บทที่ 3

การวิเคราะห์ตามเวลา โดยวิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง

3.1 วิธีการสติฟเนสโดยตรง (Direct stiffness method)

โดยวิธีสติฟเนสโดยตรง(18,19) สติฟเนสรวมของโครงสร้างทั้งระบบที่เวลา t_i สามารถสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{K}_i = \sum_{l=1}^{nele} \underset{\sim}{k}^l_i \qquad (3.1)$$

เมื่อ $\underset{\sim}{K}_i$ = สติฟเนสรวมทั้งระบบ ที่เวลา t_i

$\underset{\sim}{k}_i$ = $a^T k\, a$, สติฟเนสย่อยของชิ้นส่วน l ในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล ที่เวลา t_i

a = เมตริกซ์แปลงของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement transformation matrix)

$\underset{\sim}{k}_i$ = สติฟเนสย่อยในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว (Local coordinate element stiffness) ที่เวลา t_i (รูปที่ 3.1)

$$= \begin{bmatrix} EA/L & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EA/L & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ 0 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

E เป็น โมดูลัสอีลาสติกของชิ้นส่วน สำหรับคอนกรีต ACI COMMITTEE-209(17) และ 318(20) แนะนำให้ใช้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$E(t) \;=\; E(28)\sqrt{t/(A+Bt)}$$

เมื่อ A,B = ค่าคงที่(ตารางที่ 3.1)

t = อายุของคอนกรีต

สมมุติที่เวลา t_1 มีระบบแรงมากระทำต่อโครงสร้าง สมการสมดุลย์ของทั้งระบบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{K}_1\underset{\sim}{U}_1 \;=\; \underset{\sim}{P}_1 - \underset{\sim}{P}_{o1} \qquad (3.2)$$

เมื่อ $\underset{\sim}{U}_1$ = งการเปลี่ยนตำแหน่งที่เวลา t_1

$\underset{\sim}{P}_1$ = แรงกระทำภายนอกที่ข้อต่อที่เวลา t_1

$\underset{\sim}{P}_{o1}$ = แรงยึดแน่นปลาย ซึ่งรวมทั้งผลของการอัดแรง ที่เวลา t_1

เมื่อได้ระยะการเปลี่ยนตำแหน่ง U_1 โดยการแก้ชุดสมการ (3.2) ก็สามารถคำนวณแรงภายในได้จาก

$$\underset{\sim}{s}_1 \;=\; \underset{\sim}{so}_1 + \underset{\sim}{k}\underset{\sim}{\hat{U}} \qquad (3.3)$$

เมื่อ $\underset{\sim}{s}_1$ = แรงภายในของชิ้นส่วนเนื่องจากแรงกระทำที่เวลา t_1

$\underset{\sim}{so}_1$ = แรงภายในของชิ้นส่วนที่สภาวะยึดแน่น

$\underset{\sim}{U}_1$ = ระยะการเปลี่ยนตำแหน่ง ที่สมนัยกับชิ้นส่วน s_1

3.2 การวิเคราะห์ตามเวลา(Time - dependent analysis)

ค่า $\underset{\sim}{U}_1$ และ $\underset{\sim}{si}$ ที่ได้จากสมการ (3.2) และ (3.3) เป็นแรงภายใน และการ

เปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างเกิดขึ้นทันทีทันใด เมื่อมีระบบแรงมากระทำที่เวลา t_i ถ้าให้ระบบแรงนี้กระทำค้างจนถึงเวลา t_{i+1} ภายใต้ผลของการคืบ การหดตัวของคอนกรีต และการลดเสื่อมของแรงอัด (Loss of prestress) การเปลี่ยนตำแหน่งและแรงภายในของโครงสร้างต้องเปลี่ยนไปดังสมการดังต่อไปนี้

$$\underset{\sim}{U}_{i+1} = \underset{\sim}{U}_i + \Delta \underset{\sim}{U}_{i+1,i} \tag{3.4}$$

$$\underset{\sim}{S}_{i+1} = \underset{\sim}{S}_i + \Delta \underset{\sim}{S}_{i+1,i} \tag{3.5}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{U}_{i+1}$ = การเปลี่ยนตำแหน่ง ที่เวลา t_{i+1}

$\Delta \underset{\sim}{U}_{i+1}$ = โคออร์ดิเนตของการเปลี่ยนตำแหน่ง ที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1}

$\underset{\sim}{S}_{i+1}$ = แรงภายในที่เวลา t_{i+1} นับจากเวลา t_i

ซึ่งค่า $\Delta U_{i+1,i}$, $\Delta S_{i+1,i}$ หาได้โดยพิจารณาว่า ดีกรีของความอิสระในการเคลื่อนที่ (displacement degree of freedom) ถูกยึดรั้งไว้หมดตั้งแต่เวลา t_i จนถึง t_{i+1} ดังนั้นทุกชิ้นส่วนย่อย (ที่มีการคืบ การหดตัว และ การลดเสื่อมของแรงอัด) จะเกิดแรงยึดรั้งสมมุติ (Ficticious restraining fixed end force) ขึ้นมาเขียนรวมทั้งระบบได้เป็น

$$\Delta P_{o\,i+1,i} = \sum_{elem.} [\, \Delta F^{c,s}_{i+1,i} + \Delta F^{loss}_{i+1,i} \,] \tag{3.6}$$

ในเมื่อ $\Delta F^{c,s}_{i+1,i}$ คือ แรงยึดรั้งสมมุติที่ต้องใช้ยึดชิ้นส่วนไว้ในระหว่างช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1} เพื่อไม่ให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจาก การคืบ และการหดตัวของคอนกรีต และ $\Delta F^{loss}_{i+1,i}$ เป็น แรงยึดรั้งที่ขั้วเนื่องจากการลดเสื่อมของแรงอัด (loss of prestress) ในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1}

การคืบที่เกิดขึ้นจากช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1} มีผลจากแรงกระทำ 3 ส่วนคือ

1. แรงกระทำกับโครงสร้างที่เวลา t_i
2. แรงกระทำกับโครงสร้างที่เวลา t_1 , t_2 , ... จนถึงเวลา, t_{i-1}
3. แรงกระทำกับโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (time - dependent forces) อันเป็นผลเนื่องการเปลี่ยนแปลงของแรงในหัวข้อที่ 2 จากเวลา t_1 ถึง t_{i-1}

ค่า $\Delta F^{c,s}_{i+1,i}$ สามารถหาได้โดยหลักการของโมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุด้วยวิธีการดังต่อไปนี้ สมมุติว่าที่เวลา t_i มีแรงกระทำกับโครงสร้าง ทำให้เกิดการกระจายของความเครียด (Strain distribution) บนหน้าตัด (ดังรูป 3.2) เมื่อเวลาผ่านไป Δt ภายใต้ผลการคืบและการหดตัวของคอนกรีต ถ้าชิ้นส่วนสามารถเปลี่ยนรูปได้ตามอิสระจะเกิดการเปลี่ยนแปลงของความเครียด (รูปที่ 3.2) ดังสมการต่อไปนี้

$$\Delta\epsilon^{c,s}_{i+1,i} = \phi_{i+1,i}\,\epsilon_{oi}(y) + \epsilon^{s}_{i+1,i} \tag{3.7}$$

$$\Delta\psi_{i+1,i} = \phi_{i+1,i}\,\psi_i \tag{3.8}$$

เมื่อ $\Delta\epsilon^{c,s}_{i+1,i}$ = ความเครียดที่เปลี่ยนไปเนื่องจากผลของการคืบ และหดตัวของคอนกรีตในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1}

$\epsilon_{oi}(y)$ = ความเครียดที่ระยะ y (วัดจากผิวบนสุด) เนื่องจากแรงกระทำที่เวลา t_i

$\epsilon^{s}_{i+1,i}$ = การหดตัวเนื่องจาก การสูญเสียความชื้น ในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1}

ψ_i = ความโค้ง (curvature) ของหน้าตัดที่เวลา t_i

$\Delta\psi_{i+1,i}$ = ความโค้ง (curvature) ของหน้าตัดที่เปลี่ยนไปเนื่องจาก

ผลของการคืบ ในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1}

$\phi_{i+1,i}$ = สัมประสิทธิ์การคืบในช่วงเวลา i ถึง i+1 ซึ่งเป็นสมการที่ขึ้นกับเวลา (ดูภาคผนวก ก)

การเปลี่ยนแปลงของความเครียดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัด (สมการ 3.7 และ 3.8) ทำให้ระยะยืดหดตัวตามแนวแกน และมุมแอ่นที่ปลายของชิ้นส่วนเปลี่ยนไป ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้หลักการของงานสมมุติ

$$\Delta\theta 1_{i+1,i} = \int_0^l \Delta\psi_{i+1,i}\, m1\, dx \tag{3.9}$$

$$\Delta\theta 2_{i+1,i} = \int_0^l \Delta\psi_{i+1,i}\, m2\, dx \tag{3.10}$$

$$\Delta L_{i+1,i} = \int_0^l \Delta\epsilon^{c,s}_{i+1,i}\, n\, dx \tag{3.11}$$

เมื่อ $\Delta\theta 1_{i+1,i}, \Delta\theta 2_{i+1,i}$ = มุมหมุนที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1} ที่ขั้วทั้งสองของชิ้นส่วนย่อย

$\Delta L_{i+1,i}$ = ระยะยืดหดตัวตามแนวแกนที่เปลี่ยนไป

m1, m2 = โมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากโมเมนต์ 1 หน่วยกระทำที่ขั้วต้นและปลายของชิ้นส่วนย่อยตามลำดับ

n = แรงตามแนวแกนที่เกิดขึ้นเนื่องจาก แรง 1 หน่วยกระทำที่ขั้ว

นั่นก็หมายความว่า ถ้าปล่อยให้ชิ้นส่วนเกิดความเครียด ได้โดยอิสระตั้งแต่เวลา t_i จนถึงเวลา t_{i+1} จะเกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง ดังสมการข้างบน แต่ถ้าการเปลี่ยนตำแหน่งนี้ถูกจำกัด โดยเสมือนว่าที่ปลายชิ้นส่วนย่อยถูกยึดรั้งไว้ตั้งแต่เวลา t_i จนถึงเวลา t_{i+1} แล้วจะเกิดแรงยึดรั้งที่ปลายชิ้นส่วน และค่อย ๆ เพิ่มขึ้นตามเวลา จากศูนย์ที่เวลา t_i จนถึง $\Delta F^{c,s}_{i+1,i}$ (รูปที่ 3.3) ที่เวลา t_{i+1} ซึ่งสามารถหาได้โดยหลักการของโมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุ

จากสมการที่ 2.3 ที่หน้าตัดใด ๆ

$$\Delta\sigma = E''_{i+1,i}[\Delta\epsilon - \Delta\epsilon''] \qquad (3.12)$$

โดยที่ $E''_{i+1,i}$ = โมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1} ซึ่งจะเห็นว่าที่หน้าตัดใดๆในกรณีจำกัดความเครียด (prescribed strain) $\Delta\epsilon = 0$ และ $\Delta\epsilon'' = \phi_{i+1,i}\epsilon_{oi}(y) + \epsilon^{s}_{i+1,i}$ ความเค้นที่เปลี่ยนไปที่เวลาใดๆสัมพันธ์กับความเครียดที่เปลี่ยนไปด้วยค่า E" เมื่อทำการอินทีเกรตหาโมเมนต์เนื่องจากหน่วยแรงที่เปลี่ยนไปที่หน้าตัดจะได้

$$\Delta M = \int \Delta\sigma y dA = -E'' I \Delta\psi_{i+1,i} \qquad (3.13)$$

จะเห็นว่าสูตรที่ (3.13) มีความคล้ายคลึงกับในทฤษฎีอีลาสติก ต่างกันที่ค่า E เปลี่ยนเป็น E" ในกรณีของการคืบ ดังนั้น ปัญหาการคืบสามารถวิเคราะห์ได้ด้วยวิธีอีลาสติกโดยใช้ค่าโมดูลัสเทียบเท่าในแต่ละขั้นตอนการวิเคราะห์ ดังนั้นแรงที่ขั้ว $\Delta F^{c,s}_{i+1,i}$ (มีทิศทางบวกของแรงดังรูป 3.1) สามารถหาได้โดยวิธีงานสมมุติ (Virtual work method) ในทำนองเดียวกับในทฤษฎีอีลาสติก ผลที่ได้คือ

$$\underset{\sim}{\Delta F}^{c,s}_{i+1,i} = \{\Delta N_1, \Delta N_2, \Delta V_1, \Delta M_1, \Delta V_2, \Delta M_2\}^T \qquad (3.14)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M1 \\ \Delta M2 \end{Bmatrix}_{i+1,i} = \frac{E''I}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta 1 \\ \Delta\theta 2 \end{Bmatrix}_{i+1,i} \qquad (3.15)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta V1 \\ \Delta V2 \end{Bmatrix}_{i+1,i} = \frac{[\Delta M1 + \Delta M2]}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad (3.16)$$

$$\Delta N_{i+1,i} = \frac{E'' A \Delta L_{i+1,i}}{L} \qquad (3.17)$$

เมื่อ I = โมเมนต์ของความเฉื่อย (Moment of inertia)

A = พื้นที่หน้าตัด

L = ความยาวของชิ้นส่วน

ค่าแรงที่หาได้จากสมการ 3.15,3.16 และ 3.17 เป็นผลจากชุดของน้ำหนักบรรทุกที่กระทำที่เวลา t_i เท่านั้น ในกรณีที่น้ำหนักบรรทุกกระทำตามขั้นตอน ค่า $\Delta\epsilon$ และ $\Delta\psi$ ที่เวลา t_{i+1} นับจากเวลา t_i เขียนได้ดังนี้

$$\Delta\psi_{i+1,i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{M_j}{IE_j}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta M_j}{IE_j}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) \quad (3.18)$$

$$\Delta\epsilon_{i+1,i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{N_j}{AE_j}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) + \Delta\epsilon s_{i+1,i} \quad (3.19)$$

สำหรับผลการลดเสื่อมของแรงดึงในเหล็กเสริมอัดแรงจะสมมติว่าหน่วยแรงดึงในเส้นลวดที่เวลาใดๆ (รูปที่ 3.4) เป็นตัวที่รู้ค่าโดยคำนวณจากข้อกำหนดที่เกี่ยวข้อง เช่น PCI หรือ AASHTO เป็นต้นทำให้หาค่าแรงลดเสื่อม ΔP ในเหล็กเสริมในแต่ละช่วงเวลาได้ การหาค่าแรงยึดรั้งที่ขั้วเนื่องจากแรงลดเสื่อมนี้กระทำได้ในทำนองเดียวกับปัญหาการคืบ กล่าวคือ ปล่อยให้ชิ้นส่วนเกิดการเสียรูปรวมทั้งการหมุนของปลายชิ้นส่วนได้โดยอิสระด้วยอิทธิพลของแรงลดเสื่อม ΔP แล้วใช้แรงยึดรั้งเพื่อขจัดมุมหมุนที่ปลาย สำหรับในกรณีที่เสริมเหล็กอัดแรงเป็นเส้นตรง มุมหมุนอิสระที่ปลายจะเท่ากับ $\Delta PeL/2EI$ ซึ่งจะต้องใช้แรงยึดรั้งไว้ที่ปลายเท่ากับ $(2E''I/L)*(\Delta PeL/2E''I) = \Delta Pe$ โดยที่ e เป็นระยะเยื้องศูนย์ของเหล็กเสริมอัดแรงจากแนวศูนย์ถ่วงของหน้าตัด

สติฟเนสรวมของโครงสร้างทั้งระบบระหว่างช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1} สามารถสังเคราะห์ได้โดยใช้ค่าโมดูลัสของชิ้นส่วนต่างๆ เป็น ค่าโมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุ ซึ่งหาได้จากสติฟเนสรวมในช่วงอีลาสติกได้ กล่าวคือ

$$\underset{\sim}{K}''_{i+1} = \sum_{l=1}^{nele} \underset{\sim}{k}''_{i+1} \quad (3.20)$$

เมื่อ $\underset{\sim}{k}'' = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{k}'' \underset{\sim}{a}$

และ $\underset{\sim}{k}''_{i+1} = \dfrac{E''_{i+1,i}}{E_i} k$,age - adjusted local element stiffness

เพราะฉะนั้น สมการสมดุลของทั้งระบบในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1} เขียนได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{K}'' \Delta \underset{\sim}{U}_{i+1,i} = -\Delta \underset{\sim}{P}_{o\ i+1,i} \qquad (3.21)$$

เมื่อแก้ชุดสมการ (3.19) จะได้ค่า $\Delta U_{i+1,i}$ แล้วก็สามารถนำมาหาค่าแรงภายในได้ดังสมการข้างล่างนี้

$$\Delta \underset{\sim}{s}_{i+1,i} = \Delta \tilde{F}^{c,s,loss}_{i+1,i} + \underset{\sim}{k}'' \Delta \underset{\sim}{U}_{i+1,i} \qquad (3.22)$$