหานี้ด้วยกราฟ G โดยที่

จุดยอดแทนคนและตำแหน่งงาน ดังนี้ V(G) = {ก, ข, ค, ง, A, B, C, D}

เส้นเชื่อมแทนความชำนาญ ดังนี้ E(G) = {กA, ขA, ขB, ขC, คC, คD, งA, งB}

แปลงปัญหาเป็นกราฟ G ได้ดังนี้



เลือกพนักงาน โดยพิจารณาจากทางซ้ายมือจะเห็นว่า (ก) ชำนาญงานเพียงอย่างเดียวคือ A ดังนั้นให้ **(ก) ทำงาน A**, พิจารณาต่อ จะเห็นว่า (ง) ชำนาญงาน 2 อย่างคือ A และ B แต่ (ก) ทำงาน A แล้ว ดังนั้นให้ **(ง) ทำงาน B**, พิจารณาต่อ จะเห็นว่า (ข) ชำนาญงาน 3 อย่าง คือ A, B และ C แต่ งาน A และ B ให้ (ก) และ (ง) ทำแล้ว ดังนั้นให้ **(ข) ทำงาน C**, สุดท้ายจึงได้ว่า **(ค) ทำงาน D** จึงสรุปงานได้ดังนี้

ก ทำงานในตำแหน่ง A , ข ทำงานในตำแหน่ง C , ค ทำงานในตำแหน่ง D และ ง ทำงานในตำแหน่ง B

ตัวอย่างที่ 1.14 ปัญหาในการจัดตารางสอบซ่อมให้แก่นักเรียนที่สอบตกจำนวน 6 วิชา คือ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาอังกฤษ ภาษาไทย สังคม และสุขศึกษา โดยนักเรียนที่ตกในแต่ละวิชาต้องสอบพร้อมกัน

A	ตกวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ
B	ตกวิชาคณิตศาสตร์และภาษาไทย
C	ตกวิชาคณิตศาสตร์และสุขศึกษา
D	ตกวิชาสุขศึกษาและสังคม
E	ตกวิชาสังคมและวิทยาศาสตร์
F	ตกวิชาวิทยาศาสตร์และภาษาไทย
H	ตกวิชาภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อยากทราบว่าจะต้องจัดสอบอย่างไรให้ใช้เวลาในการสอบซ่อมน้อยที่สุด (แต่ละวิชาใช้เวลาสอบซ่อม 1 คาบเท่ากัน)

วิธีทำ จำลองปัญหาด้วยกราฟ G โดยที่

จุดยอดแทนวิชา ดังนี้ $V(G) = \{m, n, o, p, q, r\}$

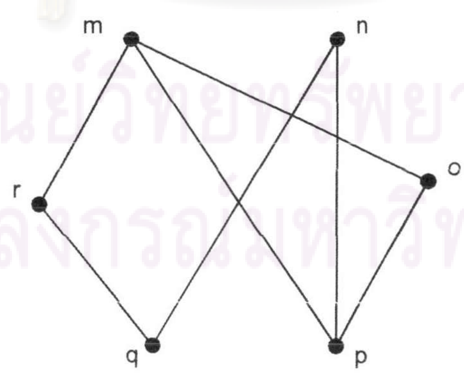
m แทนคณิตศาสตร์ n แทนวิทยาศาสตร์ o แทนภาษาอังกฤษ

p แทนภาษาไทย q แทนสังคมศึกษา r แทนสุขศึกษา

เส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ของวิชาที่มีคนสอบตกทั้งสองวิชาพร้อมกัน เช่น A ตกวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ จะได้เส้นเชื่อม mo

ดังนั้นได้เซตของเส้นเชื่อม ดังนี้ $E(G) = \{mo, mp, mr, qr, nq, np, op\}$

แปลงปัญหาเป็นกราฟ G ได้ดังนี้



เลือกวิชาสอบในคาบที่ 1 เลือกคณิตศาสตร์ (m) ดังนั้น คาบที่ 1 สอบวิชาภาษาอังกฤษ (o), ภาษาไทย (p) และสุขศึกษา (r) ไม่ได้ เพราะมีเส้นเชื่อม แสดงว่ามีนักเรียนสอบตกวิชาดังกล่าวกับคณิตศาสตร์ คาบที่ 1 จึงเลือกได้ 2 วิชา คือวิทยาศาสตร์ (n) และ สุขศึกษา (r) ถ้าเราเลือก วิทยาศาสตร์ จะได้ว่า **คาบที่ 1 สอบซ่อมคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์**

เลือกวิชาสอบคาบที่ 2 เราเลือกภาษาอังกฤษ (o) เราสามารถเลือกวิชาได้ 2 วิชาคือ สังคม (q) และสุขศึกษา (r) ถ้าเราเลือกวิชาสังคม ดังนั้น **คาบที่ 2 สอบซ่อมวิชาภาษาอังกฤษและสังคม**

เลือกวิชาสอบคาบที่ 3 เราเลือกภาษาไทย (p) ซึ่งเราสามารถสอบพร้อมกับสุขศึกษา (r) ได้ ดังนั้น **คาบที่ 3 สอบซ่อมวิชาภาษาไทยและสุขศึกษา**

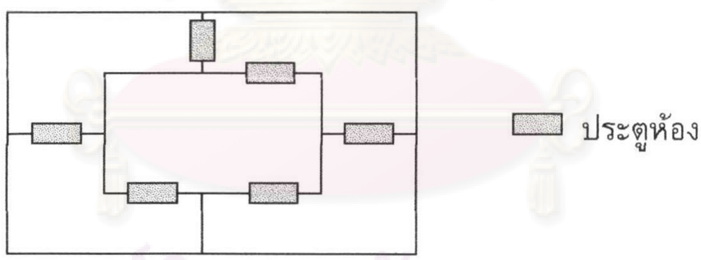
เราจะได้ตารางสอบซ่อม คือ

คาบที่ 1	คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์
คาบที่ 2	ภาษาอังกฤษ และสังคม
คาบที่ 3	ภาษาไทย และสุขศึกษา

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.13 และ 1.14 คำตอบที่ได้เป็นเพียงคำตอบแบบหนึ่งเท่านั้น นักเรียนอาจจะได้คำตอบของปัญหาในแบบอื่นที่ไม่เหมือนกันได้

แบบฝึกหัด 1.4

1. จากแผนผังของห้อง จงเขียนกราฟ G แทนแผนผังของห้อง โดยที่จุดยอดแทนห้อง และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ของห้องที่มีประตูเชื่อมอยู่



2. จงเขียนกราฟ G แทนแผนที่ของประเทศไทยและประเทศเพื่อนบ้าน (พม่า, กัมพูชา, ลาว และมาเลเซีย) โดยที่จุดยอดแทนประเทศ และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ของประเทศที่มีพรมแดนติดกัน และถ้าต้องการลงสีแผนที่ดังกล่าว โดยที่ประเทศที่มีพรมแดนติดกันต้องลงสีต่างกัน แล้วจะต้องใช้สีน้อยที่สุดกี่สี

3. โรงจอดรถแห่งหนึ่งมีรถจอดประจำ 6 คัน ในช่วงเวลาต่าง ๆ ดังนี้

คันที่ 1 จอดเวลา 7 นาฬิกา ถึง 15 นาฬิกา

คันที่ 2 จอดเวลา 12 นาฬิกา ถึง 21 นาฬิกา

คันที่ 3 จอดเวลา 9 นาฬิกา ถึง 13 นาฬิกา

คันที่ 4 จอดเวลา 16 นาฬิกา ถึง 24 นาฬิกา

คันที่ 5 จอดเวลา 8 นาฬิกา ถึง 18 นาฬิกา

คันที่ 6 จอดเวลา 22 นาฬิกา ถึง 8 นาฬิกาของวันถัดไป

อยากทราบโรงจอดรถแห่งนี้จะต้องมีที่สำหรับจอดรถอย่างน้อยที่สุดกี่คัน

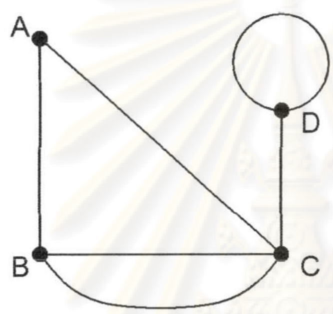
(แนะนำ : ให้จุดยอดแทนรถยนต์ และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ของรถยนต์ที่จอดเวลาซ้อนกัน)

2

ดีกรีของจุดยอด

ดีกรีของจุดยอด

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ กราฟ G ดังรูป



จะเห็นว่า เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด A ได้แก่เส้นเชื่อม AB และเส้นเชื่อม AC ดังนั้น จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด A เท่ากับ 2 ครั้ง

สำหรับจุดยอด B มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด B ได้แก่ เส้นเชื่อม AB, BC และ BC (เส้นเชื่อมขนาน) ดังนั้น จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด B เท่ากับ 3 ครั้ง

สำหรับจุดยอด C มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด C ได้แก่ เส้นเชื่อม AC, BC ,BC และ CD ดังนั้น จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด C เท่ากับ 4 ครั้ง

สำหรับจุดยอด D มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด D ได้แก่เส้นเชื่อม CD และ DD (วงวน) ดังนั้น จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด D เท่ากับ 3 ครั้ง (เนื่องจากวงวน DD นั้นเชื่อมกับจุดยอด D จำนวน 2 ครั้ง ดังนั้นจึงนับวงวน DD เกิดกับจุดยอด D จำนวน 2 ครั้ง)

เราจะเรียกจำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอดว่า **"ดีกรี"** ของจุดยอด

บทนิยาม

ดีกรี (degree) ของจุดยอด v ในกราฟ คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v และเขียนแทนดีกรีของจุดยอด v ด้วยสัญลักษณ์ **deg(v)**

จากตัวอย่างที่ 2.1 จะได้ว่า

จุดยอด	จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด
A	2
B	3
C	4
D	3

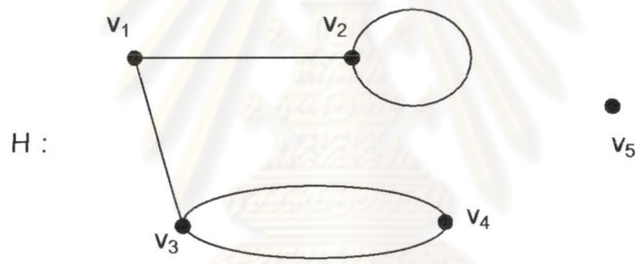
ดังนั้น จะได้ว่า $\deg(A) = 2$

$\deg(B) = 3$

$\deg(C) = 4$

$\deg(D) = 3$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้กราฟ H ดังรูป จงหาดีกรีของจุดยอดทุกจุดของกราฟ H



วิธีทำ

จุดยอด	จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด
v_1	2
v_2	3
v_3	3
v_4	2
v_5	0

ดังนั้น จะได้ว่า $\deg(v_1) = 2$

$\deg(v_2) = 3$

$\deg(v_3) = 3$

$\deg(v_4) = 2$

$\deg(v_5) = 0$

ลำดับของดีกรี (ความรู้เพิ่มเติม)**

จากความรู้เรื่องดีกรีของจุดยอดของกราฟ เราสามารถเขียนดีกรีของจุดยอดในลักษณะของคู่อันดับ เรียกว่า "**ลำดับของดีกรี**"

บทนิยาม

ให้กราฟ G=(V,E) เซตของจุดยอด $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots , v_n\}$

และกำหนดให้ ดีกรีของจุดยอด v_i คือ d_i ทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots , n\}$

จะได้ว่า ลำดับ $(d_1, d_2, d_3, \ldots , d_n)$ เรียกว่า **ลำดับของดีกรี (degree squence)**

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ **d(G)**

จากตัวอย่างที่ 2.2 จะได้ว่า ดีกรีของจุดยอดของกราฟ H คือ $deg(v_1)=2$, $deg(v_2)=3$, $deg(v_3)=3$, $deg(v_4)=2$ และ $deg(v_5)=0$ หรือได้ว่า $d_1=2$, $d_2=3$, $d_3=3$, $d_4=2$ และ $d_5=0$

ดังนั้น ลำดับของดีกรีของกราฟ H หรือ d(H) = (2, 3, 3, 2, 0)

ข้อสังเกต โจทย์ระบุลำดับของดีกรีมาให้ เราสามารถที่จะทราบได้ว่า กราฟมีจุดยอดจำนวนเท่าใด และแต่ละจุดยอดมีดีกรีเท่าใด เช่น d(G) = (1, 1, 0) จะได้ว่า กราฟ G มีจุดยอดจำนวน 3 จุด ซึ่ง ดีกรีของจุดยอดเท่ากับ 1, 1 และ 0 ตามลำดับ

จุดยอดคู่และจุดยอดคี่

จากความหมายของดีกรีของจุดยอด เราจึงแบ่งจุดยอดออกเป็น 2 ประเภทคือ จุดยอดคู่และจุดยอดคี่ ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม

จุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ เรียกว่า **จุดยอดคู่ (even vertex)**

จุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ เรียกว่า **จุดยอดคี่ (odd vertex)**

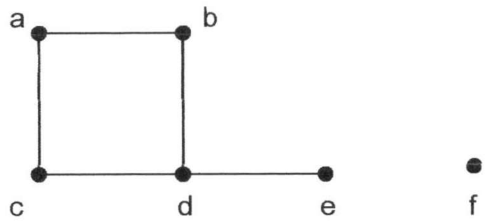
จากกราฟ H ในตัวอย่างที่ 2.2 จะได้ว่า

จุดยอด v_1, v_4 และ v_5 เป็นจุดยอดคู่ (เนื่องจากดีกรีของจุดยอดเป็นจำนวนคู่)

จุดยอด v_2 และ v_3 เป็นจุดยอดคี่ (เนื่องจากดีกรีของจุดยอดเป็นจำนวนคี่)

** **ความรู้เพิ่มเติม เป็นสาระการเรียนรู้ที่เพิ่มเติมขึ้นมา เมื่อเปรียบเทียบจากสาระการเรียนรู้ที่ สสวท. กำหนด จึงไม่เน้นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในส่วนนี้ ซึ่งครูผู้สอนอาจจะนำไปสอนหรือไม่ก็ได้**

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้กราฟ ดังรูป



จะได้ว่า deg(a) = 2

deg(b) = 2

deg(c) = 2

deg(d) = 3

deg(e) = 1

deg(f) = 0

ดังนั้น จะได้ว่า จุดยอด a, b, c และ f ของกราฟเป็นจุดยอดคู่

จุดยอด d และ e ของกราฟเป็นจุดยอดคี่

จุดยอดเอกเทศและจุดยอดปลาย (ความรู้เพิ่มเติม)[**]

นอกจากจุดยอดคู่ และจุดยอดคี่ ที่นักเรียนรู้จักกันแล้ว ยังมีจุดยอดในลักษณะอื่น ๆ ที่น่าสนใจ ได้แก่ จุดยอดเอกเทศ และจุดยอดปลาย ซึ่งมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

จุดยอดที่ดีกรีเท่ากับศูนย์ เรียกว่า **จุดยอดเอกเทศ** (isolated vertex)

จุดยอดที่ดีกรีเท่ากับหนึ่ง เรียกว่า **จุดยอดปลาย** (end-vertex)

จากตัวอย่างที่ 2.3 จะได้ว่า จุดยอด e มีดีกรีเท่ากับ 1 (deg e = 1) และจุดยอด f มีดีกรีเท่ากับ 0 (deg f = 0)

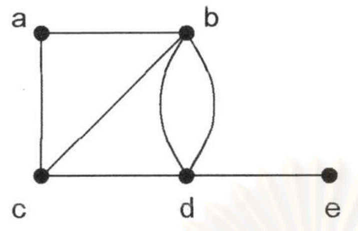
ดังนั้น จุดยอด e เป็นจุดยอดปลาย และจุดยอด f เป็นจุดยอดเอกเทศ

[**] **ความรู้เพิ่มเติม** เป็นสาระการเรียนรู้ที่เพิ่มเติมขึ้นมา เมื่อเปรียบเทียบจากสาระการเรียนรู้ที่ สสวท. กำหนด จึงไม่เน้นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในส่วนนี้ ซึ่งครูผู้สอนอาจจะนำไปสอนหรือไม่ก็ได้

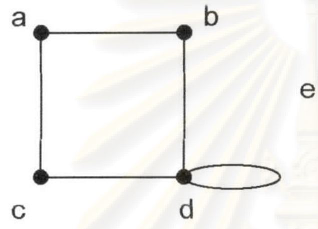
แบบฝึกหัด 2.1

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูปต่อไปนี้ จงหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดของกราฟ และบอกว่าจุดยอดแต่ละจุดของกราฟเป็นจุดยอดชนิดใดบ้าง (จุดยอดคู่หรือจุดยอดคี่)

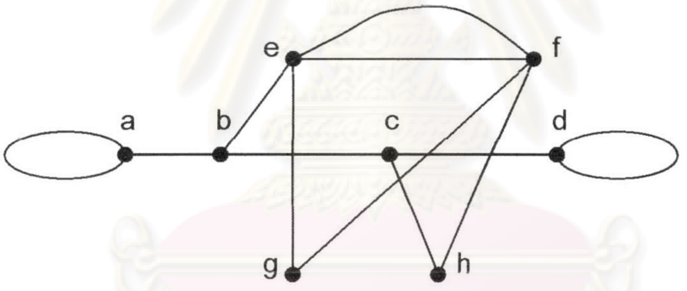
1.1



1.2



1.3



ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับจุดยอด

จากเรื่องดีกรีของจุดยอด ถ้านักเรียนจำบทนิยามของดีกรีของจุดยอดได้ จะได้ว่า "ดีกรีของจุดยอด คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด" ซึ่งถ้านักเรียนสังเกตจะพบว่าเส้นเชื่อม 1 เส้นนั้นจะเกิดกับจุดยอด 2 จุด (ดังนั้นเส้นเชื่อม 1 เส้นทำให้มีดีกรีของจุดยอดของกราฟเท่ากับ 2) นั่นหมายความว่า

ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม 1 เส้น จะได้ว่ามีดีกรีของจุดยอดของกราฟเท่ากับ 2

ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม 2 เส้น จะได้ว่ามีดีกรีของจุดยอดของกราฟเท่ากับ 4

ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม 3 เส้น จะได้ว่ามีดีกรีของจุดยอดของกราฟเท่ากับ 6

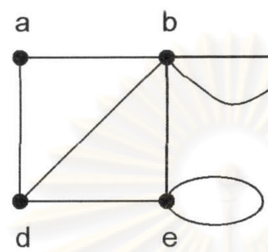
....

ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม n เส้น จะได้ว่ามีดีกรีของจุดยอดของกราฟเท่ากับ 2n

ทฤษฎีบทที่ 1 The Handshaking Theorem

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ หรือ $\sum deg(v) = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ กราฟ G ดังรูป จงหา ดีกรีของจุดยอดของกราฟ, ผลบวกของจุดยอดของกราฟและจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ



วิธีทำ $deg(a) = 2$ $deg(b) = 5$ $deg(c) = 2$

$deg(d) = 3$ $deg(e) = 4$

ดังนั้น $\sum deg(v_i) = 2 + 5 + 2 + 3 + 4 = 16$

$E(G) = \{ab, bc, bc, ad, bd, be, de, ee\}$

$\therefore$ จำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ $m(G) = 8$

จะได้ว่า ผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดของกราฟ เท่ากับ สองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ ตามทฤษฎีบทจริง

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้กราฟ G มีจุดยอดจำนวน 4 จุด และมีผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับ 10 อยากทราบว่า กราฟ G มีเส้นเชื่อมจำนวนเท่าใด

วิธีทำ เนื่องจาก ผลบวกของดีกรีของจุดยอดเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

หรือ $\sum deg(v_i) = 2m$

$10 = 2m$

$\therefore m = 5$

ดังนั้น กราฟ G มีเส้นเชื่อมทั้งหมด 5 เส้น

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาจำนวนจุดยอดทั้งหมดของกราฟ G ที่มีเส้นเชื่อม 15 เส้น และมีจุดยอดที่มีดีกรี 4 อยู่จำนวน 3 จุด และจุดยอดที่เหลือมีดีกรีเท่ากับ 3

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ จุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 4 มีจำนวน 3 จุด และจุดยอดที่มีดีกรี เท่ากับ 3 มีจำนวน n จุด

ผลรวมของดีกรีของจุดยอด $\sum deg(v) = 4(3) + 3n$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดของกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

ดังนั้น $4(3) + 3n = 2(15)$

เพราะฉะนั้น $n = 6$

ดังนั้น จำนวนจุดยอดทั้งหมดของกราฟ G คือ 3 + 6 = 9 จุด

จากทฤษฎีบท 1 "ผลบวกของดีกรีของจุดยอด เท่ากับ สองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ" (หรือผลบวกของดีกรีของจุดยอด = 2m) ซึ่งจะเห็นว่า ผลบวกของดีกรีของจุดยอดจะเป็นจำนวนคู่เสมอ ทำให้เราได้บทแทรกทฤษฎีบท 1 ดังนี้

บทแทรก 1 ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเป็นจำนวนคู่เสมอ

ตัวอย่างที่ 2.7 จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ว่าจะมีกราฟที่มีจุดยอด 4 จุดและดีกรีของจุดยอดคือ 1, 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

วิธีทำ ผลรวมของดีกรีของจุดยอด $\sum deg(v_i) = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$

ขัดแย้งกับบทแทรก 1 ที่ว่า "ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเป็นจำนวนคู่เสมอ"

ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่มีกราฟดังกล่าว

ทฤษฎีบท 2 ทุกกราฟจะมีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ

กรณี 1 กราฟ G ไม่มีจุดยอดคี่

นั่นคือ G มีจำนวนจุดยอดคี่เป็นศูนย์ จึงได้ว่า G มีจำนวนจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่

<u>กรณี 2</u> กราฟ G มีจุดยอดคี่

สมมุติว่ากราฟ G มีจุดยอดคี่ k จุด คือ $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$

และมีจุดยอดคู่ n จุด คือ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$(\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_k)) + (\deg(u_1) + \deg(u_2) + \ldots + \deg(u_n)) = 2q$

เมื่อ q คือ จำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ

ดังนั้น $\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_k) = 2q - ((\deg(u_1) + \deg(u_2) + \ldots + \deg(u_n))$

จาก $2q - (\deg(u_1) + \deg(u_2) + \ldots + \deg(u_n))$ เป็นจำนวนคู่

จะได้ $\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_k)$ เป็นจำนวนคู่

แต่เนื่องจาก $\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_k)$ เป็นจำนวนคี่

เพราะฉะนั้น k จะต้องเป็นจำนวนคู่

จึงจะทำให้ $\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_k)$ เป็นจำนวนคู่

สรุป กราฟ G มีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่ #

ตัวอย่างที่ 2.8 ถ้าในห้องประชุมแห่งหนึ่งมีผู้เข้าร่วมประชุมทั้งหมด 5 คน เป็นไปไม่ได้หรือไม่ว่าผู้เข้าร่วมประชุมแต่ละคนจับมือทักทายผู้เข้าร่วมประชุมคนอื่นเพียง 3 คนเท่านั้น

<u>วิธีทำ</u> แปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟ โดยให้จุดยอดแทนผู้เข้าร่วมประชุม และเส้นเชื่อมแทนการจับมือทักทายของผู้เข้าร่วมประชุม

จะได้ว่า กราฟนี้มีจุดยอด 5 จุด และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรี 3

นั่นคือ กราฟนี้มีจุดยอดคี่เป็นจำนวน 5 จุด ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ 2

ดังนั้น <u>เป็นไปไม่ได้</u>ที่ผู้เข้าร่วมประชุมแต่ละคนจับมือกับคนอื่นเพียง 3 คนเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2.9 จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จังหวัดหนึ่งซึ่งมี 5 อำเภอ โดยมี 3 อำเภอซึ่งแต่ละอำเภอมีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นเพียง 3 สาย มี 1 อำเภอ ที่มีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นเพียง 2 สาย และมี 1 อำเภอมีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นที่เหลือทุกอำเภอ

<u>วิธีทำ</u> แปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟ โดยให้จุดยอดแทนอำเภอ และเส้นเชื่อมแทนถนนที่เชื่อมระหว่างสองอำเภอใดๆ

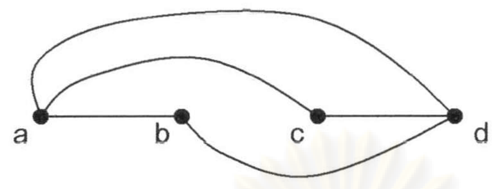
นั่นคือ กราฟนี้มีจุดยอด 5 จุด และมีดีกรี 3 , 3, 3, 2, 4

จะได้ว่า กราฟมีจุดยอดคี่เป็นจำนวน 3 จุด ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 ดังนั้น ข้อความดังกล่าว <u>เป็นไปไม่ได้</u>

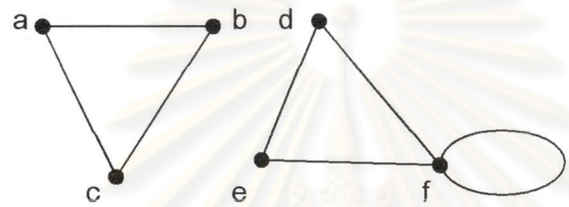
แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ และจำนวนของเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟต่อไปนี้

1.1



1.2



2. ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง คนที่มาถึงงานคนแรกได้จับมือทักทายกับเจ้าภาพ (เจ้าภาพมีคนเดียว) และคนที่มาถึงงานคนที่สองได้จับทักทายกับเจ้าภาพและคนที่มาถึงงานคนแรก คนที่มาถึงงานคนที่สามได้จับมือทักทายกับเจ้าภาพ, คนที่มาถึงงานคนแรก และคนที่มาถึงงานคนที่สองในทำนองเดียวกันกับคนที่มาถึงงานคนต่อ ๆ ไป คือ คนที่มาถึงงานจะได้จับมือทักทายกับเจ้าภาพและคนที่มาถึงงานก่อนหน้าทุกคน ถ้างานเลี้ยงนี้มีคนมาร่วมงาน 8 คน

   2.1 จงแปลงปัญหาข้างต้นเป็นกราฟ

   2.2 จงหาจำนวนการจับมือทักทายกันทั้งหมดในงานเลี้ยงนี้

3. จงพิจารณาว่ามีกราฟ G ที่มีคุณสมบัติ ดังต่อไปนี้หรือไม่ เพราะเหตุใด (ถ้ามีจงวาดกราฟ G และจงหาจำนวนของเส้นเชื่อมของกราฟ)

   3.1 กราฟมีจุดยอด 4 จุด ดีกรีของจุดยอด คือ 2 , 3 , 3 , 5

   3.2 กราฟมีจุดยอด 6 จุด มีเส้นเชื่อม 4 เส้น

   3.3 กราฟมีจุดยอด 4 จุด ดีกรีของจุดยอด คือ 1, 2, 3, 4

   3.4 กราฟมีจุดยอด 5 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 3

   3.5 กราฟมีจุดยอด 13 จุดและมีเส้นเชื่อม 31 เส้นโดยที่จุดยอดที่มีดีกรี 1 จำนวน 3 จุด และ จุดยอดที่มีดีกรี 4 จำนวน 7 จุด

4. จงหาจำนวนจุดยอดของกราฟ G ต่อไปนี้

    4.1 กราฟมีเส้นเชื่อม 40 เส้น และ จุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับ 2

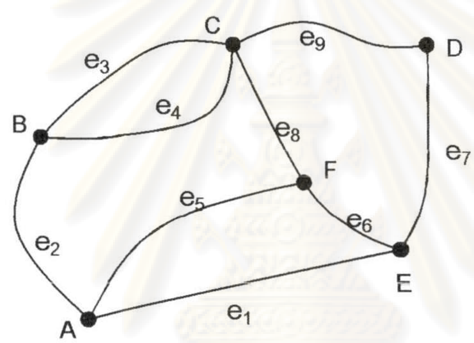
    4.2 กราฟมีเส้นเชื่อม 13 เส้น และจุดยอดที่มีดีกรี 2 จำนวน 4 จุด และจุดยอดที่เหลือมีดีกรี 3

5. กราฟที่มีเส้นเชื่อม 19 เส้น และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีของจุดยอดอย่างน้อย 3 กราฟจะมี จุดยอดได้มากที่สุดเท่าใด

3
แนวเดิน

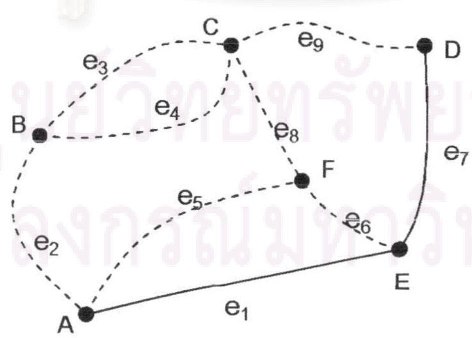
แนวเดิน

สมมติว่าแผนผังของเมืองหนึ่งแทนด้วยกราฟดังรูป โดยให้จุดยอดแทนอำเภอ และ เส้นเชื่อมแทนถนนที่เชื่อมระหว่างอำเภอสองอำเภอ



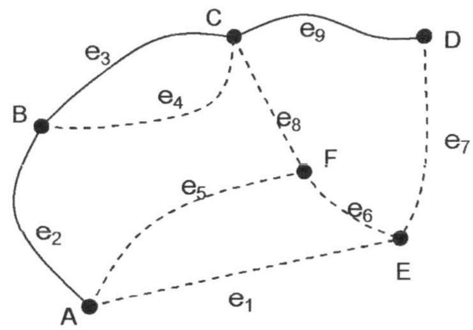
ในการเดินทางจากอำเภอ A ไปยังอำเภอ D มีเส้นทางการเดินทางหลายเส้นทาง เช่น

เส้นทางที่ 1 เดินทางดังรูป



ซึ่งเขียนเส้นทางการเดินทางได้ ดังนี้ A, e_1, E, e_7, D

เส้นทางที่ 2 เดินทางดังรูป



ซึ่งเขียนเส้นทางการเดินทางได้ ดังนี้ A, e_2, B, e_3, C, e_9, D

นอกจากนี้ยังมีเส้นทางในการเดินทางจาก A ไป D อีกหลายแบบ ซึ่งเส้นทางการเดินทางจาก A ไป D เรียกว่า "**แนวเดิน A – D**"

บทนิยาม

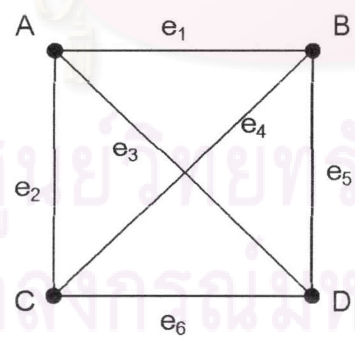
ให้ u และ v เป็นจุดยอดของกราฟ

แนวเดิน u – v (u – v walk) คือ ลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน

$$u = u_0 , e_1 , u_1 , e_2 , u_2, \ldots , u_{n-1} , e_n , u_n = v$$

โดยเริ่มต้นที่จุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v และแต่ละเส้นเชื่อม e_i จะเกิดกับจุดยอด u_{i-1} และ u_i เมื่อ $i \in \{1 , 2 ,\ldots, n \}$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จงหาแนวเดิน จาก A ไป D

<u>วิธีทำ</u> แนวเดิน A – D มีหลายรูปแบบ เช่น

1) A, e_3, D

หรือ 2) A, e_1, B, e_4, C, e_2, A, e_3, D

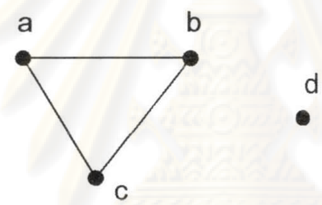
หรือ 3) A, e_2, C, e_4, B, e_1, A, e_2, C, e_6, D เป็นต้น

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 3.1 จะได้ว่า

1. แนวเดิน u – v ในกราฟ สามารถเดินทางซ้ำจุดยอดหรือเส้นเชื่อมได้
2. แนวเดิน u – v ในกราฟอาจจะมีหลายรูปแบบ
3. สำหรับกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน (กราฟเชิงเดียว) สามารถเขียนแนวเดิน u–v ด้วยลำดับของจุดยอดเท่านั้น (ไม่ต้องเขียนเส้นเชื่อม) เช่น A, e_2, C, e_6, D เขียนเป็น A, C, D เพราะว่าเส้นเชื่อมจากจุดยอด 2 จุดใด ๆ มีเส้นเดียว เราจึงทราบว่าแนวเดินนั้นเป็นอย่างไร แต่ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อมขนาน หรือวงวน จะมีเส้นเชื่อมเชื่อมจุดยอดคู่หนึ่งหลายเส้น ซึ่งถ้าเราเขียนแนวเดินเฉพาะจุดยอดเท่านั้น จะทำให้อาจจะเกิดความสับสนว่าแนวเดินนั้นเป็นเส้นเชื่อมเส้นใด

กราฟเชื่อมโยง

ในบางครั้งเราไม่สามารถหาแนวเดินในกราฟได้ ถ้ากราฟไม่ได้เชื่อมต่อกัน เช่น กราฟ G ดังรูป

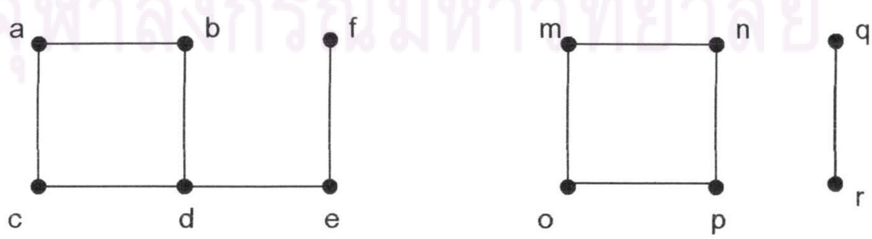


จะเห็นว่า เราไม่สามารถ หาแนวเดิน a–d ได้ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมใดเลยที่เชื่อมกับจุดยอด d

บทนิยาม

กราฟ G เรียกว่า **กราฟเชื่อมโยง (connected graph)** ก็ต่อเมื่อสำหรับจุดยอด u และจุดยอด v ใดๆ ที่เป็นจุดยอดต่างกันในกราฟ G มีแนวเดิน u – v

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ กราฟ G และ H ดังรูป

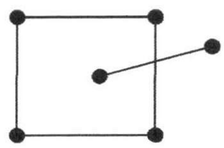


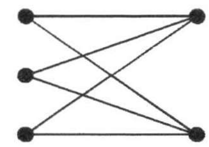
กราฟ G กราฟ H

จะได้ว่า กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง เพราะสามารถหาแนวเดินของจุดยอดสองจุดใดๆ ในกราฟได้แต่กราฟ H ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง เพราะไม่สามารถหาแนวเดิน m – q ได้

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงพิจารณากราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นกราฟเชื่อมโยงหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.1 

1.2 

1.3 G=(V,E) เมื่อ V(G) = {a, b, c, d} และ E(G) = {ab, ac, bc, bd, cd}

1.4 G=(V,E) เมื่อ V(G) = {a, b, c, d, e} และ E(G) = {ab, ac, bc, de}

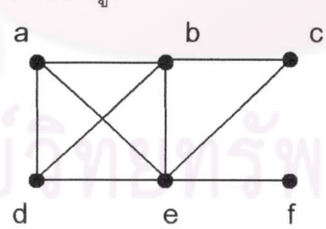
รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร

นอกจาก แนวเดิน u–v ที่เป็นเส้นทางการเดินทางจาก u ไป v เรายังมีเดินทางหรือแนวเดินอย่างอื่นมีลักษณะเฉพาะที่นักเรียนควรรู้จักได้แก่ รอยเดิน วิถี วงจรและวัฏจักร

บทนิยาม

รอยเดิน (trail)**	คือ แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันทั้งหมด
วิถี (path)	คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกันทั้งหมด
วงจร (circuit)	คือ รอยเดินที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน
วัฏจักร (cycle)	คือ วิถี มีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ กราฟ G ดังรูป



จงหา 1) รอยเดิน (trail) จากจุดยอด a ไป f

2) วิถี (path) จากจุดยอด a ไป f

3) วงจร (circuit) ที่เริ่มต้นจากจุดยอด b

4) วัฏจักร (cycle) ที่เริ่มต้นจากจุดยอด b

5) วงจร (circuit) ที่เริ่มต้นจากจุดยอด f

** **ความรู้เพิ่มเติม เป็นสาระการเรียนรู้ที่เพิ่มเติมขึ้นมา เมื่อเปรียบเทียบจากสาระการเรียนรู้ที่ สสวท. กำหนด จึงไม่เน้นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในส่วนนี้ ซึ่งครูผู้สอนอาจจะนำไปสอนหรือไม่ก็ได้**

<u>วิธีทำ</u> 1) รอยเดิน a – f คือ a , e , b , d , e , f
(แนวเดินที่เส้นเชื่อมต่างกัน แต่ จุดยอดซ้ำกันได้)

2) วิถี a – f คือ a , b , d , e , f (แนวเดินที่จุดยอดต่างกัน)

3) วงจรที่เริ่มต้นจากจุดยอด b คือ b , c , e , d , a , e , b
(รอยเดินที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน นั่นคือ จุดยอด b)

4) วัฏจักร ที่เริ่มต้นจากจุดยอด b คือ b , c , e , d , b
(วิถี ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียว)

5) ไม่มีวงจรที่เริ่มต้นจากจุดยอด f

ข้อสังเกต 1) ในทำนองเดียวกับแนวเดิน จะได้ว่ารอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร อาจจะมีได้หลายแบบที่ต่างกัน

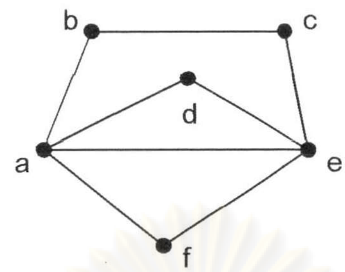
2) จะเห็นว่า วิถี คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน ซึ่งทำให้แนวเดินนั้นเส้นเชื่อมจะต่างกันด้วย ดังนั้น แนวเดินแบบวิถี นับว่าเป็นรอยเดินด้วย

3) จะเห็นว่า วัฏจักร คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน แต่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน ซึ่งทำให้แนวเดินนั้นเส้นเชื่อมจะต่างกันด้วย ดังนั้น แนวเดินแบบวัฏจักรนับว่าเป็นวงจรด้วย

4) จะเห็นว่า วัฏจักร คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน ยกเว้น จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่เป็นจุดเดียวกัน

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



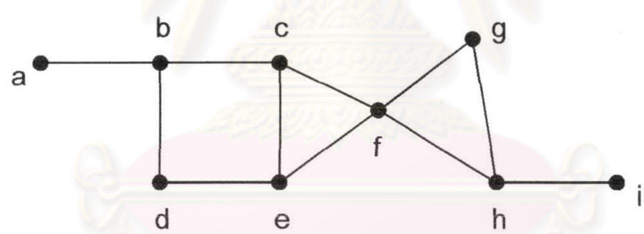
จงหา 1.1 แนวเดิน , รอยเดินจากจุดยอด a ไปยังจุดยอด c

1.2 วัฏจักร ที่เริ่มต้นที่จุดยอด f

1.3 วิถี a – f ที่ผ่านจุดยอดทุกจุด

1.4 วงจร ที่เริ่มต้นที่จุดยอด d ที่ผ่านจุดยอดทุกจุด

2. กำหนดให้กราฟ H ดังรูป



2.1 อยากทราบว่ามีวงจรที่เริ่มต้นที่จุดยอด a หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

2.2 อยากทราบว่ามีวงจรที่เริ่มต้นที่จุดยอด f หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

2.3 อยากทราบว่ามีวัฏจักรที่เริ่มต้นที่จุดยอด b หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

2.4 อยากทราบว่ามีวัฏจักรที่เริ่มต้นที่จุดยอด b และผ่านจุดยอด h หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

4

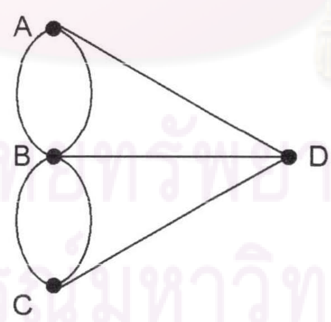
กราฟออยเลอร์

กราฟออยเลอร์

จากบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก (ดังรูป 5-1) ที่มีใจความว่า “เป็นไปได้หรือไม่ที่เราจะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่ง โดยข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียงครั้งเดียวเท่านั้น แล้วกลับมายืนที่จุดเดิม”

รูป 5-1

เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ได้ศึกษาและหาคำตอบของปัญหานี้ โดยออยเลอร์ได้แปลงภาพเมืองเคอนิกส์เบิร์กเป็นกราฟ โดยใช้จุดยอดแทนเกาะทั้งสองและตัวเมือง และเส้นเชื่อมแทนสะพาน ดังรูป



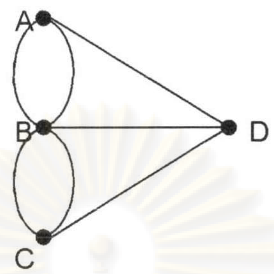
ดังนั้น ทำให้เราสามารถแปลง ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ให้กลายเป็นปัญหาเกี่ยวกับแนวเดิน คือ การหา ***“แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันโดยมีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน และแนวเดินจะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ”***

จะเห็นว่า แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันโดยมีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน นั่นคือแนวเดินแบบวงจร (ซึ่งนักเรียนได้เรียนผ่านมาแล้วในบทที่ 3 หมายความว่าปัญหานี้ต่างจากวงจรทั่วไปก็คือ แนวเดินนี้เป็น ***“วงจรที่ต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ”*** เราเรียกวงจรลักษณะนี้ว่า ***“วงจรออยเลอร์”***

บทนิยาม

วงจรออยเลอร์ (Euler circuit) คือ วงจรที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ และเรียกกราฟที่มีวงจรออยเลอร์ เรียกว่า กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph)

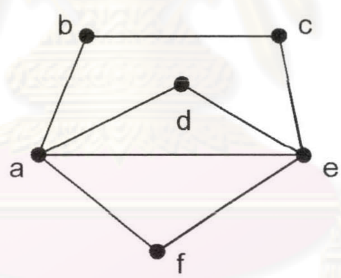
ตัวอย่างที่ 4.1 จากปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก เราสามารถแปลงเป็นกราฟได้ดังรูป



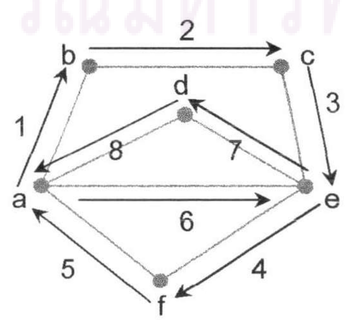
จะได้ว่า กราฟนี้ไม่มีวงจรออยเลอร์ ดังนั้น กราฟนี้จึงไม่เป็นกราฟออยเลอร์

ดังนั้น ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์กนั้น เราได้คำตอบว่า “เป็นไปไม่ได้ที่จะเดินข้ามสะพานตามเงื่อนไขที่กำหนด”

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จะได้ว่า กราฟ G มีวงจรออยเลอร์ คือ แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันโดยมีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน และแนวเดินจะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ หรือ วงจรที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้น ได้แก่ a, b, c, e, f, a, e, d, a (ดังรูป 5-3)



รูป 5-3

ข้อสังเกต

1. วงจรออยเลอร์เป็นแนวเดินที่เส้นเชื่อมต่างกันทั้งหมด (เส้นเชื่อมไม่ซ้ำ) แต่สามารถที่จะมีจุดยอดซ้ำได้

2. วงจรออยเลอร์เป็นแนวเดินที่ผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมด ดังนั้น วงจรออยเลอร์จะผ่านจุดยอดทุกจุดด้วย

3. แนวเดินแบบวงจรออยเลอร์ในกราฟเดียวกันอาจจะมีได้หลายแบบ เช่น ตัวอย่างที่ 4.2 เราสามารถหาวงจรออยเลอร์รูปแบบอื่นได้คือ a, f, e, d, a, b, c, e, a เป็นต้น

4. วงจรออยเลอร์ สามารถเริ่มต้นที่จุดยอดใดก็ได้ในกราฟ

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์

จากนิยามของกราฟออยเลอร์ จะได้ว่ากราฟ G เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ขึ้นอยู่กับว่ากราฟนั้นมีวงจรออยเลอร์หรือไม่ ดังนั้น เราจะต้องหาวงจรออยเลอร์ในกราฟ ซึ่งเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก

จากการสังเกต ลักษณะที่สำคัญของวงจรออยเลอร์ พบว่า

1. วงจรออยเลอร์เป็นแนวเดินที่มีจุดยอดทั้งหมด นั่นคือ แนวเดินของวงจรออยเลอร์จะต้องผ่านจุดยอดทุกจุด

2. วงจรออยเลอร์เป็นแนวเดินที่มีเส้นเชื่อมที่ต่างกัน นั่นคือ แนวเดินของวงจรออยเลอร์จะไม่ใช้เส้นเชื่อมซ้ำกัน

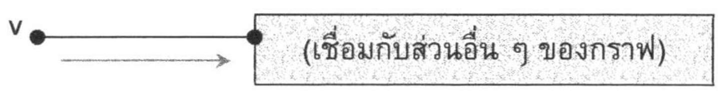
3. วงจรออยเลอร์มีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน นั่นคือ แนวเดินของวงจรจะต้องมาสิ้นสุดที่จุดเดิม

4. วงจรออยเลอร์เป็นแนวเดินที่มีเส้นเชื่อมทั้งหมด นั่นคือ แนวเดินของวงจรออยเลอร์จะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้น

จากลักษณะข้อที่ 1 ของวงจรออยเลอร์ จึงได้ว่า **กราฟ G มีวงจรออยเลอร์ได้จะต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง** (เพราะถ้ากราฟ G ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จะไม่สามารถเดินทางจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งได้)

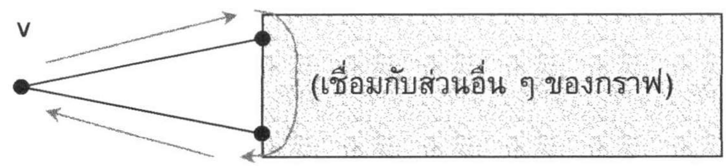
และเมื่อเราสังเกตจุดยอดจุดหนึ่งบนกราฟ G คือ จุดยอด v โดยที่จุดยอด v เป็นจุดเริ่มต้นของแนวเดิน

<u>กรณีที่ 1</u> deg(v) = 1 แสดงว่ามีเส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v เพียงเส้นเดียว ดังรูป



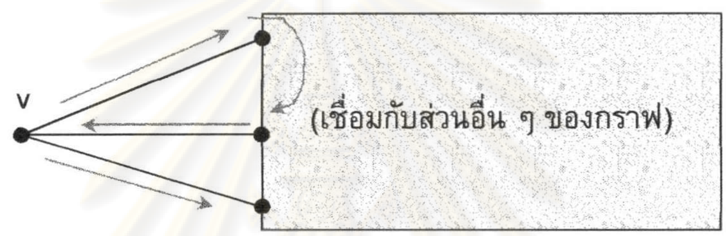
จะเห็นว่าเมื่อเดินทางออกจากจุดยอด v ไปแล้วจะไม่สามารถกลับมาที่จุดเดิมได้ (ขัดแย้งกับลักษณะของวงจรออยเลอร์ข้อ 3) ดังนั้น กราฟไม่มีวงจรออยเลอร์

<u>กรณีที่ 2</u> deg(v) = 2 แสดงว่ามีเส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v จำนวน 2 เส้น ดังรูป



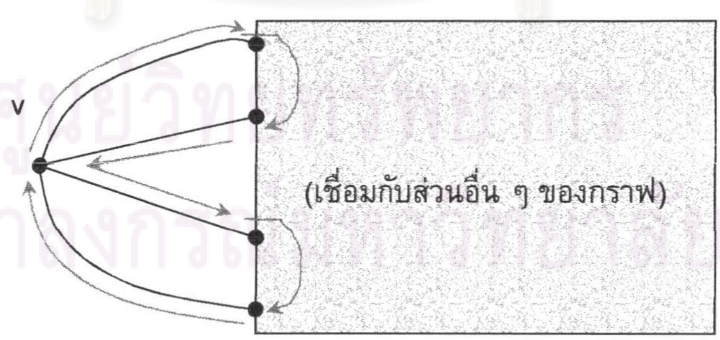
จะเห็นว่าเมื่อเดินทางออกจากจุดยอด v ไปแล้วอาจจะสามารถกลับมาที่จุดเดิมได้ ดังนั้น กราฟสามารถมีวงจรออยเลอร์ได้

<u>กรณีที่ 3</u> deg(v) = 3 แสดงว่ามีเส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v จำนวน 3 เส้น ดังรูป



จะเห็นว่าเมื่อเดินทางออกจากจุดยอด v ไปแล้วจะกลับมาที่จุดเดิมได้ (ในรอบที่ 1) และแต่เนื่องจากวงจรออยเลอร์ต้องเดินผ่านทุกเส้น ดังนั้นจะต้องเดินออกจากจุดยอด v ไปอีกแล้วไม่สามารถกลับมาที่จุดเดิมได้ (ขัดแย้งกับลักษณะของวงจรออยเลอร์ข้อ 3) ดังนั้น กราฟ ไม่มีวงจรออยเลอร์

<u>กรณีที่ 4</u> deg(v) = 4 แสดงว่ามีเส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v จำนวน 4 เส้น ดังรูป



จะเห็นว่าเมื่อเดินทางออกจากจุดยอด v ไปแล้วอาจจะสามารถกลับมาที่จุดเดิมได้ ดังนั้น กราฟ G สามารถมีวงจรออยเลอร์ได้

จากการสังเกตจึงพบว่า ถ้า deg(v) (ดีกรีของจุดยอด) เท่ากับจำนวนคี่ กราฟ G จะไม่มีวงจรออยเลอร์ หมายความกราฟ G ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

แต่ถ้า deg(v) เท่ากับจำนวนคู่ (นั่นคือ จุดยอดของกราฟเป็นจุดยอดคู่) กราฟ G อาจจะมีวงจรออยเลอร์ ดังนั้นกราฟ G มีโอกาสเป็นกราฟออยเลอร์ได้

ถ้าเราสังเกตต่อไปที่จุดยอดอื่นที่ไม่ใช่จุดเริ่มต้น (ให้นักเรียนลองคิดต่อเป็นการบ้าน) ก็จะมีลักษณะเดียวกับจุดยอด v นั่นคือ จุดยอด u เป็นจุดยอดคู่ทำให้กราฟมีโอกาสเป็นกราฟออยเลอร์ได้ ดังนั้น เราจึงได้ว่า ถ้าดีกรีของจุดยอดทุกจุดมีค่าเท่ากับจำนวนคู่ หรือจุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจุดยอดคู่ แล้วกราฟ G เป็นกราฟออยเลอร์

ทฤษฎีบท 3

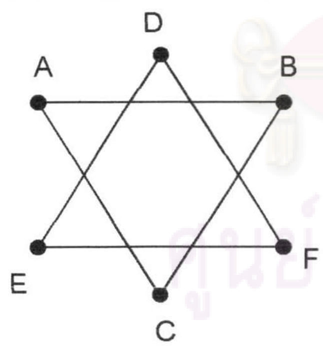
กำหนดให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง

G จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ จุดยอดทุกจุดของ G เป็นจุดยอดคู่

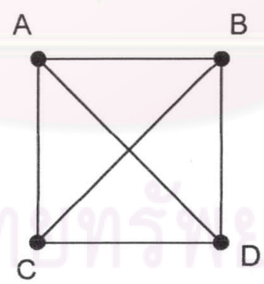
จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า G เป็นกราฟออยเลอร์ก็ต่อเมื่อ G มีคุณสมบัติ 2 ประการ ดังนี้

1. G ต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง
2. จุดยอดทุกจุดของ G จะต้องเป็นจุดยอดคู่ (ดีกรีของจุดยอดมีค่าเท่ากับจำนวนคู่)

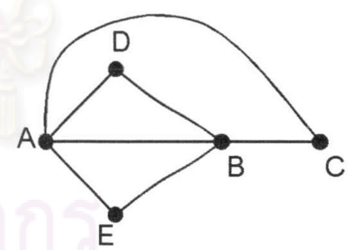
ตัวอย่างที่ 4.3 จงพิจารณากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด



G_1



G_2



G_3

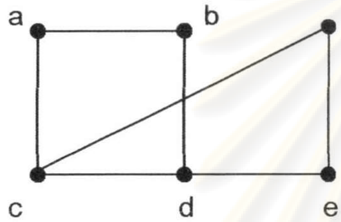
วิธีทำ

กราฟ G_1 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ G_1 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง (เนื่องจากไม่สามารถเดินทางจากจุดยอด A ไปยังจุดยอด D ได้)

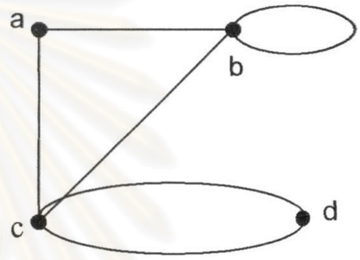
กราฟ G_2 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ deg(A) = 3 (จุดยอด A เป็นจุดยอดคี่) จากทฤษฎีบท 3 จึงได้ว่ากราฟ G_2 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

กราฟ G_3 เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะกราฟ G_3 เป็นกราฟเชื่อมโยง และ deg(A) = 4, deg(B) = 4, deg(C) = 2, deg(D) = 2 และ deg(E) = 2 ดังนั้น จุดยอดของกราฟ G_3 ทุกจุดเป็นจุดยอดคู่ จากทฤษฎีบท 3 จึงได้ว่ากราฟ G_3 เป็นกราฟออยเลอร์ ซึ่งได้วงจรออยเลอร์ คือ A, B, C, A, D, B, E, A

ตัวอย่างที่ 4.4 ปัญหาเกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ เป็นปัญหาลักษณะเดียวกับเกมการใช้ดินสอลากเส้นไปตามรูป โดยไม่ยกดินสอ และลากผ่านเส้นเชื่อมของรูปเพียงครั้งเดียว ซึ่งผู้ลากจะเริ่ม ณ จุดใดจุดหนึ่งของรูปก็ได้ แต่ต้องมาสิ้นสุดที่จุดเริ่มต้น ถ้ากำหนดรูปมาให้ 2 รูป คือ รูป (ก) และ (ข) อยากทราบว่า รูปใดบ้างที่ลากเส้นตามเงื่อนไขที่กล่าวมาข้างต้น



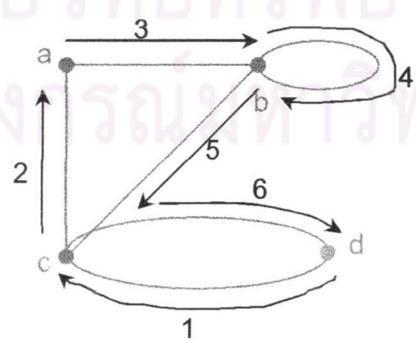
รูป (ก)



รูป (ข)

<u>วิธีทำ</u> รูป (ก) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ deg(c)=3 (นั่นคือจุดยอดc เป็นจุดยอดคี่) ดังนั้น จึงไม่สามารถลากเส้นตามเงื่อนไขได้

รูป (ข) เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ deg(a)=2, deg(b)=4, deg(c)=4 และ deg(d)=2 (นั่นคือจุดยอดทุกจุดของกราฟเป็นจุดยอดคู่) ดังนั้น จึงสามารถลากเส้นตามเงื่อนไขได้ ดังนี้ d, c, b, b, a, c, b ดังรูป



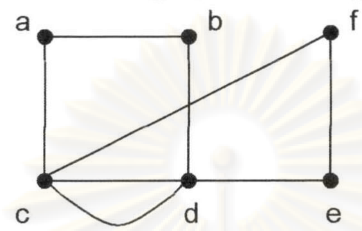
ตัวอย่างที่ 4.5 จากตัวอย่างที่ 4.4 ถ้าต้องการให้รูป (ก) เป็นกราฟออยเลอร์จะต้องทำอย่างไร

วิธีทำ พิจารณาดีกรีของจุดยอด ดังนี้

deg(a) = 2 deg(b) = 2 deg(c) = 3

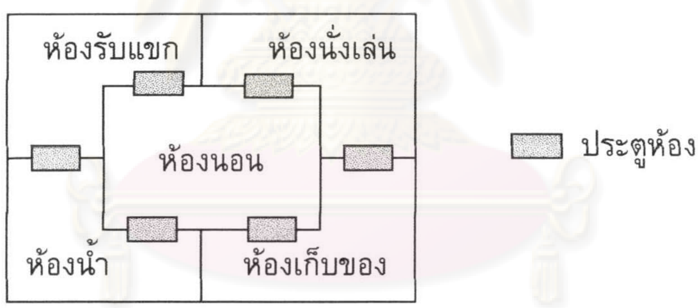
deg(d) = 3 deg(e) = 2 deg(f) = 2

ถ้าเราต้องการให้ (ก) เป็นกราฟออยเลอร์ จุดยอดทุกจุดของกราฟต้องเป็นจุดยอดคู่ (หรือมีดีกรีเท่ากับจำนวนคู่) ดังนั้น เราจะต้องทำให้ดีกรีของจุดยอด d และจุดยอด c เป็นดีกรีคู่ โดยการเพิ่มเส้นเชื่อม cd เข้าไปในกราฟทำให้ deg(c) = 4 และ deg(d) = 4 ดังรูป



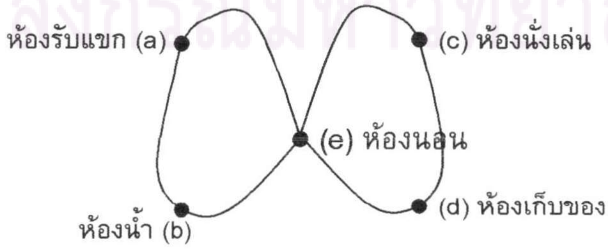
กราฟใหม่ที่ได้จะมีจุดยอดเป็นจุดยอดคู่ทั้งหมด ดังนั้นกราฟที่ได้เป็นกราฟออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 4.6 จากแผนผังของบ้าน อยากทราบว่านาย A จะสามารถเดินระหว่างห้องแต่ละห้องภายในบ้านโดยผ่านประตูทุกประตู แต่ละประตูเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาที่เดิมได้หรือไม่



วิธีทำ แปลงปัญหาให้เป็นกราฟ

โดยที่ให้จุดยอดแทนห้อง และเส้นเชื่อมแทนทางเดิน (ประตู) ระหว่างห้อง



จะได้ว่า deg(a)=2, deg(b)=2, deg(c)=2, deg(d)=2 และ deg(e)=4

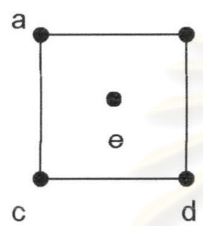
นั่นคือ จุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจุดยอดคู่

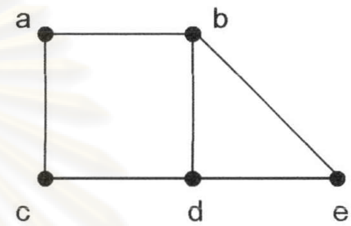
ดังนั้น กราฟที่ได้เป็นกราฟออยเลอร์ และหาวงจรได้ดังนี้ a, b, e, c, d, e, a

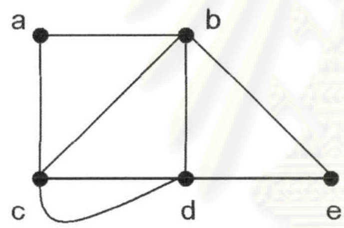
จะได้ว่า นาย A สามารถเดินทางได้ดังนี้ ห้องรับแขก, ห้องน้ำ, ห้องนอน, ห้องนั่งเล่น, ห้องเก็บของ, ห้องนอน, ห้องรับแขก

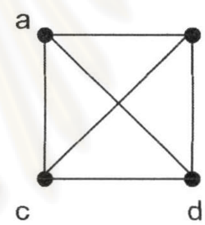
แบบฝึกหัด 4.1

1. จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าเป็นกราฟออยเลอร์จงหาวงจรออยเลอร์

1.1


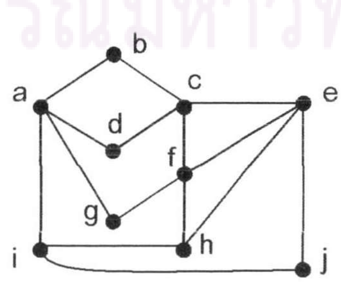
1.2


1.3


1.4


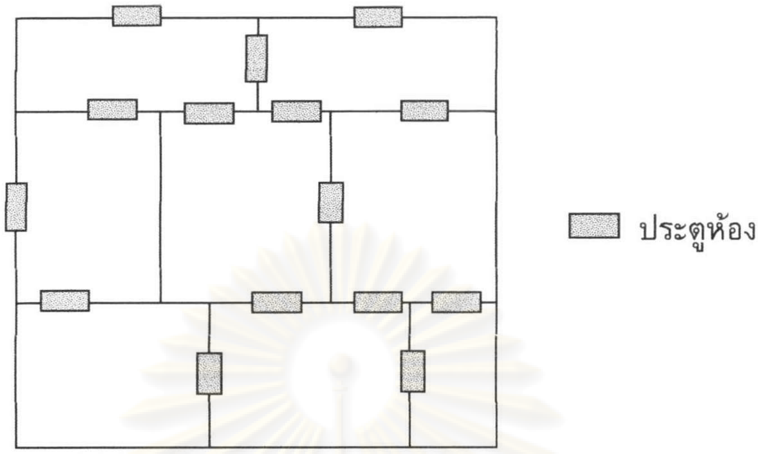
2. จากข้อที่ 1 กราฟในข้อใดที่ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ ให้นักเรียนทำกราฟดังกล่าวให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยลากเส้นเชื่อมเพิ่ม

3. พนักงานส่งหนังสือพิมพ์คนหนึ่งต้องเดินทางส่งหนังสือพิมพ์ตามแผนของหมู่บ้าน ซึ่งเขียนเป็นกราฟได้ดังรูป โดยที่จุดยอดแทนบ้าน และเส้นเชื่อมแทนถนน กำหนดให้ จุดยอด a คือ สำนักพิมพ์ที่พนักงานส่งหนังสือพิมพ์จะต้องไปรับหนังสือพิมพ์



อยากทราบว่า พนักงานส่งหนังสือพิมพ์จะเดินทางไปส่งหนังสือพิมพ์ทุกบ้านโดยเดินทางผ่านถนนทุกสาย และผ่านถนนแต่ละสายเพียงครั้งเดียวได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

4. จากแปลนบ้านที่แสดงดังรูป จงให้เหตุผลว่าเจ้าของบ้านจะพาแขกเข้าชมภายบ้าน โดยที่เริ่มต้นที่ภายนอกบ้าน อยากทราบว่า เจ้าของบ้านจะพาแขกเข้าชมบ้าน โดยผ่านประตูทุกประตู เพียงประตูละครั้งเดียว แล้วกลับออกมายืนที่จุดเดิมได้หรือไม่



คิดเล่นๆ จากโจทย์ข้อ 4 ถ้าเราเปลี่ยนเงื่อนไขในการเดินเจ้าของบ้านจะแขกชมบ้านได้หรือไม่

1. เจ้าของบ้านจะพาแขกเข้าชมบ้าน โดยผ่านประตูทุกประตู เพียงประตูละครั้งเดียว (ไม่จำเป็นต้องกลับออกมายืนที่จุดเดิม)

2. เจ้าของบ้านจะพาแขกเข้าชมบ้าน โดยผ่านห้องทุกห้อง เพียงห้องละครั้งเดียว แล้วกลับออกมายืนที่จุดเดิมได้หรือไม่

รอยเดินออยเลอร์ (ความรู้เพิ่มเติม)**

สำหรับวงจรออยเลอร์ นักเรียนจะเห็นว่าเป็นแนวเดินที่มีเงื่อนไขในการเดินทางมาก คือ เราจะต้องเดินผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้น เส้นละ 1 ครั้งเท่านั้น และจะต้องกลับมายืนที่จุดเดิม ดังนั้นถ้าเราลดเงื่อนไขบางประการลง คือ ไม่ต้องกลับมายืนที่จุดเดิม เราเรียกแนวเดินลักษณะนี้ว่า "**รอยเดินออยเลอร์**"

บทนิยาม

รอยเดินออยเลอร์ (Euler trail) คือแนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันหมด และผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ

(หรือกล่าวว่า รอยเดินออยเลอร์ คือ รอยเดินที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟนั่นเอง)

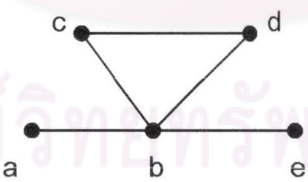
ซึ่งกราฟที่มีวงจรออยเลอร์นั้น จะต้องมีจุดยอดทุกจุดเป็นจุดยอดคู่ แต่สำหรับกราฟที่มีรอยเดินออยเลอร์ สามารถมีจุดยอดคี่ได้ 2 จุด (จุดยอดที่เหลือต้องเป็นจุดยอดคู่)

ทฤษฎีบท

กำหนดให้ กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง

กราฟ G มีรอยเดินออยเลอร์ (แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์) ก็ต่อเมื่อ กราฟ G มีจุดยอดคี่จำนวน 2 จุด

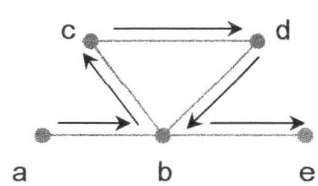
ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดให้กราฟ ดังรูป



จะได้ว่า กราฟ G ไม่มีวงจรออยเลอร์ เพราะจุดยอด a เป็นจุดยอดคี่

แต่เนื่องจาก กราฟ G มีจุดยอดคี่เพียง 2 จุดคือ จุดยอด a และจุดยอด e

ดังนั้นกราฟ G มีรอยเดินออยเลอร์ คือ a, b, c, d, b, e



** **ความรู้เพิ่มเติม เป็นสาระการเรียนรู้ที่เพิ่มเติมขึ้นมา เมื่อเปรียบเทียบจากสาระการเรียนรู้ที่ สสวท. กำหนด จึงไม่เน้นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในส่วนนี้ ซึ่งครูผู้สอนอาจจะนำไปสอนหรือไม่ก็ได้**

กราฟแฮมิลตัน (ความรู้เพิ่มเติม)[**]

นอกจากปัญหาวงจรออยเลอร์แล้ว ยังมีปัญหาลักษณะที่คล้ายกับวงจรออยเลอร์ นั่นคือ "แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกัน โดยมีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน และแนวนี้เดินจะต้องผ่านจุดยอดทุกจุด จุดละหนึ่งครั้ง" หรือ "วงจรที่ผ่านจุดยอดทุกจุด จุดละหนึ่งครั้ง" นั่นเอง

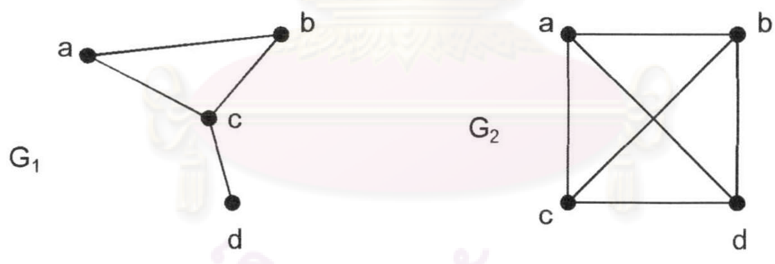
ปัญหาดังกล่าวถูกตั้งขึ้นโดย นักคณิตศาสตร์ชาวไอริช ชื่อ เซอร์วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน (*Sir William Rowan Hamilton*) ซึ่งปัญหานี้มีความคล้ายกับวงจรออยเลอร์ แตกต่างกันเพียง วงจรออยเลอร์จะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ เส้นละหนึ่งครั้ง แต่ปัญหานี้จะผ่านจุดยอดทุกจุดของกราฟ จุดละหนึ่งครั้ง เราเรียกปัญหานี้ว่า "**วงจรแฮมิลตัน**" และเรียกกราฟที่มีวงจรแฮมิลตันว่า "**กราฟแฮมิลตัน**"

บทนิยาม

วงจรแฮมิลตัน (Hamilton circuit) คือ วงจรที่มีจุดยอดต่างกัน และผ่านจุดยอดทุกจุดของกราฟ

เรียก กราฟที่มีวงจรแฮมิลตัน **ว่า กราฟแฮมิลตัน** (Hamilton graph)

ตัวอย่างที่ 4.8 กำหนดให้กราฟ G_1 และกราฟ G_2 ดังรูป



จะเห็นว่า กราฟ G_1 ไม่มีวงจรแฮมิลตัน ดังนั้น G_1 ไม่เป็นกราฟแฮมิลตัน แต่ กราฟ G_2 มีวงจรแฮมิลตัน คือ a, c, d, b, a ดังนั้น G_2 เป็นกราฟแฮมิลตัน (วงจรแฮมิลตัน ไม่จำเป็นที่จะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้น)

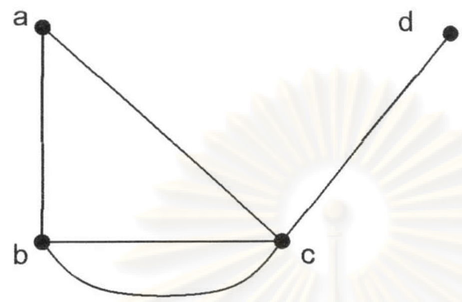
แม้ว่า ปัญหาวงจรแฮมิลตันนั้น จะมีลักษณะคล้ายกับปัญหาของวงจรออยเลอร์ แต่ปัญหาของวงจรแฮมิลตันนั้นยากกว่ามาก ซึ่งในปัจจุบันนี้ยังไม่มีใครทราบถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของกราฟ ที่ทำให้กราฟมีวงจรแฮมิลตัน เลย

** **ความรู้เพิ่มเติม เป็นสาระการเรียนรู้ที่เพิ่มเติมขึ้นมา เมื่อเปรียบเทียบจากสาระการเรียนรู้ที่ สสวท. กำหนด จึงไม่เน้นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในส่วนนี้ ซึ่งครูผู้สอนอาจจะนำไปสอนหรือไม่ก็ได้**

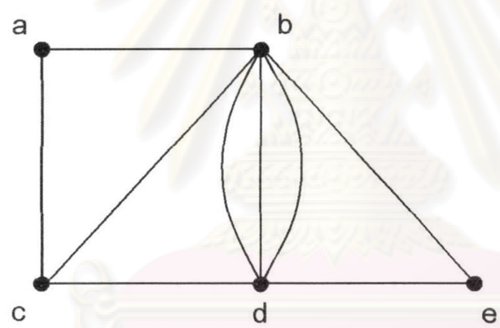
แบบฝึกหัดเสริม 4

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า
    (ก) กราฟ G มีรอยเดินออยเลอร์หรือไม่
    (ข) กราฟ G มีวงจรแฮมิลตันหรือไม่ (กราฟ G เป็นกราฟแฮมิลตันหรือไม่)

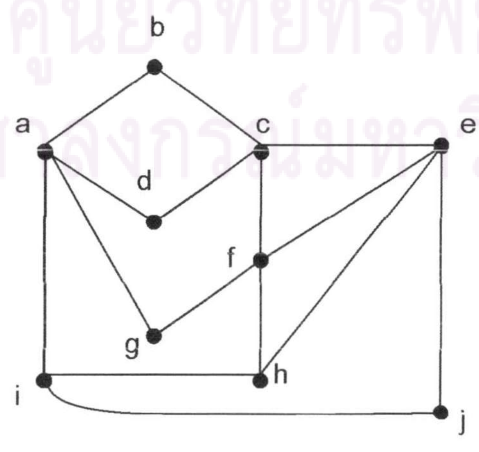
1.1



1.2



1.3



5

การประยุกต์กราฟ

กราฟถ่วงน้ำหนัก

กราฟที่เราเรียนผ่านมานั้น เส้นเชื่อมของกราฟแต่ละเส้นถือว่ามีความสำคัญเท่ากัน ไม่ว่าจะเป็นเส้นตรง เส้นโค้ง หรือยาวเท่าใด ก็จะนับเป็นเส้นเชื่อมหนึ่งเส้น แต่ในความเป็นจริงเส้นทาง (เส้นเชื่อม) แต่ละเส้นมีความสำคัญ (หรือน้ำหนัก) ไม่เท่ากัน

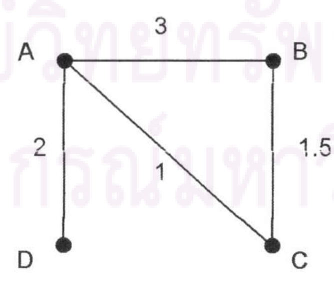
ดังนั้นจึงมีการกำหนดจำนวนไว้บนเส้นเชื่อม เรียกว่า "**ค่าน้ำหนัก**" และเรียกกราฟที่มีค่าน้ำหนักว่า "**กราฟถ่วงน้ำหนัก**"

บทนิยาม

ค่าน้ำหนัก (weight) ของเส้นเชื่อม e ในกราฟ คือ จำนวนที่ไม่เป็นลบที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อม e

กราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph) คือ กราฟที่เส้นเชื่อมทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก

ตัวอย่างที่ 5.1 กำหนดให้ กราฟ G ดังรูป

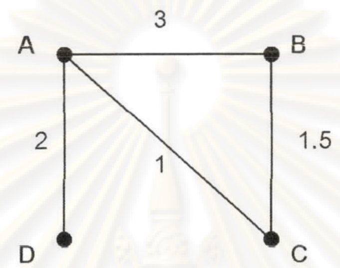


จะได้ว่า เส้นเชื่อมของกราฟ G มีค่าน้ำหนัก ดังนั้น กราฟ G เป็นกราฟถ่วงน้ำหนัก

วิถีที่สั้นที่สุด

ในการศึกษากราฟถ่วงน้ำหนักนี้ เรามักจะศึกษาแนวเดินที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักน้อยที่สุด (เพื่อนำไปใช้ในการวางแผนหรือแก้ปัญหาต่างๆ ที่ช่วยให้ประหยัดเวลา งบประมาณ หรือสิ่งอื่นๆ ได้) ดังนั้นแนวเดินของเราจะมีลักษณะที่มีเส้นเชื่อมและจุดยอดต่างกัน (เพราะค่าน้ำหนักจะน้อยที่สุด) นั่นคือ ลักษณะของแนวเดินในลักษณะของ **"วิถี"**

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาวิถี B-D ทั้งหมด ทุกแบบ พร้อมทั้งหาผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมในวิถี



<u>แบบที่ 1</u> วิถี B-D คือ B, A, D

ผลรวมของค่าน้ำหนักเท่ากับ 3 + 2 = 5

<u>แบบที่ 2</u> วิถี B-D คือ B, C, A, D

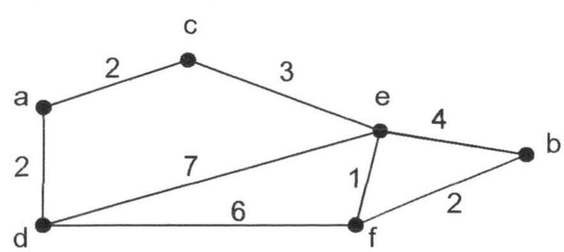
ผลรวมของค่าน้ำหนักเท่ากับ 1.5 + 1 + 2 = 4.5

ดังนั้น วิถีที่มีผลรวมค่าน้ำหนักน้อยที่สุด คือ B, C, A, D เรียกว่าที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักน้อยที่สุดว่า "**วิถีที่สั้นที่สุด**"

บทนิยาม

วิถีที่สั้นที่สุด (shortest path) จากจุดยอด A ถึงจุดยอด Z ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือ วิถี A-Z ที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้นในวิถีน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 5.3 กำหนดให้กราฟแทนแผนผังเมือง ดังรูป โดยที่จุดยอดแทนจังหวัด และเส้นเชื่อมแทนถนน ค่านำหนักของเส้นเชื่อมคือเวลาที่ใช้ในการเดินทาง (ชั่วโมง) จงหาเวลาที่น้อยที่สุดในการเดินทางจากจังหวัด a ไปยังจังหวัด b



<u>เส้นทางที่ 1</u> a, c ,e, b

ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+3+4 = 9

<u>เส้นทางที่ 2</u> a, c, e, f, b

ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+3+1+2 = 8

<u>เส้นทางที่ 3</u> a, c, e, d, f, b

ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+3+7+6+2 = 20

<u>เส้นทางที่ 4</u> a, d, e, b

ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+7+4 = 13

<u>เส้นทางที่ 5</u> a, d, e, f, b

ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+7+1+2 = 12

<u>เส้นทางที่ 6</u> a, d, f, b

ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+6+2 = 10

<u>เส้นทางที่ 7</u> a, d, f, e, b

ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+6+1+4 = 13

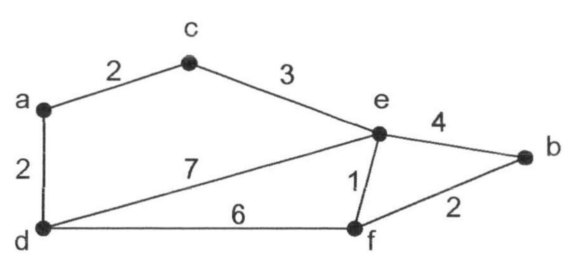
ดังนั้น เส้นทางที่ 2 คือ a, c, e, f, b มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ 2+3+1+2 = 8 ซึ่งน้อยที่สุด

จะได้ว่า เราควรเดินทางจากจังหวัด a ผ่านจังหวัด c, e, f และ b ตามลำดับ ซึ่งจะใช้เวลาทั้งสิ้น 8 ชั่วโมง

สำหรับเรื่องวิถีที่สั้นที่สุดนั้น ถ้าเราใช้วิธีพิจารณาวิถีที่เป็นไปได้ทั้งหมด นับว่าเป็นวิธีที่ยากมาก และมีโอกาสผิดพลาดสูง ดังนั้น นักคณิตศาสตร์ได้หาวิธีการในการหาวิถีที่สั้นที่สุดหลายวิธีด้วยกัน ซึ่งวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด คือ ขั้นตอนวิธีของดิสค์ตรา (Dijktra's algorithm) แต่จะไม่ขอกล่าวถึงในระดับชั้นนี้

ดังนั้น ในเรื่องการหาวิถีที่สั้นที่สุดนั้น เราจะเรียนกราฟที่มีลักษณะง่าย ๆ ไม่ซับซ้อนเกินไป โดยเราจะใช้วิธีการพิจารณาวิถีที่มีโอกาสเป็นวิถีที่สั้นที่สุด ซึ่งไม่จำเป็นต้องหาวิถีทั้งหมดก็ได้

จากตัวอย่างที่ 5.3 เราจะสังเกตเห็นว่าวิถีจาก a ไป b พิจารณาได้ 2 ทางคือ วิถีที่ผ่าน c กับผ่าน d



<u>กรณีที่ 1</u> พิจารณา **วิถี a-b ที่ผ่าน** c

วิถี a-b ที่ผ่าน c จะต้องผ่าน e ดังนั้น พิจารณาวิถีจาก e ไป b ซึ่งมีทางเดิน 3 ทาง คือ ทางเดินจาก **e ไป b** ซึ่งมีค่าน้ำหนัก 4 (สิ้นสุดการเดินทาง); ทางเดิน **e ไป d** ซึ่งมีค่าน้ำหนักเท่ากับ 7 เราจึงไม่ต้องสนใจเพราะมีค่าน้ำหนักเกิน 4 และทางเดินจาก **e ไป f** ซึ่งมีค่าน้ำหนักเท่ากับ 1 จึงพิจารณาต่อไปว่ามีทางเดิน 2 ทาง แต่ทางเดิน e, f, d เราไม่สนใจ เพราะค่าน้ำหนักรวมเกิน 4 จากนั้นพิจารณาทางเดิน e, f, b ได้ค่าน้ำหนักรวมเท่ากับ 3 ดังนั้น วิถีจาก e ไป b ที่สั้นที่สุดคือ e, f, b เพราะฉะนั้น วิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป b ซึ่งผ่าน c คือ a, c, b, f, e ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวมเท่ากับ 8

<u>กรณีที่ 2</u> พิจารณา **วิถี a-b ที่ผ่าน** d

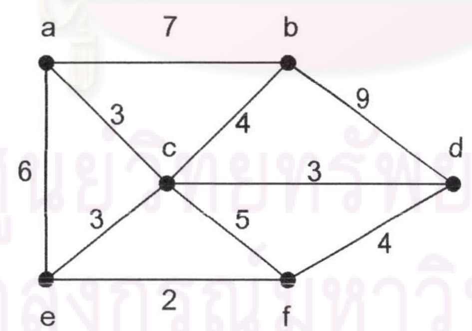
วิถี a-b ที่ผ่าน d ซึ่งมีทางเดิน 2 ทาง นั่นคือ ทางเดินจาก **d ไป e** ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวม (a, d, e) เท่ากับ 9 ดังนั้นไม่ต้องสนใจเพราะมีค่าน้ำหนักเกิน 8 (มากกว่ากรณีที่ 1) และทางเดินจาก **d ไป f** ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวม (a, d, f) เท่ากับ 8 ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวมเท่ากับกรณีที่ 1 แต่ยังไม่สิ้นสุดการเดินทาง ดังนั้น ค่าน้ำหนักรวมจึงมีค่ามากกว่า 8 แน่นอน จึงได้ว่า วิถี a-b ที่ผ่าน d จะมีค่าน้ำหนักรวมมากกว่า วิถี a-b ที่ผ่าน c

ดังนั้น วิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป b คือ a, c, e, f, b ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวมเท่ากับ 8

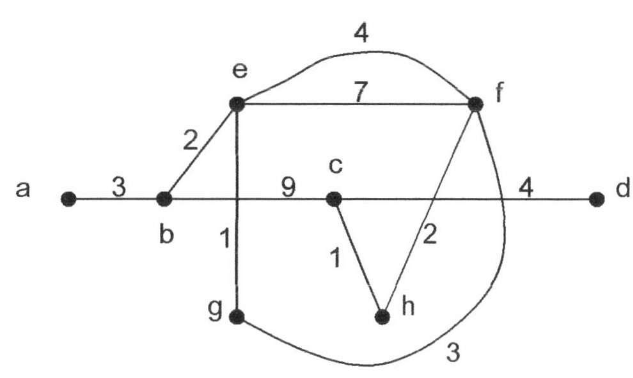
แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป d ของกราฟต่อไปนี้

1.1



1.2



2. ณ หมู่บ้านแห่งหนึ่ง นาย a ต้องการเดินทางไปบ้าน b โดยมีถนนในหมู่บ้านหลายสายให้นาย a ตัดสินใจ ดังนี้

ถนนระหว่างบ้าน a กับบ้าน c ต้องใช้เวลาเดินทาง 15 นาที

ถนนระหว่างบ้าน a กับบ้าน d ต้องใช้เวลาเดินทาง 5 นาที

ถนนระหว่างบ้าน d กับบ้าน c ต้องใช้เวลาเดินทาง 7 นาที

ถนนระหว่างบ้าน d กับบ้าน e ต้องใช้เวลาเดินทาง 3 นาที

ถนนระหว่างบ้าน c กับบ้าน e ต้องใช้เวลาเดินทาง 9 นาที

ถนนระหว่างบ้าน b กับบ้าน c (มี 2 สาย) สายที่ 1 ต้องใช้เวลาเดินทาง 5 นาที

ถนนระหว่างบ้าน b กับบ้าน c (มี 2 สาย) สายที่ 2 ต้องใช้เวลาเดินทาง 3 นาที

อยากทราบว่า นาย a ต้องเดินทางจากบ้านตนเองอย่างไรที่จะใช้เวลาน้อยที่สุดในการเดินทางไปบ้าน นาย b

กราฟต้นไม้

ตั้งแต่ที่เราเรียนทฤษฎีกราฟเบื้องต้น นักเรียนได้รู้จักกับกราฟต่าง ๆ หลายประเภท ซึ่งมีลักษณะแตกต่างกันไป เช่น กราฟเชื่อมโยง (connected graph) กราฟเชิงเดียว (simple graph) กราฟหลายเชิง (multigraph) รวมถึงกราฟออยเลอร์ (Eulerian graph) และกราฟแฮมิลตัน (Hamilton graph)

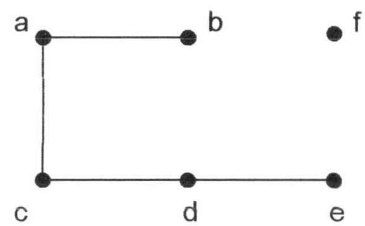
สำหรับบทนี้ เราจะมาเรียนอีกลักษณะหนึ่ง ซึ่งนับได้ว่ามีประโยชน์อย่างมาก และถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง นั่นคือ “**กราฟต้นไม้**” หรือ “**ต้นไม้**”

บทนิยาม

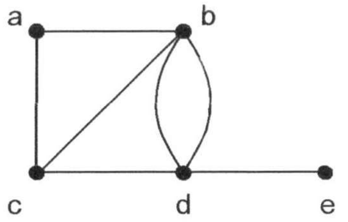
ต้นไม้ (tree) คือกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

ตัวอย่างที่ 5.4 จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟต้นไม้หรือไม่ เพราะเหตุใด

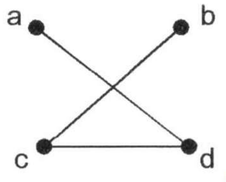
1.1



1.2



1.3



<u>วิธีทำ</u> วัฏจักร คือ วงจรที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน หรือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน และจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน

1.1 กราฟที่กำหนดให้ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้ไม่เป็นต้นไม้

1.2 กราฟที่กำหนดให้มีวัฏจักร เช่น a, b, c, a หรือ a, b, d, c, a เป็นต้น ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้ไม่เป็นต้นไม้

1.3 กราฟที่กำหนดให้ไม่มีวัฏจักร (คือม่สามารถเดินเป็นวงกลมได้) ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้เป็นต้นไม้

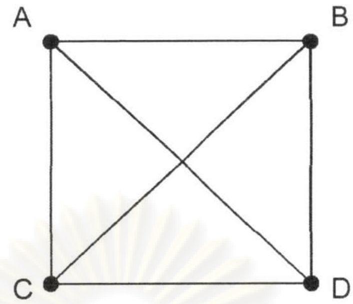
ข้อสังเกต 1. ต้นไม้ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และไม่มีวงวน

2. ต้นไม้ที่มีจุดยอด n จุด จะมีเส้นเชื่อม n – 1 เส้นเสมอ

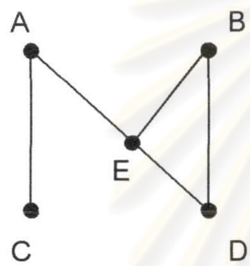
แบบฝึกหัด 5.2

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟต้นไม้หรือไม่ เพราะเหตุใด

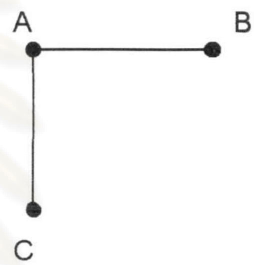
กราฟ G



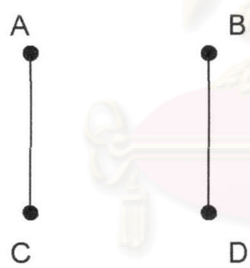
1.1



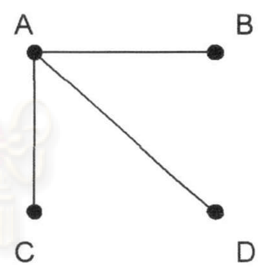
1.2



1.3



1.4



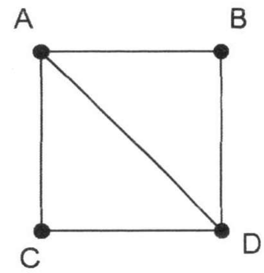
กราฟย่อย

บทนิยาม

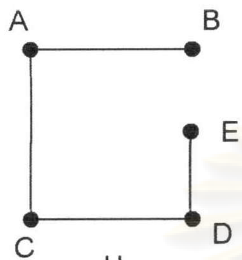
กราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ G คือ กราฟที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมใน G กล่าวคือ กราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ก็ต่อเมื่อ $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$

ตัวอย่างที่ 5.5 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณากราฟที่กำหนดให้ว่าเป็นกราฟย่อยของ G หรือไม่เพราะเหตุใด

G :

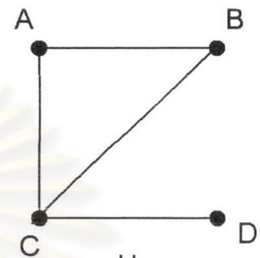


1.1



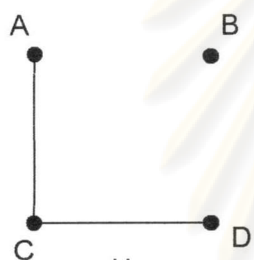
H_1

1.2



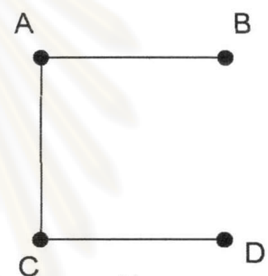
H_2

1.3



H_3

1.4



H_4

<u>วิธีทำ</u> 1.1 จากกราฟ $V(H_1) = \{A, B, C, D, E\}$ แต่ $V(G) = \{A, B, C, D\}$

จะได้ว่า $V(H_1) \not\subset V(G)$

ดังนั้น H_1 ไม่เป็นกราฟย่อยของ G

1.2 จากกราฟ $E(H_2)=\{AB, AC, CD, BC\}$ แต่ $E(G)=\{AB, AC, AD, BD, CD\}$

จะได้ว่า $E(H_2) \not\subset E(G)$

ดังนั้น H_2 ไม่เป็นกราฟย่อยของ G

1.3 จากกราฟ $V(H_3) = \{A, B, C, D\}$ และ $V(G) = \{A, B, C D\}$

$E(H_3)=\{AC, CD\}$ และ $E(G)=\{AB, AC, AD, BD, CD\}$

จะได้ว่า $V(H_3) \subset V(G)$ และ $E(H_3) \subset E(G)$

ดังนั้น H_3 เป็นกราฟย่อยของ G

1.4 จากกราฟ $V(H_4) = \{A, B, C, D\}$ และ $V(G) = \{A, B, C D\}$

$E(H_4)=\{AB, AC, CD\}$ และ $E(G)=\{AB, AC, AD, BD, CD\}$

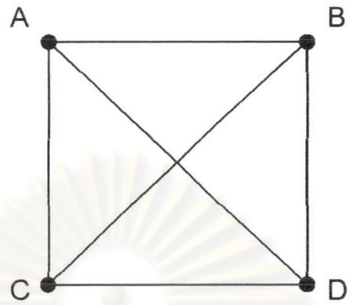
จะได้ว่า $V(H_2) \subset V(G)$ และ $E(H_2) \subset E(G)$

ดังนั้น H_2 เป็นกราฟย่อยของ G

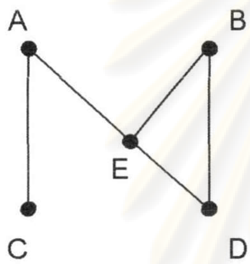
แบบฝึกหัด 5.3

1. จากแบบฝึกหัดที่ 5.2 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟย่อยของ G หรือไม่ เพราะเหตุใด

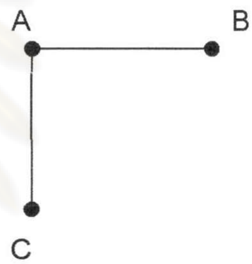
กราฟ G



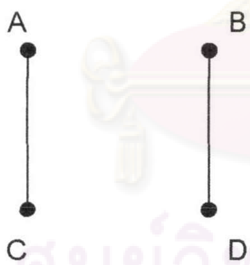
1.1



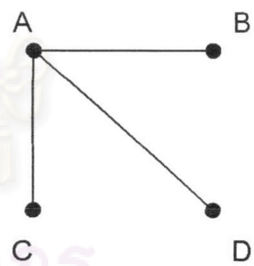
1.2



1.3



1.4



2. จากข้อที่ 1 จงหากราฟย่อยของกราฟ G มาอย่างน้อย 5 กราฟย่อย

ต้นไม้แผ่ทั่ว

"ต้นไม้แผ่ทั่ว" เป็นเรื่องที่นำความรู้เรื่อง ต้นไม้และกราฟย่อยมารวมกัน โดยที่ต้นไม้แผ่ทั่วมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

ต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) ของกราฟ G คือ ต้นไม้ที่เป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ที่มีจุดยอดทุกจุดของ G

จากตัวอย่างที่ 5.5 เราจะได้ว่า

กราฟ H_1และ H_2 ไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของ G เพราะกราฟ H_1 และ H_2 ไม่เป็นกราฟย่อยของG

กราฟ H_3 ไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของ G เพราะกราฟ H_3 ไม่เป็นต้นไม้ (เพราะไม่ใช่กราฟเชื่อมโยง)

กราฟ H_4 เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของ G เพราะกราฟ H_4 เป็นต้นไม้ที่เป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ที่มีจุดยอดทุกจุดของ G

ข้อสังเกต 1. กราฟ H จะเป็นต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) ของกราฟ G ได้จะต้องมีคุณสมบัติ 3 ประการ คือ

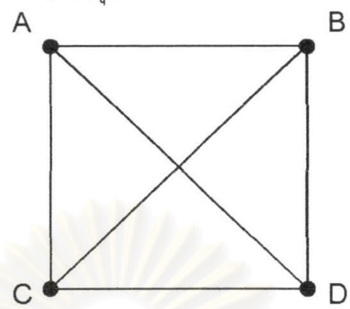
1. กราฟ H จะต้องเป็นต้นไม้
2. กราฟ H จะต้องเป็นกราฟย่อยของ G
3. กราฟ H จะต้องมีจุดยอดทุกจุดของ G

2. ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ อาจจะมีได้มากกว่าหนึ่งแบบ

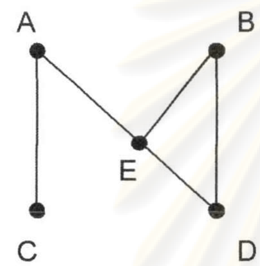
แบบฝึกหัด 5.4

1. จากแบบฝึกหัดที่ 5.2 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟต้นไม้แผ่ทั่วหรือไม่ เพราะเหตุใด

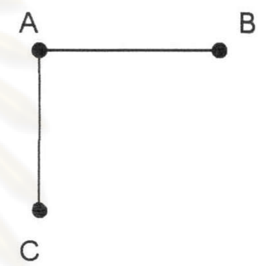
กราฟ G



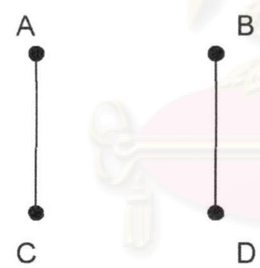
1.1



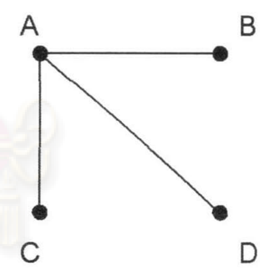
1.2



1.3



1.4



2. จากข้อที่ 1 จงหากราฟต้นไม้แผ่ทั่วทั้งหมดของกราฟ G

ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

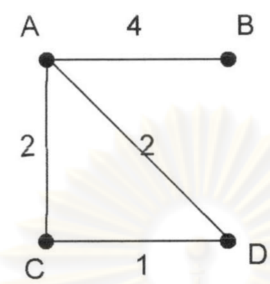
จากเรื่องเกี่ยวกับกราฟถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเราสนใจวิถีที่สั้นที่สุด (เพราะในชีวิตประจำวันเราจะพบปัญหาลักษณะเดียวกับวิถีที่สั้นที่สุดบ่อยๆ)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเราต้องหาต้นไม้ที่แผ่ทั่วของกราฟถ่วงน้ำหนัก เราจึงสนใจต้นไม้ที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของต้นไม้ที่น้อยที่สุด ซึ่งเราเรียนต้นไม้ลักษณะนี้ว่า “**ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด**”

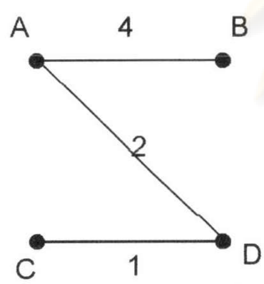
บทนิยาม

ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด (minimal spanning tree) ของกราฟ G คือ ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟถ่วงน้ำหนัก G ที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

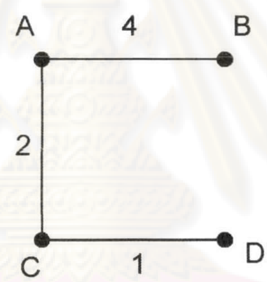
ตัวอย่างที่ 5.6 จงหาต้นไม้ที่แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้



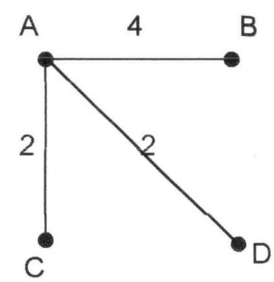
<u>วิธีทำ</u> หาต้นไม้แผ่ทั่วทั้งหมด ได้ดังนี้



แบบที่ 1 (H_1)



แบบที่ 2 (H_2)



แบบที่ 3 (H_3)

จะได้ว่า ต้นไม้แผ่ทั่ว H_1 มีผลบวกค่าน้ำหนัก เท่ากับ 1+2+4 = 7

ต้นไม้แผ่ทั่ว H_2 มีผลบวกค่าน้ำหนัก เท่ากับ 1+2+4 = 7

ต้นไม้แผ่ทั่ว H_3 มีผลบวกค่าน้ำหนัก เท่ากับ 2+2+4 = 8

ดังนั้น ต้นไม้แผ่ทั่ว H_1 และ H_2 เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของ G

ข้อสังเกต ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดอาจจะมีได้หลายแบบ

ในการหาต้นไม้ที่แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด โดยการหาต้นไม้แผ่ทั้งหมด แล้วคำนวณหาผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม ดังตัวอย่างที่ 5.6 นั้นเป็นวิธีการที่ไม่สะดวก และเสียเวลามาก ซึ่งนักคณิตศาสตร์ได้คิดวิธีในการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดหลายวิธี เช่น ขั้นตอนวิธีของครูสกัล (Kruskal's algorithm) เป็นต้น แต่จะไม่ขอกล่าวถึงในระดับชั้นนี้

ในระดับชั้นนี้ เราจะหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด ด้วยการพิจารณาง่ายๆ โดยใช้ขั้นตอนวิธีของพริม (Prim's algorithm) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

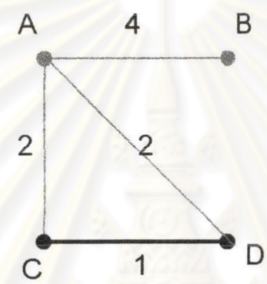
ขั้นที่ 1 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด (ถ้าซ้ำกันเลือกเส้นเชื่อมเส้นใดก็ได้)

ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดในเส้นเชื่อมที่เหลือ โดยเส้นเชื่อมดังกล่าวต้องไม่ทำให้เกิดวัฏจักร

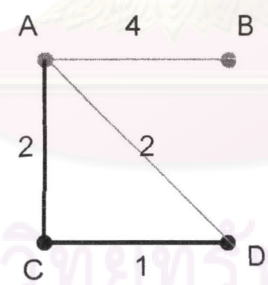
ขั้นที่ 3 ทำเช่นเดียวกับขั้นที่ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ต้นไม้แผ่ทั่ว ซึ่งจะเป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

จากตัวอย่างที่ 5.6 เราจะหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดนั้น โดยใช้การพิจารณาง่าย ๆ ดังนี้

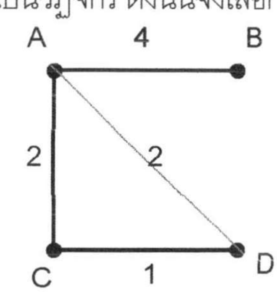
ขั้นที่ 1 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด จากกราฟ G ดังนั้น เลือก CD เพราะมีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด



ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดในเส้นเชื่อมที่เหลือ โดยเส้นเชื่อมดังกล่าวต้องไม่ทำให้เกิดวัฏจักร จากกราฟ G มีเส้นเชื่อมที่มีค่านำหนักเท่ากัน 2 เส้น คือ AC และ AD สมมติเราเลือก AC จะได้



ขั้นที่ 3 ทำเช่นเดียวกับขั้นที่ 2 คือ เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดในเส้นเชื่อมที่เหลือ โดยเส้นเชื่อมดังกล่าวต้องไม่ทำให้เกิดวัฏจักร จากกราฟ G เส้นเชื่อมที่มีค่านำหนักน้อยที่สุด คือ AD แต่ถ้าเลือก AC จะเกิดเป็นวัฏจักร ดังนั้นจึงเลือกเส้นถัดไป ก็คือ AB จะได้

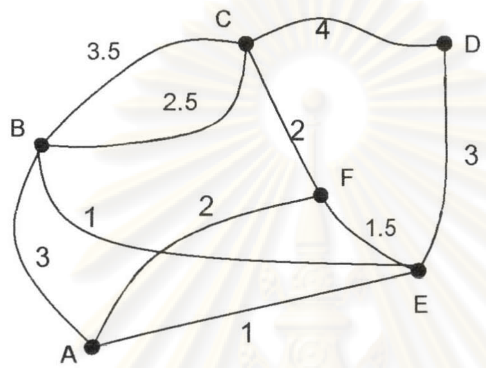


จากกราฟเราจะได้ต้นไม้แผ่น้อยที่สุดของกราฟ G

ซึ่งจะเห็นว่าในขั้นที่ 2 ถ้าเราเลือก AD เราจะได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแบบอื่น แต่มีผลรวมค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมเท่ากัน

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟถ่วงน้ำหนักต่อไปนี้



2. รัฐบาลมีโครงการสร้างถนนในชนบทแห่งหนึ่ง เพื่อเชื่อมโยงสถานที่สำคัญเข้าด้วยกัน ได้แก่ โรงพยาบาล โรงเรียน สถานีตำรวจ สถานีดับเพลิง สถานีขนส่ง และชุมชน จากการสำรวจงบประมาณในการสร้างถนน พบว่า

จากชุมชนไปโรงเรียน	งบประมาณ 3 ล้านบาท
จากชุมชนไปโรงพยาบาล	งบประมาณ 4 ล้านบาท
จากชุมชนไปสถานีตำรวจ	งบประมาณ 8 ล้านบาท
จากชุมชนไปสถานีดับเพลิง	งบประมาณ 5 ล้านบาท
จากโรงพยาบาลไปสถานีขนส่ง	งบประมาณ 6 ล้านบาท
จากโรงพยาบาลไปสถานีตำรวจ	งบประมาณ 5 ล้านบาท
จากโรงเรียนไปสถานีขนส่ง	งบประมาณ 7 ล้านบาท
จากโรงเรียนไปสถานีดับเพลิง	งบประมาณ 8 ล้านบาท
จากสถานีตำรวจไปสถานีดับเพลิง	งบประมาณ 4 ล้านบาท

อยากทราบว่ารัฐบาลควรจะสร้างถนนอย่างไรให้เชื่อมโยงสถานที่เหล่านี้เข้าด้วยกัน และใช้งบประมาณน้อยที่สุด

ภาคผนวก ข

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

ผู้ทรงคุณวุฒิทางด้านคณิตศาสตร์ ระดับอุดมศึกษา จำนวน 5 ท่าน

1) ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2) ดร.วราภรณ์ แสงพลพัฒน์	ม.ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
3) อ.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
4) อ.มนฤดี สิริวรวิทย์	ม.เกษตรศาสตร์
5) อ.รัชนิกร ชลไชยะ	ม.บูรพา

ภาคผนวก ค

แบบประเมินกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้ในการวิจัย

แบบประเมินสาระการเรียนรู้

<u>คำชี้แจง</u>

จุดมุ่งหมายของแบบประเมินในครั้งนี้ เพื่อให้ท่านประเมินความถูกต้องและความเหมาะสมของสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตามหลักสูตรขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ช่วงชั้นที่ 4 ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

<u>ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น</u>

หลักสูตรการเรียนรู้ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กำหนดสาระการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นอยู่ในช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) กลุ่มสาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 18 ชั่วโมง ซึ่งมีเนื้อหาสาระการเรียนรู้ คือ กราฟ กราฟออยเลอร์ และการประยุกต์ของกราฟ

<u>มาตรฐานการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น</u>

หลักสูตรการเรียนรู้ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กำหนดให้สาระการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นอยู่ในสาระวิยุตคณิต โดยมีมาตรฐานการเรียนรู้และมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ดังนี้

มาตรฐาน 1 : มีความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟเบื้องต้น

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. เขียนกราฟเมื่อกำหนดจุด (vertex) และเส้น (edge) ให้
2. บอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่

มาตรฐาน 2 : นำความรู้เรื่องกราฟไปใช้ในการแก้ปัญหาบางปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. นำความรู้เรื่องกราฟไปใช้ในการแก้ปัญหาบางประการ

แบบประเมินสาระการเรียนรู้แบ่งออกเป็น 3 ตอน คือ

<u>ตอนที่ 1</u> ความคิดเห็นเกี่ยวกับความถูกต้องของสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

<u>ตอนที่ 2</u> ความคิดเห็นเกี่ยวกับความเหมาะสมของสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

<u>ตอนที่ 3</u> ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมเกี่ยวกับสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

<u>ตอนที่ 1</u> ความคิดเห็นเกี่ยวกับความถูกต้องของสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ให้พิจารณาสาระการเรียนรู้แล้วโปรดเขียนเครื่องหมาย ✓ ในช่องระดับความถูกต้องที่กำหนดให้ตรงกับความคิดเห็นของท่านมากที่สุดเพียงช่องเดียว โดยมีระดับความถูกต้อง ดังนี้

1 หมายถึง สาระการเรียนรู้มีความถูกต้อง

0 หมายถึง สาระการเรียนรู้ไม่มีความถูกต้อง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 กราฟ

ข้อความ	ระดับความถูกต้อง	
	1	0
ด้านความถูกต้องของสาระการเรียนรู้ 1. เนื้อหาสาระการเรียนรู้มีความถูกต้อง		
2. บทนิยาม ทฤษฎีบท และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ถูกต้อง		
3. ภาษาที่ใช้มีความถูกต้อง		
4. สาระการเรียนรู้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้		
5. สาระการเรียนรู้มีลำดับที่ถูกต้อง		
6. ตัวอย่างมีความถูกต้อง		
7. แบบฝึกหัดมีความถูกต้อง		
8. ความรู้เพิ่มเติมมีความถูกต้อง		

ตอนที่ 2 ความคิดเห็นเกี่ยวกับความเหมาะสมของสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ให้พิจารณาสาระการเรียนรู้แล้วโปรดเขียนเครื่องหมาย ✓ ในช่องระดับความเหมาะสมที่กำหนดให้ตรงกับความคิดเห็นของท่านมากที่สุดเพียงช่องเดียว โดยมีระดับความเหมาะสม ดังนี้

5 หมายถึง สาระการเรียนรู้มีความเหมาะสมอย่างยิ่ง

4 หมายถึง สาระการเรียนรู้มีความเหมาะสม

3 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าสาระการเรียนรู้มีความเหมาะสมหรือไม่

2 หมายถึง สาระการเรียนรู้ไม่มีความเหมาะสม

1 หมายถึง สาระการเรียนรู้ไม่มีความเหมาะสมอย่างยิ่ง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 กราฟ

ข้อความ	ระดับ เหมาะสม				
	1	2	3	4	5
ด้านความเหมาะสมของสาระการเรียนรู้ 1. เนื้อหาสาระการเรียนรู้มีความเหมาะสม					
2. ภาษาที่ใช้เข้าใจง่าย และมีความเหมาะสม					
3. ขอบเขตของสาระการเรียนรู้มีความเหมาะสมกับมาตรฐานการเรียนรู้					
4. สาระการเรียนรู้มีลำดับเรียงจากง่ายไปยากได้อย่างเหมาะสม					
5. ตัวอย่างมีความเหมาะสม และสอดคล้องกับเนื้อหาสาระการเรียนรู้					
6. แบบฝึกหัดมีความเหมาะสม และสอดคล้องกับเนื้อหาสาระการเรียนรู้					
7. ความรู้เพิ่มเติมสอดคล้องกับสาระการเรียนรู้หลักในแต่ละเรื่อง					

ตอนที่ 3 ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมเกี่ยวกับสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

....

....

....

....

....

....

....

ภาคผนวก ง

การคำนวณดัชนี IOC

การคำนวณค่าดัชนี IOC

การวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยใช้การคำนวณค่าดัชนี Item-Objective Congruence (IOC) โดยให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 5 ท่าน ประเมินสาระการเรียนรู้ ซึ่งแบ่งการประเมินสาระการเรียนรู้เป็น 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 การประเมินความสอดคล้องในด้านความถูกต้องของสาระการเรียนรู้ เป็นมาตรประมาณค่า 2 ระดับ โดยมีการให้คะแนน ดังนี้

1 หมายถึง สาระการเรียนรู้ถูกต้อง

0 หมายถึง สาระการเรียนรู้ไม่ถูกต้อง

ผู้วิจัยกำหนดเกณฑ์ ค่าดัชนี IOC ที่คำนวณจากค่าเฉลี่ยผลความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิเป็นรายข้อ ดังนี้ ค่าดัชนี IOC ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.5 ($IOC \geq 0.5$) หมายความว่าสาระการเรียนรู้มีความถูกต้อง แต่ถ้าค่าดัชนี IOC น้อยกว่า 0.5 ($IOC < 0.5$) หมายความว่าสาระการเรียนรู้ไม่ถูกต้องและต้องนำไปปรับปรุง

ส่วนที่ 2 การประเมินความเหมาะสมของสาระการเรียนรู้ เป็นมาตรประมาณค่า 5 ระดับ โดยมีการให้คะแนน ดังนี้

5 หมายถึง สาระการเรียนรู้มีความเหมาะสมอย่างยิ่ง

4 หมายถึง สาระการเรียนรู้มีความเหมาะสม

3 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าสาระการเรียนรู้มีความเหมาะสมหรือไม่

2 หมายถึง สาระการเรียนรู้ไม่มีความเหมาะสม

1 หมายถึง สาระการเรียนรู้ไม่มีความเหมาะสมอย่างยิ่ง

ผู้วิจัยกำหนดเกณฑ์ ค่าดัชนี IOC ที่คำนวณจากค่าเฉลี่ยผลความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิเป็นรายข้อ ดังนี้ ค่าดัชนี IOC ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 4 ($IOC \geq 4$) หมายความว่าสาระการเรียนรู้มีความเหมาะสม แต่ถ้าค่าดัชนี IOC น้อยกว่า 4 ($IOC < 4$) หมายความว่าสาระการเรียนรู้นั้นไม่เหมาะสมและต้องนำไปปรับปรุง

ทั้งนี้ผู้วิจัยได้ให้ผู้ทรงคุณวุฒิเสนอแนะความคิดเห็นเพิ่มเติม เพื่อนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงสาระการเรียนรู้ให้มีความเหมาะสมดียิ่งขึ้น

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

สูตรการคำนวณค่า IOC

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC คือ ดัชนีความสอดคล้องในด้านความถูกต้องของสาระการเรียนรู้ หรือ ดัชนีความสอดคล้องในด้านความเหมาะสมของสาระการเรียนรู้

$\sum R$ คือ ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิ

N คือ จำนวนผู้ทรงคุณวุฒิ

ตัวอย่างการคำนวณค่าดัชนี IOC

การประเมินความสอดคล้องในด้านความถูกต้องของสาระการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ของผู้ทรงคุณวุฒิ เป็นรายข้อ

ข้อความ	ความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิ (คนที่)					$\sum R$	ค่าดัชนี IOC $\frac{\sum R}{N}$	สรุปผล
	1	2	3	4	5			
1. เนื้อหาสาระการเรียนรู้มีความถูกต้อง	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง
2. บทนิยาม ทฤษฎีบท และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ถูกต้อง	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง
3. ภาษาที่ใช้มีความถูกต้อง	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง
4. สาระการเรียนรู้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง
5. สาระการเรียนรู้มีลำดับที่ถูกต้อง	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง
6. ตัวอย่างมีความถูกต้อง	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง
7. แบบฝึกหัดมีความถูกต้อง	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง
8. ความรู้เพิ่มเติมมีความถูกต้อง	1	1	1	1	1	5	1	ถูกต้อง

การประเมินความสอดคล้องในด้านความเหมาะสมของสาระการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ของผู้ทรงคุณวุฒิ เป็นรายข้อ

ข้อความ	ความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิ (คนที่)					$\sum R$	ค่าดัชนี IOC $\frac{\sum R}{N}$	สรุปผล
	1	2	3	4	5			
1. เนื้อหาสาระการเรียนรู้มีความเหมาะสม	4	4	5	4	5	22	4.4	เหมาะสม
2. ภาษาที่ใช้เข้าใจง่าย และมีความเหมาะสม	4	5	4	3	4	20	4.0	เหมาะสม
3. ขอบเขตของสาระการเรียนรู้มีความเหมาะสมกับมาตรฐานการเรียนรู้	4	5	5	2	5	21	4.2	เหมาะสม
4. สาระการเรียนรู้มีลำดับเรียงจากง่ายไปยากได้อย่างเหมาะสม	5	5	5	4	5	24	4.8	เหมาะสม
5. ตัวอย่างมีความเหมาะสม และสอดคล้องกับเนื้อหาสาระการเรียนรู้	5	4	4	4	5	22	4.4	เหมาะสม
6. แบบฝึกหัดมีความเหมาะสม และสอดคล้องกับเนื้อหาสาระการเรียนรู้	5	4	4	4	5	22	4.4	เหมาะสม
7. ความรู้เพิ่มเติมสอดคล้องกับสาระการเรียนรู้หลักในแต่ละเรื่อง	4	4	5	4	5	22	4.4	เหมาะสม

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายชัยนันท์ เตระวิชชนันท์ เกิดวันเสาร์ที่ 10 กุมภาพันธ์ 2522 ที่จังหวัดฉะเชิงเทรา เข้าศึกษาในปีการศึกษา 2541 และสำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชามัธยมศึกษา วิชาเอกคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในโครงการเร่งรัดการผลิตและพัฒนาบัณฑิตระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศ (รพค.) รุ่นที่ 3 ปีการศึกษา 2544 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2545