การศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็งด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

นายเทิดธรรม อนันตเศรษฐ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2554

A STUDY OF HEAT CONVECTION EFFECT ON ICE FORMATION BY NUMERICAL METHOD

MR. THERDTHAM ANUNTASATE

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2011

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็งด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข
โดย	นายเทิดธรรม อนันตเศรษฐ
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร. กุณฑินี มณีรัตน์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร. บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร. กุณฑินี มณีรัตน์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จิตติน แตงเที่ยง)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร. วรางค์รัตน์ จันทสาโร)

เทิดธรรม อนันตศรษฐ : การศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็งด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข. (A STUDY OF HEAT CONVECTION EFFECT ON ICE FORMATION BY NUMERICAL METHOD), อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : รศ. ดร. กุณฑินี มณีรัตน์, 130 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้เสนอการศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยการใช้โปรแกรม FLUENT ซึ่งเป็นโปรแกรมเชิงพาณิชย์ในการจำลองแบบ องค์ประกอบหลักของวิทยานิพนธ์นี้แบ่งเป็น 3 ส่วน โดยส่วนแรกกล่าวถึงความเป็นมา ความสำคัญของหัวข้อวิจัย การรวบรวมและสรุปเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนสถานะของสสาร

ส่วนที่สองอธิบายถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและการใช้โปรแกรม โดยโปรแกรม FLUENT ใช้สมการพื้นฐานทางพลศาสตร์ของไหลเป็นสมการครอบคลุม และใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์วอลุมในการหาคำตอบ ใช้ enthalpy – porosity method ในการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะ, pressure - based solver ในการแก้ปัญหา, power-law scheme ในการประมาณค่าระหว่างจุดต่อ, first order implicit scheme ในการแบ่งย่อยเชิงเวลา และวิธี green – gauss cell based ในการประมาณค่าความชัน

ส่วนสุดท้ายเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม สำหรับปัญหาการก่อตัวของน้ำแข็งกรณีไม่มีการพาความร้อน พบว่าผลที่ได้มีแนวโน้มใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง และผลที่ได้จากงานวิจัยในอดีต โดยมีความคลาดเคลื่อนมากในบริเวณใกล้ขอบ และบริเวณเส้นแบ่งสถานะ เนื่องจากความชันของกากระจายตัวของอุณหภูมิที่มีค่ามากและการคำนวณความร้อนแฝง และสำหรับปัญหาการก่อตัวของน้ำแข็งกรณีมีการพาความร้อน พบว่าโปรแกรม FLUENT มีข้อจำกัดในการจำลองแบบคือมี mushy zone ปรากฏขึ้น แม้ว่าการเปลี่ยนสถานะของน้ำเป็นการเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจน

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อ อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ....
ปีการศึกษา 2554

547 02142 21 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEYWORDS : FLUENT / ICE FORMATION / CONVECTION / SIMULATION

THERDTHAM ANUNTASATE : A STUDY OF HEAT CONVECTION EFFECT ON ICE FORMATION BY NUMERICAL METHOD. ADVISOR : ASSOC.PROF. KUNTINEE MANEERATANA, Ph.D., 130 pp.

This thesis presents a study of heat convection effect on ice formation by a numerical method. The commercial program FLUENT is used to simulate the problem. The content of this thesis are divided into three main parts. The first consist of the problem background, motivation and a review of related studies.

The second part describes related theories and the use of finite volume - based FLUENT software. Basic fluid dynamics conservation equations are the governing equations while enthalpy – porosity method is used for the solidification. The model uses the pressure – based solver, power – law scheme, green – gauss cell – based gradient and first order implicit temporal scheme.

The last part of the thesis concern with the validation of the software. For ice formation without convection, the simulation results show the same trend as exact and validated numerical solution form previous research. The highest error occurs near the edge and at phase change interface due to high temperature gradient and the calculation of latent heat. For ice formation with convection, limitation of FLUENT software shown up since there exists the mushy zone despite the fact that water phase change is distinct.

Department : Mechanical Engineering Student's Signature ....
Field of Study : Mechanical Engineering Advisor's Signature ....
Academic Year : 2011

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. กุณฑินี มณีรัตน์ ที่ปรึกษาโครงการ ที่ช่วยให้คำแนะนำและคำปรึกษาอย่างใกล้ชิด ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ ที่สอนวิชา Numerical Method for Engineering และเน้นให้เห็นความสำคัญของการประยุกต์ใช้วิชาดังกล่าว ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย เลิศนุวัฒน์ ที่ปูพื้นฐานด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณในวิชา Introduction to Computational Fluid Mechanics ขอขอบคุณ พี่ๆ น้องๆ รวมถึงเพื่อนๆ ทุกคนที่ช่วยเป็นกำลังใจเสมอมา และขอขอบพระคุณคุณพ่อ คุณแม่ ตลอดจนอาจารย์ทุกท่านที่ช่วยประสิทธิ์ประสาทวิชาให้จนมาถึงทุกวันนี้

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากโครงการตรี/โท 5 ปี ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

ภาพที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงที่มาและความสำคัญของปัญหาการขึ้นรูปของน้ำแข็ง จากนั้นจะระบุวัตถุประสงค์ ขอบเขตของโครงการ และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ในประเทศไทยมีโรงงานผลิตน้ำแข็งเชิงพาณิชย์อยู่จำนวนมาก ซึ่งในการผลิตน้ำแข็งซองเชิงพาณิชย์นั้นต้องใช้พลังงานไฟฟ้าในปริมาณที่สูงมาก โรงงานผลิตน้ำแข็งซองโรงงานหนึ่งอาจจะใช้ไฟฟ้ามากกว่าหนึ่งแสนหน่วยต่อเดือน (สำนักงานคณะกรรมการนโยบายพลังงานแห่งชาติ, 2545) ดังนั้น หากสามารถทำนายการก่อตัวของน้ำแข็งในกระบวนการผลิตเชิงพาณิชย์ได้ ก็อาจนำไปสู่การลดการใช้ปริมาณไฟฟ้าในอุตสาหกรรมน้ำแข็งและการผลิตน้ำแข็งที่มีคุณภาพสูงขึ้น

ทั้งนี้ ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การทดลอง หรือจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ปัญหาโดยการทดลองจะทำให้ผู้วิจัยเห็นภาพรวมของปัญหาได้ชัดเจน รวมถึงลักษณะทางกายภาพของปัญหา ซึ่งอาจจะทำให้เข้าใจปัญหาได้ดีขึ้น อย่างไรก็ตาม การทำการทดลองนั้นมีค่าใช้จ่ายสูง ใช้เวลานาน และมักมีข้อจำกัดในการวัดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังนั้น ผู้วิจัยจำนวนมากจึงหันมาใช้การจำลองแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อหลีกเลี่ยงข้อจำกัด ของการทดลอง หรือผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ที่มีข้อจำกัดเพราะส่วนใหญ่สามารถหาผลเฉลยของปัญหาง่ายๆ เท่านั้น

ต่อมาเมื่อเทคโนโลยีก้าวหน้าขึ้น มีการนำความรู้เกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงเลขมาประยุกต์ใช้กับความรู้ทางด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการวิเคราะห์และหาผลเฉลยของปัญหาทางกลศาสตร์ต่างๆ ที่มีความแม่นยำเพียงพอต่อการใช้งาน ทำให้ระเบียบวิธีเชิงเลขนี้มีความสะดวกในการหาคำตอบกว่าผลเฉลยแม่นตรงและการทดลองมาก ดังนั้นในงานวิจัยจึงจะใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขในการหาผลเฉลยโดยประมาณ เพื่อทำนายการก่อตัวของน้ำแข็งในกระบวนการผลิตเชิงพาณิชย์และศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง

ระเบียบวิธีเชิงเลขที่จะนำมาใช้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นมีอยู่หลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (finite difference method, FDM), ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method, FEM) และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม (finite volume method, FVM) เป็นต้น

โดยระเบียบวิธีที่ผู้วิจัยจะนำมาใช้ในงานวิจัยนี้คือระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ซึ่งสามารถจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหากลศาสตร์ของไหลที่มีความซับซ้อนได้ง่ายมากกว่าระเบียบวิธีอื่นๆ ทำให้เป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาทางพลศาสตร์ของไหล

ระเบียบวิธีไฟไนท์วอลุมที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหามีทั้งเป็น โปรแกรมที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นเองโดยใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ต่างๆ เช่น Fortran, C++ และ Java และโปรแกรมเชิงพาณิชย์ (commercial software) ต่างๆ เช่น ParaView, FAST, STAR-CD และ FLUENT

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยต่อเนื่องจากวิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต (รจนา ประไพนพ, 2545) ที่ได้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์วอลุมในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของการแข็งตัวของน้ำแข็งซองใน 2 มิติ โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษา Fortran สร้างแบบจำลองซึ่งประมาณโดยใช้วิธี explicit, Crank-Nicholson และ fully implicit และการประมาณสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่เส้นแบ่งสถานะที่แตกต่างกัน จากนั้น เปรียบเทียบเทียบผลที่ได้จากการประมาณกับผลเฉลยแม่นตรง

เนื่องจากการพัฒนาโปรแกรมสำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อน เช่น การก่อตัวของน้ำแข็งในสภาวะที่มีการไหล ทำได้ยาก ประกอบกับห้องปฏิบัติการ Computational Modeling and Optimization มีโปรแกรม FLUENT ซึ่งเป็นโปรแกรมเชิงพาณิชย์อยู่ จึงได้พิจารณาใช้โปรแกรม FLUENT ในงานวิจัยนี้

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์เพื่อสร้างแบบจำลองการก่อตัวของน้ำแข็งซองที่ไม่มีการไหล และจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งที่มีการไหล โดยแบบจำลองที่ได้จะต้องเป็นอิสระจากอิทธิพลของการแบ่งกริดและการแบ่งช่วงเวลา (grid and time step independency) และถูกสอบทวนกับผลเฉลยแม่นตรงและผลจากงานวิจัยก่อนหน้า จากนั้นจะนำแบบจำลองดังกล่าวไปใช้ในการศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง

1.2 วัตถุประสงค์

1. ศึกษาการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์ เพื่อจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็ง โดยไม่พิจารณาผลของการไหลต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง
2. ศึกษาการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์ เพื่อจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งที่มีการไหลในแบบจำลอง และศึกษาผลของการพาความร้อนจากการไหลต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

สำหรับงานวิจัยในช่วงแรก ผู้วิจัยจะศึกษาการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์เพื่อจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งที่ไม่มีการไหล ที่มีอุณภูมิขอบเขตคงที่และไม่คงที่ โดยผู้วิจัยจำเป็นต้องตั้งสมมุติฐานที่ใช้ในการประมาณปัญหาจริงเพื่อให้สามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้น โดยในแบบจำลองกำหนดให้มีการถ่ายเทความร้อนข้ามขอบเขตของปริมาตรควบคุม คือการนำความร้อน (heat conduction) เท่านั้น โดยจะละทิ้งผลของการพาความร้อน และการแผ่ร้อน ดังนั้นขอบเขตของการวิจัยในช่วงแรกได้คือ การศึกษาขั้นตอนการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์เพื่อจำลองแบบปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งใน 3 มิติ รูปทรงสี่เหลี่ยมซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นอุณหภูมิคงที่และไม่คงที่ มีการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนเท่านั้น

สำหรับงานวิจัยในช่วงหลัง คือการศึกษาการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์ เพื่อจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งที่มีการไหล จะจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งในน้ำที่ไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ในท่อกลมใน 2 มิติ และการก่อตัวของน้ำแข็งในโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการไหล โดยกำหนดให้การถ่ายเทความร้อนข้ามขอบเขตปริมาตรควบคุมคือ การนำความร้อน และการพาความร้อนแบบบังคับ (forced heat convection) เท่านั้น โดยจะละเว้นผลของการแผ่รังสีความร้อน และการพาความร้อนรูปแบบอื่น ดังนั้น สามารถสรุปขอบเขตของงานวิจัยในช่วงหลังได้คือ การศึกษาการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์ เพื่อจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งในน้ำที่ไหลแบบราบเรียบในท่อกลมใน 2 มิติ และการก่อตัวของน้ำแข็งในโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่การไหล มีการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนและการพาความร้อนเท่านั้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ คือขั้นตอนการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์เพื่อจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งที่มีการไหล และทราบผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาการเปลี่ยนสถานะมีลักษณะพิเศษคือ มีการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะ (phase change interface) ทำให้ปัญหามีลักษณะไม่เชิงเส้น และต้องคำนวณค่าความร้อนแฝงระหว่างเปลี่ยนสถานะด้วย ในอดีต ได้มีการวิจัยเพื่อแก้ไขปัญหานี้อย่างต่อเนื่อง ในยุคแรก การพิจารณาผลเฉลยแม่นตรง (ภาคผนวก ก)เป็นเพียงวิธีเดียวที่จะสามารถอธิบายปรากฏการณ์การเปลี่ยนสถานะ ซึ่งการพิจารณาผลเฉลยแม่นตรงมีข้อจำกัดมาก กล่าวคือ สามารถอธิบายได้เพียงปัญหาอย่างง่าย เช่นปัญหาการแข็งตัวใน 1 มิติที่มีอุณหภูมิขอบเขตคงที่เท่านั้น

แต่ในความเป็นจริง ปัญหาการเปลี่ยนสถานะมีรูปแบบที่ค่อนข้างซับซ้อน ประกอบกับในยุคต่อมาคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้นมาก ทำให้มีการพัฒนาการแก้ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขอย่างต่อเนื่องและมีอยู่หลายรูปแบบ การพิจารณาทฤษฎีแนะแนวการแก้ปัญหาที่มีการแข็งตัว จะเป็นประโยชน์ในการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมในงานวิจัยนี้

2.1 ลักษณะการเปลี่ยนสถานะ

ในทฤษฎีทางฟิสิกส์นั้น การเปลี่ยนสถานะมีอยู่หลายรูปแบบ โดย Voller et al. (1990) ได้แบ่งลักษณะการเปลี่ยนสถานะของสารเป็น 3 แบบ คือ 1) การเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจน 2) การเปลี่ยนสถานะแบบอโลหะ และ 3) การเปลี่ยนสถานะอย่างต่อเนื่อง

การเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจน จะเกิดกับปัญหาที่อุณหภูมิเยือกแข็งมีค่าคงที่ (isothermal phase change) ทำให้สถานะของแข็งและของเหลวถูกแบ่งแยกกันอย่างชัดเจนด้วยเส้นแบ่งสถานะ (phase change interface) ที่มีลักษณะราบเรียบและต่อเนื่อง (smooth and continuous front) เช่น การขึ้นรูปของน้ำแข็ง (solidification of water) และ การแข็งตัวอย่างรวดเร็วของโลหะบริสุทธิ์ (rapid solidification of pure metals)

การเปลี่ยนสถานะแบบอโลหะเกิดในการเปลี่ยนสถานะที่มีโครงสร้างผลึก (crystalline structure) ซึ่งเป็นแท่ง (columnar)และ/หรือ เม็ด (equi-axed grains) และเส้นแบ่งสถานะมีลักษณะรูปร่างซับซ้อน เช่น การขึ้นรูปของอโลหะส่วนใหญ่ที่มีอุณหภูมิเยือกแข็งเป็นช่วงของอุณหภูมิ

ในการเปลี่ยนอย่างต่อเนื่อง สถานะของแข็งและของเหลวกระจายตัวอยู่ทั่วบริเวณที่มีการเปลี่ยนสถานะและไม่มีเส้นแบ่งสถานะที่ชัดเจนระหว่างสถานะทั้งสอง เช่น การขึ้นรูปของขี้ผึ้ง (wax) โพลิเมอร์ (polymer) หรือแก้ว (glass)

นอกจากนี้ Bejan (1993) ยังแยกความเร็วในการเปลี่ยนสถานาะโดยใช้ค่าสเตฟานนัมเบอร์ St

$$\mathrm{St} = \frac{C_s(T_F - T_c)}{L} \tag{2.1}$$

โดย C_s คือค่าความจุความร้อนจำเพาะของสารในสถานะของแข็ง, T_F คืออุณหภูมิเยือกแข็ง, T_c คืออุณหภูมิขอบเขต และ L คือค่าความร้อนแฝงจำเพาะ โดยถ้า Ste มีค่าน้อย เช่น Ste < 1 จะมีการเปลี่ยนสถานะอย่างช้าๆ สำหรับปัญหาที่พิจารณาสมบัติของน้ำ C_s = 1.762 kJ/kgK, T_F = 0°C และ L = 338 kJ/kg ถ้ากำหนดให้ T_c = –20°C จะได้ Ste = 0.124 ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีค่าน้อย ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการเปลี่ยนสถานะของน้ำเกิดขึ้นอย่างช้าๆ

นั่นคือ ปัญหาการขึ้นรูปของน้ำแข็งเป็นปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีอุณหภูมิคงที่ (isothermal phase change) มีการเปลี่ยนสถานะที่มีการแบ่งสถานะกันชัดเจนระหว่างสถานะของแข็งและของเหลว และเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ เนื่องจากค่า Ste < 1

2.2 ระเบียบวิธีเชิงเลขสำหรับแก้สมการการนำความร้อนที่มีการเปลี่ยนสถานะ

ในอดีตมีการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงเลขเพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรมอย่างต่อเนื่อง สำหรับการแก้สมการการนำความร้อนที่มีการเปลี่ยนสถานะ มีวิธีที่นักวิจัยจำนวนมากนิยมใช้ในการจำลองแบบ ได้แก่ วิธีกริดอยู่กับที่ วิธีกริดไม่คงที่ และวิธี latent-heat evolution

2.2.1 วิธีกริดอยู่กับที่ (fixed grid method)

วิธีกริดอยู่กับที่ได้กำหนดให้กริดอยู่กับที่ แล้วคำนวนหาอุณหภูมิที่แต่ละจุดต่อ ณ เวลาใดๆ ด้วยสมการการถ่ายเทความร้อน (heat flow equation) ส่วนตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะซึ่งมีการเคลื่อนที่ตลอดเวลา จะอยู่ระหว่างสองจุดต่อใดๆ และสามารถคำนวนได้จากอุณหภูมิที่แต่ละจุดต่อ ข้อดีของวิธีนี้คือ สามารถจัดการกับปัญหาการแข็งตัวในหลายมิติ ได้ง่ายและทำได้อย่างมีประสิทธิภาพ (Hu and Agryropulos, 1996) ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Basu and Date (1988) และ Voller et al. (1990)

อย่างไรก็ตาม วิธีกริดอยู่กับที่ไม่สามารถใช้ได้ในกรณีที่เส้นแบ่งสถานะเคลื่อนที่เป็นระยะทางมากกว่าขนาดของแต่ละกริดใน 1 ช่วงเวลา (time step) ซึ่งจะทำให้ต้องใช้หน่วยความจำและ CPU time มากขึ้น

2.2.2 วิธีกริดไม่คงที่ (variable grid method)

ปัญหาของวิธีกริดอยู่กับที่ดังกล่าว สามารถหลีกเลี่ยงได้โดยใช้วิธีกริดไม่คงที่ ซึ่งตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะจะถูกพิจารณาบนจุดต่อที่ทุกๆ เวลา วิธีกริดไม่คงที่มี 2 วิธีคือ interface fitting grid กับ dynamic grid

วิธี interface fitting grid จะแบ่งขนาดของกริดให้เท่ากัน แต่จะแบ่งขนาดของช่วงเวลาไม่เท่ากัน กล่าวคือ วิธีนี้จะพิจารณาขนาดของช่วงเวลาที่ทำให้เส้นแบ่งสถานะอยู่ในตำแหน่งเดียวกับจุดต่อ แทนการแบ่งขนาดของช่วงเวลาให้เท่ากันแล้วจึงพิจารณาตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะในภายหลัง ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Douglas and Gallie (1955), Goodling and Khader (1974), Gupta and Kumar (1980) และ Gupta and Kumar (1981) วิธีนี้มีข้อเสียคือไม่สามารถใช้กับปัญหาการแข็งตัวในหลายมิติ

สำหรับวิธี dynamic grid จะใช้ขนาดของช่วงเวลาเท่าๆ กัน และจำนวนของกริด ณ เวลาใดๆ จะมีค่าเท่ากัน แต่ขนาดของกริดจะไม่เท่ากัน ขนาดของกริดจะเป็นฟังก์ชันของเวลาโดยจะเปลี่ยนไปเรื่อยๆ เพื่อให้เส้นแบ่งสถานะอยู่ในตำแหน่งเดียวกับจุดต่อ ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Tien and Churchill (1965), Heitz and Westwater (1970) และ Crank and Gupta (1972)

2.2.3 วิธี latent-heat evolution

วิธีที่ได้กล่าวไปในหัวข้อ 2.1.1 และ 2.1.2 เป็นการใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขแบบ strong formulation เพื่อระบุตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะและการกระจายตัวของอุณหภูมิในแต่ละช่วงเวลา อย่างไรก็ตาม การใช้วิธีดังกล่าวกับปัญหาใน 3 มิติและปัญหาที่มีการไหลของของไหลมาเกี่ยวข้องนั้นทำได้ยากมาก

เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว นักวิจัยจำนวนมากได้หลีกเลี่ยงการแก้ปัญหาโดยใช้ strong numerical solution และหันมาแก้ปัญหาโดยใช้ weak numerical solution ซึ่งเงื่อนไขที่เส้นแบ่งสถานะจะมีความหมายแฝงอยู่ในสมการ วิธีดังกล่าวได้แก่ วิธี apparent heat capacity, วิธี effective heat capacity, วิธี heat integration และวิธี basic enthalpy เป็นต้น

2.2.3.1 วิธี apparent heat capacity

วิธีนี้จะใช้การเพิ่มขึ้นของค่าความจุความร้อนในช่วงอุณหภูมิ T ที่มีการเปลี่ยนสถานะแทนการคิดความร้อนแฝงโดยตรง ยกตัวอย่างเช่นหาก ความร้อนแฝงถูกปล่อยหรือดูดซับอย่างคงที่ในช่วงที่มีการเปลี่ยนสถานะ จะสามารถพิจารณา apparent heat capacity ได้ดังนี้

$$c_{app} = \begin{cases} c_s; & T < T_s \\ c_{in}; & T_s < T < T_L \\ c_L; & T > T_L \end{cases} \tag{2.2}$$

เมื่อ

$$c_{in} = \frac{\int_{T_s}^{T_L} c(T)dT + H_f}{(T_L - T_s)} \tag{2.3}$$

โดย T_s คืออุณหภูมิ Solidus, T_L คืออุณหภูมิ Liquidus, c คือค่าความจุความร้อน และ H_f คือค่าความร้อนแฝง

เมื่อเขียนสมการพลังงานในรูปของ apparent heat capacity จะได้

$$\rho c_{app} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k \frac{\partial T}{\partial x}) \tag{2.4}$$

โดย ρ คือความหนาแน่น, t คือเวลา, x คือระยะทางตามแนวแกน x และ k คือค่าสัมประสิทธ์การนำความร้อน

จะเห็นได้ว่าสามารถแก้สมการ (2.4) โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขได้ง่าย อย่างไรก็ตาม วิธี apparent heat capacity มีข้อเสียอยู่ คือ ในกรณีของการแข็งตัว หากอุณหภูมิของปริมาตรควบคุมลดลงอย่างรวดเร็ว โดยไม่ตกอยู่ในช่วงอุณหภูมิที่มีการเปลี่ยนสถานะใน 1 ช่วงเวลา ความร้อนแฝงจะไม่ถูกคำนวนด้วย ดังนั้น ขนาดของช่วงเวลาจำเป็นต้องเล็กมากเมื่อใช้วิธีนี้ นอกจากนั้น สำหรับสารบริสุทธิ์จำเป็นจะต้องมีการสมมุติช่วงอุณหภูมิเปลี่ยนสถานะเทียมเพื่อให้สมการที่ (2.2) มีความหมาย ซึ่งการสมมุติดังกล่าวอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการคำนวนได้ ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Hashemi and Sliepcevich (1967) และ Comini et al. (1974)

2.2.3.2 วิธี effective heat capacity

วิธีนี้ถูกพัฒนามาจากวิธี apparent heat capacity โดยแทนที่จะพิจารณา apparent capacity ที่แต่ละจุดต่อ จะพิจารณา effective capacity ผ่านการอินทิเกรตภายในปริมาตรควบคุม โดย

$$c_{eff} = \frac{\int c_{app} dV}{V} \tag{2.5}$$

เมื่อ c_{eff} คือ effective heat capacity, c_{app} คือ apparent heat capacity และ V คือปริมาตรควบคุม

ในวิธี effective heat capacity ผลของความร้อนแฝงจะถูกพิจารณาในแต่ละช่วงเวลาอย่างแน่นอน ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จะค่อนข้างแม่นยำ อย่างไรก็ตาม วิธีนี้นั้นค่อนข้างมีปัญหาเมื่อนำไปประยุกต์ใช้จริง โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับปัญหาที่มีความชันของ temperature gradient มาก ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Poirier and Sulcudean (1988)

2.2.3.3 วิธี heat integration

สำหรับวิธีนี้ อุณหภูมิในแต่ละปริมาตรควบคุมจะถูกตรวจสอบในกรณีของการแข็งตัว หากอุณหภูมิของปริมาตรควบคุมใดๆต่ำกว่าอุณหภูมิเยือกแข็ง จะกำหนดให้ปริมาตรวควบคุมนั้นมีการเปลี่ยนสถานะและจะกำหนดอุณหภูมิของปริมาตรควบคุมนั้นๆ ให้กลับมาที่อุณหภูมิเยือกแข็ง และนำส่วนต่างของอุณหภูมิที่คำนวณได้กับอุณหภูมิเยือกแข็งไปคำนวณเป็นความร้อนแฝงสะสม และเมื่อความร้อนแฝงสะสมมีค่าเท่ากับความร้อนแฝงที่ต้องการในการเปลี่ยนสถานะแล้ว อุณหภูมิในปริมาตรควบคุมนั้นๆ ก็จะถูกคำนวณโดยใช้สมการพลังงานตามปรกติ

วิธีนี้สามารถประยุกต์ใช้ได้ง่ายกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหลายมิติ และใช้ทรัพยากรในการคำนวณน้อย อย่างไรก็ตาม ความแม่นยำของวิธีนี้นั้นขึ้นอยู่กับการแบ่งขนาดของช่วงเวลา และการทำนายผลในบริเวณที่ใกล้กับเส้นแบ่งสถานะมักจะมีความคลาดเคลื่อน (Poirier and Sulcudean, 1988) ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Dusinberre (1945), Rolph and Bathe (1982), Argyropoulos and Guthrie (1979), Argyropoulos and Guthrie (1984) และ Argyropoulos (1981)

2.2.3.4 วิธี basic enthalpy

หลักการของวิธีนี้คือการใช้ค่าเอนทาลปี h และความสัมพันธ์ระหว่างเอนทาลปีกับอุณหภูมิเพื่อจัดการกับการปล่อยหรือเก็บกักความร้อนแฝงในขณะเปลี่ยนสถานะ ซึ่งจะกำหนดให้

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \tag{2.6}$$

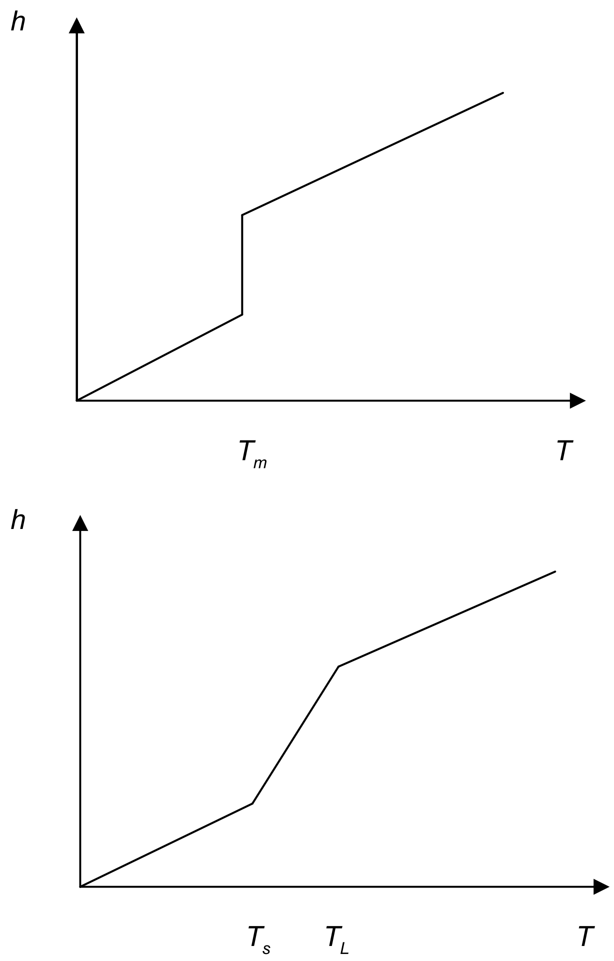
โดยความสัมพันธ์ระหว่างเอนทาลปีกับอุณหภูมิคือ

$$h = \begin{cases} c_s T; & T < T_m \\ c_L T + H_f; & T > T_m \end{cases} \tag{2.7}$$

สำหรับกรณี isothermal phase change และ

$$h = \begin{cases} c_s T; & T < T_m \\ c_{in} T; & T_s < T < T_L \\ c_L T + H_f + c_{in}(T_L - T_s); & T > T_m \end{cases} \qquad (2.8)$$

สำหรับกรณี non-isothermal phase change ซึ่งแสดงได้ดังภาพ 2.1



ภาพที่ 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างเอนทาลปีกับอุณหภูมิในกรณี isothermal phase change (บน) และ non-isothermal phase change (ล่าง)

วิธีนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ไม่ยากนักและให้ผลที่ค่อนข้างแม่นยำ อย่างไรก็ตาม ก็มีปัญหาในกรณีการเปลี่ยนสถานะที่อุณหภูมิคงที่ (isothermal phase change) เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของกราฟ *h-T* ดังแสดงในภาพที่ 2.1 ทำให้ต้องกำหนดช่วงอุณหภูมิเยือกแข็งเทียมขึ้นเพื่อให้ประมาณเชิงตรงในบริเวณนี้ได้ การกำหนดช่วงอุณหภูมิเยือกแข็งเทียมควรจะกำหนดให้มีค่าน้อยเพื่อมิให้เกิดความคลาดเคลื่อน แต่ต้องไม่น้อยเกินไปเมื่อเทียบกับช่วงเวลาที่ใช้ มิฉะนั้นจะทำให้ผลลัพธ์เกิดการกระโดดข้ามช่วงอุณหภูมิเยือกแข็งได้ ส่งผลให้ช่วงเวลาที่ใช้ใน

การคำนวณควรมีค่าน้อยด้วย ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Rose (1960), Shamsunder and Sparrow (1975), Bell and Wood (1983) และ Carslaw and Jaeger (1959)

2.3 ผลกระทบจากการพาความร้อนที่มีต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะ

การพาความร้อนสามารถจำแนกได้เป็นสองแบบคือการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (natural convection) และการพาความร้อนแบบบังคับ (force convection)

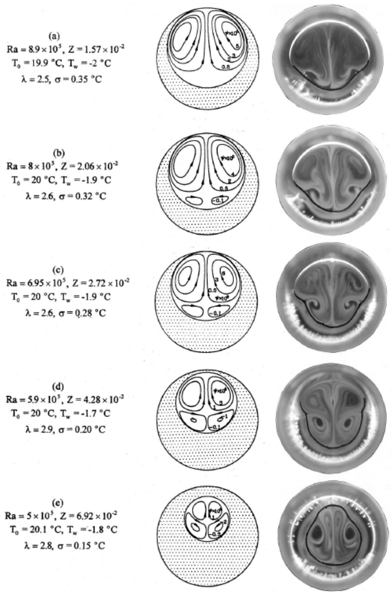
2.3.1 ผลกระทบจากการพาความร้อนแบบธรรมชาติที่มีต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะ

ในปัญหาการเปลี่ยนสถานะ นอกจากการถ่ายเทความร้อนโดยการนำความร้อน (heat conduction) แล้ว การถ่ายเทความร้อนจากการพาความร้อนแบบอิสระ (free convection) หรือการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (natural convection) ก็เกิดขึ้นด้วย เนื่องจากน้ำในสถานะของเหลวเคลื่อนที่ด้วยแรงลอยตัว (buoyancy force) ซึ่งเกิดจากความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) เนื่องจากความหนาแน่นของน้ำแปรผันกับอุณหภูมิ เมื่ออุณหภูมิภายในโดเมนมีค่าไม่เท่ากัน ความหนาแน่นของน้ำในโดเมนจะไม่เท่ากันด้วย ดังนั้นโมเลกุลของน้ำจึงเคลื่อนที่ด้วย unbalanced body force

ในอดีต นักวิจัยจำนวนมากหลีกเลี่ยงที่จะวิเคราะห์ผลของการพาความร้อนธรรมชาติที่มีต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะ เนื่องจากปัญหาดังกล่าวมีลักษณะซับซ้อนและมีข้อจำกัดทางด้านเทคโนโลยี อย่างไรก็ตามงานวิจัยบางส่วน เช่น Hale and Viskanta (1978) ได้ศึกษาการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะของของแข็งที่หลอมเหลวเนื่องจากความร้อนจากผนังที่มีอุณหภูมิคงที่ ด้วยโดยวิธีการทดลองและถ่ายภาพ ผลการทดลองระบุว่าการพาความร้อนมีอิทธิพลอย่างยิ่งต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะ โดยนอกจากจะส่งผลต่ออัตราการแข็งตัวหรือหลอมเหลวของสสารแล้ว การพาความร้อนยังส่งผลต่อโครงสร้างและการกระจายตัวของโมเลกุลสสารในสถานะของเหลวอีกด้วย

Tsai et al. (1997) ได้ศึกษาอิทธิพลของการพาความร้อนที่มีผลต่อการขึ้นรูปของน้ำที่ไหลแบบราบเรียบภายในท่อ (water pipe flow solidification) โดยการทำทดลองเพื่อเปรียบเทียบกับผลจากระเบียบวิธีเชิงเลข พบว่าผลของความชันของอุณหภูมิจะทำให้เกิดการไหลวน (vortex) ของน้ำในสถานะของเหลว ดังแสดงในภาพที่ 2.2 ซึ่งจะทำให้การก่อตัวของชั้นน้ำแข็งไม่สม่ำเสมอ หากสร้างแบบจำลองโดยไม่พิจารณาผลของการพาความร้อน จะพบว่าการ

ก่อตัวของชั้นน้ำแข็งจะสม่ำเสมอ โดยเริ่มแข็งตัวจากขอบท่อจนถึงจุดศูนย์กลางท่อ ดังนั้น จะเห็นว่าอิทธิพลของการพาความร้อนมีผลต่อการขึ้นรูปน้ำแข็งมาก นอกจากนี้งานวิจัยของ Vynnycky and Kimura (2007) ซึ่งศึกษาอิทธิพลของการพาความร้อนที่มีต่อการขึ้นรูปของน้ำแข็งภายในรูปร่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด ด้วยการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์แบบไร้มิติ และการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม Comsol Multiphysics ซึ่งเป็นเชิงพาณิชย์ที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหา ก็อธิบายผลของการพาความร้อนแบบธรรมชาติต่อการขึ้นรูปของน้ำแข็งในทำนองเดียวกัน คือการไหลวนของน้ำภายในโดเมนที่มีสถานะเป็นของเหลวทำให้การก่อตัวของชั้นน้ำแข็งมีความไม่สม่ำเสมอ



ภาพที่ 2.2 ภาพถ่ายโครงสร้างของน้ำแข็งและรูปแบบการไหล (Tsai et al , 1997)

สำหรับการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการพาความร้อนใช้สมการอนุรักษ์มวล และสมการอนุรักษ์โมเมนตัม (mass and momentum conservation equations) หรือสมการนาเวียร์-สโตกส์ (the Navier-Stokes equations) คือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.9}$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \tag{2.10}$$

โดย $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว, μ คือค่าความหนืด, p คือความดัน และ $\vec{g}$ คือความเร่งโน้มถ่วง

โดย substantial derivative ในพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate), gradient และ Laplacian operator คือ

$$\frac{D()}{Dt}=\frac{\partial()}{\partial t}+u\frac{\partial()}{\partial x}+v\frac{\partial()}{\partial y}+w\frac{\partial()}{\partial z},\nabla=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z},\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.11)$$

เนื่องจากความไม่เป็นเชิงเส้นของสมการนาเวียร์-สโตกส์ ทำให้การหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการพาความร้อนนั้นทำได้ยาก และทำได้ในกรณีที่ปัญหาไม่มีความซับซ้อน เช่น การหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในปัญหาการหลอมเหลวในโดเมนขนาดกึ่งอนันต์ใน 1 มิติ เท่านั้น

สำหรับปัญหาที่ซับซ้อน จำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขเข้ามาช่วยจัดการ ระเบียบวิธีเชิงเลขที่มีการใช้กันอย่างกว้างขวางมีอยู่ 2 วิธี คือ วิธี stream-function-vorticity และวิธี primitive variable formulations

1. วิธี stream-function-vorticity

วิธี stream-function-vorticity เป็นวิธีที่มักจะใช้กับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณใน 2 มิติ โดยสำหรับการไหลแบบไม่สามารถอัดตัวได้ใน 2 มิติ กำหนดให้ stream function ψ และ vorticity ω คือ

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.13)$$

โดย u คือความเร็วตามแนวแกน x และ v คือความเร็วตามแนวแกน y

จากนิยามดังกล่าวจะทำให้สมการอนุรักษ์มวลเป็นจริงเสมอโดยอัตโนมัติ เนื่องจาก

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0 \quad (2.14)$$

ซึ่งถือว่าเป็นข้อได้เปรียบของวิธี stream-function-vorticity ที่มีเหนือวิธี primitive variable formulations เนื่องจากไม่จำเป็นต้องแยกคิดสมการอนุรักษ์มวลจากสมการนาเวียร์-สโตกส์

จากนั้นแทนสมการ (2.12) ลงในสมการ (2.13) เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง stream function กับ vorticity คือ

$$\nabla^2\psi=-\omega \quad (2.15)$$

และจากการแทนสมการที่ (2.12) และ (2.13) ลงในสมการนาเวียร์-สโตกส์ (2.10) จะได้สมการในรูปใหม่ของสมการ vorticity คือ

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \omega \tag{2.16}$$

ปัญหาในการคำนวณพจน์ความดันในสมการ (2.10) จะถูกจัดการได้โดยใช้สมการ (2.15) และ (2.16) แทนที่จะจัดการกับปัญหาในรูปสมการ (2.9) และ (2.10) ในรูปแบบตัวแปรตั้งต้น เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงการพิจารณาพจน์ของความดันในสมการนาเวียร์-สโตกส์ และสามารถตัดขั้นตอนในการคำนวณสนามความดันได้

วิธีนี้ยังสามารถประยุกต์ใช้ได้กับวิธี alternation direction implicit (ADI) เพื่อที่จะประหยัดทรัพยากรในการคำนวณและเพิ่มความเร็วในการหาคำตอบ อย่างไรก็ตาม วิธีนี้มีข้อเสียหลักคือพจน์ของความดันซึ่งถูกกำจัดไป มักจะเป็นผลที่สำคัญซึ่งจำเป็นต้องใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติกายภาพที่เกี่ยวกับอุณหภูมิ (thermophysical properties) ในหลายการวิจัย นอกจากนั้นวิธีนี้ยังไม่สามารถใช้ได้กับปัญหาในสามมิติเนื่องจากไม่สามารถนิยาม stream function ในสามมิติได้ ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Ramachandran and Gupta (1982), Okada (1984) และ Ho and Chen (1986)

2. วิธี primitive variable formulations

เป็นการจัดการกับสมการนาเวียร์-สโตกส์ ในรูปแบบตัวแปรดั้งเดิม ซึ่งพจน์ของความดันจะไม่ถูกกำจัดออกไป ข้อดีของวิธีนี้คือจะได้ผลของความดันและสามารถใช้กับปัญหาในสามมิติได้ โดยทั่วไปวิธีนี้มักจะถูกใช้ร่วมกับวิธี marker and cell (MAC method) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ ในการแก้สมการครอบคลุม โดยวิธีนี้ จะคำนวณความเร็วในแต่ละช่วงเวลาจากสมการอนุรักษ์โมเมนตัม และความเร็วจะอยู่ในรูปของสนามความดัน ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้คือ Harlow and Welch (1965) และ Nichols et al. (1980) เป็นต้น

อย่างไรก็ตามการจำลองแบบปัญหาเปลี่ยนสถานะที่มีการพาความร้อนแบบธรรมชาติโดยใช้โปรแกรม Fluent นั้นทำได้ค่อนข้างยากเนื่องจากจำเป็นต้องกำหนดให้ความหนาแน่นของน้ำเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยตามอุณหภูมิ ซึ่งจะทำให้สมการอนุรักษ์มวลนั้นไม่เป็นจริง ในกรณีที่กำหนดให้โดเมนของปัญหามีปริมาตรคงที่ (fixed volume domain)

2.3.2 ผลกระพบจากการพาความร้อนแบบบังคับที่มีผลต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะ

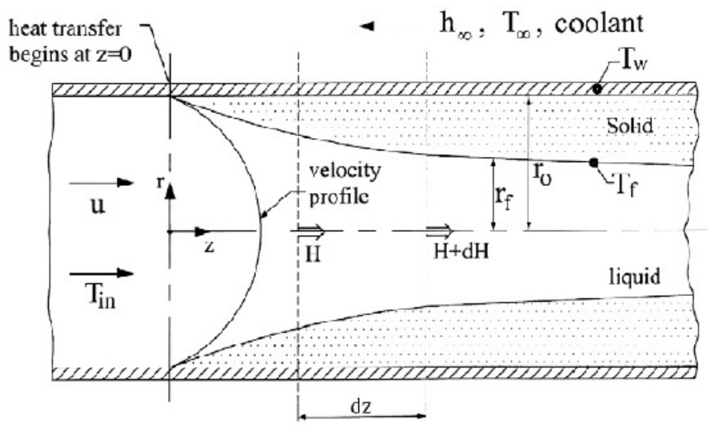
งานวิจัยที่พิจารณาผลของการพาความร้อนแบบบังคับที่มีผลต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะมีจำนวนน้อยกว่างานวิจัยที่พิจารณาผลของการพาความร้อนแบบธรรมชาติที่มีผลต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะอย่างเห็นได้ชัด คาดว่าเนื่องจากงานในวงการอุตสาหกรรมที่บังคับให้ของไหลที่

กำลังเปลี่ยนสถานะเกิดการไหลมีอยู่น้อย ในขณะที่ การพาความร้อนแบบธรรมชาติที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิสามารถพบเห็นได้มากกว่ามาก

งานวิจัยที่พิจารณาผลของการพาความร้อนแบบบังคับต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะ ระบุว่า การพาความร้อนแบบบังคับส่งผลต่อลักษณะการขึ้นรูป และโครงสร้างของน้ำแข็งเช่นเดียวกับการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

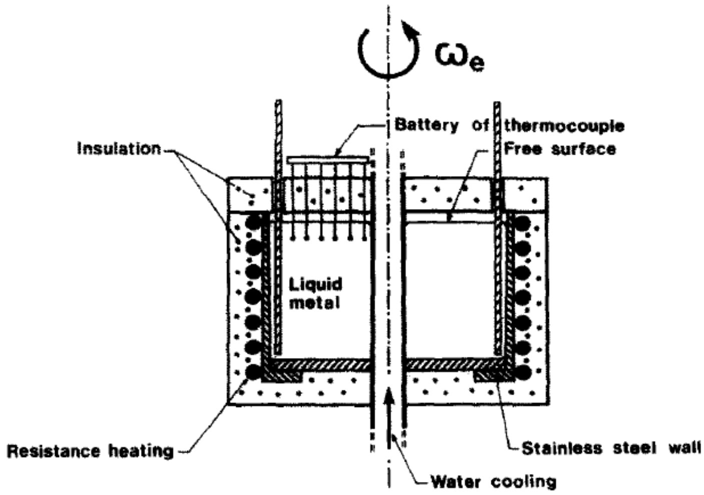
Seeniraj and Sankara Hari (2008) ได้ศึกษาการแข็งตัวในสภาวะชั่วครู่ของของไหลซึ่งถูกบังคับให้ไหลภายในท่อกลมซึ่งถูกทำความเย็น โดยใช้วิธีวิเคราะห์ด้วยตัวแปรไร้มิติเพื่อหาคำตอบแบบกึ่งแม่นตรง โดยศึกษาปัญหาการแข็งตัวของของไหลทั้งของไหลที่ไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) และของไหลที่ไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) ดังแสดงในภาพที่ 2.3 โดยมีสมมุติฐานสำคัญคือการไหลเป็นการไหลแบบ quasi-steady และมีการไหลของน้ำเข้าสู่ท่อด้วยอัตราการไหลและอุณหภูมิคงที่ งานวิจัยนี้ใช้สมการครอบคลุม 2 สมการคือสมการอนุรักษ์พลังงานในบริเวณที่ของไหลมีสถานะเป็นของเหลว และสมการการอนุรักษ์พลังงานบริเวณเส้นแบ่งสถานะ (interface) โดยผู้วิจัยได้ศึกษาลักษณะการก่อตัวของน้ำแข็งด้วยการทดลองเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ของปัญหาต่างๆ เช่น Biot number ซึ่งแสดงถึงค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน เป็นต้น

พบว่าเมื่อเวลาผ่านไป ของไหลที่ไหลผ่านท่อจะมีอุณหภูมิลดลง จากนั้นจึงเริ่มแข็งตัวและก่อตัวหนาขึ้นเรื่อยๆตามแนวแกน ทำให้ความเร็วของการไหลเพิ่มขึ้นตามแนวแกนตามหลักของกฏการอนุรักษ์มวล นอกจากนั้นยังพบว่าอัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งจะแปรผันกับ Biot number และแปรผกผันกับอุณหภูมิขาเข้า และอุณหภูมิสิ่งแวดล้อม (ambient temperature)

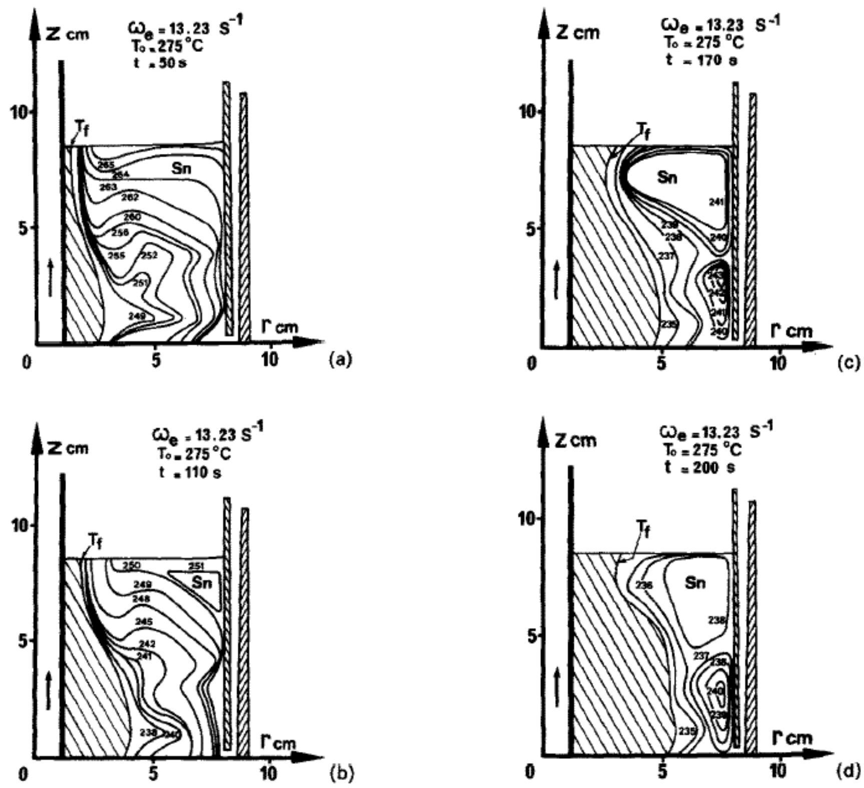


ภาพที่ 2.3 การแข็งตัวของไหลซึ่งถูกบังคับให้ไหลภายในท่อซึ่งถูกทำความเย็น
(Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

Vives (1988) ได้ทำการทดลองเพื่อศึกษาผลของการไหลแบบ forced couette ต่อการแข็งตัวของดีบุกภายในแม่พิมพ์ทรง toroid โดยได้สร้างชุดทดลองดังแสดงในภาพที่ 2.4 เพื่อวิเคราะห์โครงสร้างการก่อตัวของดีบุก และวัดสมบัติทางการไหลต่างๆ



ภาพที่ 2.4 ชุดทดลองของเพื่อศึกษาผลของการไหลแบบ forced couette ต่อการแข็งตัวของดีบุก (Vives, 1988)



ภาพที่ 2.5 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา (a) t = 50 s (b) t = 110 s (c) t = 170 s (d) t = 200 s (Vives, 1988)

ผลการทดลองระบุว่าขนาดของความเค้นเฉือน และความเร็วเฉลี่ยของการไหล ส่งผลโดยตรงต่อโครงสร้างผลึก, ลักษณะโครงสร้างของดีบุก และการกระจายตัวของอุณหภูมิในดีบุกเหลวที่กำลังไหล ดังแสดงในภาพที่ 2.5

2.4 สรุป

จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่ามีงานวิจัยเกี่ยวกับ ปัญหาการเปลี่ยนสถานะอย่างต่อเนื่อง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่ไม่พิจารณาผลของการพาความร้อน อย่างไรก็ตาม ยังไม่พบงานวิจัยที่ใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์ในการจำลองแบบ นอกจากนั้นงานวิจัยบางส่วนแสดงให้เห็นว่า อิทธิพลของการพาความร้อนมีอิทธิพลต่อปัญหาการเปลี่ยนสถานะมาก โดยสำหรับการพาความร้อนแบบธรรมชาติ นอกจากจะส่งผลต่ออัตราการแข็งตัวหรือหลอมเหลวของสสารแล้ว ยังส่งผลต่อโครงสร้างและการกระจายตัวของโมเลกุลน้ำในสถานะของเหลวอีกด้วย ส่วนการพาความร้อนแบบบังคับจะส่งผลต่อลักษณะการก่อตัวของน้ำแข็งโดยลักษณะการแข็งตัวของน้ำแข็งจะขึ้นกับพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของปัญหา

ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเลือกศึกษาการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์เพื่อศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง ซึ่งเป็นปัญหาที่ซับซ้อนและพัฒนาโปรแกรมที่ใช้ในการจำลองแบบได้ยาก และเพื่อให้การใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ จำเป็นต้องศึกษาวิธีการใช้โปรแกรม วิธีการเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขในการจำลองแบบ และทฤษฎีเบื้องหลังโปรแกรมเชิงพาณิชย์ ซึ่งการศึกษาในหัวข้อดังกล่าวจะถูกอภิปรายในบทถัดไป

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
และการเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขในการจำลองแบบ

ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดในการหาคำตอบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะแบ่งปัญหาเป็นสองลักษณะคือปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่ไม่มีการพาความร้อน และปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการพาความร้อน จากนั้นจะกล่าวถึงการใช้โปรแกรม FLUENT และการเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขต่างๆ ในการแก้ปัญหา

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่ไม่มีการพาความร้อน โปรแกรม FLUENT จะจำลองแบบโดยใช้วิธี enthalpy-porosity technique (Voller and Prakash, 1987) โดยจะไม่วิเคราะห์เพื่อหาเส้นแบ่งสถานะโดยตรง แต่จะพิจารณาโดยใช้ตัวแปรที่แทนสัดส่วนของของเหลวที่อยู่ภายในปริมาตรควบคุมคือ liquid faction

สมการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy equation) จะถูกพิจารณาโดยผลรวมของอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในปริมาตรควบคุม (control volume) และอัตราการถ่ายเทพลังงานผ่านพื้นผิวควบคุม (control surface) จะเท่ากับผลรวมของอัตราการถ่ายเทพลังงานด้วยนำความร้อน และอัตราการรับพลังงานจากแหล่ง (source) ต่างๆ เช่นพลังงานความร้อนที่ถูกสร้างภายในปริมาตรควบคุมเอง (heat generation) เป็นต้น

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} H) = \nabla \cdot (k \nabla T) + S \tag{3.1}$$

โดย H คือเอนทัลปี, ρ คือความหนาแน่น, $\vec{v}$ คือความเร็วของของไหล, k คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อน, T คืออุณหภูมิ และ S คือ source term

ค่าเอนทัลปี H มีค่าเท่ากับผลรวมของความร้อนสัมผัส h กับความร้อนแฝง ΔH

$$H = h_{ref} + \int_{T_{ref}}^{T} c_p dT + \Delta H \tag{3.2}$$

โดย h_{ref} คือค่าเอนทัลปีอ้างอิง, T_{ref} คืออุณหภูมิอ้างอิง และ c_p คือค่าความจุความร้อนจำเพาะส่วนปริมาณความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะของสสาร L มาจาก

$$\Delta H = \beta L \qquad ;\begin{cases} \beta = 0 & ;T < T_{solidus} \\ \beta = \dfrac{T - T_{solidus}}{T_{liquidus} - T_{solidus}} & ;T_{solidus} < T < T_{liquidus} \\ \beta = 1 & ;T > T_{liquidus} \end{cases} \tag{3.3}$$

โดย β คือ ค่า liquid fraction, $T_{solidus}$ คืออุณหภูมิ solidus และ $T_{liquidus}$ คืออุณหภูมิ liquidus

สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการพาความร้อน โปรแกรม FLUENT จะจำลองแบบโดยพิจารณาสมการอนุรักษ์พลังงาน (3.1) เช่นเดียวกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่ไม่มีการพาความร้อน และจะพิจารณาสมการครอบคลุมเพิ่มอีกสองสมการคือ สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) และสมการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum equation)

สมการความต่อเนื่องระบุว่า ผลรวมของอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลภายในปริมาตรควบคุม และอัตราการถ่ายเทมวลผ่านพื้นผิวควบคุม จะเท่ากับอัตราการรับมวลจากแหล่งต่างๆ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m \tag{3.4}$$

โดย ρ คือความหนาแน่น, $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว และ S_m คือ mass added source term

สำหรับปัญหาการไหลแบบ axisymmetric สมการความต่อเนื่องสามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{\rho v_r}{r} = S_m \tag{3.5}$$

โดย x คือ axial coordinate, r คือ radial coordinate, v_x คือความเร็วตามแนวแกน และ v_r คือความเร็วตามแนวรัศมี

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมระบุว่า ผลรวมของอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมภายในปริมาตรควบคุม และอัตราการถ่ายเทโมเมนตัมผ่านพื้นผิวควบคุม จะเท่ากับผลรวมของแรงเนื่องจากความดันสุทธิ (net pressure force), แรงเนื่องจากความเค้นเฉือนสุทธิ (net shear force) และแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (body force)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) + \rho \vec{g} + \vec{F} \tag{3.6}$$

โดย ρ คือความหนาแน่น, $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว, p คือ ความดันสถิตย์, $\bar{\bar{\tau}}$ คือเทนเซอร์ความเค้น, $\vec{g}$ คือความเร่งโน้มถ่วงและ $\vec{F}$ คือ momentum source หรือ momentum sink

ซึ่งเทนเซอร์ความเค้น $\bar{\bar{\tau}}$ ถูกนิยามโดย

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu[(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^{T}) + \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{v}\bar{\bar{I}}] \tag{3.7}$$

โดย μ คือความหนืด และ $\bar{\bar{I}}$ คือเทนเซอร์หน่วย

สำหรับปัญหาการไหลแบบ axisymmetric สมการอนุรักษ์โมเมนตัมตามแนวแกนสามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(r\rho v_x v_x)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r v_x)=-\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}[r\mu(2\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{v})]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\mu(\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial x})]+F_x \tag{3.8}$$

และสมการอนุรักษ์โมเมนตัมตามแนวรัศมีสามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(r\rho v_x v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r v_r)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}[r\mu(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial r})]$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\mu(2\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{v})]-2\mu\frac{v_r}{r^2}+\frac{2}{3}\frac{\mu}{r}(\nabla\cdot\vec{v})+\rho\frac{v_z^2}{r}+F_r \tag{3.9}$$

โดย

$$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r} \tag{3.10}$$

และ v_z คือ swirl velocity

ดังที่กล่าวข้างต้นว่าโปรแกรม FLUENT จะใช้วิธี enthalpy-porosity technique ในการวิเคราะห์ปัญหาการแข็งตัว โดยวิธีดังกล่าวจะพิจารณาให้ mushy zone มีลักษณะเหมือนตัวกลางที่เป็นรูพรุนเทียม (psudo porous media) คือมีลักษณะเหมือนของเหลวไหลผ่านของแข็งที่เป็นรูพรุน โดยให้มีค่าความพรุน (porosity) มีค่าเท่ากับ liquid fraction ดังนั้น เมื่อของเหลวภายในปริมาตรควบคุมเปลี่ยนสถานะเป็นของแข็งทั้งหมด ค่าความพรุนจะต้องมีค่าเท่ากับ 0 และความเร็วของของเหลวภายในปริมาตรควบคุมจะต้องมีค่าเท่ากับ 0 โดยพจน์ที่จะทำให้ความเร็วของการไหลลดลงในสมการอนุรักษ์โมเมนตัม ก็คือพจน์ momentum sink ซึ่งอยู่ในรูป

$$\vec{F}=\frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+\varepsilon}A_{mush}(\vec{v}-\vec{v}_p) \tag{3.11}$$

โดย β คือค่า liquid fraction, ε คือค่าคงที่น้อยๆ เพื่อป้องกันไม่ให้ตัวหารภายในสมการ (3.11) มีค่าเป็น 0, A_{mush} คือค่าคงที่ของ mushy zone, $\vec{v}_p$ คือความเร็วที่ของแข็งถูกดึงออกจากโดเมนหรือ pull velocity

ค่าคงที่ของ mushy zone คือตัวแปรที่บ่งชี้ความเร็วในการหน่วง (damping) การเคลื่อนที่ของของไหล กล่าวคือเมื่อ A_{mush} มีค่ามากขึ้น การลดลงของความเร็วของของไหลที่กำลังเปลี่ยนสถานะก็จะมากขึ้น ดังนั้นค่า A_{mush} ที่มากเกินไปอาจทำให้ผลที่ได้เกิดการแกว่ง (oscillate) ได้ โดยตามคู่มือของโปรแกรม FLUENT (ANSYS, 2009) ระบุว่าค่าของ A_{mush} ควรอยู่ในช่วง $10^4 - 10^6$

3.2 การเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขในการจำลองแบบ

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีการใช้โปรแกรม FLUENT ซึ่งเป็นโปรแกรมที่จะใช้จำลองแบบปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งในงานวิจัยนี้โดยขั้นตอนการใช้โปรแกรม FLUENT มีดังนี้

เริ่มต้นโดยการ import case คือการนำเข้า mesh file ซึ่งวาดโดยโปรแกรม gambit จากนั้นกำหนดมิติของแบบจำลอง และเลือบระเบียบวิธีเชิงเลขในการจำลองแบบ แล้วจึงกำหนดชนิดและคุณสมบัติของวัสดุ (material) กำหนดเงื่อนไขตั้งต้น (initial condition) กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) และเริ่มต้นการการจำลองแบบ (iterate)

ขั้นตอนที่สำคัญที่สุดในการจำลองแบบคือการเลือกใช้ ระเบียบวิธีเชิงเลขในการจำลองแบบ เพราะนอกจากการเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงเลขที่เหมาะสมจะส่งผลโดยตรงต่อความถูกต้องของคำตอบแล้วยังส่งผลต่อการลู่เข้าของคำตอบอีกด้วย โดยขั้นตอนการเลือกระเบียบวิธีเชิงเลขในการจำลองแบบประกอบด้วย การเลือก solver, การประมาณค่าระหว่างจุดต่อ และ การแบ่งย่อยเชิงเวลา

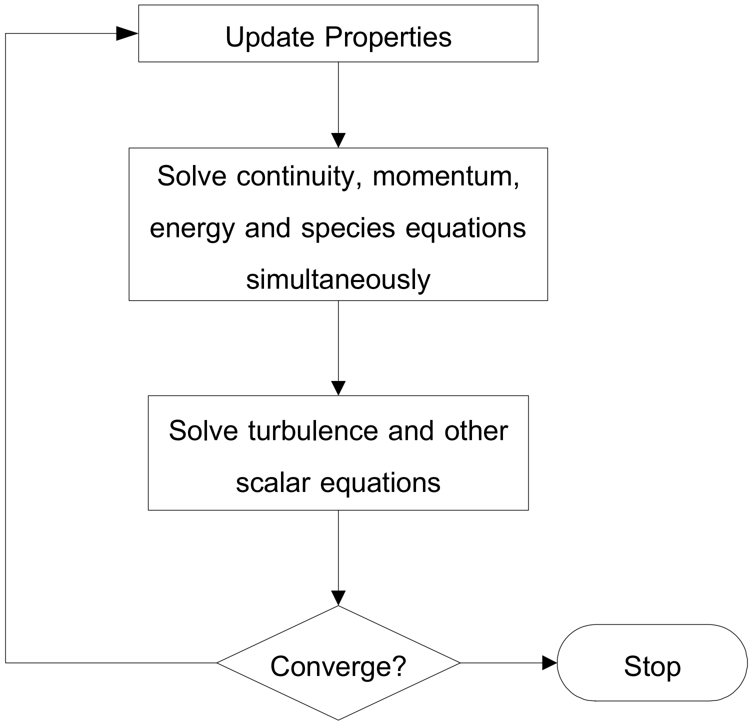
3.2.1 การเลือก Solver

โปรแกรม FLUENT มี solver 2 ชนิด คือ pressure-based solver และ density-based solver

<u>3.2.1.1 Density-Based Solver</u>

density-based solver หาคำตอบจากสมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการอนุรักษ์พลังงานไปพร้อมกันโดยลำดับการทำงานของ density-based solver ดังแสดงไว้ในภาพที่ 3.1

การที่ density-based solver หาคำตอบของชุดสมการทั้งหมดไปพร้อมกัน จึงเหมาะกับปัญหาที่ค่าความหนาแน่น พลังงาน และโมเมนตัม มีความเกี่ยวข้องกันมาก เช่น ปัญหาการแบบไหลอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงและมีการเผาไหม้ (high-speed compressible flow with combustion), การไหลที่ความเร็วเหนือเสียง (hypersonic flow) และการไหลที่มีคลื่นกระแทก (shock wave) เข้ามาเกี่ยวข้อง เป็นต้น



ภาพที่ 3.1 การทำงานของ density-based solver (ANSYS, 2009)

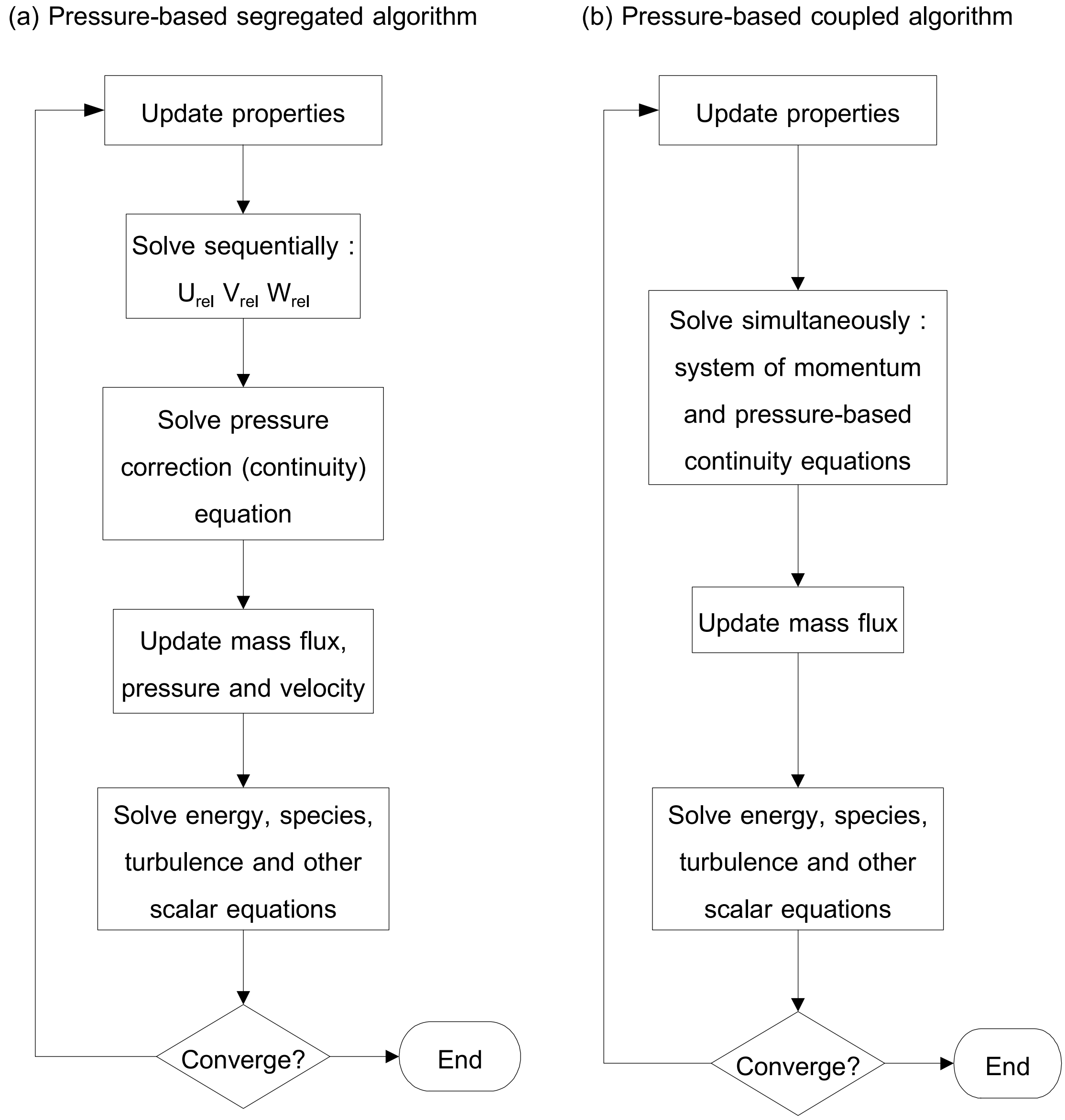
3.2.1.2 Pressure-Based Solver

Pressure-based solver เป็น solver ที่จะหาค่าสนามความเร็ว (velocity field) จากการแก้สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (momentum conservation equation) โดยใช้สมบัติของสารที่เวลาปัจจุบันจากนั้นจึงแก้สมการหาสนามความดัน (pressure field) จากสมการ pressure correction ซึ่งได้มาจากการพิจารณาสมการอนุรักษ์มวล (continuity equation) และสมการอนุรักษ์โมเมนตัมร่วมกัน แล้วจึงแก้ไขค่า mass flux, ความดัน และ ความเร็ว ให้เป็นค่าใหม่ที่ใช้ในการคำนวนจากนั้นจึงแก้สมการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy equation)

โดย pressure-based solver สามารถแบ่งได้ออกเป็น 2 ชนิดคือ segregated solver และ coupled solver โดย segregated solver จะแก้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการ pressure correction ทีละสมการตามลำดับ ส่วน coupled solver จะแก้ไขสมการดังกล่าวไปพร้อมๆ กัน ดังแสดงในภาพที่ 3.2

ดังนั้น pressure-based segregated solver สามารถแก้ปัญหาที่ไม่ซับซ้อนได้ดี เช่น ปัญหาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ที่ความเร็วต่ำ (low-speed incompressible flow) และ ปัญหาการแบบไหลอัดตัวได้ที่ความเร็วสูง (high-speed compressible flow) โดยใช้หน่วยความจำในการคำนวณต่ำและมีความยืดหยุ่นในการคำนวณสูง ส่วน pressure-based coupled solver นั้นเหมาะสำหรับปัญหาการไหลที่ไม่มีการเปลี่ยนสถานะ (single phase flow) และมีอัตราการลู่เข้า

ของคำตอบที่สูงกว่า segregated solver อย่างไรก็ตาม coupled solver ไม่สามารถแก้ปัญหาการไหลที่มีการเปลี่ยนสถานะ (multiphase flow) ได้และจำเป็นต้องใช้หน่วยความจำในการคำนวณมากกว่า segregated solver ประมาณ 1.5 – 2 เท่าด้วย

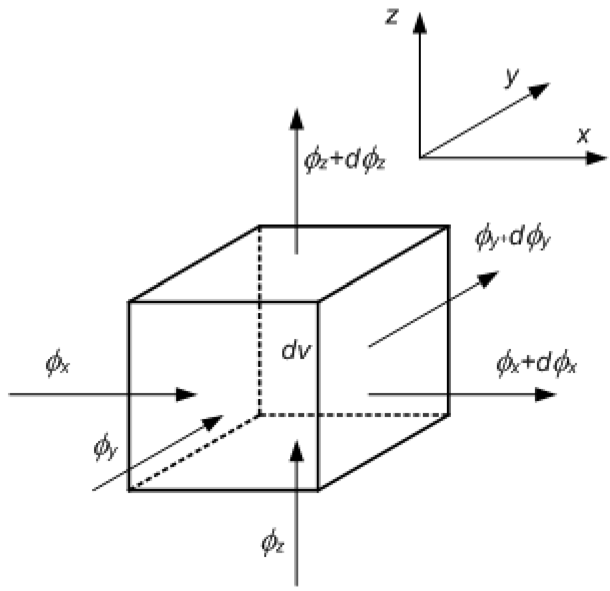


ภาพที่ 3.2 การทำงานของ Pressure-based solver
(a) Segregated solver (b) coupled solver (ANSYS, 2009)

การจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งในงานวิจัยนี้ ตัวแปรสำคัญ เช่น อุณหภูมิ ความดัน และความเร็ว ไม่ได้มีความเกี่ยวข้องกันอย่างมาก จึงไม่จำเป็นต้องใช้ density-based solver และปัญหายังมีการเปลี่ยนสถานะจึงไม่เหมาะกับ pressure-based coupled solverผู้วิจัยจึงเลือก pressure-based segregated solver ในการจำลองแบบ

3.2.2 การประมาณค่าระหว่างจุดต่อ

ในโปรแกรม FLUENT การประมาณค่าระหว่างจุดต่อเป็นสิ่งที่จำเป็นในการสร้างระบบสมการพีชคณิต เมื่อพิจารณาสมการครอบคลุมของปัญหาการไหลและการถ่ายเทพลังงานของปริมาณไม่ทราบค่าϕในปริมาตรควบคุม (ภาพที่3.3)



ภาพที่ 3.3 การไหลและถ่ายเทพลังงานของตัวแปรไม่ทราบค่าϕในปริมาตรควบคุม

ได้สมการในรูปแบบทั่วไป

$$\int_V \frac{\partial \rho\phi}{\partial t} dV + \oint \rho\phi\vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint \Gamma_\phi \nabla\phi \cdot d\vec{A} + \int_V S_\phi dV \qquad (3.12)$$

โดย ρ คือความหนาแน่น, tคือเวลา, $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว,V คือปริมาตร, $\vec{A}$ คือเวกเตอร์พื้นผิว, Γ_ϕ คือค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของ ϕ, $\nabla\phi$ คือ gradient ของ ϕและ S_ϕ คือ source term

เมื่อประมาณสมการครอบคลุมให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตจะได้

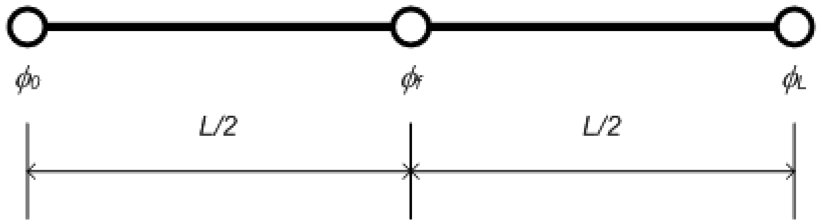
$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} V + \sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{v}_f \phi_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\phi \nabla\phi_f \cdot \vec{A}_f + S_\phi V \qquad (3.13)$$

โดย N_{faces}คือ จำนวนพื้นผิวที่ล้อมรอบปริมาตรควบคุมและตัวห้อย f หมายถึงค่าที่ผิว f ของปริมาตรควบคุม

3.2.2.1 การประมาณค่าตัวแปรที่ผิวระหว่างปริมาตรควบคุม

สำหรับการพิจารณาค่าตัวแปรที่ผิวระหว่างปริมาตรควบคุมϕ_f (ภาพที่ 3.4) เพื่อแทนค่าลงใน convection term โปรแกรม FLUENT ใช้ upwind scheme เพียงประเภทเดียวในการแบ่งรูปร่างของปัญหา โดยคำว่า upwind นั้น หมายถึงการประมาณค่าตัวแปร ϕ โดยใช้ค่าของตัว

แปรจากปริมาตรควบคุมข้างเคียงที่อยู่ในทิศเดียวกับที่ข้อมูลเข้าสู่ปริมาตรควบคุม โดย upwind scheme สามารถแบ่งออกได้เป็นรูปแบบย่อยๆ หลายรูปแบบ ดังนี้



ภาพที่ 3.4 การประมาณค่าตัวแปรที่ผิวเมื่อ ϕ_f คือค่าของตัวแปรระหว่างผิวปริมาตรควบคุม, ϕ_0 คือค่าของตัวแปรที่ปริมาตรควบคุมต้นน้ำ, ϕ_L คือค่าของตัวแปรที่ปริมาตรควบคุมปลายน้ำ และ L คือระยะห่างระหว่างปริมาตรควบคุมต้นน้ำและปลายน้ำ

1.First-Order Upwind Scheme

first-order upwind scheme ที่มี first-order accuracy จะสมมุติให้ตัวแปรต่างๆ ในปริมาตรควบคุม มีค่าเท่ากับค่าที่ตำแหน่งศูนย์กลางของปริมาตรควบคุม ดังนั้น ค่าตัวแปรที่ผิวของปริมาตรควบคุมที่กำลังพิจารณา จะมีค่าเท่ากับค่าตัวแปรที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมต้นน้ำ (upwind control volume) คือ

$$\phi_f = \phi_0 \tag{3.14}$$

วิธีนี้เป็นวิธีที่ทำให้คำตอบของปัญหาลู่เข้าได้ง่าย แต่มีความแม่นยำต่ำ

2. Power-Law Scheme

power-law scheme จะประมาณค่าตัวแปรที่ผิวระหว่างปริมาตรควบคุมโดยการหาผลเฉลยแม่นตรงใน 1 มิติ ของสมการ convection – diffusion ดังนี้

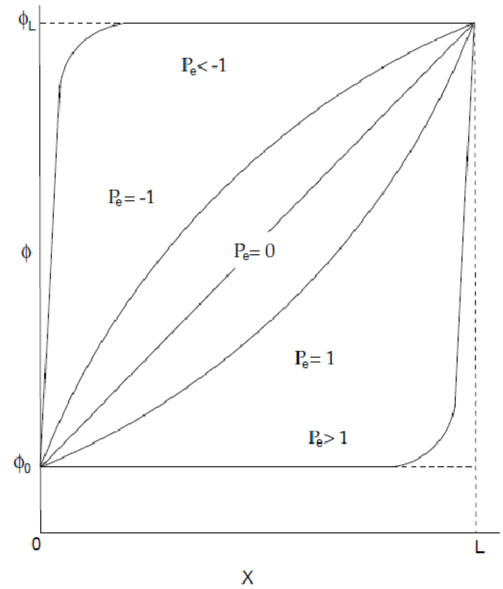
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(\frac{\partial \phi}{\partial x}) \tag{3.15}$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่น, u คือความเร็วตามแนวแกน x, Γ คือสัมประสิทธิ์การแพร่ และ ϕ คือตัวแปรที่กำลังพิจารณา

จากการแก้สมการ (3.15) จะพบว่าการกระจายตัวของตัวแปร ϕ ขึ้นอยู่กับค่า Peclect number Pe

$$\text{Pe} = \frac{\rho u L}{\Gamma} \tag{3.16}$$

จากภาพที่ 3.5 จะเห็นได้ว่าเมื่อ Pe มีค่ามาก เช่น เมื่อ Pe > 1 ค่าของตัวแปร ϕ ที่ตำแหน่ง $x = L/2$ จะมีค่าเท่ากับค่าของตัวแปรที่ตำแหน่งของปริมาตรควบคุมต้นน้ำ ϕ_0 ซึ่งมีความหมายว่าหากการพามีอิทธิพลต่อการไหลมากกว่าการแพร่ ก็จะใช้ค่าของตัวแปรที่ตำแหน่งของปริมาตรควบคุมต้นน้ำเลย แต่หากว่าPe = 0 ซึ่งแปลว่าไม่มีการไหล จึงไม่มีการพาและมีแต่การแพร่เท่านั้น ค่าตัวแปรที่ตำแหน่ง $x = L/2$ จะเท่ากับค่ากลางระหว่างปริมาตรควบคุมทั้งสอง



ภาพที่ 3.5 การกระจายตัวของตัวแปร ϕณ ตำแหน่ง 0 <x<L (ANSYS, 2009)

power-law scheme ให้ผลลัพธ์ที่มี first order accuracy แต่ว่ามีความแม่นยำสูงกว่า first order upwind scheme อย่างไรก็ตาม power-law scheme ใช้ได้กับการไหลที่มีค่า Reynolds number ต่ำเท่านั้น

3. Second-Order Upwind Scheme

second-order upwind scheme จะถูกใช้เมื่อต้องการความแม่นยำระดับ second-order accuracy โดยวิธีการนี้จะประมาณค่าตัวแปรที่ผิวแบบ center discretisation รอบจุด centroid ของปริมาตรควบคุมต้นน้ำ ดังนั้นเมื่อ second-order upwind scheme ถูกเลือกใช้ ค่าตัวแปรที่ผิว ϕ_f จะถูกคำนวนด้วยสมการ 3.17

$$\phi_f = \phi_0 + \nabla\phi \cdot \vec{r} \tag{3.17}$$

โดย ϕ_f คือค่าของตัวแปรระหว่างผิวปริมาตรควบคุม, ϕ_0 คือค่าของตัวแปรที่ปริมาตรควบคุมต้นน้ำ, $\vec{r}$ คือเวกเตอร์ระยะทางจาก centroid ของปริมาตรควบคุมต้นน้ำไปยัง centroid ของผิวปริมาตรควบคุม และ $\nabla\phi$ คือเกรเดียนต์ของตัวแปร ϕ

การประมาณแบบนี้จำเป็นต้องใช้เมื่อการไหลมีลักษณะไม่อยู่ในทางเดียวกับกริด ข้อเสียของวิธีนี้คือการใช้วิธีนี้จะทำให้คำตอบของปัญหาลู่เข้าช้าลง

สำหรับการจำลองแบบในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้ power-law scheme เนื่องจากมีการประมาณค่าตัวแปรที่ผิวของปริมาตรควบคุมขึ้นอยู่กับอิทธิพลของการพา และการแพร่ที่มีต่อการไหลอย่างเหมาะสม ทำให้สามารถจำลองแบบลักษณะทางกายภาพของการไหลได้ดี และคำตอบจะลู่เข้าเร็วกว่าวิธีอื่น นอกจากนี้รูปแบบปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่ไม่มีการพาความร้อนยังเป็นปัญหาที่มีค่า Reynolds number ต่ำประมาณ 0 ซึ่งเป็นเงื่อนไขของการประมาณค่าระหว่างจุดต่อด้วยวิธี power-law scheme ด้วย

3.2.2.2 การประมาณค่า Gradient

การประมาณค่า gradient $\nabla\phi_f$ ที่ใช้ในการประมาณพจน์การพาและการแพร่ในสมการอนุรักษ์การไหล ในโปรแกรม Fluent การประมาณค่า gradient มีอยู่ 3 วิธี คือ วิธี green-gauss cell-based, green-gauss node based และ least squares cell-based

1. วิธี Green-Gauss Cell-Based

วิธี green-gauss cell-based จะใช้ทฤษฎี green-gauss ในการประมาณค่า gradient ของตัวแปรไม่ทราบค่า ϕ ซึ่งจะประมาณค่า gradient ที่จุดศูนกลางของเซลล์ (cell center) ดังนี้

$$(\nabla\phi)_{c0} = \frac{1}{v}\sum_f \bar{\phi}_f \vec{A}_f \tag{3.18}$$

โดย ϕ_f คือค่าของ ϕ ที่จุด centroid ของผิวต่างๆ, v คือปริมาตรของ cell และ $\vec{A}_f$ คือเวกเตอร์ของผิวต่างๆ

สำหรับการประมาณค่า $\bar{\phi}_f$ ด้วยการใช้วิธี green-gauss cell-based นั้น จะเป็นการประมาณค่าโดยการใช้ค่าของตัวแปรที่จุดศูนย์กลางของเซลล์ข้างเคียงคือ

$$\bar{\phi}_f = \frac{\phi_{c0} + \phi_{c1}}{2} \tag{3.19}$$

วิธีนี้มีข้อดีคือความง่ายต่อการนำไปใช้ ใช้เวลาในการคำนวณน้อย และสามารถประยุกต์ใช้ได้อย่างดีกับปัญหา 3 มิติ ส่วนข้อเสียคือไม่สามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีการแบ่งกริดที่มีรูปร่างไม่ปรกติ (irregular unstructured grid)

2. วิธี Green-Gauss Node-Based

วิธี green-gauss node-based ใช้ทฤษฎี green-gauss (สมการ 3.18) ในการประมาณค่า gradient เช่นเดียวกับวิธี green-gauss cell-based แต่การประมาณค่าของตัวแปรที่ผิว $\bar{\phi}_f$ จะใช้วิธีที่แตกต่างกันคือ วิธี green-gauss node-based จะใช้ค่าของตัวแปรที่ node ต่างๆที่อยู่บนผิวในการคำนวนโดย

$$\bar{\phi}_f = \frac{1}{N_f}\sum_{n}^{N_f}\bar{\phi}_n \qquad (3.20)$$

โดยการประมาณค่าตัวแปรที่ node $\bar{\phi}_n$ จะถูกคำนวนโดยใช้ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของตัวแปรจาก cell ที่อยู่ล้อมรอบ node มาคำนวณหาค่าตัวแปรที่ node โดยค่าถ่วงน้ำหนักนั้นแปรผกผันกับระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลาง cell ไปยัง node วิธีนี้จะแม่นยำกว่า green-gauss cell-based เล็กน้อย แต่ก็ใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าเช่นกัน

3. วิธี Least Squares Cell-Based

วิธี least squares cell-based ใช้การประมาณค่าแต่ละจุดต่อด้วยวิธี linear least square method ซึ่งจะมีการใช้ slope limiter ในการประมาณเพื่อช่วยในเรื่องการแกว่งของผลเฉลยในกรณีที่ปัญหามีผลของการพามากกว่าการแพร่ วิธีนี้ให้ความแม่นยำ และใช้เวลาในการคำนวณใกล้เคียงกับวิธี green-gauss node-based

การจำลองแบบในงานวิจัยนี้จะใช้การประมาณค่า gradient ด้วยวิธี green-gauss cell-based เนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อย และปัญหาในงานวิจัยนี้มิได้มีการแบ่งกริดที่มีรูปร่างไม่ปรกติ (irregular unstructured grid)

3.2.3 การแบ่งย่อยเชิงเวลา (Temporal Discretisation)

การแบ่งย่อยเชิงเวลา คือการประมาณสมการเชิงอนุพันธ์ภายใต้ตัวแปรเวลา tโดยในโปรแกรม FLUENT มีการแบ่งย่อยอยู่สองวิธีคือ วิธี explicit และ วิธี implicit ซึ่งจะมีความแม่นยำคือ first-order accuracy และ second-order accuracy ตามลำดับ

1. First-Order Accuracy

การประมาณที่มี first-order accuracy เป็นการประมาณโดยใช้วิธี backward difference ซึ่งจะใช้ค่าของตัวแปรที่เวลาในปัจจุบัน ในการคำนวณค่าของตัวแปรที่เวลาในอนาคต

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\Delta t} = F(\phi) \qquad (3.21)$$

โดยตัวยก n+1 บ่งชี้ปริมาณที่เวลาถัดไป t+Δt และ n บ่งชี้ปริมาณที่เวลาปัจจุบัน t

การประมาณที่มี first-order accuracy จะมีความแม่นยำค่อนข้างต่ำ แต่ก็ใช้เวลาในการคำนวณที่น้อย

2. Second-Order Accuracy

การประมาณที่มี second-order accuracy เป็นการประมาณที่ใช้วิธี center difference คือ ใช้ค่าตัวแปรทั้งในเวลาปัจจุบัน และในอดีต มาคำนวณค่าของตัวแปรในอนาคตดังสมการที่ 3.22

$$\frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^{n} + \phi^{n-1}}{2\Delta t} = F(\phi) \qquad (3.22)$$

โดยตัวยก n+1 บ่งชี้ปริมาณที่เวลาถัดไป $t+\Delta t$, n บ่งชี้ปริมาณที่เวลาปัจจุบัน t และ n–1 บ่งชี้ปริมาณที่เวลาในอดีต $t-\Delta t$

การประมาณที่มี second-order accuracy จะมีความแม่นยำสูงกว่า first-order accuracy และใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าเล็กน้อย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยเลือกใช้การแบ่งย่อยเชิงเวลาด้วยวิธี first-order implicit scheme เนื่องจากปัญหาที่พิจารณาไม่ซับซ้อนและการใช้ implicit scheme จะทำให้ได้คำตอบที่มีเสถียรภาพอย่างไม่มีเงื่อนไข (unconditionally stable)

รูปทั่วไปของตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi) \qquad (3.23)$$

ทำให้ประมาณสมการพีชคณิตได้ ดังนี้

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^{n}}{\Delta t} = F(\phi^{n+1}) \qquad (3.24)$$

โดยตัวยก n+1 บ่งชี้ปริมาณที่เวลาถัดไป $t+\Delta t$ และ n บ่งชี้ปริมาณที่เวลาปัจจุบัน t

3.3 สรุป

การจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งมีสมการครอบคลุมคือ สมการความต่อเนื่อง, สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการอนุรักษ์พลังงาน โดยผู้วิจัยได้เลือกระเบียบวิธีเชิงเลขต่างๆ คือ

เลือกใช้ pressure-based segregated solver ในการจำลองแบบ เนื่องจากในการจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็ง ตัวแปรสำคัญ เช่น อุณหภูมิ ความดัน และความเร็ว ไม่ได้มีความเกี่ยวข้องกันมาก จึงไม่จำเป็นต้องใช้ density-based solver และปัญหามีการเปลี่ยนสถานะจึงไม่เหมาะกับ coupled solver

สำหรับการประมาณค่าตัวแปรที่ผิว ใช้ power-law scheme ซึ่งประมาณค่าตัวแปรที่ผิวระหว่างปริมาตรควบคุม โดยการหาผลเฉลยแม่นตรงใน 1 มิติ ของสมการ convection – diffusion ค่าตัวแปรจึงขึ้นอยู่กับอิทธิพลของการพา และการแพร่ ทำให้สามารถจำลองแบบการไหลได้ดี คำตอบลู่เข้าเร็ว และปัญหามีค่า Reynold’s number ต่ำด้วย

ส่วนการประมาณค่าความชัน ในพจน์การพาและการแพร่ เลือกวิธี green-gauss cell-based เนื่องจากใช้เวลาในการคำนวณน้อย และปัญหามีรูปทรงไม่ซับซ้อน ทำให้สามารถการแบ่งกริดอย่างสม่ำเสมอได้ และใช้ first-order implicit temporal scheme ในการแบ่งย่อยเชิงเวลาเพื่อเสถียรภาพของคำตอบ

บทที่ 4

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองกรณีไม่มีการพาความร้อน

เนื่องจากการประดิษฐ์แบบจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งโดยใช้โปรแกรม FLUENT ต้องมีการตรวจสอบความถูกต้อง ดังนั้นจึงทดสอบกับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ (transient heat conduction problem) และ ปัญหาการเปลี่ยนสถานะ (phase change problem) โดยใช้ผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากงานวิจัยเดิมเป็นตัวชี้วัด เมื่อแบบจำลองที่ได้มีผลสอดคล้องกับตัวชี้วัดดังกล่าวจึงจะสามารถนำแบบจำลองไปใช้ในปัญหาอื่นๆ ที่ไม่มีผลเฉลยแม่นตรงได้

สำหรับบทนี้จะเสนอการตรวจสอบแบบจำลองกับปัญหาที่ไม่มีการพาความร้อน ทั้งในกรณีที่อุณหภูมิขอบเขตคงที่ และกรณีที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่ โดยจะเปรียบเทียบผลในกรณีที่อุณหภูมิขอบเขตคงที่ ที่ได้จากแบบจำลองกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากการวิเคราะห์สมการอนุพันธ์โดยตรง (ภาคผนวก ก) และผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) ส่วนในกรณีที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่จะเปรียบเทียบผลที่ได้จากแบบจำลองกับผลที่ได้จากงานวิจัยอีกชิ้นหนึ่ง (Sukkuea and Maneeratana, 2007)

ในการจำลองแบบ ผู้วิจัยจำเป็นต้องตั้งสมมุติฐานที่ใช้ในการประมาณปัญหาจริงเพื่อให้สามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้น โดยในแบบจำลองกำหนดให้มีการถ่ายเทความร้อนข้ามขอบเขตของปริมาตรควบคุม คือ การนำความร้อน (heat conduction) เท่านั้น คือกำหนดปัญหาให้อยู่ภายใต้สมมุติฐานดังนี้

1. ไม่คิดผลของการแผ่รังสีความร้อน (heat radiation) เนื่องจากอุณหภูมิผิวของระบบมีค่าไม่สูงมาก
2. ไม่คิดผลของ bulk convection ในของเหลวซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะ (phase change interface) เนื่องจากผลของ bulk convection จะเกิดกับปรากฏการณ์การเปลี่ยนสถานะที่เป็นไปอย่างรวดเร็ว (rapid solidification) ซึ่งปัญหาที่มีค่า Stefan number น้อยๆ เช่น ค่า Stefan number $<$ 1 นั้นไม่ถือว่าเป็นปัญหาลักษณะดังกล่าวและถือว่าเป็นปัญหาที่มีการเปลี่ยนสถานะช้า สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะของน้ำนั้นมีค่า Stefan number $<$ 1 ดังนั้น จึงไม่คิดผลของ bulk convection ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของเส้นแบ่งสถานะ
3. กำหนดให้อุณหภูมิขอบเขตเท่ากับอุณหภูมิน้ำเกลือเพราะความแตกต่างอุณหภูมิขอบนอก และในซองมีค่าน้อยมาก

4. ไม่คิดผลของการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (natural convection) จากผลของแรงลอยตัวซึ่งเกิดจาก temperature gradient

เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ประมวลผลในงานวิจัยนี้คือ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล Intel Core II quad CPU Q660 2.40 GHz

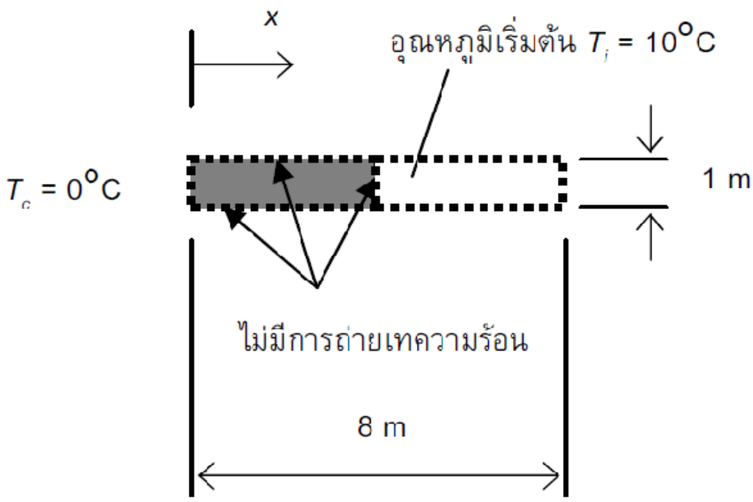
4.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองกรณี 1 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตคงที่

4.1.1 การนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่

การกำหนดปัญหาที่ใช้ในการทดสอบแบบจำลอง สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ใน 1 มิติ จะใช้แนวทางเดียวกับงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) คือ กำหนดความยาวของปัญหาทั้งหมดเท่ากับ 8 m เนื่องจากสมการผลเฉลยแม่นตรงในภาคผนวก ก เป็นผลเฉลยสำหรับปัญหาที่มีความยาวเป็นระยะกึ่งอนันต์ (semi infinite length) โดยให้ที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 10°C สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่ T_c = 0°C คุณสมบัติของน้ำ คือ ค่าการนำความร้อน k = 0.556 W/m·K, ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_p = 4.226 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ = 1000 kg/m^3

อย่างไรก็ตาม โปรแกรม FLUENT ไม่สามารถจำลองแบบใน 1 มิติได้ จึงจำเป็นต้องสร้างแบบจำลองใน 2 มิติ และ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพิ่มเติม ให้ขอบบนและขอบล่างของปัญหาไม่มีการถ่ายเทความร้อน และ จากความสมมาตรของปัญหา จึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงครึ่งเดียวคือ ใช้ความยาว 4 m โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน ดังแสดงในภาพที่ 4.1

การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆ มีขนาดเท่ากัน โดยแบ่งตามด้านกว้างจำนวน 100 ช่วง ตลอดการจำลองแบบ และแบ่งตามความยาวจำนวน 200, 400 และ 800 ช่วง หรือ คิดเป็นปริมาตรควบคุมจำนวน 200 x 100, 400 x 100 และ 800 x 100 cells และ แบ่งช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 10, 1 และ 0.1 s



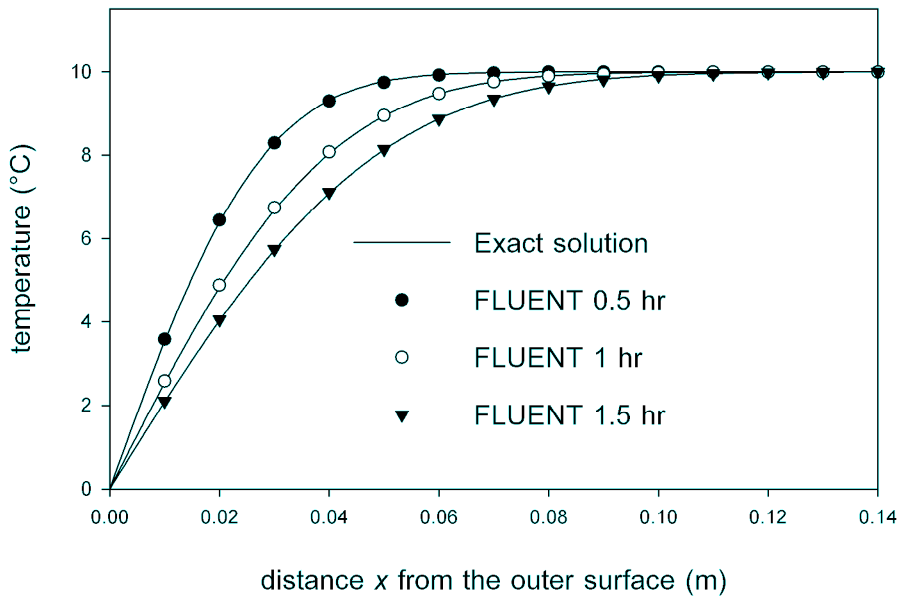
ภาพที่ 4.1 การกำหนดปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ 1 มิติ

การตรวจสอบความถูกต้องโดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง และผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากงานวิจัยเดิม จะเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 0.5, 1 และ 1.5 hr และ การกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุด นอกจากนี้ได้พิจารณาผลของการใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ กัน (grid and time step dependency) โดยการเปลี่ยนขนาดกริด และช่วงเวลาตามที่อธิบายไปแล้วด้วย

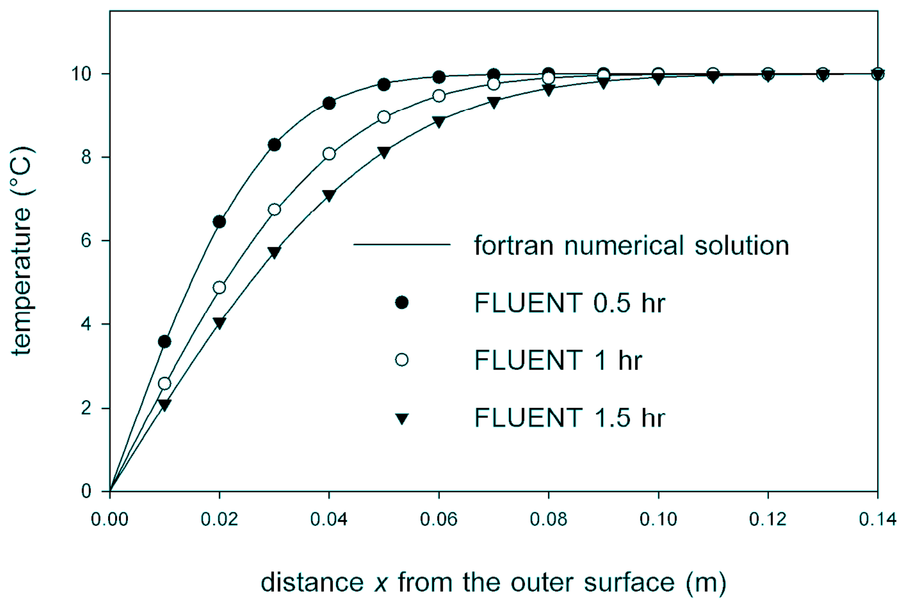
1) การกระจายตัวของอุณหภูมิ

ผลการจำลองจากโปรแกรม FLUENT ถูกเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง และงานวิจัยเก่า การกระจายของอุณหภูมิ เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ ได้ถูกแสดงในภาพที่ 4.2 และ 4.3 ดังนี้

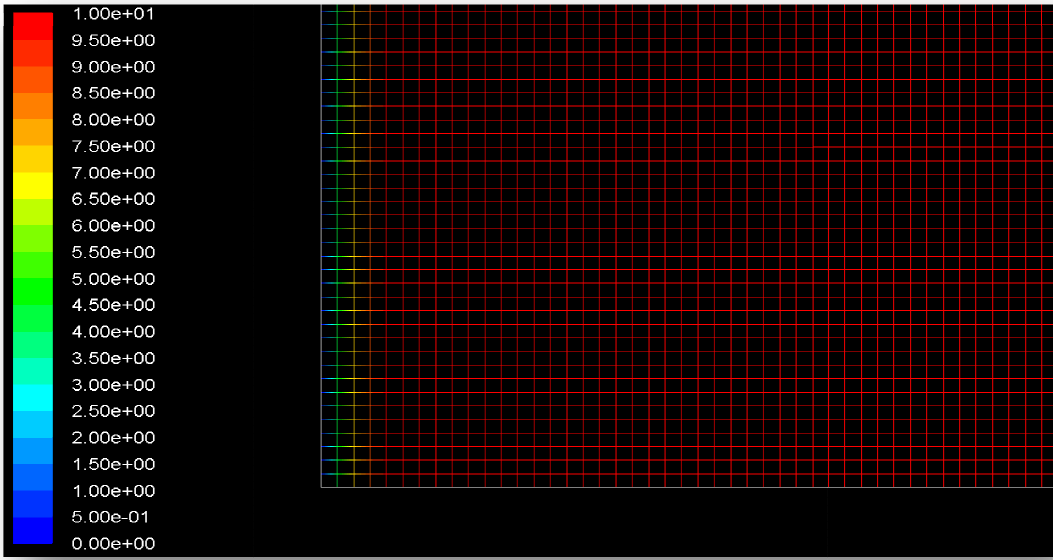
จะเห็นว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ได้จากแบบจำลองโดยโปรแกรม FLUENT มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงและผลจากการประมาณโดยใช้โปรแกรมเดิมมาก นอกจากนี้หากพิจารณา contour plot ของอุณหภูมิ (ภาพที่ 4.4) จะพบว่าการกำหนดให้โปรแกรม FLUENT แก้ปัญหาการนำความร้อนใน 1 มิติ สามารถทำได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพิ่มดังที่กล่าวไปแล้วข้างต้น เนื่องจากการกระจายตัวของอุณหภูมิในแนวแกนตั้งไม่มีการเปลี่ยนแปลง



ภาพที่ 4.2 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 400 x 100 cells และ Δt = 1 s



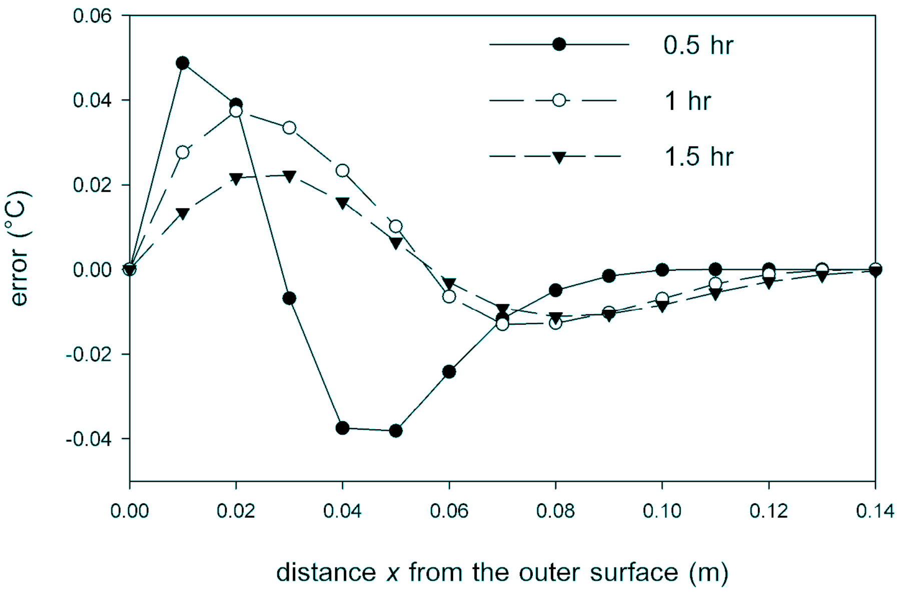
ภาพที่ 4.3 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยโดยประมาณจากโปรแกรมเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) กับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 400 x 100 cells และ Δt = 1 s



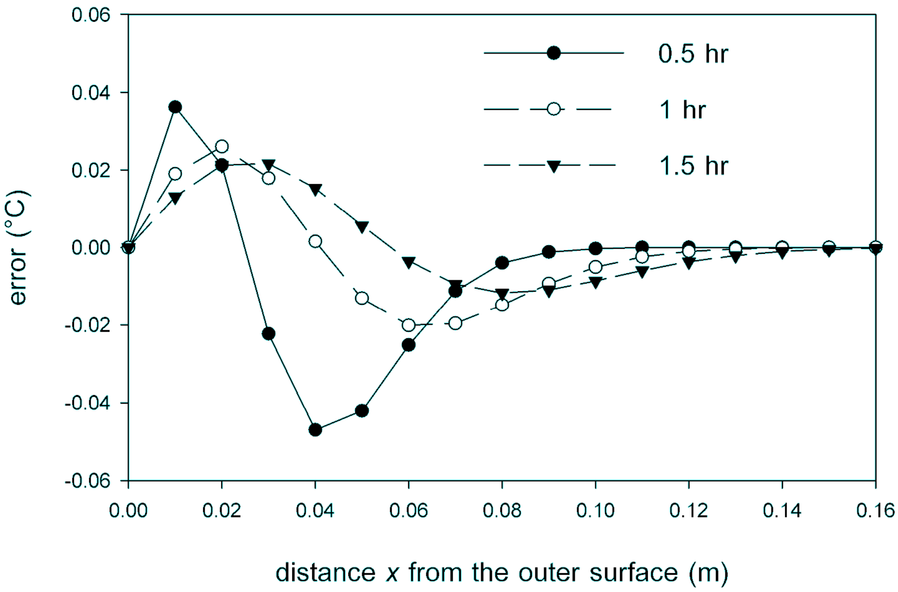
ภาพที่ 4.4 contour plot ของอุณหภูมิซึ่งจำลองโดยโปรแกรม FLUENT ที่เวลา 1 hr

ผลการกระจายของค่าความผิดพลาด ($T_{numerical}$–$T_{analytical}$) ตามแกน x เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดของช่วงเวลาคงที่ถูกแสดงในภาพที่ 4.5 โดยลักษณะการกระจายตัวของค่าความผิดพลาดมีลักษณะเฉพาะโดย มีค่ามากที่สุดที่บริเวณใกล้ขอบและมีค่าลดลงตามเวลา เนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างอุณหภูมิที่ขอบและอุณหภูมิภายในทำให้ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (temperature gradient) มีค่าสูงที่ช่วงเวลาแรก แต่เมื่อเวลามากขึ้นความแตกต่างของอุณหภูมิบริเวณขอบมีค่าลดลง จึงทำให้ค่าความผิดพลาดมากที่สุดมีค่าลดลงตามเวลา ดังแสดงในภาพที่ 4.7

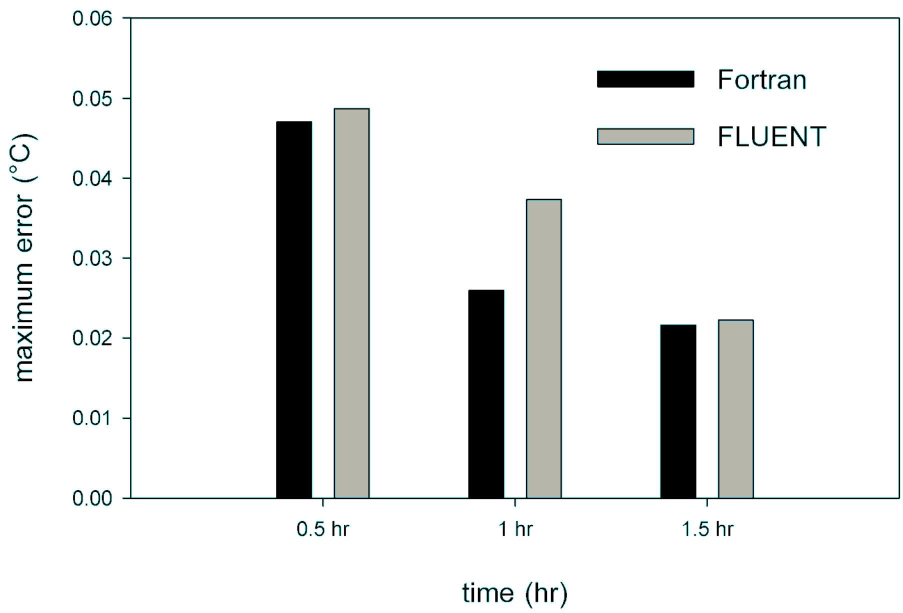
นอกจากนี้จะเห็นได้ว่า เมื่อเปรียบเทียบการกระจายตัวของค่าความผิดพลาดจากแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม FLUENT ในภาพที่ 4.5 กับการกระจายตัวของค่าความผิดพลาดจากแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรมเดิม ดังภาพที่ 4.6 จะพบว่ามีลักษณะของค่าความผิดพลาดสูงสุดไปในทางเดียวกันด้วย



ภาพที่ 4.5 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดของแบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง สำหรับแบบจำลอง 400 x 100 cells และ Δt = 1 s



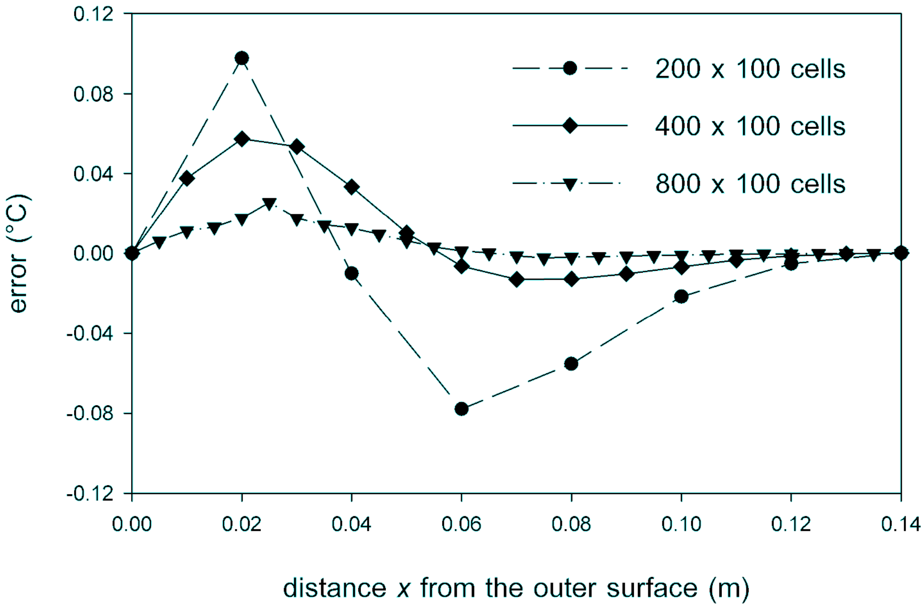
ภาพที่ 4.6 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดของแบบจำลองจากโปรแกรมเดิม สำหรับแบบจำลอง 400 x 100 cells และ Δt = 1 s



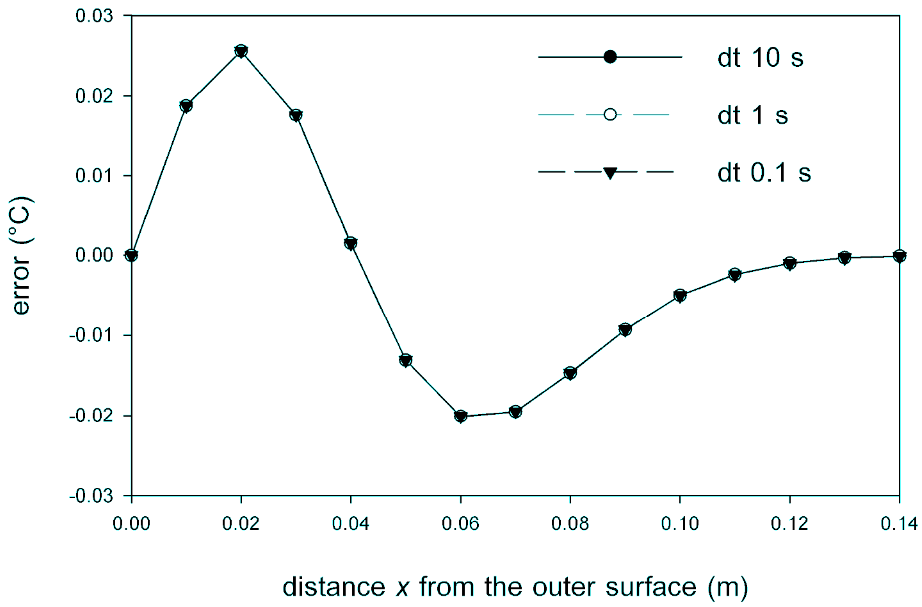
ภาพที่ 4.7 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดสูงสุดของแบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT และแบบจำลองจากโปรแกรมเดิมเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ที่เวลาต่างๆ

2) การพิจารณาขนาดปริมาตรควบคุมและช่วงเวลา

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุม Δx ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยการใช้ปริมาตรควบคุมที่ขนาดต่างๆ กันคือ 200 x 100, 400x 100 และ 800 x 100 cells ที่ช่วงเวลา Δt = 1 s ได้การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดดังแสดงในภาพที่ 4.8 พบว่าการแบ่งกริดทั้งสามแบบคือ 200 x 100, 400 x 100 และ 800 x 100 cells ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง อย่างไรก็ตาม เมื่อแบ่งปริมาตรควบคุมให้ละเอียดขึ้นจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่แม่นยำขึ้นเนื่องจากใช้การประมาณตัวแปรใน convection term ด้วย power-law scheme จึงทำให้มีอันดับความผิดพลาดแปรผันตาม Δx หรือมี first order accuracy ซึ่งจากภาพที่ 4.8 จะเห็นว่าเมื่อแบ่งขนาดของปริมาตรควบคุมให้ละเอียดขึ้น หรือทำให้ Δx มีขนาดเล็กลง ค่าความผิดพลาดสูงสุดก็จะลดลงด้วย



ภาพที่ 4.8 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดเมื่อแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็น 200 x 100, 400 x 100 และ 800 x 100 cells ที่ Δt = 1 s ที่ t = 1 hr



ภาพที่ 4.9 การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อแบ่งขนาดของช่วงเวลาออกเป็น 10, 1 และ 0.1s ที่ t = 1 hr

สำหรับการพิจารณาผลของขนาดช่วงเวลา Δt ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยใช้ขนาดของช่วงเวลาต่างๆกันคือ 10, 1 และ 0.1 s พบว่าขนาดของช่วงเวลาไม่มีอิทธิพลต่อผลลัพธ์ ดังแสดงในภาพที่ 4.9 ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าขนาดของช่วงเวลา (time step dependency) ไม่มีอิทธิพล ต่อผลลัพธ์ที่ได้สำหรับแบบจำลองที่มีการแบ่งของช่วงเวลา Δt = 10 s

3) สรุปผล

ในการทดสอบแบบจำลองกับปัญหาการนำความร้อนสภาวะชั่วครู่ แบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT โดยใช้ปริมาตรควบคุมจำนวน 200 x 100, 400 x 100 และ 800 x 100 cells และ แบ่งช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 10s, 1s และ 0.1 s ให้ผลเฉลยโดยประมาณใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากโปรแกรมเก่า เมื่อใช้กริดและช่วงเวลาที่มีขนาดเล็ก และได้พารามิเตอร์หลักในการคำนวณที่ dt = 10 s และ dx = 0.5 cm

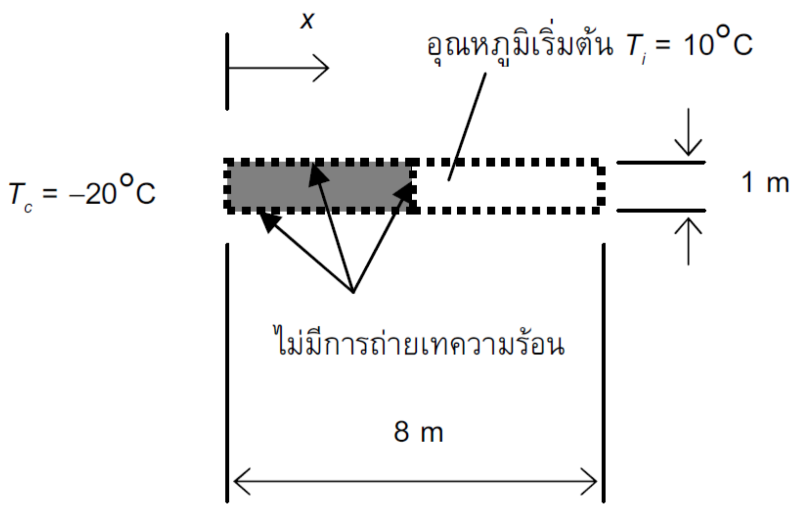
4.1.2 การเปลี่ยนสถานะ

การทดสอบแบบจำลองสำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติ จะใช้แนวทางเดียวกับงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) เช่นเดียวกับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ คือกำหนดความยาวของปัญหาทั้งหมดคือ 8 m เนื่องจากสมการผลเฉลยแม่นตรงในภาคผนวก ก เป็นผลเฉลยสำหรับปัญหาที่มีความยาวเป็นระยะกึ่งอนันต์ (semi infinite length) โดยที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 10°C สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่ T_c = −20°C คุณสมบัติของน้ำในสถานะของเหลว คือ ค่าการนำความร้อน k_L = 0.556 W/m·K, ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_L = 4.226 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ_L = 1000 kg/m^3 สำหรับสถานะของแข็งคือค่าการนำความร้อน k_s = 2.22 W/m·K, ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_s = 1.762 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ_s = 1000 kg/m^3 ปริมาณความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นของแข็ง L = 338 kJ/kg และ อุณหภูมิเยือกแข็ง T_F = 0°C

อย่างไรก็ตาม โปรแกรม FLUENT ไม่สามารถจำลองแบบใน 1 มิติได้ จึงจำเป็นต้องสร้างแบบจำลองใน 2 มิติ และ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพิ่มเติม ให้ขอบบนและขอบล่างของปัญหาไม่มีการถ่ายเทความร้อน และ จากความสมมาตรของปัญหา จึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงครึ่งเดียวคือ ใช้ความยาว 4 m โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน ดังแสดงในภาพที่ 4.10

การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆ มีขนาดเท่ากัน โดยแบ่งตามด้านกว้างจำนวน 100 ช่วง ตลอดการจำลองแบบ และแบ่งตามความยาวจำนวน 200 และ 400

ช่วง หรือ คิดเป็นปริมาตรควบคุมจำนวน 200 x 100 และ 400 x 100 cells และ แบ่งช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 10, 1 และ 0.1 s

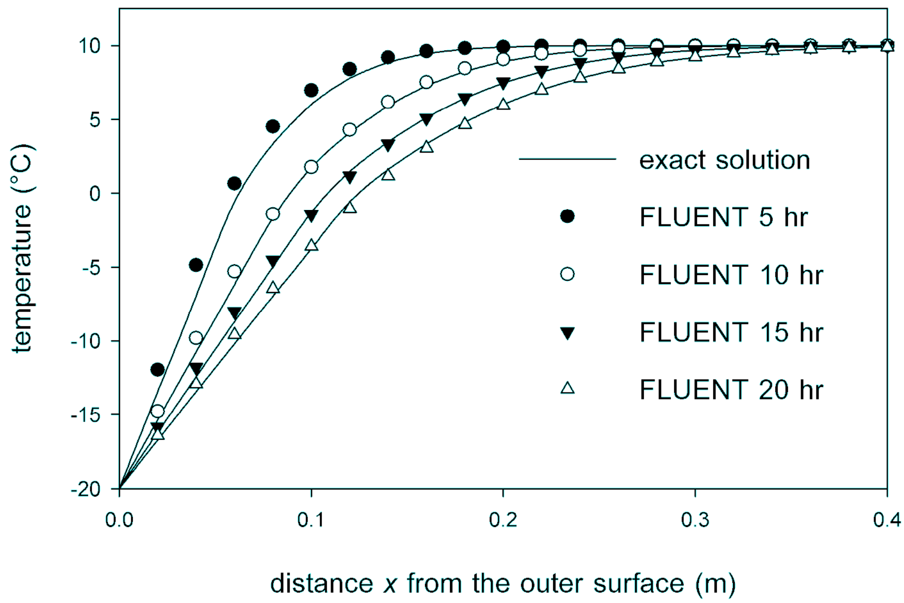


ภาพที่ 4.10 การกำหนดปัญหาเปลี่ยนสถานะ 1 มิติ

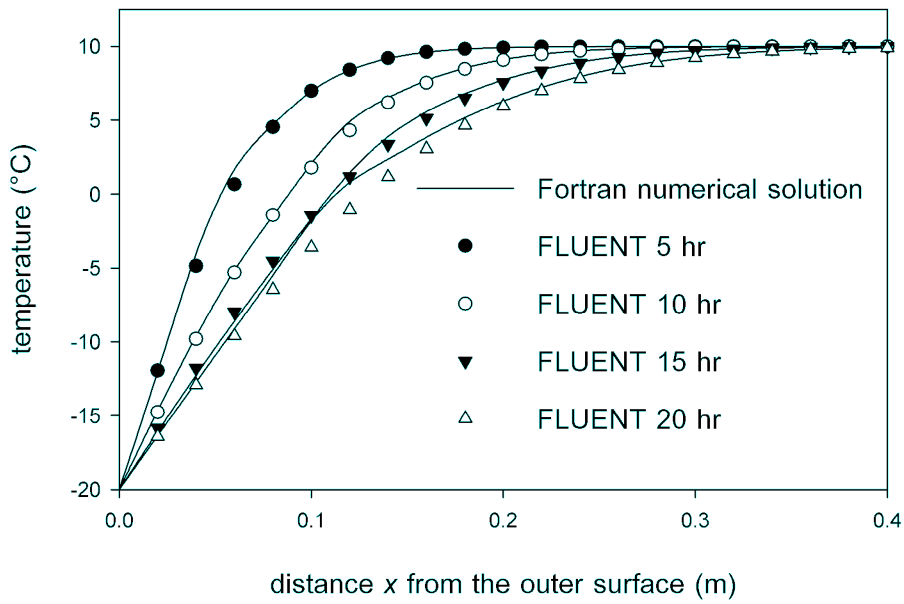
การตรวจสอบความถูกต้องโดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง และผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากงานวิจัยเดิม จะเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิที่เวลา 5, 10, 15 และ 20 hr และ การกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดมากที่สุด นอกจากนี้ได้พิจารณาผลของการใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ กัน (grid and time step dependency) โดยการเปลี่ยนขนาดกริด และช่วงเวลาตามที่อธิบายไปแล้วด้วย

1) การกระจายตัวของอุณหภูมิ

การกระจายของอุณหภูมิ เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง และผลเฉลยโดยประมาณจากงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) ถูกแสดงในภาพที่ 4.11 และ 4.12 ดังนี้



ภาพที่ 4.11 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 400 x 100 cells และ Δt = 1 s

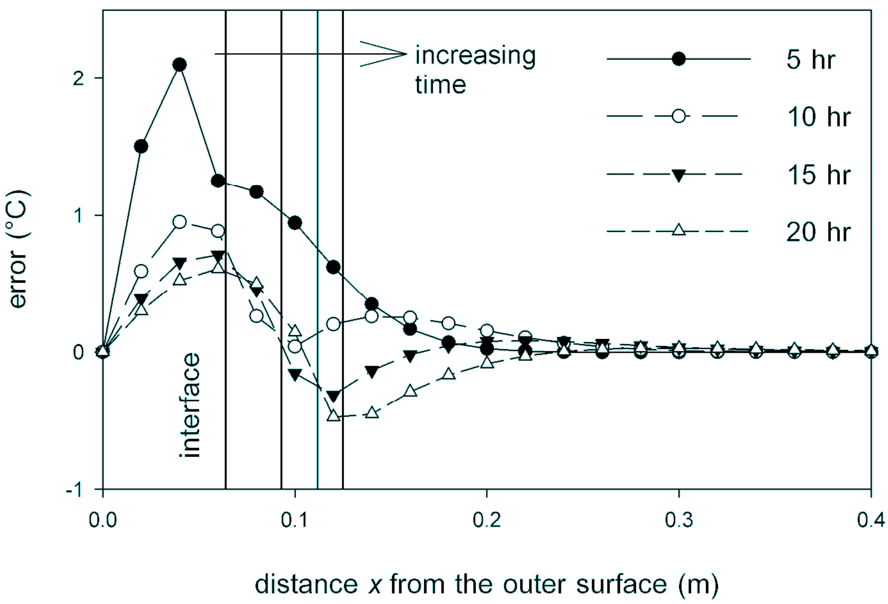


ภาพที่ 4.12 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยโดยประมาณจากโปรแกรมเดิมกับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 400 x 100 cells และ Δt = 1 s

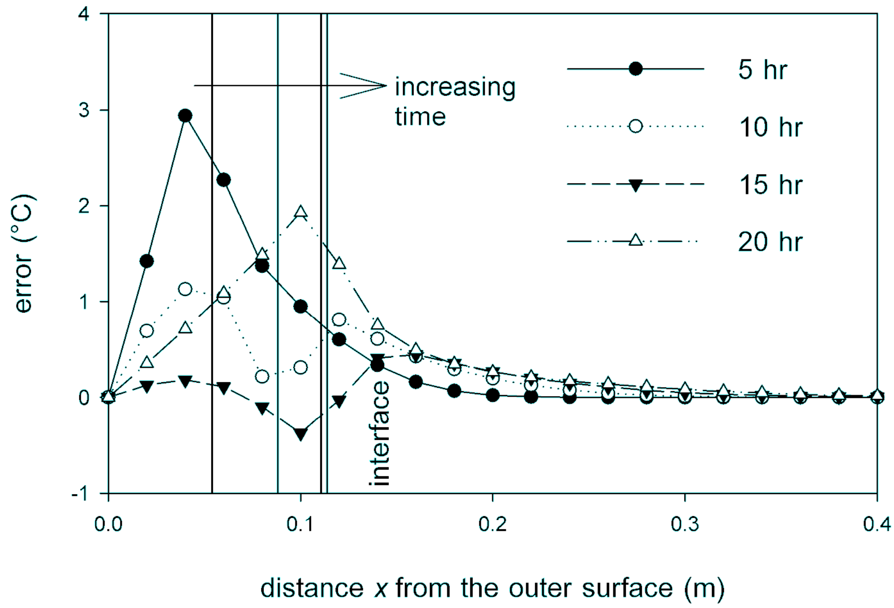
จะเห็นว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิจากผลที่ได้จากแบบจำลอง ซึ่งสร้างจากโปรแกรม FLUENT มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงและผลจากการประมาณโดยใช้โปรแกรมเดิมมาก โดยในช่วงเวลาแรกๆ ผลเฉลยจากโปรแกรม FLUENT จะมีค่าสูงกว่าผลเฉลยแม่นตรงเล็กน้อย และเมื่อเวลาผ่านไปจึงมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้น

ผลการกระจายของค่าความผิดพลาด $T_{numerical}$–$T_{analytical}$ ตามแกน x เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดของช่วงเวลาคงที่ ถูกแสดงในภาพที่ 4.13 โดยลักษณะการกระจายตัวของค่าความผิดพลาดมีค่ามากที่สุดที่บริเวณใกล้ขอบและมีค่าลดลงตามเวลา เนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างอุณหภูมิที่ขอบ และอุณหภูมิภายในทำให้ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (temperature gradient) มีค่าสูงที่ช่วงเวลาแรกๆ เช่นเดียวกับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ แต่เมื่อเวลามากขึ้นความแตกต่างของอุณหภูมิดังกล่าวมีค่าลดลง จึงทำให้ค่าความผิดพลาดมากที่สุดมีค่าลดลงตามเวลา

นอกจากนี้ อีกตำแหน่งหนึ่งที่มีค่าความผิดพลาดสูงคือ ตำแหน่งที่เส้นเปลี่ยนสถานะ (phase change interface) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ต้องมีการคำนวณปริมาณความร้อนแฝง ที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะ ซึ่งทำให้เกิดค่าความผิดพลาดในการประมาณเชิงเลขขึ้นได้ นอกจากนี้หากพิจารณาภาพที่ 4.14 พบว่าค่าความผิดพลาดของแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม FLUENT มีค่าใกล้เคียงกับค่าความผิดพลาดของแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรมเดิม แต่จะมีค่าน้อยกว่าเล็กน้อย



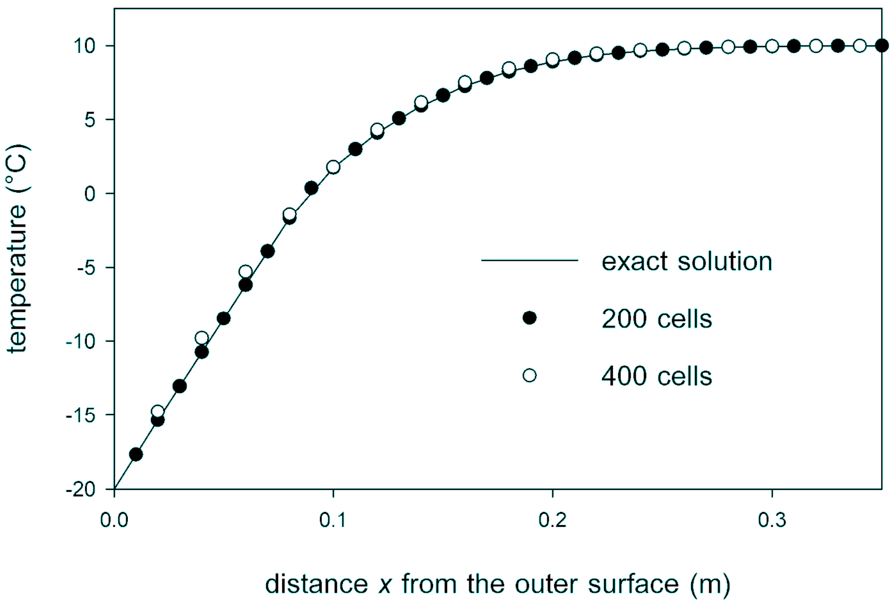
ภาพที่ 4.13 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดของแบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT เมื่อใช้แบบจำลอง 400 x 100 cells และ Δt = 1 s



ภาพที่ 4.14 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดของแบบจำลองจากโปรแกรมเดิม เมื่อใช้แบบจำลอง 400 x 100 cells และ Δt = 1 s

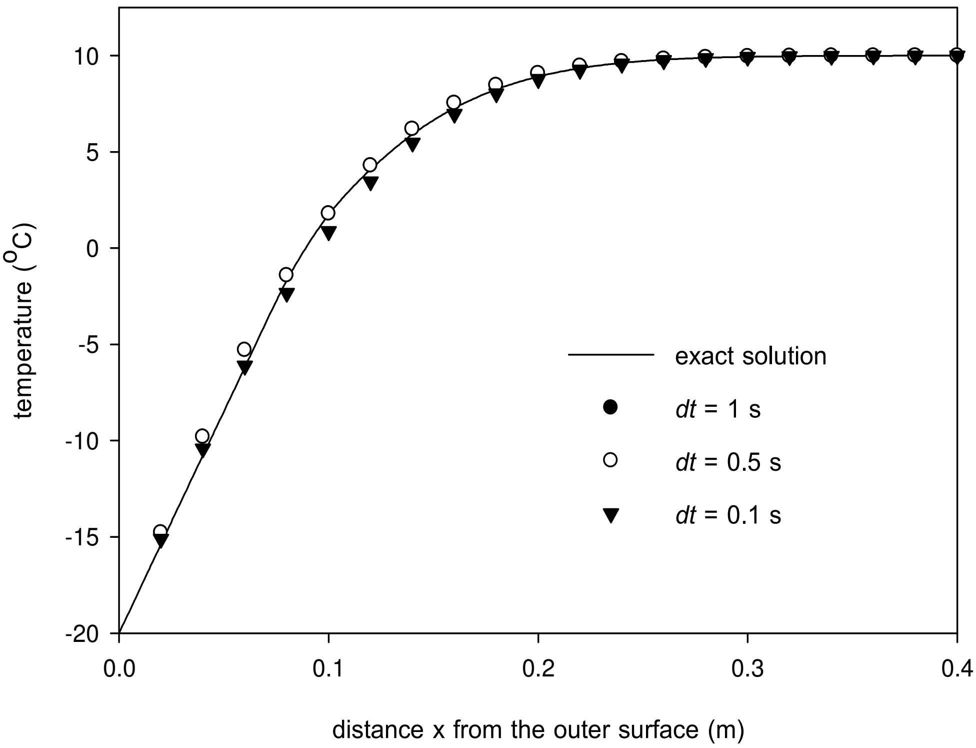
2) การพิจารณาขนาดปริมาตรควบคุม และช่วงเวลาต่าง ๆ

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุม Δx ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยการใช้ปริมาตรควบคุมที่ขนาดต่างๆ กันคือ 200 x 100 และ 400 x 100 cells โดยใช้ช่วงเวลา Δt = 1 s ได้การกระจายตัวของอุณหภูมิดังแสดงในภาพที่ 4.15 พบว่าการแบ่งกริดทั้งสองแบบคือ 200 x 100 และ 400 x 100 cells ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง อย่างไรก็ตาม เมื่อแบ่งปริมาตรควบคุมให้ละเอียดขึ้น ได้ผลลัพธ์ที่ละเอียดขึ้นเนื่องจากในการ discretisation มีประมาณตัวแปรใน convection term ด้วย power-law scheme จึงทำให้มีอันดับความผิดพลาดแปรผันตาม Δx หรือมี first order accuracy ซึ่งจากภาพที่ 4.15 จะเห็นว่าเมื่อแบ่งขนาดของปริมาตรควบคุมให้ละเอียดขึ้น หรือทำให้ Δx มีขนาดเล็กลง การกระจายตัวของอุณหภูมิก็จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้น



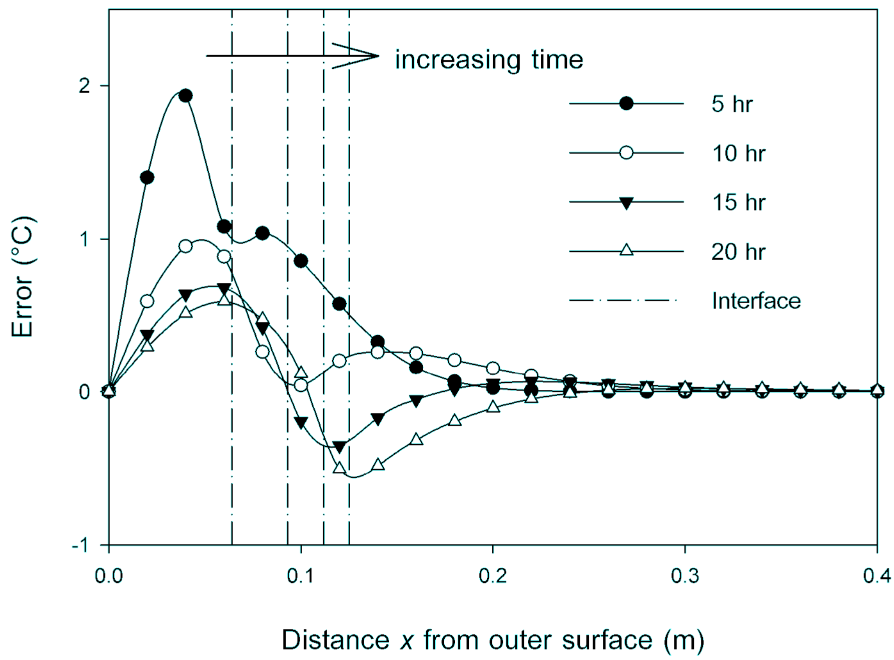
ภาพที่ 4.15 การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็น 200 x 100 และ 400 x 100 cells ที่ t = 10 hr

สำหรับการพิจารณาผลของขนาดช่วงเวลา Δt ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยใช้ขนาดของช่วงเวลาต่างๆ กันคือ 1, 0.5 และ 0.1 s พบว่าหากพิจารณาการกระจายตัวของอุณหภูมิ แบบจำลองที่ใช้ช่วงเวลาขนาดดังกล่าวจะมีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยแม่นตรงดังแสดงในภาพที่ 4.16

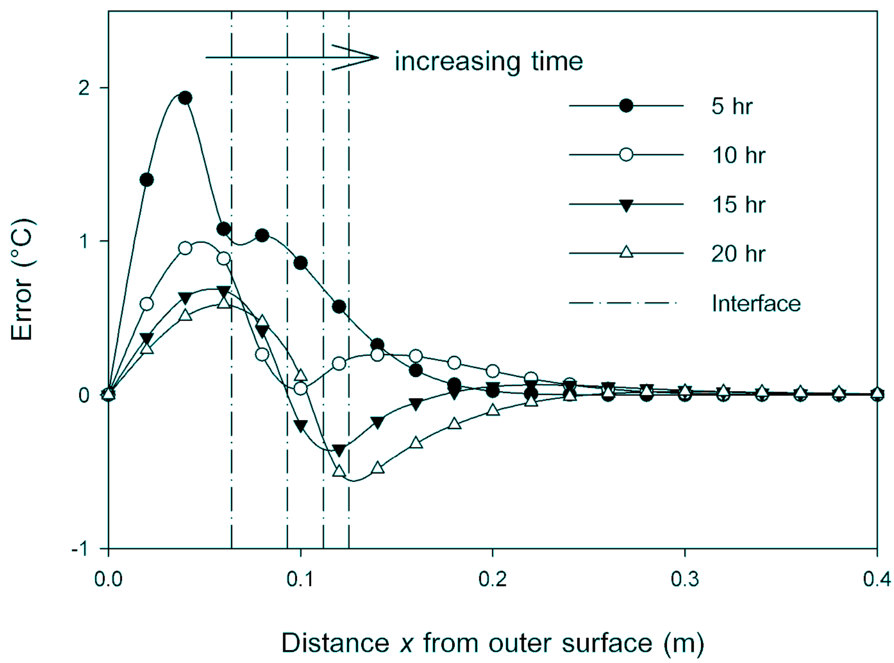


ภาพที่ 4.16 การกระจายตัวของอุณหภูมิของแบบจำลอง 200 x 100 cells ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1, 0.5 และ 0.1 s ที่เวลา 10 ชั่วโมง

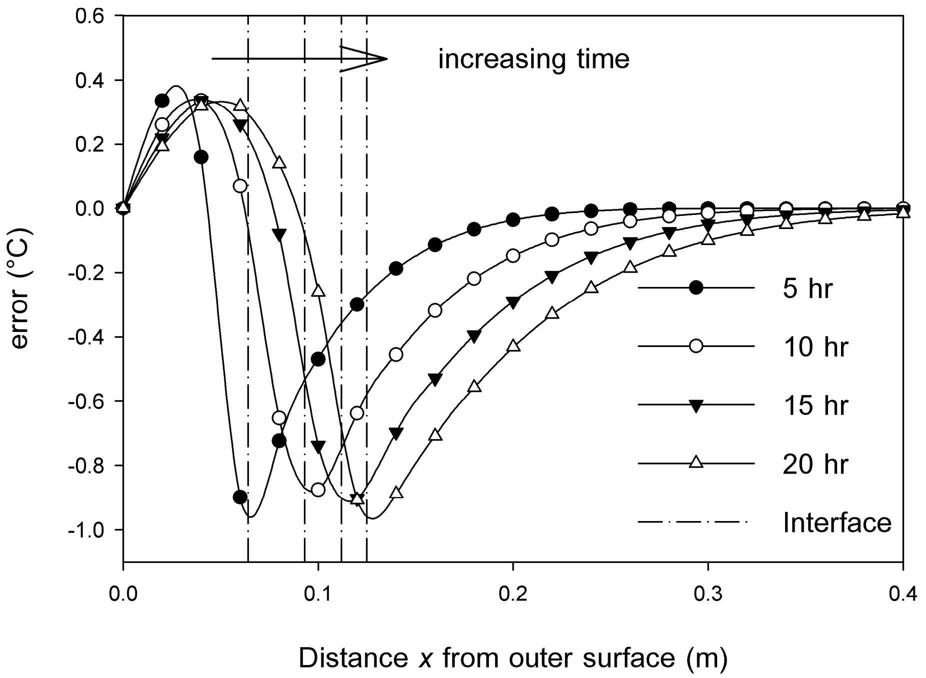
อย่างไรก็ตามหากพิจารณาการกระจายตัวของค่าความผิดพลาดดังแสดงในภาพที่ 4.17 – 4.19 จะพบว่าแบบจำลองที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 0.1 s จะมีค่าความผิดพลาดมากที่สุดน้อยกว่าแบบจำลองที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1 และ 0.5 s และค่าความผิดพลาดมากที่สุดของแบบจำลองที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 0.1s จะอยู่ในตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะพอดี ในขณะที่ค่าความผิดพลาดมากที่สุดของแบบจำลองที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1 และ 0.5 s จะไม่อยู่ที่เส้นแบ่งสถานะ จะเห็นว่า ตำแหน่งของค่าความผิดพลาดมากที่สุดของการจำลองแบบที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 0.1s มีตำแหน่งที่แน่นอน ซึ่งในการนำแบบจำลองไปประยุกต์ใช้จริง หากสามารถทราบตำแหน่งของค่าความผิดพลาดมากที่สุด ย่อมทำให้เป็นผลดีต่อการวิจัย ดังนั้น ในการเลือกใช้ขนาดของช่วงเวลาควรเลือกให้มีขนาดน้อยกว่า Δt = 0.1s



ภาพที่ 4.17 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1 s และมีการแบ่งรูปร่างเป็น 200 x 100 cells เมื่อเส้นตั้งคือเส้นแบ่งสถานะ



ภาพที่ 4.18 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 0.5 s และมีการแบ่งรูปร่างเป็น 200 x 100 cells เมื่อเส้นตั้งคือเส้นแบ่งสถานะ



ภาพที่ 4.19 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่ใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 0.1 s และมีการแบ่งรูปร่างเป็น 200 x 100 cells เมื่อเส้นตั้งคือเส้นแบ่งสถานะ

3) สรุปผล

จากการทดสอบแบบจำลองกับผลเฉลยแม่นตรง และผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) โดยการแบ่งปริมาตรควบคุมจำนวน 200 x 100 และ 400 x 100 cells และ แบ่งช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 10, 1 และ 0.1 s พบว่าค่าความผิดพลาดมากที่สุดจะเกิดที่บริเวณใกล้ขอบและบริเวณเส้นแบ่งสถานะ และแบบจำลองที่เหมาะสมควรแบ่งขนาดของ cells อย่างต่ำเป็น 200 cells หรือ dx = 2 cm และขนาดของช่วงเวลา Δt ควรน้อยกว่า 0.1 s เพราะมีแนวโน้มที่จะทำให้ทราบตำแหน่งของค่าความผิดพลาดมากที่สุดได้

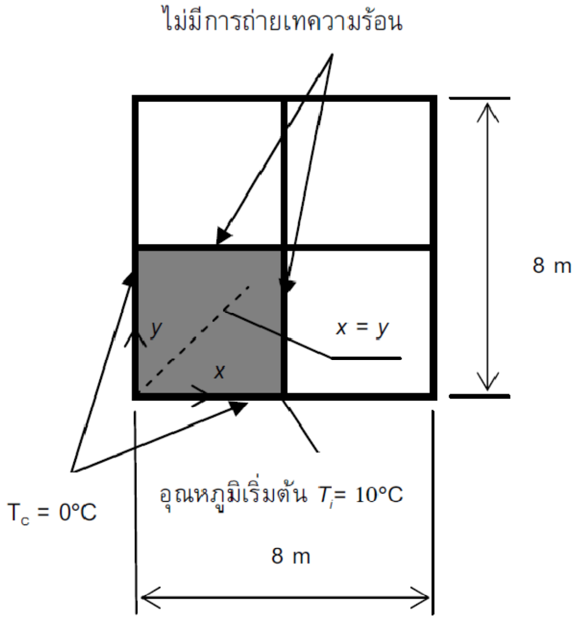
4.2 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองกรณี 2 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตคงที่

4.2.1 การนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่

การทดสอบแบบจำลองสำหรับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ 2 มิติ จะทำในแนวทางเดียวกับงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) เนื่องจากสมการผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหานี้ เป็นผลเฉลยสำหรับปัญหาที่มีพื้นที่ขนาดใหญ่ (semi-infinite region) ในที่นี้จึงกำหนดความยาวของปัญหาทั้งหมด 8 x 8 m ให้ที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 10°C สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบทั้งสี่ด้านมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่ T_c = 0°C และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงหนึ่งในสี่ ดังภาพที่ 4.20 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน

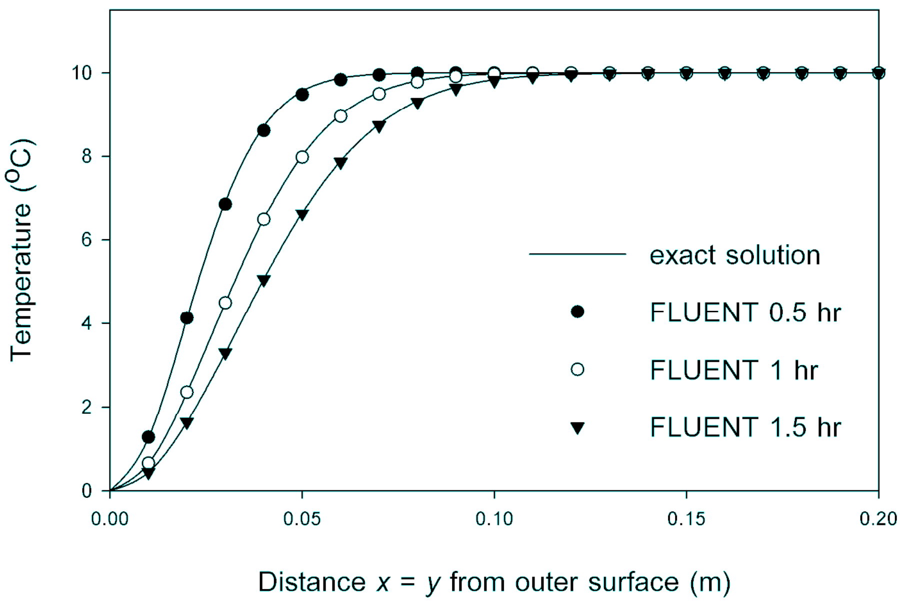
คุณสมบัติของน้ำ คือ ค่าการนำความร้อน k = 0.556 W/m·K ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_p = 4.226 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ = 1000 kg/m^3 โดย การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆเท่ากันขนาด 200 x 200 และ 400 x 400 cells

การตรวจสอบความถูกต้องโดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง โดยจะเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ที่เวลา 0.5, 1 และ 1.5 ชั่วโมง และ การกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง $x = y$ นอกจากนี้ได้พิจารณาผลของการใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆ กัน (grid and time step dependency) การใช้จำนวนปริมาตรควบคุมต่างๆคือ 200 x 200 และ 400 x 400 cells และ ช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 10 s, 1 s และ 0.1 s



ภาพที่ 4.20 การกำหนดปัญหานำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ 2 มิติ

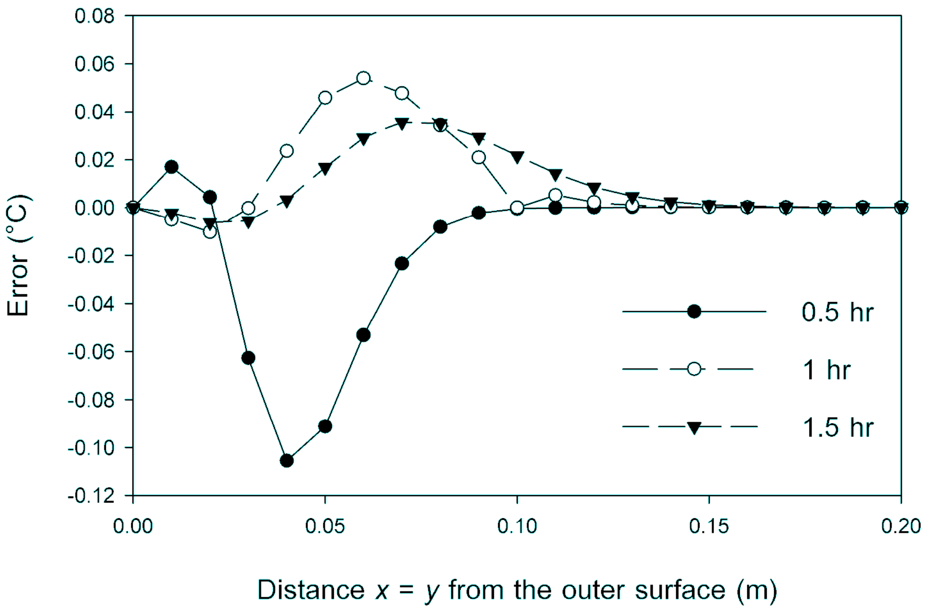
การกระจายของอุณหภูมิ เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ ได้ถูกแสดงในภาพที่ 4.21 ดังนี้



ภาพที่ 4.21 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 400 x 400 cells และ Δt = 1 s

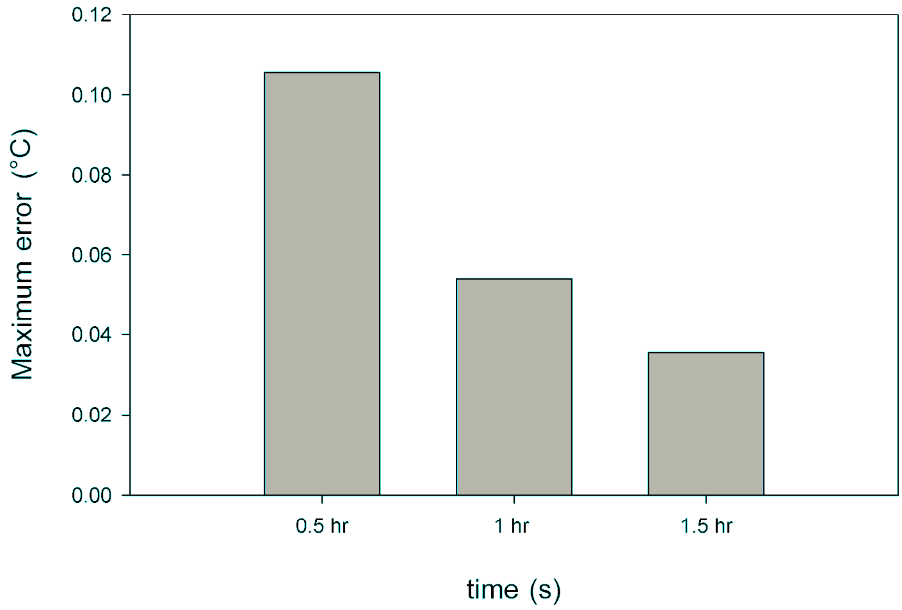
จะเห็นว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิจากผลที่ได้จากแบบจำลอง ซึ่งสร้างจากโปรแกรม FLUENT มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง และผลจากการประมาณโดยใช้โปรแกรมเดิมมาก

ผลการกระจายของค่าความผิดพลาด ($T_{numerical}$–$T_{analytical}$) ตามแกน x เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดของช่วงเวลาคงที่ ถูกแสดงในภาพที่ 4.22 โดยลักษณะการกระจายตัวของค่าความผิดพลาดมีลักษณะคือ มีค่ามากที่สุดที่บริเวณใกล้ขอบและมีค่าลดลงตามเวลา เช่นเดียวกับกรณีปัญหา 1 มิติ เนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างอุณหภูมิที่ขอบและอุณหภูมิภายในทำให้ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (temperature gradient) มีค่าสูงที่ช่วงเวลาแรกๆ แต่เมื่อเวลามากขึ้นความแตกต่างของอุณหภูมิดังกล่าวมีค่าลดลง จึงทำให้ค่าความผิดพลาดมากที่สุด max ($T_{numerical}$ – $T_{analytical}$) มีค่าลดลงตามเวลา ดังแสดงในภาพที่ 4.23

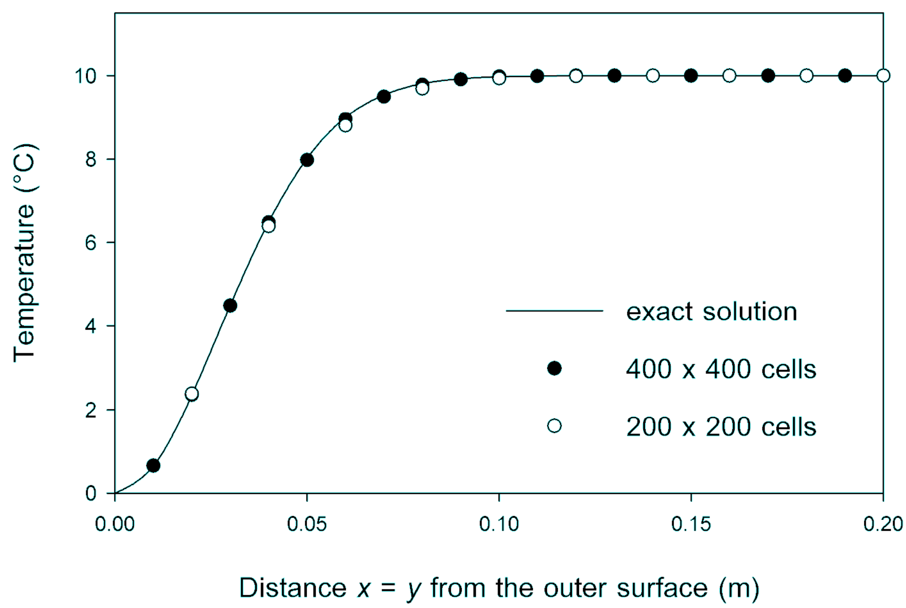


ภาพที่ 4.22 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดของแบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT เมื่อใช้แบบจำลอง 400 x 400 cells และ Δt = 1 s

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุมที่มีต่อผลลัพธ์ โดยการใช้ปริมาตรควบคุมที่ขนาดต่างๆกันคือ 200 x 200 และ 400 x 400 cells โดยใช้ช่วงเวลา Δt = 1 s โดยการกระจายตัวของอุณหภูมิจะถูกแสดงในภาพที่ 4.24 พบว่าการแบ่งกริดทั้งสองแบบ คือ 200 x 200 และ 400 x 400 cells ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง อย่างไรก็ตาม เมื่อแบ่งปริมาตรควบคุมให้ละเอียดขึ้นจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่แม่นยำขึ้นในทำนองเดียวกับกรณีปัญหา 1 มิติ

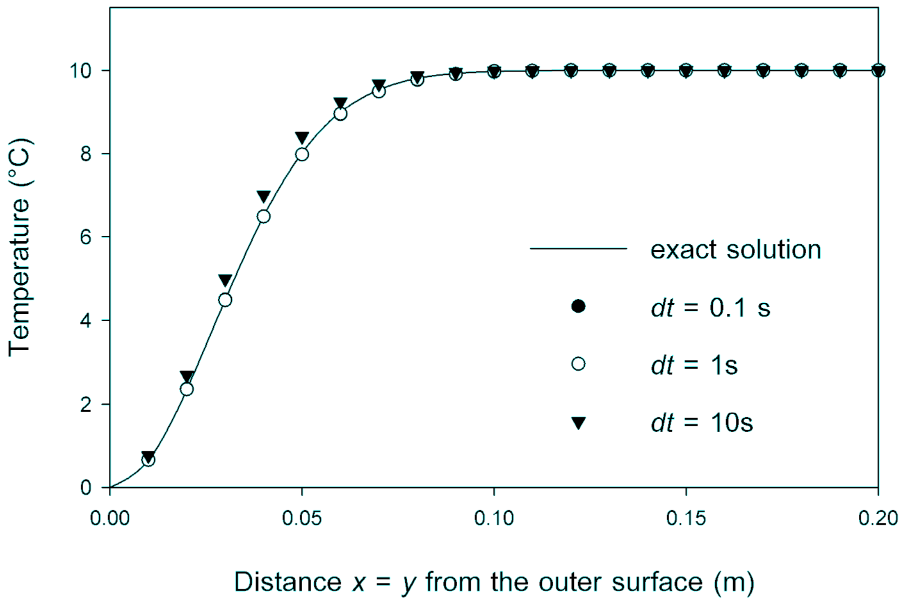


ภาพที่ 4.23 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความผิดพลาดสูงสุดของแบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT ที่เวลาต่างๆ



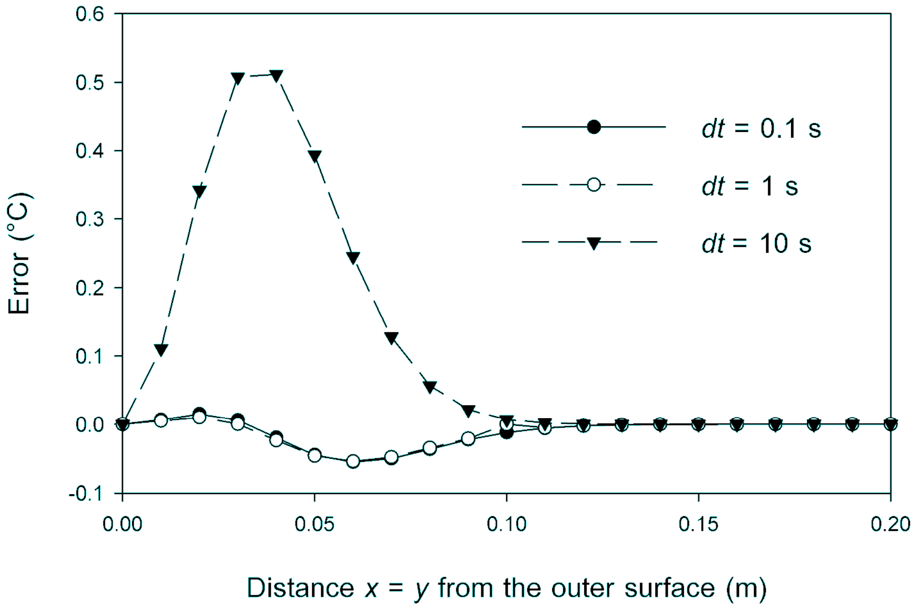
ภาพที่ 4.24 การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็น 200 x 200 และ 400 x 400 cells ที่ Δt = 1 s ที่ t = 1 hr

สำหรับการพิจารณาผลของขนาดช่วงเวลา Δt ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยแบ่งขนาดของช่วงเวลาต่างๆกันคือ 10, 1 และ 0.1 s การกระจายของอุณหภูมิจะถูกแสดงไว้ในภาพที่ 4.25 พบว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิของผลลัพธ์จากแบบจำลองที่มีการแบ่งช่วงเวลาทั้ง 3 แบบ มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง อย่างไรก็ตาม จากการกระจายของค่าความผิดพลาดจะถูกแสดงไว้ในภาพที่ 4.26 พบว่าค่าความผิดพลาดของแบบจำลองที่มีการแบ่งขนาดของช่วงเวลา Δt = 10 s จะมีค่ามากกว่าแบบจำลองที่มีการแบ่งขนาดของช่วงเวลาน้อยกว่า Δt = 1 s หรืออาจกล่าวได้ว่าแบบจำลองไม่ได้รับอิทธิพลจากขนาดของช่วงเวลาเมื่อแบ่งขนาดของช่วงเวลา Δt < 1 s



ภาพที่ 4.25 การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อแบ่งขนาดของช่วงเวลาออกเป็น 10, 1 และ 0.1 s ที่ t = 1 h

ในการทดสอบแบบจำลองกับปัญหาการนำความร้อนสภาวะชั่วครู่ แบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT ให้ผลเฉลยโดยประมาณใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง เมื่อใช้กริดและช่วงเวลาที่มีขนาดเล็ก และได้พารามิเตอร์หลักในการคำนวณที่ dt = 1 s และ dx = 20 mm



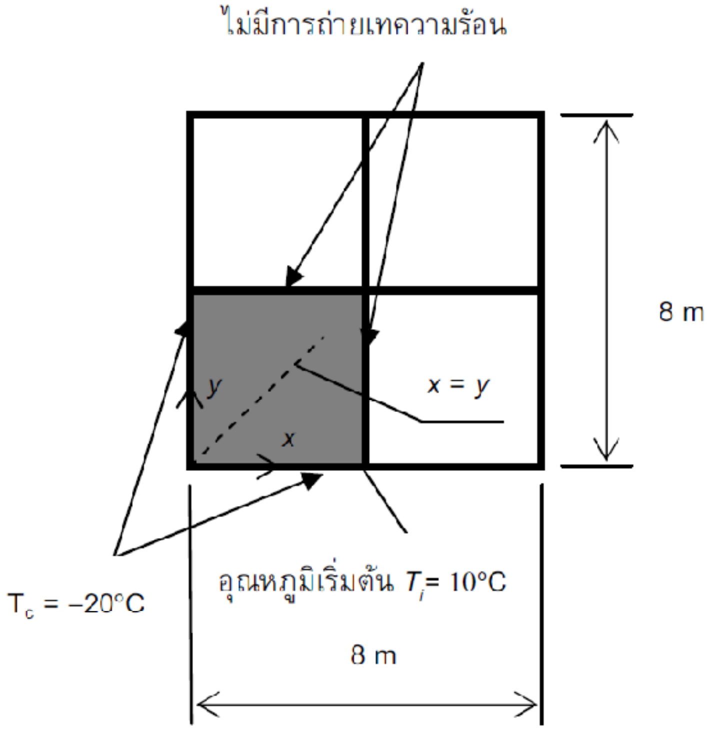
ภาพที่ 4.26 การกระจายของค่าความผิดพลาดเมื่อแบ่งขนาดของช่วงเวลา Δt = 10, 1 และ 0.1 s ที่ t = 1 hr

4.2.2 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 2 มิติ

การทดสอบแบบจำลองสำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 2 มิติ จะทำในแนวทางเดียวกับงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) เนื่องจากสมการผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหานี้ เป็นผลเฉลยสำหรับปัญหาที่มีพื้นที่ขนาดใหญ่ (semi-infinite region) จึงกำหนดความยาวของปัญหาทั้งหมด 8 x 8 m ให้ที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 10°C สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบทั้งสี่ด้านมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่ T_c = –20°C และ และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงหนึ่งในสี่ ดังภาพที่ 4.27 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน

คุณสมบัติของน้ำในสถานะของเหลว คือ ค่าการนำความร้อน k_L = 0.556 W/m·K ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_L = 4.226 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ_L = 1000 kg/m^3 สำหรับสถานะของแข็งคือค่าการนำความร้อน k_s = 2.22 W/m·K ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_s = 1.762 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ_s = 1000 kg/m^3 ปริมาณความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นของแข็ง L = 338 kJ/kg และ อุณหภูมิเยือกแข็ง T_F = 0°C โดย การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆเท่ากันขนาด 200 x 200 และ 400 x 400 cells

การกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ในหัวข้อ 4.2.2.1 จะถูกวิเคราะห์ที่เวลา 5, 10 และ 15 ชั่วโมง การกระจายของค่าความผิดพลาด และค่าความผิดพลาดที่มากที่สุดจะถูกวิเคราะห์ในหัวข้อ 4.2.2.2 ส่วนการพิจารณาผลของการใช้ปริมาตรควบคุมและช่วงเวลาขนาดต่างๆกัน (grid and time step dependency) ด้วยการใช้ปริมาตรควบคุมต่างๆกัน คือ 200 x 200 และ 400 x 400 cells และ ช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 1 และ 0.5 s จะถูกแสดงไว้ในหัวข้อ 4.2.2.3



ภาพที่ 4.27 การกำหนดปัญหาเปลี่ยนสถานะ 2 มิติ

4.2.2.1 การกระจายตัวของอุณหภูมิ

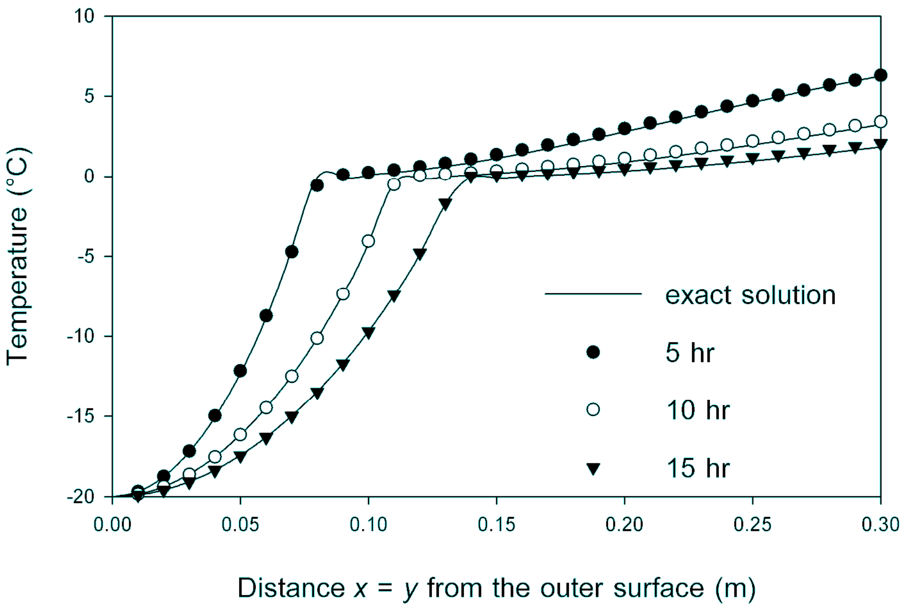
การกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ ได้ถูกแสดงในภาพที่ 4.28 และ 4.29 พบว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิจากผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองมีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยโดยประมาณจากโปรแกรมเดิมมาก ซึ่งหากพิจารณาโดยละเอียดจะพบว่าเฉลยที่ได้จากโปรแกรม FLUENT จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากโปรแกรมเดิม

นอกจากนั้น เมื่อพิจารณาการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ พบว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิมีลักษณะเด่นคือ ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำและบริเวณที่เป็นน้ำแข็งจะแตกต่างกันมาก โดยจะเห็นความแตกต่างนี้อย่างชัดเจน

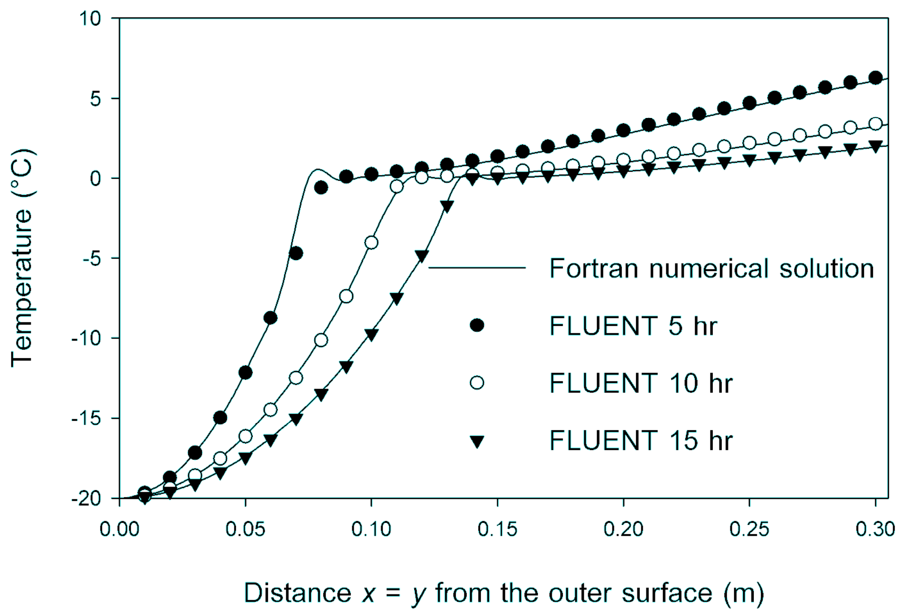
บริเวณเส้นแบ่งสถานะ ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง จะมีค่ามากกว่าความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำ เนื่องจากค่าความจุความร้อนของน้ำแข็งน้อยกว่าน้ำ และค่าการนำความร้อนของน้ำแข็งมากกว่าน้ำ

4.2.2.2 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาด

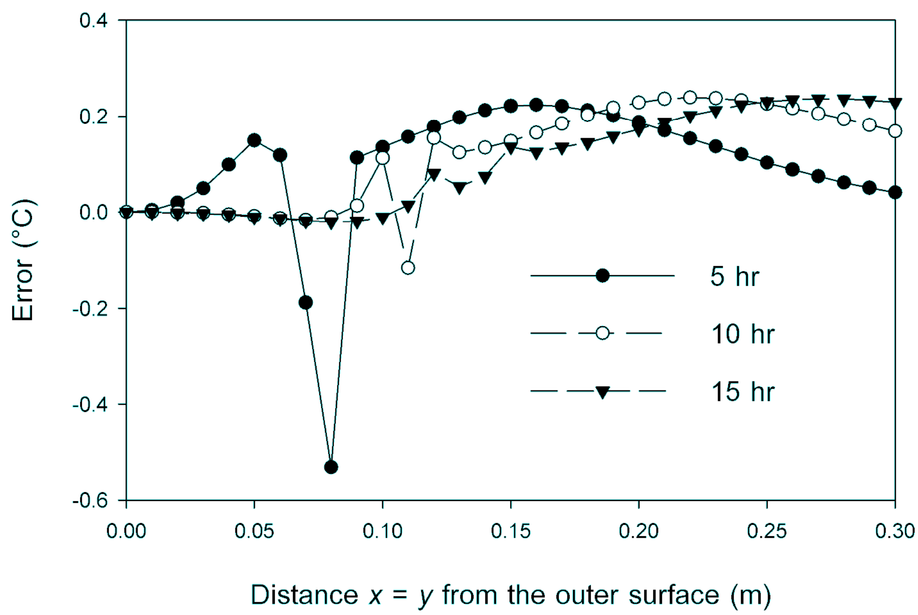
ผลการกระจายของค่าความผิดพลาด ($T_{numerical}$-$T_{analytical}$) ตามตำแหน่ง $x = y$ เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดของช่วงเวลาคงที่ ถูกแสดงในภาพที่ 4.30 พบว่าตำแหน่งที่มีค่าความผิดพลาดสูงคือ ตำแหน่งที่เส้นเปลี่ยนสถานะ (phase change interface) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ต้องมีการคำนวณความร้อนแฝง ซึ่งทำให้เกิดปัญหาในการประมาณเชิงเลขได้ เนื่องจากความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะจากน้ำเป็นน้ำแข็งมีค่าสูงมากคือ 338 kJ/kg เมื่อเทียบกับความจุความร้อนจำเพาะของน้ำหรือน้ำแข็งซึ่งมีค่า 4.226 kJ/kg·K และ 1.762 kJ/kg·K ตามลำดับ



ภาพที่ 4.28 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลที่ได้จากแบบจำลองมื่อจำลองแบบด้วย 400 x 400 cells และ Δt = 1 s



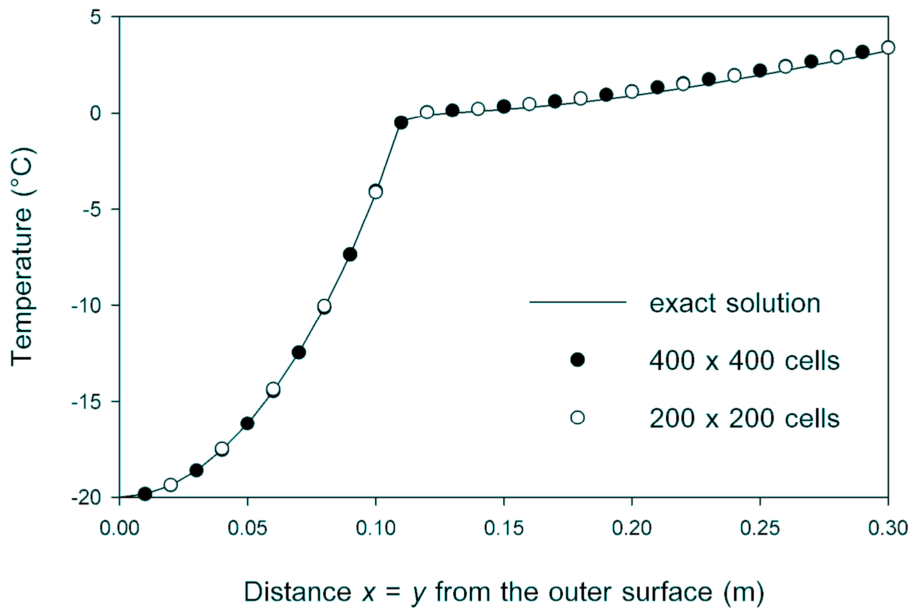
ภาพที่ 4.29 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ระหว่างผลเฉลยโดยประมาณจากโปรแกรมเดิมกับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 400 x 400 cells และ Δt =1 s



ภาพที่ 4.30 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง $x = y$ ของแบบจำลองจากโปรแกรม Fluent เมื่อใช้แบบจำลอง 400 x 400 cells และ Δt = 1 s

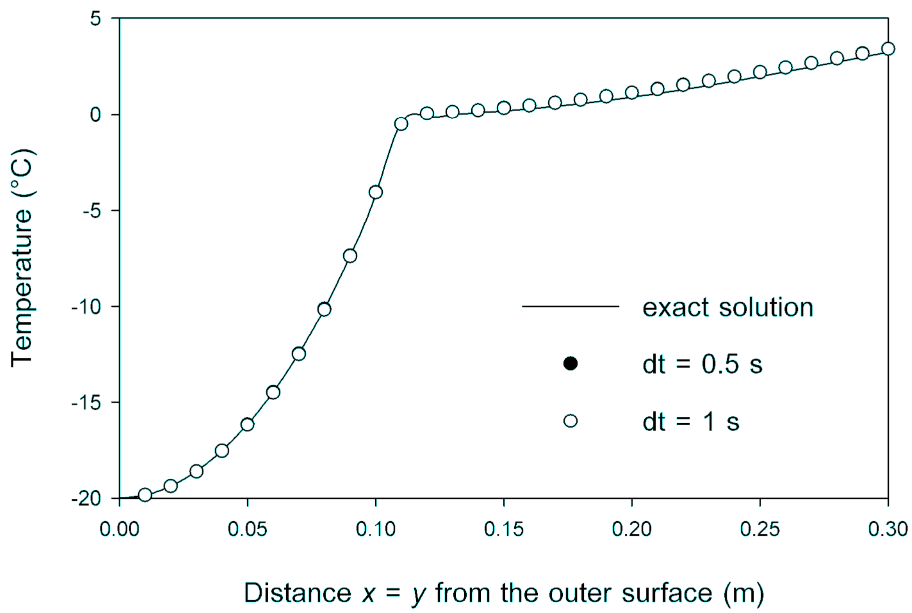
4.2.2.3 การพิจารณาผลของปริมาตรควบคุมและช่วงเวลา

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุมที่มีต่อผลลัพธ์ โดยการใช้ปริมาตรควบคุมที่ขนาดต่างๆ กันคือ 200 x 200 และ 400 x 400 cells โดยใช้ช่วงเวลา Δt = 1 s โดยการกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง x = y จะถูกแสดงในภาพที่ 4.31 พบว่าการแบ่งกริดทั้งสองแบบคือ 200 x 200 cells และ 400 x 400 cells ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง และมีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย เนื่องจากการแบ่งกริดทั้งสองแบบอยู่ในช่วงที่แบบจำลองเป็นอิสระจากอิทธิพลของขนาดของกริด

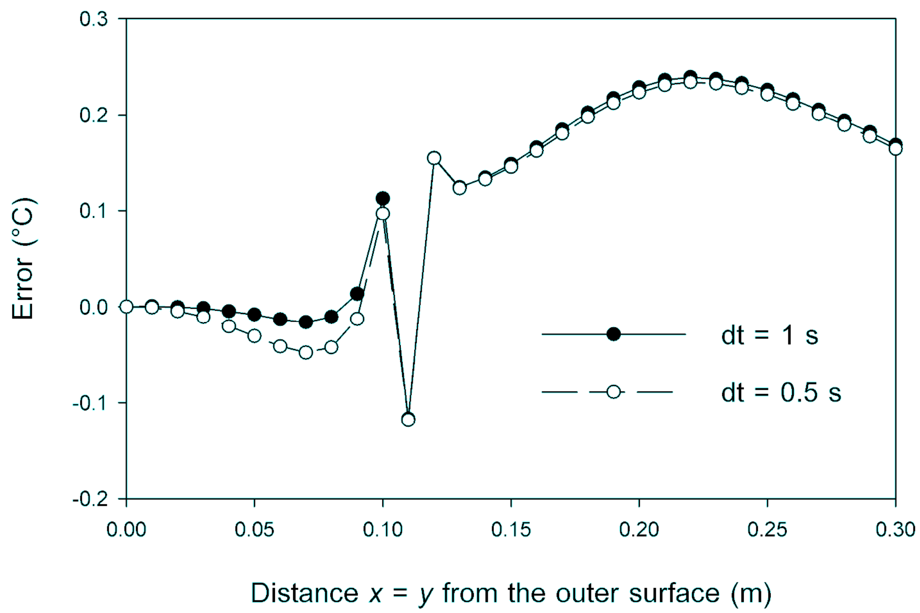


ภาพที่ 4.31 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง x = y เมื่อแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็น 200 x 200 และ 400 x 400 cells ที่ t = 10 hr

สำหรับการพิจารณาผลของขนาดช่วงเวลา Δt ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยใช้ขนาดของช่วงเวลาต่างๆกันคือ 0.5 และ 1 s โดยใช้แบบจำลอง 400 x 400 cells จากการพิจารณาการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง x = y ดังแสดงในภาพที่ 4.32 พบว่าแบบจำลองที่มีการแบ่งขนาดของช่วงเวลาทั้งสองแบบ ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง ยิ่งไปกว่านั้น เมื่อพิจารณาการกระจายตัวของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง x = y ดังแสดงในภาพที่ 4.33 พบว่าแบบจำลองที่มีการแบ่งช่วงเวลาทั้งสองแบบให้ผลลัพธ์ที่มีการกระจายของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง x = y ที่มีแนวโน้มเดียวกันและมีค่าใกล้เคียงกันมาก หรืออาจกล่าวได้ว่าแบบจำลองไม่ได้รับผลจากอิทธิพลของขนาดของช่วงเวลาเมื่อแบ่งขนาดของช่วงเวลา $\Delta t < 1$ s



ภาพที่ 4.32 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y$ ของแบบจำลอง 400 x 400 cells ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1 และ 0.5 ที่เวลา 10 hr



ภาพที่ 4.33 การกระจายตัวของค่าความผิดพลาดตามตำแหน่ง $x = y$ ของแบบจำลอง 400 x 400 cells ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1 และ 0.5 ที่เวลา 10 hr

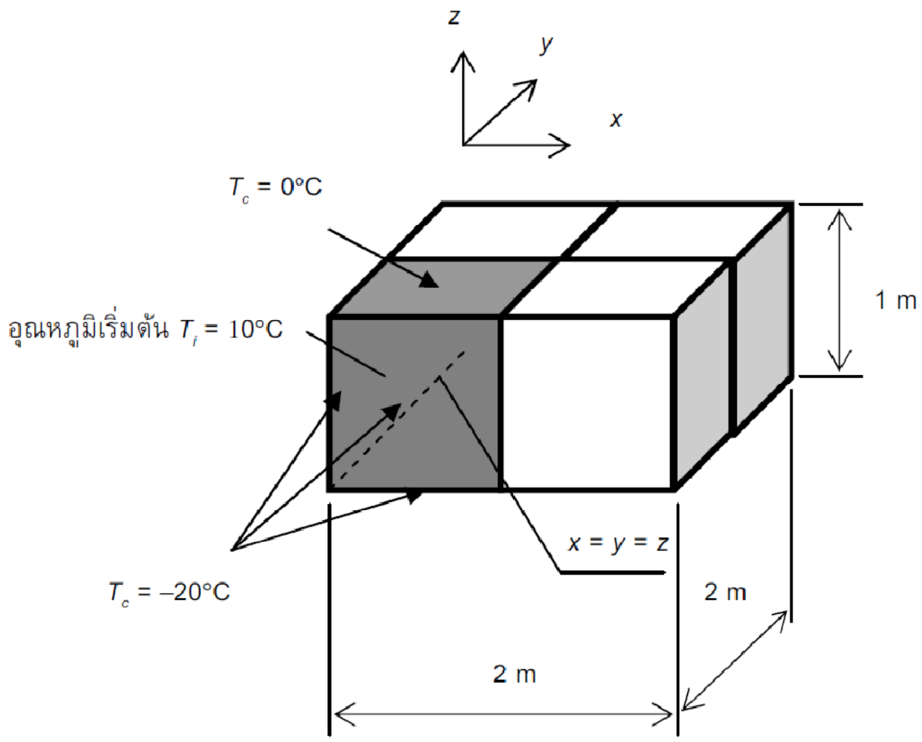
4.2.3.4 สรุปผล

จากการทดสอบแบบจำลองกับผลเฉลยแม่นตรง และผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) โดยการแบ่งปริมาตรควบคุมจำนวน 200 x 200 และ 400 x 400 cells และ แบ่งช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 1 และ 0.5 s พบว่าค่าความผิดพลาดมากที่สุดจะเกิดที่บริเวณใกล้ขอบและบริเวณเส้นแบ่งสถานะ และแบบจำลองที่เหมาะสมควรแบ่งขนาดของ cells อย่างต่ำเป็น 200 x 200 cells หรือ dx = 20 mm และขนาดของช่วงเวลา Δt ควรน้อยกว่า 1 s

4.3 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 3 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตคงที่

สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 3 มิติ เป็นงานวิจัยซึ่งขยายผลจากปัญหา 1 มิติ และ 2 มิติ จึงไม่มีผลแม่นตรงและผลเฉลยโดยประมาณจากงานวิจัยเดิมมาชี้วัดความถูกต้อง

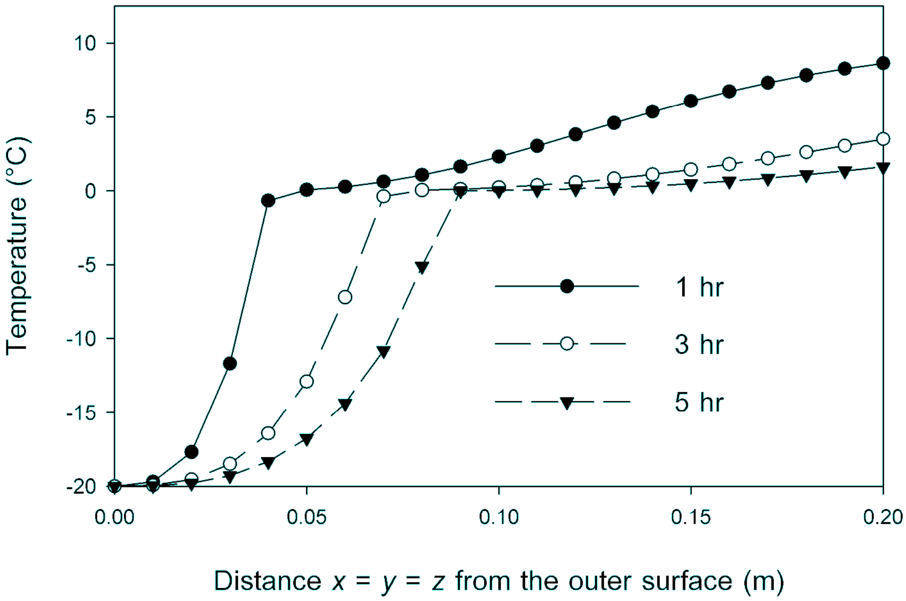
โดยจะกำหนดให้ปัญหามีรูปทรงสี่เหลี่ยม กว้าง 2 m ยาว 2 m และสูง 1 m เงื่อนไขขอบเขตกำหนดให้ทุกด้านยกเว้น ด้านบนของรูปทรงสี่เหลี่ยม มีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่ T_c = –20°C ส่วนด้านบนของรูปทรงสี่เหลี่ยม มีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่ T_c = 0°C ตามลักษณะการผลิตน้ำแข็งซอง จากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงหนึ่งในสี่ โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางด้านกว้างและด้านยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน (ภาพที่ 4.34) และกำหนดให้ที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 10°C สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา คุณสมบัติของสารนั้น ใช้ค่าเดียวกันกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติ โดย การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆเท่ากัน ขนาด 50 x 50 x 50 และ 100 x 100 x 100 cells



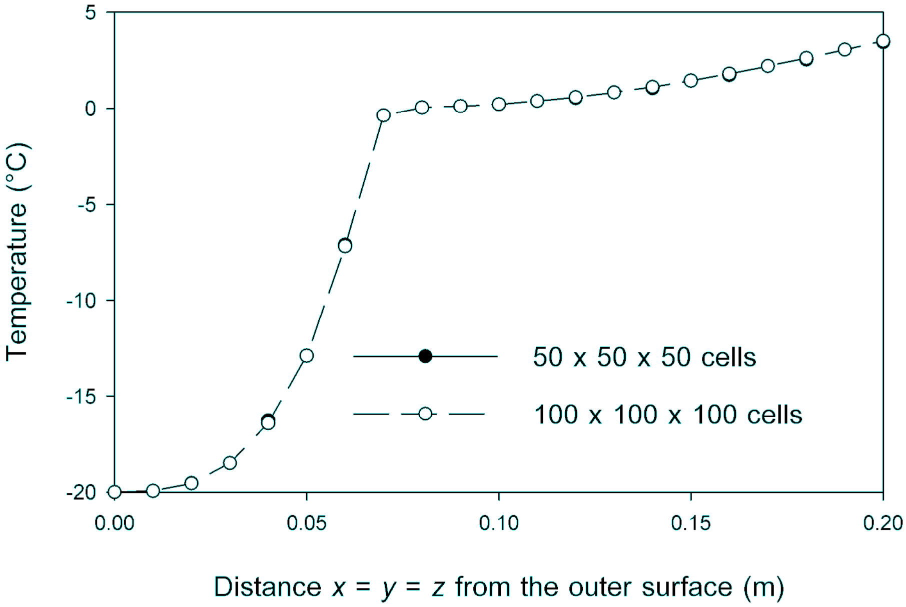
ภาพที่ 4.34 การกำหนดปัญหาเปลี่ยนสถานะ 3 มิติ

เมื่อพิจารณาการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่ง $x = y = z$ ที่เวลา 1, 3 และ 5 ชั่วโมง (ภาพที่ 4.35) จะเห็นว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิมีลักษณะเดียวกับ การกระจายของอุณหภูมิจากปัญหาการเปลี่ยนสถานะ 2 มิติ คือ ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำและบริเวณที่เป็นน้ำแข็งจะแตกต่างกันมาก โดยจะเห็นความแตกต่างนี้อย่างชัดเจนบริเวณเส้นแบ่งสถานะ ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง จะมีค่ามากกว่าความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำ เนื่องจากค่าความจุความร้อนของน้ำแข็งน้อยกว่าน้ำ และค่าการนำความร้อนของน้ำแข็งมากกว่าน้ำ และหากเปรียบเทียบกรณี 2 มิติ กับ 3 มิติ จะพบว่าความแตกต่างระหว่างความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่มีสถานะเป็นของแข็งและของเหลวของกรณี 3 มิติ จะมากกว่ากรณี 2 มิติ เนื่องจากกรณี 3 มิติ มีพื้นผิวในการถ่ายเทความร้อนเพิ่มขึ้นจากสองผิวเป็นสามผิว

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุม โดยการแบ่งปริมาตรควบคุมขนาดต่างกันคือ 50 x 50 x 50 และ 100 x 100 x 100 cells พบว่าแบบจำลองทั้งสองให้ผลที่ใกล้เคียงกันมาก ดังแสดงในภาพที่ 4.36 จึงอาจกล่าวได้ว่า แบบจำลองมีความเป็นอิสระจากขนาดของการแบ่งปริมาตรควบคุมที่ dx = 1 cm อย่างไรก็ตามค่าดังกล่าวเป็นเพียงจุดที่อยู่ในบริเวณที่มีความเป็นอิสระจากขนาดของการแบ่งปริมาตรควบคุมเท่านั้น มิได้เป็นค่าแรกที่ทำให้เกิดความเป็นอิสระจากขนาดของการแบ่งปริมาตรควบคุม

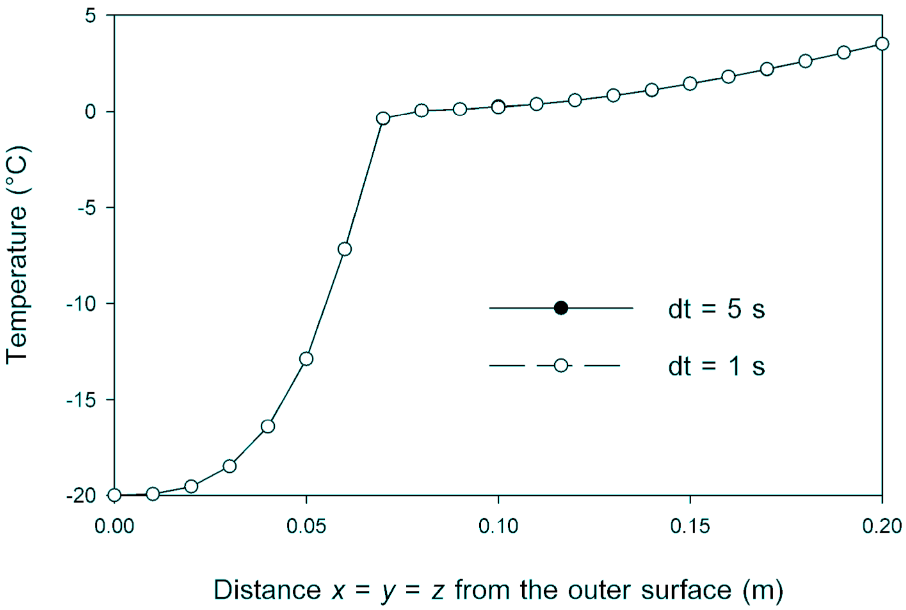


ภาพที่ 4.35 การกระจายของอุณหภูมิที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 100 x 100 x 100 cells และ Δt = 5 s



ภาพที่ 4.36 การกระจายของอุณหภูมิที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 50x 50 x 50 และ 100 x 100 x 100 cells และ Δt = 5 s ที่เวลา 3 hr

สำหรับการพิจารณาผลของขนาดช่วงเวลา Δt ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยใช้ขนาดของช่วงเวลาต่างกันคือ 5 และ 1 s โดยใช้แบบจำลอง 100 x 100 x 100 cells พบว่าแบบจำลองทั้งสองให้ผลลัพธ์ที่มีค่าใกล้เคียงกัน ดังแสดงในภาพที่ 4.37 จึงอาจกล่าวได้ว่าแบบจำลองเป็นอิสระจากขนาดช่วงเวาที่ dt = 5 s

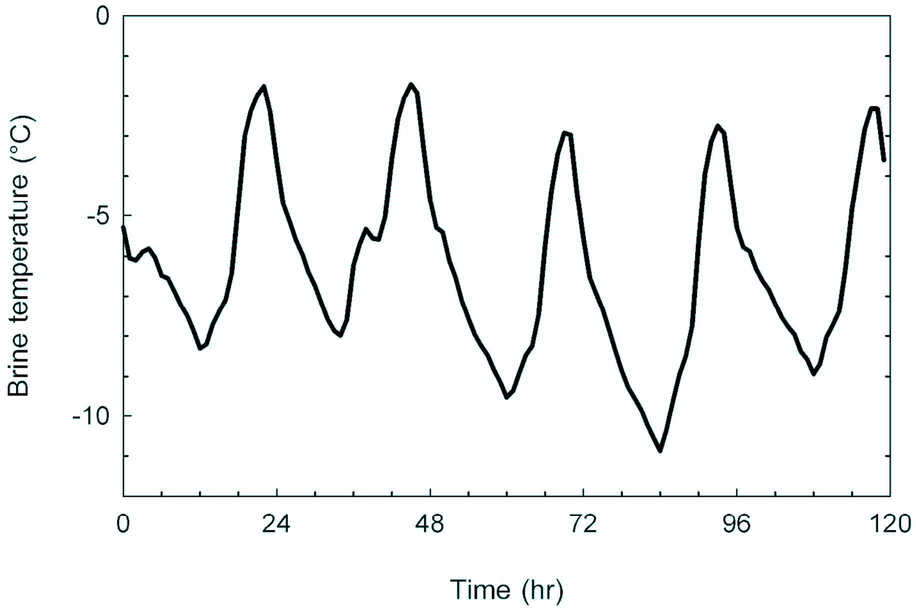


ภาพที่ 4.37 การกระจายของอุณหภูมิที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 100 x 100 x 100 cells และ Δt = 5 และ 1 s ที่เวลา 3 hr

ดังนั้น อาจสรุปได้ว่า การจำลองแบบใน 3 มิติ ซึ่งเป็นการขยายผลมาจากการจำลองใน 1 และ 2 มิติ ได้พารามิเตอร์หลักในการคำนวณคือ dt = 5 s ที่ขนาดกริด dx = 1 cm โดยพารามิเตอร์ดังกล่าวอยู่ช่วงที่มีความเป็นอิสระจากอิทธิพลของการแบ่งขนาดของช่วงเวลา และการแบ่งขนาดของปริมาตรควบคุม แต่มิใช่ค่าแรกที่ทำให้แบบจำลองมีความเป็นอิสระจากอิทธิพลของการแบ่งขนาดของช่วงเวลา และการแบ่งขนาดของปริมาตรควบคุม

4.4 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่

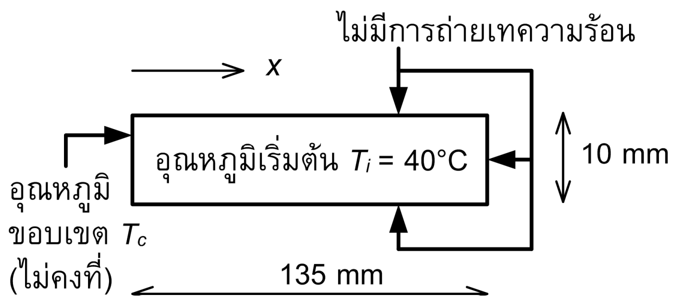
การจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งในหัวข้อ 4.1, 4.2 และ 4.3 เป็นการจำลองแบบปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่อุณหภูมิคงที่ ซึ่งในเป็นจริง การควบคุมอุณหภูมิขอบเขตให้มีค่าคงที่ทำได้ยาก ดังนั้น ในหัวข้อนี้จึงได้พิจารณาปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติที่มีอุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่ โดยอุณหภูมิดังกล่าว คืออุณหภูมิน้ำเกลือที่เก็บได้จากโรงงานผลิตน้ำแข็งในจังหวัดสมุทรสาคร (ภาพที่ 4.38)



ภาพที่ 4.38 อุณหภูมิน้ำเกลือเฉลี่ยรายชั่วโมง
ระหว่างวันที่ 1-4 ตุลาคม 2004 (Sukkuea and Maneeratana, 2007)

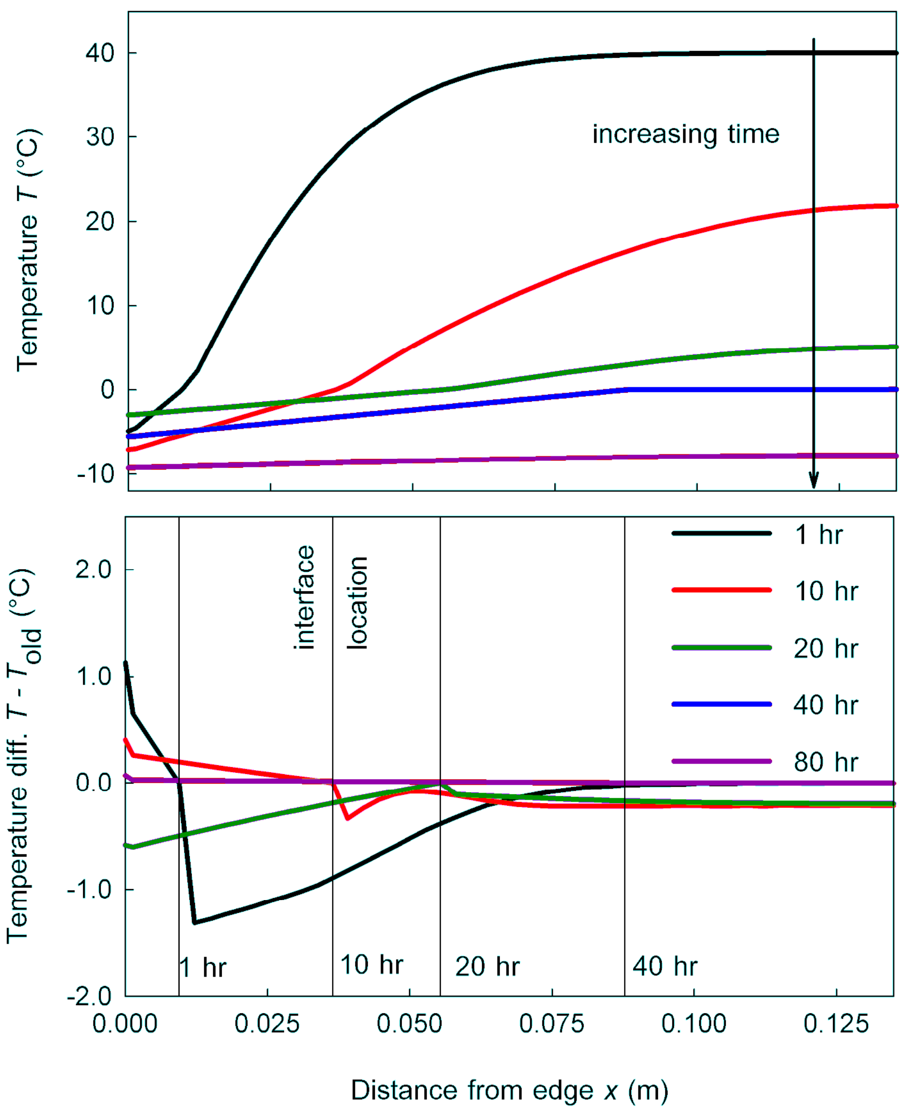
กำหนดความยาวของปัญหาทั้งหมดเท่ากับ 270 mm เท่ากับความยาวด้านกว้างของซองน้ำแข็งในโรงงานดังกล่าว โดยให้ที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 40°C สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิไม่คงที่เท่ากับอุณหภูมิน้ำเกลือในภาพที่ 4.38 คุณสมบัติของสารนั้น ใช้ค่าเดียวกันกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติ

อย่างไรก็ตาม โปรแกรม FLUENT ไม่สามารถจำลองแบบใน 1 มิติได้ จึงจำเป็นต้องสร้างแบบจำลองใน 2 มิติ และ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพิ่มเติม ให้ขอบบนและขอบล่างของปัญหาไม่มีการถ่ายเทความร้อน และ จากความสมมาตรของปัญหา จึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงครึ่งเดียวคือ ใช้ความยาว 135 mm โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน ดังแสดงในภาพที่ 4.39



ภาพที่ 4.39 รูปร่างปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่

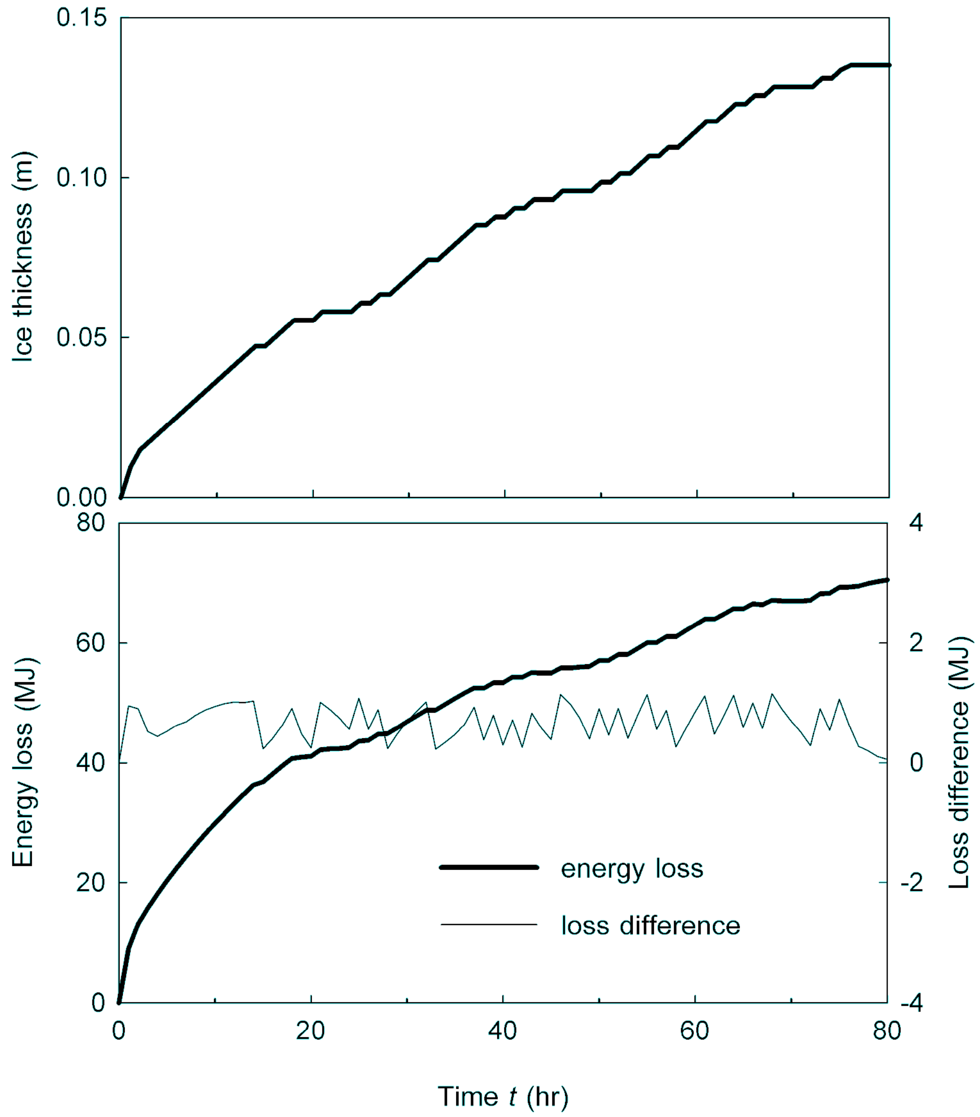
การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆ มีขนาดเท่ากัน โดยแบ่งตามด้านกว้างจำนวน 10 ช่วง และแบ่งตามความยาวจำนวน 50 ช่วง หรือ คิดเป็นปริมาตรควบคุมจำนวน 10 x 50 cells และ แบ่งช่วงเวลา Δt = 1 s



ภาพที่ 4.40 การกระจายของอุณหภูมิและความแตกต่างของอุณหภูมิ
จากโปรแกรม FLUENT กับงานวิจัยเดิม (Sukkuea and Maneeratana, 2007)

จากการจำลองแบบ ได้การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน x ที่เวลา t = 1, 10, 20, 40 และ 80 ชั่วโมง ดังแสดงในภาพที่ 4.39 จะเห็นได้ว่าอุณหภูมิของน้ำจะลดลงเรื่อยๆ และเมื่อพิจารณาการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ได้กับงานวิจัยเดิม (Sukkuea and Maneeratana, 2007)

พบว่า ความแตกต่างของการกระจายตัวของอุณหภูมิมีค่ามากที่บริเวณใกล้ขอบที่เวลาเริ่มต้น เนื่องจากมีความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิสูง และค่าความแตกต่างจะน้อยลงเมื่อเวลาผ่านไป



ภาพที่ 4.41 ความหนาของน้ำแข็ง การสูญเสียพลังงาน และค่าความแตกต่าง ระหว่าง FLUENT กับ กับงานวิจัยเดิม (Sukkuea and Maneeratana, 2007)

เมื่อกำหนดให้พลังงานภายในต่อหน่วยปริมาตร u ของแต่ละ cell มีค่าเท่ากับความร้อนสัมผัส และความร้อนแฝงดังสมการ

$$H = h_{ref} + \int_{T_{ref}}^{T} c_p dT + \Delta H \tag{4.1}$$

จะสามารถหาค่าของพลังงานภายในแทนเอนทัลปี จะได้พลังงานภายในรวม U ในแต่ละช่วงเวลา โดย

$$U = \sum u_i v_i \tag{4.2}$$

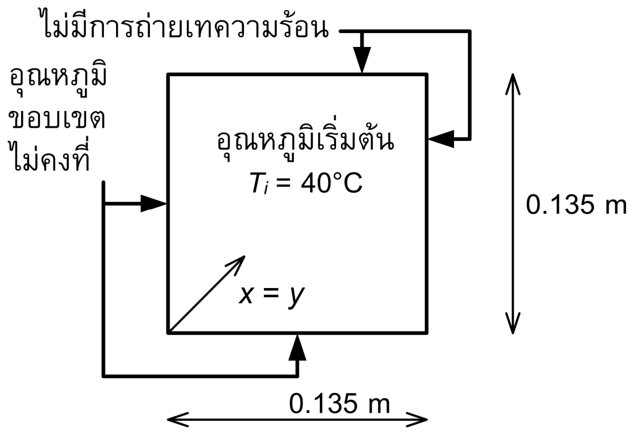
เมื่อ u คือพลังงานภายในต่อหน่วยปริมาตร และ v คือปริมาตรของแต่ละปริมาตรควบคุม i ทำให้สามารถหาค่าการสูญเสียพลังงานของน้ำได้จากการลดลงของพลังงานภายในรวม U

การสูญเสียพลังงาน และค่าความแตกต่างของการสูญเสียพลังงานที่ได้จากโปรแกรม FLUENT กับงานวิจัยเดิม ถูกแสดงในภาพที่ 4.40 จะเห็นได้ว่าการสูญเสียพลังงานที่ได้จากโปรแกรม FLUENT มีค่าใกล้เคียงกับงานวิจัยเดิมมาก โดยมีความแตกต่างน้อยกว่า 1.2 MJ และจะเห็นได้ว่าอัตราการสูญเสียพลังงานจะมีค่ามากในช่วงแรกและลดลงเมื่อเวลาผ่านไป เนื่องจากความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิมีค่ามากในช่วงแรกและค่อยๆ ลดลงเมื่อเวลาผ่านไป เมื่อพิจารณาความหนาของน้ำแข็ง (ภาพที่ 4.40) พบว่าความหนาของน้ำแข็งมีค่าเหมือนกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม

4.5 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 2 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่

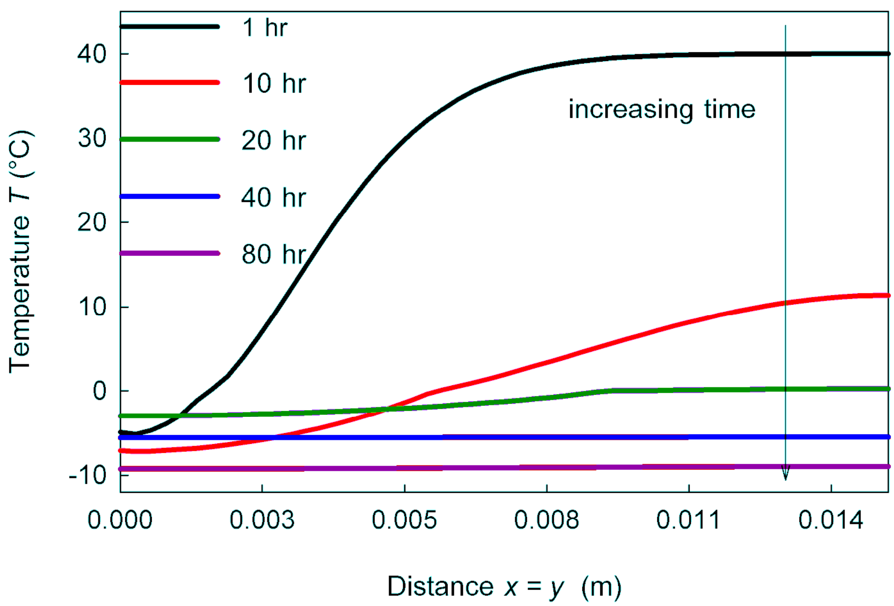
สำหรับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 2 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่ เป็นการขยายผลจากงานวิจัยในกรณี 1 มิติ จึงไม่มีผลจากงานวิจัยเดิมมาเปรียบเทียบ โดยผู้วิจัยจะเปรียบเทียบผลที่ได้กับกรณี 1 มิติแทน

กำหนดรูปร่างปัญหาขนาด 270 mm x 270 mm และมีด้านลึก 1m โดยให้ที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 40°C ใช้อุณหภูมิน้ำเกลือตามภาพที่ 4.38 เป็นอุณหภูมิขอบเขตเช่นเดียวกับกรณีศึกษา มิติ 1 คุณสมบัติของสารนั้น ใช้ค่าเดียวกันกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติ และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงหนึ่งในสี่ ภาพที่ 4.41 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน โดยได้แบ่งโดเมนออกเป็น 50x 50 cells และใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1 s



ภาพที่ 4.42 รูปร่างปัญหาการเปลี่ยนสถานะใน 2 มิติ ที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่

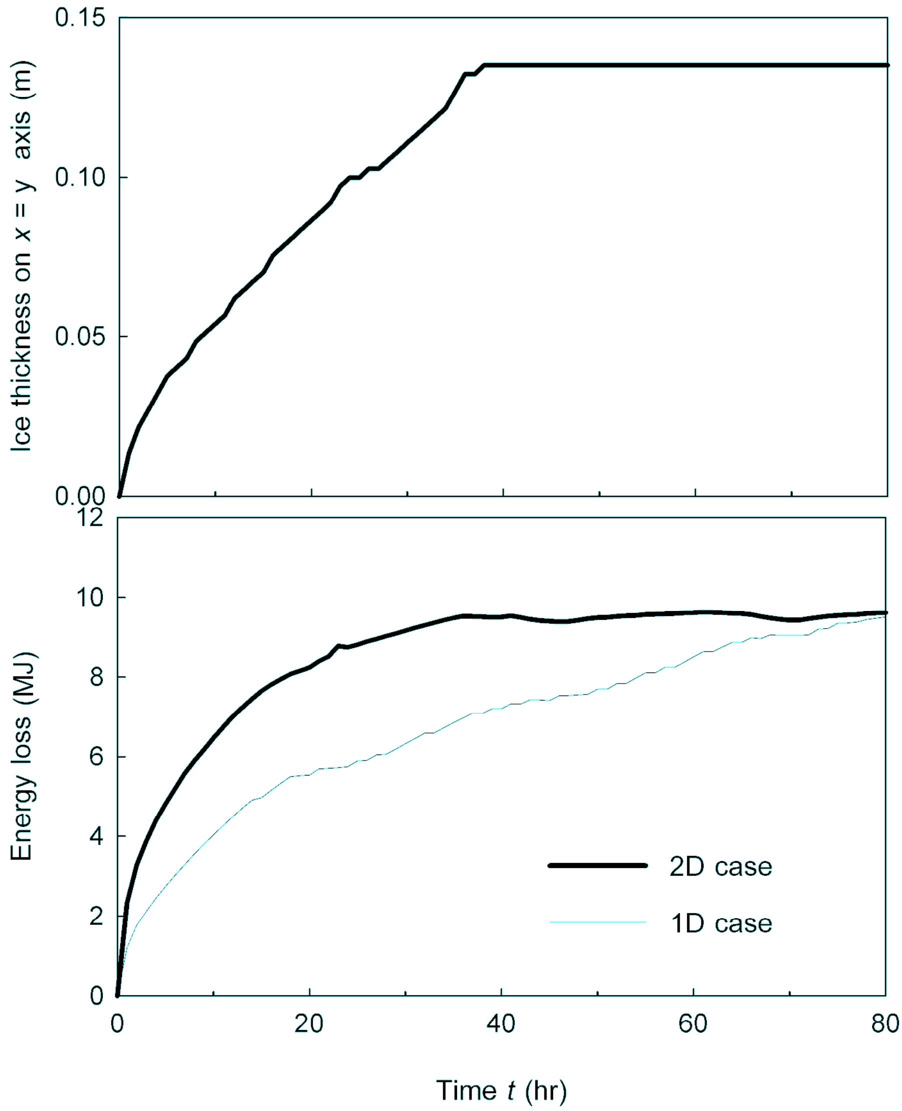
จากการจำลองแบบ ได้การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน $x = y$ ดังแสดงในภาพที่ 4.42 พบว่าการการกระจายตัวของอุณหภูมิ มีลักษณะใกล้เคียงกับกรณีศึกษา มิติ 1 เพียงแต่อุณหภูมิจะลดลงเร็วกว่า เนื่องจากในกรณีศึกษา มิติ มีการถ่ายเทความร้อน 2 ออกจากขอบของโดเมนสองด้าน ในขณะที่ในปัญหา มิติ มีการถ่ายเทความร้อนเพียงด้านเดียว 1



ภาพที่ 4.43 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน $x = y$

เมื่อพิจารณาความหนาของน้ำแข็ง (ภาพที่ 4.43) พบว่าการแข็งตัวของน้ำในกรณีศึกษา มิติ น้ำจะแข็งตัวทั้งโดเมนเมื่อ 2 มิติมาก กล่าวคือในกรณีศึกษา 1 มิตินั้น เร็วกว่ากรณีศึกษา 2 76 มิติ น้ำจะแข็งตัวทั้งโดเมนเมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง ในขณะที่ในกรณีศึกษา 38 เวลาผ่านไป

ชั่วโมงซึ่งสอดคล้องกับการสูญเสียพลังงาน (ภาพที่ 4.43) คือการสูญเสียพลังงานในกรณีศึกษา มิติ จนกระทั่งเมื่ออุณหภูมิภายในโดเมนมีค่าใกล้เคียงกับอุณหภูมิ 1 มิติ จะมากกว่ากรณี 2 ขอบเขต การสูญเสียพลังงานของทั้งสองกรณีศึกษาจึงมีค่าใกล้เคียงกัน



ภาพที่ 4.44 ความหนาของน้ำแข็ง และการสูญเสียพลังงาน

4.6 สรุป

ในการศึกษาขั้นตอนการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์ (โปรแกรม FLUENT) เพื่อจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งที่ไม่มีการพาความร้อน แบบจำลองได้ถูกตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหา 1 มิติ และ 2 มิติที่อุณหภูมิขอบเขตคงที่ ด้วยผลเฉลยแม่นตรง และผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากงานวิจัยเดิม (รจนา ประไพนพ, 2545) จากนั้นจึงขยายผลใน 3 มิติ ในการจำลอง 3 มิติ ได้ศึกษาหาพารามิเตอร์หลักของเวลาและขนาดกริดที่เหมาะสม โดยพบว่าแบบจำลองมีความผิดพลาดสูงสุดที่เส้นเปลี่ยนสถานะ แต่ความผิดพลาดจะเฉลี่ยลดลงในเวลาต่อมา กรณีศึกษาที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่ (Sukkuea and Maneeratana, 2007)ได้ผลมีค่าแม่นยำพอที่จะใช้ศึกษาเพิ่มเติมได้

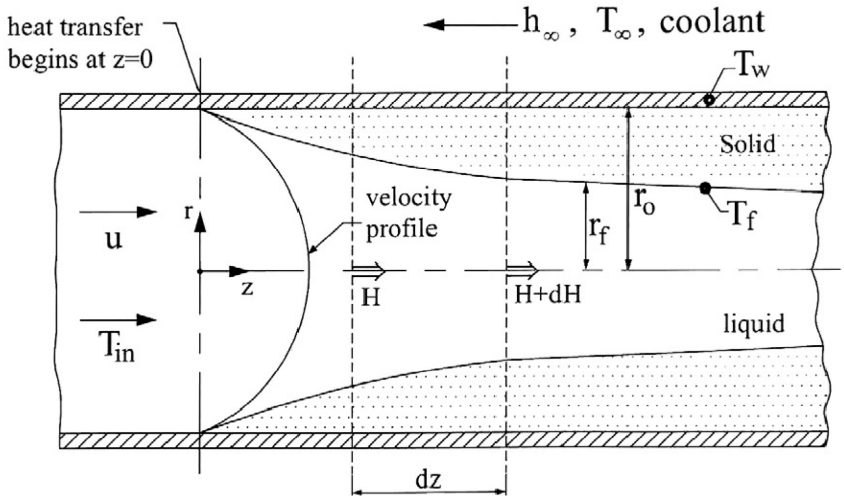
บทที่ 5

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของปัญหาการแข็งตัวของ
ของเหลวที่ไหลภายในท่อกลม

ในการศึกษาขั้นตอนการใช้โปรแกรมเชิงพาณิชย์ เพื่อจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำที่ไหลอยู่ภายในท่อ และศึกษาผลของการพาความร้อนต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง จำเป็นต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องนำผลที่ได้จากแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม FLUENT มาตรวจสอบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของงานวิจัยในอดีต

5.1 สมการครอบคลุมและการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

Seeniraj and Sankara Hari (2008) ได้ศึกษาปัญหาการแข็งตัวในสภาวะชั่วครู่ของของเหลวอุ่นที่ไหลอยู่ภายในท่อกลมที่ถูกทำความเย็นด้วยการพาความร้อน (ภาพที่ 5.1) และกำหนดปัญหาโดยให้ของไหลอุ่นไหลเข้าสู่ท่อกลมที่มีรัศมีภายใน r_0 ที่ระยะ z = 0 m ด้วยอุณหภูมิสม่ำเสมอ T_{in} ซึ่งมีค่ามากกว่าอุณหภูมิเยือกแข็ง T_f ของของเหลวนั้นๆ ของเหลวจะถูกทำความเย็นด้วยสารทำความเย็นที่ไหลอยู่ภายนอกท่อซึ่งมีอุณหภูมิ $T_\infty < T_f$ และมีสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเท่ากับ h_∞ จนกลายเป็นน้ำแข็งทำให้พื้นที่ในการไหลของน้ำลดลงเหลือเพียงวงกลมรัศมี r_f



ภาพที่ 5.1 รูปร่างปัญหาการแข็งตัวของของเหลวที่ไหลภายในท่อ
(Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

ปัญหาจะถูกพิจารณาในรูปของตัวแปรไร้มิติ โดยจะมีสมการครอบคลุม 2 สมการ คือ

สมการอนุรักษ์พลังงานในปริมาตรควบคุมของของเหลวที่ไหลอยู่ และสมการอนุรักษ์พลังงานที่บริเวณเส้นเปลี่ยนสถานะ (phase change interface) และมีสมมุติฐานสำคัญคือ

1. ให้ปัญหามีลักษณะเป็น quasi-steady state คืออุณหภูมิของน้ำมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากตามเวลา และมีการกระจายตัวสม่ำเสมอภายในปริมาตรควบคุม ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาอุณหภูมิน้ำภายในปริมาตรควบคุมเป็นแบบเฉลี่ยแบบก้อน (bulk mean temperature, T_b) ได้
2. กำหนดให้อัตราการไหลของของเหลวเข้าสู่โดเมนมีค่าคงที่ ทำให้ความเร็วขาเข้า (inlet velocity, u_{in}) มีค่าคงที่ และกำหนดให้มีความสัมพันธ์กับความเร็วเฉลี่ยที่ตำแหน่ง z ต่างๆ (local mean velocity, u_z) ตามกฎการอนุรักษ์มวลโดย
$$\frac{u_z}{u_{in}} = (\frac{r_0}{r_f})^2 \tag{5.1}$$
3. กำหนดให้การไหลในท่อเป็นการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ที่มีอุณหภูมิขอบเขตคงที่ เนื่องจากของเหลวจะไหลผ่านช่องที่มีขอบเป็นเส้นแบ่งสถานะ ซึ่งมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง ดังนั้นค่าตัวเลข Nusselt ของการไหลจะมีค่าคงที่เท่ากับ 3.66 และสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนค่าตัวเลข Nusselt จะมีค่าขึ้นอยู่กับความหนาของชั้นน้ำแข็ง ดังสมการ
$$Nu = 0.0155\,\mathrm{Re}^{0.83}\,\mathrm{Pr}^{0.5}(\frac{1}{R_f^{0.83}}) \tag{5.2}$$
โดย Re คือตัวเลข Reynold, Pr คือตัวเลข Prandtl และ R_f คือระยะทางไร้มิติตามแนวรัศมีจากกึ่งกลางท่อไปยังเส้นแบ่งสถานะซึ่งถูกนิยามโดย
$$R_f = \frac{r_f}{r_0} \tag{5.3}$$

สมการอนุรักษ์พลังงานในปริมาตรควบคุมของของเหลวที่ไหลอยู่ระบุว่า การลดลงของพลังงานของของเหลวตามแนวการไหลจะเท่ากับพลังงานที่ถูกถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อนไปยังชั้นของน้ำแข็งที่เติบโตขึ้นเรื่อยๆ ดังสมการ
$$\mathrm{Pe}(\frac{\partial \theta_b}{\partial Z}) + 2\mathrm{Nu}\,\theta_b = 0 \tag{5.4}$$
โดย Pe คือค่าตัวเลข Peclect, Nu คือค่าตัวเลข Nusselt, θ_b คืออุณหภูมิเฉลี่ยแบบ bulk ไร้มิติ และ Z คือระยะทางตามแนวแกนไร้มิติ ซึ่งตัวแปรไรมิติดังกล่าวถูกนิยามโดย
$$\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} = (\frac{2u_z r_0}{\nu_L})(\frac{\nu_L}{\alpha_L}) = \frac{2u_z r_0}{\alpha_L} \tag{5.5}$$
โดย u_z คือความเร็วเฉลี่ยที่ตำแหน่ง z ต่างๆ, r_0 คือรัศมีภายในของท่อ, ν_L คือค่า dynamic viscosity ของของเหลว และ α_L คือ thermal diffusivity ของของเหลว
และ
$$\theta_b = \frac{T_b - T_f}{T_{in} - T_f} \tag{5.6}$$

และ

$$Z = \frac{z}{r_0} \tag{5.7}$$

สมการอนุรักษ์พลังงานที่บริเวณเส้นเปลี่ยนสถานะระบุว่า ผลรวมของการปลดปล่อยความร้อนเนื่องจากการเปลี่ยนสถานะ และฟลักซ์ความร้อน (heat flux) จากของเหลว มีค่าเท่ากับฟลักซ์ความร้อนที่ถูกถ่ายเทด้วยการนำความร้อนผ่านชั้นของของแข็งไปยังสารทำความเย็นภายนอก ดังสมการ

$$(\frac{\partial R_f}{\partial \tau}) = -\mathrm{Ste_s}(\frac{\partial \theta_s}{\partial R})_{R=R_f} + \frac{1}{2}(\frac{c_s k_L}{c_L k_s})(\mathrm{Ste_L Nu})(\frac{\theta_b}{R_f}) \tag{5.8}$$

โดย τ คือเวลาไร้มิติ, $\mathrm{Ste_s}$ คือค่าตัวเลข Stefan ของของแข็ง, $\mathrm{Ste_L}$ คือตัวเลข Stefan ของของเหลว, θ_s คืออุณหภูมิไร้มิติของของแข็ง, c_s คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของของแข็ง, c_L คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของของเหลว, k_s คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของแข็ง และ k_L คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของเหลว ตัวแปรไร้มิติข้างต้นถูกนิยามโดย

$$\tau = \alpha_s \frac{t}{r_0^2} \tag{5.9}$$

โดย α_s คือ thermal diffusivity ของของแข็ง
และ

$$\mathrm{Ste_s} = \frac{c_s(T_f - T_\infty)}{L} \tag{5.10}$$

โดย L คือความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะ
และ

$$\mathrm{Ste_L} = \frac{c_L(T_{in} - T_f)}{L} \tag{5.11}$$

และ

$$\theta_s = \frac{T_f - T_s}{T_f - T_\infty} \tag{5.12}$$

โดย T_s คืออุณหภูมิของของแข็ง

อัตราการเพิ่มขึ้นของชั้นน้ำแข็งในแนวแกน (axial direction) น้อยกว่าอัตราการลดลงของอุณหภูมิของเหลวเทียบกับเวลา ทำให้สามารถละทิ้งพจน์ time derivative ของอุณหภูมิในสมการการนำความร้อนในชั้นของของแข็งได้ และอัตราการนำความร้อนในชั้นของแข็งตามแนวแกนมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการพาความร้อนของของเหลว ทำให้สามารถละทิ้งได้เช่นกัน จากข้อสังเกตข้างต้นจะได้สมการการนำความร้อนและสมการเงื่อนไขขอบเขตสำหรับอุณหภูมิไร้มิติของของแข็ง ดังนี้

$$(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial R^2}) + \frac{1}{R}(\frac{\partial \theta_s}{\partial R}) = 0, (R_f \le R < 1) \tag{5.13}$$

$$\theta_s(R = R_f) = 0 \tag{5.14}$$

$$\left.\frac{\partial \theta_s}{\partial R}\right|_{R=1} = \mathrm{Bi}(1-\theta_s(R=1)) \tag{5.15}$$

โดย $\theta_s(R=1)=\theta_w$ คืออุณหภูมิไร้มิติที่ผนังท่อ และค่า overall heat transfer coefficient U_i ถูกนิยามโดย

$$\frac{1}{U_i} = \left[\frac{\delta_w A_i}{k_w A_m} + \frac{A_i}{h_\infty A_0}\right] \tag{5.16}$$

หากความหนาของผนังท่อ δ_w มีค่าน้อยจนสามารถละทิ้งได้ และค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของผนัง k_w มีค่ามาก ค่า overall heat transfer coefficient U_i จะมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน h_∞ และจะนิยามค่าตัวเลข Biot, Bi ดังนี้

$$\mathrm{Bi} = \frac{U_i r_0}{k_s} = \frac{h_\infty r_0}{k_s} \tag{5.17}$$

จากสมการ (5.13), (5.14) และ (5.15) จะได้ค่าของอุณหภูมิไร้มิติของของแข็งภายในชั้นของของแข็งดังนี้

$$\theta_s = \left(\frac{Bi}{1-Bi\ln R_f}\right)\ln\left(\frac{R}{R_f}\right) \tag{5.18}$$

แทนค่า θ_s จากสมการ (5.18) ลงในสมการ (5.8) จะได้

$$R_f\left(\frac{\partial R_f}{\partial \tau}\right) = -Ste_s\left(\frac{Bi}{1-Bi\ln R_f}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c_s k_L}{c_L k_s}\right)(Ste_L Nu)\theta_b \tag{5.19}$$

จะเห็นได้ว่าสมการครอบคลุมของปัญหา คือสมการ (5.4) และสมการ (5.19) เป็นระบบสมการ partial differential equation, PDE แบบไม่เชิงเส้นที่เกี่ยวข้อง (coupled) กันอยู่ โดยปัญหามีตัวแปรอิสระ (independent variables) คือ τ และ Z และมีตัวแปรตามคือ R_f และ θ_b และกำหนดเงื่อนไขตั้งต้นและเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

สำหรับเงื่อนไขตั้งต้นกำหนดให้อุณหภูมิภายในโดเมนที่เวลา t = 0 s มีค่าเท่ากับอุณหภูมิที่ทางเข้า T_{in} และยังไม่มีการก่อตัวของชั้นน้ำแข็งภายในโดเมน จะได้

$$\theta_b(\tau=0, z\geq 0) = 1 \tag{5.20}$$

$$R_f(\tau=0, z\geq 0) = 1 \tag{5.21}$$

และสำหรับเงื่อนไขขอบเขตกำหนดให้อุณหภูมิของน้ำบริเวณทางเข้ามีค่าคงที่เท่ากับ T_{in} ตลอดการจำลองแบบ

$$\theta_b(\tau\geq 0, z=0) = 1 \tag{5.22}$$

Seeniraj and Sankara Hari (2008) ได้ระบุว่าเนื่องจาก Nusselt number มีค่าคงที่สำหรับปัญหานี้ ทำให้ heat flux เนื่องจากการพาความร้อนออกจากของเหลวมีค่าคงที่ และทำให้สามารถ uncouple สมการ (5.4) และสมการ (5.19) ได้โดยค่าของ θ_b จะขึ้นอยู่กับค่า Pe เท่านั้น ดังนั้นจึงสามารถแก้ระบบสมการของปัญหาได้โดยอินทิเกรตสมการ (5.4) ตามแนวแกน

z จะได้

$$\theta_b = \exp(\frac{-7.32Z}{\text{Pe}}) \tag{5.23}$$

และนำค่า θ_b ที่ได้แทนในสมการที่ (5.19) เพื่อคำนวนค่า R_f

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าค่าของตัวเลข Nusselt ในกรณีการไหลแบบราบเรียบจะมีค่าคงที่และไม่แปรผันกับความหนาของชั้นน้ำแข็งดังเช่นในกรณีของการไหลแบบปั่นป่วน สมการ (5.4) และสมการ (5.19) ก็ยังไม่สามารถ uncouple ได้ เนื่องจากค่าของตัวเลข Peclect ยังขึ้นอยู่กับ u_z และ u_z นั้นก็ขึ้นอยู่กับ R_f ทำให้สามารถเขียนค่าตัวเลข Peclect ได้ในรูป

$$\text{Pe} = \text{Re}\,\text{Pr} = (\frac{2u_z r_0}{\nu_L})(\frac{\nu_L}{\alpha_L}) = \frac{2u_z r_0}{\alpha_L} = \frac{2u_{in} r_0}{R_f^2 \alpha_L} \tag{5.24}$$

ดังนั้นการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการ (5.4) และสมการ (5.19) จึงยังคงต้องทำไปพร้อมกัน ระบบสมการดังกล่าวจะถูกแก้ด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (finite different method) โดยจะใช้ explicit backward difference scheme ในการประมาณค่าระหว่างจุดต่อ (discretisation) ทำให้ได้สมการระหว่างจุดต่อดังนี้

$$(R_f)_i^n = (R_f)_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{(R_f)_i^{n-1}}\left[-\frac{\text{BiSte}_\text{s}}{1-\text{Biln}(R_f)_i^{n-1}} + 1.83\frac{\text{Ste}_\text{L}\alpha_L}{\alpha_s}(\theta_b)_i^{n-1}\right] \tag{5.25}$$

และ

$$(\theta_b)_i^n = (\theta_b)_{i-1}^n - \frac{3.66(\theta_b)_{i-1}^n \alpha_L \left[(R_f)_{i-1}^n\right]^2 \Delta z}{u_{in} r_0} \tag{5.26}$$

โดย index i คือ space index และ index n คือ time index

จากสมการ discretised equation (สมการที่ 5.25 และ 5.26) จะสามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษา C (ภาคผนวก ข) เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการแข็งตัวของของเหลวภายในท่อกลม

5.2 การอภิปรายผล

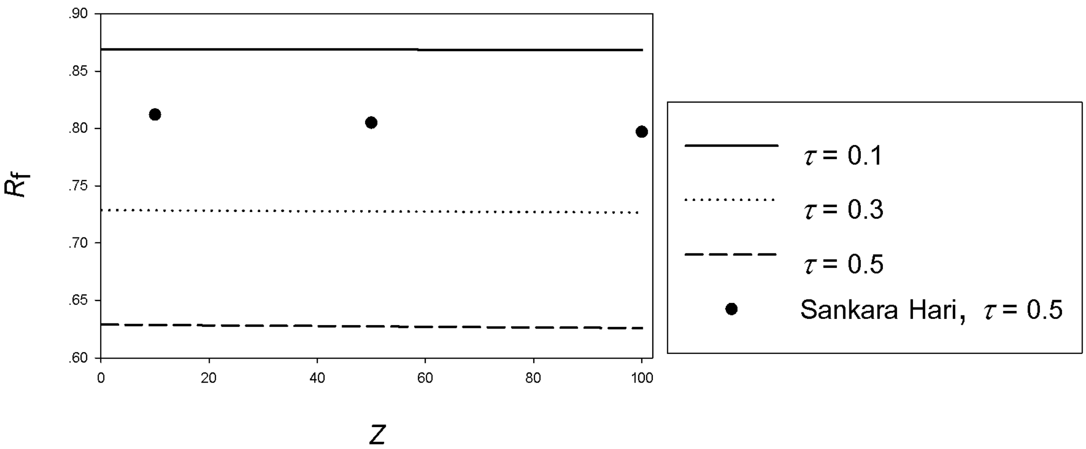
การจำลองแบบปัญหาการแข็งตัวของของเหลวที่ไหลภายในท่อกลมจะทำในแนวทางเดียวกับงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) โดยให้ของเหลวที่ไหลภายในท่อคือน้ำ ไหลเข้าสู่ท่อกลมที่มีรัศมีภายใน r_0 = 0.1 m ที่ระยะ Z = 0 ด้วยอุณหภูมิสม่ำเสมอ T_{in} = 40 °C และความเร็ว v_{in} = 0.005 m/s และท่อถูกทำความเย็นด้วยสารทำความเย็นอุณหภูมิ T_∞ = –40.98 °C ที่ Bi = 10

คุณสมบัติของน้ำในสถานะของเหลว คือ ค่าการนำความร้อน k_L = 0.556 W/m·K และค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_L = 4.226 kJ/kg·K สำหรับสถานะของแข็งคือค่าการนำความร้อน k_s

= 0.556 W/m·K, ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_s = 4.226 kJ/kg·K ค่าความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะ L = 338 kJ/kg และอุณหภูมิเยือกแข็งของน้ำคือ T_f = 0 °C

จากคุณสมบัติของสาร และอุณหภูมิของเขตจะสามารถคำนวณค่าตัวเลข Stefan ได้โดย $\mathrm{Ste_s}$ = 0.214, $\mathrm{Ste_L}$ = 0.428 และ $\mathrm{Ste_s}/\mathrm{Ste_L}$ = 0.5 และการจำลองแบบจะมีการเปลี่ยนค่า ΔZ คือ ΔZ = 1, 0.1 และ 0.01 และค่า $\Delta\tau$ คือ $\Delta\tau$ = 0.01, 0.001 และ 0.001

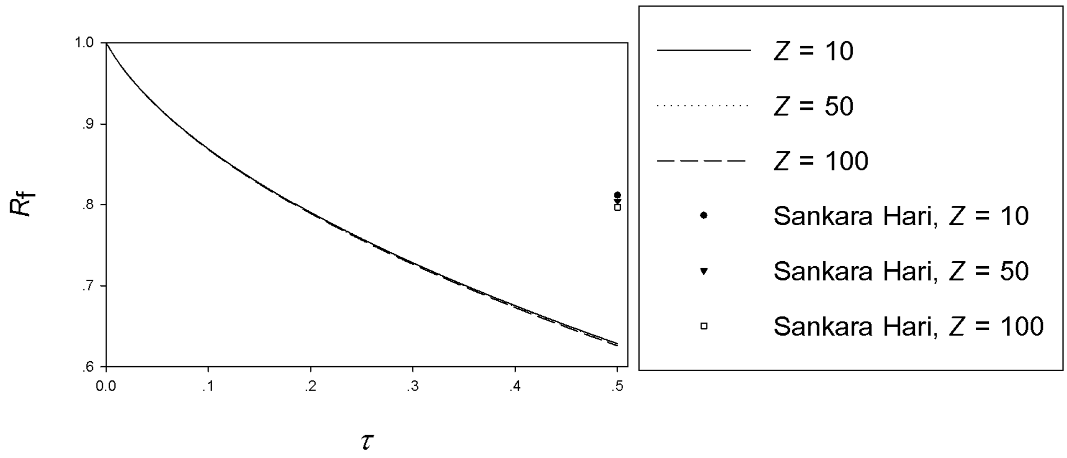
จากการจำลองแบบ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z เมื่อ τ = 0.1, 0.3 และ 0.5 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) ดังแสดงในภาพที่ 5.2 และความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ τ เมื่อ Z = 10, 50 และ 100 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิมดังแสดงในภาพที่ 5.3



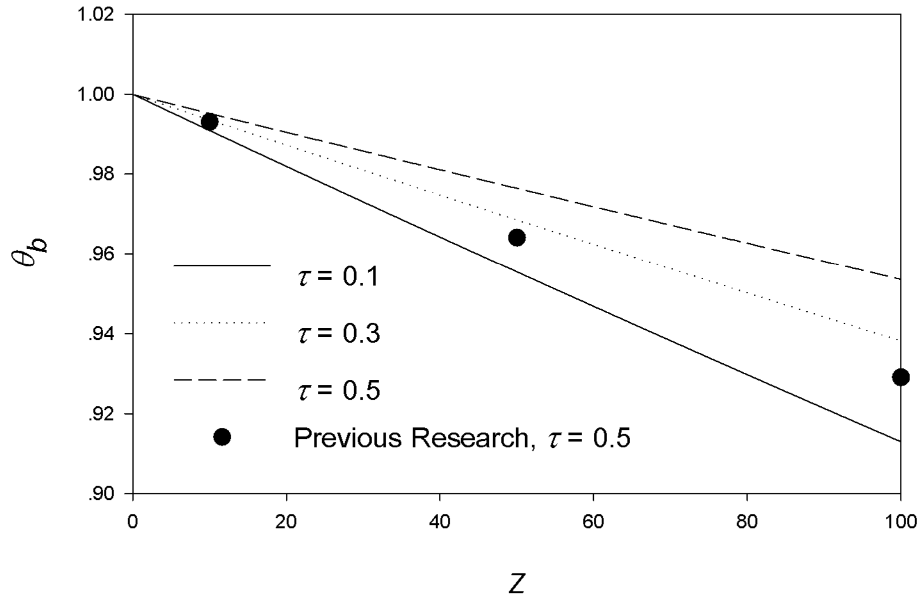
ภาพที่ 5.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z เมื่อ τ = 0.1, 0.3 และ 0.5 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

จากภาพที่ 5.2 และ 5.3 จะเห็นได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไปความหนาของน้ำแข็งจะมากขึ้นเรื่อยๆ (R_f ลดลงเรื่อยๆ เมื่อเวลามากขึ้น) และจะเห็นได้ว่าความหนาของน้ำแข็งจะมากขึ้นเพียงเล็กน้อยตามแนวแกน (R_f ลดลงเล็กน้อยเมื่อ Z เพิ่มขึ้น) และเมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับงานวิจัยเดิมที่เวลา τ = 0.5 พบว่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะมากกว่างานวิจัยเดิมอย่างเห็นได้ชัด

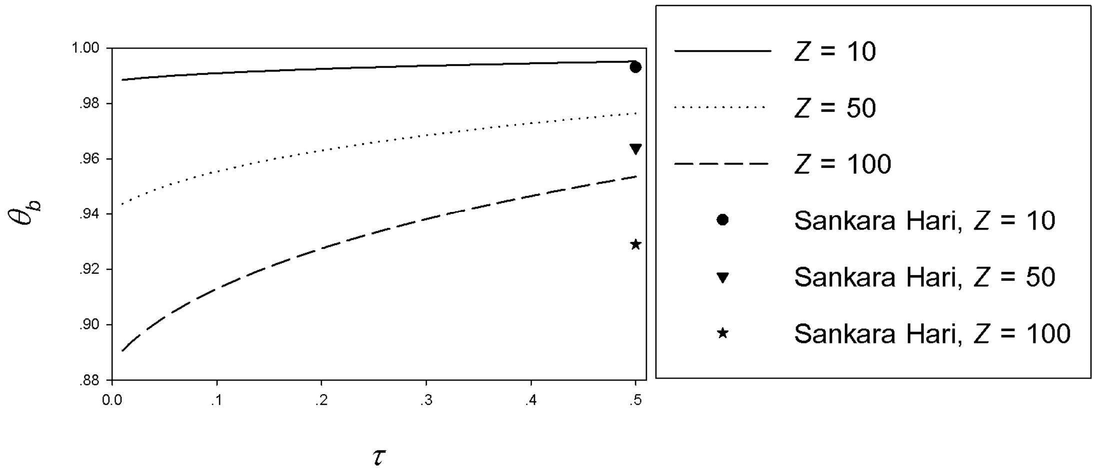
ภาพที่ 5.4 และ 5.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z เมื่อ τ = 0.1, 0.3 และ 0.5 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ τ เมื่อ Z = 10, 50 และ 100 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิมตามลำดับ



ภาพที่ 5.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ τ เมื่อ Z = 10, 50 และ 100 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)



ภาพที่ 5.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z เมื่อ τ = 0.1, 0.3 และ 0.5 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

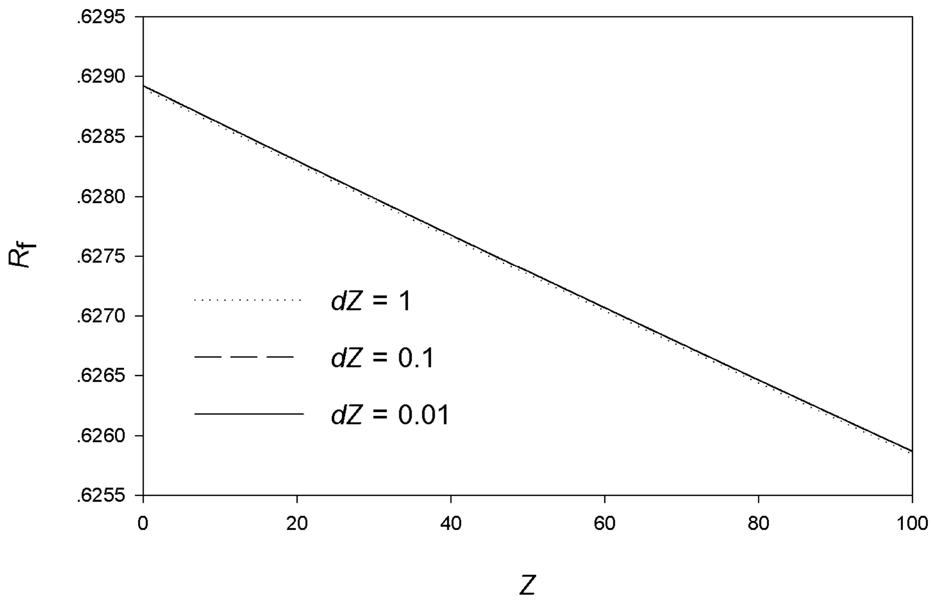


ภาพที่ 5.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ τ เมื่อ Z = 10, 50 และ 100 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

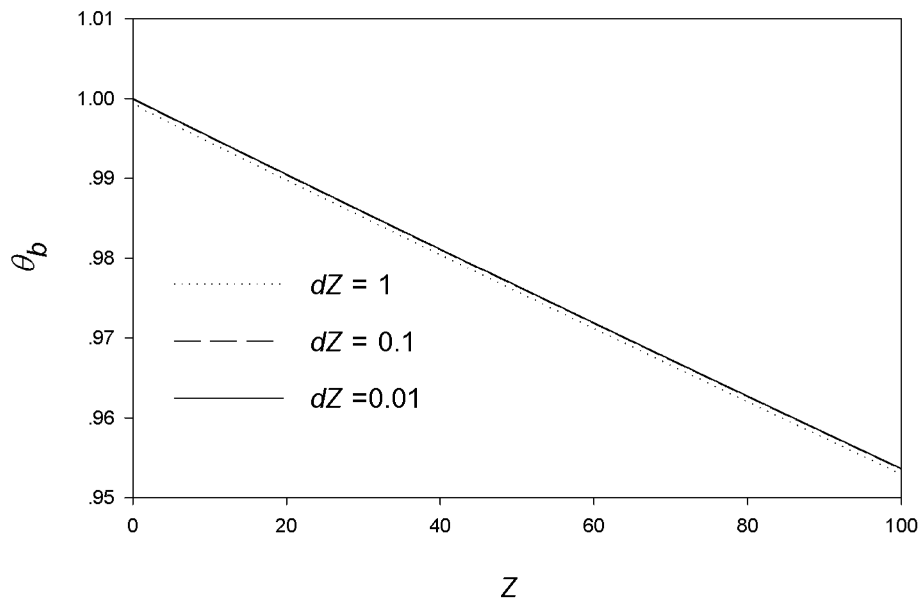
จากภาพที่ 5.4 และ 5.5 จะเห็นได้ว่าอุณหภูมิเฉลี่ยแบบก้อน (bulk mean temperature) ของน้ำลดลงตามแนวแกน (θ_b ลดลงเมื่อ Z เพิ่มขึ้น) เนื่องจากมีการถ่ายเทความร้อนออกจากท่อเมื่อน้ำไหลอยู่ภายในท่อ และจะเห็นได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป อุณหภูมิ ณ ตำแหน่ง Z เดียวกันจะเพิ่มขึ้น เนื่องจากเมื่อเวลาผ่านไป มีการก่อตัวของชั้นน้ำแข็งที่หนาขึ้นเรื่อยๆ ทำให้ความเร็วในการไหลของน้ำภายในท่อนั้นเพิ่มขึ้นตามกฎการอนุรักษ์มวล เมื่อความเร็วในการไหลเพิ่มขึ้นทำให้มีเวลาในการถ่ายเทความร้อนน้อยลง ทำให้อุณหภูมิ ณ ตำแหน่ง Z เดียวกันสูงขึ้นเรื่อยๆ

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุม ΔZ ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยการใช้ปริมาตรควบคุมที่ขนาดต่างๆ กันคือ ΔZ = 1, 0.1 และ 0.01 ที่ช่วงเวลา $\Delta\tau$ = 0.01 ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ขนาดปริมาตรควบคุมต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 5.6 และ 5.7 ตามลำดับ

จากภาพที่ 5.6 และ 5.7 จะเห็นได้ว่าเมื่อเปลี่ยนขนาดของปริมาตรควบคุม ΔZ ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ขนาดปริมาตรควบคุมต่างๆ จะมีแนวโน้มเดียวกัน และมีค่าใกล้เคียงกันมาก และเมื่อใช้ ΔZ ขนาดเล็กกว่า 0.1 ผลที่ได้จะไม่เปลี่ยนแปลงเลย

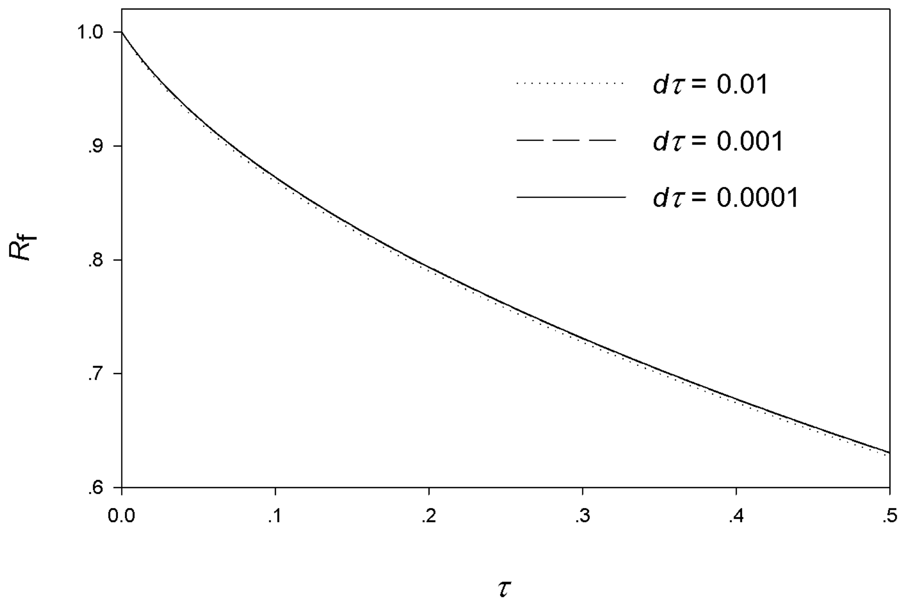


ภาพที่ 5.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z
เมื่อจำลองแบบด้วย ΔZ = 1, 0.1 และ 0.01 ที่ $\Delta\tau$ = 0.01

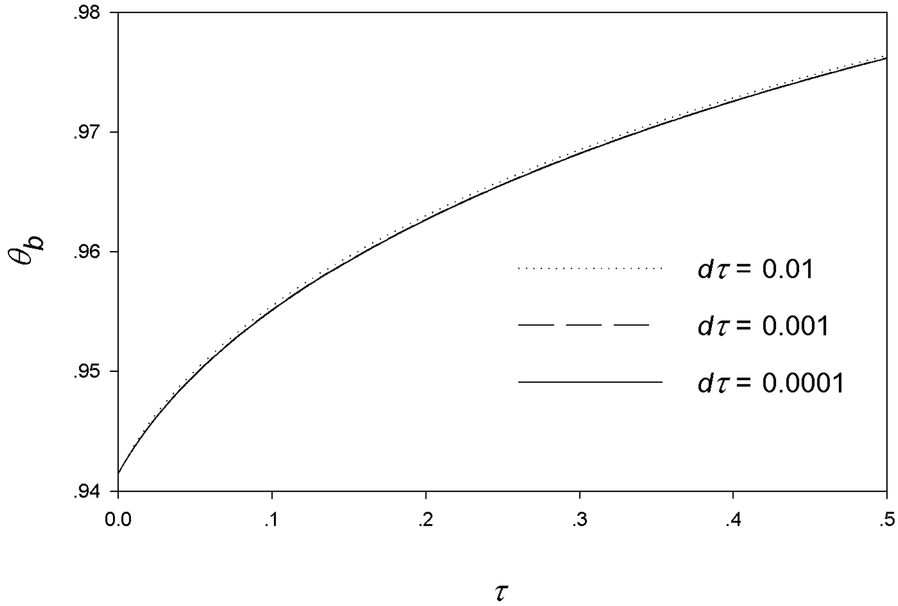


ภาพที่ 5.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z
เมื่อจำลองแบบด้วย ΔZ = 1, 0.1 และ 0.01 ที่ $\Delta\tau$ = 0.01

สำหรับการพิจารณาผลของขนาดช่วงเวลา $\Delta\tau$ ที่มีต่อผลลัพธ์ โดยใช้ขนาดของช่วงเวลาต่างๆกันคือ $\Delta\tau$ = 0.01, 0.001 และ 0.001 ที่ ΔZ = 0.1 ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ τ และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ τ ที่ขนาดช่วงเวลาต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 5.8 และ 5.9 ตามลำดับ



ภาพที่ 5.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ τ
เมื่อจำลองแบบด้วย $\Delta\tau$ = 0.01, 0.001 และ 0.001 ที่ ΔZ = 0.1



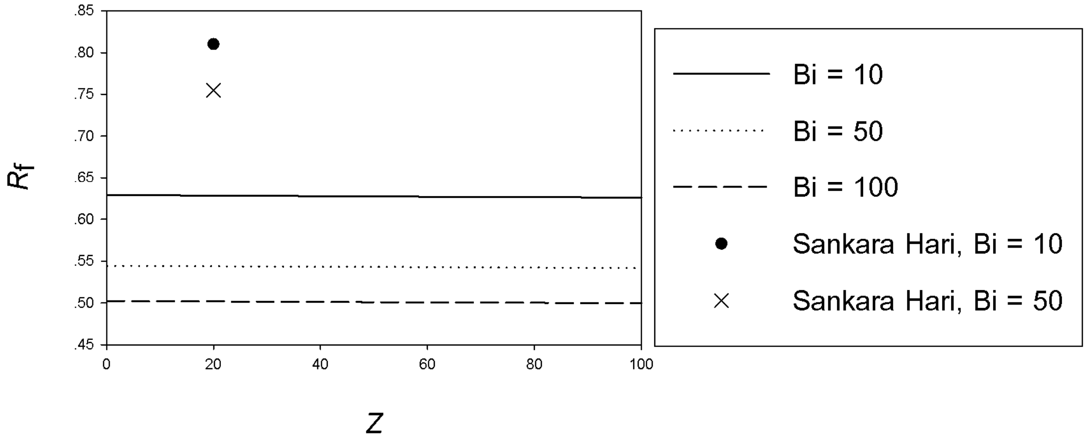
ภาพที่ 5.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ τ
เมื่อจำลองแบบด้วย $\Delta\tau$ = 0.01, 0.001 และ 0.001 ที่ ΔZ = 0.1

จากภาพที่ 5.8 และ 5.9 จะเห็นได้ว่าเมื่อเปลี่ยนขนาดของช่วงเวลา $\Delta\tau$ ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ τ และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ τ ที่ขนาดปริมาตรควบคุมต่างๆ จะมีแนวโน้มเดียวกัน และมีค่าใกล้เคียงกันมาก และเมื่อใช้ $\Delta\tau$ ขนาดเล็กกว่า 0.001 ผลที่ได้จะไม่เปลี่ยนแปลงเลย

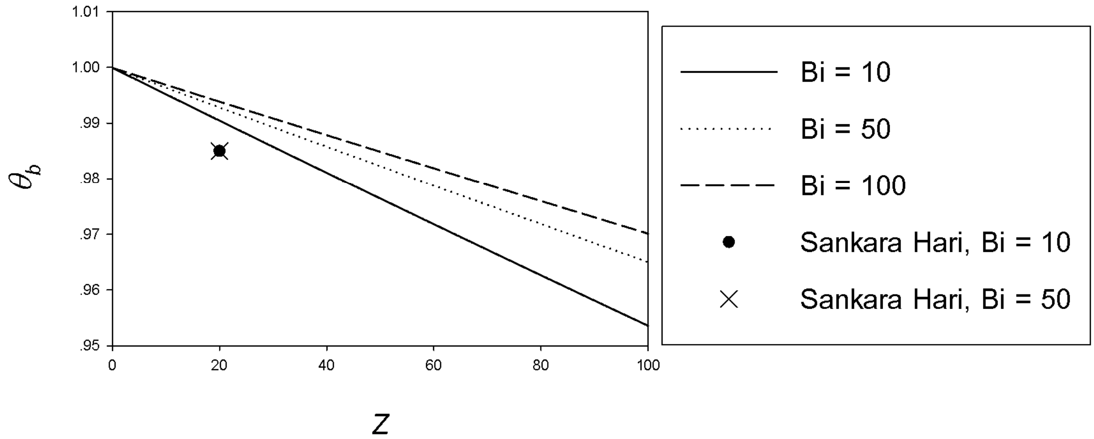
ในการพิจารณาผลกระทบที่เกิดจากค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่มีต่อแบบจำลอง ได้ทดลองเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของสารหล่อเย็นทำให้ค่าตัวเลข Biot เพิ่มขึ้นจาก 10 เป็น 50 และ 100 ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ค่าตัวเลข Biot ต่างๆ ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) ดังแสดงในภาพที่ 5.10 และ 5.11 ตามลำดับ

จากภาพที่ 5.10 เมื่อตัวเลข Biot เพิ่มขึ้นความหนาของชั้นน้ำแข็งก็เพิ่มขึ้นด้วย เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของตัวเลข Biot แสดงถึงค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของสารหล่อเย็นที่เพิ่มขึ้น ดังนั้น จึงสามารถถ่ายเทความร้อนออกจากโดเมนด้วยอัตราที่สูงขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิมพบว่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมากกว่าผลที่ได้จากงานวิจัยเดิมอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งสอดคล้องกับผลที่อภิปรายไว้ข้างต้น

จากภาพที่ 5.11 จะเห็นได้ว่าเมื่อค่าของตัวเลข Biot เพิ่มขึ้น ค่าของ θ_b กับที่ตำแหน่ง Z เดียวกันจะมากขึ้นด้วย ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อค่าของตัวเลข Biot เพิ่มขึ้น ความหนาของน้ำแข็งจะมากขึ้น ทำให้เวลาในการถ่ายเทความร้อนมีน้อยลง ดังที่ได้อภิปรายไว้ข้างต้น



ภาพที่ 5.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ที่ τ = 0.5 เมื่อ Bi = 10, 50 และ 100 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)



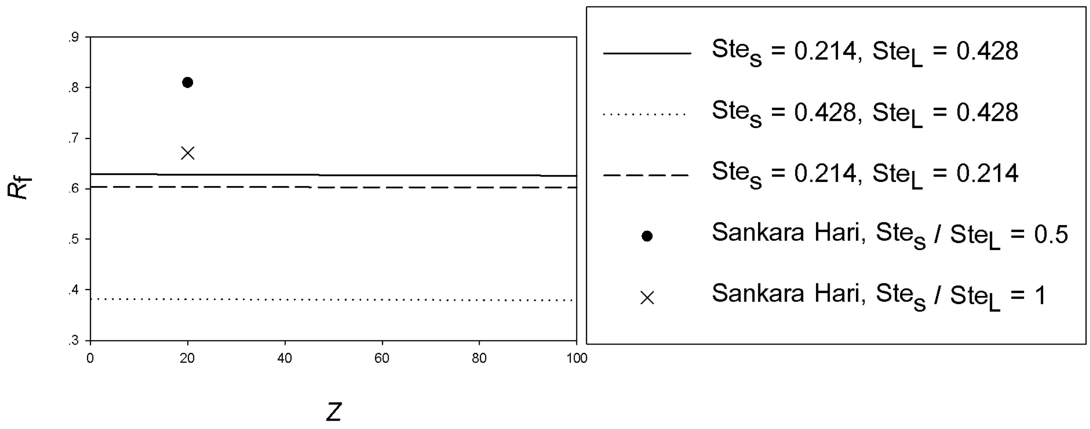
ภาพที่ 5.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ τ = 0.5 เมื่อ Bi = 10, 50 และ 100 ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

ในการพิจารณาผลกระทบที่เกิดจากตัวเลข Stefan ที่มีต่อแบบจำลอง ได้ทดลองเปลี่ยนค่าตัวเลข Stefan เพื่อให้สัดส่วนของค่า Ste_s/Ste_L เปลี่ยนจาก 0.5 เป็น 1 โดยเปลี่ยนค่า Ste_s จาก 0.214 เป็น 0.428 และคงค่า Ste_L ไว้ที่ 0.428 (กรณีที่ 1) แลเปลี่ยนค่า Ste_L จาก 0.428 เป็น 0.214 และคงค่า Ste_s ไว้ที่ 0.214 (กรณีที่ 2) ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z สำหรับกรณีต่างๆ ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) ดังแสดงในภาพที่ 5.12 และ 5.13 ตามลำดับ

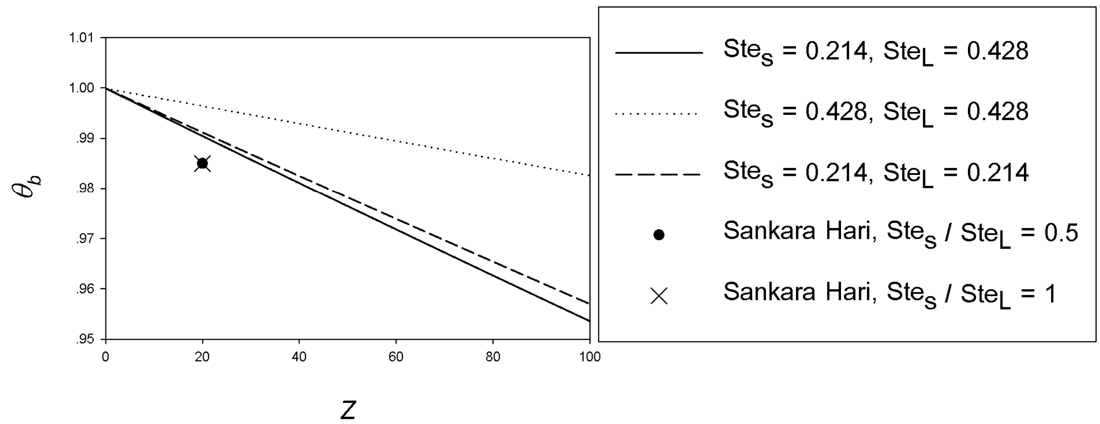
จากภาพที่ 5.12 จะเห็นได้ว่าทั้งในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ความหนาของน้ำแข็งจะมากขึ้น เนื่องจากการเพิ่มค่า Ste_s ในกรณีที่ 1 แสดงถึงการลดลงของอุณหภูมิของสารหล่อเย็น T_∞ และการลดลงของค่า Ste_L ในกรณีที่ 2 แสดงถึงการลดลงของอุณหภูมิขาเข้า T_{in} แต่จะเห็นได้ว่าการลดลงของอุณหภูมิของสารหล่อเย็น T_∞ จะส่งผลต่อความหนาของน้ำแข็งการลดลงของอุณหภูมิขาเข้า T_{in} (ความหนาของน้ำแข็งในกรณีที่ 1 มากกว่าความหนาของน้ำแข็งในกรณีที่ 2 มาก และจะเห็นได้ว่าเมื่อเทียบผลที่ได้กับงานวิจัยในอดีต ความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะมากกว่างานวิจัยในอดีตอย่างเห็นได้ชัด

จากภาพที่ 5.13 จะเห็นได้ว่าเมื่อความหนาของน้ำแข็งหนาขึ้นทั้งในกรณีที่ 1 และ 2 ค่า θ_b ที่ตำแหน่ง Z เดียวกันจะมีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากเมื่อความหนาของน้ำแข็งเพิ่มขึ้น ความเร็วในการไหลก็จะเพิ่มขึ้น ทำให้เวลาในการแลกเปลี่ยนความร้อนลดลง

อีกประเด็นหนึ่งที่น่าสนใจคือ ในงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) ผู้วิจัยได้อภิปรายผลโดยอิงกับค่า Ste_s/Ste_L เป็นหลัก ซึ่งจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะเห็นได้ว่า ทั้งกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะมีค่า Ste_s/Ste_L = 1 เหมือนกันแต่ผลที่ได้จะต่างกัน ซึ่งอธิบายได้จากสมการที่ 5.25 จะเห็นได้ว่าตัวแปร Ste_s และ Ste_L ปรากฏอยู่ในคนละเทอม ดังนั้นจึงไม่สามารถพิจารณาผลการทดลองโดยอิงกับค่า Ste_s/Ste_L

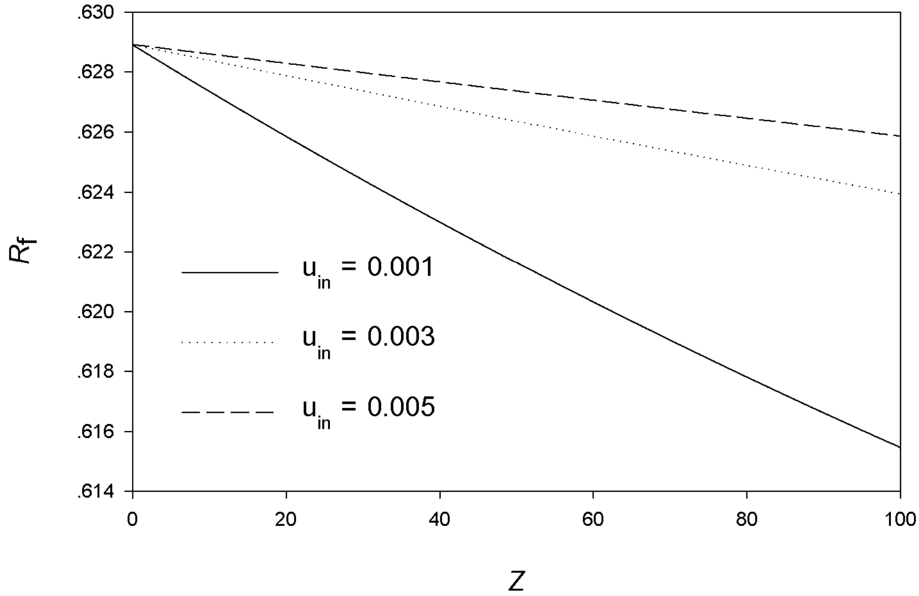


ภาพที่ 5.12 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ที่ τ = 0.5 เมื่อเปลี่ยนค่า Ste ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

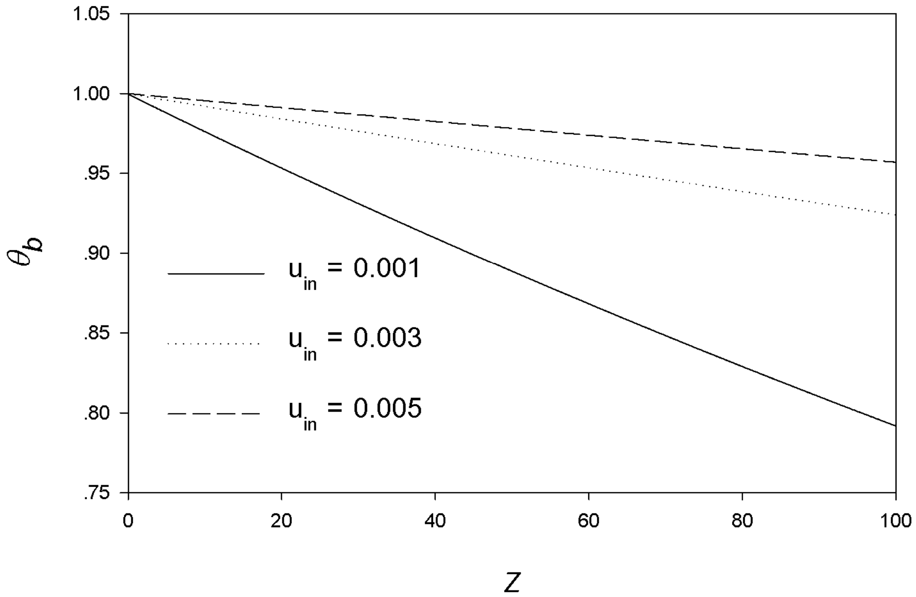


ภาพที่ 5.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ τ = 0.5 เมื่อเปลี่ยนค่า Ste ที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัยเดิม (Seeniraj and Sankara Hari, 2008)

ในการพิจารณาผลกระทบที่เกิดจากความเร็วขาเข้า u_{in} ที่มีต่อแบบจำลอง ได้ทดลองเปลี่ยนค่าความเร็วขาเข้าจาก 0.005 เป็น 0.001 และ 0.003 ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ความเร็วต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 5.14 และ 5.15 ตามลำดับ



ภาพที่ 5.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ที่ τ = 0.5
เมื่อความเร็วขาเข้า u_{in} = 0.001, 0.003 และ 0.005 m/s



ภาพที่ 5.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ τ = 0.5
เมื่อความเร็วขาเข้า u_{in} = 0.001, 0.003 และ 0.005 m/s

จากภาพที่ 5.14 จะเห็นว่าที่ความเร็วต่ำ อัตราการเพิ่มขึ้นตามแนวแกนของความหนาของชั้นน้ำแข็งจะมากกว่าที่ความเร็วสูง เนื่องจากเมื่อของไหลไหลด้วยความเร็วต่ำจะมีเวลาใน

การแลกเปลี่ยนความร้อนมากกว่าของไหลที่ไหลด้วยความเร็วสูง และจากภาพที่ 5.15 จะเห็นว่าค่าของ θ_b ที่ได้มีความสัมพันธ์กับความหนาของชั้นน้ำแข็ง คืออัตราการลดลงของ θ_b ตามแนวแกนที่ความเร็วต่ำจะมากกว่าที่ความเร็วสูง

5.3 สรุป

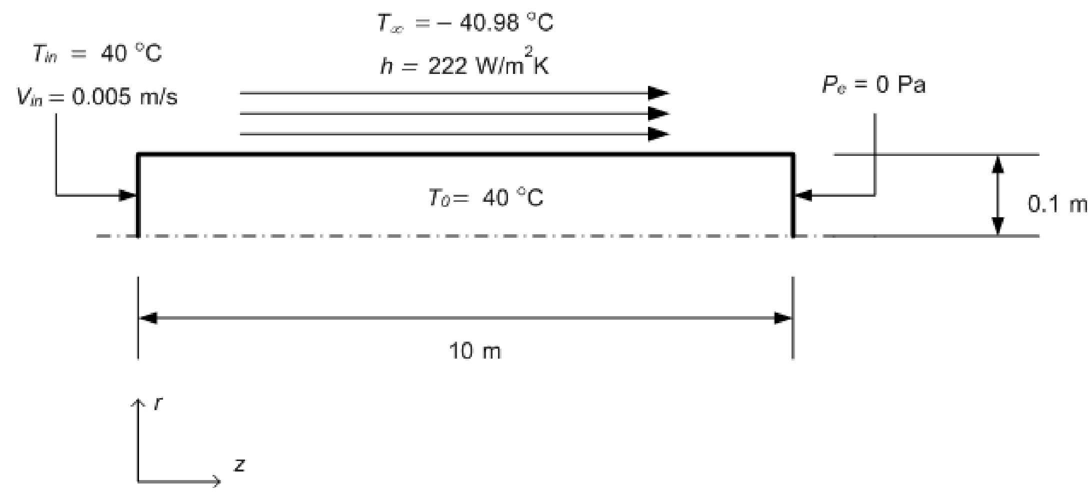
โปรแกรมสำหรับแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ของปัญหาการแข็งตัวของของเหลวที่ไหลในท่อกลมได้ถูกพัฒนาขึ้น และถูกตรวจสอบด้วยงานวิจัยในอดีต (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) ผลที่ได้มีความสอดคล้องกับหลักการทางฟิสิกส์ แต่มีความแตกต่างจากงานวิจัยในอดีตเนื่องจากมีการเปลี่ยนแปลงวิธีการหาคำตอบเพื่อปรับปรุงจุดด้อยของผลที่ได้จากงานวิจัยในอดีต

บทที่ 6

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง กรณีมีการพาความร้อน

การจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งกรณีมีการพาความร้อน จำเป็นต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง เช่นเดียวกับกรณีการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งกรณีไม่มีการพาความร้อน แต่เนื่องจากการหาผลเฉลยแม่นตรงของการก่อตัวของน้ำแข็งที่มีการไหลทำได้ยาก จึงจะตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโดยใช้ผลที่ได้กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้จากโปรแกรมที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นในบทที่ 5

การวิเคราะห์ปัญหาการก่อตัวของน้ำแข็งกรณีมีการพาความร้อนในบทที่ 5 เป็นการวิเคราะห์ด้วยตัวแปรไร้มิติ แต่โปรแกรม FLUENT ไม่สามารถจำลองแบบด้วยตัวแปรไร้มิติได้ ดังนั้นจึงต้องกำหนดมิติให้กับปัญหา โดยจะกำหนดให้ปัญหาเป็นท่อกลม รัศมี 0.1 m ยาว 10 m แต่ปัญหามีความสมมาตรตามแนวแกน ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาปัญหาเป็น 2 มิติ แบบ axisymmetric ดังแสดงในภาพที่ 6.1



ภาพที่ 6.1 รูปร่างปัญหาการก่อตัวของน้ำแข็งกรณีมีการพาความร้อน

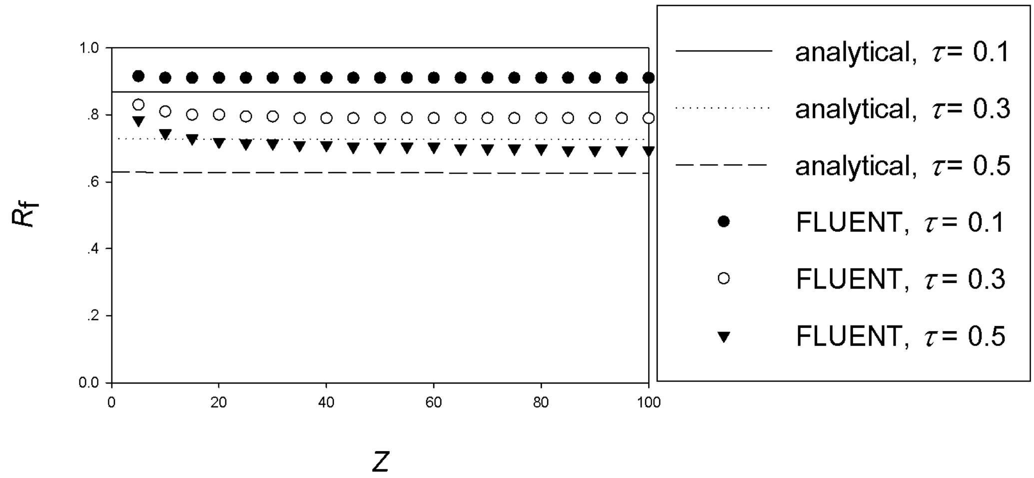
กำหนดให้น้ำไหลเข้าสู่ท่อกลม ที่ระยะ z = 0 m ด้วยอุณหภูมิสม่ำเสมอ T_{in} = 40 °C และความเร็ว v_{in} = 0.005 m/s ท่อถูกทำความเย็นด้วยสารทำความเย็นอุณหภูมิ T_∞ = – 40.98 °C ที่มีสัมประสิทธิ์การพาความร้อน h = 222 W/m^{2}K (Bi =10) และกำหนดความดันที่ทางออก P_e = 0 Pa

คุณสมบัติของน้ำในสถานะของเหลว คือ ค่าการนำความร้อน k_L = 0.556 W/m·K ,ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_L = 4.226 kJ/kg·K, ค่าความหนาแน่น ρ_L = 1000 kg/m^3 และค่าความหนืด μ = 1.003 x 10^{-6} Ns/m^2 สำหรับสถานะของแข็งคือค่าการนำความร้อน k_s = 0.556 W/m·K, ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_s = 4.226 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ_s = 1000 kg/m^3 ค่าความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะ L = 338 kJ/kg และอุณหภูมิเยือกแข็งของน้ำคือ T_f = 0 °C

การจำลองแบบนี้ ได้แบ่งกริดออกเป็นปริมาตรย่อยๆ โดยแบ่งเป็น 100, 200 และ 400 ช่วงตามแนวรัศมี และ 250, 500 และ 1000 ช่วงตามแนวแกน หรือ คิดเป็นปริมาตรควบคุมจำนวน 100 x 250, 200 x 500 และ 400 x 1000 cells และ แบ่งช่วงเวลา Δt ขนาดต่างๆคือ 7.9365 ($\Delta\tau$ = 0.001), 15.875 ($\Delta\tau$ = 0.002) และ 79.365 ($\Delta\tau$ = 0.01) s

6.1 ความหนาของน้ำแข็งและอุณหภูมิ

ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ที่เวลา τ = 0.1, 0.3 และ 0.5 ที่ได้จากโปรแกรม FLUENT เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ เปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ถูกแสดงในภาพที่ 6.2



ภาพที่ 6.2 การเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ระหว่างผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001

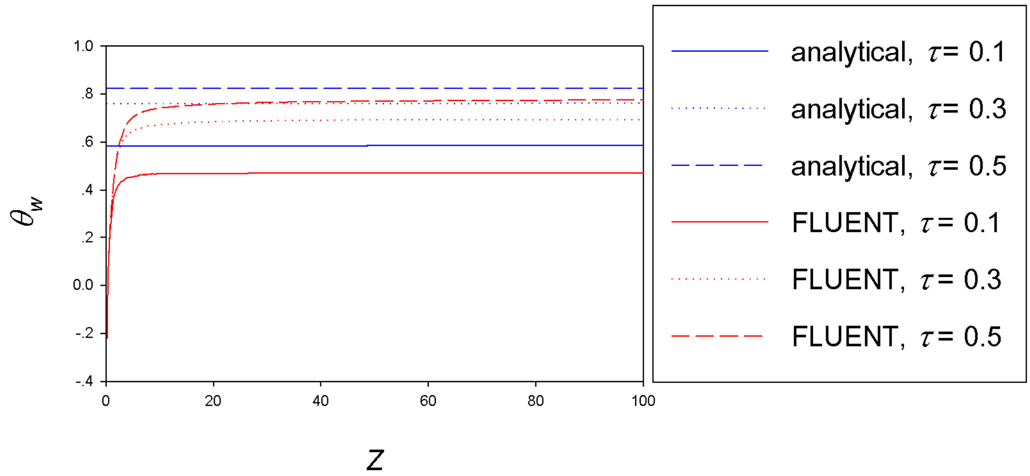
จะเห็นว่าผลที่ได้จากแบบจำลองกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีแนวโน้มเดียวกัน คือเมื่อเวลาผ่านไปค่าของ R_f ที่ระยะ Z ใดๆ จะลดลงเรื่อยๆ กล่าวคือความหนาของชั้นน้ำแข็งจะมากขึ้นเรื่อยๆ เมื่อเวลาผ่านไป และค่าของ R_f ที่เวลา τ ใดๆ จะลดลงเรื่อยๆ ตามระยะ Z กล่าวคือความหนาของชั้นน้ำแข็งจะมากขึ้นเรื่อยๆ ตามแนวแกน อย่างไรก็ตาม จะเห็นได้ว่าอัตราการลดลงของ R_f ที่ได้จากแบบจำลองจะมากกว่าอัตราการลดลงของ R_f ที่ได้จากผลเฉลยเชิง

วิเคราะห์โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริเวณใกล้ทางเข้า ทั้งนี้ เนื่องจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์พิจารณาปัญหาภายใต้สมมุติฐานที่ว่าการไหลของน้ำเป็นการไหลแบบ quasi – steady และพิจารณาให้อุณหภูมิภายในปริมาตรควบคุมเป็นอุณหภูมิเฉลี่ยแบบก้อน (bulk mean temperature) ทำให้อัตราการเพิ่มขึ้นของความหนาชั้นน้ำแข็งจึงค่อนข้างคงที่ตั้งแต่ปากทางเข้า ในขณะที่แบบจำลองจากโปรแกรม FLUENT พิจารณาปัญหาเป็นแบบ transient ทำให้จำเป็นต้องมีระยะหนึ่งในการลดอุณหภูมิของน้ำไปสู่อุณหภูมิเยือกแข็งจึงจะสามารถเกิดการเปลี่ยนสถานะได้

ภาพที่ 6.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_w และ Z เมื่อ θ_w คืออุณหภูมิผนังท่อแบบไร้มิติ ซึ่งถูกนิยามโดย

$$\theta_w = \frac{T_f - T_w}{T_f - T_\infty} \tag{6.1}$$

โดย T_w คืออุณหภูมิของของแข็ง

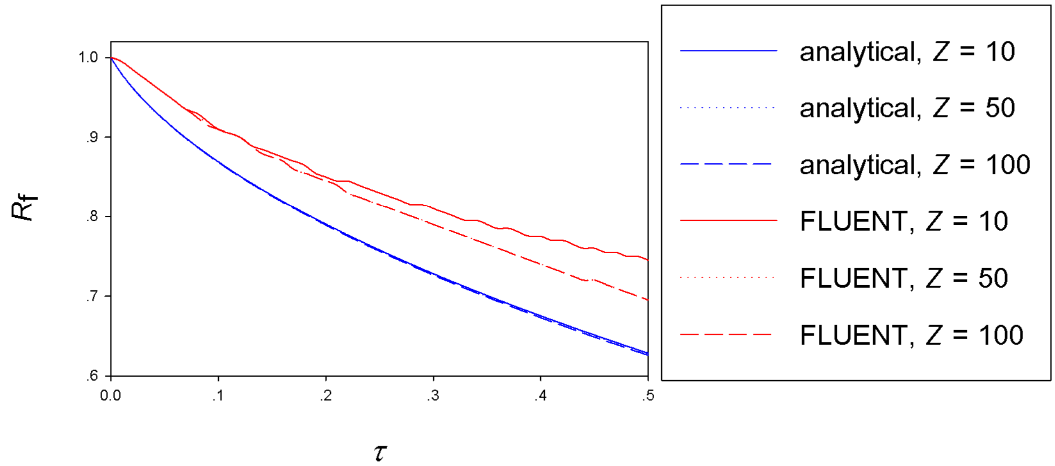


ภาพที่ 6.3 การเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่าง θ_w กับ Z ระหว่างผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001

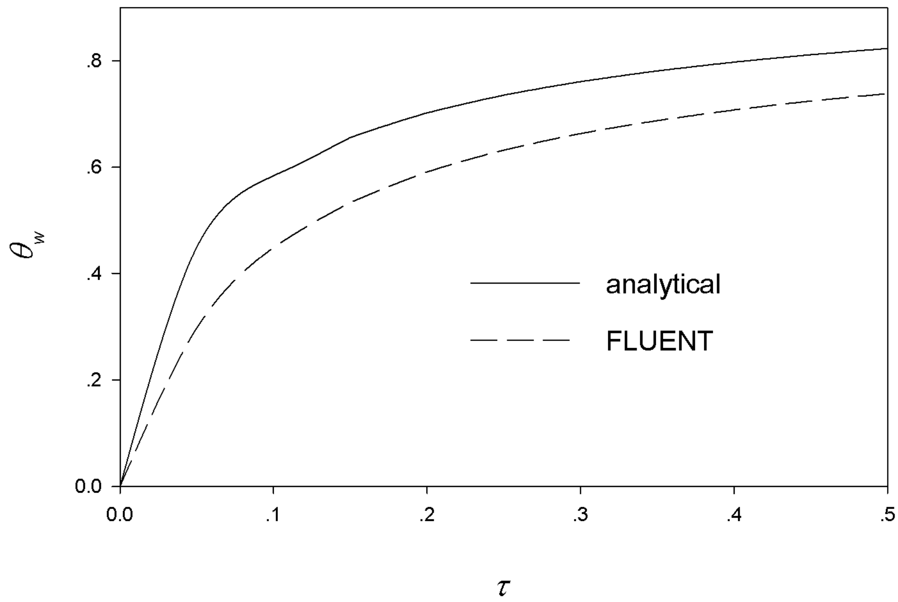
จะเห็นได้ว่า สำหรับผลที่ได้จากแบบจำลองค่า θ_w มีการเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วบริเวณใกล้ทางเข้าและอัตราการเพิ่มขึ้นจะน้อยลงเรื่อยๆ จนมีค่าเกือบคงที่ ที่ระยะ Z = 15 แต่สำหรับผลที่ได้จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์นั้นค่าที่ได้จะมีอัตราการเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยตั้งแต่บริเวณทางเข้า

ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ τ ที่ระยะ Z = 10, 50 และ 100 ที่ได้จากโปรแกรม FLUENT เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ เปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ถูกแสดงในภาพที่ 6.4 จะเห็นได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไปค่าความหนาของน้ำแข็งจะเพิ่มขึ้น (R_f ลดลงเมื่อ τ เพิ่มขึ้น) โดยอัตราการเพิ่มขึ้นของความหนาของน้ำแข็งจะมากที่ช่วงเวลาแรกๆ และจะค่อยๆ ลดลง เนื่องจากเมื่อเวลาผ่านไปค่าของอุณหภูมิผิวของท่อจะลดลง (ภาพที่ 6.5)

ทำให้ความแตกต่างของอุณหภูมิผิวของท่อกับอุณหภูมิของสารหล่อเย็นน้อยลง ดังนั้นอัตราการถ่ายเทความร้อนจึงน้อยลงด้วย



ภาพที่ 6.4 การเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ τ ระหว่างผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001



ภาพที่ 6.5 การเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของ θ_w กับ Z ระหว่างผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001

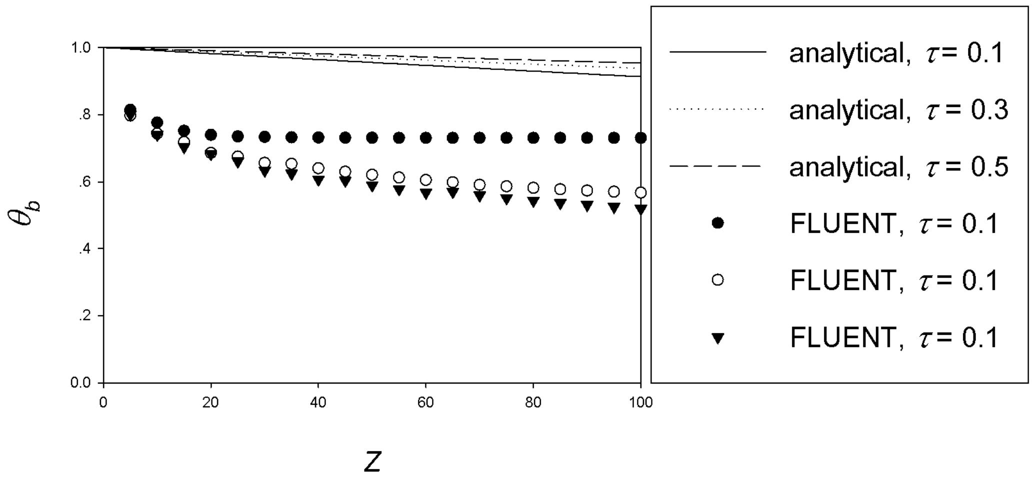
นอกจากนั้น ภาพที่ 6.4 ยังสอดคล้องกับภาพ 6.2 คือที่ระยะ Z เดียวกัน ค่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จะมากกว่าค่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากแบบจำลอง นอกจากนั้น จะเห็นได้ว่าสำหรับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์อัตราการเพิ่มขึ้นของความ

หนาของน้ำแข็งที่ระยะ Z = 10, 50 และ 100 จะแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย แต่สำหรับผลที่ได้จากแบบจำลองอัตราการเพิ่มขึ้นของความหนาของน้ำแข็งจะน้อยบริเวณใกล้ทางเข้าจะน้อยกว่าบริเวณกลางท่อและปลายท่อ

สำหรับการกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน เนื่องจากค่าของอุณหภูมิที่ได้จากแบบจำลองโดยโปรแกรม FLUENT มิได้มีค่าคงที่ตามแนวรัศมี จึงจำเป็นต้องเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักกับพื้นที่วงแหวนเนื่องจากมีการพิจารณาปัญหาเป็นแบบ axisymmetric เพื่อคำนวณหาค่า อุณหภูมิเฉลี่ยแบบก้อน และนำมาคำนวณเป็นอุณหภูมิเฉลี่ยแบบก้อนแบบไร้มิติ θ_b ต่อไป โดยค่าของอุณหภูมิเฉลี่ยแบบก้อนคือ

$$T_b = \frac{\int T dA}{A} \tag{6.2}$$

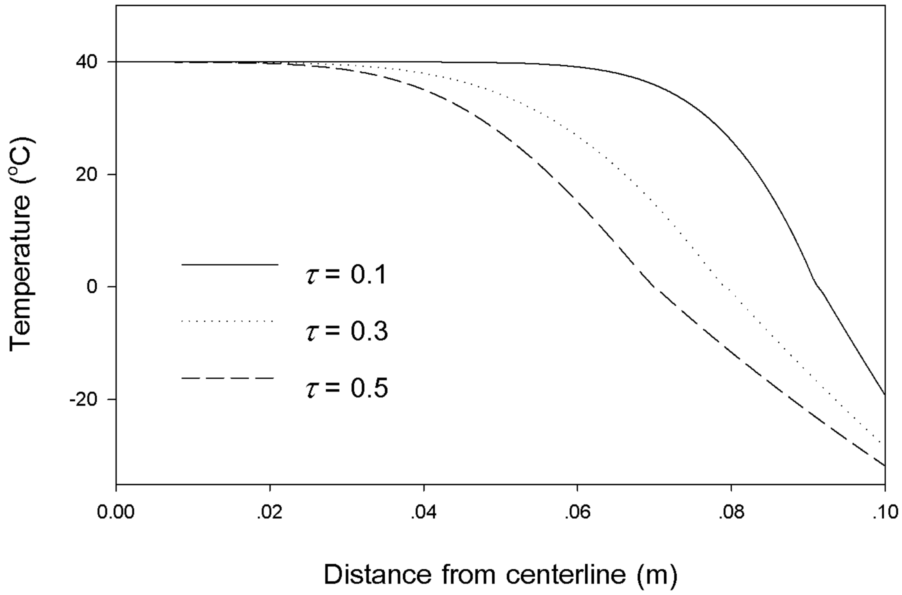
ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่เวลา τ = 0.1, 0.3 และ 0.5 ที่ได้จากโปรแกรม FLUENT เมื่อใช้จำนวนปริมาตรควบคุมและขนาดช่วงเวลาคงที่ เปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ถูกแสดงในภาพที่ 6.6 จะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากโปรแกรม FLUENT และผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีแนวโน้มเดียวกันคือ ค่าของอุณหภูมิเฉลี่ยแบบก้อนจะลดลงตามแนวแกน แต่อัตราการลดลงของ θ_b ที่ได้จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีค่าค่อนข้างคงที่ แต่สำหรับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม FLUENT อัตราการลดลงของ θ_b จะมีค่ามากบริเวณใกล้ปากทางเข้า และมีค่าน้อยลงเมื่อระยะ Z มากขึ้น



ภาพที่ 6.6 การเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ระหว่างผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลที่ได้จากแบบจำลองเมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001

นอกจากนั้นจะเห็นได้ว่า ที่เวลา τ เดียวกันค่า θ_b ที่ได้จากโปรแกรม FLUENT จะมีค่าน้อยกว่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์อย่างเห็นได้ชัด เนื่องจากโปรแกรม FLUENT พิจารณาปัญหาเป็นแบบ Transient ที่ให้มีการเปลี่ยนแปลงของค่าอุณหภูมิตามแนวรัศมี มิได้พิจารณาปัญหาเป็น

แบบ quasi – steady ที่พิจารณาให้อุณหภูมิเฉลี่ยแบบก้อนที่ระยะ Z ต่างๆ มีค่าคงที่ ดังแสดงในภาพที่ 6.7

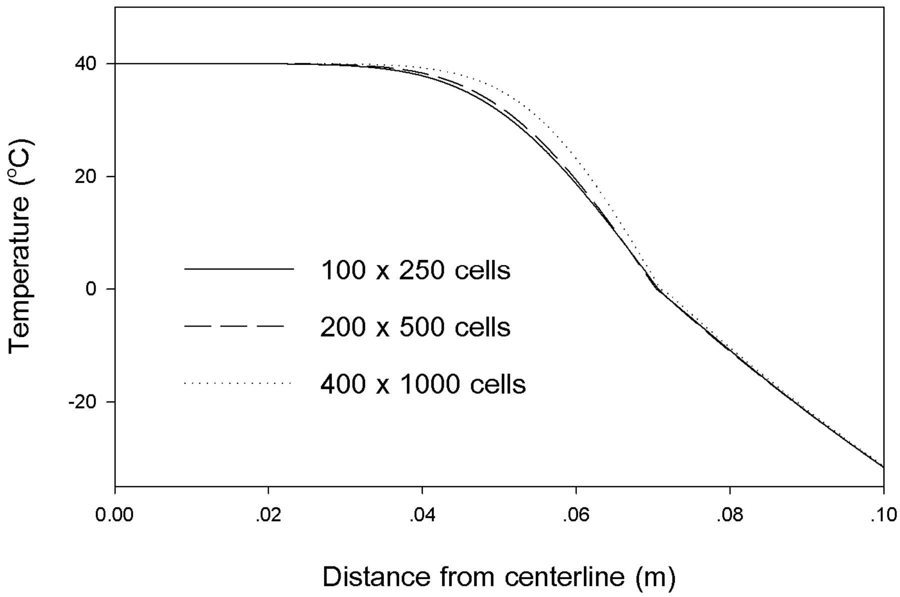


ภาพที่ 6.7 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวรัศมีที่ Z = 50 ที่เวลา τ = 0.1, 0.3 และ 0.5 เมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001

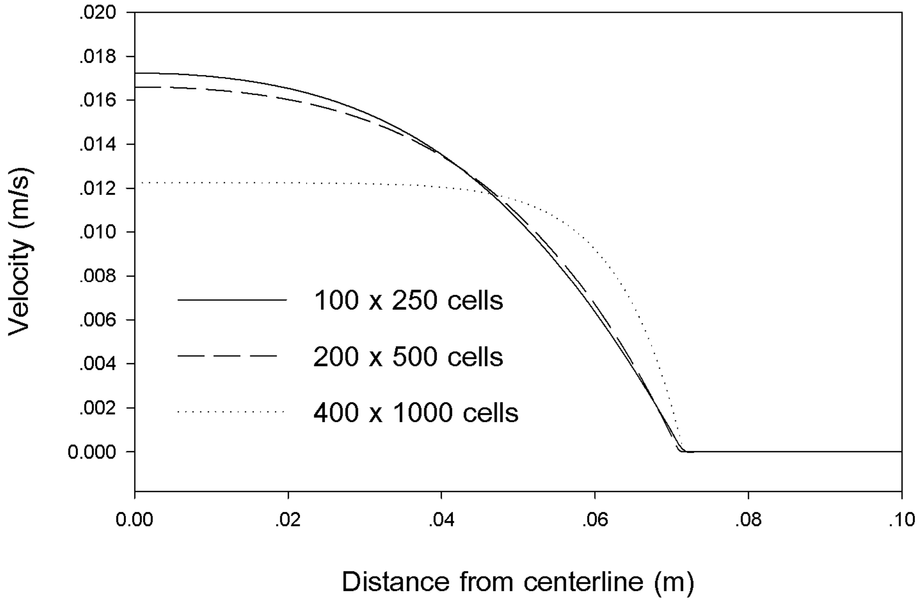
จากภาพที่ 6.7 จะเห็นได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไปความหนาของน้ำแข็งจะมากขึ้น และอุณหภูมิจะลดลงเรื่อยๆ และลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการก่อตัวของน้ำแข็งที่มีการพาความร้อน มีลักษณะคล้ายกับปัญหาที่ไม่มีการพาความร้อน คือความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำและบริเวณที่เป็นน้ำแข็งจะแตกต่างกันมาก โดยจะเห็นความแตกต่างนี้อย่างชัดเจนบริเวณเส้นแบ่งสถานะ ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง จะมีค่ามากกว่าความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำ เนื่องจากค่าความจุความร้อนของน้ำแข็งน้อยกว่าน้ำ และค่าการนำความร้อนของน้ำแข็งมากกว่าน้ำ

6.2 ความเป็นอิสระจากอิทธิพลของขนาดของปริมาตรควบคุมและขนาดของช่วงเวลา

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุมที่มีต่อผลลัพธ์ ได้แบ่งกริดออกเป็นปริมาตรย่อยๆ ต่างๆกัน โดยแบ่งเป็น 100, 200 และ 400 ช่วงตามแนวรัศมี และ 250, 500 และ 1000 ช่วงตามแนวแกน หรือ คิดเป็นปริมาตรควบคุมจำนวน 100 x 250, 200 x 500 และ 400 x 1000 cells โดยใช้ขนาดของช่วงเวลา $\Delta\tau$ = 0.001 โดยการกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวรัศมีถูกแสดงในภาพที่ 6.8 และการกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีถูกแสดงในภาพที่ 6.9



ภาพที่ 6.8 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวรัศมีที่ Z = 50 ที่เวลา τ = 0.5 เมื่อจำลองแบบด้วย 100 x 250, 200 x 500, 400 x 1000 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001



ภาพที่ 6.9 การกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีที่ Z = 50 ที่เวลา τ = 0.5 เมื่อจำลองแบบด้วย 100 x 250, 200 x 500, 400 x 1000 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001

จากภาพที่ 6.8 จะเห็นได้ว่าเมื่อเปลี่ยนแปลงขนาดของกริด ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิจะมีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และเส้นแบ่งสถานะจะอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน โดยตำแหน่งที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิมากที่สุดคือบริเวณที่มีสถานะเป็นน้ำใกล้เส้นแบ่งสถานะ เนื่องจากในบริเวณดังกล่าวมีการกระจายตัวของความเร็วที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน ดังแสดงในภาพที่ 6.9

การกระจายตัวของความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเปลี่ยนแปลงขนาดของกริด เกิดขึ้นเนื่องจากข้อจำกัดของโปรแกรม FLUENT เนื่องจาก solidification model ในโปรแกรม FLUENT ไม่สามารถพิจารณาชั้นของน้ำแข็งที่ก่อตัวขึ้นให้มีลักษณะเสมือนกำแพงที่อยู่นิ่งซึ่งจะทำให้เกิดเงื่อนไข no slip แต่โปรแกรม FLUENT จะหน่วงความเร็วของน้ำที่เปลี่ยนสถานะเป็นน้ำแข็งด้วยพจน์ momentum sink ดังแสดงในสมการที่ 6.3 และ 6.4 ซึ่งจะเห็นได้ว่าพจน์ momentum sink มีความเกี่ยวข้องกับค่า liquid fraction อย่างมาก

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla\cdot(\bar{\bar{\tau}}) + \rho\vec{g} + \vec{F} \tag{6.3}$$

โดยρ คือความหนาแน่น, $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว, p คือ ความดันสถิตย์, $\bar{\bar{\tau}}$ คือเทนเซอร์ความเค้น, $\vec{g}$ คือความเร่งโน้มถ่วงและ $\vec{F}$ คือ momentum source หรือ momentum sink

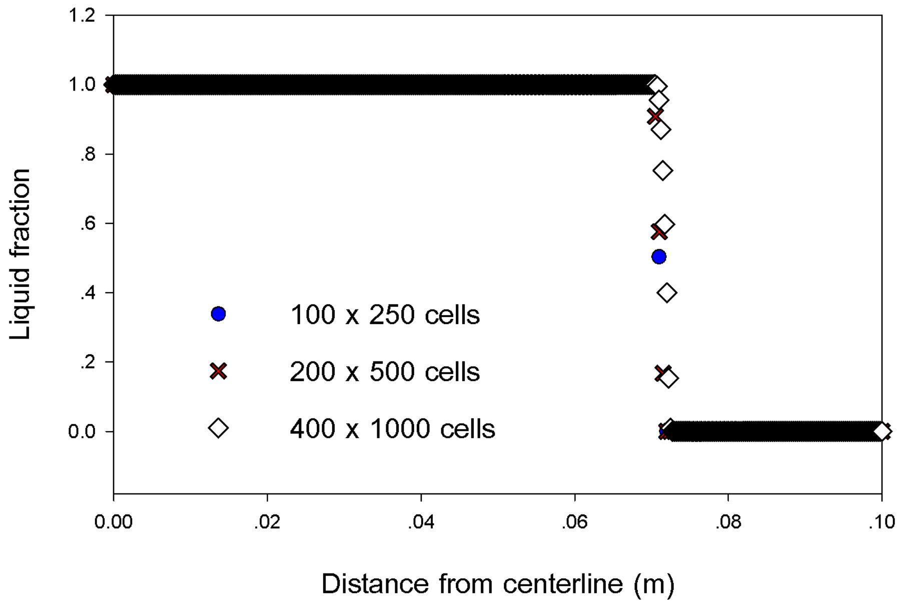
$$\vec{F} = \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2+\varepsilon} A_{mush}(\vec{v}-\vec{v}_p) \tag{6.4}$$

โดย β คือค่า liquid fraction, ε คือค่าคงที่น้อยๆ เพื่อป้องกันไม่ให้ตัวหารภายในสมการ (6.4) มีค่าเป็น 0, A_{mush} คือค่าคงที่ของ mushy zone, $\vec{v}_p$ คือความเร็วที่ของแข็งถูกดึงออกจากโดเมนหรือ pull velocity

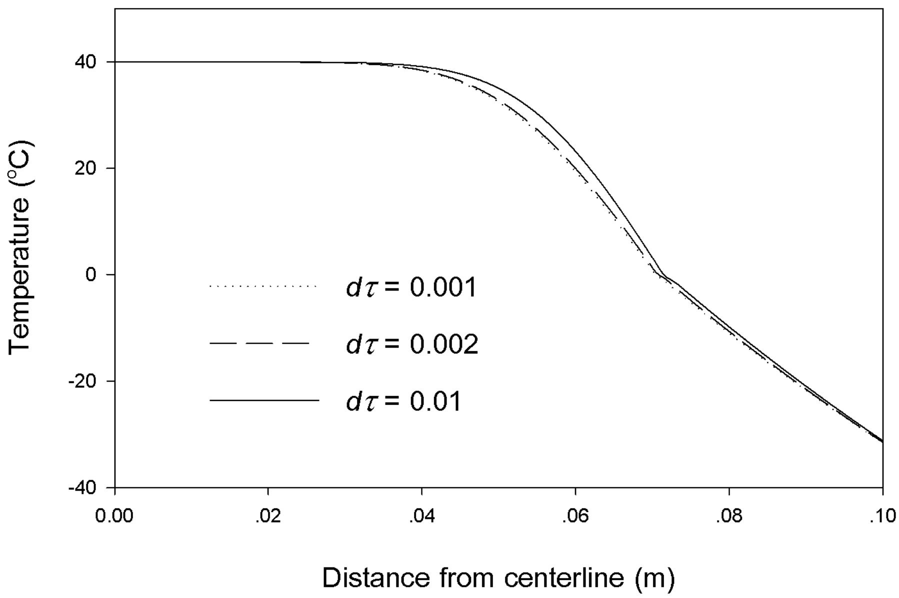
ในความเป็นจริง การเปลี่ยนสถานะของน้ำแข็งเป็นการเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจน (isothermal phase change) ดังนั้นในการเปลี่ยนสถานะจะไม่มี mushy zone เกิดขึ้น แต่โปรแกรม FLUENT มีข้อจำกัดคือไม่สามารถจำลองแบบในรูปแบบดังกล่าวได้คือแม้จะกำหนดค่า liquidus temperature และ solidus temperature ให้มีค่าเท่ากัน ก็จะยังมี mushy zone เกิดขึ้นในแบบจำลอง ภาพที่ 6.10 แสดงการกระจายตัวของค่า liquid fraction ตามแนวรัศมีเมื่อใช้ขนาดปริมาตรควบคุมต่างๆ จะเห็นได้ว่าเมื่อแบ่งกริดตามแนวรัศมีละเอียดขึ้นจำนวนกริดที่อยู่ใน mushy zone ($0<\beta<1$) จะมีมากขึ้น เมื่อจำนวนกริดที่อยู่ในช่วง mushy zone มากขึ้น การหน่วงความเร็วของของไหลที่กำลังไหลอยู่ก็จะเกิดขึ้นในบริเวณที่เป็น mushy zone มากขึ้นทำให้ความเร็วของไหลลดลงอย่างรวดเร็วในบริเวณดังกล่าว และเกิดเป็นการกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีที่แตกต่างกันดังแสดงในภาพที่ 6.9

ในการพิจารณาผลของขนาดของช่วงเวลาที่มีต่อผลลัพธ์ โดยใช้ขนาดของช่วงเวลาต่างๆ กันคือ $\Delta\tau$ = 0.001, 0.002 และ 0.01 โดยใช้กริด 200 x 500 cells ได้การกระจายตัวของ

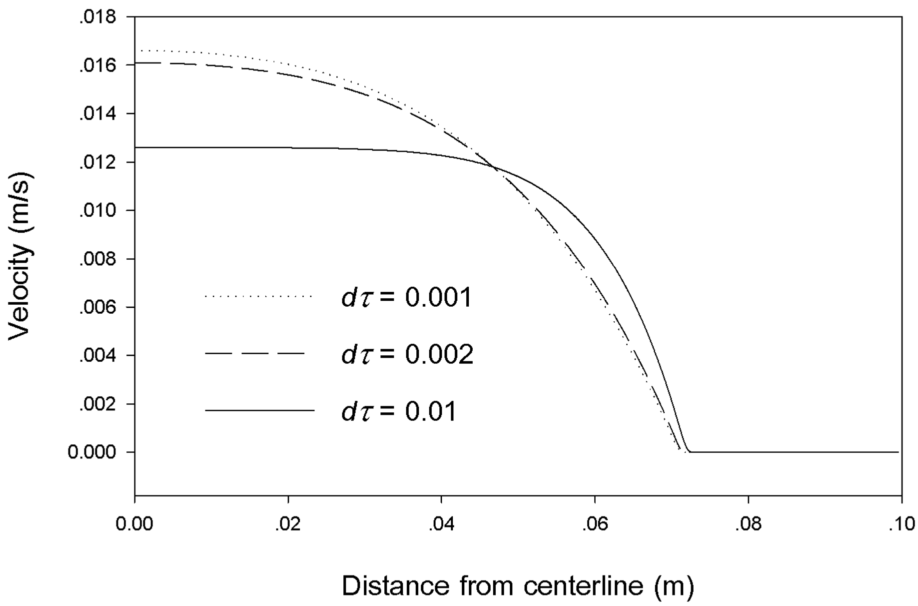
อุณหภูมิตามแนวรัศมีถูกแสดงในภาพที่ 6.11 และการกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีถูกแสดงในภาพที่ 6.12



ภาพที่ 6.10 การกระจายตัวของค่า liquid fraction ตามแนวรัศมีที่ Z = 50 ที่เวลา τ = 0.5 เมื่อจำลองแบบด้วย 100 x 250, 200 x 500, 400 x 1000 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001



ภาพที่ 6.11 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวรัศมีที่ Z = 50 ที่เวลา τ = 0.5 เมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001, 0.002 และ 0.01



ภาพที่ 6.12 การกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีที่ Z = 50 ที่เวลา τ = 0.5 เมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001, 0.002 และ 0.01

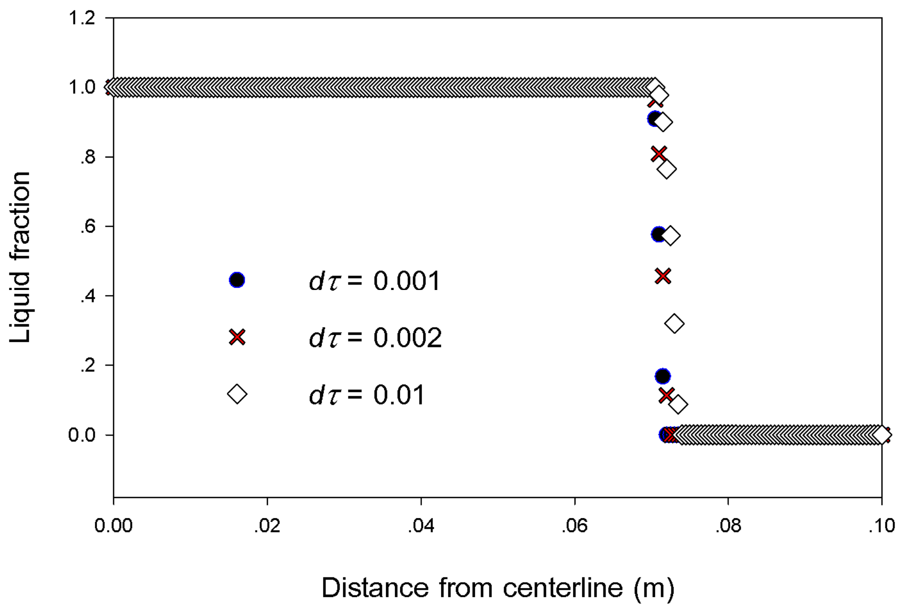
จากภาพที่ 6.11 จะเห็นได้ว่าเมื่อเปลี่ยนแปลงขนาดของช่วงเวลา ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิจะมีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะจะแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย โดยตำแหน่งที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิมากที่สุดคือบริเวณที่มีสถานะเป็นน้ำใกล้เส้นแบ่งสถานะ เนื่องจากในบริเวณดังกล่าวมีการกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน ดังแสดงในภาพที่ 6.12 ซึ่งความความแตกต่างของการกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีมีผลมาจากค่า liquid fraction ที่แตกต่างกัน (ภาพที่ 6.13) ดังที่ได้อภิปรายไว้ในส่วนของความเป็นอิสระจากขนาดของกริด

จากภาพที่ 6.11 และ 6.12 จะเห็นได้ว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวรัศมีและการกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีมีความเปลี่ยนแปลงน้อยมากเมื่อ $\Delta\tau$ มีค่าน้อยกว่า 0.002 หรืออาจกล่าวได้ว่าแบบจำลองไม่ได้รับผลจากอิทธิพลของขนาดของช่วงเวลาเมื่อแบ่งขนาดของช่วงเวลา $\Delta\tau$< 0.002

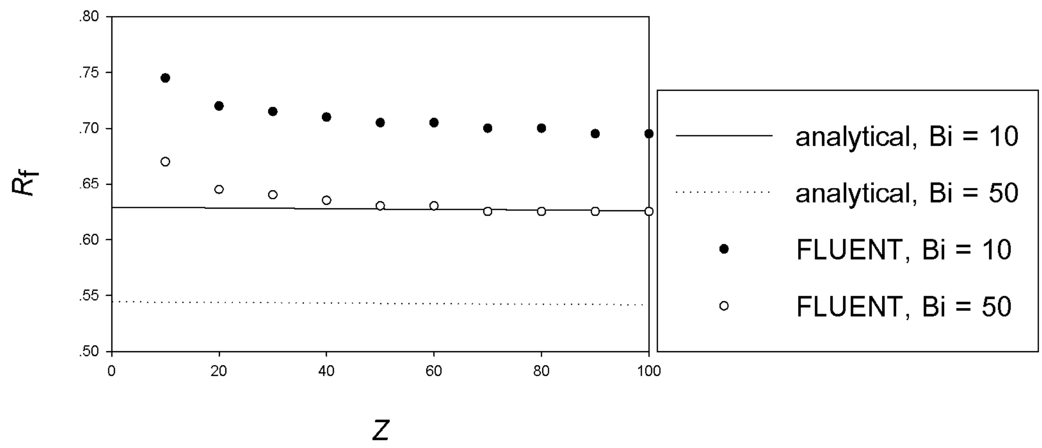
6.3 ผลกระทบของค่าตัวเลข Biot

ในการพิจารณาผลกระทบที่เกิดจากค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่มีต่อแบบจำลอง ได้ทดลองเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของสารหล่อเย็นทำให้ค่าตัวเลข Biot เพิ่มขึ้นจาก

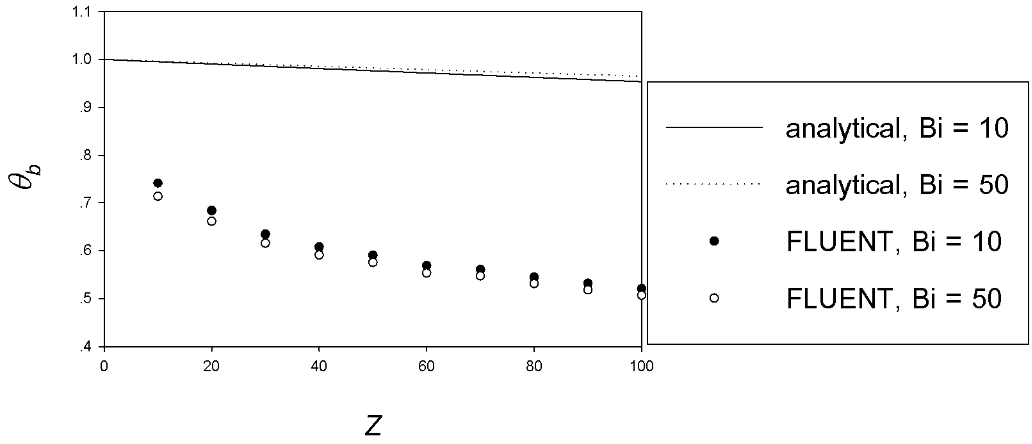
10 เป็น 50 ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ค่าตัวเลข Biot ต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 6.14 และ 6.15 ตามลำดับ



ภาพที่ 6.13 การกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีที่ Z = 50 ที่เวลา τ = 0.5 เมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 500 cells และ $\Delta\tau$ = 0.001, 0.002 และ 0.01



ภาพที่ 6.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ที่ τ = 0.5 เมื่อ Bi = 10 และ 50 ที่ได้จากแบบจำลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



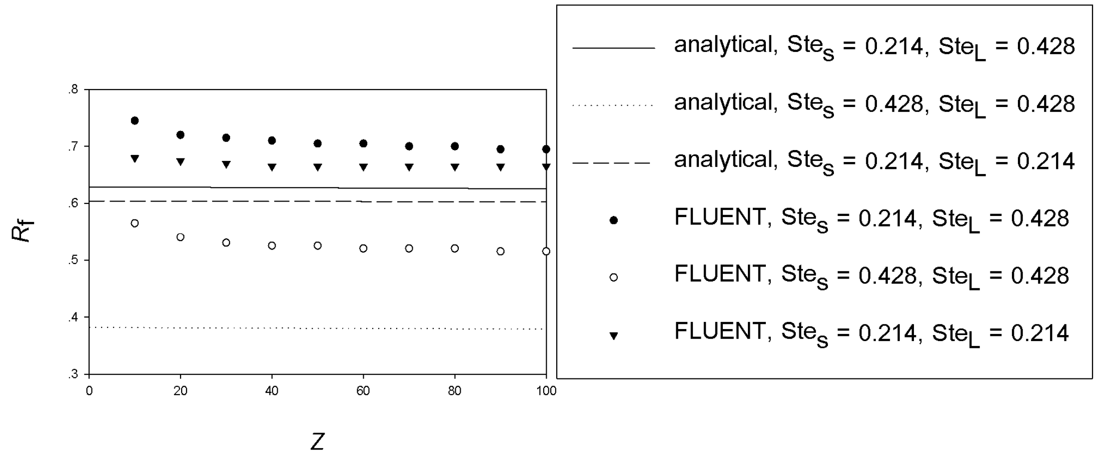
ภาพที่ 6.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ τ = 0.5 เมื่อ Bi = 10 และ 50 ที่ได้จากแบบจำลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากภาพที่ 6.14 จะเห็นว่าผลที่ได้จากโปรแกรม FLUENT กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีแนวโน้มเดียวกัน คือเมื่อตัวเลข Biot เพิ่มขึ้นความหนาของชั้นน้ำแข็งก็เพิ่มขึ้นด้วย เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของตัวเลข Biot แสดงถึงค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนของสารหล่อเย็นที่เพิ่มขึ้น ดังนั้น จึงสามารถถ่ายเทความร้อนออกจากโดเมนด้วยอัตราที่สูงขึ้น แต่กระนั้น ความหนาของน้ำแข็งและอัตราการเพิ่มขึ้นของความหนาของน้ำแข็งระหว่างผลที่ได้จากโปรแกรม FLUENT กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์แตกต่างกันค่อนข้างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริเวณใกล้ปากทางเข้า ดังที่เคยได้อภิปรายไว้ข้างต้น

จากภาพที่ 6.15 จะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มค่าตัวเลข Biot เพิ่มขึ้น ค่า θ_b จะเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยเท่านั้น จึงอาจกล่าวได้ว่าค่าตัวเลข Biot มีผลกระทบต่อ θ_b ค่อนข้างน้อย เมื่อเทียบกับผลกระทบที่มีต่อ R_f

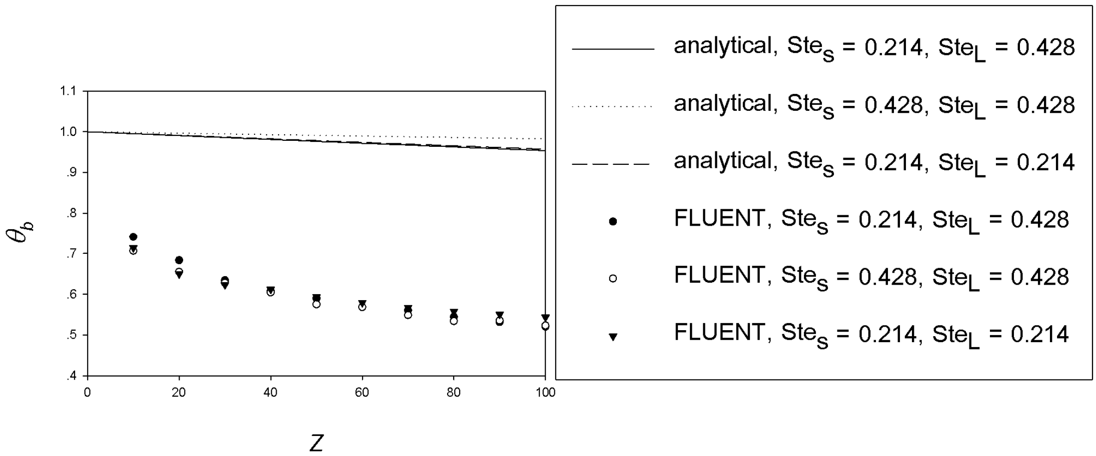
6.4 ผลกระทบของค่าตัวเลข Stefan

ในการพิจารณาผลกระทบที่เกิดจากตัวเลข Stefan ที่มีต่อแบบจำลอง ได้ทดลองเปลี่ยนค่าตัวเลข Stefan เพื่อให้สัดส่วนของค่า Ste_s/Ste_L เปลี่ยนจาก 0.5 เป็น 1 โดยเปลี่ยนค่า Ste_s จาก 0.214 เป็น 0.428 และคงค่า Ste_L ไว้ที่ 0.428 (กรณีที่ 1) แลเปลี่ยนค่า Ste_L จาก 0.428 เป็น 0.214 และคงค่า Ste_s ไว้ที่ 0.214 (กรณีที่ 2) ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z สำหรับกรณีต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 6.16 และ 6.17 ตามลำดับ



ภาพที่ 6.16 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ที่ τ = 0.5 ที่ค่า Ste ต่างๆ
ที่ได้จากแบบจำลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากภาพที่ 6.16 จะเห็นได้ว่าจะเห็นว่าผลที่ได้จากโปรแกรม FLUENT กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีแนวโน้มเดียวกัน คือทั้งในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ความหนาของน้ำแข็งจะมากขึ้นเนื่องจากการเพิ่มค่า Ste_s ในกรณีที่ 1 แสดงถึงการลดลงของอุณหภูมิของสารหล่อเย็น T_∞ และการลดลงของค่า Ste_L ในกรณีที่ 2 แสดงถึงการลดลงของอุณหภูมิขาเข้า T_{in} แต่จะเห็นได้ว่าการลดลงของอุณหภูมิของสารหล่อเย็น T_∞ จะส่งผลต่อความหนาของน้ำแข็งการลดลงของอุณหภูมิขาเข้า T_{in} (ความหนาของน้ำแข็งในกรณีที่ 1 มากกว่าความหนาของน้ำแข็งในกรณีที่ 2 มาก) และความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จะมีค่ามากกว่าค่าที่ได้จากโปรแกรม FLUENT



ภาพที่ 6.17 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ τ = 0.5 ที่ค่า Ste ต่างๆ
ที่ได้จากแบบจำลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

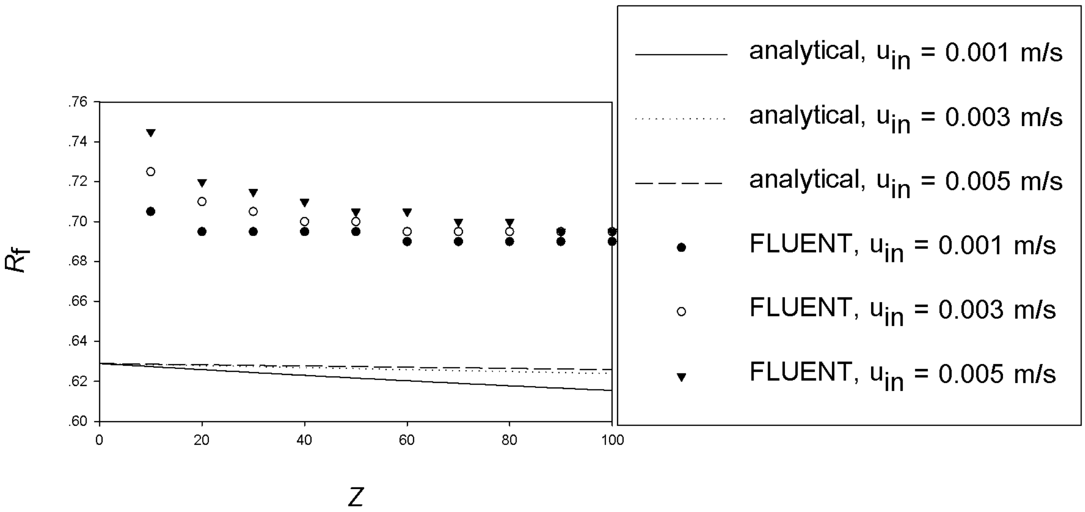
จากภาพที่ 6.17 จะเห็นได้ว่าทั้งในกรณีที่ 1 และกรณีที่2 ค่า θ_b จะเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยเท่านั้น จึงอาจกล่าวได้ว่าค่าตัวเลข Stefan มีผลกระทบต่อ θ_b ค่อนข้างน้อย เมื่อเทียบกับผลกระทบที่มีต่อ R_f

6.5 ผลกระทบของความเร็วขาเข้า

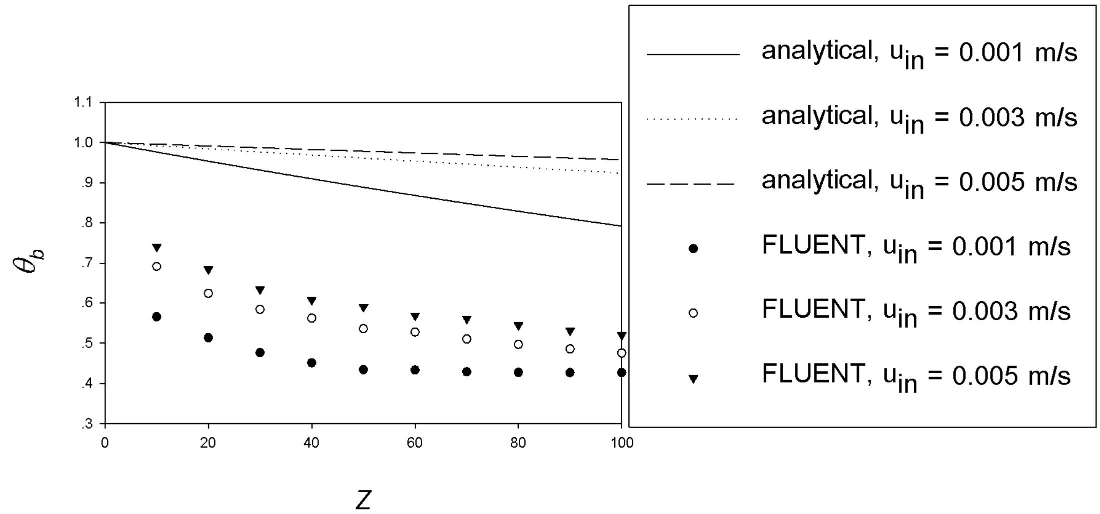
ในการพิจารณาผลกระทบที่เกิดจากความเร็วขาเข้า u_{in} ที่มีต่อแบบจำลอง ได้ทดลองเปลี่ยนค่าความเร็วขาเข้าจาก 0.005 m/s เป็น 0.001 และ 0.003 m/s ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z และความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ความเร็วต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 6.18 และ 6.19 ตามลำดับ

จากภาพที่ 6.18 จะเห็นได้ว่าจะเห็นว่าผลที่ได้จากโปรแกรม FLUENT กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีแนวโน้มเดียวกัน คือที่ความเร็วต่ำ อัตราการเพิ่มขึ้นตามแนวแกนของความหนาของชั้นน้ำแข็งจะมากกว่าที่ความเร็วสูง เนื่องจากเมื่อของไหลไหลด้วยความเร็วต่ำจะมีเวลาในการแลกเปลี่ยนความร้อนมากกว่าของไหลที่ไหลด้วยความเร็วสูง แต่จะเห็นได้ว่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้จากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จะมากกว่าผลที่ได้จากโปรแกรม FLENT ดังเช่นกรณีอื่นๆ

จากภาพที่ 6.19 จะเห็นได้ว่าจะเห็นว่าผลที่ได้จากโปรแกรม FLUENT กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีแนวโน้มเดียวกันเช่นเดียวกับในกรณีของความหนาของน้ำแข็ง คือค่าของ θ_b ตามแนวแกนที่ความเร็วต่ำจะมากกว่าที่ความเร็วสูง เนื่องจากมีเวลาในการแลกเปลี่ยนความร้อนที่น้อยกว่า



ภาพที่ 6.18 ความสัมพันธ์ระหว่าง R_f กับ Z ที่ τ = 0.5 ที่ความเร็วขาเข้า u_{in} = 0.001, 0.003 และ 0.005 m/s ที่ได้จากแบบจำลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



ภาพที่ 6.19 ความสัมพันธ์ระหว่าง θ_b กับ Z ที่ τ = 0.5 ที่ความเร็วขาเข้า u_{in} = 0.001, 0.003 และ 0.005 m/s ที่ได้จากแบบจำลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

6.6 สรุปผล

สำหรับการทดสอบกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการพาความร้อน พบว่าผลที่ได้มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่พัฒนาขึ้นโดยอ้างอิงกับงานวิจัยในอดีต (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) แต่มีความแตกต่างกัน เนื่องจากโปรแกรม FLUENT มิได้ใช้สมมุติฐานหลักที่ใช้ในการได้มาซึ่งผลเฉลยเชิงวิเคราะห์คือ quasi – steady state flow โดยโปรแกรม FLUENT จะพิจารณาปัญหาจากสมการพื้นฐานทางพลศาสตร์ของไหล ทำให้น่าจะมีความถูกต้องมากกว่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

อย่างไรก็ตาม solidification model ของโปรแกรม FLUENT มีข้อจำกัดบางประการในการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งซึ่งเป็นการเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจนคือ

1) การเกิด mushy zone ขึ้น ทั้งๆที่ในความเป็นจริงการเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจนจะไม่มีการเกิด mushy zone และลักษณะการเกิด mushy zone ยังไม่แน่นอน ขึ้นอยู่กับขนาดของปริมาตรควบคุมและขนาดของช่วงเวลาที่ใช้ในการจำลองแบบ
2) การเกิด mushy zone และลักษณะที่เปลี่ยนแปลงไปของ mushy zone ทำให้การกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีเปลี่ยนไปอย่างชัดเจน แต่ความเร็วที่เปลี่ยนไปดังกล่าวส่งผลต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวรัศมี และความหนาของน้ำแข็งเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

ข้อจำกัดดังกล่าว อาจส่งผลให้มีความคลาดเคลื่อนในการจำลองแบบปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการไหลเล็กน้อย แต่ยังถือว่าใช้ได้ดีในการประมาณเวลาที่ใช้ในการขึ้นรูปน้ำแข็ง และรูปร่างของน้ำแข็งที่ได้

บทที่ 7

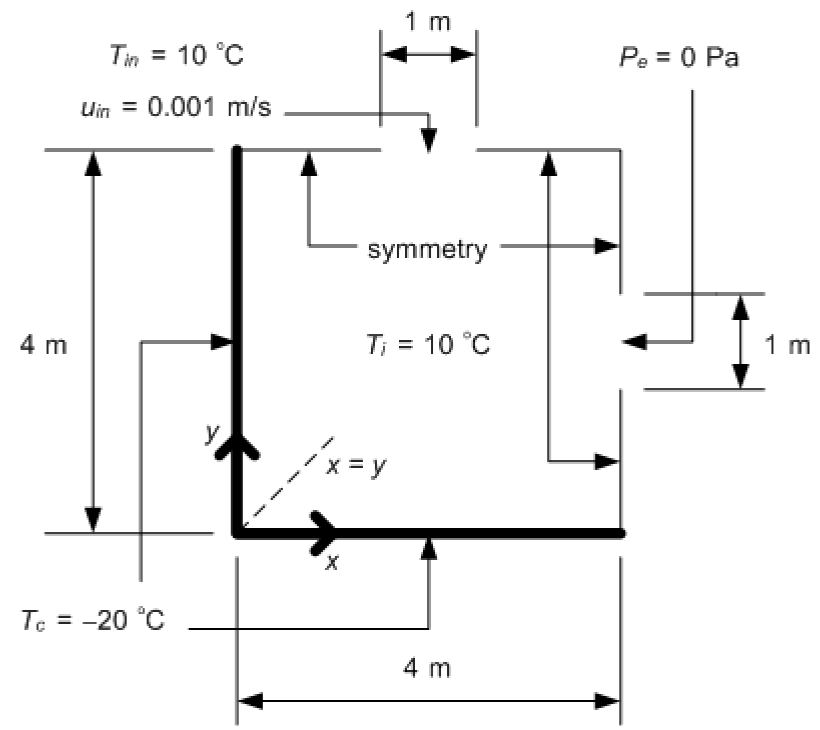
กรณีศึกษาการจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งซอง ในกรณีที่มีการพาความร้อน

หลังจากได้ทดสอบโปรแกรมเชิงพาณิชย์ FLUENT กับปัญหาการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งซอง ซึ่งเป็นปัญหาที่มีโดเมนเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีการพาความร้อน และปัญหาการก่อตัวของน้ำแข็งจากน้ำซึ่งไหลอยู่ในท่อกลม ซึ่งเป็นปัญหาที่มีโดเมนแบบ axisymmetric ที่มีการพาความร้อน โดยทำการทดสอบเทียบกับงานวิจัยในอดีต พบว่าโปรแกรม FLUENT สามารถจำลองแบบปัญหาทั้งสองได้ดี ให้ผลเฉลยที่สอดคล้องกับงานวิจัยในอดีต ดังนั้น ในบทนี้จะเสนอการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งซองในกรณีที่มีการพาความร้อน ซึ่งเป็นงานวิจัยที่พัฒนาต่อยอดมาจากปัญหาทั้งสองข้างต้น

การจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งซองในกรณีที่มีการพาความร้อน เป็นงานวิจัยที่ต่อยอดมาจากการจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งซองในกรณีที่ไม่มีการพาความร้อน และการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งภายในท่อกลมในกรณีที่มีการพาความร้อน ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลยแม่นตรงหรือผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มาชี้วัดความถูกต้อง

7.1 ลักษณะของปัญหา

การจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งซองในกรณีที่มีการพาความร้อน จะกำหนดให้ปัญหามีลักษณะคล้ายกับปัญหาการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งซองในกรณี 2 มิติ ที่ไม่มีการพาความร้อน โดยกำหนดความยาวของปัญหาทั้งหมด 8 x 8 m ให้ที่เวลาเริ่มต้น t = 0 s มีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i = 10°C สม่ำเสมอภายในบริเวณของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตที่ขอบทั้งสี่ด้านมีอุณหภูมิคงที่ตลอดที่ T_c = –20°C และ และจากความสมมาตรของปัญหาจึงสามารถพิจารณาปัญหาเพียงหนึ่งในสี่ โดยจะกำหนดเงื่อนไขที่กึ่งกลางความยาวของปัญหาเป็นแบบสมมาตร และหนึ่งในสี่ของความยาวด้านดังกล่าวจะถูกพิจารณาให้เป็นทางเข้า และ ทางออกสำหรับน้ำที่ไหลเข้าและออกจากระบบ ดังแสดงในภาพที่ 7.1



ภาพที่ 7.1 รูปร่างปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งซองที่มีการพาความร้อน

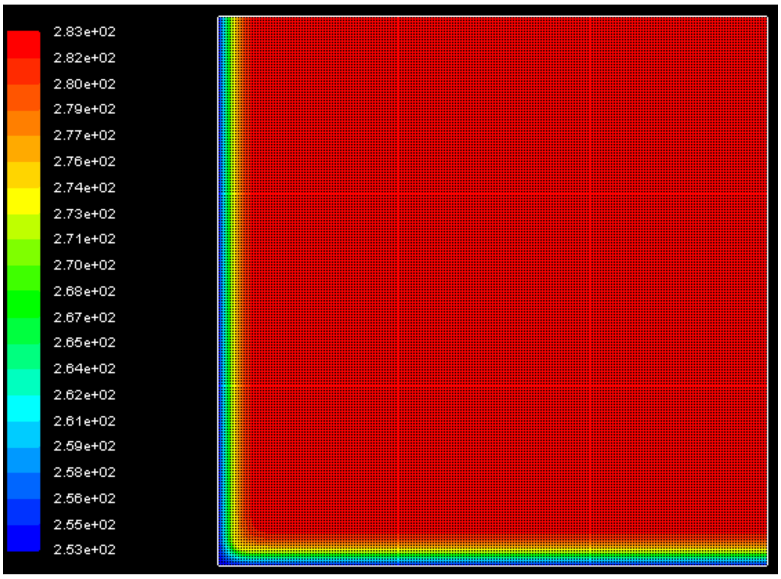
กำหนดให้ทางเข้ามีเงื่อนไขขอบเขตแบบ velocity inlet ที่มีน้ำไหลเข้าสู่ระบบด้วยความเร็วสม่ำเสมอ u_{in} = 0.001 m/s ที่อุณหภูมิสม่ำเสมอ T_{in} = 10°C และทางออกมีเงื่อนไขแบบ pressure outlet ที่มีความดัน P_e = 0 Pa

คุณสมบัติของน้ำใช้ค่าเดียวกับปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งกรณีไม่มีการพาความร้อนใน 2 มิติ โดยคุณสมบัติของน้ำในสถานะของเหลว คือ ค่าการนำความร้อน k_L = 0.556 W/m·K ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_L = 4.226 kJ/kg·K, ค่าความหนืด μ = 1.003 x 10^{-6} Ns/m^2 และค่าความหนาแน่น ρ_L = 1000 kg/m^3 สำหรับสถานะของแข็งคือค่าการนำความร้อน k_s = 2.22 W/m·K ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_s = 1.762 kJ/kg·K และค่าความหนาแน่น ρ_s = 1000 kg/m^3 ปริมาณความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะจากของเหลวเป็นของแข็ง L = 338 kJ/kg และ อุณหภูมิเยือกแข็ง T_F = 0°C โดย การจำลองแบบนี้ได้แบ่งกริด (grid) ให้แต่ละปริมาตรย่อยๆเท่ากันขนาด 200 x 200 และ 400 x 400 cells และใช้ขนาดของช่วงเวลา Δt = 1 s

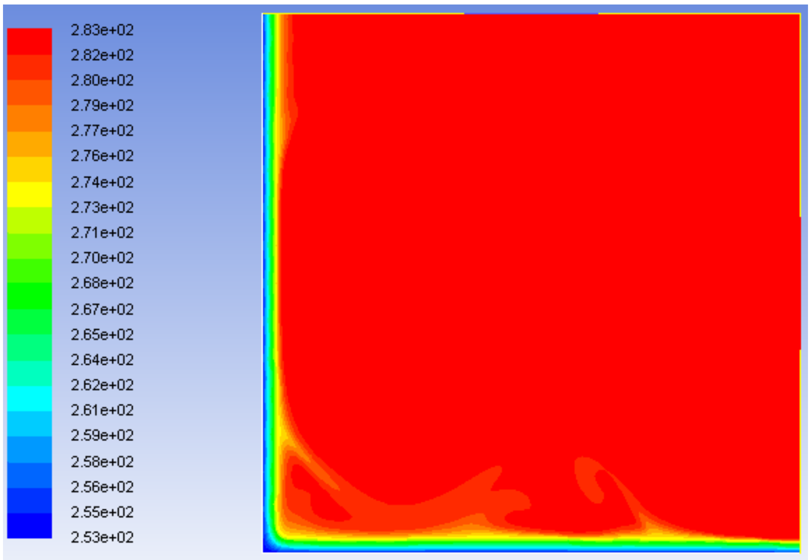
7.2 ผลและการอภิปราย

ภาพ contour plot ของอุณหภูมิในกรณีที่ไม่มีการไหลถูกแสดงในรูปที่ 7.2 และ ภาพ contour plot ของอุณหภูมิในกรณีที่มีการไหลถูกแสดงในรูปที่ 7.3

จากภาพที่ 7.3 จะเห็นว่าภาพ contour ของอุณหภูมิที่ได้จากแบบจำลองที่มีการพาความร้อน จะมีการสั่นของอุณหภูมิบริเวณใกล้เส้นแบ่งสถานะ และหากพิจารณาภาพที่ 7.2 จะเห็นว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิมีความราบเรียบกว่าอย่างเห็นได้ชัด



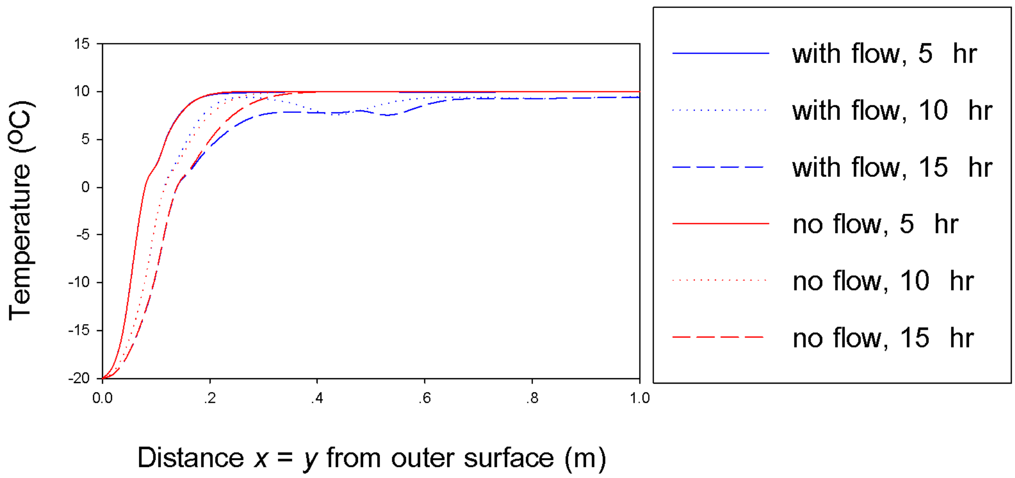
ภาพที่ 7.2 contour plot ของอุณหภูมิกรณีมีไม่การพาความร้อนที่เวลา t = 15 hr



ภาพที่ 7.3 contour plot ของอุณหภูมิกรณีมีการพาความร้อนที่เวลา t = 15 hr

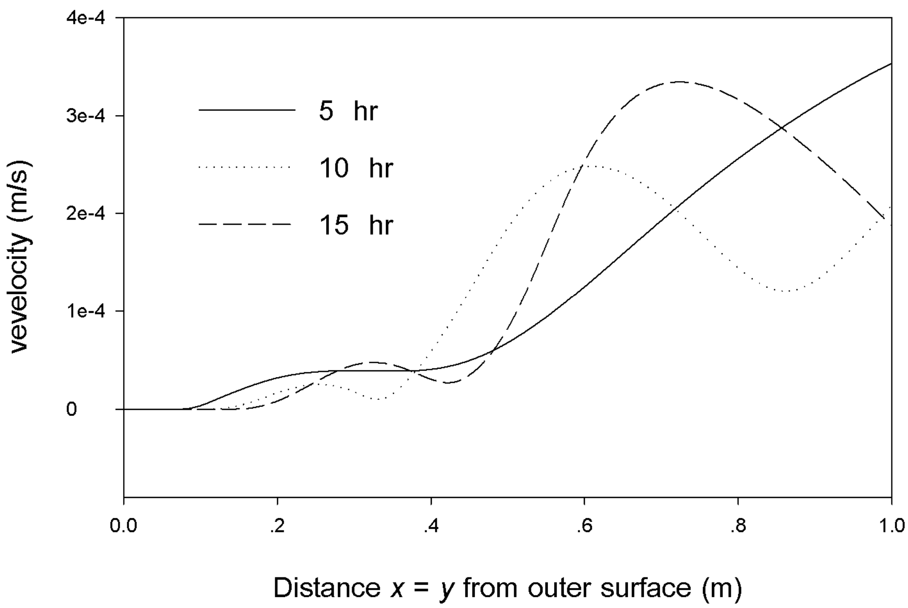
การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน *x* = *y* ระหว่างแบบจำลองที่พิจารณาผลของการพาความร้อนและแบบจำลองที่ไม่พิจารณาผลของการพาความร้อน ถูกแสดงในภาพที่ 7.4 จะเห็นได้ว่าลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิมีลักษณะคล้ายกัน คือความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำและบริเวณที่เป็นน้ำแข็งจะแตกต่างกันมาก โดยจะเห็นความแตกต่างนี้อย่างชัดเจนบริเวณเส้นแบ่งสถานะ ความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำแข็ง จะมีค่ามากกว่าความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่เป็นน้ำ เนื่องจากค่าความจุความร้อนของน้ำแข็งน้อยกว่าน้ำ และค่าการนำความร้อนของน้ำแข็งมากกว่าน้ำ

อย่างไรก็ตาม จะเห็นได้ว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิแนวแกน *x* = *y* ที่ได้จากแบบจำลองที่พิจารณาผลของการพาความร้อน และไม่พิจารณาผลของการพาความร้อนจะแตกต่างกันอยู่ คือการกระจายตัวของอุณหภูมิแนวแกน *x* = *y* ที่ได้จากแบบจำลองที่ไม่พิจารณาผลของการพาความร้อนจะมีลักษณะค่อนข้างราบเรียบและไม่มีการแกว่ง แต่เมื่อพิจารณาการกระจายตัวของอุณหภูมิแนวแกน *x* = *y* ที่ได้จากแบบจำลองที่พิจารณาผลของการพาความร้อน จะพบว่ามีการแกว่งตัวของอุณหภูมิเนื่องจากการไหลของน้ำที่ทำให้เกิดการพาความร้อน และยังพบว่าการไหลของน้ำทำให้ลักษณะการก่อตัวของน้ำแข็งนั้นแตกต่างกัน

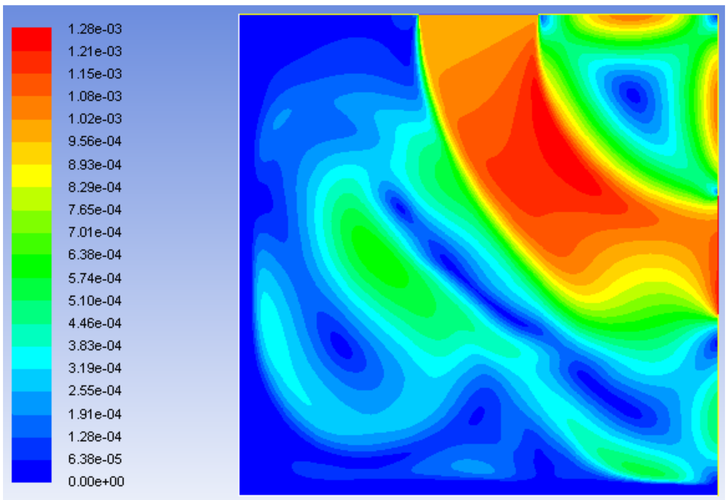


ภาพที่ 7.4 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน *x* = *y* ระหว่างแบบจำลองที่พิจารณาผลของการพาความร้อนและแบบจำลองที่ไม่พิจารณาผลของการพาความร้อนที่เวลา *t* = 5, 10 และ 15 ชั่วโมง

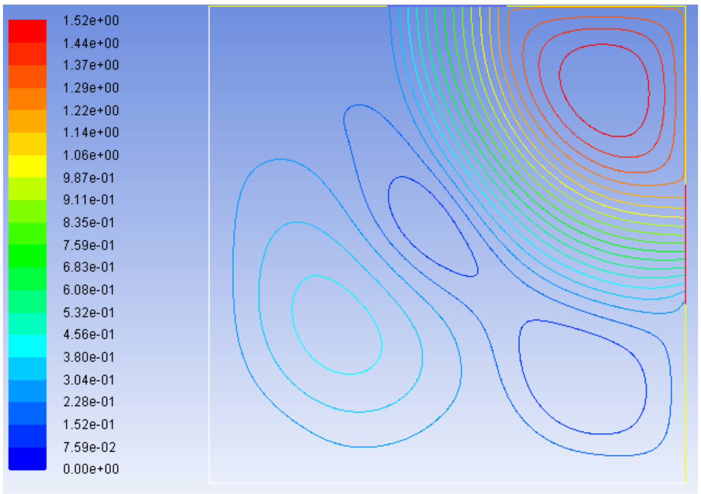
การกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน *x* = *y* ถูกแสดงในภาพที่ 7.5, contour ของความเร็วถูกแสดงในภาพที่ 7.6 และ contour ของ streamline ในรูปที่ 7.7 จะเห็นว่ามีการแกว่งตัวของความเร็วจะยังมีค่าน้อยในบริเวณใกล้เส้นแบ่งสถานะ และมีค่ามากขึ้นเมื่ออยู่ห่างจากเส้นแบ่งสถานะมากขึ้น และพบว่ามีการไหลวนของน้ำภายในโดเมน



ภาพที่ 7.5 การกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน $x = y$ ที่เวลา t = 5, 10 และ 15 ชั่วโมง

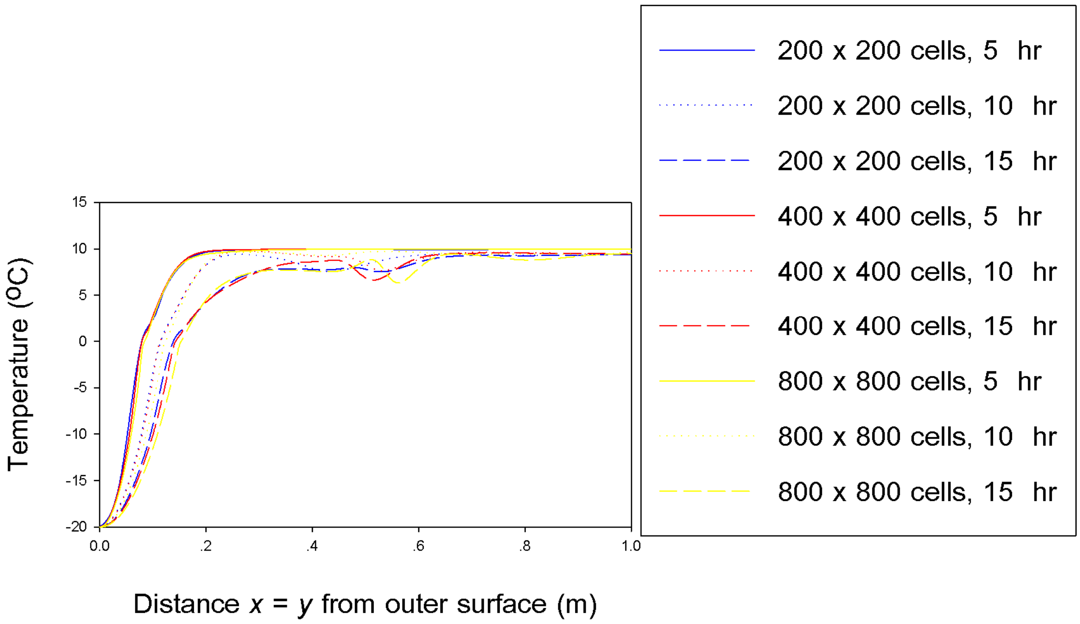


ภาพที่ 7.6 contour plot ของความเร็วกรณีมีการพาความร้อนที่เวลา t = 15 hr

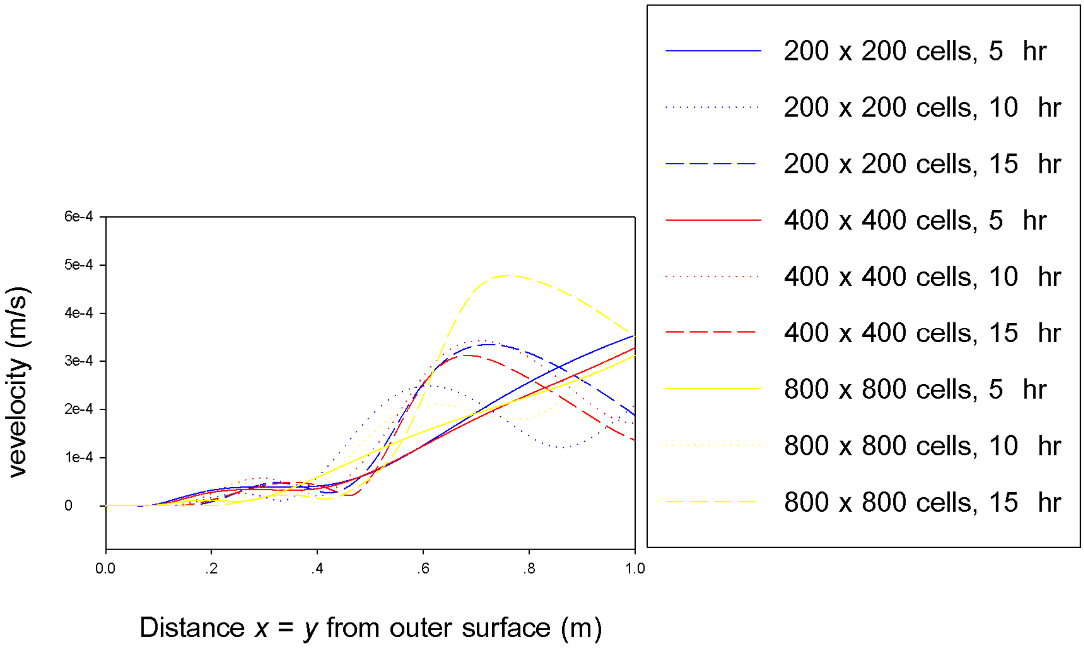


ภาพที่ 7.7 contour plot ของ streamlines กรณีมีการพาความร้อนที่เวลา t = 15 hr

ในการพิจารณาผลของปริมาตรควบคุมที่มีต่อผลลัพธ์ โดยการใช้ปริมาตรควบคุมที่ขนาดต่างๆกันคือ 200 x 200, 400 x 400 และ 800 x 800 cells โดยใช้ช่วงเวลา Δt = 1 s



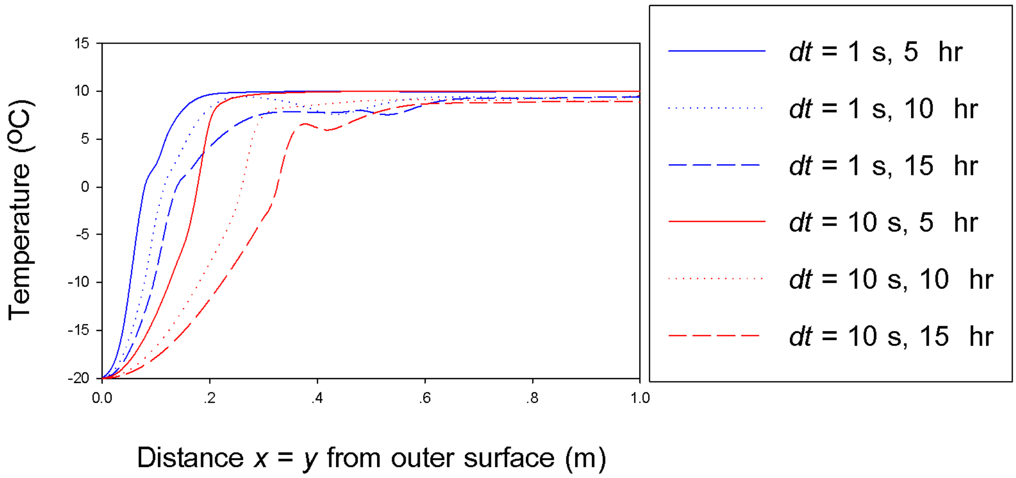
ภาพที่ 7.8 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน $x = y$ เมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 200, 400 x 400 และ 800 x 800 cells ที่เวลา t = 5, 10 และ 15 ชั่วโมง



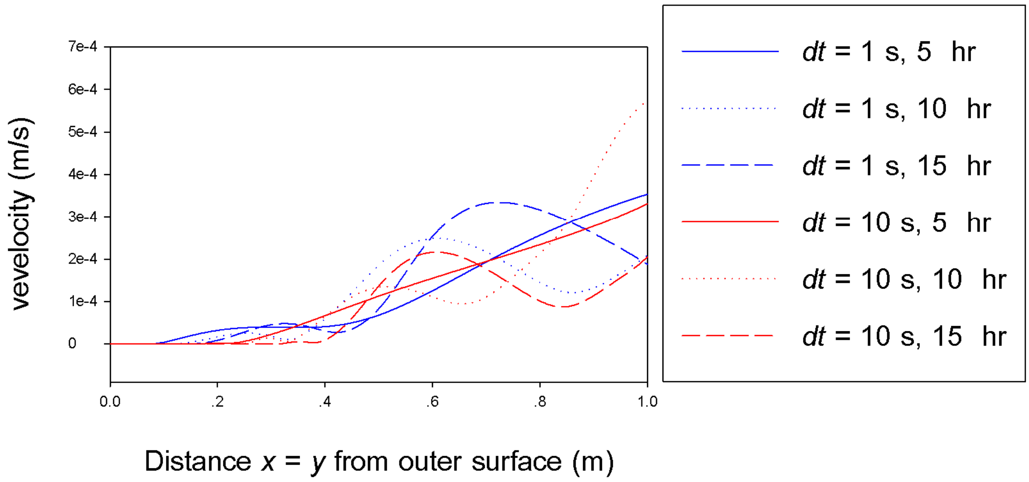
ภาพที่ 7.9 การกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน $x = y$ เมื่อจำลองแบบด้วย 200 x 200, 400 x 400 และ 800 x 800 cells ที่เวลา t = 5, 10 และ 15 ชั่วโมง

การกระจายตัวของอุณหภูมิ และความเร็วจะถูกแสดงในภาพที่ 7.8 และ 7.9 ตามลำดับ พบว่าการแบ่งกริดทั้งสามแบบ คือ 200 x 200, 400 x 400 และ 800 x 800 cells ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกันโดยมีความแตกต่างกันเล็กน้อย ทั้งนี้น่าจะเนื่องมาจากข้อจำกัดของโปรแกรม FLUENT ในการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งในสภาวะที่มีการไหลที่ได้อภิปรายในบทที่ 6 คือเมื่อแบ่งขนาดของปริมาตรควบคุมให้มีขนาดไม่เท่ากัน จำนวนจุดต่อที่อยู่ภายในช่วง mushy zone จะมีจำนวนแตกต่างกันไป ทำให้อัตราการลดลงของความเร็วของของเหลวบริเวณใกล้เส้นแบ่งสถานะมีค่าแตกต่างกัน

ในการพิจารณาผลของขนาดของช่วงเวลาที่มีต่อผลลัพธ์ โดยการใช้ขนาดของช่วงเวลาที่ขนาดต่างๆกันคือ 1 และ 10 s โดยแบ่งขนาดของปริมาตรควบคุมจำนวน 200 x 200 cells โดยการกระจายตัวของอุณหภูมิ และความเร็วจะถูกแสดงในภาพที่ 7.10 และ 7.11 ตามลำดับพบว่าการแบ่งกริดทั้งสองแบบ คือ 1 และ 10 s ให้ผลลัพธ์ที่มีแนวโน้มเดียวกันโดยมีความแตกต่างกันเล็กน้อย ทั้งนี้น่าจะเนื่องมาจากข้อจำกัดของโปรแกรม FLUENT ในการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งในสภาวะที่มีการไหลที่ได้อภิปรายในบทที่ 6 ในลักษณะคล้ายคลึงกับอิทธิพลของการแบ่งปริมาตรควบคุม คือเมื่อแบ่งขนาดของช่วงเวลาให้มีขนาดไม่เท่ากัน จำนวนจุดต่อที่อยู่ภายในช่วง mushy zone จะมีจำนวนแตกต่างกันไป ทำให้อัตราการลดลงของความเร็วของของเหลวบริเวณใกล้เส้นแบ่งสถานะมีค่าแตกต่างกัน



ภาพที่ 7.10 การกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกน $x = y$ เมื่อจำลองแบบด้วย Δt = 1 และ 10 s ที่เวลา t = 5, 10 และ 15 ชั่วโมง



ภาพที่ 7.11 การกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกน $x = y$ เมื่อจำลองแบบด้วย Δt = 1 และ 10 s ที่เวลา t = 5, 10 และ 15 ชั่วโมง

7.3 สรุปผล

จากการทดสอบแบบจำลองกับปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งซองกรณีมีการพาความร้อน พบว่าลักษณะการกระจายตัวของอุณภูมิมีความคล้ายคลึง และมีแนวโน้มเดียวกับกรณีไม่มีการพาความร้อน แต่จะมีการสั่นของการกระจายตัวของอุณหภูมิเนื่องจากการไหล และเมื่อเปลี่ยนขนาดของกริด ผลที่ได้มีความเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยซึ่งเกิดจากข้อจำกัดของโปรแกรม FLUENT ในการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งในกรณีที่มีการพาความร้อน

บทที่ 8

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

เนื่องจากได้มีการอภิปรายผลพร้อมกับการแสดงผลเปรียบเทียบในหลายบทที่ผ่านมาแล้ว ในบทนี้จึงเป็นการสรุปผลโดยรวม และให้ข้อเสนอแนะสำหรับขยายผลศึกษาต่อไป

8.1 สรุปผลการวิจัย

การใช้โปรแกรม FLUENT ที่เป็นโปรแกรมเชิงพาณิชย์ในการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะของน้ำ ได้ผลการจำลองแบบที่มีประสิทธิภาพ โดยข้อดีหลักของโปรแกรม FLUENT คือ สามารถแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนเช่น การก่อตัวของน้ำแข็งในสภาวะที่มีการไหล ซึ่งการพัฒนาโปรแกรมเองทำได้ยาก และเทคนิคที่โปรแกรม FLUENT ใช้ในการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะคือ enthalpy – porosity method ยังทำความเข้าใจได้ง่าย และมีความตรงไปตรงมา

การทดสอบแบบจำลอง ทำจากปัญหาที่ง่ายไปยาก โดยเริ่มจากทดสอบกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในกรณีไม่มีการพาความร้อนที่อุณหภูมิขอบเขตคงที่ และเปลี่ยนให้อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่เพื่อให้สภาวะในการจำลองแบบใกล้เคียงกับสภาวะจริงมากขึ้น จากนั้นจึงทดสอบแบบจำลองกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะในกรณีมีการพาความร้อน โดยในการจำลองแบบใช้ pressure - based solver ในการแก้ปัญหา ใช้ power-law scheme ในการประมาณค่าระหว่างจุดต่อ ใช้ first order implicit scheme ในการแบ่งย่อยเชิงเวลา และใช้วิธี green – gauss cell based ในการประมาณค่าความชัน

เมื่อทดสอบแบบจำลองกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะ กรณีไม่มีการพาความร้อนที่มีอุณหภูมิขอบเขตคงที่ พบว่าในกรณี 1 มิติ และ 2 มิติ ผลที่ได้สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงและผลที่ได้จากงานวิจัยในอดีต (รจนา ประไพนพ, 2545) เป็นอย่างดี โดยพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่ามากใน 2 บริเวณคือบริเวณใกล้ขอบเนื่องจากมีความชันของการกระจายตัวของอุณหภูมิสูง และบริเวณเส้นแบ่งสถานะเนื่องจากมีการคำนวณความร้อนแฝง และในการขยายผลในกรณี 3 มิติพบว่าผลที่ได้มีแนวโน้มสอดคล้องกับกรณี 1 และ 2 มิติ และได้ขนาดของกริดและช่วงเวลาที่เหมาะ

ในการทดสอบแบบจำลองกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะ กรณีไม่มีการพาความร้อนที่อุณหภูมิขอบเขตไม่คงที่ พบว่าผลที่ได้มีแนวโน้มเดียวกับงานวิจัยเดิม (Sukkuea and Maneeratana, 2007) และมีความแม่นยำพอที่จะใช้ศึกษาเพิ่มเติมได้

ในการทดสอบกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะกรณีไม่มีการพาความร้อน การแบ่งกริดแบบหยาบและการใช้ช่วงเวลาที่มีขนาดใหญ่ ให้ผลเฉลยที่มีแนวโน้มในทิศทางเดียวกันกับผลเฉลยแม่นตรง แต่การแบ่งกริดแบบละเอียดและช่วงเวลาขนาดเล็กจะช่วยเพิ่มความแม่นยำให้กับผลลัพธ์ได้ในระดับหนึ่ง

สำหรับการทดสอบกับปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการพาความร้อน พบว่าผลที่ได้มีแนวโน้มเดียวกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่พัฒนาขึ้นโดยอ้างอิงกับงานวิจัยในอดีต (Seeniraj and Sankara Hari, 2008) แต่มีความแตกต่างกัน เนื่องจากโปรแกรม FLUENT มิได้ใช้สมมุติฐานหลักที่ใช้ในการได้มาซึ่งผลเฉลยเชิงวิเคราะห์คือ quasi – steady state flow โดยโปรแกรม FLUENT จะพิจารณาปัญหาจากสมการพื้นฐานทางพลศาสตร์ของไหล ทำให้น่าจะมีความถูกต้องมากกว่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

อย่างไรก็ตาม solidification model ของโปรแกรม FLUENT มีข้อจำกัดบางประการในการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็งซึ่งเป็นการเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจนคือ

1) การเกิด mushy zone ขึ้น ทั้งๆที่ในความเป็นจริงการเปลี่ยนสถานะแบบแบ่งชัดเจนจะไม่มีการเกิด mushy zone และลักษณะการเกิด mushy zone ยังไม่แน่นอน ขึ้นอยู่กับขนาดของปริมาตรควบคุมและขนาดของช่วงเวลาที่ใช้ในการจำลองแบบ
2) การเกิด mushy zone และลักษณะที่เปลี่ยนแปลงไปของ mushy zone ทำให้การกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีเปลี่ยนไปอย่างชัดเจน แต่ความเร็วที่เปลี่ยนไปดังกล่าวส่งผลต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิตาม และความหนาของน้ำแข็งเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

ข้อจำกัดดังกล่าว อาจส่งผลให้มีความคลาดเคลื่อนในการจำลองแบบปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่มีการไหลเล็กน้อย แต่ยังถือว่าใช้ได้ดีในการประมาณเวลาที่ใช้ในการขึ้นรูปน้ำแข็ง และรูปร่างของน้ำแข็งที่ได้

8.2 ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะสำหรับการขยายผลการศึกษางานวิจัยนี้ คือ ควรมีการศึกษาเพิ่มเติมเพื่อนำพารามิเตอร์ที่ได้จากการจำลองแบบการก่อตัวของน้ำแข็ง ไปใช้เพื่อหาแนวทางในการลดการใช้พลังงานในอุตสาหกรรมน้ำแข็ง เช่น การออกแบบระบบควบคุมโรงงานผลิตน้ำแข็ง เป็นต้น

นอกจากนี้ อาจมีการขยายผลเพื่อศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับผลของการพาความร้อนแบบธรรมชาติต่อการก่อตัวของน้ำแข็ง เนื่องจากในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะผลของการพาความร้อนแบบบังคับเท่านั้น และอุตสาหรรมน้ำแข็ง การพาความร้อนแบบธรรมชาติเป็นสิ่งที่พบเห็นได้บ่อย

สำหรับการแก้ไขปัญหาข้อจำกัดของโปรแกรม FLUENT ที่ระบุไว้ข้างต้น หากต้องการเพิ่มความแม่นยำของคำตอบที่มากขึ้นจำเป็นต้อง ใช้แนวทางอื่นในการแก้ปัญหาการจำลองแบบการแข็งตัวของน้ำแข็งซองที่มีการพาความร้อน เช่น การใช้ two phase model ของโปรแกรม FLUENT แต่อาจมีปัญหาเกี่ยวกับการเพิ่มขึ้นของความหนาของชั้นน้ำแข็ง ดังนั้นหากต้องการเพิ่มความแม่นยำของคำตอบที่มากขึ้นอาจจำเป็นต้องพัฒนาโปรแกรมเอง

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

รจนา ประไพนพ. 2545. การจำลองแบบการขึ้นรูปของน้ำแข็งโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วุฒินันท์ ธุปหอม. 2550. แบบจำลองพลวัตของกระบวนการผลิตน้ำแข็งซองโดยใช้วิธีการระบุเอกลักษณ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คณะกรรมการนโยบายพลังงานแห่งชาติ, สำนักงาน. 2545. กรณีศึกษา 8 โรงน้ำแข็ง. ทำอย่างไรให้ได้ประโยชน์จากอัตราค่าไฟฟ้าแบบ TOU. สำนักนายกรัฐมนตรี, ฉบับแก้ไขปรับปรุงปี พ.ศ. 2545. [ออนไลน์]. แหล่งที่มา: http://www.eppo.go.th/power/tou/case-8-ice.html [20 ตุลาคม 2553]

ภาษาอังกฤษ

ANSYS, Inc. 2009. ANSYS FLUENT 12.0 Theory Guide. USA.

Argyropoulos, S.A. and Guthrie, R.I.L. 1979. The exothermic dissolution of 50 wt% ferro-silicon in molten steel. Can. Metall. Q. 18: 267–281. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Argyropoulos, S.A. and Guthrie, R.I.L. 1984. The dissolution of titanium in liquid steel. Metall. Trans B. 15 : 47–58. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Argyropoulos, S.A. 1981. Dissolution of High Melting Point Additions in Liquid Steel. Doctoral dissertion. Department of Mining and Metallurgical Engineering, McGill University. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Basu, B. and Date, A.W. 1988. Numerical modeling of melting and solidification problem: A review. Sadhana. 13: 169-213. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Bejan, A. 1993. Heat Transfer. New York: John Wiley& Sons.

Bell, G.E. and Wood, A.S. 1983. On the performance of the enthalpy method in the region of a singularity. Int. J. Numer. Meth. Eng. 19: 1583–1592. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. 1959. Conduction of Heat in Solid. Oxford : Clarendon. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Cole, G.S. and Bolling, G.F. 1965. The importance of natural convection in casting. Trans. TMS-AIME. 233: 1568–1572. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Comini, G., Del Guidice, S., Lewis, R.W. and Zienkiewicz, O.C. 1974. Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change. Int. J. Numer. Meth. Eng. 8: 613–624. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Crank, J. and Gupta, R.S. 1972. A method for solving moving boundary problems in heat flow using cubic splines or polynomials. J. Inst. Math. Appl. 10: 296–304. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Douglas, J. and Gallie, T.M. 1955. On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition. Duke Math. J. 22: 557-571. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Dusinberre, G.M. 1945. Numerical methods for transient heat flow. Trans ASME. 67: 703–712. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Gupta, R.S. and Kumar, D. 1980. A modified variable time step method for one dimensional Stefan problem. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 23: 101-109. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Gupta, R.S. and Kumar, D. 1981. Variable time step method for one dimensional Stefan problem with mixed boundary condition. Int. J. Mass Heat Transfer. 24: 251-259. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Goodling, J.S. and Khader, M.S. 1974. Inward solidification with radiation-convection boundary condition. J.Heat Transfer. 96: 114–115. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Hale, N.W.Jr. and Viskanta, R. 1978. Photographic observation of the solid–liquid interface motion during melting of a solid heat from an isothermal vertical wall. Lett. Heat Mass Transfer. 5: 329–337. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Harlow, F.H. and Welch, J.E. 1965. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow. Phys. Fluids. 8: 2182–2193. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Hashemi, H.T. and Sliepcevich, C.M. 1967. A numerical method for solving two-dimensional problems of heat conduction with change of phase. Chem. Eng. Prog. Symp. Series. 63: 34–41. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Heitz, W. L. and Westwater, J.W. 1970. Extension of the numerical method for melting and freezing problems. Int. J. Heat Mass Transfer. 13: 1371–1375. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Ho, C.J. and Chen, S. 1986. Numerical simulation of melting of ice around a horizontal cylinder. Int. J. Heat Mass Transfer. 29: 1359–1369. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting : a review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Nichols, B.D., Hirt, C.W. and Hotchkiss, R.S. 1980. SOLA-VOF: a solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries. Los Alamos Scientific Laboratory Report. LA–8355. cited in cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996.

Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Okada, M. 1984. Analysis of heat transfer during melting from a vertical wall. Int. J. Heat Mass Transfer. 27: 2057–2066. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Poirier, D. and Salcudean, M. 1988. On numerical methods used in mathematical modeling of phase change in liquid metals. Trans. ASME J. Heat Transfer. 110: 562–570. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Ramachandran, N. and Gupta, J.P. 1982. Thermal and fluid flow effects during solidification in rectangular enclosure. Int. J. Heat Mass Transfer. 25: 187–194. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Rolph, W.D. and Bathe, K.J. 1982. An efficient algorithm for analysis of nonlinear heat transfer with phase changes. Int. J. Numer. Meth. Eng. 18: 119–134. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Rose, M.E. 1960. A method for calculating solutions of parabolic equations with a free boundary. Math. Comput. 14: 249–256. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Seeniraj, R.V. and Sankara Hari, G. 2008. Transient freezing of liquids in forced convectively cooled tubes. Int. Comm. Heat Mass Transfer. 35(6): 786-792.

Shamsunder, N. and Sparrow, E.M. 1975. Analysis of multidimensional conduction phase change via the enthalpy model. J. Heat Transfer. 97: 333–340. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Sukkuea, A. and Maneeratana, K. 2007. Simulation of block Ice formation with varying brine temperature. paper presented in the E-NETT 3 Conference, Bangkok, Thailand.

Tien, L.C. and Churchill, S.W. 1965. Freezing front motion and heat transfer outside an infinite isothermal cylinder. AIChEJ 11: 790–793. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Tsai, C.W., Yang, S.J. and Hwang, G.J. 1997. Maximum density effect on laminar water pipe flow_solidification. Int. J. Heat Mass Transfer. 41(24): 4251-4257.

Vives, C. 1988. Effects of a forced couette flow during the controlled solidification of pure metal. Int. J. Heat Mass Transfer, 31: 2047–2062.

Voller, V. R. and Prakash, C. 1987. A Fixed-Grid Numerical Modeling Methodology for Convection-Diffusion Mushy Region Phase-Change Problems. Int. J. Heat Mass Transfer, 30: 1709–1720.

Voller, V., Swaminathan, C.R., and Thomas, B.G. 1990. Fixed grid techniques for phase change problems: A review. Int. J. Numer. Methods Eng. 30: 875-898. cited in Hu, H. and Agryropulos, S.A. 1996. Mathametical modeling of solidification and melting: A review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 4(4): 371-393.

Vynnycky, M. and Kimura, S. 2007. An analytical and numerical study of coupled transient natural convection in a rectangular enclosure. Int. J. Heat Mass Transfer. 50(25-26) : 5204-5214.

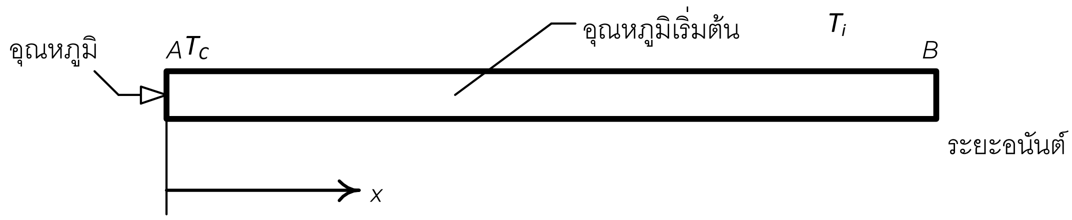
ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
ผลเฉลยแม่นตรง

การตรวจสอบความแม่นยำของการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สามารถทำได้ด้วยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการจำลองแบบกับผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นจึงต้องทราบเงื่อนไขการได้มาของผลเฉลยแม่นตรง เพื่อพิจารณากรณีศึกษาให้สอดคล้องกับข้อกำหนดของผลเฉลยแม่นตรงนั้นๆ ในภาคผนวกนี้จะอธิบายถึงข้อกำหนดและสมการผลเฉลยแม่นตรงสำหรับแต่ละปัญหาที่ใช้ในการเปรียบเทียบโดยละเอียด

ก.1 ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ในหนึ่งมิติ

ลักษณะของปัญหาการนำความร้อนในสภาวะชั่วครู่ดังแสดงตัวอย่างในภาพที่ ก.1 มีเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านหนึ่งมีอุณหภูมิคงที่ และรูปร่างของปัญหามีความยาวมากเป็นระยะกึ่งอนันต์ (semi-infinite) ทำให้ที่ปลายอีกด้านของปัญหามีอุณหภูมิคงเดิมเท่ากับอุณหภูมิเริ่มต้นตลอดเวลา ส่วนในทิศทางตั้งฉากกับ *AB* จะไม่มีการถ่ายเทความร้อน Poulikalos (1994) ใช้วิธี Similarity ในการหาผลเฉลยได้ผลดังสมการ (ก.5)



ภาพที่ ก.1 รูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต

สมการครอบคลุม (governing equation) คือ

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \qquad (ก.1)$$

เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$x = 0 : \qquad T = T_C \qquad (ก.2)$$

$$x \to \infty : \quad T \to T_i \tag{ก.3}$$

กำหนดให้

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}} \tag{ก.4}$$

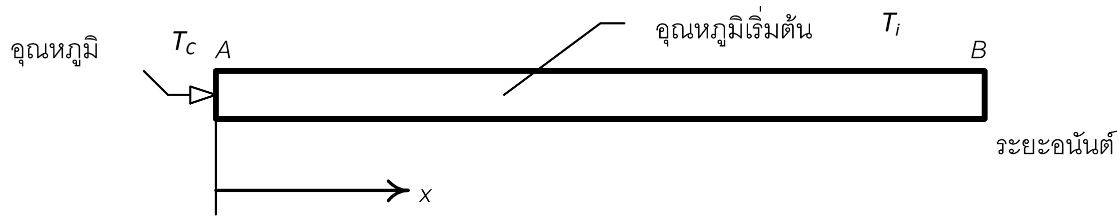
โดยที่ α คือ thermal diffusivity ($k/\rho c$)
และได้เฉลยแม่นตรงของอุณหภูมิ T คือ

$$T = T_C + (T_i - T_C)\,erf(\eta) \tag{ก.5}$$

ก.2 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะในหนึ่งมิติ

ผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์โดย Carslaw and Jaeger (1959) และ Ku and Chan (1990) ลักษณะของปัญหาการเปลี่ยนสถานะที่พิจารณาเป็นการเปลี่ยนสถานะที่มีอุณหภูมิเยือกแข็งเป็นค่าคงที่ (isothermal phase change) โดยที่เวลาเริ่มต้น t_0 = 0 สสารมีสถานะเป็นของเหลวและมีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i ซึ่งมีค่ามากกว่า T_F เป็นค่าสม่ำเสมอ เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านหนึ่งที่ x = 0 มีอุณหภูมิคงที่ T_C ซึ่งมีค่าน้อยกว่า T_F และรูปร่างของปัญหามีความยาวมากเป็นระยะกึ่งอนันต์ทำให้ที่ปลายอีกด้านหนึ่งมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิเริ่มต้นตลอดเวลา ส่วนทิศทางตั้งฉากกับ AB จะไม่มีการถ่ายเทความร้อน ดังแสดงในภาพที่ ก.2

การเปลี่ยนสถานะจะเริ่มจากทางซ้ายมือไปขวามือ ในการแก้ปัญหาเริ่มจากคำนวณหาตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะ x_{SL} แล้วใช้สมการครอบคลุมของแต่ละสถานะคำนวณหาการกระจายตัวของอุณหภูมิ กำหนดให้ค่าความหนาแน่นในแต่ละสถานะมีค่าเท่ากันจึงไม่คิดผลจากการขยายตัว ส่วนค่าการนำความร้อนและค่าความจุความร้อนจำเพาะในแต่ละสถานะมีต่างกันโดยเป็นค่าคงที่สำหรับแต่ละสถานะ



ภาพที่ ก.2 รูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต

สมการครอบคลุม คือ

$$\rho c_S \frac{\partial T_S}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T_S) \qquad 0 < x < x_{SL} \qquad (ก.6)$$

$$\rho c_L \frac{\partial T_L}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T_L) \qquad x_{SL} < x < \infty \qquad (ก.7)$$

โดยที่ x_{SL} คือตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะ T_S คือ อุณหภูมิในบริเวณที่มีสถานะเป็นของแข็ง T_L คืออุณหภูมิในบริเวณที่มีสถานะเป็นของเหลว

เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$x = 0 : \qquad T = T_C \qquad (ก.8)$$

$$x = x_{SL} : \quad T = T_F , \quad k_S \frac{\partial T_S}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho L \frac{dx_{SL}(t)}{dt} \qquad (ก.9, ก.10)$$

$$x \to \infty : \qquad T \to T_i \qquad (ก.11)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \qquad (ก.12)$$

$$\alpha_S = \frac{k_S}{\rho c_S} \quad \text{และ} \quad \alpha_L = \frac{k_L}{\rho c_L} \qquad (ก.13)$$

$$Ste = \frac{c_S (T_F - T_C)}{L} \qquad (ก.14)$$

โดยที่ η คือตัวแปรไร้หน่วยของระยะทาง x ส่วน α_S และ α_L คือ thermal diffusivity ของสสารในสถานะของแข็งและของเหลวตามลำดับ

ได้ผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายตัวของอุณหภูมิในสถานะของแข็ง คือ

$$T_S = T_C + (T_F - T_C) \frac{erf(\eta)}{erf(\eta_{SL})} \qquad 0 < \eta < \eta_{SL} \qquad (ก.15)$$

และการกระจายตัวของอุณหภูมิในสถานะของเหลว คือ

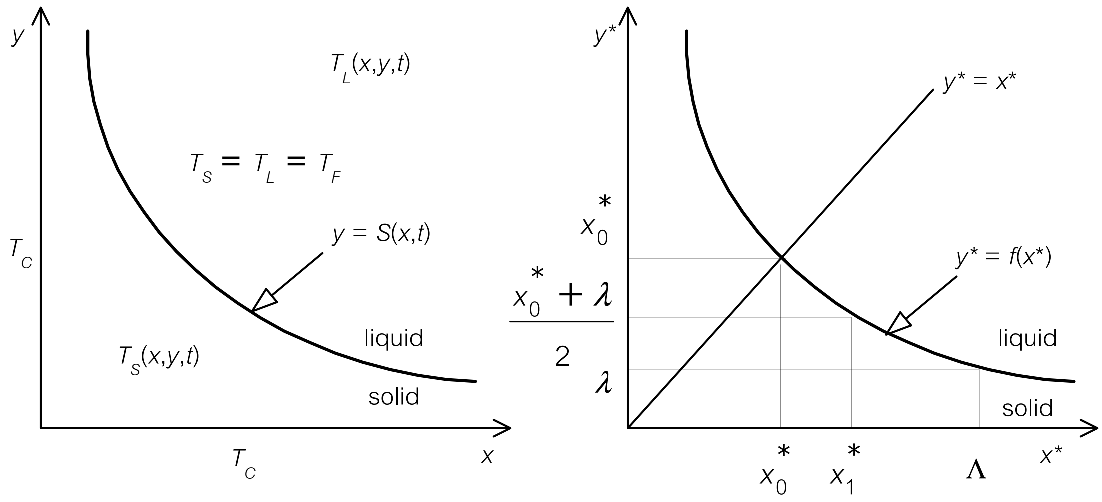
$$T_L = T_i + (T_F - T_i)\frac{erfc(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\ \eta)}{erfc(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\ \eta_{SL})} \qquad \eta_{SL} < \eta < \infty \qquad (ก.16)$$

โดย η_{SL} คือค่าตัวแปรไร้หน่วยของตำแหน่งเส้นแบ่งสถานะ x_{SL} และหาค่าได้จากสมการพีชคณิตไม่เชิงเส้นตรง (nonlinear algebraic equation) ดังนี้

$$\frac{T_F - T_i}{T_F - T_C}\frac{k_L}{k_S}\sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_L}}\frac{exp[-(\alpha_S/\alpha_L)\eta_{SL}^2]}{erfc(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\ \eta_{SL})} + \frac{exp(-\eta_{SL}^2)}{erf(\eta_{SL})} - \frac{\sqrt{\pi}\ \eta_{SL}}{Ste} = 0 \qquad (ก.17)$$

ก.3 ปัญหาการเปลี่ยนสถานะในสองมิติ

Rathjen and Jiji (1971) ได้เสนอผลเฉลยกึ่งแม่นตรง (semi-analytical solution) สำหรับปัญหาการขึ้นรูปในแนวทแยง $x, y > 0$ ดังภาพที่ ก.3a ที่สถานะเริ่มต้นเป็นของเหลว โดยมีอุณหภูมิเริ่มต้น T_i เป็นค่าคงที่สม่ำเสมอและมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิเยือกแข็ง T_F เงื่อนไขขอบเขต T_C ที่ $x = 0$ และ $y = 0$ มีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิจุดเยือกแข็งและเป็นค่าคงที่ โดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นในแต่ละสถานะมีค่าเท่ากันจึงไม่คิดผลจากการขยายตัว และ thermal diffusivity $\alpha = k/\rho c$ ในแต่ละสถานะมีค่าเท่ากันเพื่อให้สมการครอบคลุมทั้งสองสถานะเหมือนกัน โดยที่เส้นแบ่งสถานะจะใช้ non-linear, singular, integro-differential equation เพื่อสร้างสมการ superhyperbola ในการประมาณตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะในรูปแบบไร้หน่วยในภาพที่ ก.3b ดังสมการ (ก.18) โดยที่ x^*, y^* คือตัวแปรไร้หน่วยของระยะทางตามแกน x และ y มีค่าเท่ากับ $x/(4\alpha t)^{1/2}$ และ $y/(4\alpha t)^{1/2}$ ตามลำดับ S คือ ตำแหน่งของเส้นแบ่งสถานะ (interface position) ในโดเมน x, y, t ส่วน f คือ ตำแหน่งของเส้น แบ่งสถานะในโดเมน x^*, y^* สัญลักษณ์ λ คือ ค่าคงที่ที่ได้จากการแก้ปัญหาหนึ่งมิติซึ่งคือตำแหน่งเส้นแบ่งสถานะ (stationary interface position) และ x_0^* คือ จุดตัด (intersection) ของเส้น $x^* = y^*$ กับเส้นแบ่งสถานะ (interface curve) ในโดเมน x^*, y^* ส่วน x_1^* คือ ค่า x* ที่สัมพันธ์กับ $f = (x_0^* + \lambda)/2$ สำหรับ Λ คือ ค่าคงที่ไร้หน่วยโดยที่ $f(x^* > \Lambda) \approx \lambda$



(a) ปัญหา 2 มิติ (b) schematic แสดง x_0^* , x_1^* , λ, และ Λ

ภาพที่ ก.3 ปัญหา 2 มิติ และ schematic แสดงตัวแปรไร้หน่วย

$$f(x^*) = \left[\lambda^m + \frac{C}{(x^*)^m - \lambda^m}\right]^{1/m} \qquad (ก.18)$$

โดย $$x^* = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

(ก.19)

m คือ เลขชี้กำลังใน superhyperbola และ C คือ ค่าคงที่ใน superhyperbola = $(x_0^{*m} - \lambda^m)^2$

ในการหาค่า C และ m สามารถทำได้โดยการกำหนดให้

$$f(x_0^*) = x_0^* \qquad (ก.20)$$

และ

$$f(x_1^*) = \frac{x_0^* + \lambda}{2} \qquad (ก.21)$$

สำหรับ x_0^* และ x_1^* หาได้จากวิธีการ trial and error

สมการ (ก.20) และ (ก.21) และสำหรับค่า λ จะขึ้นกับตัวแปรไร้หน่วย B และ T_i^* ดังต่อไปนี้

$$\beta = \frac{L}{c_S(T_F - T_C)} \qquad (ก.22)$$

$$T_i^* = \frac{(T_i - T_F)}{(T_F - T_C)} \qquad (ก.23)$$

โดยตัวแปร λ ในหัวข้อนี้คือตำแหน่งแบ่งสถานะไร้หน่วยใน 1 มิติ (one-dimensional stationary interface position) ซึ่งมีค่าเท่ากับ η_{SL} ในหัวข้อ ก.2 และจากสมการ (ก.17) เมื่อประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีค่า thermal diffusivity ในแต่ละสถานะเท่ากันจะได้สมการในการหา λ ดังนี้

$$-T_i^* \frac{exp(-\lambda^2)}{erfc(\lambda)} + \frac{exp(-\lambda^2)}{erf(\lambda)} - \sqrt{\pi}\,\beta\,\lambda = 0 \qquad (ก.24)$$

สำหรับปัญหาที่มีสมบัติและเงื่อนไขตามที่แสดงในตารางที่ ก.2 จะได้ค่า λ, x_0^*, x_1^*, m, C ตามที่แสดงในตารางที่ ก.2 ภายหลัง

สมการผลเฉลยแม่นตรงในรูปไร้หน่วยคือ

$$\begin{aligned}
T(x^*, y^*) &= -1 + (1 + T_i^*)erf(x^*)erf(y^*) \\
&\quad + \frac{\beta}{2\pi}\sum_{i=1}^{40}\sum_{j=1}^{40}\omega'_i\,\varpi_j\left[f(\eta_j) - \eta_j\frac{df(\eta_j)}{d\eta}\right] \\
&\quad \times [K(\eta_j,\,\tau_i;\,x^*)K(f(\eta_j),\,\tau_i;\,y^*) \\
&\quad + K(f(\eta_j),\,\tau_i;\,x^*)K(\eta_j,\,\tau_i;\,y^*)](1-\tau_i)^{-1} \qquad (ก.25) \\
&\quad + \frac{\beta\lambda}{4\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{40}\omega'_i[K(\lambda,\,\tau_i;\,y^*)E(\tau_i;\,\Lambda;\,x^*) \\
&\quad + K(\lambda,\,\tau_i;\,x^*)E(\tau_i;\,\Lambda;\,y^*)]\tau_i^{-1/2}(1-\tau_i)^{-1/2}
\end{aligned}$$

โดยที่ตัวถ่วงน้ำหนักปรับปรุง (the adjusted weighting factors) ω'_i และ ϖ_j คือ

$$\omega'_i = \left(\frac{0.9 - 0}{2}\right)\omega_i = 0.45\omega_i \qquad i = 1, 2, ..., 20 \qquad (ก.26)$$

$$\omega'_{41-i} = \left(\frac{1.0 - 0.9}{2}\right)\omega_i = 0.05\omega_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 20 \qquad (ก.27)$$

$$\varpi_i = \left(\frac{x_1^* - x_0^*}{2}\right)\omega_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 20 \qquad (ก.28)$$

$$\varpi_{41-i} = \left(\frac{\Lambda - x_1^*}{2}\right)\omega_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 20 \qquad (ก.29)$$

ω_I = weighting factor ได้ถูกกำหนดในตารางที่ ก.1 และ abscissa τ_i and η_j มีค่าดังนี้

$$\tau_i = \left(\frac{0.9 - 0}{2}\right)\xi_i + \left(\frac{0.9 + 0}{2}\right) = 0.45\xi_i + 0.45 \qquad i = 1, 2, \ldots, 20 \qquad (ก.30)$$

$$\tau_{41-i} = \left(\frac{1.0 - 0.9}{2}\right)\xi_i + \left(\frac{1.0 + 0.9}{2}\right) = 0.05\xi_i + 0.95 \qquad i = 1, 2, \ldots, 20 \qquad (ก.31)$$

$$\eta_i = \left(\frac{x_1^* - x_0^*}{2}\right)\xi_i + \left(\frac{x_1^* + x_0^*}{2}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, 20 \qquad (ก.32)$$

$$\eta_{41-i} = \left(\frac{\Lambda - x_1^*}{2}\right)\xi_i + \left(\frac{\Lambda + x_1^*}{2}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, 20 \qquad (ก.33)$$

ξ_i = abscissa ดังแสดงในตารางที่ ก.1และ $f(\eta_j)$ คือ

$$f(\eta_j) = \left[\lambda^m + \frac{C}{\eta_j^{\,m} - \lambda^m}\right]^{1/m} \qquad (ก.34)$$

ตารางที่ ก.1 ค่า abscissa และแฟคเตอร์น้ำหนัก (weighting factor) สำหรับการอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian integration)

$\pm\xi_i$	ω_i
0.0765265	0.1527534
0.2277859	0.1491730
0.3737061	0.1420961
0.5108670	0.1316886
0.6360537	0.1181945
0.7463319	0.1019301
0.8391170	0.0832767
0.9122344	0.0626720
0.9639719	0.0406014
0.9931286	0.0176140

ตารางที่ ก.2 ตัวอย่างสมบัติของสารและตัวแปรที่ได้จากสมบัติที่กำหนด

ค่าการนำความร้อน	$k_L = k_S = 2.220$	[W/mK]
ค่าความหนาแน่น	$\rho_L = \rho_S = 1000$	[kg/m^3]
ค่าความจุความร้อนจำเพาะ	$c_L = c_S = 2.176$	[J/K]
ค่าความร้อนแฝง	$L = 338$	[kJ/kg]
อุณหภูมิเริ่มต้น	$T_i = 10$	[^{o}C]
อุณหภูมิขอบเขต	$T_C = -20$	[^{o}C]
อุณหภูมิเยือกแข็ง	$T_F = 0$	[^{o}C]
	$\lambda = 0.2075$	
	$x_0^* = 0.258$	
	$x_1^* = 0.303$	
	$m = 1.59003$	
	$C = 0.00115$	

ภาคผนวก ข
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสำหรับหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของปัญหาการแข็งตัวของของไหลที่ไหลในท่อกลม

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main() {
    double AlphaL = 0.0000001647,
        AlphaS = 0.00000126,
        SteS = 0.213629,
        SteL = 0.427296,
        uin = 0.001,
        rinner = 0.1,

        Bi = 10.0,
        T = 0.5,
        L = 100.0;
    int NCV = 1000, NTS = 50;
    int i, n;
    double **Rf, **ThetaB;
    double dt = T / NTS, dz = L / NCV;

    FILE *fRf, *fThetaB;
    char filename[1000];

    Rf = (double **) malloc(sizeof(double *) * (NTS + 1));
    ThetaB = (double **) malloc(sizeof(double *) * (NTS + 1));

    for(i = 0; i <= NTS; i++) {
        Rf[i] = (double *) malloc(sizeof(double) * (NCV + 1));
```

```
        ThetaB[i] = (double *) malloc(sizeof(double) * (NCV + 1));
    }

    //initial condition
    for(i = 0; i <= NCV; i++) {
        ThetaB[0][i] = Rf[0][i] = 1.0;
    }

    for(n = 0; n <= NTS; n++) {
        ThetaB[n][0] = Rf[n][0] = 1.0;
    }

    //calculate
    for(n = 1; n <= NTS; n++) {
        for(i = 1; i <= NCV; i++) {
            Rf[n][i] = Rf[n-1][i] + dt/Rf[n-1][i] * (-(Bi * SteS / (1 - Bi * log(Rf[n-1][i]) )) + (1.83
* SteL * AlphaL * ThetaB[n-1][i] / AlphaS) );
            ThetaB[n][i] = ThetaB[n][i-1] - (3.66 * ThetaB[n][i-1] * Rf[n][i-1] * Rf[n][i-1] * dz *
AlphaL / uin / rinner);

            //printf("%lf/%lf\t", Rf[n][i], ThetaB[n][i]);
        }
        //printf("\n");
    }

    // plotting
    // fixed position
    for(i = 0; i <= NCV; i++) {
        sprintf(filename, "pos_rf_%lf.txt", i * dz);
        fRf = fopen(filename, "w");

        sprintf(filename, "pos_thetab_%lf.txt", i * dz);
        fThetaB = fopen(filename, "w");
```

```
    if(fRf != NULL && fThetaB != NULL) {

        for(n = 0; n <= NTS; n++) {
            fprintf(fRf, "%lf\t%lf\n", n * dt, Rf[n][i]);
            fprintf(fThetaB, "%lf\t%lf\n", n * dt, ThetaB[n][i]);
        }

        fclose(fRf);
        fclose(fThetaB);
    }
}

// fixed time
for(n = 0; n <= NTS; n++) {
    sprintf(filename, "time_rf_%lf.txt", n * dt);
    fRf = fopen(filename, "w");

    sprintf(filename, "time_thetab_%lf.txt", n * dt);
    fThetaB = fopen(filename, "w");

    if(fRf != NULL && fThetaB != NULL) {

        for(i = 0; i <= NCV; i++) {
            fprintf(fRf, "%lf\t%lf\n", i * dz, Rf[n][i]);
            fprintf(fThetaB, "%lf\t%lf\n", i * dz, ThetaB[n][i]);
        }

        fclose(fRf);
        fclose(fThetaB);
    }
}
```

```
    for(i = 0; i <= NTS; i++) {
        free(Rf[i]);
        free(ThetaB[i]);
    }

    free(Rf);
    free(ThetaB);
    return 0;
}
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย เทิดธรรม อนันตเศรษฐ เกิดเมื่อวันที่ 26 กรกฎาคม พ.ศ. 2531 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาบัณฑิตจากคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ. 2554 และได้เข้าศึกษาต่อระดับปริญญามหาบัณฑิต หลักสูตรวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีเดียวกัน