บทที่ 2

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้เสนอแนวคิด ทฤษฎี ซึ่งได้จากการศึกษาเอกสาร ตำรา บทความและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยนำเสนอเป็น 4 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ตารางการณ์จรสองทาง

ตอนที่ 2 การแจกแจงพหุนาม

ตอนที่ 3 การทดสอบความเป็นอิสระ

ตอนที่ 4 สถิติที่ใช้ในการทดสอบความเป็นอิสระ

ตอนที่ 5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตอนที่ 1 ตารางการณ์จรสองทาง (Two – way Contingency Table)

1.1 ลักษณะของตารางการณ์จรสองทาง

ให้ A และ B แทนตัวแปรแบบจำแนกประเภท (categorical variable) 2 ตัว โดยที่ตัวแปร A มี r ประเภท และตัวแปร B มี c ประเภท ถ้าจำแนกหมวดหมู่ (combination) ตามลักษณะของตัวแปรดังกล่าว สามารถจำแนกได้ถึง $r \times c$ หมวดหมู่

ให้ p_{ij} แทนความน่าจะเป็นที่ (A, B) อยู่ในเซลล์บนแถวนอนที่ i และแถวตั้งที่ j โดยที่ลักษณะของการแจกแจงจัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีแถวนอน r แถวและแถวตั้ง c แถว มีจำนวนเซลล์ทั้งหมด $r \times c$ เซลล์ เมื่อเซลล์ต่าง ๆ ประกอบด้วยข้อมูลความถี่ของจำนวนนับของแต่ละเซลล์ ตารางที่แสดงข้อมูลดังกล่าวเรียกว่า ตารางการณ์จร (contingencytable) (Pearson,1904) หรืออาจเรียกในชื่ออื่นๆ เช่น “Cross-classification table” หรือตารางการณ์จรที่มีแถวนอน r แถวและมีแถวตั้ง c แถวเรียกว่า ตารางการณ์จรขนาด $r \times c$ ตารางการณ์จรที่มีแถวนอน 2 แถวและมีแถวตั้ง 2 แถว เรียกว่าตารางการณ์จรขนาด 2×2 เป็นต้น

การแจกแจงความน่าจะเป็น (p_{ij}) คือ การแจกแจงร่วมของ A และ B ส่วนการแจกแจงส่วนริม (marginal distribution) หาได้จากผลรวมของ p_{ij} ตามแถวนอนและตามแถวตั้ง โดยใช้สัญลักษณ์ $p_{i.}$ และ $p_{.j}$ แทนการแจกแจงส่วนริมทางแถวนอนและทางแถวตั้งตามลำดับ

ดังนั้นจะได้ว่า
$$p_{i.} = \sum_j p_{ij}$$
$$p_{.j} = \sum_i p_{ij}$$
$$\sum_i p_{i.} = \sum_j p_{.j} = \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างของตารางการณ์จรขนาด r × c

หมวดหมู่ของตัวแปร A	หมวดหมู่ของตัวแปร B				รวม
	1	2	j	c	
1	O_{11}	O_{12}	O_{1j}	O_{1c}	$O_{1.}$
2	O_{21}	O_{22}	O_{2j}	O_{2c}	$O_{2.}$
.					
.					
.					
i	O_{i1}	O_{i2}	O_{ij}	O_{ic}	$O_{i.}$
.					
.					
.					
r	O_{r1}	O_{r2}	O_{rj}	O_{rc}	$O_{r.}$
รวม	$O_{.1}$	$O_{.2}$	$O_{.j}$	$O_{.c}$	n

ผลรวมของแต่ละแถวนอนคือ $O_{1.}, O_{2.}, \ldots, O_{r.}$

ผลรวมของแต่ละแถวตั้งคือ $O_{.1}, O_{.2}, \ldots, O_{.c}$

นั่นคือ $O_{i.} = \sum_{j=1}^{c} O_{ij}, \quad O_{.j} = \sum_{i=1}^{r} O_{ij}$

n คือ จำนวนความถี่ทั้งหมดที่เก็บรวบรวมมา หรือ ขนาดตัวอย่าง

โดยที่ $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} O_{ij} = \sum_{i=1}^{r} O_{i.} = \sum_{j=1}^{c} O_{.j} = n$

ในการจำแนกข้อมูลตามแถวนอนและตามแถวตั้งนี้ ข้อมูลในแต่ละช่องจะไม่ซ้ำซ้อนกัน (mutually exclusive and exhaustive class) ดังนั้นข้อมูลแต่ละค่าจะต้องตกในแถวนอนแถวใดแถวหนึ่ง และแถวตั้งแถวใดแถวหนึ่งเท่านั้น

1.2 ความเป็นอิสระต่อกันของตัวแปรในตารางการณ์จรสองทาง

ให้ A และ B แทนตัวแปรแบบจำแนกประเภท (categorical variable) 2 ตัว โดยที่ตัวแปร A มี r ประเภท ส่วนตัวแปร B มี c ประเภท เราสามารถใช้การแจกแจงร่วมของตัวแปร

ทั้งสอง และการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ A เมื่อกำหนด B หรือการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ B เมื่อกำหนด A มาอธิบายความสัมพันธ์ (association) ของตัวแปรทั้งคู่ สำหรับการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ A เมื่อกำหนด B นั้นเกี่ยวข้องกับการแจกแจงร่วมดังนี้

$$p_{j|i} = p_{ij}/p_{i.} \quad \text{ทุกๆ } i \text{ และ } j$$

และตัวแปรทั้งสองจะเป็นอิสระต่อกัน ถ้า

$$p_{ij} = p_{i.}p_{.j} \quad i = 1, \ldots, r \text{ และ } j = 1, \ldots, c$$

นั่นคือ การแจกแจงร่วมเท่ากับผลคูณของการแจกแจงส่วนริมของแถวนอนและแถวตั้ง

ในกรณีที่ A และ B เป็นอิสระต่อกัน จะให้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} p_{j|i} &= p_{ij}/p_{i.} \\ &= (p_{i.}p_{.j})/p_{i.} \\ &= p_{.j} \qquad \text{สำหรับ } i = 1, \ldots, r \end{aligned}$$

นั่นคือ การแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของแต่ละ A จะเท่ากับ การแจกแจงส่วนริมของ A

ดังนั้นตัวแปรสองตัวเป็นอิสระต่อกัน ถ้าความน่าจะเป็นของตัวแปรของแถวตั้งที่ j เท่าเดิมในแต่ละแถวตั้งสำหรับ j = 1,...c

ความน่าจะเป็นของการแจกแจงร่วม การแจกแจงส่วนริม และการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขต่าง ๆ ในกรณีของตารางการณ์จรสองทางขนาด 2 × 2 แสดงไว้ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 ความน่าจะเป็นร่วม (p_{ij}) ความน่าจะเป็นส่วนริม ($p_{i.}, p_{.j}$) และ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ($p_{j|i}$)

แถวนอน	แถวตั้ง		รวม
	1	2	
1	p_{11} ($p_{1\|1}$)	p_{12} ($p_{2\|1}$)	$p_{1.}$ (1.0)
2	p_{21} ($p_{1\|2}$)	p_{22} ($p_{2\|2}$)	$p_{2.}$ (1.0)
รวม	$p_{.1}$	$p_{.2}$	1.0

ตอนที่ 2 การแจกแจงแบบพหุนาม (Multinomial distribution)

ในการศึกษาคุณลักษณะทางประชากร 2 ลักษณะที่สนใจคือ A และ B และจากผลการศึกษาคุณลักษณะ A สามารถแบ่งออกได้ r ประเภท คือ $A_1, A_2, \ldots, A_r$ และคุณลักษณะ B สามารถแบ่งออกได้ c ประเภท คือ $B_1, B_2, \ldots, B_c$ สมมติทำการทดลอง n ครั้งอย่างเป็นอิสระซึ่งกันและกัน ปรากฏผลการทดลองดังนี้ คือ A_1 และ B_1 จะเกิดขึ้น x_{11} ครั้ง A_1 และ B_2 จะเกิดขึ้น x_{12} ครั้ง ... A_i และ B_j จะเกิดขึ้น x_{ij} ครั้ง ด้วยความน่าจะเป็น $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{ij}$ (i = 1, 2, …, r และ j = 1, 2, …, c) ตามลำดับ ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม คือ

$$f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{rc}; p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{rc}) = \binom{n}{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{rc}} \prod_{ij} p_{ij}^{x_{ij}}$$

โดยที่ x_{ij} แทน จำนวนข้อมูล (ความถี่)ที่สอดคล้องกับประเภทที่ i ของคุณลักษณะ A และสอดคล้องกับประเภทที่ j ของคุณลักษณะ B (จำนวนความถี่ที่ตกในเซลล์ (i,j))

p_{ij} แทน ความน่าจะเป็นที่ (A,B) อยู่ในเซลล์บนแถวนอนที่ i และแถวตั้งที่ j

และ n แทน จำนวนความถี่ทั้งหมดที่เก็บรวมรวมมา

ตอนที่ 3 การทดสอบความเป็นอิสระต่อกัน (Test of Independence)

การทดสอบความเป็นอิสระเป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้ทดสอบตัวแปรแบบจำแนกประเภท (categorical variable) 2 ตัว หรือเกณฑ์การแบ่งประเภททั้งสองว่ามีความสัมพันธ์กันหรือไม่ โดยจะตั้งสมมติฐานหลัก (null hypothesis) ว่าตัวแปรจำแนกประเภททั้งสองเป็นอิสระต่อกัน (ไม่มีความสัมพันธ์กัน) ดังนั้น ถ้าให้

p_{ij} เป็นความน่าจะเป็นที่กลุ่มตัวอย่างจะตกอยู่ในกลุ่ม ij หรือตกในช่องที่อยู่ในแถวนอนที่ i และแถวตั้งที่ j

$p_{i.} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij}$ เป็นความน่าจะเป็นที่ข้อมูลจะตกอยู่ในแถวนอนที่ i

และ $p_{.j} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij}$ เป็นความน่าจะเป็นที่ข้อมูลจะตกอยู่ในแถวตั้งที่ j

สมมติฐานหลักที่แสดงความเป็นอิสระระหว่างตัวแปรทั้งสอง เขียนได้ดังนี้

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j} \qquad i = 1, 2, \ldots, r$

$H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}\, p_{.j} \qquad j = 1, 2, \ldots, c$

สำหรับการทดสอบเป็นอิสระระหว่างตัวแปรทั้งสองตัวในลักษณะเช่นนี้ ถ้าผลการทดสอบเป็นการปฏิเสธสมมติฐานหลัก จะแสดงว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันเท่านั้น แต่จะไม่บอกว่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอยู่ในระดับใด ส่วนการวัดระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรจะต้องอาศัยค่าสถิติอื่นเป็นเครื่องมือวัด

ตอนที่ 4 สถิติที่ใช้ในการทดสอบความเป็นอิสระ

สถิติเพียร์สันไคสแควร์ (Pearson's chi-square statistic)

Pearson (1900) นักสถิติชาวอังกฤษ เสนอสถิติเพียร์สัน ไคสแควร์ ที่ใช้ในการทดสอบความเป็นอิสระ คือ

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

เมื่อ O_{ij} หมายถึง จำนวนข้อมูล (ความถี่) ที่สอดคล้องกับแถวนอนที่ i ของตัวแปรตัวที่ 1 และสอดคล้องกับแถวตั้งที่ j ของตัวแปรตัวที่ 2 (จำนวนความถี่ที่ตกในเซลล์ (i,j))

E_{ij} หมายถึง ความถี่ที่คาดหวังที่สอดคล้องกับแถวนอนที่ i ของตัวแปรตัวที่ 1 และแถวตั้งที่ j ของตัวแปรตัวที่ 2 ภายใต้ $H_0 : E_{ij} = \dfrac{x_{i.}\, x_{.j}}{n}$

$x_{i.}$ หมายถึง ความถี่รวมของแถวนอนที่ i ของตัวแปรตัวที่ 1 และทุกแถวตั้งของตัวแปรตัวที่ 2

$x_{.j}$ หมายถึง ความถี่รวมของแถวตั้งที่ j ของตัวแปรตัวที่ 2 และทุกแถวนอนของตัวแปรตัวที่ 1

n หมายถึง ความถี่รวมทั้งหมดหรือจำนวนข้อมูลทั้งหมด

r หมายถึง จำนวนแถวนอนของตัวแปรตัวที่ 1

c หมายถึง จำนวนแถวตั้งของตัวแปรตัวที่ 2

ในทางปฏิบัติจะประมาณค่าคาดหวังด้วย E_{ij} โดยที่ $E_{ij} = \frac{x_{i.}\, x_{.j}}{n}$ ซึ่ง Pearson 1900, 1922 อ้างถึงใน วีรานันท์ พงศาภักดี, 2541 กล่าวว่า การแทนที่ดังกล่าวจะไม่กระทบกระเทือนต่อการแจกแจงของ χ^2 แต่อย่างไร เนื่องจากคุณลักษณะของตัวแปรตัวที่ 1 และตัวแปรตัวที่ 2 สามารถจำแนกได้ถึง $r \times c$ หมวดหมู่ และ χ^2 จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาอิสระ d.f. = rc – 1 แต่เนื่องจากการคำนวณ E_{ij} ได้จากการประมาณของ $x_{i.}$ และ $x_{.j}$ ดังนั้นการแจกแจงแบบไคสแควร์ข้างต้นจึงมีองศาอิสระเท่ากับ

$$\begin{aligned} d.f. &= rc - 1 - (r - 1) - (c - 1) \\ &= (r - 1)(c - 1) \end{aligned}$$

สถิติเพียร์สันไคสแควร์จะให้ค่าน้อยที่สุดเป็น 0 เมื่อความถี่ที่สังเกตได้มีค่าเท่ากับความถี่ที่คาดหวัง $(O_{ij} = E_{ij})$ เมื่อความถี่ที่คาดหวังและความถี่ที่สังเกตได้มีความแตกต่างกันมาก $(O_{ij} - E_{ij})$ จะทำให้ได้ค่า χ^2 ที่สูงขึ้น แต่ไม่ได้หมายความว่าจะมีความสัมพันธ์กันมากขึ้น สุชาติ ประสิทธิ์รัฐสินธุ์ (2533) กล่าวว่า ค่าไคสแควร์ได้จากผลรวมกำลังสองของผลต่างระหว่างความถี่ของค่าที่สังเกตและความถี่ของค่าที่คาดหวัง แล้วหารด้วยความถี่ของค่าที่คาดหวัง ดังนั้นหากมีการรวมกันมากครั้งเท่าใดค่าของไคสแควร์จะมากขึ้นตามไปด้วย ทั้งที่ระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรยังเหมือนเดิม

สำหรับการทดสอบความเป็นอิสระระหว่างตัวแปร 2 ตัวจากตารางการณ์จร คือการทดสอบว่าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระซึ่งกันและกันหรือไม่ โดยการตั้งสมมติฐานหลักเพื่อทดสอบว่า

H_0 : ตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กัน

หรือ

$$H_0 : p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j} \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}\, p_{.j} \quad j = 1, 2, \ldots, c$$

โดยที่ $p_{i.} = \sum_{j=1}^{c} p_{ij}$ และ $p_{j.} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$

เราจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก ถ้าค่า χ^2 ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากกว่า χ^2 จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่องศาอิสระเท่ากับ (r – 1)(c – 1) ณ ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

การปรับแก้ของเยทส์ (Yate's continuity correction)

เนื่องจากสถิติเพียร์สันไคสแควร์มีข้อจำกัดในเรื่องของความถี่ที่คาดหวังและขนาดตัวอย่าง ในกรณีที่ตัวแปรแบบจำแนกประเภททั้ง 2 ตัว มีค่าเพียง 2 ค่าจึงได้ตารางการณ์จรขนาด 2 × 2 สถิติไคสแควร์มักจะไม่ค่อยมีประสิทธิภาพนัก Yates (1934) เสนอว่าควรปรับแก้ค่าของเพียร์สันไคสแควร์ด้วยการเอา 0.5 ลบออกจากผลต่างของค่าความถี่ที่สังเกตได้กับค่าความถี่ที่คาดหวังก่อนที่จะยกกำลังสองในการคำนวณตามปกติ หรือเรียกอีกอย่างว่าการปรับแก้ของเยทส์ (Yates's continuity correction) เพื่อเป็นเกียรติแก่ Dr. Frank Yates มีสูตรดังนี้

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\left(\left|O_{ij} - E_{ij}\right| - 0.5\right)^2}{E_{ij}}$$

เมื่อ O_{ij} หมายถึง จำนวนข้อมูล (ความถี่) ที่สอดคล้องกับแถวนอนที่ i ของตัวแปรตัวที่ 1 และสอดคล้องกับแถวตั้งที่ j ของตัวแปรตัวที่ 2 (จำนวนความถี่ที่ตกในเซลล์ (i,j))

E_{ij} หมายถึง ความถี่ที่คาดหวังที่สอดคล้องกับแถวนอนที่ i ของตัวแปรตัวที่ 1 และแถวตั้งที่ j ของตัวแปรตัวที่ 2 ภายใต้ $H_0 : E_{ij} = \frac{x_{i.}\, x_{.j}}{n}$

$x_{i.}$ หมายถึง ความถี่รวมของแถวนอนที่ i ของตัวแปรตัวที่ 1 และทุกแถวตั้งของตัวแปรตัวที่ 2

$x_{.j}$ หมายถึง ความถี่รวมของแถวตั้งที่ j ของตัวแปรตัวที่ 2 และทุกแถวนอนของตัวแปรตัวที่ 1

n หมายถึง ความถี่รวมทั้งหมดหรือจำนวนข้อมูลทั้งหมด

สำหรับการทดสอบความเป็นอิสระระหว่างตัวแปร 2 ตัวจากตารางการณ์จร คือการหาว่าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระซึ่งกันและกันหรือไม่ โดยการตั้งสมมติฐานหลักเพื่อทดสอบว่า

H_0 : ตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กัน

หรือ $H_0 : p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, r$

$H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}\, p_{.j}$ $\quad j = 1, 2, \ldots, c$

โดยที่ $p_{i.} = \sum_{j=1}^{c} p_{ij}$ และ $p_{.j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$

เราจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก ถ้าค่า χ_c^2 ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากกว่า χ^2 จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่องศาอิสระเท่ากับ (r – 1)(c – 1) ณ ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

โดยทั่วไปการปรับแก้จะใช้เมื่อตารางการณ์จรมีขนาด 2×2 และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก Howell (1997) กล่าวว่า มีบทความที่ตีพิมพ์เกี่ยวกับการใช้สถิติทดสอบการปรับแก้ของเยทส์มากมายซึ่งมีทั้งบทความเห็นด้วยและไม่เห็นด้วย โดย Howell แนะนำว่าการใช้การปรับแก้ของเยทส์ในการทดสอบ ผู้วิจัยไม่สามารถที่จะใช้การปรับแก้ของเยทส์ได้ในทุกกรณี แต่การใช้การปรับแก้ของเยทส์จะขึ้นอยู่กับกรณีที่ผู้วิจัยทำการศึกษามากกว่าว่าผู้วิจัยมีความเข้าใจและพิถีพิถันในใช้สถิติทดสอบมากน้อยเพียงใด

อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood–ratio chi-square statistic)

ตารางการณ์จรสองทางที่ประกอบด้วยกลุ่มตัวอย่างแบบพหุนาม ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นจะอยู่ในรูป

$$f(x \mid p) = \binom{n}{x} \prod_{ij} p_{ij}^{x_{ij}}$$

โดยที่ $x = (x_{11}, \ldots, x_{rc})$, $p = (p_{11}, \ldots, p_{rc})$, $p_{ij} > 0$ สำหรับทุกๆ i, j และ $\sum_{ij} p_{ij} = 1$

ต้องการทดสอบความเป็นอิสระต่อกัน สมมติฐานในการทดสอบคือ

$$H_0 : p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j}$$

$$H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}\, p_{.j}$$

โดยที่ $p_{i.} = \sum_{j=1}^{c} p_{ij}$ และ $p_{.j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$

พิจารณาการทดสอบด้วยอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

ภายใต้ H , ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p_{ij} คือ $\hat{p}_{ij} = x_{ij}/n$

ดังนั้น

$$f(x \mid p, H) = \frac{n!}{\prod_{ij} x_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{x_{ij}}{n} \right)^{x_{ij}}$$

ภายใต้ $H_0, p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $p_{i.}p_{.j} = x_{i.}x_{.j}/n^2$ ดังนั้น

$$f(x \mid p, H_0) = \frac{n!}{\prod_{ij} x_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{x_{i.}x_{.j}}{n^2} \right)^{x_{ij}}$$

สถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นจะอยู่ในรูปของ

$$\Lambda = \frac{f(x \mid p, H_0)}{f(x \mid p, H)}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{\prod_{ij} x_{ij}!} \prod_{ij} \left(\dfrac{x_{i.}x_{.j}}{n^2} \right)^{x_{ij}}}{\dfrac{n!}{\prod_{ij} x_{ij}!} \prod_{ij} \left(\dfrac{x_{ij}}{n^2} \right)^{x_{ij}}}$$

$$= \frac{\prod_{ij} (x_{i.}x_{.j})^{x_{ij}}}{n^n \prod_{ij} (x_{ij})^{x_{ij}}} \qquad ; \; i = 1, \ldots, r, \; j = 1, \ldots, c$$

โดยที่ Λ แทนอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximized likelihoods) ซึ่งจะมีค่าไม่เกิน 1 และ

$$-2\ln\Lambda = -2\left[\sum_{ij} x_{ij} \ln x_{i.}x_{.j} - \sum_{ij} x_{ij} \ln x_{ij} - n\ln n \right]$$

$$= 2\left[-\sum_{ij} x_{ij} \ln x_{i.}x_{.j} + \sum_{ij} x_{ij} \ln x_{ij} + \sum_{ij} x_{ij} \ln n \right]$$

$$= 2\sum_{ij} x_{ij} \ln \left[\frac{x_{ij}}{\frac{x_{i.}x_{.j}}{n}} \right]$$

$$= 2\sum_{ij} x_{ij} \ln \left[\frac{x_{ij}}{e_{ij}} \right] \qquad ; \; e_{ij} = x_{i.}x_{.j}/n$$

ให้ $G^2 = -2\ln\Lambda$ จะได้ว่า เมื่อข้อมูลแบบจำแนกประเภทเป็นอิสระต่อกัน G^2 จะมีการแจกแจงเมื่อใกล้อนันต์แบบไคสแควร์ด้วยองศาอิสระเท่ากับ (r – 1)(c – 1) ณ ระดับนัยสำคัญที่กำหนด และอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นจะให้ค่าน้อยที่สุดเป็น 0 เมื่อความถี่ที่สังเกตได้มีค่าเท่ากับความถี่ที่คาดหวัง($O_{ij} = E_{ij}$) เช่นเดียวกับสถิติทดสอบเพียร์สันไคสแควร์

เราจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก ถ้าค่า G^2 ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากกว่า χ^2 จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่องศาอิสระเท่ากับ (r – 1)(c – 1) ณ ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

นอกจากสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสามารถใช้ทดสอบความเป็นอิสระของตารางการณ์จรแล้วสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นยังสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์ Loglinear model สำหรับตารางการณ์จรหลายทางได้อีกด้วย (Howell, 1997)

Fisher's exact test

เป็นการทดสอบความเป็นอิสระที่ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเซลล์ความถี่ เมื่อกำหนดค่าผลรวมส่วนริม (The conditional probability function of the cell frequencies given the marginal totals) หรือฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่มีรูปแบบของ Exact probability ดังนี้

$$p(x) = \frac{\prod_i n_{i.}!\prod_j n_{.j}!}{n!\prod_i\prod_j n_{ij}!}$$

ในกรณีที่ r = c = 2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นข้างต้น มีรูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไฮเปอร์จีออเมตริก (hypergeometric distribution) ที่มี exact probability เป็น

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(\frac{n_{1.}!}{n_{11}!n_{12}!}\right)\left(\frac{n_{2.}!}{n_{21}!n_{22}!}\right)\left(\frac{n_{.1}!n_{.2}!}{n!}\right) \\ &= \frac{\binom{n_{1.}}{n_{11}}\binom{n_{2.}}{n_{.1}-n_{11}}}{\binom{n}{n_{.1}}} \\ &= \frac{\binom{n_{1.}}{n_{11}}\binom{n_{2.}}{n_{21}}}{\binom{n}{n_{.1}}} \end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ในรูปของการแจกแจงของตัวแปรเดียว (univariate distribution) เช่น การแจกแจงของตัวแปร n_{11} เนื่องจากตัวแปรอื่นๆ (n_{ij}) สามารถกำหนดได้จาก n_{11} โดยอาศัยค่าของผลรวมส่วนริม (marginal totals) โดยที่ตารางการณ์จรขนาด 2×2 มีรูปแบบดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 การแจกแจงของตัวแปรอื่นๆ (n_{ij}) ที่สามารถกำหนดได้จากตัวแปร n_{11} สำหรับข้อมูลที่จัดอยู่ในรูปตารางการณ์จรขนาด 2×2

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
รวม	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

ค่าของ n_{11} มีค่าเป็นไปได้อยู่ในช่วงของ $a \le n_{11} \le b$ โดยที่ $a = \max(0, n_{1.} + n_{.1} - n)$ และ $b = \min(n_{1.}, n_{.1})$ การทดสอบค่า P คำนวณจากผลรวมความน่าจะเป็นแบบไฮเปอร์จีออเมตริก (hypergeometric) ที่ทำให้ n_{11} มีค่าอย่างน้อยเท่ากับค่าสังเกตจากกลุ่มตัวอย่าง หรือผลลัพธ์ที่อย่างน้อยที่สุดสอดคล้องกับสมมติฐาน H_1

ในกรณีตารางการณ์จรขนาด 2 × 2 ที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กนั้น ในบางครั้งกลุ่มตัวอย่างเล็กมีขนาดเล็กเกินไปสำหรับการนำไปใช้ทดสอบสมมติฐานของความเป็นอิสระด้วยการทดสอบไคสแควร์ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว Fisher (1934, 1935) และ Yates (1934) เสนอแนวทางแก้ปัญหาโดยใช้วิธีที่เรียกว่า Fisher's exact test หรือ Exact probability test สำหรับตารางการณ์จรสองทางใดๆ

ในการทดสอบความเป็นอิสระของตารางการณ์จร Fisher's exact test อาศัยการคำนวณหาค่า probability ของข้อมูลที่กระจายแบบ hypergeometric distribution (ซึ่งก็คือข้อมูลชนิดเดียวกับ multinomial distribution แต่มีพื้นฐานการสุ่มตัวอย่างแบบสุ่มแล้วไม่ต้องใส่คืนก่อนสุ่มหน่วยต่อไป) Fisher's exact test มีสูตรการคำนวณในกรณีตารางการณ์จรขนาด 2 × 2 ดังนี้

$$P \text{ value} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(f_{1.}!f_{2.}!f_{.1}!f_{.2}!)}{(f_{11}!f_{12}!f_{21}!f_{22}!f_{..}!)}$$

เมื่อ $f_{1.}$, $f_{2.}$, $f_{.1}$ และ $f_{.2}$ หมายถึง ขอบรวมของตาราง

f_{11}, f_{12}, f_{21} และ f_{22} หมายถึง ความถี่ในแต่ละเซลล์

$f_{..}$ หมายถึง ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

s หมายถึง จำนวนความถี่ที่สังเกตได้ที่มีค่าน้อยที่สุด

ตัวอย่าง การคำนวณ P value อาศัยข้อมูลจาก Swinscow T.D.V. (1977) กลุ่มตัวอย่างขนาด 55 คน ประกอบด้วยทหารที่กระโดดร่วมลงพื้นที่ 2 แห่งคือ A และ B และมีจำนวนทหารทั้งที่ได้รับบาดเจ็บและที่ไม่บาดเจ็บ จำแนกเป็นตารางการณ์จรดังนี้

ตารางที่ 2.4 จำนวนทหารที่กระโดดร่มลงพื้นที่ A และ B ที่ได้รับบาดเจ็บและไม่ได้รับบาดเจ็บ

พื้นที่	บาดเจ็บ	ไม่บาดเจ็บ	รวม
A	5	10	15
B	2	38	40
รวม	7	48	55

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จัดตารางข้างต้นใหม่โดยย้ายค่าสังเกตที่เล็กที่สุด (2) มาไว้ด้านบนซ้ายของตาราง คือ ตรงจุดของ n_{11} ดังนี้

พื้นที่	บาดเจ็บ	ไม่บาดเจ็บ	รวม
A	2	38	40
B	5	10	15
รวม	7	48	55

วิธีการคำนวณ P value ต้องหาผลบวกของ exact probability ของตารางการณ์ขนาด 2×2 ที่ a หรือ n_{11} มีขนาดอย่างน้อยเท่ากับค่าสังเกตคือ 2 นั่นคือ $a = 0$, $a = 1$ และ $a = 2$ ดังนั้นสร้างตารางที่มีผลรวมส่วนริมเท่าเดิมได้อย่างน้อย 3 ตาราง หรือมากที่สุด 8 ตาราง ดังนี้

ตารางที่ 1 เมื่อ $a = 0$

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	0	40	40
2	7	8	15
รวม	7	48	55

ตารางที่ 2 เมื่อ $a = 1$

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	1	39	40
2	6	9	15
รวม	7	48	55

ตารางที่ 3 เมื่อ a = 2

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	2	38	40
2	5	10	15
รวม	7	48	55

ตารางที่ 4 เมื่อ a = 3

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	3	37	40
2	4	11	15
รวม	7	48	55

ตารางที่ 5 เมื่อ a = 4

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	4	36	40
2	3	12	15
รวม	7	48	55

ตารางที่ 6 เมื่อ a = 5

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	5	35	40
2	2	13	15
รวม	7	48	55

ตารางที่ 7 เมื่อ a = 6

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	6	34	40
2	1	14	15
รวม	7	48	55

ตารางที่ 8 เมื่อ a = 7

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	7	33	40
2	0	15	15
รวม	7	48	55

การคำนวณค่า exact probability ในกรณีนี้ค่า n_{11} หรือ a ที่เล็กที่สุดคือ 2 จึงคำนวณ P value จากตารางที่ 1 ถึง 3 เท่านั้น

ตารางที่ 1 เมื่อ a = 0

แถวนอน	แถวตั้ง		
	1	2	รวม
1	0	40	40
2	7	8	15
รวม	7	48	55

จากตารางที่ 1

จะได้ค่า exact probability

$$= \frac{40!15!7!48!}{55!0!40!7!8!}$$

= .00003171

ตารางที่ 2 เมื่อ a = 1

แถวนอน	แถวตั้ง 1	2	รวม
1	0	40	40
2	7	8	15
รวม	7	48	55

จากตารางที่ 2

จะได้ค่า exact probability

$$= \frac{40!15!7!48!}{55!1!39!6!9!}$$

$= .0009865$

ตารางที่ 3 เมื่อ a = 3

แถวนอน	แถวตั้ง 1	2	รวม
1	0	40	40
2	7	8	15
รวม	7	48	55

จากตารางที่ 3

จะได้ค่า exact probability

$$= \frac{40!15!7!48!}{55!2!38!5!10!}$$

$= .011542$

จากการคำนวณจะได้ P value = .00003171 + .0009865 + .011542 = 0.01256

สำหรับการทดสอบสมมติฐานหลักของความเป็นอิสระโดยใช้ Fisher's exact test นั้นจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก ถ้า P value ที่ได้จากการคำนวณมีค่าน้อยกว่า ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

จากตัวอย่าง P value ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด ดังนั้นจึงสรุปว่าปฏิเสธสมมติฐานหลักของความเป็นอิสระ ณ ระดับนัยสำคัญ .05 และยอมรับว่าจุดที่กระโดดร่มคือพื้นที่ A และ B มีความสัมพันธ์กับการได้รับบาดเจ็บและไม่บาดเจ็บของทหาร ณ ระดับนัยสำคัญ .05

ตอนที่ 4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สุวิมล มั่นมงคล (2526) ศึกษาเปรียบเทียบการทดสอบความเป็นอิสระระหว่างตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป โดยใช้ตัวแปรลอกการิทึมเชิงเส้นตรง (Log-Linear Model) และการทดสอบแบบไคสแควร์ (Chi-square Test) เมื่อความถี่ในแต่ละเซลล์ของตารางการณ์จรมีค่าแตกต่างกัน และขนาดของตารางการณ์จรแตกต่างกันในแต่ละขนาดมิติที่แตกต่างกัน เป็น 2 มิติ 3 มิติ และ 4 มิติ ณ ระดับนัยสำคัญ .20 .10 .05 .01 และ .005 ผลการวิจัยพบว่า การทดสอบความเป็นอิสระโดยใช้ตัวแปรลอกการิทึมเชิงเส้นตรง และการทดสอบแบบไคสแควร์ ให้ผลสรุปที่ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ณ ระดับนัยสำคัญ .20 สำหรับผู้ทดสอบที่ต้องการทราบอิทธิพล เนื่องจาก

ตัวแปรต่างๆ ในระดับย่อยหรือต้องการทราบความสัมพันธ์ในระดับย่อยของตัวแปรต้องใช้ตัวแบบลอกการิทึมเชิงเส้นตรงเนื่องจากไคสแควร์ไม่สามารถให้คำตอบดังกล่าวได้

วิศิษฐ์ เสรีอรุโณ (2531) ทำการศึกษาความแม่นยำในการใช้การทดสอบไคสแควร์สำหรับทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของสัดส่วนเมื่อความถี่ที่คาดหวังมีขนาดเล็ก กับกลุ่มตัวอย่างที่ 1 มีขนาด 10 ถึง 50 กลุ่มตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้มีขนาดคงที่เท่ากับ 100 และกำหนดค่าสัดส่วนเป็น 90 : 10 พบว่า สถิติทดสอบไคสแควร์ที่ใช้ในการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของสัดส่วนประชากร 2 กลุ่ม ถ้าความถี่ที่คาดหวังมีค่าระหว่าง 1 – 5 จำนวน 1 เซลล์ สถิติทดสอบไคสแควร์สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ระดับนัยสำคัญ .05 สำหรับการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของสัดส่วนประชากร 3 กลุ่ม สถิติทดสอบไคสแควร์สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ระดับนัยสำคัญ .05 เช่นกันเมื่อความถี่ที่คาดหวังมีค่าระหว่าง 1 – 5 เกินกว่า 1 เซลล์ และ 2 เซลล์ สำหรับการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของสัดส่วนประชากร 2 กลุ่ม และ 3 กลุ่มนั้น ค่าสถิติทดสอบของไคสแควร์มีลักษณะ conservative โดยสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้น้อยกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ

Starmer, Grizzle and Sen (1974) ได้ศึกษาความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่เกิดจากการใช้สถิติทดสอบไคสแควร์สำหรับข้อมูลที่จัดอยู่ในรูปตารางการณ์จรขนาด 2 × 2 โดยเปรียบเทียบระหว่างสถิติทดสอบไคสแควร์ที่ใช้ค่าแก้ สถิติทดสอบไคสแควร์ที่ไม่ใช้ค่าแก้ Fisher's exact test และ Randomized Test ทำการศึกษา 2 กรณี กรณีที่ 1 กำหนดให้ผลรวมของแถวตั้งมีค่าคงที่ ใช้กลุ่มตัวอย่างขนาด 10 20 30 40 50 60 70 80 90 และ 100 ตามลำดับ กรณีที่ 2 กำหนดให้ผลรวมของแถวนอนและแถวตั้งสามารถเปลี่ยนแปลงอย่างอิสระ ใช้กลุ่มตัวอย่างขนาด 20 40 60 80 100 120 140 160 180 และ 200 ตามลำดับ ศึกษาโดยใช้วิธีการจำลองข้อมูลกรณีละ 2,000 ครั้ง ผลการศึกษาพบว่า Fisher's exact test และสถิติทดสอบไคสแควร์ที่ใช้ค่าแก้มีลักษณะ conservative เมื่อกลุ่มตัวอย่ามีขนาดใหญ่พอสมควร สถิติทดสอบไคสแควร์ที่ไม่ใช้ค่าแก้มีค่าความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ใกล้เคียงกับ Randomized Test (ใช้เป็นตัวเปรียบเทียบ) มากกว่าค่าสถิติทดสอบไคสแควร์ที่ใช้ค่าแก้ และ Fisher's exact test ที่ใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดกลางหรือขนาดใหญ่ แต่สถิติทดสอบไคสแควร์ที่ไม่ใช้ค่าแก้จะมีลักษณะ conservative เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่

Camilli and Hopkins (1979) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบเพียร์สันไคสแควร์ และการปรับแก้ของเยทส์ โดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลในการ

ทดสอบความเป็นเอกพันธ์และการทดสอบความเป็นอิสระสำหรับตารางการณ์จรขนาด 2 × 2 เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 20 50 และ 100 ที่ระดับนัยสำคัญ .10 .05 และ .01 ทำการจำลองข้อมูลกรณีละ 10,000 ครั้ง ผลการวิจัยพบว่าเมื่อค่าความถี่ที่คาดหวังน้อยกว่า 5 ทั้งการทดสอบความเป็นเอกพันธ์และการทดสอบความเป็นอิสระ สถิติทดสอบเพียร์สันไคสแควร์สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีกว่า เมื่อมีจำนวนเซลล์ที่มีค่าความถี่ที่คาดหวังค่าเป็น 1 หรือ 2 ไม่เกิน 2 เซลล์ สำหรับการปรับแก้ของเยทส์มีความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ลดลง ที่ระดับนัยสำคัญ .05

Berry and Mielke (1988) เปรียบเทียบ asymptotic chi–square และ likelihood-ratio test กับ nonasymptotic chi–square สำหรับการทดสอบความเป็นเอกพันธ์และการทดสอบความเป็นอิสระสำหรับข้อมูลที่จัดอยู่ในรูปตารางการณ์จรขนาด r × c เมื่อข้อมูลมีขนาดเล็กโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลแบ่งการศึกษาออกเป็น 1) nonasymptotic chi–square test 2) asymptotic chi–square test with chi–square distribution 3) asymptotic chi–square test with normal distribution 4) asymptotic likelihood-ratio test with chi–square distribution 5) asymptotic likelihood-ratio test with normal distribution โดยใช้สถิติทดสอบเพียร์สันไคสแควร์และอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นในการทดสอบสำหรับตารางการณ์จรขนาด 2 × 2, 2 × 4 และ 3 × 4 กลุ่มตัวอย่างขนาด 20 40 และ 80 โดยแบ่งค่าสัดส่วนส่วนริม (marginal) เป็น 3 กรณี คือ ค่าสัดส่วนส่วนริมเท่ากัน (equal marginal) 1 กรณี และ ค่าสัดส่วนส่วนริมไม่เท่ากัน (unequal marginal) 2 กรณี ณ ระดับนัยสำคัญ .001 .005 .01 .05 .10 1.0 พบว่า nonasymptotic chi–square test เหมาะสำหรับการทดสอบความเป็นเอกพันธ์และการทดสอบความเป็นอิสระสำหรับข้อมูลที่อยู่ในรูปตารางการณ์จรขนาด r × c เมื่อข้อมูลมีขนาดเล็ก

Kroll (1989) ทำการศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบการกำหนดค่าสัดส่วนส่วนริมของการทดสอบความเป็นอิสระสำหรับข้อมูลที่จัดอยู่ในรูปตารางการณ์จรขนาด 2 × 2 แบ่งการศึกษาออกเป็น 3 รูปแบบได้แก่ 1) กำหนดค่าสัดส่วนส่วนริมของแถวนอนและแถวตั้ง 2) กำหนดค่าสัดส่วนส่วนริมของแถวนอนหรือแถวตั้ง 3) กำหนดค่าสัดส่วนส่วนริมของแถวนอนและแถวตั้งสามารถเปลี่ยนแปลงอย่างอิสระ โดยใช้สถิติทดสอบในการศึกษา 7 ตัว ได้แก่ 1) Fisher's exact test 2) Pearson' s Chi-square 3) Yates's Correction 4) Upton's correction 5) Garts' logit test 6) 2Z 7) Haber's test ทำการศึกษาโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล กับกลุ่มตัวอย่างขนาด 25, 40 และ 84 แบ่งขอบเขตที่ศึกษาออกเป็น 50 : 50, 60 : 40, 70 : 30, 80 : 20 และ 90 : 10

พบว่า Yates's Correction และ Upton's correction มีลักษณะ liberal ทั้ง 3 รูปแบบโดยเฉพาะรูปแบบที่กำหนดค่าสัดส่วนส่วนริมของแถวนอนและแถวตั้ง โดยที่ continuity correction จะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับ Fisher's exact test คือมีการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริก แต่จะมีลักษณะ conservative ในรูปแบบที่กำหนดค่าสัดส่วนส่วนริมของแถวนอนหรือแถวตั้ง และในรูปแบบที่กำหนดค่าสัดส่วนส่วนริมของแถวนอนและแถวตั้งสามารถเปลี่ยนแปลงอย่างอิสระ

Parshall and Kromrey (1996) ได้ทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบและการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของ Pearson chi-square test Continuity Correction test Likelihood Ratio chi-square และ Fisher's exact test โดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลในการทดสอบความเป็นอิสระของข้อมูลที่จัดอยู่ในรูปตารางการณ์จร เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก สำหรับตารางการณ์จรขนาด 2 × 2 แบ่งขอบเขตที่ศึกษาออกเป็น 60 : 40 และ 90 : 10 และตารางการณ์จรขนาด 3 × 3 แบ่งขอบเขตที่ศึกษาออกเป็น 30 : 30 : 40 และ 45 : 45 : 10 และพิจารณาค่าขนาดอิทธิพล (effect size) เป็น 0.10, 0.30 และ 0.50 ผลการวิจัยพบว่าสถิติทดสอบ Continuity Correction test สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีที่สุด รองลงมาคือ Fisher's exact test ส่วน Likelihood Ratio chi-square สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้น้อยที่สุด