บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

2.1 ทฤษฎีที่ใช้สำหรับการเตรียมข้อมูล

ข้อมูลปริมาณน้ำฝนและปริมาณน้ำท่าที่มีการบันทึกนั้น ไม่สามารถจะนำไปใช้ในแบบจำลองคณิตศาสตร์ได้โดยทันที เนื่องจากลักษณะข้อมูลปริมาณน้ำฝนที่จะใช้กับแบบจำลองคณิตศาสตร์นี้จะต้องเป็นลักษณะข้อมูลปริมาณฝนรายวัน และเป็นปริมาณฝนที่สามารถเป็นตัวแทนของฝนที่ตกในลุ่มน้ำ ฉะนั้นข้อมูลปริมาณน้ำฝนในพื้นที่รับน้ำของเขื่อนอุบลรัตน์ทั้งหมด จำนวน 10 สถานี จึงต้องนำมาคำนวณเป็นปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ (Areal Daily Rainfall) อีกทั้ง Non-Linear Storage Function Model (NLSFM) เป็นแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้คำนวณปริมาณน้ำท่าในส่วนที่เป็น Direct Runoff เท่านั้น เพื่อความเหมาะสมจึงจำเป็นต้องทำการแยก Base Flow ออกจากชลภาพ (Hydrograph) เพื่อให้เหลือข้อมูลปริมาณน้ำท่าที่เป็นส่วนของ Direct Runoff เท่านั้น วิธีการคำนวณเพื่อเตรียมข้อมูล ใช้ทฤษฎีต่างๆดังต่อไปนี้

2.1.1 การคำนวณปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ (Areal Daily Rainfall)

การคำนวณปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยมีหลายวิธี เช่น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic-Mean Method),Thiessen Polygon Method และ Isohyetal Method เป็นต้น ซึ่งวิธีการของ Isohyetal Method เป็นวิธีการที่ทำให้ผลการคำนวณมีลักษณะใกล้เคียงกับลักษณะการกระจายปริมาณฝนจริงมาก (Tsong,1973) Reciprocal-Distance-Squared Method (RDS) ที่จะใช้สำหรับการศึกษาในครั้งนี้เป็นวิธีที่ให้ค่าความถูกต้องเทียบเท่ากับ Isohyetal Method และวิธีนี้สามารถนำเครื่องคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณได้สะดวก ทำให้ลดเวลาในการคำนวณปริมาณฝนรายวันเฉลี่ย ผลการคำนวณของ Isohyetal Method จะได้เส้นชั้นน้ำฝน ส่วนผลที่ได้จากวิธี RDS จะคำนวณได้ปริมาณฝนรายวันทุกจุดตัดของกริด ค่าปริมาณน้ำฝนรายวันของแต่ละจุดตัดของกริด (x,y) จะมีความสัมพันธ์กับค่าปริมาณน้ำฝนรายวันจากสถานีวัดและระยะทางระหว่างจุดตัดของกริด (x,y) กับสถานีวัดปริมาณน้ำฝน ความสัมพันธ์ดังกล่าวแสดงด้วยสมการ (Singh, 1988)

$$R_j = \sum_{j=1}^{N} (P_i/D_i^2) / \sum_{i=1}^{N} (1/D_i^2) \qquad ------(2.1.1)$$

โดยที่ R_j คือ ปริมาณฝนที่จุดตัดของกริดที่ j (mm)

P_i คือ ปริมาณน้ำฝนรายวันที่วัดได้จากสถานี i (mm)

D_i คือ ระยะห่างระหว่างจุดตัดกริด (x,y) กับสถานี i (m or km)

N คือ จำนวนสถานีวัดน้ำฝนที่พิจารณา

ปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยของพื้นที่ลุ่มน้ำจะมีค่าเท่ากับ ผลรวมของผลคูณระหว่างค่าปริมาณฝนรายวันในแต่ละจุดตัดของกริดกับพื้นที่ที่รับผิดชอบของแต่ละจุดตัดของกริดหารด้วยพื้นที่ลุ่มน้ำดังแสดงในรูปที่ 2.1

$$r = \sum_{j=1}^{N} (R_j \times a_j)/A \qquad ------(2.1.2)$$

โดยที่ r คือ ปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยของพื้นที่ลุ่มน้ำ (mm)

R_j คือ ปริมาณฝนที่จุดตัดของกริดที่ j (mm)

a_j คือ พื้นที่รับผิดชอบของจุดตัดกริดที่ j (m^2 or km^2)

A คือ พื้นที่ลุ่มน้ำ (m^2 or km^2)

N คือ จำนวนจุดตัดกริดในพื้นที่ลุ่มน้ำ

ระยะห่างของเส้นกริดและจำนวนสถานีน้ำฝน มีผลกับค่าปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยของพื้นที่ลุ่มน้ำที่คำนวณได้ จากการศึกษาของ (Tsong, 1973) ได้แนะนำระยะห่างระหว่างเส้นกริดไว้ 6,000 ฟุต หรือประมาณ 1.8 กิโลเมตร สำหรับลุ่มน้ำที่มีสถานีวัดปริมาณน้ำฝนจำนวน 10 สถานี ด้วยเหตุผลดังกล่าวและเพื่อความสะดวกในการศึกษาครั้งนี้ จึงกำหนดให้ใช้ระยะห่างระหว่างเส้นกริดเท่ากับ 2 กิโลเมตร รูป 2.1 แสดงตัวอย่างลักษณะกริดสำหรับการคำนวณปริมาณฝนเฉลี่ยของพื้นที่

2.1.2 การแยกปริมาณน้ำท่า (Direct Runoff Separation)

ปริมาณน้ำที่ไหลเข้าสู่อ่างเก็บน้ำ (Reservoir Inflow) ประกอบไปด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ Base Flow และ Direct Runoff ปริมาณน้ำส่วนที่มีอัตราการไหลเปลี่ยนแปลงน้อย

กับเวลา เกิดจากฝนที่ซึมลงในดินและเคลื่อนที่มาสู่ลำน้ำ โดยขบวนการนี้ก่อให้เกิด Base Flow ในทางกลับกันปริมาณน้ำที่มีอัตราการไหลเปลี่ยนแปลงรวดเร็วอันเนื่องมาจากน้ำฝนส่วนที่เหลือจากการซึมลงดิน น้ำส่วนนี้จะไหลไปบนผิวดินไปรวมตัวกันที่ลำน้ำเรียกว่า Direct Runoffดังแสดงในรูป 2.2 การแยก Base Flow และ Direct Runoff ด้วยวิธีการทั่วๆไปมี 2 วิธี ดังแสดงในรูป 2.3 เส้น A-B-C และเส้น A-D-E เป็นเส้นของ Base Flowของทั้ง 2 วิธีที่กล่าวถึง โดยที่เส้น A-B-C นั้นแสดงให้เห็นถึงอัตราการไหลของ Base Flow เพิ่มขึ้นเมื่อมี Direct Runoff เพิ่มขึ้นและในช่วงหลัง อัตราการไหลของ Base Flow ก็จะค่อยๆลดลง ซึ่งการกำหนดค่า Base Flow ที่มากที่สุด (จุด B) เป็นไปได้ยาก เพื่อความสะดวกและเหมาะสมกับการใช้งานในการศึกษาครั้งนี้ จึงกำหนดให้แยกปริมาณน้ำท่าโดยการกำหนด Base Flow ให้มีค่าคงที่ตลอดชลภาพ หรือกำหนดค่า Base Flow ในลักษณะของเส้น A-D-E นั่นเอง (Singh,1988)

2.1.3 การคำนวณปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ (Areal Daily Excess Rainfall)

น้ำฝนที่ตกลงสู่พื้นที่ลุ่มน้ำนั้น บางส่วนจะซึมลงดิน ส่วนที่เหลือจากการซึม จะเรียกว่า ฝนส่วนเกิน (Excess Rainfall) ซึ่งฝนส่วนนี้จะก่อให้เกิดน้ำท่า (Direct Runoff)ในเวลาต่อมา และปริมาตรของฝนส่วนเกินจะเท่ากับปริมาตรของน้ำท่า จากความสัมพันธ์นี้สามารถอธิบายได้ดังสมการ

$$ER = DR \qquad \text{------(2.1.3)}$$

$$ER = C \times r_v \qquad \text{------(2.1.4)}$$

โดยที่ ER = ปริมาตรของฝนส่วนเกิน

DR = ปริมาตรน้ำท่า ของ Hydrograph ในส่วนที่เป็น Direct Runoff

r_v = ปริมาตรของน้ำฝนทั้งหมด

C = ส.ป.ส. น้ำท่า (Runoff Coefficient)

ดังนั้น

$$C = DR/r_v \qquad \text{------(2.1.5)}$$

ปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ (Areal Daily Excess Rainfall) มีความสัมพันธ์กับปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ (Areal Daily Rainfall) ความสัมพันธ์ดังกล่าวอธิบายได้ดังสมการ (P.R. Worm Leaton, 1988)

$$r_i' = C \times r_i \qquad \text{------(2.1.6)}$$

โดยที่ r_i = ปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ ณ. วันที่ i (mm/day)

C = ส.ป.ส. น้ำท่า (Runoff Coefficient)

r_i' = ปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ ณ. วันที่ i (mm/day)

ดังนั้นการคำนวนปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ ทำได้โดยคูณปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ด้วย ส.ป.ส. น้ำท่า ซึ่งการคำนวณด้วยวิธีนี้มีส่วนดีคือ สามารถคงรูปแบบและลักษณะการตกของฝนมิให้เปลี่ยนแปลงไป รูปแบบความสัมพันธ์ของปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่กับปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ แสดงในรูป 2.4

2.2 <u>ทฤษฎีเบื้องต้นสำหรับ Non-Linear Storage Function Model</u>

Non-Linear Storage Function Model (NLSFM) นี้ เสนอโดย AMOROCHO and ORLOB (1961) โดยมีลักษณะเป็นแบบจำลองคณิตศาสตร์ชนิด Conceptual Model ที่สามารถจำลองความสัมพันธ์ของ Storage (S) ของพื้นที่รับน้ำกับอัตราการไหลออก (q) ได้ดี และแบบจำลองนี้มีลักษณะเป็น Lump Model เนื่องจากสามารถจำลองการไหลออกจากพื้นที่ด้วย Model เดียวได้ NLSFM ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง S กับ q สามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการ 2.2.1 และรูป 2.5

$$S = k_1 q^{P1} + k_2\, d(q^{P2})/dt \qquad \text{------(2.2.1)}$$

โดยที่ S = Storage (mm)

q = อัตราการไหลต่อพื้นที่รับน้ำ (mm/day)

ในสมการ 2.2.1 เป็น Conceptual Model ซึ่งสามารถใช้สมการทางคณิตศาสตร์เป็นตัวแทนกระบวนการการเปลี่ยนน้ำฝนไปเป็นน้ำท่าโดยอาศัยความสัมพันธ์ของปริมาตรเก็บกัก (Storage)

และอัตราการไหลออก (q) ในลักษณะความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-Linear) ค่าพารามิเตอร์ในสมการมี 4 ตัว คือ k_1, k_2, P_1 และ P_2 โดยที่ค่าของพารามิเตอร์ k_1, k_2 และ P_1 สามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์ของ Kinematic Wave Theory กับ Non-Linear Storage Function Model ค่าของ k_1, k_2 และ P_1 สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$k_1 = K_1[10^{3m-6}/(3.6x24)]^{(1/m)}\ (L/\alpha)^{(1/m)} \qquad \text{------}(2.2.2)$$

$$k_2 = K_2[(m+1)/m]^2\ k_1^{\ 2}\ \overline{r}d^{(2/m-1-P_2)} \qquad \text{------}(2.2.3)$$

$$P_1 = 1/m \qquad \text{------}(2.2.4)$$

โดยที่

m = 5/3 ในกรณีที่ใช้สูตรคำนวณความเร็วจาก Manning's Formula

$K_1 = m/(m+1)$

L = ความยาวลำน้ำของพื้นที่ศึกษา (m)

$\alpha = (i^{0.5})/n$

$\overline{r}d$ = ปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ (mm/day)

i = ความชันของพื้นที่ลุ่มน้ำ

n = Manning Roughness Coefficient

รายละเอียดที่มาของสมการ 2.2.2 และ 2.2.3 ดูได้จาก ภาคผนวก ก. และจากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่า ค่า K_2 และ P_2 มีความสัมพันธ์กับ m ดังแสดงในสมการที่ 2.2.5 และ 2.2.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ K_2 และ P_2 กับ m แสดงในรูป 2.6

$$K_2 = 0.1\ m^{0.2} \qquad \text{------}(2.2.5)$$

$$P_2 = m^{(-3/2)} \qquad \text{------}(2.2.6)$$

จากความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ k_1 และ P_1 ที่กล่าวมานี้ พบว่าขึ้นอยู่กับลักษณะสภาพทางภูมิประเทศของพื้นที่รับน้ำได้แก่ ความยาวลำน้ำ, ค่า α และค่า m ส่วนค่าพารามิเตอร์ k_2 และ P_2 มีความสัมพันธ์กับค่าพารามิเตอร์ k_1, ค่าปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ และค่า m ในการศึกษานี้จะใช้ค่าพารามิเตอร์ k_1, k_2, P_1 และ P_2 ที่คำนวณได้จากสมการ 2.2.2 ถึง 2.2.6 ดังที่กล่าวมาแล้ว เป็นค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นสำหรับการคำนวณใน Kalman Filter Technique ส่วนแบบจำลอง Storage Function Model อื่นๆ ที่แสดงในรูป 2.5 นั้น เช่น $S=kq$ และ $S=kq^p$ ถึงแม้จะมีพารามิเตอร์น้อยกว่า แต่ไม่สามารถอธิบายและจำลอง

ความสัมพันธ์ระหว่าง Storage กับ Discharge ได้ดีเท่า Storage Function Model แบบ 4 พารามิเตอร์นี้

2.3 ทฤษฎีการประยุกต์ใช้ Kalman Filter Technique ผนวกกับแบบจำลองคณิตศาสตร์

เทคนิค Kalman Filter นี้ เป็นเทคนิคที่ใช้ร่วมกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ชนิดที่เป็น Conceptual Model โดยอาศัยค่าความผิดพลาดจากแบบจำลองคณิตศาสตร์น้ำฝน-น้ำท่าในการคำนวณปริมาณน้ำท่ารายวันในปัจจุบัน นำไปปรับปรุงค่าพารามิเตอร์ของสมการหลักในแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อให้การคำนวณปริมาณน้ำท่าในครั้งต่อไป ถูกต้องและแม่นยำยิ่งขึ้น หลักการของ Kalman Filter คือการ Minimize ค่า Variance หรือ Covariance ของ State Variables เพื่อให้ได้ค่าที่เรียกว่า Kalman Gain Matrix และนำไปใช้ปรับค่า State Variables โดยให้พิจารณาเป็นค่า Weighting ระหว่างค่าที่คำนวณและค่าที่วัดได้ของ Variables นั้น ฉะนั้นแบบจำลองคณิตศาสตร์ผนวกกับ Kalman Filter Technique ที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ ประกอบไปด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ System Model และ Measurement Model สำหรับ System Model ที่ใช้คือ Non-Linear Storage Function Model(NLSFM) ซึ่งเป็น Conceptual Model จึงสามารถนำ Kalman Filter Technique มาประยุกต์ใช้ร่วมกันได้ ทฤษฎีการประยุกต์ใช้ Kalman Filter Technique กับ NLSFM นี้ อ้างอิงจาก (Gautam ,H.R., 1983)

2.3.1 System Model

ในส่วนของ System Model นี้จะเป็นส่วนประกอบหลักในแบบจำลองคณิตศาสตร์ ซึ่งมี Non-Linear Storage Function Equation เป็นสมการพื้นฐานเพื่อเป็นตัวแทนของกระบวนการเปลี่ยนปริมาณน้ำฝนไปเป็นปริมาณน้ำท่า โดยอาศัยความสัมพันธ์ของ Storage กับ ปริมาณน้ำท่า (q) สมการ NLSFM ที่ใช้เป็น System Model แสดงดังสมการ

$$S = k_1 q^{p_1} + k_2\, d(q^{p_2})/dt \qquad \text{------(2.3.1)}$$

โดยที่

S = Storage (mm)

q = อัตราการไหลของปริมาณน้ำท่าต่อพื้นที่รับน้ำ (mm/day)

k_1, P_1, k_2 และ P_2 = พารามิเตอร์

เมื่อนำสมการ 2.3.1 แทนค่าลงในสมการการไหลต่อเนื่อง (Continuity Equation) ดังสมการ

$$dS/dt = r-q \qquad \text{------(2.3.2)}$$

โดยที่

S = Storage (mm)

r = Inflow ในที่นี้คือ ปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่ (mm/day)

q = Outflow ในที่นี้คือ อัตราการไหลของปริมาณน้ำท่าต่อพื้นที่รับน้ำ (mm/day)

และเพื่อความเหมาะสมต่อการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์จึงกำหนดให้ $y=q^{P_2}$ ------(2.3.3)

ผลการแทนค่าสมการ 2.3.1 ลงในสมการ 2.3.2 จะได้สมการ

$$d^2y/dt^2 = -k_1P_1/k_2P_2y^{((P_1/P_2)-1)}dy/dt-y^{(1/P_2)}/k_2+r/k_2 \qquad \text{------(2.3.4)}$$

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์กำหนดให้ ค่า x_1 ถึง x_6 เป็น State Variables ดังต่อไปนี้

$$x_1 = y \qquad \text{------(2.3.5)}$$

$$x_2 = dy/dt \qquad \text{------(2.3.6)}$$

$$x_3 = k_1 \qquad \text{------(2.3.7)}$$

$$x_4 = P_1 \qquad \text{------(2.3.8)}$$

$$x_5 = 1/k_2 \qquad \text{------(2.3.9)}$$

$$x_6 = 1/P_2 \qquad \text{------(2.3.10)}$$

ดังนั้น สมการ 2.3.4 ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ อันดับสอง Second Order Differential Equation) จะเปลี่ยนรูปเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Differential Equation) ได้ 2 สมการ ดังแสดงในสมการ 2.3.11 และ 2.3.12

$$dx_1/dt = x_2 \qquad \text{-------(2.3.11)}$$

$$dx_2/dt = -x_2x_3x_4x_5x_6x_1^{(x_4x_6-1)} + x_5(r-x_1^{x_6}) \qquad \text{------ (2.3.12)}$$

สมการ 2.3.11 และ 2.3.12 เขียนให้อยู่ในรูป Matrix ได้ดังนี้

$$d/dt \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -x_2x_3x_4x_5x_6x_1^{(x_4x_6-1)} + x_5(r-x_1^{x_6}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \qquad \text{---(2.3.1}$$

ความผิดพลาดของ System Model ดังแสดงด้วย Vector w มีค่าเฉลี่ยทางสถิติเป็นศูนย์ และมีความแปรปรวน (Covariance) เป็น Matrix Q ดังแสดงในสมการ

$$E \ [w_j \ w_K^T] = Q_K \qquad \text{------(2.3.14)}$$

จากสมการ 2.3.13 เขียนให้กระชับจะได้สมการใหม่ดังสมการ 2.3.15

$$d/dt \ x \ (t) = f \ [x \ (t)] + W(t)] \qquad \text{------(2.3.15)}$$

สมการ 2.3.15 คือ System Equation ใน State Space

โดยที่

$$f_1 = x_2 \qquad \text{------(2.3.16)}$$

$$f_2 = -x_2x_3x_4x_5x_6x_1^{(x_4x_6-1)} + x_5(r - x_1^{x_6}) \qquad \text{------(2.3.17)}$$

$$f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0 \qquad \text{------(2.3.18)}$$

2.3.2 <u>Measurement Model</u>

จาก System Equation สมการ 2.3.15 นั้น ค่าตัวแปรที่สามารถแทนค่าจากข้อมูลจริงที่วัดได้ก็คือ อัตราการไหล q ซึ่งแสดงด้วยค่า Z โดยที่ Z เป็น Non-Linear

Function ของ x_1 กับ x_6 ดังสมการ

$$Z = q = y^{1/P_2} = x_1^{x_6} \qquad \text{------(2.3.19)}$$

โดยที่ $$y = q^{P_2} \qquad \text{-------(2.3.3)}$$

ดังนั้น Measurement Equation สามารถเขียนได้ดังนี้

$$Z(t) = h(x,t)+V(t) \qquad \text{------(2.3.20)}$$

โดย $h(x,t)$ เป็น Non-Linear Function ของตัวแปร x

$v(t)$ เป็นค่าความผิดพลาดเนื่องจากการวัด (Measurement Error)

2.3.3 Linearization of State Space Equation.

เนื่องจาก System Equation ใน State Space ดังแสดงในสมการ 2.3.13 เป็น Non-Linear Function โดย x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 และ x_6 เป็นตัวแปรที่เราต้องการคำนวณทราบค่า ดังนั้นจึงต้องแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยการทำ Linearization of Non— Linearity โดยการประยุกต์ใช้วิธี Taylor Series Expansion ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ

$$f[x(t)] = f(x^*) + A(x^*)\,(x-x^*) \qquad \text{------(2.3.21)}$$

โดยที่ x^* คือ Nominal Value หรือเป็นตัวแปรที่ทราบค่า ที่ใช้ในการ Linearization และ $A(x^*)$ คือ Jacobian Matrix ขนาด (6x6) กำหนดจากสมการ

$$A(x^*) = [\partial f/\partial x] \qquad \text{------(2.3.22)}$$

จาก Measurement Equation ในสมการ 2.3.20 ซึ่งเป็น Non-Linear Function เมื่อใช้วิธี Taylor Series Expansion ทำการ Linearization จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ

$$h[(x,t)] = h(x^*) + C(x^*)\,(x-x^*) \qquad \text{------ (2.3.23)}$$

โดยที่ $C(x^*)$ คือ Jacobian Matrix ขนาด (1x6) กำหนดจากสมการ

$$C(x^*) = [\partial h/\partial x] \qquad \text{------ (2.3.24)}$$

เมื่อนำสมการ 2.3.25 แทนค่าลงในสมการ 2.3.26 จะได้สมการ 2.3.27

$$f[x(t)] = f(x^*)+A(x^*)(x-x^*) \qquad \text{------ } (2.3.25)$$

$$d/dt\ x(t) = f[x(t)]+W(t) \qquad \text{------ } (2.3.26)$$

$$d/dt\ x(t) = A(x^*)\ x(t)+ r(t)+W(t) \qquad \text{------ } (2.3.27)$$

และเมื่อนำสมการ 2.3.28 แทนค่าลงในสมการ 2.3.29 จะได้สมการ 2.3.30

$$h[(x,t)] = h(x^*) + C(x^*)\ (x-x^*) \qquad \text{------ } (2.3.28)$$

$$z\ (t) = h(x,t)+V(t) \qquad \text{------ } (2.3.29)$$

$$\tilde{z}(t) = C(x^*)\ x(t) + s(t) + r(t) \qquad \text{------ } (2.3.30)$$

โดยที่

$$r(t) = f(x^*)-A(x^*)\ x^*(t) \qquad \text{------ } (2.3.31)$$

$$S(t) = h(x^*)-C(x^*)\ x^*\ (t) \qquad \text{------ } (2.3.32)$$

และจากสมการ 2.3.22 จะสามารถกำหนด Matrix $A(x^*)$ ได้ดังนี้

$$A(x^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{------ } (2.3.33)$$

โดยที่

$$a_1 = -x_2x_3x_4x_5x_6(x_4x_6-1)x_1^{x_4x_6-2} - x_5x_6x_1^{x_6-1} \qquad \text{------ } (2.3.34)$$

$$a_2 = -x_3x_4x_5x_6x_1^{x_4x_6-1} \qquad \text{------ } (2.3.35)$$

$$a_3 = -x_2x_4x_5x_6x_1^{x_4x_6-1} \qquad \text{------ } (2.3.36)$$

$$a_4 = -x_2x_3x_5x_6x_1^{x_4x_6-1}\ (1+x_4x_6\ \log x_1) \qquad \text{------ } (2.3.37)$$

$$a_5 = -x_2x_3x_4x_6x_1^{x_4x_6-1} - x_1^{x_6} + r \qquad \text{------ } (2.3.38)$$

$$a_6 = -x_2x_3x_4x_5x_1^{x_4x_6-1}\ (1+x_4x_6\ \log x_1)-x_5x_1^{x_6}\ \log x_1 \qquad (2.3.39)$$

และจากสมการ 2.3.31 สามารถเขียนในรูป Discrete Time K ดังนี้

$$r(t) = f(x^*) - A(x^*)\, x^*(t) \qquad \text{------ (2.3.31)}$$

$$r_k = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2x_3x_4x_5x_6x_1^{x_4x_6-1} + x_5(r-x_1^{x_6}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (2.3.40)$$

โดยที่ r_K คือ Deterministic Input ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปของ

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (-x_2x_3x_4x_5x_6x_1^{x_4x_6-1} + x_5(r-x_1^{x_6})) \\ \quad -(a_1x_1 + a_2x_2 \div a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.41)$$

โดยที่
$$(r_1)_k = 0$$
$$(r_2)_k = [(-x_2x_3x_4x_5x_6x_1^{x_4x_6-1} + x_5(r-x_1^{x_6})) -(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5+a_6x_6)]$$
$$(r_3)_k = 0$$
$$(r_4)_k = 0$$
$$(r_5)_k = 0$$
$$(r_6)_k = 0$$

2.3.4 Method of Solution

จากการทำ Linearization ในหัวข้อที่ผ่านมาแล้วนั้น System Equation และ Measurement Equation สามารถทำให้อยู่ในรูปของ Discrete Time K ซึ่งสามารถคำนวณค่าตัวแปรในช่วงเวลาต่างๆได้ดังสมการ

$$x_k = \phi_{k-1} X_{k-1} + \Lambda_{k-1} r_{k-1} + \Gamma_{k-1} W_{k-1} \quad \text{------}(2.3.42)$$

$$Z_k = C_k X_k + S_k + V_x \quad \text{-----} (2.3.43)$$

โดยที่ x_k = State Vector ที่ Discrete Time K (6x1)

r_{k-1} = Deterministic Input (6x1)

w_{k-1} = ค่าความผิดพลาดของ System Model (Model Error) (6x1)

Z_k = Measurement of State Variable X_1

S_k = Deterministic Input

V_k = ความผิดพลาดของการวัด (Measurement Error)

ϕ_{k-1} = State Transition Matrix (Known Matrix) (6x6)

Λ_{k-1} = Input Transition Matrix (Known Matrix) (6x6)

Γ_{k-1} = Model Error Transition Matrix (Known Matrix) (6x6)

C_k = Known Mapping Matrix (1x6)

ในการคำนวณแต่ละ Time Step ในขณะที่ยังไม่มีข้อมูลจากการวัด เรียกว่า State Estimate Extrapolation ซึ่งเขียนสมการให้อยู่ในรูป Discrete Time K ได้ดังนี้

$$\hat{x}_k(-) = \phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}(+) + \Lambda_{k-1} r_{k-1} \quad \text{------} (2.3.44)$$

เครื่องหมาย (-) หมายถึงค่าของตัวแปรที่ยังไม่ได้ทำการปรับเนื่องจากยังไม่มีการวัด ส่วนเครื่องหมาย (+) หมายถึงค่าที่ปรับแล้ว (update) จากข้อมูลการวัดและเครื่องหมาย ^ หมายถึงค่าที่ Estimate Extrapolate ดังแสดงในรูป 2.7 รายละเอียดของ State Transition Matrix ,ϕ_k และ Input Transition Matrix , Λ_k แสดงใน ภาคผนวก ข. และสมการ 2.3.44 เขียนในรูป Matrix ได้ดังนี้

$$
\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & \phi_{16} \\
\phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & \phi_{26} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} & \Lambda_{15} & \Lambda_{16} \\
\Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} & \Lambda_{25} & \Lambda_{26} \\
0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

หรือ

$$\hat{x}_{1k}(-)=\phi_{11}\hat{x}_{1k-1}(+)+\phi_{12}\hat{x}_{2k-1}(+)+\phi_{13}\hat{x}_{3k-1}(+)+\phi_{14}\hat{x}_{4k-1}(+)$$

$$+\phi_{15}\hat{x}_{5k-1}(+)+\phi_{16}\hat{x}_{6k-1}(+)+\Lambda_{12}r_{2k-1} \qquad \text{------ (2.3.46)}$$

$$\hat{x}_{2k}(-)=\phi_{21}\hat{x}_{2k-1}(+)+\phi_{22}\hat{x}_{2k-1}(+)+\phi_{23}\hat{x}_{3k-1}(+)+\phi_{24}\hat{x}_{4k-1}(+)$$

$$+\phi_{25}\hat{x}_{5k-1}(+)+\phi_{26}\hat{x}_{6k-1}(+)+\Lambda_{22}r_{2k-1} \qquad \text{------ (2.3.47)}$$

$$\hat{x}_{3k}(-)=\hat{x}_{3k-1}(+) \qquad \text{------ (2.3.48)}$$

$$\hat{x}_{4k}(-)=\hat{x}_{4k-1}(+) \qquad \text{------ (2.3.49)}$$

$$\hat{x}_{5k}(-)=\hat{x}_{5k-1}(+) \qquad \text{------ (2.3.50)}$$

$$\hat{x}_{6k}(-)=\hat{x}_{6k-1}(+) \qquad \text{------ (2.3.51)}$$

จะเห็นได้ว่า $\hat{X}_{3k}$, $\hat{X}_{4k}$, $\hat{X}_{5k}$ และ $\hat{X}_{6k}$ ไม่เปลี่ยนแปลงค่าในขณะที่อยู่ในขั้นตอน Estimate Extrapolation (พารามิเตอร์จะปรับเมื่อมีข้อมูลวัดจริง แต่ในช่วง

Extrapolate จะไม่ปรับ)   ส่วน Error Covariance Matrix ขนาด (6x6) แสดงใน สมการ 2.3.52

$$P_k = E[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T] \qquad \text{------(2.3.52)}$$

เมื่อ $\tilde{x}_k$ คือค่าความแตกต่างระหว่าง ค่าจริง(x_k) และค่าที่ได้จากการ Estimate($\hat{x}_k$) นั่นคือ $\tilde{X}_k = X_k - \hat{X}_k$ การ Extrapolate ของ Error Covariance Matrix ขนาด (6x6) สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$P_k(-) = \phi_{k-1} \; P_{k-1}(+) \; \phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \; Q_{k-1} \; \Gamma_{k-1}^T \qquad \text{--- (2.3.53)}$$

โดยที่กำหนดให้ Matrix ของ Γ_{k-1} เป็น Unit Matrix ฉะนั้น Matrix Q_k จึงเป็น Diagonal Matrix ดังแสดง

$$Q_{k-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \qquad \text{------(2.3.54)}$$

ค่า Q_{k-1} คือ Covariance Matrix of System Error โดยที่ $Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44}, Q_{55}$ และ Q_{66} คือ Varianceของ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, และ x_6 ตามลำดับ หลังจากได้ค่าจากการวัดในแต่ละ Time step แล้ว Measurement Equation ที่จะใช้คำนวณแสดงดังสมการ

$$Z_k = C_k X_k + V_k \qquad \text{----- (2.3.55)}$$

เมื่อ

$$C = [C_1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; C_6]$$

$$X = [x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6]^T$$

โดยที่ Superscript T หมายถึง Transpose of Matrix และ

$$C_1 = x_1 x_6^{-1} \qquad \text{------ (2.3.56)}$$

$$C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0 \qquad \text{------ (2.3.57)}$$

$$C_6 = 0 \qquad \text{------ (2.3.58)}$$

การปรับค่า (update) ของ State Vector เพื่อให้การคำนวณในครั้งต่อไปมี ความถูกต้องใกล้เคียงยิ่งขึ้น จะใช้สมการ

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k[Z_k - C_k X_k(-)] \qquad \text{------ (2.3.59)}$$

โดยที่ K_k คือ Kalman Gain Vector ซึ่งคำนวณได้จากสมการ จาก (Gautam,1983)

$$K_k = P_k(-)C_k^T[C_k P_k(-)C_k^T + R_k]^{-1} \qquad \text{------ (2.3.60)}$$

โดยที่ R_k คือความผิดพลาดของกระบวนการของการวัด ซึ่งในที่นี้ให้เป็นค่าคงที่ และจะเห็นว่าเทอมที่อยู่ในวงเล็บจะเป็น ปริมาณ Scalar, P_k เป็น Matrix (6x6) , C_k^T เป็น Matrix (6x1) ฉะนั้น K_k จึงเป็น Matrix ขนาด (6x1) การปรับค่า (update) State Vector ทำได้โดยสมการ 2.3.61 ถึง 2.3.66

$$\hat{x}_{1k}(+) = \hat{x}_{1k}(-)+K_{1k}[Z_k-C_1\hat{x}_{1k}(-)] \qquad \text{------ (2.3.61)}$$

$$\hat{x}_{2k}(+) = \hat{x}_{2k}(-)+K_{2k}[Z_k-C_1\hat{x}_{1k}(-)] \qquad \text{------ (2.3.62)}$$

$$\hat{x}_{3k}(+) = \hat{x}_{3k}(-)+K_{3k}[Z_k-C_1\hat{x}_{1k}(-)] \qquad \text{------ (2.3.63)}$$

$$\hat{x}_{4k}(+) = \hat{x}_{4k}(-)+K_{4k}[Z_k-C_1\hat{x}_{1k}(-)] \qquad \text{------ (2.3.64)}$$

$$\hat{x}_{5k}(+) = \hat{x}_{5k}(-)+K_{5k}[Z_k-C_1\hat{x}_{1k}(-)] \qquad \text{------ (2.3.65)}$$

$$\hat{x}_{6k}(+) = \hat{x}_{6k}(-)+K_{6k}[Z_k-C_1\hat{x}_{1k}(-)] \qquad \text{------ (2.3.66)}$$

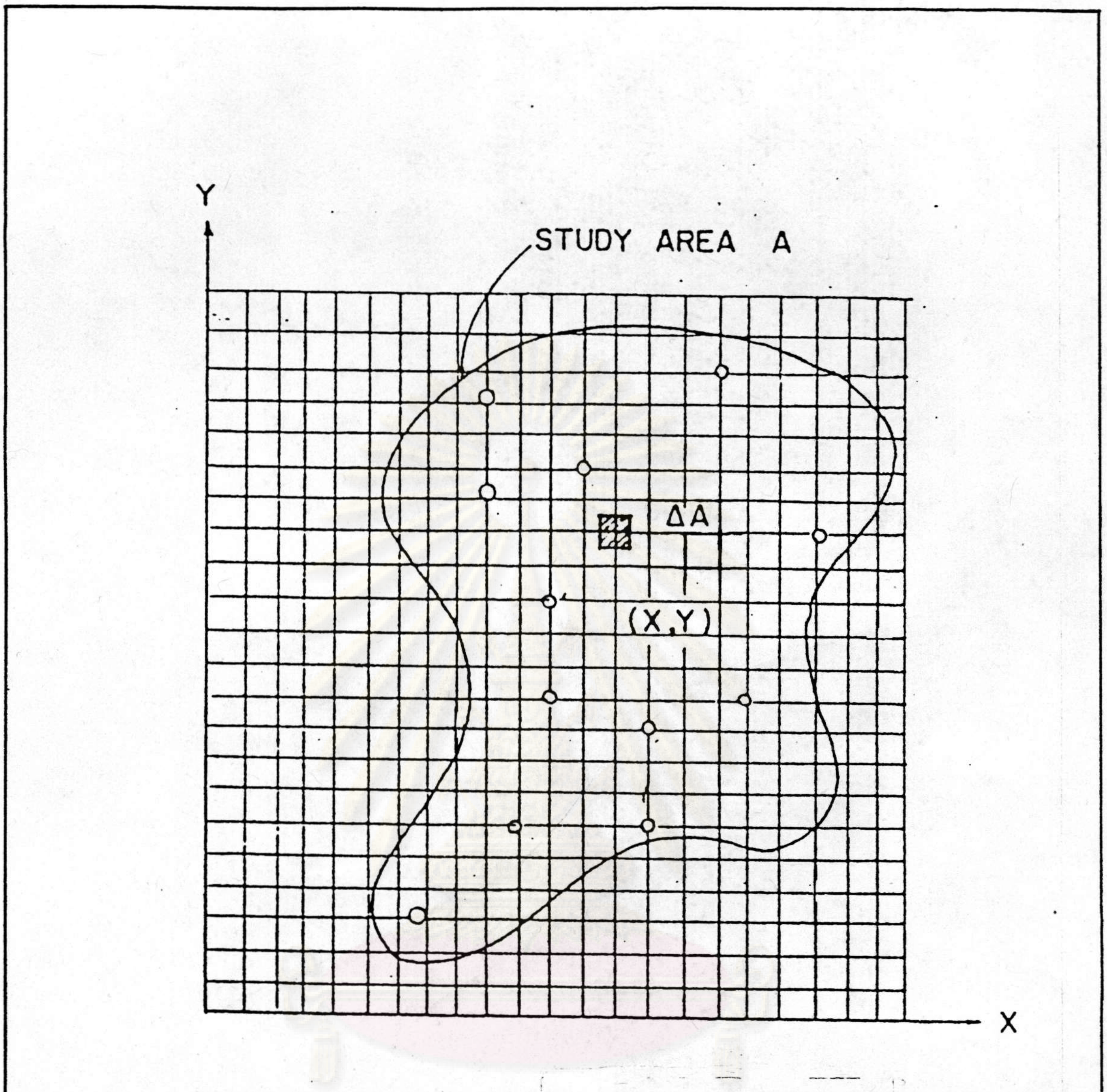
จะสังเกตว่าข้อมูลที่ได้มาจากการวัด จะมีค่าเดียวคือ อัตราการไหล(Z หรือ q)ในที่นี้คือค่า x_1 แต่นำมาปรับค่า (update) ค่าของ State Variable ทั้ง 6 ตัว ดังในสมการ 2.3.61 ถึง 2.3.66

และการปรับค่า (update) ของ Error Covariance Matrix ของ State Vector ทำได้ โดยใช้สมการ

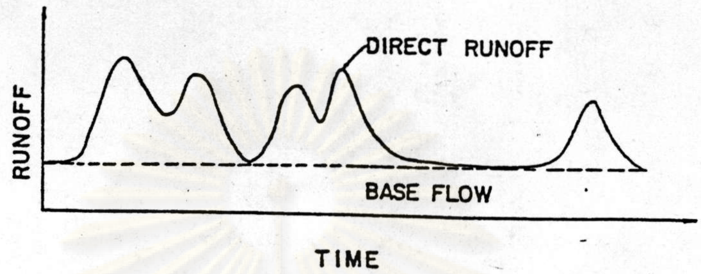
$$P_k(+) = [I-K_kC_k]\, P_k(-) \qquad \text{------} \quad (2.3.67)$$

โดยที่ I คือ unit Matrix

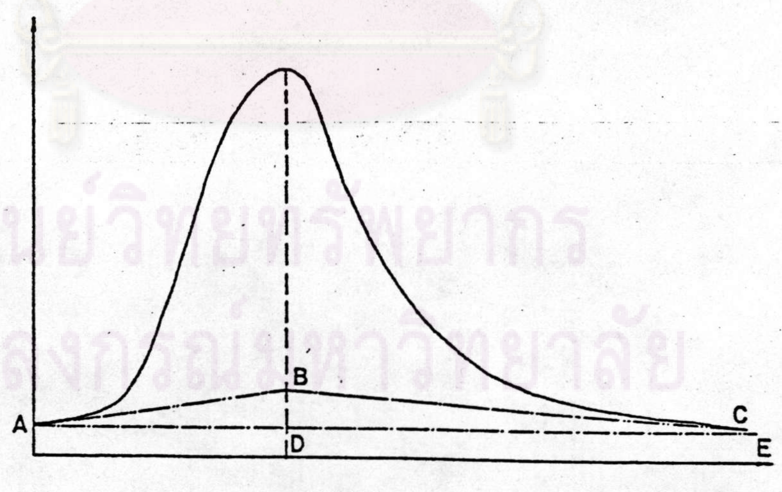
เพื่อให้เข้าใจขั้นตอนการคำนวณ ของ Kalman Filter ซึ่งได้กล่าวไปแล้วได้ดียิ่งขึ้น จึงได้แสดงขั้นตอนการคำนวณด้วย Flow Chart ไว้ในรูป 2.8



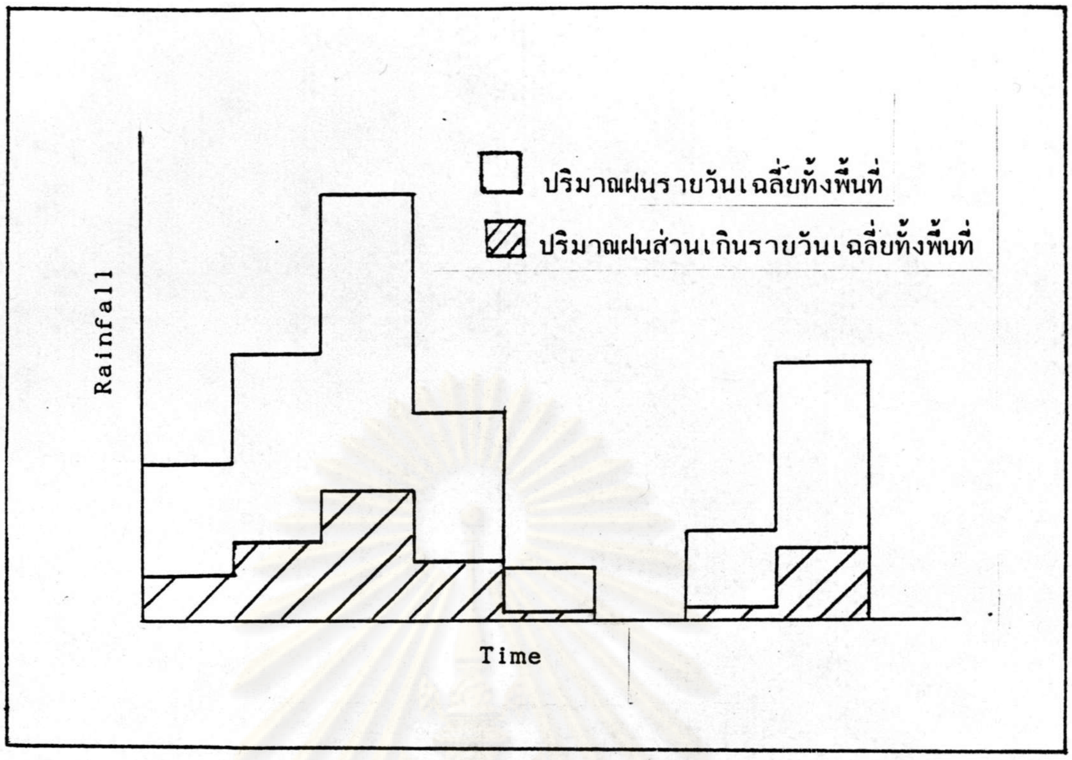
รูป 2.1 ตัวอย่างลักษณะกริดสำหรับการคำนวณปริมาณฝนเฉลี่ยของพื้นที่



รูป 2.2 แสดงส่วนประกอบของชลภาพ (Hydrograph)

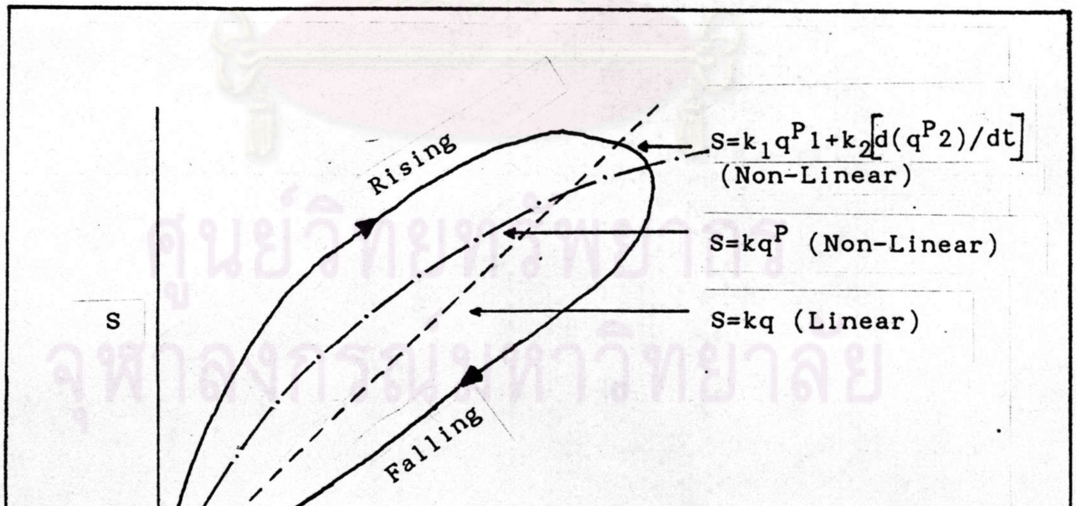


รูป 2.3 แสดงการแยก Base Flow ออกจากชลภาพ



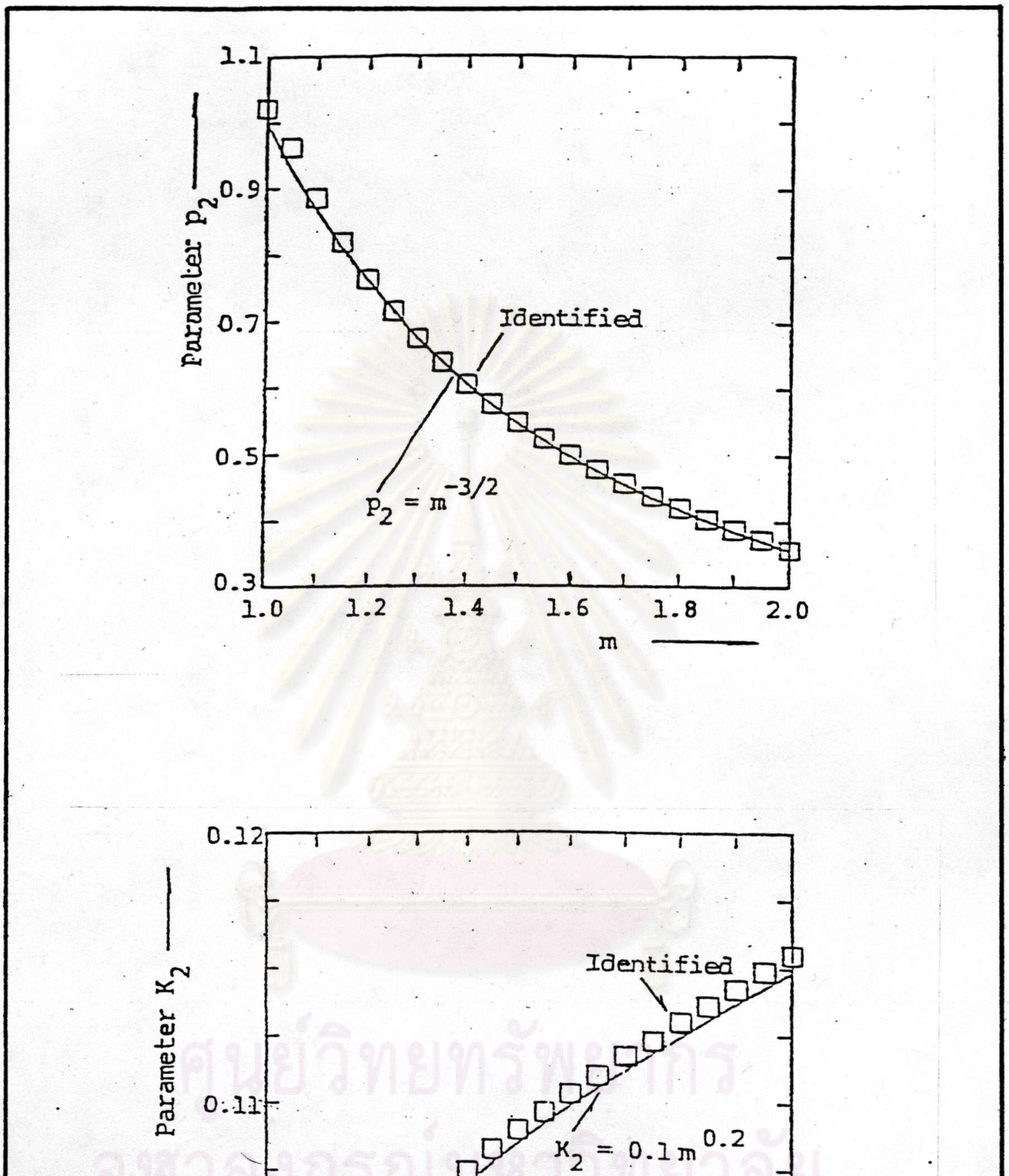
รูป 2.4 ความสัมพันธ์ของปริมาณฝนรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่

และปริมาณฝนส่วนเกินรายวันเฉลี่ยทั้งพื้นที่



รูป 2.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง Storage กับ อัตราการไหล (q) ของ

สมการหลักในแบบจำลองคณิตศาสตร์ชนิด LSFM และ NLSFM



รูป 2.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง K_2 และ P_2 กับ m

$\hat{X}_K(-)$, $\hat{X}_K(+)$: Estimates of state variables just before and after measurements at time step, K

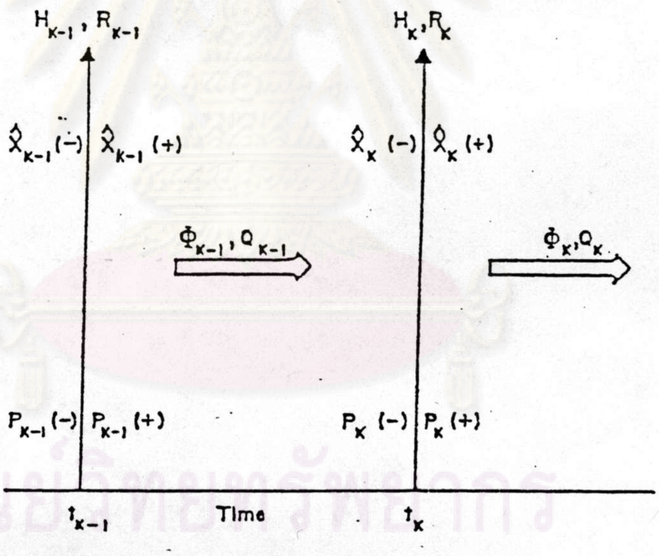
$P_K(-)$: Error covariance matrix of states just before measurement at step, K

Φ_K : Transition matrix

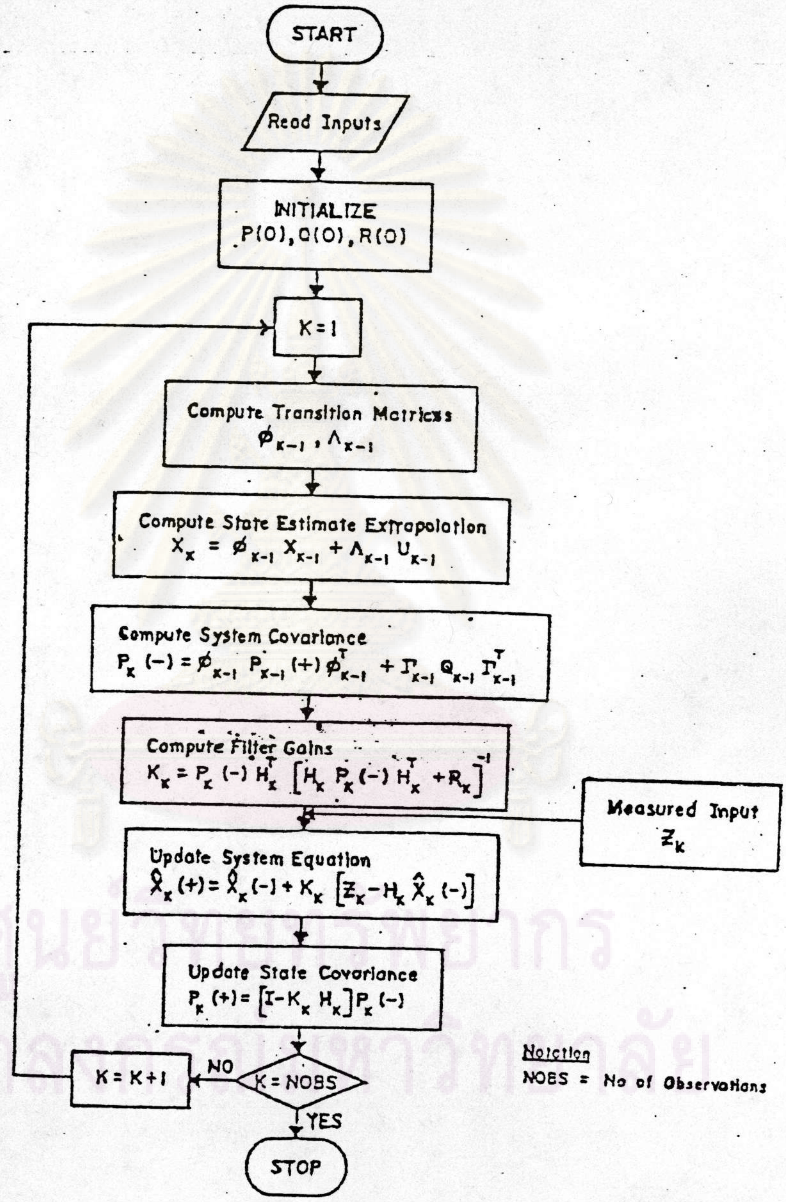
Q_K : Covariance matrix of system errors

R_K : Covariance matrix of measurement errors

H_K : Observation mapping matrix



รูป 2.7 ผังแสดง Discrete Kalman Filter Timing



รูป 2.8 ขั้นตอนการคำนวณโดยใช้ Kalman Filter Algorithm