บทที่ 4

การหาลักษณะสมบัติของระบบ

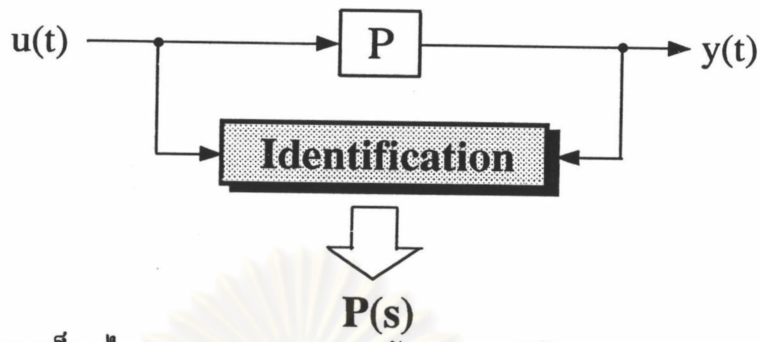
ในการหาลักษณะสมบัติของระบบนั้นเราจะต้องพิจารณาถึงโครงสร้างของระบบ แบบจำลองที่ใช้ในการประมวลผล และวิธีประมวลผล เพื่อให้เราสามารถที่จะทำการหาลักษณะสมบัติของระบบนั้น ๆ ได้อย่างมีความแม่นยำ ดังจะกล่าวได้ดังนี้

4.1 โครงสร้างของระบบและการหาลักษณะสมบัติ

เราสามารถแบ่งการหาลักษณะสมบัติของระบบได้เป็น 2 แบบ คือ การหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบเปิด (open loop identification) และการหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบปิด (closed-loop identification)

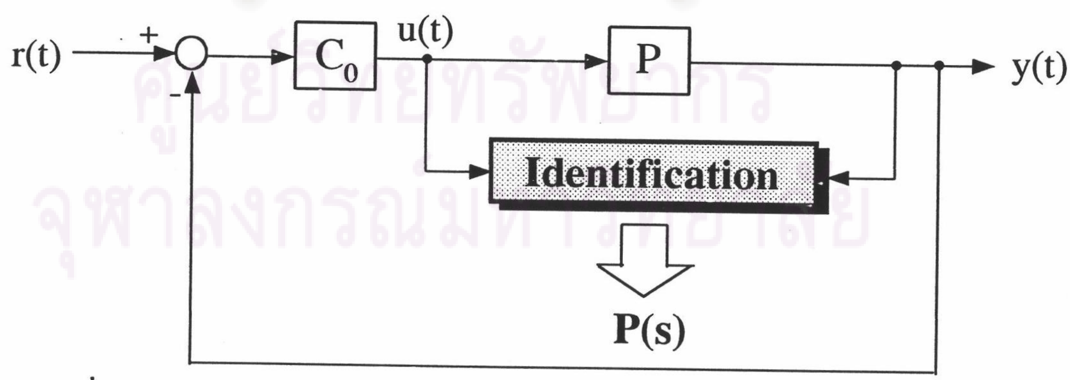
4.1.1 การหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบเปิด

การหาลักษณะสมบัติของระบบในลักษณะวงรอบเปิดทำได้โดยการป้อนสัญญาณด้านเข้าของระบบโดยตรงเพื่อไปกระตุ้นระบบที่เราต้องการจะหาคุณสมบัติ จากนั้นจึงนำเอาข้อมูลของสัญญาณด้านเข้าและสัญญาณด้านออกของระบบมาประมวลผลด้วยแบบจำลองที่ใช้ในการประมวลผลแบบต่างๆ อาทิเช่น autoregressive with exogenous variables (ARX) โดยจะใช้แบบจำลองใดนั้นขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของระบบ ซึ่งผลจากการประมวลทำให้เราสามารถทราบค่าพารามิเตอร์ของระบบได้ บล็อกไดอะแกรมของการหาลักษณะสมบัติแบบวงรอบเปิดแสดงได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 บล็อกไดอะแกรมแสดงการหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบเปิด

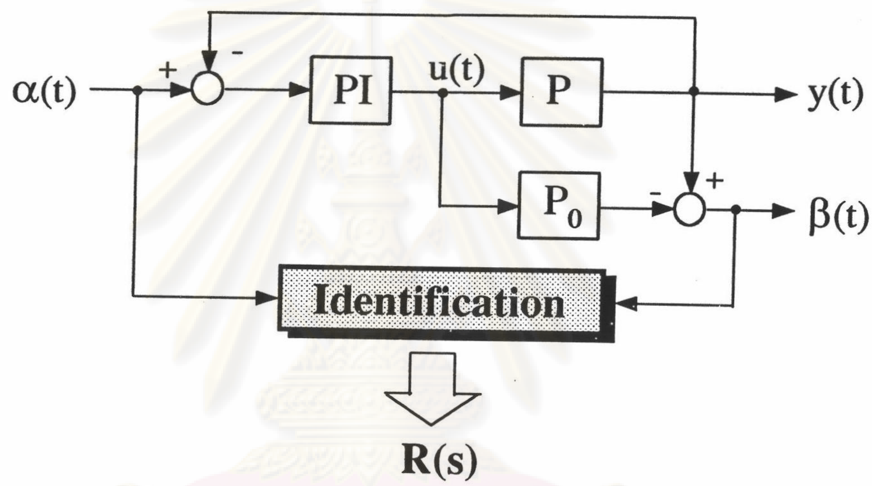
เนื่องจากเงื่อนไขสำคัญของการหาลักษณะสมบัติของระบบคือ การเลือกสัญญาณด้านเข้า u(t) ที่เหมาะสมเพื่อกระตุ้นระบบ ดังนั้นวิธีการหาลักษณะสมบัติโดยตรงแบบนี้จะเหมาะสำหรับในกรณีที่เราสามารถกำหนดสัญญาณด้านเข้าได้อย่างอิสระ อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงนั้นระบบในอุตสาหกรรมโดยทั่วไปมักจะมีโครงสร้างที่มีการป้อนกลับผ่านตัวควบคุมเป็นลักษณะวงรอบปิดดังแสดงในรูปที่ 4.2 ถึงแม้ว่าเราจะมีอิสระในการกำหนดสัญญาณอ้างอิง r(t) แต่สัญญาณด้านเข้าของระบบที่ต้องการหาลักษณะสมบัติคือ u(t) นั้นจะขึ้นกับตัวควบคุม $C_0(s)$ และสัญญาณค่าผิดพลาด r(t)-y(t) ซึ่งทำให้เราไม่สามารถที่จะกำหนดสัญญาณด้านเข้า u(t) ที่เหมาะสมในการหาลักษณะสมบัติของระบบได้อย่างอิสระ ดังนั้นการที่เราหาลักษณะสมบัติของระบบ $P(s)$ โดยตรงดังแสดงในรูปที่ 4.2 นั้นจึงอาจมีความแม่นยำไม่เพียงพอ



รูปที่ 4.2 บล็อกไดอะแกรมแสดงการหาลักษณะสมบัติของระบบ $P(s)$ โดยตรง
ในระบบที่มีโครงสร้างแบบวงรอบปิด

4.1.2 การหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบปิด

ในระบบอุตสาหกรรมโดยทั่วไปเราจะพบว่ามีการควบคุมโดยตัวควบคุมแบบ PI รวมอยู่ด้วยเป็นระบบวงรอบปิด ดังนั้นเราจึงต้องทำการพัฒนาวิธีการหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบปิดที่เหมาะสม ซึ่งเราอาศัยข้อสรุปจากบทที่ 3 ในรูปที่ 3.8 และสมการที่ (3.11) โดยเราจะไม่หาลักษณะสมบัติของระบบ $P(s)$ โดยตรง แต่เราจะหาค่าพารามิเตอร์ $R(s)$ ของระบบแทน โดยการกำหนดระบบอย่างคร่าว ๆ ที่เสถียรเป็น $P_0(s)$ ตามสมการที่ (3.9) เพื่อช่วยในการหาลักษณะ-สมบัติของระบบจริง $P(s)$ ได้ดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 บล็อกไดอะแกรมแสดงการหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบปิด

จากค่าพารามิเตอร์ $R(s)$ ที่ได้จากการหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบปิดนี้ จะทำให้เราสามารถทราบถึงระบบจริง $P(s)$ ได้จากการคำนวณโดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการที่ (3.8)

จากบล็อกไดอะแกรมดังรูปที่ 4.3 จะเห็นได้ว่าในกรณีนี้เราสามารถที่จะควบคุมสัญญาณด้านเข้า $\alpha(t)$ ให้เหมาะสมกับระบบได้อย่างอิสระเหมือนกับการหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบเปิด ทำให้เราสามารถทำการหาลักษณะสมบัติของระบบวงรอบปิดได้อย่างแม่นยำ และวิธีการนี้ยังมีข้อดีที่ใช้สัญญาณที่มีอยู่แล้วในตัวควบคุมของระบบในการประมวลผลได้ จึงง่ายต่อการนำไปใช้งานในทางปฏิบัติ

4.2 แบบจำลอง 'ARX' และวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุดที่ใช้ในการประมวลผล

ในการที่เราจะทำการหาลักษณะสมบัติของระบบ $P(s)$ หรือค่าพารามิเตอร์ $R(s)$ นั้น เราจำเป็นที่จะต้องกำหนดแบบจำลองของระบบที่เราจะทำการประมาณค่าเสียก่อน เนื่องจากเราต้องการจะศึกษาถึงการเลือกสัญญาณด้านเข้าเพื่อกระตุ้นระบบและผลของเวลาในการสุ่มตัวอย่างข้อมูลเพื่อนำมาประมวลผลเท่านั้น เราจึงเลือกใช้แบบจำลอง 'ARX' ในการประมวลผลเนื่องจากเป็นแบบจำลองที่ง่ายไม่ซับซ้อน โดยที่แบบจำลอง 'ARX' สามารถอธิบายได้โดยสมการความแตกต่างเชิงเส้นดังนี้ (L. Ljung, 1987) คือ

$$y(t)+a_1y(t-1)+\ldots+a_{n_a}y(t-n_a)=b_1u(t-1)+\ldots+b_{n_b}u(t-n_b)+e(t) \tag{4.1}$$

เมื่อเรากำหนดให้

$$\theta=[a_1 \quad a_2\ldots a_{n_a} \quad b_1\ldots b_{n_b}]^T$$

$$A(z)=1+a_1z^{-1}+\ldots+a_{n_a}z^{-n_a}$$

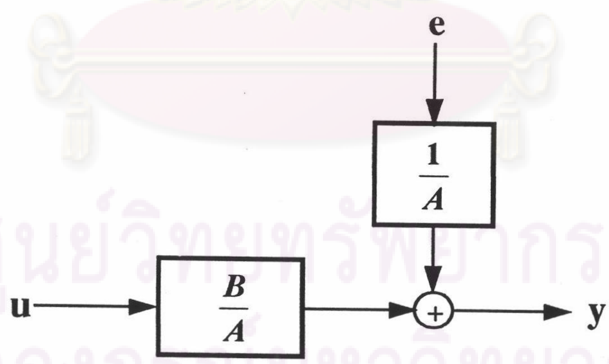
$$B(z)=b_1z^{-1}+\ldots+b_{n_b}z^{-n_b}$$

โดยที่ z , z^{-1} คือตัวดำเนินการเลื่อนข้อมูลไปหน้าและย้อนหลังตามลำดับ

เราจะสามารถเขียนสมการโครงสร้างของแบบจำลอง 'ARX' ได้ดังนี้

$$A(z)y(t)=B(z)u(t)+e(t) \tag{4.2}$$

และเราสามารถเขียนโครงสร้างของแบบจำลอง 'ARX' ได้ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 โครงสร้างของแบบจำลอง 'ARX'

จากสมการที่ (4.1) เราสามารถที่จะคำนวณค่าทำนายของ $y(t)$ สำหรับค่า θ ใด ๆ ได้ดังนี้คือ

$$\hat{y}(t|\theta)=B(z)u(t)+[1-A(z)]y(t) \tag{4.3}$$

จากสมการที่ (4.3) เราสามารถจัดรูปใหม่ ซึ่งเราเรียกว่าเป็นแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้น (linear regression) ได้ดังสมการต่อไปนี้คือ

$$\hat{y}(t|\theta)=\varphi^T(t)\theta \tag{4.4}$$

โดยกำหนดให้ φ คือเวกเตอร์ของรีเกรสเซอร์ (regressor) มีค่าตามความสัมพันธ์กับโครงสร้างของแบบจำลอง 'ARX' ในสมการที่ (4.1) ดังนี้

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2)\ldots -y(t-n_a) \quad u(t-1)\ldots u(t-n_b)]^T \tag{4.5}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่าค่าผิดพลาดจากการทำนาย (prediction error) จะมีค่าเป็นดังนี้

$$\varepsilon(t,\theta) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \tag{4.6}$$

สำหรับวิธีการประมวลผลที่เราจะนำมาใช้กับแบบจำลอง 'ARX' จะเป็นวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least squares) ซึ่งเป็นวิธีการที่เหมาะสำหรับแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้นสถิต และเราจะได้ว่าเกณฑ์ในการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least squares criterion) สำหรับแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้นจะเป็นดังนี้

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}[y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 \tag{4.7}$$

จากสมการที่ (4.7) เราสามารถวิเคราะห์หาค่าทำนายของ θ โดยวิธีการประมวลผลแบบการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุดได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \arg\min V_N(\theta) = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t) \tag{4.8}$$

โดยที่ $\arg\min f(x)$ คือค่าของ x ที่ทำให้ $f(x)$ มีค่าน้อยที่สุด (minimize)

N คือ คาบเวลาของสัญญาณ/เวลาในการสุ่มตัวอย่าง

จากสมการที่ (4.8) แสดงให้เห็นว่า ถ้าเราทราบถึงข้อมูลของสัญญาณด้านเข้า $u(t)$ และสัญญาณด้านออก $y(t)$ แล้ว เราสามารถที่จะทำนายค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันโอนย้ายของระบบได้ และเราสามารถที่จะเขียนสมการที่ (4.8) ได้ใหม่ในกรณีที่ป้อนสัญญาณด้านเข้าเป็นสัญญาณแบบคาบเวลาเป็น T เพื่อกระตุ้นระบบเป็นดังนี้

$$\hat{\theta}^{LS} = \arg\min \int_0^T \left[\hat{y}(t|\theta) - y(t)\right]^2 dt = \arg\min \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{y}(t|\theta) - y(t)\right]^2 dt \tag{4.9}$$

จากสมการที่ (4.2) เรากำหนดให้สัญญาณรบกวน e(t) = 0 เราจะได้ว่า

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) = \frac{B(z)}{1 + A'(z)}u(t) \tag{4.10}$$

โดยที่ $A(z) = 1 + A'(z)$

และเราจะได้ความสัมพันธ์ของระบบที่ประมาณได้เป็นดังนี้คือ

$$\hat{y}(t|\theta) = \left[\hat{B}(z) \quad -\hat{A}'(z)\right]\begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\hat{B}(z) \quad -\hat{A}'(z)\right]\begin{bmatrix} I \\ \\ \dfrac{B(z)}{A(z)} \end{bmatrix}u(t)$$

$$= [\hat{B}(z) - \hat{A}'(z)\frac{B(z)}{A(z)}]u(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) + [\frac{A(z)\hat{B}(z) - \hat{A}(z)B(z)}{A(z)}]u(t) \quad (4.11)$$

จากสมการที่ (4.10) และ (4.11) เราจะได้ว่าค่าผิดพลาดในการทำนายเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= [\frac{A(z)\hat{B}(z) - \hat{A}(z)B(z)}{A(z)}]u(t) = [\frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} - \frac{B(z)}{A(z)}]\hat{A}(z)u(t) \\ &= [\hat{G}(z) - G(z)]\hat{A}(z)u(t)\end{aligned} \quad (4.12)$$

จากสมการที่ (4.9) และ (4.12) เมื่อเราพิจารณาหาความสัมพันธ์เชิงเวลา (time domain) และเชิงความถี่ (frequency domain) ของการประมวลผลโดยวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุดโดยใช้หลักความสัมพันธ์ของ Parseval's equality จะได้ค่า $\hat{\theta}$ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^{LS} &= \arg\min \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{Y}(j\omega) - Y(j\omega)\right]^2 d\omega \\ &= \arg\min \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{G}(j\omega) - G(j\omega)\right|^2\left|\hat{A}(j\omega)\right|^2\left|U(j\omega)\right|^2 d\omega\end{aligned} \quad (4.13)$$

จากสมการที่ (4.13) จะเห็นได้ว่าค่าน้ำหนัก (weighting function) ของการประมวลผลคือสเปกตรัมของ $\hat{A}(z)$ คูณกับสเปกตรัมของสัญญาณด้านเข้า แต่เนื่องจากเราไม่สามารถที่จะควบคุมสเปกตรัมของ $\hat{A}(z)$ ได้ ดังนั้นสเปกตรัมของสัญญาณที่ป้อนเข้าเพื่อกระตุ้นระบบจะมีความสำคัญต่อการประมวลผลโดยวิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด กล่าวคือถ้าสัญญาณด้านเข้ามีพลังงานของสเปกตรัมค่อนข้างสูงในบริเวณแถบความถี่หลักของ G(s) จะทำให้เราสามารถประมวลผลหาค่าประมาณของ G(s) ได้ใกล้เคียงกับค่าจริง